C OLLECTION
I NTER
A FRICAINE DE
M ATHÉMATIQUES

1re SE

MATHÉMATIQUES

GUIDE PÉDAGOGIQUE

EDICEF

3 COMMENTAIRES SPÉCIFIQUES À LA CLASSE DE PREMIÈRE SE

La classe de première SE a pour objectif de mettre à niveau tous les élèves sortant de seconde S et ayant un niveau insuffisant pour entreprendre des études en classe de première SM mais néanmoins capables, si l'on s'en donne les moyens, de progresser grâce à une façon moins abstraite, plus expérimentale d'aborder les matières scientifiques.

Sans reprendre le programme de la classe de seconde S, le professeur veillera à rappeler rapidement les prérequis de chaque leçon avant de l'aborder. Par ailleurs, le professeur aura recours, le plus souvent possible, à des méthodes expérimentales pour introduire les notions du cours. Il est donc impératif qu'il consulte les professeurs des autres disciplines afin d'instaurer une collaboration fructueuse pour tous.

Dans l'enseignement général du 2^nd^ cycle, la filière SE est celle qui possède le plus grand nombre de matières enseignées, et presque toutes d'égale importance si l'on se réfère à leur volume horaire. De plus, la classe de première SE n'étant pas une classe d'examen, les élèves ont tendance à relâcher leurs efforts. C'est une erreur de jugement car c'est en classe de première SE que l'élève doit acquérir toutes les connaissances de base et se familiariser avec toutes les techniques exigées pour aborder correctement la classe de terminale SE.

Pour réussir dans la filière SE, l'élève doit être organisé, motivé, courageux et méthodique. C'est pour toutes ces raisons que le professeur doit être très attentif au comportement de chacun de ses élèves afin de lui apporter une aide ciblée et efficace. Aussi, dès le début de l'année, le professeur doit imaginer une stratégie pour motiver ses élèves et leur procurer le désir de travailler. Ses efforts doivent porter essentiellement sur les points suivants.

❶ *L'importance du travail personnel* ; le professeur doit apprendre à l'élève à apprendre, c'est-à-dire lui apprendre à :
- *s'organiser dans son travail ;*
- *se servir de son livre, de sa calculatrice ;*
- *compléter ou rédiger des fiches résumés et des fiches méthodes ;*
- *mémoriser ses outils mathématiques ;*
- *résoudre des problèmes* (rechercher les stratégies de résolution et rédiger la solution).

❷ *L'organisation d'une entraide entre les élèves de l'établissement.*

❸ *L'existence de bonnes conditions de travail personnel après le cours* (à la maison ou dans un internat).

❹ *La participation à des activités motivantes et stimulantes pour un comportement scientifique* (club mathématique, de jeux tactiques, de réalisation de solides usuels…)

Proposition d'horaire

Chapitre	Titre	Volume horaire
Ch. 1	Représentations graphiques des fonctions	6 h
Ch. 2	Systèmes d'équations et d'inéquations	10 h
Ch. 3	Équations et inéquations du second degré	6 h
Ch. 4	Fonctions	10 h
Ch. 5	Limites – Continuité	10 h
Ch. 6	Dérivation	8 h
Ch. 7	Extension de la notion de limite	4 h
Ch. 8	Étude de fonctions	6 h
Ch. 9	Suites numériques	8 h
Ch. 10	Trigonométrie	10 h
Ch. 11	Vecteurs et configurations	6 h
Ch. 12	Transformations du plan	10 h
Ch. 13	Orthogonalité dans l'espace	8 h
Ch. 14	Dénombrement	10 h
Ch. 15	Statistiques	12 h
	Total	124 h

4 ANALYSE DES CHAPITRES

1. Représentations graphiques des fonctions

(pages 7 à 24 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :
- faire le point sur les fonctions de référence introduites dans le premier cycle et en classe de seconde S ;
- donner à l'élève la possibilité de construire les représentations graphiques de ces fonctions ;
- donner à l'élève la possibilité de construire les représentations graphiques de certaines fonctions sans étude analytique préalable.

COMMENTAIRES

Les représentations graphiques des fonctions élémentaires constituent, en analyse, les configurations de base que l'élève doit reconnaître et savoir construire. C'est à partir d'elles qu'il pourra utiliser des translations ou des symétries pour construire certaines représentations graphiques simples.
Aussi, dès le début de l'année scolaire, l'élève pourra entreprendre des études graphiques en mathématiques et dans d'autres disciplines.
L'utilisation des graphiques devrait avoir une part très importante dans la formation scientifique de l'élève. En effet, une étude graphique apporte une première approximation des résultats. Cependant, lorsque des résultats plus précis sont attendus, l'étude graphique permet à l'élève de mieux organiser une résolution algébrique ou d'améliorer cette approximation par des encadrements de plus en plus fins (méthode du balayage avec une calculatrice programmable ou par dichotomie).

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Représentations graphiques de fonctions de référence	• Reconnaître et construire les représentations graphiques des fonctions de référence.
Représentations graphiques de fonctions et transformation du plan • Propriété fondamentale Image d'une représentation graphique de fonction par translation. • Vocabulaire Parabole – hyperbole. • Propriétés – Formes canoniques : d'une fonction polynôme du 2^{nd} degré ; d'une fonction homographique. – Représentation graphique d'une fonction polynôme comme translaté d'une parabole simple. – Représentation graphique d'une fonction homographique comme translaté d'une hyperbole simple.	• Écrire la caractérisation d'une translation. • Écrire sous forme canonique : une fonction polynôme du 2^{nd} degré ; une fonction homographique. • Construire point par point : la parabole : $(\mathcal{P}_a)$ $y = ax^2$; l'hyperbole : $(\mathcal{H}_k)$ $y = \dfrac{k}{x}$. • Construire à partir de $(\mathcal{P}_a)$ la parabole : $(\mathcal{P})$ $y = ax^2 + bx + c$. • Construire à partir de $(\mathcal{H}_k)$ l'hyperbole : $(\mathcal{H})$ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

savoirs

Représentations graphiques de fonctions et symétrie

- Propriété fondamentale
- Image de la représentation graphique des fonctions :

$x \mapsto -f(x)$
$x \mapsto f(-x)$
$x \mapsto -f(-x)$

Propriétés géométriques des représentations graphiques de fonctions

- Définitions
- Fonction paire.
- Fonction impaire.
- Fonction périodique.

- Propriétés
- Caractérisation d'une fonction paire.
- Caractérisation d'une fonction impaire.

- Utiliser $(\mathscr{C}_f)$ représentation graphique de la fonction f, pour construire celle de :

$x \mapsto -f(x)$
$x \mapsto f(-x)$
$x \mapsto -f(-x)$

- Justifier qu'une fonction est paire, impaire ou périodique.
- Utiliser la fiche méthode pour justifier que :
- une droite est un axe de symétrie d'une courbe ;
- un point est un centre de symétrie d'une courbe.

Exercices d'application directe

♦ Exercice 2.a page 13

On donne la droite (D) : $3x + 2y = 1$ $\left((D) : y = \dfrac{-3x+1}{2}\right)$.

(D) est la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{-3x+1}{2}$.

On veut trouver une équation de la droite (D'), image de (D) par la translation de vecteur $\vec{u}$ ($\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$) dans chacun des cas suivants.

Désignons par g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ayant pour représentation graphique (D'). g est définie par : $g(x) = f(x - \alpha) + \beta$.

(1) $\vec{u} = -2\vec{i}$

$g(x) = f(x - (-2)) + 0$

$g(x) = f(x + 2)$

$g(x) = \dfrac{-3x-5}{2}$

(D') : $y = \dfrac{-3x-5}{2}$

(2) $\vec{u} = 3\vec{j}$

$g(x) = f(x - 0) + 3$

$g(x) = \dfrac{-3x+7}{2}$

(D') : $y = \dfrac{-3x+7}{2}$

(3) $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$

$g(x) = f(x - 1) - 2$

$g(x) = \dfrac{-3x}{2}$

(D') : $y = \dfrac{-3x}{2}$

♦ Exercice 2.b page 13

(1) $\vec{u} = -3\vec{i}$

$g(x) = f(x - (-3)) + 0$

$g(x) = \dfrac{1}{x+3}$

(2) $\vec{u} = -3\vec{j}$

$g(x) = f(x - 1) + 2$

$g(x) = \dfrac{1}{x} - 2$

$g(x) = \dfrac{-2x+1}{x}$

(3) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$

$g(x) = f(x - 1) + 2$

$g(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2$

$g(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$

♦ Exercice 2.c page 13

$(\mathscr{C}_f)$ est la représentation graphique de

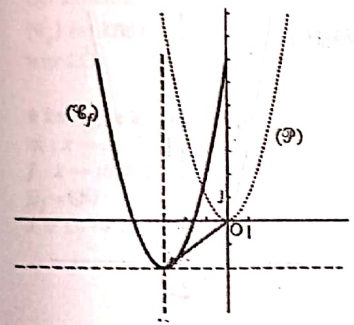
$$f : x \mapsto x^2 + 6x + 7$$

$D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = (x+3)^2 - 3^2 + 7$

$f(x) = (x+3)^2 - 2$

$(\mathscr{C}_f)$ est l'image par la translation de vecteur $-3\vec{i} - 2\vec{j}$ de la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation : $y = x^2$.



$(\mathscr{C}_f)$ est la représentation graphique de

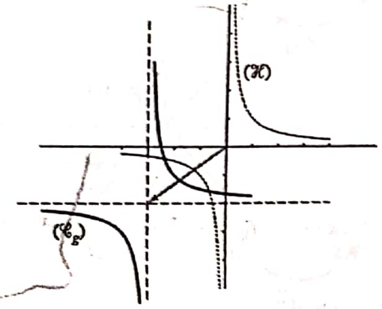
$$g : x \mapsto \frac{-2x-5}{x+3}$$

$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$g(x) = \dfrac{-2(x+3)+6-5}{x+3}$

$g(x) = \dfrac{1}{x+3} - 2$

$(\mathscr{C}_g)$ est l'image par la translation de vecteur $-3\vec{i} - 2\vec{j}$ de l'hyperbole $(\mathscr{H})$ d'équation : $y = \dfrac{1}{x}$.



♦ **Exercice 2.d page 13**

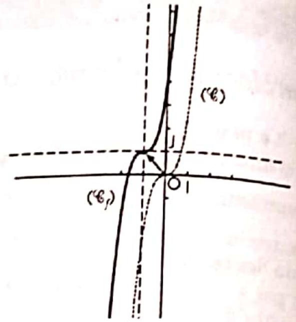
$(\mathscr{C}_f)$ est la représentation graphique de :

$$f : x \mapsto (x+1)^3 + 1$$

$f(x) = (x+1)^3 + 1$

$f(x) = (x - (-1))^3 + 1$

$(\mathscr{C}_f)$ est l'image par la translation de vecteur $-\vec{i}+\vec{j}$ de la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $y = x^3$.

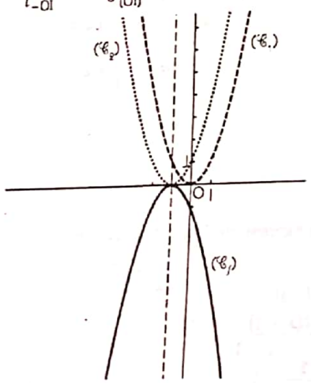


♦ **Exercice 2.f page 15**

(O ; I ; J) est le repère du plan.

• f_1, f_2, f sont les fonctions définies par :
$f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = f_1(x+1)$; $f(x) = -f_2(x)$.
Leurs représentations graphiques respectives $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_f)$ sont donc telles que :

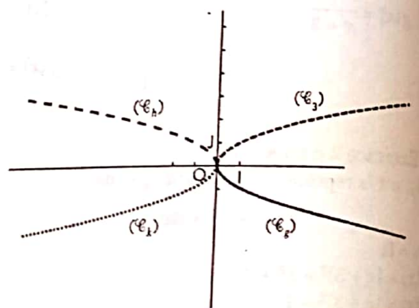
$$(\mathscr{C}_1) \xrightarrow{t_{-\vec{OI}}} (\mathscr{C}_2) \xrightarrow{\mathcal{S}_{(OI)}} (\mathscr{C}_f)$$



• f_3, g, h, k sont les fonctions définies par :
$f_3(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = -\sqrt{x}$;
$h(x) = \sqrt{-x}$; $k(x) = -\sqrt{-x}$.
Leurs représentations graphiques respectives $(\mathscr{C}_3)$, $(\mathscr{C}_g)$, $(\mathscr{C}_h)$, $(\mathscr{C}_k)$ sont telles que :

$$(\mathscr{C}_3) \xrightarrow{\mathcal{S}_{(OI)}} (\mathscr{C}_g)$$

$$(\mathscr{C}_3) \xrightarrow{\mathcal{S}_{(OJ)}} (\mathscr{C}_h) \xrightarrow{\mathcal{S}_{(OI)}} (\mathscr{C}_k)$$

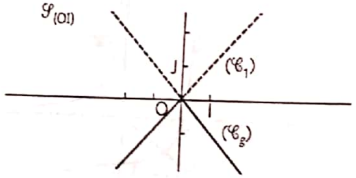


♦ **Exercice 2.g page 15**

(O ; I ; J) est le repère du plan.

• $g_1 : x \mapsto |x|$; $g : x \mapsto -|x|$

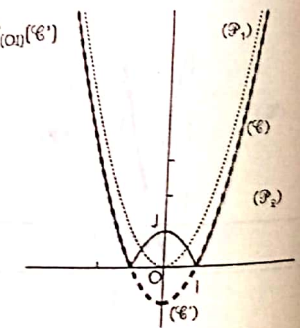
$$(\mathscr{C}_1) \xrightarrow{\mathcal{S}_{(OI)}} (\mathscr{C}_g)$$



• $f_1 : x \mapsto x^2$; $f_2 : x \mapsto x^2 - 1$; $f : \mapsto |x^2 - 1|$
$(\mathscr{P}_1) \xrightarrow{t = -\vec{OJ}} (\mathscr{P}_2)$ $\quad (\mathscr{C}_f)$

Notons $(\mathscr{C})$ l'ensemble des points de la parabole $(\mathscr{P}_2)$ dont les ordonnées sont positives, $(\mathscr{C}')$ l'ensemble des points de $(\mathscr{P}_2)$ dont les ordonnées sont négatives.

$(\mathscr{C}_f) = (\mathscr{C}) \cup \mathcal{S}_{(OI)}(\mathscr{C}')$



♦ **Exercice 3.a page 17**

① $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$
$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
$f(-x) = f(x)$
f est donc une fonction paire.

② $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
$D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$x \in D_g \Rightarrow -x \in D_g$
$f(-x) = -f(x)$
f est donc une fonction impaire.

③ $h : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|}$
$D_h = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
$1 \in D_h$ et $-1 \notin D_h$,
donc la fonction h n'est ni paire, ni impaire.

④ $k : x \mapsto 3x^2 - 1 + \dfrac{x}{x^2+1}$
$D_k = \mathbb{R}$
$k(-1) = \dfrac{3}{2}$ et $k(1) = \dfrac{5}{2}$,
donc la fonction k n'est ni paire, ni impaire.

♦ **Exercice 3.b page 17**

① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto 5x^2 - (a+1)x + 3$
$D_f = \mathbb{R}$
x étant un nombre réel quelconque,
$f(x) = 5x^2 - (a+1)x + 3$
$f(-x) = 5x^2 + (a+1)x + 3$
$f(x) = f(-x) \Leftrightarrow a + 1 = 0$
Donc f est paire si $a = -1$.

② $g : [b\,;7] \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2-1}$
$D_g = [b\,;7]\setminus\{-1\,;1\}$
• Pour que g soit impaire, il faut que $[b\,;7]$ soit un intervalle symétrique par rapport à O ; il faut donc que : $b = -7$.
• x étant un élément de $[-7\,;7] - \{-1\,;1\}$, on a : $g(-x) = -g(x)$.
Donc g est impaire si $b = -7$.

♦ **Exercice 3.c page 19**

$f : x \mapsto x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2$
$D_f = \mathbb{R}$
• $(\mathscr{C}_f)$ semble avoir un axe de symétrie, la droite (Δ) d'équation $x = 1$.
• Démontrons que (Δ) est bien un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.
Considérons la fonction $g : x \mapsto f(x+1)$.

$(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{IO}$.

$$g(x) = f(x+1) = x^4 + 1.$$

[On pourrait remarquer que $f(x) = (x-1)^4 + 1$.]
On vérifie que g est bien une fonction paire.
(OJ) est donc un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$, par suite (Δ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

♦ **Exercice 3.d page 20**

$f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x + 2$
$D_f = \mathbb{R}$
• $(\mathscr{C}_f)$ semble avoir un centre de symétrie, le point $\Omega(1\,;2)$.
• Démontrons que Ω est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.
Considérons la fonction $g : x \mapsto f(x+1) - 2$.
$(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{\Omega O}$.

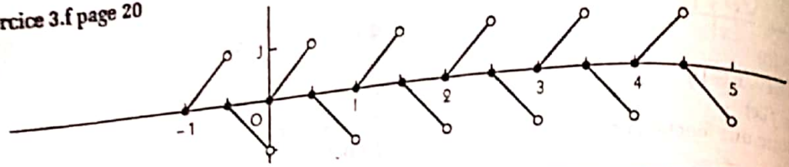
$g(x) = f(x+1) - 2$
$\quad = x^3 - x.$
[On pourrait remarquer que : $f(x) = (x-1)^3 - x + 3$.]
On vérifie que g est bien une fonction impaire.
Le point O est donc un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$, par suite le point Ω est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

♦ **Exercice 3.e page 20**

$m : x \mapsto x - \mathrm{E}(x)$
$f : x \mapsto m(2x)$
$D_f = \mathbb{R}$
$x \in D_f \Rightarrow x + \dfrac{1}{2} \in D_f$

$f(x + \frac{1}{2}) = m(2x+1)$
$\quad = 2x + 1 - \mathrm{E}(2x+1)$
$\quad = 2x + 1 - [\mathrm{E}(x) + 1]$
$\quad = m(2x) = f(x).$
$\dfrac{1}{2}$ est donc une période de f.

♦ **Exercice 3.f page 20**



Exercices d'apprentissage

♦ **Exercice 1 page 22**

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 2 \end{cases}$

♦ **Exercice 2 page 22**

Caractérisation analytique de t :

$M' = t(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{OI} - 5\overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 5 \end{cases}$

a) $t(A) = A'(1 ; -3)$
$t(B) = B'(4 ; -8)$
$t(C) = C'(3 ; -2)$
$t(D) = D'(0 ; -6)$

b) $t(A'') = A ; A''(-3 ; 7)$
$t(B'') = B ; B''(0 ; 2)$
$t(C'') = C ; C''(-1 ; 8)$
$t(D'') = D ; D''(-4 ; 4)$

c) K milieu de [AB] ; L milieu de [CD].

$K(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2})$; $L(-\frac{1}{2} ; 1)$.

La translation qui applique K sur L a pour vecteur $\overrightarrow{KL}$; $\overrightarrow{KL}(-1 ; \frac{3}{2})$.

♦ **Exercice 3 page 22**

Caractérisation analytique de t :

$M' = t(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$ ①

a) $(\Delta') = t(\Delta)$; $(\Delta) : y = 3x - 2$

et, en tenant compte de ①, on obtient :

$M' \in (\Delta') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = (3x - 2) + 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = 3x + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y' = 3(x'+1) + 1$

$\Leftrightarrow y' = 3x' + 4$

donc $(\Delta') : y = 3x + 4$.

b) $(\Delta) = t(\Delta'')$; $(\Delta) : y = 3x - 2$

et en tenant compte de ① on obtient :

$M'' \in (\Delta'') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'' - 1 \\ 3x - 2 = y'' + 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 3(x'' - 1) - 2 = y'' + 3$

$\Leftrightarrow y'' = 3x'' - 8$

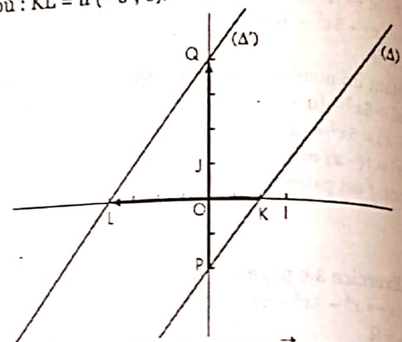
donc $(\Delta'') : y = 3x - 8$.

c) t_1 est la translation de vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{OI}$, qui applique (Δ) sur (Δ').

On a donc $\vec{u} = \overrightarrow{KL}$, K est le point de (Δ) d'ordonnée 0, L est le point de (Δ') d'ordonnée 0.

$K(\frac{2}{3} ; 0)$; $L(-\frac{4}{3} ; 0)$

d'où : $\overrightarrow{KL} = \vec{u}(-5 ; 0)$.



d) t_2 est la translation de vecteur $\vec{v}$ colinaire à $\overrightarrow{OJ}$, qui applique (Δ) sur (Δ').

On a donc $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$,

P est le point de (Δ) d'abscisse 0,

Q est le point de (Δ') d'abscisse 0.

$P(0 ; -2)$; $Q(0 ; 4)$ d'où : $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}(0 ; 6)$.

♦ **Exercice 4 page 22**

t a pour vecteur $\overrightarrow{AB}(-2 ; -1)$.

La fonction g est définie par :

$g(x) = f(x - (-2)) + (-1)$

$g(x) = 2x$.

♦ **Exercice 5 page 22**

t a pour vecteur $\overrightarrow{AB}(5 ; 2)$.

La fonction g est définie par :

$g(x) = f(x - 5) + 2$.

a) $f(x) = 4x^2 - 5x$; $g(x) = 4x^2 - 45x + 127$

b) $f(x) = x^3 - 1$; $g(x) = x^3 - 15x^2 + 75x - 124$

c) $f(x) = \frac{21}{5x}$; $g(x) = \frac{10x - 29}{5x - 25}$

d) $f(x) = \frac{21x^2 - 3x}{2 - x}$; $g(x) = \frac{21x^2 - 213x + 540}{7 - x}$

♦ **Exercice 6 page 22**

a) $f(x) = (x - 1)^2 + 6$

b) $f(x) = (x + 2)^2 - 7$

c) $f(x) = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$

d) $f(x) = -5(x + \frac{1}{3})^2 + 7$

e) $f(x) = 3(x + \frac{4}{3})^2 - \frac{19}{3}$

f) $f(x) = 7(\frac{x + 1}{14})^2 - \frac{113}{28}$.

♦ **Exercice 7 page 22**

$(\mathscr{C}_g) = t_{\vec{u}}(\mathscr{C}_f)$

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 - 2x + 3$

On a : $g(x) = (x - 1)^2 + 2$

$g(x) = f(x - 1) + 2$

d'où : $\vec{u}(1 ; 2)$.

b) $f(x) = 2x^2$; $g(x) = x^2 - 2x + 3$

On a : $g(x) = 2(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{11}{2}$

$g(x) = f(x - \frac{5}{2}) - \frac{11}{2}$

d'où : $\vec{u}(-\frac{5}{2} ; -\frac{11}{2})$.

c) $f(x) = -\frac{2}{3}$; $g(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x - \frac{3}{4}$

On a : $g(x) = -\frac{2}{3}(x - \frac{3}{4})^2 - \frac{3}{8}$

$g(x) = f(x - \frac{3}{4}) - \frac{3}{8}$

d'où : $\vec{u}(\frac{3}{4} ; -\frac{3}{8})$.

♦ **Exercice 8 page 22**

a) $f(x) = \frac{\frac{5}{2}}{x + \frac{3}{2}} - 17$

b) $f(x) = \frac{5}{x + 2} + 3$

c) $f(x) = \frac{1}{x + 2} + 3$

d) $f(x) = \frac{-\frac{5}{3}}{x + \frac{2}{3}} + 2$

e) $f(x) = \frac{-\frac{5}{4}}{x + \frac{1}{2}} + \frac{5}{2}$

f) $f(x) = \frac{-\frac{5}{9}}{x - \frac{2}{3}} + \frac{2}{3}$

♦ **Exercice 9 page 22**

$(\mathscr{C}_f) = t_{\vec{u}}(\mathscr{C}_g)$

$f(x) = \frac{3x + 5}{2x + 1}$; $g(x) = -\frac{13}{4x}$

$f(x) = \frac{3(x + \frac{1}{2}) - 5 - \frac{3}{2}}{2(x + \frac{1}{2})}$

$f(x) = \frac{-13}{4(x + \frac{1}{2})} + \frac{3}{4}$

$f(x) = g(x + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4}$

d'où : $\vec{u}(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{4})$.

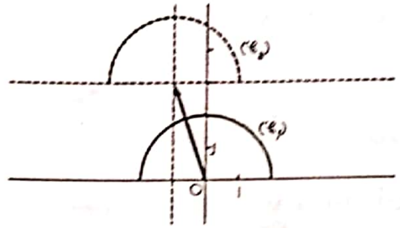
♦ **Exercice 10 page 22**

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; $g(x) = 3 + \sqrt{3 - x^2 - 2x}$

on a : $g(x) = 3 + \sqrt{4 - (x + 1)^2}$

$g(x) = 3 + f(x + 1)$

d'où : $(\mathscr{C}_g) = t_{\vec{u}}(\mathscr{C}_f)$; $\vec{u}(-1 ; 3)$.



♦ **Exercice 11 page 22**

$A(-3 ; 1)$; $M(x ; y)$; $M'(x' ; y')$

A milieu de [MM'] $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x + x'}{2} = -3 \\ \frac{y + y'}{2} = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x - 6 \\ y' = -y + 2 \end{cases}$

♦ **Exercice 12 page 23**

a) $M' = S_O(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

$S_O(A) = A'(3 ; -2)$ $S_O(B) = B'(-4 ; -2)$

$S_O(C) = C'(3 ; -11)$ $S_O(D) = D'(2 ; 1)$

b) $M'' = S_A(M) \Leftrightarrow$ A milieu de [MM'']

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -x - 6 \\ y'' = -y + 4 \end{cases}$

$S_A(O) = O''(-6 ; 4)$ $S_A(B) = B''(-10 ; 2)$

$S_A(C) = C''(3 ; -7)$ $S_A(D) = D''(-4 ; 5)$

c) $M = S_B(M_1) \Leftrightarrow$ B milieu de $[MM_1]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x + 8 \\ y_1 = -y + 4 \end{cases}$

$O = S_B(O_1)$; $O_1(8 ; 4)$

$A = S_B(A_1)$; $A_1(11 ; 2)$

$C = S_B(C_1)$; $C_1(11 ; -7)$

$D = S_B(D_1)$; $D_1(10 ; 5)$

♦ Exercice 13 page 23

$f : M(x ; y) \mapsto M'(x' ; y')$

tel que : $\begin{cases} x' = -3 - x \\ y' = 12 - y \end{cases}$

Ou encore : $\begin{cases} \dfrac{x' + x}{2} = -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{y' + y}{2} = 6 \end{cases}$

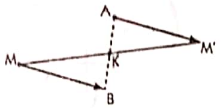
Le point $\Omega(-\frac{3}{2} ; 6)$ est le milieu de [MM'].

f est la symétrie de centre Ω.

♦ Exercice 14 page 23

$f : M(x ; y) \mapsto M'(x' ; y')$

tel que : $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{MB}$



$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow$ [MM'] et [AB] ont le même milieu K(6 ; – 3),

donc f est la symétrie de centre K.

♦ Exercice 15 page 23

$M' = S_A(M) \Leftrightarrow$ A milieu de [MM']

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x - 2 \\ y' = -y + 4 \end{cases}$ ①

$(\Delta') = S_A(\Delta)$; $(\Delta) : y = 2x - 3$

et en tenant compte de ①, on obtient :

$M' \in (\Delta') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x - 2 \\ y' = -(2x - 3) + 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x - 2 \\ y' = -2x + 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y' = 2x' + 11$

Donc $(\Delta') : y = 2x + 11$.

t_1 est la translation de vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{OI}$ qui applique (Δ) sur (Δ').

On a donc $\vec{u} = \overrightarrow{KL}$.

K est le point de (Δ) d'ordonnée 0, L est le point de (Δ') d'ordonnée 0.

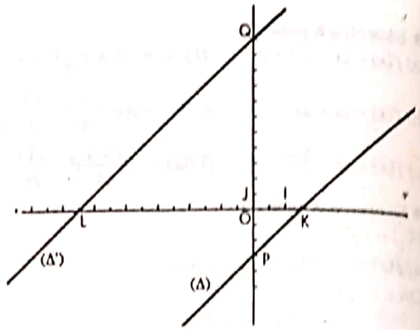
$K(\frac{3}{2} ; 0)$; $L(-\frac{11}{2} ; 0)$ d'où : $\overrightarrow{KL} = \vec{u}(-7 ; 0)$.

t_2 est la translation de vecteur $\vec{v}$ colinéaire à $\overrightarrow{OJ}$ qui applique (Δ) sur (Δ'). On a donc $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.

P est le point de (Δ) d'abscisse 0,

Q est le point de (Δ') d'abscisse 0.

$P(0 ; -3)$; $Q(0 ; 11)$ d'où : $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}(0 ; 14)$.



♦ Exercice 16 page 23

$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 6 - x \end{cases}$ ①

$(\mathscr{C}')$ est la courbe décrite par M' lorsque M décrit la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $y = x^3 - 4x$,

et en tenant compte de ①, on obtient :

$M' \in (\mathscr{C}') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 6 - (x^3 - 4x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow y' = 6 - (2 - x')^3 + 4(2 - x')$

$\Leftrightarrow y' = x'^3 - 6x'^2 + 8x + 6$

Donc $(\mathscr{C}') : y = x^3 - 6x^2 + 8x + 6$.

♦ Exercice 17 page 23

$(\mathscr{C}')$ est la courbe décrite par M' lorsque M décrit la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

a) $M' = S_A(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 4 \\ y' = -y - 2 \end{cases}$

$M' \in (\mathscr{C}') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 4 \\ y' = -\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 1} - 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y' = -\dfrac{x'^2 - 6x' + 10}{3 - x'}$

Donc $(\mathscr{C}')$: $y = \dfrac{x^2 - 6x + 10}{x - 3}$.

b) $M' = S_A(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y - 8 \end{cases}$

$M' \in (\mathscr{C}') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -(x^3 - 6x + 12x - 8) - 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y' = x'^3 - 8$

Donc $(\mathscr{C}') : y = x^3 - 8$.

c) $M' = S_A(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y + 4 \end{cases}$

$M' \in (\mathscr{C}') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -\dfrac{x - 4}{3x + 4} + 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y' = \dfrac{11x' - 44}{3x' - 10}$

Donc $(\mathscr{C}')$: $y = \dfrac{11x - 44}{3x - 10}$.

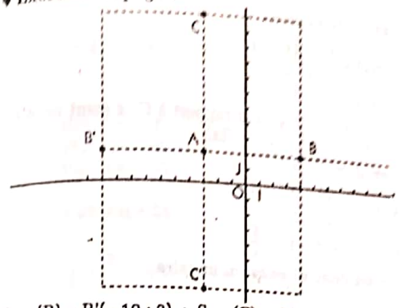
a) $M' = S_A(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y + 2 \end{cases}$

$M' \in (\mathscr{C}') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -(x^2 - \dfrac{1}{x - 1}) + 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y' = -x'^2 + 4x' - 2 + \dfrac{1}{1 - x'}$

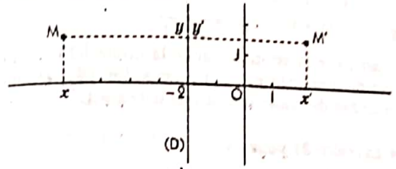
Donc $(\mathscr{C}')$: $y = -x^2 + 4x - 2 + \dfrac{1}{1 - x'}$

♦ Exercice 18 page 23



$S_{(AC)}(B) = B'(-10 ; 2)$; $S_{(AB)}(C) = C(-3 ; -7)$.

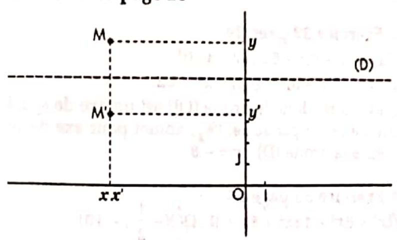
♦ Exercice 19 page 23



$M' = S_{(D)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x' + x}{2} = -2 \\ y' = y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x - 4 \\ y' = y \end{cases}$

♦ Exercice 20 page 23



$M' = S_{(D)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ \dfrac{y' + y}{2} = 5 \end{cases}$

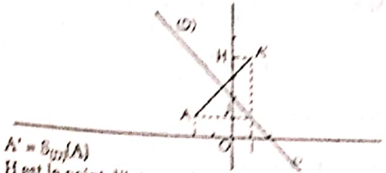
$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 10 \end{cases}$

♦ Exercice 21 page 23

$(AB) : x = 2$ (voir exercice 19)

$M' = S_{(AB)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 4 \\ y' = y \end{cases}$

♦ Exercice 22 page 23



$A' = S_{(D)}(A)$

H est le point d'intersection de (D) et (AA').

• Équation de (AA')

Le vecteur directeur de (D) est $\vec{v}(1 ; -1)$.

$M \in (AA') \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{v}$

$\Leftrightarrow y = x + 2$

Les coordonnées de H sont solutions du système :

$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 3 \end{cases}$

d'où : $H(-\frac{1}{2} ; \frac{5}{2})$

• H est le milieu de [AA']

$\begin{cases} \dfrac{-2 + x'}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1 + y'}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

d'où : $x' = 1$; $y' = 4$; A'(1 ; 4)

♦ Exercice 23 page 23

Caractérisation analytique de $S_{(D)}$.

• $(D) : x = a$; $\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y \end{cases}$

• $(D) : y = b$; $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2b \end{cases}$

a) $(D) : x = 0$ et $f(x) = 4x^2 - 5x$

$M' = S_{(D)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

$M' \in S_{(D)}(\mathscr{C}_f) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = 4x^2 - 5x \end{cases}$

$\Leftrightarrow y' = 4x'^2 + 5x'$

$S_{(D)}(\mathscr{C}_f) : y = 4x^2 + 5x$

b) $(D) : y = 3$ et $f(x) + x^3 - 4x$

$M' = S_{(D)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 6 \end{cases}$

$M' \in S_{(D)}(\mathscr{C}_f) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -(x^3 - 4x) + 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y' = -x'^3 + 4x' + 6$

$S_{(D)}(\mathscr{C}_f) : y = -x^3 + 4x + 6$

c) (D) : $x = 2$ et $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$

$M' = S_{(D)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 4 \\ y' = y \end{cases}$

$M' \in S_{(D)}(\mathscr{C}_f) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 4 \\ y' = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow y' = \dfrac{(x' - 2)^2}{3 - x'}$

$S_{(D)}(\mathscr{C}_f) : y = \dfrac{(x - 2)^2}{3 - x}$

d) (D) : $x = 1$ et $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

$M' = S_{(D)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = y \end{cases}$

$M' \in S_{(D)}(\mathscr{C}_f) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y' = -x'^3$

$S_{(D)}(\mathscr{C}_f) : y = -x^3$

♦ Exercice 24 page 23

$(\mathscr{C}_g)$ est le symétrique de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (OI).

$(\mathscr{C}_h)$ est le symétrique de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (OJ).

$(\mathscr{C}_k)$ est le symétrique de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à O.

$(\mathscr{C}_1)$ étant l'ensemble des points de $(\mathscr{C}_f)$ d'ordonnées positives, $(\mathscr{C}_2)$ l'ensemble des points de $(\mathscr{C}_f)$ d'ordonnées négatives, $(\mathscr{C}_l) = (\mathscr{C}_1) \cup S_{(OI)}(\mathscr{C}_2)$.

♦ Exercices 25, 26, 27 pages 23 et 24

(Voir exercice 24 page 23.)

♦ Exercice 28 page 23

• $f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

$(\mathscr{C}_f)$ est l'image par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{OI} - \frac{1}{4}\vec{OJ}$ de la parabole d'équation $y = x^2$.

• $g(x) = |f(x)|$.

$(\mathscr{C}_1)$ (resp. $(\mathscr{C}_2)$) étant l'ensemble des points de $(\mathscr{C}_f)$ d'ordonnées positives (resp. négatives),

$(\mathscr{C}_g) = (\mathscr{C}_1) \cup S_{(OI)}(\mathscr{C}_2)$.

• $h(x) = g(x) - 2$

$(\mathscr{C}_h)$ est l'image de $(\mathscr{C}_g)$ par la translation de vecteur $-2\vec{OJ}$.

♦ Exercice 29 page 24

a) $f(x) = 8x^2 + x$

$f(-1) = 7$ et $f(1) = 9$;

f n'est ni paire ni impaire.

b) $f(x) = 5x^3 - x$; $D_f = \mathbb{R}$

x étant un nombre réel, $f(-x) = -f(x)$.

f est donc impaire.

c) $f(x) = -2x^4 - 3x^2 + 6$;

f est donc paire.

d) $f(x) = -x^3 + 6x$;

f est donc impaire.

e) $f(x) = 7x^9 + 2x^2 - x$

$f(-1) = 4$ et $f(1) = 8$;

f n'est ni paire, ni impaire.

f) $f(x) = \dfrac{5x^3 - x}{x^2 + 2}$;

f est donc impaire.

g) $f(x) = \dfrac{x^6 + 2x^2 - 1}{x^3 - x}$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 0 ; 1\}$

D_f est symétrique par rapport à O. x étant un élément de D_f, $f(-x) = -f(x)$.

f est donc impaire.

h) $f(x) = \dfrac{x^3 + 6}{x^2 + 6}$

$f(1) = 1$ et $f(-1) = \frac{5}{7}$.

f n'est donc ni paire, ni impaire.

♦ Exercice 30 page 24

$f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 2x + 2}$; $\vec{AO}(-1 ; 0)$

$g : x \mapsto f(x + 1)$; $g(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$.

g est paire (à vérifier) ; donc la droite (OJ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$; par suite, $(\mathscr{C}_g)$ admet pour axe de symétrie la droite (D) : $x = 1$.

♦ Exercice 31 page 24

$f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 2}{2x^2 + 12x + 9}$; $\vec{AO}(3 ; 0)$

$g : x \mapsto f(x - 3)$; $g(x) = \dfrac{x^2 - 7}{2x^2 - 9}$.

g est paire (à vérifier) ; donc la droite (OJ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$; par suite, $(\mathscr{C}_g)$ admet pour axe de symétrie la droite (D) : $x = -3$.

♦ Exercice 32 page 24

$f(x) = (x + 8)^2 - 62$; $\vec{AO}(8 ; 0)$

$g : x \mapsto f(x - 8)$; $g(x) = x^2 - 62$.

g est paire, donc la droite (OJ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$; par suite, $(\mathscr{C}_g)$ admet pour axe de symétrie la droite (D) : $x = -8$.

♦ Exercice 33 page 24

$f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x + 9$; $\vec{\Omega O}(-\frac{1}{2} ; -10)$

$g : x \mapsto f(x + \frac{1}{2}) - 10$; $g(x) = 8x^3$.

g est impaire. Donc le point O est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$; par suite, $(\mathscr{C}_g)$ admet pour centre de symétrie le point $\Omega(\frac{1}{2} ; 10)$.

♦ Exercice 34 page 24

$f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x + 7}{x^2 - 2x - 3}$; $\vec{\Omega O}(-1 ; 2)$

$g : x \mapsto f(x + 1) + 2$; $g(x) = \dfrac{-x}{x^2 - 4}$.

g est impaire, donc le point O est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$; par suite, $(\mathscr{C}_f)$ admet pour centre de symétrie le point $\Omega(1 ; -2)$.

♦ Exercice 35 page 24

$f(x) = \dfrac{3}{x - 4}$

$g : x \mapsto f(x + 4)$; $\vec{\Omega O}(-4 ; 0)$

$g(x) = \dfrac{3}{x}$

g est impaire, donc le point O est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$; par suite, $(\mathscr{C}_f)$ a pour centre de symétrie le point $\Omega(4 ; 0)$.

♦ Exercice 36 page 24

$f(x) = \dfrac{\frac{31}{4}}{x - \frac{5}{2}} + \dfrac{5}{2}$; $g : x \mapsto f(x + \frac{5}{2}) - \frac{5}{2}$

$g(x) = \dfrac{\frac{31}{4}}{x}$

$\vec{\Omega O}(-\frac{5}{2} ; -\frac{5}{2})$

g est impaire, donc le point O est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$; par suite, $(\mathscr{C}_f)$ admet pour centre de symétrie le point $\Omega(\frac{5}{2} ; \frac{5}{2})$.

♦ Exercice 37 page 24

$D_h = D_f \cap D_g$

x étant un élément de D_h, on a :

$x + 6 = x + 2 + 2 + 2$; $x + 6 = x + 3 + 3$

Donc : $x + 6 \in D_f$ et $x + 6 \in D_g$.

$h(x + 6) = f(x + 6) + g(x + 6) = f(x) + g(x) = h(x)$.

6 est une période de h.

♦ Exercice 38 page 24

$f(x) = (x + 3)^2 - 16$; $g(x) = (x + 4)^2 - 25$.

Par conséquent :

$(x + 3)^2 - 16 = [(x + 4) - 1]^2 - 25 + 9$.

$f(x) = g(x - 1) + 9$,

donc $(\mathscr{C}_f)$ est l'image de $(\mathscr{C}_g)$ par la translation de vecteur $\vec{u}(1 ; 9)$.

♦ Exercice 39 page 24

$M(x ; y)$; $M'(x' ; y')$

$M' = S_A(M) \Leftrightarrow \vec{AM'} = \vec{MA}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' + 1 = -1 - x \\ y' - 4 = 4 - y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x - 2 \\ y' = -y + 8 \end{cases}$ ①

$(\mathscr{C}') = S_A\mathscr{C}$ et $(\mathscr{C}) : y = 4x^2 - 5x$

et, en tenant compte de ①, on obtient :

$M' \in (\mathscr{C}') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x - 2 \\ y' = -(4x^2 - 5x) + 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y' = -4x'^2 - 21x' - 18$

donc $(\mathscr{C}')$: $y = -4x^2 - 21x - 18$

$g : x \mapsto -4x^2 - 21x - 18$.

2. Systèmes d'équations et d'inéquations

(pages 25 à 40 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :
- formaliser des transformations effectuées lors de la résolution de systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$;
- introduire la notion de paramètre ;
- initier à la modélisation d'une situation concrète à l'aide d'un système de contraintes ;
- faire une mise au point rapide des généralités sur les systèmes de contraintes.

COMMENTAIRES

Les élèves ont appris des méthodes de résolution d'un système d'équations ou d'inéquations. La démarche habituelle est de transformer le système en un système équivalent plus facile à résoudre.
Il s'agit, dans une première étape, de formaliser certaines transformations en énonçant des règles qui les justifient.
Pour la résolution des sytèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$, le calcul du discriminant permet d'affirmer ou de réfuter l'existence et l'unicité de la solution. Par ailleurs, le rôle de plus en plus important que joue la calculatrice dans l'enseignement secondaire est souligné ici par un TP qui donne la résolution d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode de Cramer.
Pour la résolution des sytèmes linéaires dans $\mathbb{R}^3$, on habituera l'élève à transformer le système en un système triangulaire.
Ces systèmes préparent l'élève à une étude analytique des positions relatives de plans dans l'espace.
Les systèmes d'équations linéaires apportent à la représentation de l'espace un aspect numérique très pratique.
Dans la résolution des problèmes, on mettra en évidence les différentes étapes suivantes :
- choix des inconnues ;
- mise en équation ;
- résolution des équations ;
- solutions du problème (vérification ou interprétation).

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Généralités • Vocabulaire – Équations équivalentes. – Systèmes équivalents. • Propriétés (rappels) – Caractérisation de : . deux équations équivalentes ; . deux systèmes équivalents. – Règle de substitution ; règle de combinaison. **Système d'équations** • Vocabulaire Système triangulaire. • Propriété Existence et unicité de la solution d'un système de 2 équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$. • Méthode Résolution d'un système de 3 équations linéaires par transformation en un système triangulaire équivalent.	• Transformer un système de 3 équations linéaires de $\mathbb{R}^3$ en un système triangulaire équivalent. Résoudre ce système. • Résoudre un système de 2 équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$. • Résoudre graphiquement un problème de programmation linéaire. • Mettre en équation un problème et le résoudre.

Exercices d'application directe

♦ Exercice 1.a page 28

$(E_m) : m^2x + (m-2) - 4x = 0$

$(m-2)(m+2)x = -(m-2)$

Pour $m = -2$, $0x = 4$.

Pour $m = -2$, (E_m) n'a pas de solution.

♦ Exercice 1.b page 28

$(I_m) : m^2x - 3 \leq 9x + m$

2, solution de (I_m), équivaut à : $2m^2 - m \leq m + 18$

$2m^2 - m - 21 \leq 0$

$(m+3)(2m-7) \leq 0$

$m \in [-3 ; \frac{7}{2}]$.

♦ Exercice 2.a page 30

$$(\Sigma)\begin{cases} 2(x+y)^2 + 5(x-y)^2 = 143 \\ 3(x+y)^2 - 4(x-1)^2 = 73 \end{cases}$$

Ensemble de validité : $V_\Sigma = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

On pose : $X = (x+y)^2 ; X \in \mathbb{R}_+$

$Y = (x-y)^2 ; Y \in \mathbb{R}_+$

On obtient le système :

$$(\Sigma')\begin{cases} 2X + 5Y = 143 \\ 3X - 4y = 73 \end{cases}$$

On obtient : $X = 9$ et $Y = 25$.

$X = 9 \Leftrightarrow x + y = 3$ ou $x + y = -3$

$Y = 25 \Leftrightarrow x - y = 5$ ou $x - y = -5$.

Les solutions de (Σ) sont les solutions des systèmes :

$$(\Sigma_1)\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases} \qquad (\Sigma_2)\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -5 \end{cases}$$

$$(\Sigma_3)\begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = 5 \end{cases} \qquad (\Sigma_4)\begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = -5 \end{cases}$$

Les solutions de (Σ) sont donc :

$(4 ; -1) ; (-1 ; 4) ; (1 ; -4) ; (-4 ; 1)$

♦ Exercice 2.b page 30

Les droites (D_1), (D_2), (D_3) sont concourantes équivaut à : le système (Σ) ci-dessous admet une solution unique.

$$(\Sigma)\begin{cases} y - 2 = m(x-3) & ① \\ y - 2 = -m(x+2) & ② \\ y - 1 = -x - 5 & ③ \end{cases}$$

Le système (Σ_1) formé des 2 premières équations admet une solution unique pour $m \neq 0$.

On a $x = 1$ et $y = -2m + 2$.

Cette solution est solution de ③ équivaut à :

$-2m + 1 = -6$, donc : $m = \frac{7}{2}$

Les 3 droites sont alors concourantes au point $A(1 ; -5)$.

♦ Exercice 2.c page 33

$$(\Sigma)\begin{cases} x + y + z = 3 & (E_1) \\ 2x - y + z = -1 & (E_2) \\ x - y + 2z = 0 & (E_3) \end{cases}$$

On obtient le système triangulaire :

$$(\Sigma')\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

d'où : $z = 1 ; x = 0 ; y = 2$.

Solution de (Σ) : $(0 ; 2 ; 1)$.

♦ Exercice 2.d page 33

$$(\Sigma)\begin{cases} 2x + 3y - z = -7 \\ x - 2y + 2z = 11 \\ 5x + y + 4z = 15 \end{cases}$$

On obtient le système triangulaire :

$$(\Sigma')\begin{cases} 2x + 3y - z = -7 \\ 7y - 5z = -29 \\ 2z = 6 \end{cases}$$

d'où : $z = 3 ; y = -2 ; x = 1$.

Solution de (Z) : $(1 ; -2 ; 3)$.

Exercices d'apprentissage

♦ **Exercice 1 page 38**

a) (E_m) $(2-m)x = m-3$

- Pour $m = 2$, $0x = -1$; (E_2) n'a pas de solution.
- Pour $m \neq 2$, (E_m) a une solution unique : $\frac{m-3}{2-m}$.

b) (E_m) $(m-3)x = m+2$

- Pour $m = 3$, $0x = 5$; (E_3) n'a pas de solution.
- Pour $m \neq 3$, (E_m) a une solution unique : $\frac{m+2}{m-3}$.

c) (E_m) $(m-3)x = (m-3)(m+3)$

- Pour $m = 3$, $0x = 0$; tout nombre réel est solution.
- Pour $m \neq 3$, (E_m) a une solution unique : $m+3$.

d) (E_m) $(m-1)(m+1)x = m-1$

- Pour $m = -1$, $0x = -2$; (E_{-1}) n'a pas de solution.
- Pour $m = 1$, $0x = 0$; tout nombre réel est solution.
- Pour $m \neq -1$ et $m \neq 1$, (E_m) a une solution unique : $\frac{1}{m+1}$.

♦ **Exercice 2 page 38**

(E_m) $(m-3)x = -3$

- Pour $m = 3$, $0x = -3$; (E_3) n'a pas de solution.

♦ **Exercice 3 page 38**

a) (E_m) $\frac{x-3}{m} = \frac{x-m}{3}$

Si $m \neq 0$, $(3-m)x = (3-m)(3+m)$

- Pour $m = 3$, $0x = 0$; tout nombre réel est solution.

b) (E_m) $3(mx+1) - 2(mx-1) = m(x+2)$

$0x = 2m - 5$

Pour $m = \frac{5}{2}$, $0x = 0$; tout nombre réel est solution.

♦ **Exercice 4 page 38**

(E_m) $(3-m)x = -6$

- Pour $m \neq 3$, (E_m) a une solution unique : $\frac{6}{m-3}$.

(F_m) $(5-m)x = -9$

- Pour $m \neq 5$, (F_m) a une solution unique : $\frac{9}{m-5}$.
- Pour $m \neq 3$ et $m \neq 5$, (E_m) et (F_m) ont une solution commune équivaut à :

$\frac{6}{m-3} = \frac{9}{m-5}$; c'est-à-dire $m = 1$.

♦ **Exercice 5 page 38**

a) (I_m) $mx \geq 3$

- Pour $m = 0$, $0x \geq 3$; (I_0) n'a pas de solution.
- Pour $m > 0$, $x \geq \frac{3}{m}$, $S_m = [\frac{3}{m} ; \rightarrow[$
- Pour $m < 0$, $x \leq \frac{3}{m}$; $S_m =]\leftarrow ; \frac{3}{m}]$

b) (I_m) $(m-1)x \geq 1$

- Pour $m = 1$, $0x \geq 1$; (I_1) n'a pas de solution.
- Pour $m > 1$, $x \geq \frac{1}{m-1}$, $S_m = [\frac{1}{m-1} ; \rightarrow[$
- Pour $m < 1$, $x \leq \frac{1}{m-1}$, $S_m =]\leftarrow ; \frac{1}{m-1}]$

c) (I_m) $(m-1)x \geq m-2$

- Pour $m = 1$, $0x \geq -1$, $S_1 = \mathbb{R}$
- Pour $m > 1$, $x \geq \frac{m-2}{m-1}$, $S_m = [\frac{m-2}{m-1} ; \rightarrow[$
- Pour $m < 1$, $x \leq \frac{m-2}{m-1}$, $S_m =]\leftarrow ; \frac{m-2}{m-1}[$

♦ **Exercice 6 page 38**

(I_m) $mx - 1 \leq 3x + 2m$

a) 1 est solution de (I_m) équivaut à $m \geq -4$.

b) 2 est solution de (I_m) équivaut à $0m \leq 7$.

Pour toute valeur de m, 2 est solution de (I_m).

c) 3 est solution de (I_m) équivaut à $m \leq 10$.

Donc 1 et 3 sont solutions de (I_m) pour :

$m \in [-4 ; 10]$.

♦ **Exercice 7 page 38**

a) $(\Sigma) \begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$; $\det(\Sigma) \neq 0$

(Σ) a une solution unique : $(-4 ; \frac{9}{2})$.

b) $(\Sigma) \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + \frac{4}{3}y = \frac{2}{3} \end{cases}$; $\det(\Sigma) = 0$

On vérifie que $(1 ; -1)$ est une solution de (Σ). Donc (Σ) a une infinité de solutions vérifiant $3x + 2y = 1$.

c) $(\Sigma) \begin{cases} -x - 9y = 0 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$; $\det(\Sigma) \neq 0$

(Σ) a une solution unique $(\frac{36}{13} ; -\frac{4}{13})$.

d) $(\Sigma) \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1 \text{ ①} \\ -x + \frac{3}{2}y = \frac{2}{3} \text{ ②} \end{cases}$; $\det(\Sigma) = 0$

$(0 ; -2)$ est une solution de ① mais n'est pas solution de ②. Donc (Σ) n'admet pas de solution.

♦ **Exercice 8 page 38**

a) $(\Sigma) \begin{cases} 2x - y = -3 \ (D_1) \\ 2x + 3y = 5 \ (D_2) \end{cases}$; $\det(\Sigma) \neq 0$

(Σ) a une solution unique : $(-\frac{1}{2} ; 2)$.

(D_1) et (D_2) sont sécants en $A(-\frac{1}{2} ; 2)$.

♦ **Exercice 9 page 38**

$\Omega(x ; y)$ centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

$\begin{cases} \Omega A^2 = \Omega B^2 \\ \Omega A^2 = \Omega C^2 \end{cases}$ équivaut à

$(\Sigma) \begin{cases} x + y = 4 \\ 5x - 8y = 14 \end{cases}$; $\det(\Sigma) \neq 0$

(Σ) a une solution unique : $(\frac{87}{26} ; \frac{17}{26})$.

(D_1) et (D_2) sont sécants en $\Omega(\frac{87}{26} ; \frac{17}{26})$.

♦ **Exercice 10 page 38**

$(\Sigma) \begin{cases} 2x - 3y = 7 & (D_1) \\ 2x + 3y = 5 & (D_2) \\ 6x + 3y = 17 & (D_3) \end{cases}$

$(\Sigma_1) \begin{cases} 2x - 3y = 7 & (D_1) \\ 2x + 3y = 5 & (D_2) \end{cases}$

(Σ_1) a une solution unique : $(3 ; -\frac{1}{3})$

On vérifie que $(3 ; -\frac{1}{3})$ est solution de :

$6x + 3y = 17$ (D_3).

Par conséquent, (Σ) a une solution unique :

$(3 ; -\frac{1}{3})$.

(D_1), (D_2), (D_3) sont concourantes en $A(3 ; -\frac{1}{3})$.

♦ **Exercice 11 page 38**

$M(x ; y)$ est un point du plan.

- Équation de (AB)

$M \in (AB) \Leftrightarrow \frac{y-6}{x-2} = \frac{1-6}{-3-2}$

$(AB) : x - y + 4 = 0$.

- Équation de (CD)

$M \in (CD) \Leftrightarrow \frac{y-0}{x-4} = \frac{-2-0}{7-4}$

$(CD) : 2x + 3y - 8 = 0$.

- Équation de (EF)

$M \in (EF) \Leftrightarrow \frac{y-4}{x+4} = \frac{-1-4}{11+4}$

$(EF) : x + 3y - 8 = 0$.

- Intersection de (AB) et (CD)

$(\Sigma) \begin{cases} x - y = -4 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$; $\det(\Sigma) \neq 0$

(Σ) a une solution unique : $(-\frac{4}{5} ; \frac{16}{5})$.

On vérifie que $(-\frac{4}{5} ; \frac{16}{5})$ n'est pas solution de :

$x + 3y - 8 = 0$ (EF).

Donc (AB), (CD), (EF) ne sont pas concourantes.

♦ **Exercice 12 page 38**

a) $(\Sigma) \begin{cases} \frac{3}{x-1} + 2(y-5) = 5 \\ \frac{-2}{x-1} + 7(y-5) = 5 \end{cases}$

On pose : $X = x - 1$, $x \neq 1$,

$Y = y - 5$.

On obtient le système :

$(\Sigma') \begin{cases} 3X + 2Y = 5 \\ -2X + 7Y = 5 \end{cases}$

On obtient : $X = 1$ et $Y = 1$.

$X = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = 1$; $x = 2$;

$Y = 1 \Leftrightarrow y - 5 = 1$; $y = 6$.

(Σ) a donc une solution unique : $(2 ; 6)$.

b) $(\Sigma') \begin{cases} 11\sqrt{x} + 16\sqrt{y} = 531 \\ 13\sqrt{x} + 19\sqrt{y} = 629 \end{cases}$

Ensemble de validité V_Σ

$(x ; y) \in V_\Sigma \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$

Posons : $X = \sqrt{x}$; $X \geq 0$

$Y = \sqrt{y}$; $Y \geq 0$.

On obtient le système :

$(\Sigma') \begin{cases} 11X + 16Y = 531 \\ 13X + 19Y = 629 \end{cases}$

On obtient : $X = 25$ et $Y = 16$.

$X = 25 \Leftrightarrow x = 25^2 = 625$

$Y = 16 \Leftrightarrow y = 16^2 = 256$

(Σ) a donc une solution unique : $(625 ; 256)$.

♦ **Exercice 13 page 38**

a) $(\Sigma') \begin{cases} 5xy + 3x = 44 \\ 2xy - 5x = -1 \end{cases}$

On pose : $Y = xy$.

On obtient le système :

$(\Sigma') \begin{cases} 5Y + 3x = 44 \\ 2Y - 5x = -1 \end{cases}$

On obtient : $x = 3$ et $Y = 7$.

$Y = 7 \Leftrightarrow xy = 7$; $x = 3$; $y = \frac{7}{3}$.

(Σ) a donc une solution unique : $(3 ; \frac{7}{3})$.

b) $(\Sigma) \begin{cases} 3x^2 - 2y = 23 \\ -2x^2 + 5y = -8 \end{cases}$

On pose : $X = x^2$; $X \geq 0$.

On obtient le système :

$(\Sigma') \begin{cases} 3X - 2y = 23 \\ -2X + 5y = -8 \end{cases}$

On obtient : $X = 9$ et $y = 2$.

$X = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9$; $x = 3$ ou $x = -3$.

(Σ) admet donc deux solutions : $(3 ; 2)$ et $(-3 ; 2)$.

c) $(\Sigma) \begin{cases} 7\sqrt{1-3x} - 6\sqrt{5y} = 23 \\ 9\sqrt{1-3x} - 11\sqrt{5y} = 23 \end{cases}$

Ensemble de validité V_Σ

$(x ; y) \in V_\Sigma \Leftrightarrow 1 - 3x \geq 0$ et $y \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$ et $y \geq 0$.

Posons : $X = \sqrt{1-3x}$; $X \geq 0$

$Y = \sqrt{5y}$; $Y \geq 0$.

On obtient le système :

$(\Sigma') \begin{cases} 7X - 6Y = 23 \\ 9X - 11Y = 23 \end{cases}$

On obtient : X = 5 et Y = 2.

$X = 5 \Leftrightarrow \sqrt{1-3x} = 5 : x = -8$

$Y = 2 \Leftrightarrow \sqrt{5y} = 2 : y = \frac{4}{5}$.

(Σ) a donc une solution unique : $(-8 ; \frac{4}{5})$.

♦ Exercice 14 page 38

$a)\ (\Sigma) \begin{cases} 3(2x+3y) - 5(3x+4y) = -1 \\ 5(2x+3y) - 8(3x+4y) = -1 \end{cases}$

On pose : $X = 2x + 3y$ et $Y = 3x + 4y$

On obtient le système :

$(\Sigma') \begin{cases} 3X - 5Y = -1 \\ 5X - 8Y = -1 \end{cases}$

On obtient : X = 3 et Y = 2.

$X = 3 \Leftrightarrow 2x + 3y = 3$

$Y = 2 \Leftrightarrow 3x + 4y = 2$

Par conséquent : $x = -6$ et $y = 5$.

(Σ) a donc une solution unique : (– 6 ; 5).

$b)\ (\Sigma) \begin{cases} 7xy - 5(x+y) = 15 \\ 11xy - 8(x+y) = 22 \end{cases}$

On pose : $X = xy$ et $Y = x + y$

On obtient le système :

$(\Sigma') \begin{cases} 7X - 5Y = 15 \\ 11X - 8Y = 22 \end{cases}$

On obtient : X = 10 et Y = 11.

$X = 10 \Leftrightarrow xy = 10$

$Y = 11 \Leftrightarrow x + y = 11$

x et y sont donc solutions de l'équation :

$$u^2 - 11u + 10 = 0.$$

D'où :

ou $\begin{cases} x = 10 \text{ et } y = 1 ; \\ x = 1 \text{ et } y = 10. \end{cases}$

(Σ) a donc deux solutions : (10 ; 1) et (1 ; 10).

♦ Exercice 15 page 38

$a)\ (\Sigma) \begin{cases} mx + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$

$\det(\Sigma) = -m - 1$

• Pour $m = -1$; $\det(\Sigma) = 0$ et $(\Sigma) \begin{cases} -x + y = 1 \\ -x + y = -3 \end{cases}$

(Σ) n'a pas de solution.

• Pour $m \neq -1$, $\det(\Sigma) \neq 0$;

(Σ) a une solution unique : $(\frac{4}{m+1} ; \frac{1-3m}{m+1})$.

$b)\ (\Sigma) \begin{cases} x + my = 2 \\ mx - y = 3 \end{cases}$

$\det(\Sigma) = -(m^2 + 1) \neq 0$.

(Σ) a une solution unique : $(\frac{3m+2}{m^2+1} ; \frac{2m-3}{m^2+1})$.

$c)\ (\Sigma) \begin{cases} mx - y = 5 \\ mx + (m-3)y = 1 \end{cases}$

$\det(\Sigma) = m(m-2)$.

• Pour $m = 0$, $\det(\Sigma) = 0$ et $(\Sigma) \begin{cases} -y = 5 \\ -3y = 1 \end{cases}$

(Σ) n'a pas de solution.

• Pour $m = 2$, $\det(\Sigma) = 0$ et $(\Sigma) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

(Σ) n'a pas de solution.

• Pour $m \neq 0$ et $m \neq 2$, (Σ) a une solution unique :

$(\frac{5m-14}{m(m-2)} ; \frac{4}{2-m})$.

$d)\ (\Sigma) \begin{cases} x + y = m \\ x - my = m^2 \end{cases}$

$\det(\Sigma) = -m - 1$.

• Pour $m = -1$, $\det(\Sigma) = 0$ et $(\Sigma) \begin{cases} x + y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

(Σ) n'a pas de solution.

• Pour $m \neq -1$, (Σ) a une solution unique :

$(\frac{2m^2}{m+1} ; \frac{m-m^2}{m+1})$.

$e)\ (\Sigma) \begin{cases} (m+1)x - (m-1)y = 2 \\ 3x - 5y = -2 \end{cases}$

$\det(\Sigma) = -2(m+4)$.

• Pour $m = -4$, $\det(\Sigma) = 0$ et $(\Sigma) \begin{cases} -3x + 5y = 2 \\ -3x + 5y = 2 \end{cases}$

(Σ) a une infinité de solutions $(x ; y)$ vérifiant $-3x + 5y = 2$.

• Pour $m \neq -4$, (Σ) admet une solution unique : (1 ; 1).

♦ Exercice 16 page 38

Point d'intersection de (D_1) et (D_2).

$(\Sigma) \begin{cases} 5x - 3y = 4 & (D_1) \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

On obtient A $(1 ; \frac{1}{3})$.

(D_1), (D_2), (L_m) sont concourantes équivaut à $(1 ; \frac{1}{3})$ est solution de : $mx + y = 1$ (L_m),

d'où : $m = \frac{2}{3}$.

♦ Exercice 17 page 39

$a)\ (\Sigma) \begin{cases} x + z = 8 \\ y + z = 10 \\ x + y = 5 \end{cases}$

$(\Sigma') \begin{cases} x + y + z = \frac{23}{2} \\ x = \frac{3}{2} \\ z = \frac{13}{2} \end{cases}$

Solution de (Σ) : $(\frac{3}{2} ; \frac{7}{2} ; \frac{13}{2})$.

$b)\ (\Sigma) \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 11 \\ x - 6z = 7 \\ 7x + y - 4z = 5 \end{cases}$

$(\Sigma') \begin{cases} -2y + 4z + 3x = 11 \\ -6z + x = 7 \\ x = 5 \end{cases}$

Solution de (Σ) : (1 ; – 6; – 1).

$c)\ (\Sigma) \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 3z = -1 \\ 3x - 6y - 5z = 4 \end{cases}$

$(\Sigma') \begin{cases} 2y + 3z + x = 2 \\ 3z + 4x = -1 \\ x = 17 \end{cases}$

Solution de (Σ) : (17 ; 27 ; – 23).

$d)\ (\Sigma) \begin{cases} 7x = 14 \\ 3x - 5y = 1 \\ 7x - 17y + 3z = 1 \end{cases}$

Solution de (Σ) : $(2 ; 1 ; \frac{4}{3})$.

♦ Exercice 18 page 39

$a)\ (\Sigma) \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ 3x - 5y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + 3z = 2 \end{cases}$

$(\Sigma') \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ y + 11z = -2 \\ 10z = -1 \end{cases}$

Solution de (Σ) : $(-\frac{11}{10} ; -\frac{9}{10} ; -\frac{1}{10})$.

$b)\ (\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 6z = 3 \\ 2x - 9y + 12z = 0 \end{cases}$

$(\Sigma') \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y + 4z = -1 \\ 54z = 9 \end{cases}$

Solution de (Σ) : $(\frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{6})$.

$c)\ (\Sigma) \begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ -4x - 5y + 7z = 1 \\ 2x + y - 3z = 9 \end{cases}$

$(\Sigma') \begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ -13y + 19z = 15 \\ -22z = 146 \end{cases}$

Solution de (Σ) : $(-\frac{13}{11} ; -\frac{94}{11} ; -\frac{73}{11})$.

$d)\ (\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 5x - 2y - 10z = 0 \\ 3x + 5y - 2z = 6 \end{cases}$

$(\Sigma') \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 7y + 15z = 5 \\ 65z = -11 \end{cases}$

Solution de (Σ) : $(\frac{6}{65} ; \frac{14}{13} ; -\frac{11}{65})$.

$e)\ (\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 4x + 5y - 20z = -2 \\ -3x + 5y + 5z = 4 \end{cases}$

$(\Sigma') \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y + 24z = 10 \\ 100z = 45 \end{cases}$

Solution de (Σ) : $(\frac{3}{4} ; \frac{4}{5} ; \frac{9}{20})$.

$f)\ (\Sigma) \begin{cases} 5x + 2y - 3z = 1 \\ 8x - 4y + 3z = -5 \\ 2x - 5y + 4z = -6 \end{cases}$

$(\Sigma') \begin{cases} -3z + 5x + 2y = 1 \\ 13x - 2y = -4 \\ 3y = 6 \end{cases}$

Solution de (Σ) : (0 ; 2 ; 1).

♦ Exercice 19 page 39

$f(x) = 5x^2 + 8x + 9$

$= a(x+1)^2 + b(x+1) + c$

On obtient : $a = 5$; $b = -2$; $c = 6$.

♦ Exercice 20 page 39

$f(x) = 5x^2 - 25x + 30$

1) $f(x) = a(x-1)^2 + bx^2 + c(x+1)^2$

On obtient : $a = \frac{85}{4}$; $b = -25$; $c = \frac{35}{4}$.

2) $f(x) = a(x-2)^2 + b(x-3)^2 + c(x-2)(x-3)$

On obtient : $a = 0$; $b = 0$; $c = 5$.

♦ Exercice 21 page 39

$a)\ (\Sigma) \begin{cases} 2x + 5y - 6z = 8 \\ x + y - 6z = 0 \end{cases}$

Solution de (Σ) : $\left(\frac{12m-8}{3} ; \frac{8-6m}{3} ; m\right)$ où m décrit R.

$b)\ (\Sigma) \begin{cases} -3x - 5y + 2z = -1 \\ -3x - 5 + z = -2 \end{cases}$

Solution de (Σ) : $(m ; \frac{3(1-m)}{5} ; 1)$ où m décrit R.

$c)\ (\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

Solution de (Σ) $\left(-\frac{3m}{5} ; -\frac{2m}{5} ; m\right)$ où m décrit R.

♦ Exercice 22 page 39

Système de contrainte

$(\Sigma') \begin{cases} x \geq 0 ; y \geq 0 \\ 2x + 5y - 50 \leq 0 \\ 2x + y - 24 \leq 0 \\ 4x + 5y - 60 \leq 60 \end{cases}$

On considère les droites :

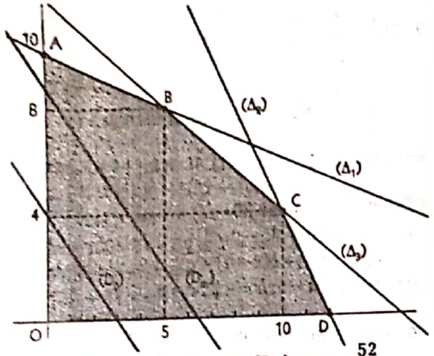
$(\Delta_1) : 2x + 5y - 50 = 0$

$(\Delta_2) : 2x + y - 24 = 0$

$(\Delta_3) : 4x + 5y - 60 = 0$

L'ensemble P des points du plan représentant l'ensemble des solutions de (Σ) est un polygone dont les sommets sont : O, A(0 ; 10), B(5 ; 8), C(10 ; 4), D (12 ; 0).

On donne la droite $(D_m) : y = -\frac{4}{3}x + m$.



Constatation graphique : $C \in (D_m) \Leftrightarrow m = \frac{52}{3}$.

On pourra vérifier que : $B \in (D_m) \Leftrightarrow m = \frac{44}{3}$.

♦ Exercice 23 page 39

a) $(\Sigma_m)\begin{cases} 2x - my = m - 1 \\ (5-m)x - 3y = 11 - 5m \end{cases}$

$\det(\Sigma_m) = -m^2 + 5m - 6$
$= -(m-3)(m-2)$.

• Pour $m = 3$

$(\Sigma_3)\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

(Σ_3) n'a pas de solution.

• Pour $m = 2$

$(\Sigma_2)\begin{cases} x - y = \frac{1}{2} \\ x - y = \frac{1}{3} \end{cases}$

(Σ_2) n'a pas de solution.

• Pour $m \neq 3$ et $m \neq 2$, (Σ_m) a une solution unique :

$\left(\frac{5m^2 - 8m - 3}{(m-3)(m-2)} ; \frac{-m^2 + 16m - 27}{(m-3)(m-2)}\right)$.

b) $(\Sigma_m)\begin{cases} (2m-1)x + (3m+2)y = m + 4 \\ (m-1)x + 2my = 2 \end{cases}$

$\det(\Sigma_m) = m^2 - m + 2$
$= (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} \neq 0$.

(Σ_m) admet une solution unique quelle que soit la valeur de m :

$\left(\frac{2(m^2 + m - 2)}{m^2 - m + 2} ; \frac{-m^2 + m + 2}{m^2 - m + 2}\right)$.

c) $(\Sigma_m)\begin{cases} mx - 3y = 5 \\ 4x + (m+7)y = 15 \end{cases}$

$\det(\Sigma_m) = (m+3)(m+4)$.

• Pour $m = -3$; $\det(\Sigma_{-3}) = 0$

$(\Sigma_{-3})\begin{cases} x + y = \frac{5}{3} \\ x + y = \frac{15}{4} \end{cases}$

(Σ_{-3}) n'a pas de solution.

• Pour $m = -4$; $\det(\Sigma_{-4}) = 0$

$(\Sigma_{-4})\begin{cases} 4x + 3y = -5 \\ 4x + 3y = 15 \end{cases}$

(Σ_{-4}) n'a pas de solution.

• Pour $m \neq -3$ et $m \neq -4$, (Σ_m) a une solution unique :

$\left(\frac{5m + 80}{(m+3)(m+4)} ; \frac{15m - 20}{(m+3)(m+4)}\right)$.

♦ Exercice 24 page 39

(E_m) $mx + (m+3) = 2m - 5x$

m étant un nombre entier de -3 à 8.

(E_m) $(m+5)x = m - 3$.

• Pour $m = -5$, $0x = 8$; (E_{-5}) n'a pas de solution.

• Pour $m \neq -5$, (E_m) a une solution unique : $\frac{m-1}{m+5}$.

♦ Exercice 25 page 39

a) (E_m) $\frac{x}{m-1} + \frac{x}{m+1} = \frac{1}{m^2 - 1}$

Ensemble de validité : $\mathbb{R}$.

(E_m) n'a pas de sens pour $m = 1$ ou $m = -1$.

• Pour $m \neq 1$ et $m \neq -1$

(E_m) $2mx = 1$.

• Pour $m = 0$, $0x = 1$; (E_0) n'a pas de solution.

• Pour $m \neq 1$ et $m \neq -1$ et $m \neq 0$, $S_m = \{\frac{1}{2m}\}$.

b) (E_m) $x(mx - 2) = 0$

$x = 0$ ou $mx = 2$.

• Pour $m = 0$, S_0 $\{0\}$.

• Pour $m \neq 0$; $S_m = \{0 ; \frac{2}{m}\}$.

c) (E_m) $x - 1 - \frac{x}{m+1} = \frac{1}{m-1}$

Ensemble de validité : $\mathbb{R}$.

(E_m) n'a pas de sens pour $m = -1$ ou $m = 1$.

Pour $m \neq -1$ et $m \neq 1$, (E_m) $mx = \frac{m^2 + m}{m-1}$

• Pour $m = 0$, $0x = 0$; $S_0 = \mathbb{R}$.

• Pour $m \neq -1$ et $m \neq 1$ et $m \neq 0$, $S_m = \{\frac{m+1}{m-1}\}$.

♦ Exercice 26 page 39

$(\Sigma)\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} \\ 2x - 3y + z = 3 \end{cases}$

$(\Sigma)\begin{cases} 3x = 4y \\ 2y = 3z \\ 2x = 4z \\ 2x - 3y + z = 3 \end{cases}$

$(\Sigma)\begin{cases} 2x - 3y + z = 3 \\ 3x - 4y = 0 \\ 2y - 3z = 0 \\ z = 6 \end{cases}$

(Σ) a une solution unique : **(12 ; 9 ; 6).**

♦ Exercice 27 page 39

$(\Sigma)\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \\ x + y + z = s \end{cases}$

a, b, c, s étant non nuls, on obtient :

$x = \frac{as}{a+b+c}$; $y = \frac{bs}{a+b+c}$; $z = \frac{cs}{a+b+c}$,

avec $a + b + c \neq 0$.

♦ Exercice 28 page 39

a) Notons $(\mathscr{P})$ la parabole passant par A, B et C.

$(\mathscr{P})$ a pour équation : $y = ax^2 + bx + c$,

$a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

$A \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow 4a - 2b + c = 8$

$B \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow 36a + 6b + c = 8$

$C \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow 64a + 8b + c = 112$.

Du système formé par ces trois équations, on obtient :

$(\Sigma)\begin{cases} 4a - 2b + c = 8 \\ -6b + 2c = 16 \\ -5c = 273 \end{cases}$

d'où : $(\mathscr{P})$ $y = \frac{26}{5}x^2 - \frac{104}{5}x - \frac{272}{5}$.

b) Notons $(\mathscr{P})$ la parabole passant par A, B, et C.

$(\mathscr{P})$ a pour équation :

$(\mathscr{P})$ $y = ax^2 + bx + c$.

$A \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow c = 0$

$B \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow 256a + 16b + c = -8$

$C \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow 64a + 8b + c = -12$.

D'où : $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{2}x$.

♦ Exercice 29 page 39

a) Notons $(\mathscr{C})$ le cercle passant par A, B, et C.

$(\mathscr{C})$ a pour équation :

$(\mathscr{C})$ $(a - x)^2 + (y - b)^2 = c$.

$(a ; b)$ est le couple de coordonnées du centre de $(\mathscr{C})$.

c est le carré du rayon de $(\mathscr{C})$.

D'où : $(\mathscr{C})$ $(x-2) + (y - \frac{5}{2}) + \frac{185}{4}$.

b) On obtient : $(\mathscr{C})$ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 40$.

♦ Exercice 30 page 39

Notons $(\mathscr{H})$ l'hyperbole passant par A, B, et C.

$(\mathscr{H})$ a pour équation : $(\mathscr{H})$ $y = \frac{k}{x - \alpha} + \beta$.

Avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^*$.

$A \in (\mathscr{H}) \Leftrightarrow k + 2\beta - \alpha(\beta - 1) = -2$

$B \in (\mathscr{H}) \Leftrightarrow k + 3\beta - \alpha(\beta - 2) = -6$

$C \in (\mathscr{H}) \Leftrightarrow k - \beta - \alpha(\beta - 4) = 4$.

On obtient le sytème :

$(\Sigma)\begin{cases} k + 2\beta - \alpha(\beta - 1) = -2 \\ \alpha - \beta = 4 \\ 2\alpha = 2 \end{cases}$

d'où : $(\mathscr{H})$ $y = \frac{2}{x-1} - 3$.

♦ Exercice 31 page 40

Notons m le montant de l'héritage ; p_1, p_2, p_3... les parts respectives du 1[er], du 2[e], du 3[e] enfant.

On a :

$p_1 = 100\,000 + \frac{1}{5}(m - 100\,000)$

$p_2 = 200\,000 + \frac{1}{5}(m - p_1 - 200\,000)$

Montant de l'héritage : $p_1 = p_2 \Leftrightarrow m = 1\,600\,000$.

Part de chaque enfant :

$p = 100\,000 + \frac{1}{5}(1\,500\,000) = 400\,000$.

Nombre d'enfants : $n = \frac{1\,600\,000}{400\,000} = 4$.

♦ Exercice 32 page 40

1. (D_1) $y = -2x + 14$

(L_1) $y = x + 1$

(D_2) $y = -\frac{4}{5}x + \frac{34}{5}$

(L_2) $y = 2x - 1$

2. Notons :

$A_m(a ; 0)$, $B(b ; 0)$; $m \in \mathbb{R}^*$.

$A_m \in (D_m) \Leftrightarrow a = \frac{10m - 6}{m}$

$B_m \in (D_m) \Leftrightarrow b = \frac{2m - 3}{m}$

$A_mB_m = \left|\frac{2m-3}{m} - \frac{10m-6}{m}\right|$

$= \left|\frac{8m}{m}\right|$; $m \neq 0$

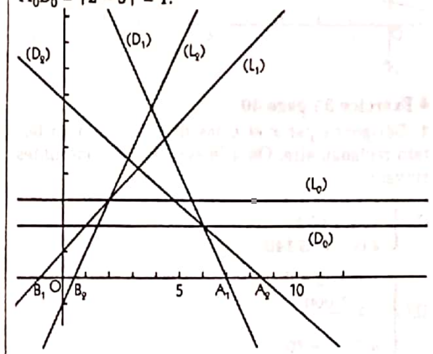
$= 8$.

3. Pour $m = 0$: (D_0) $y = 2$; (L_0) $y = 3$.

(D_0) et (L_0) sont parallèles à (OI). Notons A_0 le point d'intersection de (D_0) et (OJ) et B_0 celui de (L_0) et (OJ).

$A_0(0 ; 2)$, $B_0(0 ; 3)$.

$A_0B_0 = |2 - 3| = 1$.



♦ Exercice 33 page 40

• Choix des inconnues :

x le nombre des membres de A, y le nombre des membres de B, z le nombre des membres de C.

• Mise en équation :

$$(\Sigma)\begin{cases} 9\,000x + 12\,000y + 21\,000z = 942\,000 \\ 12\,000x + 35\,000y + 80\,000z = 2\,374\,000 \\ 7\,000x + 13\,000y + 31\,000z = 1\,004\,000 \end{cases}$$

• Résolution du système (Σ) :

$$(\Sigma)\begin{cases} 3x + 4y + 7z = 314 \\ 12x + 35y + 80z = 2\,374 \\ 7x + 13y + 31z = 1\,004 \end{cases}$$

$$(\Sigma)\begin{cases} 3x + 4y + 7z = 314 \\ 19y + 52z = 1\,118 \\ 66y = 1\,716 \end{cases}$$

(Σ) a une solution unique : (42 ; 26 ; 12).

Solution du problème, on a : 42 + 26 + 12 = 80 ; le nombre de membres de cette coopérative est 80.

♦ Exercice 34 page 40

• Équation des droites :

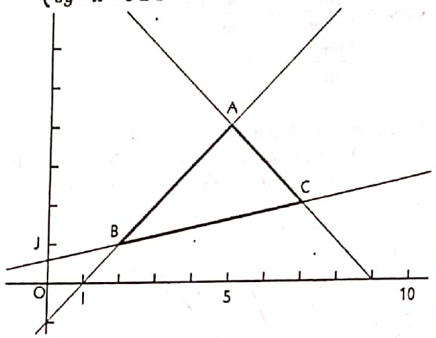
(AB) $y - x + 1 = 0$

(AC) $y + x - 9 = 0$

(BC) $5y - x - 3 = 0$

• Système de contraintes qui caractérise l'intérieur du triangle ABC.

$$(\Sigma)\begin{cases} x \geq 0 \,;\, y \geq 0 \\ y - x + 1 \leq 0 \\ y + x - 9 \leq 0 \\ 5y - x - 3 \geq 0 \end{cases}$$



♦ Exercice 35 page 40

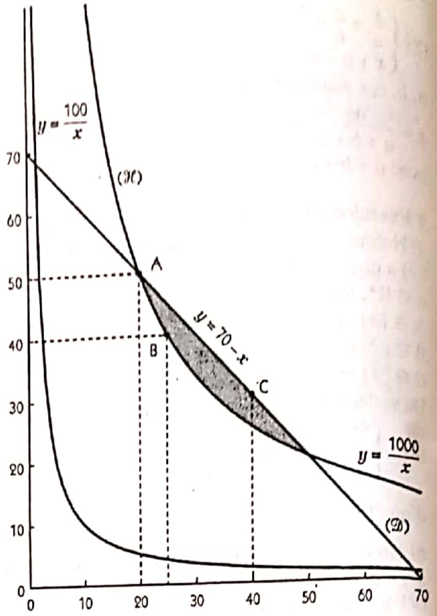
1. Désignons par x et y les dimensions d'un terrain rectangulaire. On a le système de contraintes suivant :

$$(\Sigma)\begin{cases} x > 0 \,;\, y > 0 \\ xy \geq 1\,000 \\ 2(x + y) \leq 140 \end{cases}$$

$$(\Sigma)\begin{cases} x > 0 \,;\, y > 0 \\ y \geq \dfrac{1\,000}{x} \\ y \leq -x + 70 \end{cases}$$

2. Désignons par ($\mathcal{H}$) et ($\mathcal{D}$) respectivement l'hyperbole et la droite d'équations :

($\mathcal{H}$) $y = \dfrac{1\,000}{x}$; ($\mathcal{D}$) $y = -x + 70$.



3. L'ensemble des solutions de système de contrainte (Σ) est représenté par la partie hachurée.

4. a) $x = 20$; $y = 50$

b) $x = 25$; $y = 40$

d) $x = 40$; $y = 30$.

♦ Exercice 36 page 40

2 adultes et 3 enfants payent 9 500 F CFA ;

1 adulte et 4 enfants payent 8 500 F CFA.

• Choix des inconnues :

x : prix du billet pour adulte ;

y : prix du billet pour enfant.

• Mise en équation et résolution :

$$(\Sigma)\begin{cases} 2x + 3y = 9\,500 \\ x + 4y = 8\,500 \end{cases}$$

(Σ) a une unique solution : (2 500 ; 1 500).

Solution du problème :

– le prix du billet pour adulte est 2 500 F CFA,

– le prix du billet pour enfant est 1 500 F CFA.

♦ Exercice 37 page 40

Désignons par :

x le nombre de paquets de couvertures ;

y le nombre de caisses de matériel médical.

On a le système d'équation de contraintes suivant :

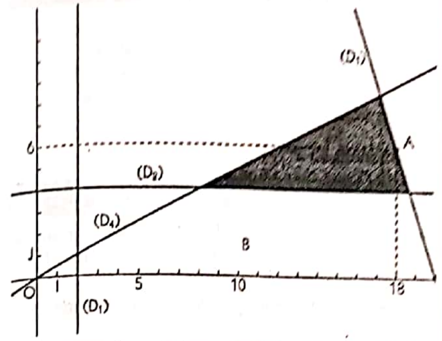
$$(\Sigma)\begin{cases} 150x \geq 300 \\ 50y \geq 200 \\ 150x + 50y \leq 3\,000 \\ x \geq 2y \end{cases}$$

$$(\Sigma)\begin{cases} x \geq 2 \,;\, y \geq 4 \\ 3x + y - 60 \leq 0 \\ -x + 2y \leq 0 \end{cases}$$

Considérons les droites :

(D_1) $x = 2$; (D_2) $y = 4$; (D_3) $y = -3x + 60$;

(D_4) $y = \dfrac{x}{2}$.



L'ensemble des solutions de (Σ) est l'ensemble des couples de nombres entiers appartenant à la partie grisée du plan. Un seul de ces points appartient à (D_3), c'est le point A(18 ; 6). D'où le poids maximal du chargement qui correspond à :

– 18 paquets de couvertures,

– 6 caisses de matériel médical.

♦ Exercice 38 page 40

x litres de jus de goyave,

y litres de jus d'ananas.

Système de contraintes :

$$(\Sigma)\begin{cases} x \geq 0 \,;\, y \geq 0 \\ x + y \geq 10 \\ 3x + 2y \leq 30 \end{cases}$$

On considère les droites :

(D_1) $x + y = 10$

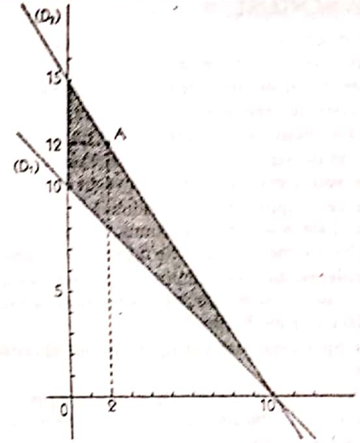
(D_2) $3x + 2y = 30$

L'ensemble des solutions de (Σ) est l'ensemble des couples de nombres entiers appartenant à la partie grisée du plan.

La solution maximale pour un coktail est représentée par le point A(2 ; 12) qui correspond à :

– 2 litres de jus de goyave,

– 12 litres de jus d'ananas.



3. Équations et inéquations du second degré

(pages 41 à 56 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
– utiliser le discriminant pour :
étudier le polynôme du 2^{nd} degré (racines, signe) ;
résoudre des équations et inéquations du 2^{nd} degré ;
– résoudre des équations du 2^{nd} degré avec paramètre ;
– étudier quelques types d'équations et d'inéquations se ramenant au 2^{nd} degré.

Commentaires

• Le discriminant n'a pas été introduit en classe de seconde S afin d'obliger les élèves à maîtriser les différentes transformations d'un polynôme du 2^{nd} degré (forme factorisée, formes canoniques...) et à utiliser d'autres méthodes mieux adaptées.
En classe de première SE, l'introduction du discriminant permet la mise en place d'un algorithme qui a tout son intérêt avec la présence d'un paramètre.
L'étude démarre sur celle des racines et du signe d'un polynôme du 2^{nd} degré. Les résultats de cette étude sont alors directement investis dans la résolution d'équations et d'inéquations du 2^{nd} degré.
Dans ce chapitre, tout est ramené au polynôme du 2^{nd} degré, ce qui donne plus de clarté au cours. Ainsi, l'élève se fera une bonne représentation mentale, très riche, de cette étude. Ceci est confirmé par la fiche résumé sur laquelle figurent, avec une grande clarté, les résultats sous 5 aspects différents.
Par ailleurs, dans ce chapitre, le polynôme du 2^{nd} degré est la seule étude théorique faite dans le cas général. Les autres études sont faites sur des exemples dans le cadre de résolutions de problèmes mettant en place une méthode.
• Les équations paramétriques seront abordées en classe de première SE de façon raisonnable, sans excès.
• La résolution d'une équation bicarrée permet d'introduire l'utilisation d'une inconnue auxiliaire. Par ailleurs, par l'intermédiaire d'un polynôme, elle permet de résoudre une inéquation bicarrée.
• Pour les équations et inéquations irrationnelles, on se bornera à celles des types $\sqrt{P(x)} = Q(x)$ et $\sqrt{P(x)} < Q(x)$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes tels que $d^\circ P(x) \leq 2$ et $d^\circ Q(x) \leq 1$.
• Les problèmes conduisant à la résolution d'équations et d'inéquations feront une part importante, d'une part, au contexte socio-culturel des élèves et, d'autre part, aux autres disciplines (sciences physiques, biologie...).
• Notons que, dans ce chapitre, un TP permet d'introduire la démonstration par disjonction des cas en s'appuyant sur des exemples déjà traités.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Équations, inéquations du 2^{nd} degré • Vocabulaire – Polynôme, équation, inéquation du 2^{nd} degré. – Discriminant d'un polynôme, d'une équation, d'une inéquation du 2^{nd} degré. • Formules – Utilisation du discriminant pour déterminer, pour un polynôme du 2^{nd} degré : ses zéros ; son signe ; une factorisation.	• Calculer le discriminant d'un polynôme (d'une équation) du 2^{nd} degré. • Déterminer les racines d'un polynôme du 2^{nd} degré. • Résoudre une équation (une inéquation) du 2^{nd} degré. • Factoriser un polynôme du 2^{nd} degré qui admet des racines. • Étudier le signe d'un polynôme du 2^{nd} degré. • Résoudre une inéquation du 2^{nd} degré.

savoirs	savoir-faire
– Règle donnant le signe d'un polynôme du 2^{nd} degré. – Application à la résolution d'équations et d'inéquations du 2^{nd} degré. • Propriété – Expression de la somme et du produit des solutions d'une équation du 2^{nd} degré. • Méthodes – Pour déterminer des nombres dont on connaît la somme et le produit. – Pour résoudre une équation du 2^{nd} degré qui dépend d'un paramètre.	• Déterminer une valeur approchée des solutions d'une équation du 2^{nd} degré en utilisant une représentation graphique. • Représenter graphiquement les solutions d'une inéquation du 2^{nd} degré. • Utiliser la somme et le produit des solutions d'une équation du 2^{nd} degré pour calculer une solution connaissant l'autre. • Trouver 2 nombres connaissant leur somme et leur produit. • Résoudre une équation du du 2^{nd} degré avec paramètre.
Équations et inéquations se ramenant au 2^{nd} degré • Vocabulaire – Équation bicarrée. – Inconnue auxiliaire. – Résolvante d'une équation. – Équations et inéquations irrationnelles. • Méthode – Pour résoudre une équation ou une inéquation bicarrée.	• Résoudre une équation ou une inéquation bicarrée.
– Pour résoudre une équation ou une inéquation irrationnelle des types : $\sqrt{P(x)} = Q(x)$; $\sqrt{P(x)} < Q(x)$ avec $d^\circ P(x) \leq 2$ et $d^\circ Q(x) \leq 1$.	• Résoudre une équation ou une inéquation des types : $\sqrt{P(x)} = Q(x)$; $\sqrt{P(x)} < Q(x)$ avec $d^\circ P(x) \leq 2$ et $d^\circ Q(x) \leq 1$.

Exercices d'application directe

♦ Exercice 1.a page 43

$P_1(x) = 4(x-4)(x+4)$

$P_2(x) = (x-3)^2$

$P_3(x) = (x-1)(x-2)$

$P_4(x) = (x-\sqrt{3})^2$

$P_5(x) = (3x-1)^2$

$P_6(x) = 3(x - \frac{5+\sqrt{19}}{3})(x + \frac{5+\sqrt{19}}{3})$

♦ Exercice 1.b page 43

$P(x) = 2(x + \frac{3}{2})(x-2)$

$Q(x) = -(x-4)^2$

$R(x) = (x+2)(x+3)$

$S(x) = 2(x - \frac{5}{2})(x+1)$

♦ Exercice 1.c page 46

(1) $-4x^2 + 5x + 9 = 0$

$S_{(1)} = \{-1 \,;\, \frac{9}{4}\}$

(2) $(2x+3)(x^2-1) \leq 0$

$S_{(2)} = [-\frac{\sqrt{2}}{2} \,;\, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

(3) $3x^2 - 5x = 0$

$S_{(3)} = \{0 \,;\, \frac{5}{3}\}$

(4) $9x^2 - 7 = 0$

$S_{(4)} = \{-\frac{\sqrt{7}}{3} \,;\, \frac{\sqrt{7}}{3}\}$

(5) $x^2 + 1 > 0$

$S_{(5)} = \mathbb{R}$

♦ Exercice 1.d page 46

(1) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$S_{(1)} = \{-2 \,;\, \frac{1}{2}\}$

(2) $x^2 + x\sqrt{2} - 2 = 0$

$S_{(2)} = \{-\sqrt{2}\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} \,;\, -\sqrt{2}\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$

♦ Exercice 1.e page 46

(1) $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

$S_{(1)} =]-\infty \,;\, -3] \cup [\frac{1}{2} \,;\, +\infty[$

(2) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

$S_{(2)} =]-\infty \,;\, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2} \,;\, +\infty[$

(3) $x^2 - 4x - 5 < 0$

$S_{(3)} =]-1 \,;\, 5[$

(4) $-2x^2 + x - 8 \leq 0$

$S_{(4)} = \mathbb{R}$

♦ Exercice 1.f page 47

(1) $P(x) = 5x^2 - 7x + 2 = 5(x-1)(x - \frac{2}{5})$

$S_{(1)} = \{1 \,;\, \frac{2}{5}\}$

(2) $P(x) = 3x^2 - 5x - 8 = 3(x+1)(x - \frac{8}{3})$

$S_{(2)} = \{-1 \,;\, \frac{8}{3}\}$

(3) $P(x) = x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6}$

$\sqrt{3}$ est une racine de $P(x)$, a est l'autre racine.

$a\sqrt{3} = -6$; $a + \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$S_{(3)} = \{-2 \,;\, \sqrt{3}\}$

♦ Exercice 1.g page 47

Deux nombres de somme 62 et de produit 861 sont les solutions de l'équation :

$$x^2 - 62x + 861 = 0.$$

Les nombres sont : $x_1 = 21$; $x_2 = 41$.

♦ Exercice 1.h page 47

(1) $(m+2)x^2 + 2mx + (m-3) = 0$

- Pour $m = -2$

(1) $-4x - 5 = 0$

$S_{(1)} = \{-\frac{5}{4}\}$

- Pour $m \neq -2$; $\Delta = 4(m+6)$

– Si $m < -6$; $\Delta < 0$

$S_{(1)} = \varnothing$

– Si $m = -6$; $\Delta = 0$

(1) $+ 4x^2 + 12x + 9 = 0$

$S_{(1)} = \{-\frac{3}{2}\}$

– si $m \in]-6 \,;\, -2[\cup]-2 \,;\, +\infty[$; $\Delta > 0$

$S_{(1)} = \left\{-\frac{m+\sqrt{m+6}}{m+2} \,;\, -\frac{m-\sqrt{m+6}}{m+2}\right\}$

(2) $x^2 - 5x + (2m-1) = 0$

$\Delta = 29 - 8m$

– Si $m > \frac{29}{8}$; $\Delta < 0$

$S_{(2)} = \varnothing$

– Si $m = \frac{29}{8}$; $\Delta = 0$

$S_{(2)} = \{\frac{5}{2}\}$

– Si $m < \frac{29}{8}$; $\Delta > 0$

$S_{(2)} = \left\{\frac{5-\sqrt{29-8m}}{2} \,;\, \frac{5+\sqrt{29-8m}}{2}\right\}$

♦ Exercice 1.i page 47

(E) $-x^2 + 4x + 1 - m = 0$

$\Delta = 4(5-m)$

– Si $m > 5$; $\Delta < 0$

$S_{(E)} = \varnothing$

– Si $m = 5$; $\Delta = 0$

(E) $x^2 - 4x + 4 = 0$

$S_{(E)} = \{2\}$

– Si $m < 5$; $\Delta > 0$

$S_{(E)} = \{2 - \sqrt{5-m} \,;\, 2 + \sqrt{5-m}\}$

- Interprétation graphique

(E) $-x2 + 4x + 1 = m$

Considérons la parabole $(\mathcal{P})$ et la droite (D) d'équations :

$(\mathcal{P})$ $y = -x^2 + 4x + 1$

(D) $y = m$

Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{P})$ et (D).

♦ Exercice 2.a page 48

(1) $-x^4 + 7x^2 + 18 = 0$

Posons : $X = x^2$; $X \geq 0$

(1') $-X^2 + 7X + 18 = 0$; $\Delta = 112$

$X_1 = 9$; $X_2 = -2$

Or : $X_1 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

$S_{(1)} = \{3 \,;\, -3\}$

(2) $-x^4 + 7x^2 + 18 > 0$

En tenant compte de la résolution de (1), on a :

(2) $-(x-3)(x+3)(x^2+2) > 0$

$(x-3)(x+3) < 0$

$S_{(2)} =]-3 \,;\, 3[$

(3) $2x^2 - 5|x| - 3 = 0$

Posons : $X = |x|$; $X \geq 0$

(3') $2X^2 - 5X - 3 = 0$; $\Delta = 72$

$X_1 = -\frac{1}{2}$; $X_2 = 3$

Or : $X_2 = 3 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

$S_{(3)} = \{3 \,;\, -3\}$

(4) $3x + 2\sqrt{x} + 2 <= 0$

Ensemble de validité : $\mathbb{R}_+$

Posons : $X = \sqrt{x}$; $X \geq 0$

(4') $3X^2 + 2X + 2 \leq 0$; $\Delta = -20$

Le polynôme $3X^2 + 2X + 2$ est donc strictement positif. Par suite, (4') n'a pas de solution, d'où :

$S_{(4)} = 0$

♦ Exercice 2.b page 48

$P(x) = 2x^4 - 9x^2 + 4$

$X = x^2$; $X \geq 0$

$P(x) = 2X^2 - 9X + 4$

$= 2(X - \frac{1}{2})(X - 4)$

$= 2(x - \frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2})(x-2)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		2		$+\infty$
$P(x)$		+	0	–	0	+	0	–	0	+	

♦ Exercice 2.c page 48

L'équation $x^4 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

$x^4 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$

$= x^4 + (a+b)x^3 + (2+ab)^2 + (a+b)x + 1$

Par identification, on obtient :

$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$

Si les polynômes $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$ et $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ avaient des racines, alors le polynôme $x^4 + 1$ aurait des racines !

♦ Exercice 2.d page 48

(E) $|x+1|^2 - |x+1| - 6 = 0$

$X = |x+1|$; $X \geq 0$

(E') $X^2 - X - 6 = 0$

$X_1 = -2$; $X_2 = 3$

or : $X_2 = 3 \Leftrightarrow |x+1| = 3$

$\Leftrightarrow x + 1 = 3$ ou $x + 1 = -3$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -4$

$S_{(E)} = \{2 \,;\, -4\}$

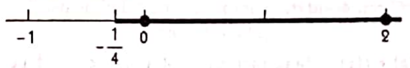
♦ Exercice 2.e page 49

(1) $\sqrt{4x+1} = x + 1$

L'équation (1) a le même ensemble de solutions que le système :

$$(\Sigma)\begin{cases} 4x + 1 >= 0 \\ x + 1 >= 0 \\ 4x + 1 = (x+1)^2 \end{cases}$$

$$(\Sigma)\begin{cases} x \geq -\frac{1}{4} \,;\, x \geq -1 \\ x(x-2) = 0 \end{cases}$$



$S_{(1)} = \{0 \,;\, 2\}$

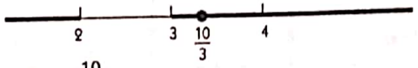
(2) $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = -x + 4$

L'équation (2) a le même ensemble de solutions que le système :

$$(\Sigma)\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ -x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 = (-x+4)^2 \end{cases}$$

$$(\Sigma)\begin{cases}(x-2)(x-3)\geq 0\\ x\leq 4\\ 3x-10=0\end{cases}$$

$$(\Sigma)\begin{cases}x\in\,]\leftarrow;2[\,\cup\,]3;\rightarrow[\\ x\in[4;\rightarrow[\\ x=\dfrac{10}{3}\end{cases}$$



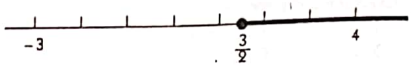
$S_{(2)}=\{\frac{10}{3}\}$

(3) $\sqrt{3x^2-11x+21}=2x-3$

L'équation (3) a le même ensemble de solutions que le système :

$$(\Sigma)\begin{cases}3x^2-11x+21\geq 0\\ 2x-3\geq 0\\ 3x^2-11x+21=(2x-3)^2\end{cases}$$

$$(\Sigma)\begin{cases}x\geq\dfrac{3}{2}\\ (x+3)(x-4)=0\end{cases}$$



$S_{(3)}=\{4\}$

♦ Exercice 2.f page 49

(1) $\sqrt{2x^2+2}\leq 3-x$

L'inéquation (1) a le même ensemble de solutions que le système :

$$(\Sigma)\begin{cases}2x^2+2\geq 0\\ 3-x\geq 0\\ 2x^2+2\leq(3-x)^2\end{cases}$$

$$(\Sigma)\begin{cases}x\leq 3\\ (x+7)(x-1)\leq 0\end{cases}$$

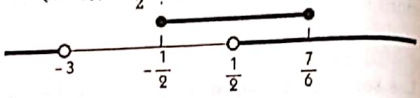
$S_{(1)}=[-7;1]$

(2) $\sqrt{7-6x}<2x+1$

L'inéquation (2) a le même ensemble de solutions que le système :

$$(\Sigma)\begin{cases}7-6x\leq 0\\ 2x+1\geq 0\\ 7-6x<(2x+1)^2\end{cases}$$

$$(\Sigma)\begin{cases}x\leq\dfrac{7}{6}\\ x\geq-\dfrac{1}{2}\\ (x+3)(x-\dfrac{1}{2})>0\end{cases}$$



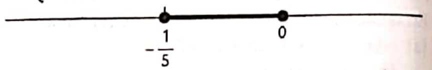
$S_{(2)}=]\frac{1}{2};\frac{7}{6}]$

(3) $\sqrt{5x+1}\leq 1$

L'inéquation (3) a le même ensemble de solutions que le système :

$$(\Sigma)\begin{cases}5x+1\geq 0\\ 5x+1\leq 1\end{cases}$$

$$(\Sigma)\begin{cases}x\geq-\dfrac{1}{5}\\ x\leq 0\end{cases}$$



$S_{(3)}=[-\frac{1}{5};0]$

Exercices d'apprentissage

♦ Exercice 1 page 53

(𝒞) représentation graphique de f définie par :

$f(x)=ax^2+bx+c.$

(a) • $f(x)$ a deux racines x_1 et x_2 ($x_1<x_2$), donc : $\Delta>0$.

• Pour $x\in\,]x_1;x_2[$, $f(x)>0$.
Pour $x\notin\,]x_1;x_2[$, $f(x)<0$, donc : $a<0$.

(b) • $f(x)$ n'a pas de racine, donc : $\Delta<0$.

• Pour tout x, $f(x)<0$, donc : $a<0$.

(c) • $f(x)$ a une unique racine x_1, donc : $\Delta=0$.

• Pour $x\neq x_1$, $f(x)>0$, donc : $a>0$.

(d) • $f(x)$ n'a pas de racine, donc : $\Delta<0$.

• Pour tout x, $f(x)>0$, donc : $a>0$.

♦ Exercice 2 page 53

Résolution à l'aide de factorisation.

(1) $(3x+2)^2-4(2x-5)^2=0$
$(-x+12)(7x-8)=0$
$S_{(1)}=\{12;\frac{8}{7}\}$

(2) $x^2-49=0$
$(x-7)(x+7)=0$
$S_{(2)}=\{7;-7\}$

(3) $(2x^2+3x)(x^2-9)=0$
$x(2x+3)(x-3)(x+3)=0$
$S_{(3)}=\{0;-\frac{3}{2};3;-3\}$

(4) $225x^2-60x+4=0$
$225(x^2-\frac{4}{15}x+\frac{4}{225})=0$
$225(x-\frac{8}{15})^2=0$
$S_{(4)}=\{\frac{2}{15}\}$

(5) $(x^2-3)(2x+1)-(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$
$2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$
$S_{(5)}=\{0;\sqrt{3};-\sqrt{3}\}$

(6) $(x-3)^2-(2x-6)(7-x)+(7-x)^2=0$
$4(x-5)^2=0$
$S_{(6)}=\{5\}$

(7) $(2x+1)^2-(2x+1)(x-5)-(2x+1)(x-5)+(x-5)^2=0$
$(x+6)^2=0$
$S_{(7)}=\{-6\}$

♦ Exercice 3 page 53

Résolution à l'aide du discriminant.

(1) $x^2-4x-50=0$; $\Delta=216$
$x_1=2-3\sqrt{6}$; $x_2=2+3\sqrt{6}$

(2) $6x^2-x-5=0$; $\Delta=121$
$x_1=-\frac{5}{6}$; $x_2=1$

(3) $2x^2+2x-7=0$; $\Delta=60$
$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{15}}{2}$; $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{15}}{2}$

(4) $x^2+x+1=0$; $\Delta=-3$
(4) n'a pas de solution.

(5) $\sqrt{2}x^2+(1-\sqrt{2}x)-1=0$; $\Delta=(1+\sqrt{2})^2$
$x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $x_2=1$

♦ Exercice 4 page 53

Résolution à l'aide du discriminant.

(1) $-41x^2+10x+8=0$; $\Delta=1412$

(2) $x(-x^2+x+6)=0$
$x=0$ ou $-x^2+x+6=0$; $\Delta=25$
$S_{(2)}=\{0;3;-2\}$

(3) $(x-1)(x^2+x-2)=0$
$x-1=0$ ou $x^2+x-2=0$; $\Delta=9$
$S_{(3)}=\{1;-2\}$

♦ Exercice 5 page 53

Résolution à l'aide de discriminant.

(1) $x^2+2x-8=0$; $\Delta=36$
$S_{(1)}=\{2;-4\}$

(2) $x^2-8x-9=0$; $\Delta=100$
$S_{(2)}=\{-1;9\}$

(3) $-4x^2+33x-8=0$; $\Delta=961=(31)^2$
$S_{(3)}=\{8;\frac{1}{4}\}$

♦ Exercice 6 page 53

Factorisation de polynôme.

(1) $P(x)=4x^2-4x+1$
$=4(x^2-x+\frac{1}{4})$
$=4(x-\frac{1}{2})^2$

(2) $P(x)=-x^2+4x+30$
$=-(x-2+\sqrt{34})(x-2-\sqrt{34})$

(3) $P(x)=5x^2-15x-20$
$=5(x^2-3x-4)$
$=5(x+1)(x-4)$

♦ Exercice 7 page 53

Résolution à l'aide de factorisation.

(1) $(2x-3)^2-(2x-3)(x^2+2x+1)\leq 0$
$-(2x-3)(x^2+4)\leq 0$
$2x-3\geq 0$
$S_{(1)}=[\frac{3}{2};+\infty[$

(2) $(x-3)-(3-x)(2x+1)\geq 0$
$2(x-3)(x+1)\geq 0$
$S_{(2)}=]-\infty;-1]\cup[3;+\infty[$

(3) $4x^2-49-(2x-7)(x+1)\leq 0$
$2(x-\frac{7}{2})(x+6)\leq 0$
$S_{(3)}=[-6;\frac{7}{2}]$

♦ Exercice 8 page 53

Résolution à l'aide de discriminant.

(1) $4x^2-5x+3\geq 0$; $\Delta=-23$;
$S_{(1)}=\mathbb{R}$

(2) $x^2-11x+10>0$; $\Delta=81$;
$S_{(2)}=]\leftarrow;1[\,\cup\,]10;\rightarrow[$

(3) $-x^2+x+2\geq 0$; $\Delta=25$;
$S_{(3)}=[-\frac{2}{3};1]$

(4) $-9x^2+12x-4\leq 0$; $\Delta=0$;
$S_{(4)}=\mathbb{R}$

(5) $x^2-4x-6\leq 0$; $\Delta=40$;
$S_{(5)}=[2-\sqrt{10};2+\sqrt{10}]$

(6) $x^2-3x+4<0$; $\Delta=25$;
$S_{(6)}=]-1;4[$

♦ Exercice 9 page 53

Résolution à l'aide du disciminant.

(1) $(3x^2-x+1)^2\geq(2x^2+9x-4)^2$
$(x^2-10x+5)(5x^2+8x-3)\geq 0$

On pose : $P_1(x) = x^2 - 10x + 5$

$P_2(x) = 5x^2 + 8x - 3$

$P(x) = P_1(x) \times P_2(x)$

$P_1(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 5 - \sqrt{5}$ ou $x_2 = 5 + \sqrt{5}$

$P_2(x) = 0 \Leftrightarrow x'_1 = \frac{-4 - \sqrt{31}}{5}$ ou $x'_2 = \frac{-4 + \sqrt{31}}{5}$

x	$-\infty$		x'_1		x'_2		x_1		x_2		$+\infty$
$P_1(x)$		+		+		+	0	−	0	+	
$P_2(x)$		+	0	−	0	+		+		+	
$P(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

$S_{(1)} =]-\infty ; x'_1] \cup [x'_2 ; x_1] \cup [x_2 ; +\infty[$.

(2) $(x^2 + x - 2)(x^2 - x - 2) < 0$

On pose : $P_1(x) = x^2 + x - 2$

$P_2(x) = x^2 - x - 2$

$P(x) = P_1(x) \times P_2(x)$

$P_1(x)$ a pour racines : -2 et 1 ;

$P_2(x)$ a pour racines : -1 et 2

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$P_1(x)$		+	0	−		−	0	+		+	
$P_2(x)$		+		+	0	−		−	0	+	
$P(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

$S_{(2)} =]-2 ; -1[\cup]1 ; 2[$.

♦ Exercice 10 page 53

(1) $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{7})x + \sqrt{35} = 0$

Cette équation est du type :

$x^2 - Sx + P = 0$ avec $S = \sqrt{5} + \sqrt{7}$; $P = \sqrt{5} \times \sqrt{7}$.

Par conséquent : $S_{(1)} = \{\sqrt{5} ; \sqrt{7}\}$.

(2) $x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$

On a : $-\sqrt{6} = \sqrt{3} \times (-\sqrt{2})$,

donc : $S_{(2)} = \{\sqrt{3} ; -\sqrt{2}\}$.

♦ Exercice 11 page 53

x_1 et x_2 de somme S et de produit P, s'ils existent, sont solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

(1) $x^2 - 28x + 195 = 0$; $\Delta = 4$;

$x_1 = 13$ et $x_2 = 15$

(2) $x^2 + 20x - 1344 = 0$; $\Delta = 5776 = 2^4 \times 19^2$;

$x_1 = -42$ et $x_2 = 28$

(3) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 3 = 0$; $\Delta = 8$;

$x_1 = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ et $x_2 = -3\sqrt{5} + \sqrt{2}$

(4) $x^2 - 14x + 851 = 0$; $\Delta = -3208$

Les nombres x_1 et x_2 n'existent pas.

(5) $x^2 - 32x + 256 = 0$; $\Delta = 0$;

$x_1 = x_2 = 16$

(6) $x^2 - 15x - 324 = 0$; $\Delta = 1521 = 3^2 \times 13^2$;

$x_1 = -12$; $x_2 = 27$

♦ Exercice 12 page 53

Une équation du second degré ayant pour solution α et β sont du type :

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0.$$

(1) $x^2 + 4x - 165 = 0$

(2) $x^2 + 12x - 405 = 0$

(3) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

(4) $x^2 - 4x - 9 = 0$

(5) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 2 = 0$

(6) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{9} = 0$

♦ Exercice 13 page 53

(1) $4x^2 - 20x + 9 = 0$

$x^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$

$x' + x'' = 5$; $x'x'' = \frac{9}{4}$

$x' = \frac{1}{2}$ et $x'' = \frac{9}{2}$

(2) $x^2 - 9x - 90 = 0$

$x' + x'' = 9$; $x'x'' = -90$

$x' = -6$ et $x'' = 15$

(3) $2x^2 + 3x - 20 = 0$

$x^2 + \frac{3}{2}x - 10 = 0$

$x' + x'' = -\frac{3}{2}$; $x'x'' = -10$

$x' = \frac{5}{2}$ et $x'' = -4$

♦ Exercice 14 page 53

(1) $x^2 - (m + 1)x + m = 0$; $\Delta = (m + 1)^2$

- Pour $m = 1$, $\Delta = 0$; $x^2 - 2x + 1 = 0$; $S_{(1)} = \{1\}$.
- Pour $m \neq 1$, $\Delta > 0$; $S_{(1)} = \{1 ; m\}$.

(2) $10x^2 - 13mx + 3m^2 = 0$; $\Delta = 49m^2$

- Pour $m = 0$, $\Delta = 0$; $10x^2 = 0$; $S_{(2)} = \{0\}$.
- Pour $m \neq 0$, $\Delta > 0$; $S_{(2)} = \{3m ; 10m\}$.

♦ Exercice 15 page 53

(1) $(3m - 5)x^2 - (m + 2)x + m + 2 = 0$

- Pour $m = \frac{5}{3}$; $x - 1 = 0$; $S_{(1)} = \{1\}$.
- Pour $m \neq \frac{5}{3}$, $\Delta = -11(m - 2)(m + 2)$;

m	$-\infty$		-2		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
Δ		−	0	+	‖	+	0	−	

* $m \in]\leftarrow ; -2[\cup]2 ; \rightarrow[$, $\Delta < 0$;

$S_{(1)} = \emptyset$

* $m \in]-2 ; \frac{5}{3}[\cup]\frac{5}{3} ; 2[$, $\Delta > 0$;

$S_{(1)} = \left\{\frac{m + 2 - \sqrt{\Delta}}{2(3m - 5)} ; \frac{m + 2 - \sqrt{\Delta}}{2(3m - 5)}\right\}$

* $m = -2$, $-11x^2 = 0$;

$S_{(1)} = \{0\}$

* $m = 2$; $(x - 2)^2 = 0$;

$S_{(1)} = \{2\}$

(2) $(m - 3)x^2 + (7 - 4m)x + 20 = 0$

- Pour $m = 3$, $-5x + 20 = 0$; $S_{(2)} = \{4\}$
- Pour $m \neq 3$, $\Delta = 16(m - \frac{17}{4})^2$

m	$-\infty$		3		$\frac{17}{4}$		$+\infty$
Δ		+	‖	+	0	+	

* $m = \frac{17}{4}$; $(x - 4)^2 = 0$; $S = \{4\}$

* $m \in]-\infty ; 3[\cup]3 ; \frac{17}{4}[\cup]\frac{17}{4} ; +\infty[$

$S_{(2)} = \{-4 ; \frac{5}{3 - m}\}$

(3) $(6 - m)x^2 + (3m + 1)x - 3 - 9m = 0$

- Pour $m = 6$, $19x - 57 = 0$; $S_{(3)} = \{57\backslash 19\}$
- Pour $m \neq 6$, $\Delta = (3m + 1)(-9m + 73)$

m	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		6		$\frac{73}{9}$		$+\infty$
Δ		−	0	+	‖	+	0	−	

* $m = -\frac{1}{3}$; $\frac{19}{3}x^2 = 0$; $S_{(3)} = \{0\}$

* $m = \frac{73}{9}$; $-\frac{19}{9}(x - 6)^2 = 0$; $S_{(3)} = \{6\}$

* $m \in]-\frac{1}{3} ; 6[\cup]6 ; \frac{73}{9}[$

$S_{(3)} = \left\{\frac{-(3m + 1) - \sqrt{\Delta}}{2(6 - m)} ; \frac{-(3m + 1) + \sqrt{\Delta}}{2(6 - m)}\right\}$

(4) $(4m + 1)x^2 - 2(7 - 2m)x + 3 + m = 0$

- Pour $m = -\frac{1}{4}$; $-15x + \frac{11}{4} = 0$

$S_{(4)} = \{\frac{11}{60}\}$

- Pour $m \neq -\frac{1}{4}$; $\Delta' = 46 - 41m$

m	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{46}{41}$		$+\infty$
Δ		+	‖	+	0	−	

* $m = \frac{46}{41}$; $(15x - 13)^2 = 0$; $S_{(4)} = \{\frac{13}{15}\}$

* $m \in]-\infty ; -\frac{1}{4}[\cup]-\frac{1}{4} ; \frac{46}{41}[$

$S_{(4)} = \left\{\frac{7 - 2m - \sqrt{\Delta'}}{4m} + 1 ; \frac{7 - 2m + \sqrt{\Delta'}}{4m + 1}\right\}$

(5) $(m^2 - 4)x^2 - 2(m + 2)x + (m - 2) = 0$

- Pour $m = 2$; $-8x + 1 = 0$; $S_{(5)} = \{\frac{1}{8}\}$
- Pour $m = -2$; $0x = 3$; $S_{(5)} = \emptyset$
- Pour $m \neq 2$ et $m \neq -2$,

$\Delta' = -m(m + 2)(m - 4)$

m	$-\infty$		-2		0		2		4		$+\infty$
Δ		+	‖	−	0	+	‖	+	0	−	

* $m = 0$; $(x + \frac{1}{2})^2 = 0$; $S_{(5)} = \{-\frac{1}{2}\}$

* $m = 4$; $12(x - \frac{1}{2})^2 = 0$; $S_{(5)} = \{\frac{1}{2}\}$

* $m \in]-\infty ; -2[\cup]0 ; 2[\cup]2 ; 4[$

$S_{(5)} = \left\{\frac{m + 2 - \sqrt{\Delta'}}{m^2 - 4} ; \frac{m + 2 + \sqrt{\Delta'}}{m^2 - 4}\right\}$

* $m \in]-2 ; 0[\cup]4 ; \rightarrow[$; $S_{(5)} = \emptyset$

♦ Exercice 16 page 53

- Détermination de m.

(1) $(m + 1)x^2 - 2mx + 5 = 0$

1 est solution de cette équation lorsque $m = 6$.

(2) $mx^2 - (2m + 1)x + 2 = 0$

1 est solution de cette équation lorsque $m = 1$.

(3) $(m^2 + 1)x^2 + 3(m - 1)x + m = 2$

1 est solution de cette équation lorsque :

$m^2 + 4m - 2 = 0$,

d'où : $m = -2 - \sqrt{6}$ ou $m = -2 + \sqrt{6}$.

- Détermination de la 2e solution a.

(1) $a = \frac{5}{m + 1} = \frac{5}{7}$

(2) $a = \frac{2}{m} = 2$

(3) $a = \frac{m}{m^2 + 1}$

* $m = -2 - \sqrt{6}$; $a = \frac{-2 - \sqrt{6}}{11 + 4\sqrt{6}} = \frac{2 - 3\sqrt{6}}{25}$

* $m = -2 + \sqrt{6}$; $a = \frac{-2 + \sqrt{6}}{11 - 4\sqrt{6}} = \frac{2 + 3\sqrt{6}}{25}$

♦ Exercice 17 page 53

- Détermination de m.

(1) $(2m - 1)x^2 - 2mx + 5 = 0$

-1 est solution de cette équation lorsque $m = -1$.

(2) $\frac{m + 1}{m - 1}x^2 - (2m + 1)x - 9 = 0$ avec $m \neq 1$

-1 est solution de cette équation lorsque :

$$2m^2 - 9m + 9 = 0$$

d'où : $m = \frac{3}{2}$ ou $m = 3$.

(3) $x^2 + (2m^2 - m + 2)x + m + 5 = 0$

-1 est solution de cette équation lorsque :

$$m^2 - m - 2 = 0$$

d'où : $m = -1$ ou $m = 2$.

(4) $\frac{m}{4}x^2 - 2(m - 1)x + 4(m - 5) = 0$

-1 est solution de cette équation lorsque : $m = \frac{88}{25}$.

• Détermination de la 2e solution a.

(1) $a = -\frac{5}{2m-1} = \frac{5}{3}$

(2) $a = 9 \times \frac{m-1}{m+1}$

* $m = \frac{3}{2}$; $a = \frac{9}{5}$

* $m = 3$; $a = \frac{9}{2}$

(3) $a = -(m+5)$

* $m = -1$; $a = -4$
* $m = 2$; $a = -7$

(4) $a = -16 \times \frac{m-5}{m} = \frac{74}{11}$

♦ **Exercice 18 page 54**

$P(x) = x^3 - x^2 + x + 3$

(1) On vérifie que $P(-1) = 0$.

• Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + x + 3 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{1-1} -2x^2 + x + 3 & \\ +2x^2 + 2x & \\ \cline{1-1} 3x + 3 & \\ -3x - 3 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$P(x) = (x+1)(x^2 - 2x + 3)$

• Méthode par identification

$P(x) = (x+1)(x^2 + \alpha x + 3)$

$= x^3 + (1+\alpha)x^2 + (3+\alpha)x + 3$

d'où : $1 + \alpha = -1$; $3 + \alpha = 1$;

$\alpha = -2$.

(2) Résolution de $P(x) = 0$

$(x+1)(x^2 - 2x + 3) = 0$

Δ discriminant de $x^2 - 2x + 3$; $\Delta = -8$,

donc : $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

(3) Résolution de $P(x) \geq 0$

$(x+1)(x2 - 2x + 3) \geq 0$

Pour tout x, $x^2 - 2x + 3 > 0$

$P(x)$ est du signe de $(x+1)$,

donc $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1 ; +\infty[$.

♦ **Exercice 19 page 54**

$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 14x - 8$

(1) On vérifie que $P(2) = 0$

$P(x) = (x-2)(2x^2 + 9x + 4)$

(2) Résolution de $P(x) = 0$

Δ discriminant de $2x^2 + 9x + 4$; $\Delta = 49$,

d'où : $P(x) = 2(x-2)(x+4)(x+\frac{1}{2})$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2 ; -4 ; -\frac{1}{2}\}$

(3) Résolution de $P(x) \leq 0$

m	$-\infty$		-4		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -4] \cup [-\frac{1}{2} ; 2]$.

♦ **Exercice 20 page 54**

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

(1) On vérifie que $P(3) = 0$

$P(x) = (x-3)(x^2 - 2x - 3)$

$P(x) = (x-3)^2(x+1)$

(2) $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{3 ; -1\}$

(3) $P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -1] \cup \{3\}$

♦ **Exercice 21 page 54**

(E) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$

$P(\frac{1}{2}) = 0$

$P(x) = (x - \frac{1}{2})(2x^2 - 2x - 12)$

$= (2x-1)(x^2 - x - 6)$

$= (2x-1)(x+2)(x-3)$

$S_{(E)} = \{\frac{1}{2} ; -2 ; 3\}$.

♦ **Exercice 22 page 54**

(E) $x^3 - 8x^2 - 16x + 128 = 0$

$P(x) = x^3 - 8x^2 - 16x + 128$

$P(8) = 0$

$P(x) = (x-8)(x^2 - 16)$

$= (x-8)(x-4)(x+4)$

$S_{(E)} = \{8 ; 4 ; -4\}$

♦ **Exercice 23 page 54**

(1) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

$X = x^2$; $X \geq 0$

$X^2 - 13X + 36 = 0$; $\Delta = 25$

$X_1 = 4$; $X_2 = 9$

$S_{(1)} = \{-2 ; 2 ; -3 ; 3\}$

(2) $-x^4 + 18x^2 - 32 = 0$

$X = x^2$; $X \geq 0$

$-X^2 + 18X - 32 = 0$; $\Delta = 196$

$X_1 = 16$; $X_2 = 2$

$S_{(2)} = \{-4 ; 4 ; -2 ; 2\}$

(3) $x^4 + x^2 - 2 = 0$

$X = x^2$; $X \geq 0$

$X^2 + X - 2 = 0$; $\Delta = 9$

$X_1 = -2$; $X2 = 1$

$S_{(3)} = \{-1 ; 1\}$

(4) $x^4 + x^2 + 1 = 0$

$X = x^2$; $X \geq 0$

$X^2 + X + 1 = 0$; $\Delta = -3$

$S_{(4)} = \varnothing$

♦ **Exercice 24 page 54**

(1) $P(x) = 2x^4 - 21x^2 + 10$

$X = x^2$

$Q(x) = 2X^2 - 21X + 10$

$= 2(X - 10)(X - \frac{1}{2})$

$P(x) = 2(x^2 - 10)(x^2 - \frac{1}{2})$

$= (x^2 - 10)(2x^2 - 1)$

$P(x) = (x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10})(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$

(2) $P(x) = x^4 - 15x^2 - 16$

$X = x^2$

$Q(x) = X^2 - 15X - 16$

$= (X+1)(X-16)$

$P(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 16)$

$P(x) = (x^2 + 1)(x - 4)(x + 4)$

(3) $P(x) = 4x^4 - 20x^2 + 25$

$X = 2x^2$

$Q(x) = X^2 - 10X + 25 = (X - 5)^2$

$P(x) = (2x^2 - 5)^2$

$P(x) = (\sqrt{2}x - \sqrt{5})^2(\sqrt{2}x + \sqrt{5})^2$

(4) $P(x) = 2x^4 - 5x2 + 2$

$X = x^2$

$Q(x) = 2X^2 - 5X + 2 = (2X - 1)(X - 2)$

$P(x) = (2x^2 - 1)(x^2 - 2)$

$P(x) = (\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

(5) $P(x) = x^4 - 8x^2 - 9$

$X = x^2$

$Q(X) = X^2 - 8X - 9 = (X+1)(X-9)$

$P(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 9)$

$P(x) = (x^2 + 1)(x - 3)(x + 3)$

(6) $P(x) = x^4 + 5x^2 + 4$

$X = x^2$

$Q(X) = X^2 + 5X + 4 = (X+1)(X+4)$

$P(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$

♦ **Exercice 25 page 54**

(1) $2x - \sqrt{x} + 2 = 0$; $V_{(1)} = \mathbb{R}_+$

$X = \sqrt{x}$

(1') $2X^2 - X + 2 = 0$; $\Delta = -15$

$S_{(1)} = \varnothing$

(2) $5x + 4\sqrt{x} - 9 = 0$; $V_{(2)} = \mathbb{R}_+$

$X = \sqrt{x}$

(2') $5X^2 + 4X - 9 = 0$; $\Delta = 14^2$

$X_1 = -\frac{14}{5}$; $X_2 = 1$

$\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

$S_{(2)} = \{1\}$

(3) $-14x + 13\sqrt{x} + 30 = 0$; $V_{(3)} = \mathbb{R}_+$

$X = \sqrt{x}$

$-14X^2 + 13X + 30 = 0$; $\Delta = 43^2$

$X_1 = 2$; $X_2 = -\frac{15}{14}$

$\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$

$S_{(3)} = \{4\}$

♦ **Exercice 26 page 54**

(1) $2x^2 - |x| - 15 = 0$

$2|x|^2 - |x| - 15 = 0$

$X = |x|$

(1') $2X^2 - X - 15 = 0$; $\Delta = 11^2$

$X_1 = -\frac{5}{2}$; $X_2 = 3$

$|x| = 3 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

$S_{(1)} = \{3 ; -3\}$

(2) $3x^2 - 8|x| + 4 = 0$

$X = |x|$

(2') $3X^2 - 8X + 4 = 0$; $\Delta = 4^2$

$X_1 = \frac{2}{3}$; $X_2 = 2$

$S_{(2)} = \{\frac{2}{3} ; -\frac{2}{3} ; 2 ; -2\}$

♦ **Exercice 27 page 54**

(1) $x^4 - 2x^2 - 15 > 0$

$X = x^2$

(1') $X^2 - 2X - 15 > 0$

$(X - 5)(X + 3) > 0$

(1) $(x^2 - 5)(x^2 + 3) > 0$

$S_{(1)} =]-\infty ; -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5} ; \rightarrow[$

(2) $3x^4 - 5x^2 + 22 \leq 0$

$X = x^2$

(2') $3X^2 - 5X + 22 \leq 0$;

$\Delta = -239$

(2') n'a pas de solution, d'où : $S_{(2)} = 0$.

(3) $3x^4 - 11x^2 + 18 \geq 0$

$X = x^2$

(3') $3X^2 - 11X + 18 >= 0$;

$\Delta = -95$

Tout nombre réel positif est solution de (3'), d'où :

$S_{(3)} = \mathbb{R}$

(4) $4x^4 - 4x^2 + 1 \geq 0$

$X = x^2$

(4') $4X^2 - 4X + 1 \geq 0$

$(2X - 1)^2 \geq 0$

$S_{(4)} = \mathbb{R}$

♦ **Exercice 28 page 54**

(1) $\sqrt{x+2} = 4$

L'équation (1) a le même ensemble de solutions que le système :

$(\Sigma)\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+2 = 16 \end{cases}$

d'où : $S_{(1)} = 14$.

(2) $\sqrt{x-1} = -3$; $S_{(2)} = \varnothing$

♦ **Exercice 29 page 54**

(1) $\sqrt{x+2} = \sqrt{3x-5}$

L'équation (1) a le même ensemble de solutions que le système :

$(\Sigma)\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3x-5 \geq 0 \\ x+2 = 3x-5 \end{cases}$

$S_{(1)} = \{\frac{7}{2}\}$

(2) $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x}$

L'équation (2) a le même ensemble de solutions que le système :

$(\Sigma)\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x+1 = x \end{cases}$

d'où : $S_{(2)} = \varnothing$

(3) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-4} = 0$

$\sqrt{x-1} = \sqrt{x-4}$

L'équation (3) a le même ensemble de solutions que le système :

$(\Sigma)\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \\ x-1 = x-4 \end{cases}$

d'où : $S_{(3)} = \varnothing$

(4) $\sqrt{2x^2+5x-7} = \sqrt{x^2-x-2}$

L'équation (3) a le même ensemble de solutions que le système :

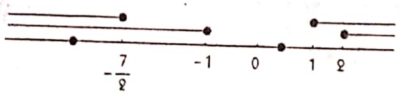
$(\Sigma)\begin{cases} 2x^2+5x-7 \geq 0 \\ x^2-x-2 \geq 0 \\ 2x^2+5x-7 \geq x^2-x-2 \end{cases}$

$(\Sigma)\begin{cases} (x-1)(2x+7) \geq 0 \\ (x+1)(x-2) \geq 0 \\ x^2+6x-5 = 0 \end{cases}$

L'équation $x^2+6x-5=0$ a pour solutions : $-3+\sqrt{14}$ et $-3-\sqrt{14}$.

On vérifie que : $0 < -3+\sqrt{14} < 1$

$-7 < -3-\sqrt{14} < -6$



d'où : $S_{(4)} = \{-3 ; -\sqrt{14}\}$

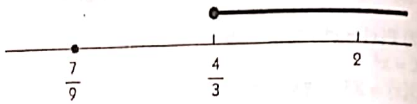
♦ **Exercice 30 page 54**

(1) $\sqrt{x+2} = 3x-4$

L'équation (1) a le même ensemble de solutions que le système :

$(\Sigma)\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3x-4 \geq 0 \\ x+2 = (3x-4)^2 \end{cases}$

$(\Sigma)\begin{cases} x \geq \frac{4}{3} \\ 9(x-\frac{7}{9})(x-2) = 0 \end{cases}$



d'où : $S_{(1)} = \{2\}$

(2) $2x+1+\sqrt{-7x-5} = 4$

$\sqrt{-7x-5} = -2x+3$

L'équation (2) a le même ensemble de solutions que le système :

$(\Sigma)\begin{cases} -7x-5 \geq 0 \\ -2x+3 \geq 0 \\ -7x-5 = (-2x+3)^2 \end{cases}$

$(\Sigma)\begin{cases} x < -\frac{5}{7} \\ 4x^2-5x+14 = 0 ; \Delta < 0 \end{cases}$

d'où : $S_{(2)} = \varnothing$

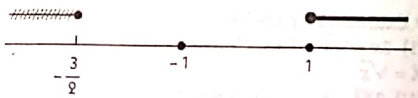
(3) $1+\sqrt{3x^2-2x-1} = x$

$\sqrt{3x^2-2x-1} = x-1$

L'équation (3) a le même ensemble de solutions que le système :

$(\Sigma)\begin{cases} 3x^2-2x-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 3x^2-2x-1 = (x-1)^2 \end{cases}$

$(\Sigma)\begin{cases} (x-1)(3x+1) \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ (x-1)(x+1) = 0 \end{cases}$



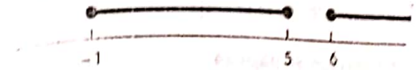
d'où : $S_{(3)} = \{1\}$

(4) $\sqrt{-x2+4x+5} = x-6$

L'équation (4) a le même ensemble de solutions que le système :

$(\Sigma)\begin{cases} -x^2+4x+5 \geq 0 \\ x-6 \geq 0 \\ -x^2+4x+5 = (x-6)^2 \end{cases}$

$(\Sigma)\begin{cases} -(x-5)(x+1) \geq 0 \\ x-6 \geq 0 \\ -x^2+4x+5 = (x-6)^2 \end{cases}$



Il n'existe aucun nombre réel qui vérifie simultanément les deux inéquations.

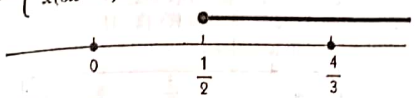
(5) $1-2x+\sqrt{x^2+1} = 0$

$\sqrt{x^2+1} = 2x-1$

L'équation (5) a le même ensemble de solutions que le système (Σ) :

$(\Sigma)\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2+1 = (2x-1)^2 \end{cases}$

$(\Sigma)\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x(3x-4) = 0 \end{cases}$



d'où : $S_{(5)} = \{\frac{4}{3}\}$

♦ **Exercice 31 page 54**

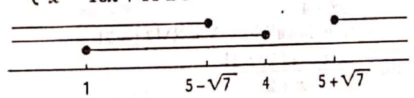
(1) $x+\sqrt{2x-2} \leq 4$

$\sqrt{2x-1} \leq -x+4$

L'inéquation (1) a le même ensemble de solutions que le système (Σ) :

$(\Sigma)\begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ -x+4 \geq 0 \\ 2x-2 \leq (-x+4)^2 \end{cases}$

$(\Sigma)\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x^2-10x+18 \geq 0 \end{cases}$



d'où : $S_{(1)} = [1 ; 5-\sqrt{7}]$

(2) $\sqrt{-x^2+x+1} < x-5$

L'équation (2) a le même ensemble de solutions que le système (Σ) :

$(\Sigma)\begin{cases} -x^2+x+1 \geq 0 \\ x-5 > 0 \\ -x^2+x+1 < (x-5)^2 \end{cases}$

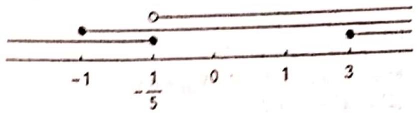
Il n'existe aucun nombre réel qui vérifie simultanément les deux premières inéquations.

(3) $2\sqrt{x(x-3)} < 2x+2$

L'équation (3) a le même ensemble de solutions que le système (Σ) :

$(\Sigma)\begin{cases} x(x-3) \geq 0 \\ 2x+2 \geq 0 \\ x(x-3) < (x+1)^2 \end{cases}$

$(\Sigma)\begin{cases} x(x-3) \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 5x+1 > 0 \end{cases}$



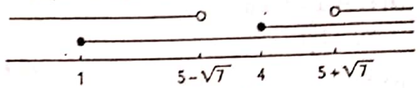
d'où : $S_{(3)} =]-\frac{1}{5} ; 0] \cup [3 ; +\infty[$

(4) $4+\sqrt{2x-2} < x$

$\sqrt{2(x-1)} < x-4$

L'équation (4) a le même ensemble de solutions que le système (Σ) :

$(\Sigma)\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \\ 2(x-1) < (x-4)^2 \end{cases}$

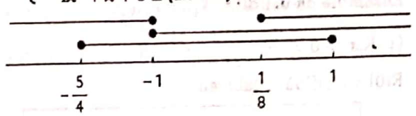


d'où : $S_{(4)} =]5+\sqrt{7} ; +\infty[$

(5) $\sqrt{-4x^2+x+5} \leq 2x+2$

L'équation (5) a le même ensemble de solutions que le système (Σ) :

$(\Sigma)\begin{cases} -4x^2+x+5 \geq 0 \\ 2x+2 \geq 0 \\ -4x^2+x+5 \leq (2x+2)^2 \end{cases}$



d'où : $S_{(5)} = [\frac{1}{8} ; 1] \cup \{-1\}$

(6) $3\sqrt{x^2+1-2x-5} \leq 0$

$\sqrt{x^2-2x-4} \leq 0$

d'où : $S_{(6)} = \varnothing$

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 32 page 54

(1) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

Ensemble de validité : $V_{(1)} = \mathbb{R}\setminus\{2 ; 1\}$

$\frac{x^2 - 5x}{2(x-2)(x+1)} = 0$

(1) $\Leftrightarrow x(x-5) = 0$

$S_{(1)} = \{0 ; 5\}$

(2) $\frac{x^2 - 4}{x-2} + \frac{1}{x+1} = 1$

Ensemble de validité : $V_{(2)} = \mathbb{R}\setminus\{-1 ; 2\}$

(2) $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0$

$S_{(2)} = \varnothing$

(3) $\frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{11-x}{x2-4}$

Ensemble de validité : $V_{(3)} = \mathbb{R}\setminus\{-2 ; 2\}$

(3) $\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$

$S_{(3)} = \{3 ; -3\}$

(4) $\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-4}{2x} = \frac{2}{x^2-x}$

Ensemble de validité : $V_{(4)} = \mathbb{R}\setminus\{1 ; 0\}$

(4) $\Leftrightarrow x(3x-7) = 0$

$S_{(4)} = \{\frac{7}{3}\}$

(5) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{2}{x-1} = 2 + \frac{x+1}{x-1}$

Ensemble de validité : $V_{(5)} = \mathbb{R}\setminus\{-1 ; 1\}$

(5) $\Leftrightarrow 2x(x+3) = 0$

$S_{(5)} = \{0 ; -3\}$

♦ Exercice 33 page 54

(1) $\frac{x^2 - 6x - 7}{5 - 2x} > 0$

Ensemble de validité : $V_{(1)} = \mathbb{R}\setminus\{\frac{5}{2}\}$

(1) $R(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-7)(x+1)}{-2x+5} > 0$

R(0) < 0 ; d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		7		$+\infty$
$R(x)$		+	$\boxed{0}$	−	‖	+	$\boxed{0}$	−	

$S_{(1)} =]\leftarrow ; -1[\cup]\frac{5}{2} ; 7[$

(2) $\frac{x(x+1)}{x-1} < 2x$

Ensemble de validité : $V_{(2)} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

(2) $\Leftrightarrow \frac{x(x+1) - 2x(x+3)}{x-1} < 0$

(2) $R(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x(-x+3)}{x-1} < 0$

R(2) > 0 ; d'où le tableau :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$R(x)$		+	$\boxed{0}$	−	‖	+	$\boxed{0}$	−	

$S_{(2)} =]0 ; 1] \cup]3 ; \rightarrow[$

♦ Exercice 34 page 54

$P(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$

1) On vérifie que : $P(\frac{3}{2}) = 0$

On obtient :

$P(x) = (x - \frac{3}{2})(2x^2 + 2x + 2)$

$P(x) = (2x-3)(x2 + x + 1)$

2) Résolution de $P(x) = 0$

$S = \{\frac{3}{2}\}$

3) Résolution de $R(x) < 0$

$R(x) = \frac{P(x)}{x^2 - 3x + 2} = \frac{P(x)}{(x-1)(x+2)}$

Ensemble de validité : $V = \mathbb{R}\setminus\{2 ; 1\}$

R(0) < 0 ; d'où le tableau :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$R(x)$		−	‖	+	$\boxed{0}$	−	‖	+	

$S' =]-\infty ; 1[\cup]\frac{3}{2} ; 2[$

♦ Exercice 35 page 54

$P(x) = (x^2 - 2x)(2x^2 - 9x - 5)$

1) On vérifie que $P(5) = 0$

$P(x) = x(x-2)(x-5)(2x+1)$

2) Résolution de $P(x) = 0$

$S = \{0 ; 2 ; 5 ; -\frac{1}{2}\}$

3) Résolution de $R(x) < 0$

$R(x) = \frac{P(x)}{x^2 - 4}$

Ensemble de validité : $V = \mathbb{R}\setminus\{2 ; -2\}$

$R(x) = \frac{x(x-5)(2x+1)}{x+2}$

R(1) ; d'où le tableau :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		0		2		5		$+\infty$
$R(x)$		+	‖	−	$\boxed{0}$	+	$\boxed{0}$	−	‖	−	$\boxed{0}$	+	

$S' =]-2 ; -\frac{1}{2}[\cup [0 ; 2[\cup [2 ; 5[$

♦ Exercice 36 page 54

(1) $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -1 \end{cases}$

x et y sont les solutions de : $u^2 + u - 1 = 0$

x et y sont les nombres : $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{cases}$

x^2 et y^2 sont les solutions de : $u^2 - 5u + 4 = 0$.

x^2 et y^2 sont donc les nombres 1 et 4.

x et y sont les nombres 1 et − 2 ou bien − 1 et 2.

(3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases}$

(3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = 8 \end{cases}$

(3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2y^2 = 64 \\ xy > 0 \end{cases}$

x^2 et y^2 sont les solutions de : $u^2 - 20u + 64 = 0$.

x^2 et y^2 sont donc les nombres 4 et 16.

x et y sont les nombres 2 et 4 ou bien − 2 et − 4.

(4) $\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$

(4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$

or : $x^3 + y^3 = (x+y)(x - xy + y)$

$x - xy + y \neq 0$

(4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$

x et y sont les solutions de : $u^2 - 1 = 0$.

x et y sont donc les nombres 1 et − 1.

(5) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ xy = 2 \end{cases}$

(5) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ x^4y^4 = 16 \\ xy > 0 \end{cases}$

x^4 et y^4 sont solutions de : $u^2 - 17u + 16 = 0$.

x^4 et y^4 sont donc les nombres 1 et 16.

x et y sont les nombres 1 et 2 ou bien − 1 et − 2.

(6) $\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 35 \end{cases}$

(6) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + (-y) = 2 \\ x(-y) = -35 \end{cases}$

x et $(-y)$ sont solutions de : $u^2 - 2u - 35 = 0$.

x et $(-y)$ sont donc les nombres − 5 et 7.

x et y sont les nombres − 5 et − 7 ou bien 5 et 7.

♦ Exercice 37 page 54

(1) $2x|x| - 6x - 2 = 0$

- Pour $x \geq 0$

(1) $\Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 2 = 0$

(1) a donc une unique solution positive : $\frac{3+\sqrt{13}}{12}$.

- Pour $x \leq 0$

(1) $\Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 2 = 0$

(1) admet donc deux solutions négatives :

$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

- Ensemble de solutions de (1)

$S_{(1)} = \left\{\frac{3+\sqrt{13}}{2} ; \frac{-3-\sqrt{5}}{2} ; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

(2) $2x^2 - 3x + 5 = x - 1$

- Pour $x \geq 1$

(2) $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 6 = 0$

(2) n'admet aucune solution supérieure à 1.

- Pour $x \leq 1$, (2) $\Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0$

(2) n'admet aucune solution inférieure à 1.

- Ensemble de solutions de (2)

$S_{(2)} = \varnothing$

♦ Exercice 38 page 54

(E) $x^2 - 2mx + 2 = 0$

Supposons a et b solutions de (E) telles que $b = 2a$.

On a donc : $(x-a)(x-2a) = x2 - 2mx + 2$.

d'où : $\begin{cases} a^2 = 1 \\ m = \frac{3}{2}a \end{cases}$; $\begin{cases} a = -1 \text{ ou } a = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \text{ ou } m = \frac{3}{2} \end{cases}$

- Pour $m = \frac{3}{2}$; $a = 1$ et $b = 2$.
- Pour $m = -\frac{3}{2}$; $a = -1$ et $b = -2$.

♦ Exercice 39 page 55

(E) $ax^2 + 2x + c = 0$

$a \in [-3 ; 3]$, $c \in [-3 ; 3]$

$\Delta = 4(1 - ac)$

1) (E) a une solution unique $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{a}$; $a \neq 0$

Les couples $(a ; c)$ sont donc de la forme $(a ; \frac{1}{a})$ avec $a \in [-3 ; 0[\cup]0 ; 3]$.

2) 0 est solution unique de (E) $\Leftrightarrow c = 0$.

Les couples $(a ; c)$ sont donc de la forme $(a ; 0)$.

3) 0 et 2 sont solutions de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = 0 \end{cases}$ d'où le couple $(-1 ; 0)$.

♦ Exercice 40 page 55

(E) $x^2 - 2mx + m + 3 = 0$

$\Delta = 4(m^2 - m - 3)$.

• (E) a deux solutions $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \notin [\frac{1-\sqrt{13}}{2} ; \frac{1+\sqrt{13}}{2}]$

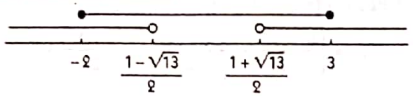
Notons a et b ces deux solutions.

• Si a et b appartiennent à $[-2 ; 3]$, alors $4 \leq a + b \leq 6$

or : $a + b = 2m$

$a + b \in [4 ; 6] \Leftrightarrow m \in [-2 ; 3]$.

On obtient le schéma :



$m \in [-2 ; \frac{1-\sqrt{13}}{2}[\cup]\frac{1+\sqrt{13}}{2} ; 3]$

♦ Exercice 41 page 55

(1) $(2m - 5)x^2 + mx + 7 = 0$.

(1) du second degré $\Leftrightarrow m \neq \frac{5}{2}$.

$\Delta = m^2 - 56m + 140$.

• (1) a deux solutions $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \notin [28 - \sqrt{644} ; 28 + \sqrt{644}]$.

Notons a et b ces deux solutions.

• a et b de signes contraires $\Leftrightarrow ab < 0$

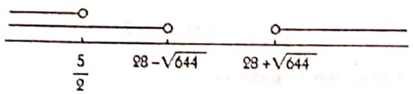
or : $ab = \frac{7}{2m - 5}$

$ab < 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$.

Par des inégalités ou à l'aide d'une calculatrice, on range les nombres :

$28 - \sqrt{644} ; 28 + \sqrt{644} ; \frac{5}{2}$.

On obtient le schéma :



(1) a deux solutions de signes contraires pour $m < \frac{5}{2}$.

(2) $(m - 5)x^2 - (m + 2)x + m - 1 = 0$

• (2)du second degré $\Leftrightarrow m \neq 5$

$\Delta = -3m^2 + 28m - 16$

• (2) a deux solutions $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \notin [\frac{14 - \sqrt{74}}{2} ; \frac{14 + \sqrt{74}}{2}]$.

Notons a et b ces deux solutions.

• a et b de signes contraires $\Leftrightarrow ab < 0$

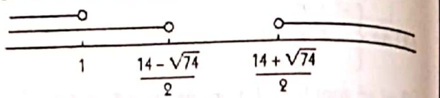
or : $ab = \frac{m - 1}{m - 5}$

$ab < 0 \Leftrightarrow m \notin [1 ; 5]$.

Par des inégalités ou à l'aide d'une calculatrice, on range les nombres :

$\frac{14 - \sqrt{74}}{2} ; \frac{14 + \sqrt{74}}{2} ; 1 ; 5$.

On obtient le schéma suivant :



(2) a deux solutions de signes contraires pour

$m \in]-\infty ; 1[\cup]\frac{14 + \sqrt{74}}{2} ; +\infty[$.

♦ Exercice 42 page 55

(1) $2x^2 + m - x + 2 = 0$

$2x^2 - x + m + 2 = 0$

$\Delta = -m - 15$

• (1) a deux solutions $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow m < -15$

Notons a et b ces deux solutions.

• a et b strictement positives $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b > 0 \\ ab > 0 \end{cases}$

or : $a + b = 1$ et $ab = \frac{m + 2}{2}$

$ab > 0 \Leftrightarrow m > -2$.

On obtient le schéma suivant :

Il n'existe aucune valeur de m pour laquelle (1) admet deux solutions strictement positives.

(2) $(m - 3)x^2 + (2m - 1)x - 2 + 4m = 0$

• (2) est du 2^{nd} degré $\Leftrightarrow m - 3 \neq 0$

$\Delta = -12m^2 + 36m - 15$

• (2) a deux solutions $\Leftrightarrow \Delta > 0$

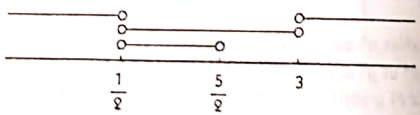
$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in]\frac{1}{2} ; \frac{5}{2}[$

Notons a et b ces deux solutions.

• a et b strictement positives $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b > 0 \\ ab > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2m - 1}{m - 3} > 0 \\ \frac{4m - 2}{m - 3} > 0 \end{cases}$

On obtient le schéma suivant :



Il n'existe aucune valeur de m pour laquelle (2) admet deux solutions strictement positives.

Problèmes

♦ Exercice 43 page 55

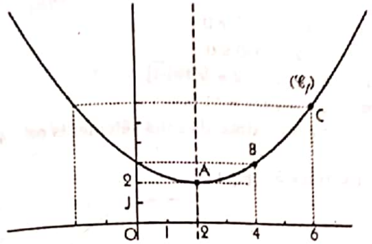
$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$

1) $f(x) = \frac{1}{4}(x - 2)^2 + 2$.

$(\mathscr{C}_f)$ est donc une parabole de sommet $A(2 ; 2)$.

2) Construction de $(\mathscr{C}_f)$.

On connaît le sommet $A(2 ; 2)$. On prend deux autres points $B(4 ; 3)$ et $C(6 ; 6)$ et leurs symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 2$.



3) Résolutions graphiques

$f(x) = 0$; $S = \varnothing$

$f(x) > 4$; $S' =]-\infty ; \alpha[\cup]\beta ; +\infty[$

avec $-1 < \alpha < 0$ et $4 < \beta < 5$.

4) Résolutions par le calcul

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x - 2)^2 + 2 = 0$; $S = 0$

$f(x) > 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 2 > 0$;

$S' =]-\infty ; 2 - 2\sqrt{2}[\cup]2 + 2\sqrt{2} ; +\infty[$.

♦ Exercice 44 page 55

$f(x) = |x - 3| - |x + 2|$

Expression de $f(x)$ sans valeurs absolues

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		5	$\boxed{0}$	$-2x + 1$	$\boxed{0}$	-5	

Pour résoudre $f(x) = m$, on considère les équations :

(1) $-2x + 1 = m$

(2) $0x + 5 = m$

(3) $0x - 5 = m$

1) Seule l'équation (1) admet une solution unique :

$x = \frac{1 - m}{2}$; $-2 \leq \frac{1 - m}{2} \leq 3$

Donc l'équation $f(x) = m_1$ a une solution unique si $m_1 \in]-5 ; 5[$.

2) (2) n'a pas de solution si $m \neq 5$. (3) n'a pas de solution si $m \neq -5$.

Donc l'équation $f(x) = m_2$ n'a aucune solution si $m \notin [-5 ; 5]$.

♦ Exercice 45 page 55

$C_0 = 70\,000$

Taux annuel x %

I_n est l'intérêt après n années, C_n est le capital après n années.

$I_1 = C_0 \times \frac{x}{100}$

$C_1 = C_0 + I_1 = C_0(1 + \frac{x}{100})$

$I_2 = C_1 \times \frac{x}{100}$

$C_2 = C_1 + I_2$.

On pose $y = \frac{x}{100}$, d'où l'équation :

$C_0 [1 + 2\frac{x}{100} + (\frac{x}{100})^2] = C_2$.

$70\,000(1 + y)^2 = 79\,394$.

On obtient : $y = 0{,}0649$

et $x = 6{,}49$.

♦ Exercice 46 page 55

$r_n = n^e$ remise

P_n = prix après la n^e remise

$P_0 = 60\,000$; $P2 = 52\,500$

$r_1 = P_0 \times \frac{x}{100}$

$P_1 = P_0 - r_1 = P_0(1 - \frac{x}{100})$

$r_2 = P_1 \times \frac{x}{100}$, $P_2 = P_1 - r_2$.

On pose $y = \frac{x}{100}$ d'où l'équation :

$P_0 [1 - 2\frac{x}{100} + (\frac{x}{100})^2] = P_2$

$60\,000(1 - y)^2 = 52\,500$

On obtient : $y = 0{,}125$

et $x = 12{,}5$.

♦ Exercice 47 page 55

(Voir exercice 45)

On obtient : $x = 18{,}75$.

♦ Exercice 48 page 55

(E) $ax^2 + bx - 2 = 0$

avec $8a + 6b - 9 = 0$

• Pour $a = 0$, $b = \frac{3}{2}$

(E) $\frac{3}{2}x - 2 = 0$

(E) a une solution unique : $\frac{4}{3}$.

• Pour $a \neq 0$

$\Delta = b^2 + 8a = (b - 3)^2$ (car $8x + 6b = 0$)

(E) a une solution unique $x_0 \Leftrightarrow \Delta = 0$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow b = 3$

On obtient : $a = -\frac{9}{8}$

$x_0 = -\frac{b}{2a}$

Donc pour $a = -\dfrac{9}{8}$ et $b = 3$,

(E) a une solution unique : $\dfrac{4}{3}$.

♦ **Exercice 49 page 55.**

$P(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 8$.

Notons a, b, c les trois racines de $P(x)$.

$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$

$P(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$

$= x^3 + 4x^2 - 5x + 8$.

Pour identification, on obtient :

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ ab + bc + ca = -5 \\ abc = -8 \end{cases}$$

On a : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{bc + ca + ab}{abc} = \dfrac{5}{8}$.

♦ **Exercice 50 page 55**

(Voir exercice 49)

On obtient :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ abc = -5 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = -2 \end{cases}$$

♦ **Exercice 51 page 55**

(Voir exercices 49 et 50)

On obtient :

$$\begin{cases} a + b + c = \dfrac{1}{4} \\ ab + bc + ca = -\dfrac{3}{20} \\ abc = -\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

$(a + b + c)^2 = \dfrac{1}{16}$

Or $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

d'où : $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{29}{80}$.

♦ **Exercice 52 page 55**

S : sous-vêtements ; $S \geq 0$

D : draps ; $D \geq 0$

La courbe de production est donnée par :

(I) $S^2 + 4S + 8D \leq 2\,496$

1) Pour $D = 0$; $S \geq 0$

(I) $(S + 52)(S - 48) \leq 0$

$S_{(I)} = [0 ; 48]$.

Le nombre maximal de sous-vêtements est **48.**

2) Pour $S = 0$; $D \geq 0$

(I) $8D \leq 2\,496$

Le nombre maximal de draps est : **312.**

3) Pour $D = 72$; $S \geq 0$

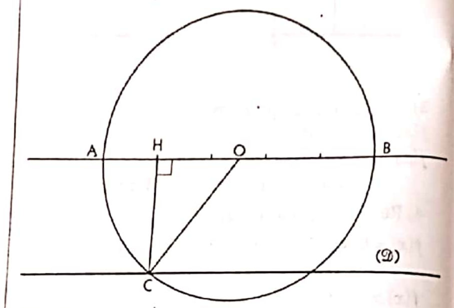
(I) $S^2 + 4S - 1920 \leq 0$

donc $S_{(I)} = [0 ; -2 + \sqrt{1924}]$

or : $-2 + \sqrt{1924} \approx 41{,}8$.

Le nombre maximal de sous-vêtements est : **41.**

♦ **Exercice 53 page 55**



AB = 5

CH = 2

COM est rectangle en H.

$HO^2 = OC^2 - HC^2$; $HO = \dfrac{3}{2}$;

AH = 1 et BH = 4.

4. Fonctions

(pages 57 à 80 du livre de l'élève)

ECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

– faire la mise en place et l'approfondissement des connaissances de base indispensables à l'étude des fonctions ;

– compléter le chapitre 1 sur les représentations graphiques des fonctions pour une utilisation immédiate des fonctions.

COMMENTAIRES

Ce chapitre traite des généralités sur les fonctions. Les élèves rencontrent souvent des difficultés avec les notions de « minorant, majorant, minimum et maximum relatifs ». Par ailleurs, les opérations sur les fonctions ne sont pas toujours perçues comme un procédé qui génère une nouvelle fonction, mais plutôt comme des opérations sur les images.

C'est la raison pour laquelle les schémas de calcul sont abondamment utilisés afin de mettre en évidence l'aspect fonctionnel et l'aspect numérique.

L'étude graphique est largement exploitée pour introduire des notions nouvelles.

Les applications injectives et surjectives ne sont pas traitées car elles n'ont pas de réels réinvestissements dans l'immédiat. Seule l'application bijective est présentée ; elle est vue sous l'aspect algébrique et graphique ; elle contribue à compléter le chapitre 1 (justification qu'une application est bijective, détermination de sa bijection réciproque).

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Généralités sur les fonctions • Définitions – Restriction d'une fonction à un ensemble. – Comparaison de deux fonctions. – Minorant, majorant d'une fonction. – Fonction minorée, majorée, bornée. – Fonction positive, négative. – Minimum, maximum (relatifs) d'une fonction.	• Déterminer la restriction d'une fonction donnée à un ensemble donné et la représenter. • Comparer graphiquement et par le calcul deux fonctions. • Majorer ou minorer une fonction par un nombre réel. • Reconnaître sur la représentation graphique d'une fonction les extremums (relatifs) de cette fonction.
Opérations sur les fonctions • Définitions – Somme, produit, quotient de deux fonctions. – Produit d'une fonction par un nombre réel. – Puissance n^e d'une fonction. – Composée de deux fonctions. • Propriétés – Composé de deux applications. – Composé de trois applications.	• Déterminer l'ensemble de définition de la somme, du produit et du quotient de deux fonctions. • Écrire une fonction comme somme, produit ou quotient de deux fonctions. • Déterminer la composée de deux fonctions.
Application bijective • Définitions – Bijection. – Bijection réciproque. • Propriétés – Caractérisation d'une bijection. – $(x \mapsto x^3)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. – Composée de deux bijections. – Condition pour que deux fonctions soient réciproques. – Représentation graphiques de deux bijections.	• Justifier qu'une application est bijective. • Justifier que deux applications sont réciproques l'une de l'autre. • Déterminer la bijection réciproque d'une bijection donnée. • Construire la représentation graphique de la réciproque d'une bijection dont on a la représentation graphique.

Exercices d'application directe

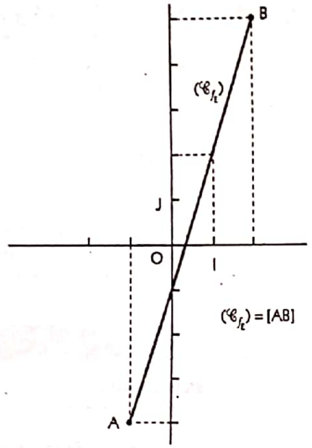
♦ Exercice 1.a page 58

Posons : $E = [-1 ; 2]$

f_E la restriction de f à E.

$f_E : [-1 ; 2] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 3x - 1$



♦ Exercice 1.b page 58

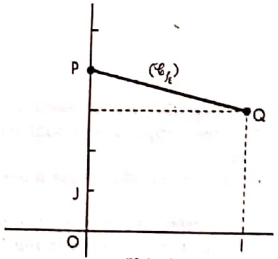
Posons : $E = [0 ; 1]$

f_E la restriction de f à E.

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$-x$	$\boxed{0}$	x		x		x	
$\lvert 1-x\rvert$		$-x+1$		$-x+1$	$\boxed{0}$	$x-1$		$x-1$	
$\lvert x-3\rvert$		$-x+3$		$-x+3$		$-x+3$	$\boxed{0}$	$x-3$	
$f(x)$		$-3x+4$		$-x+4$		$x+2$		$3x-4$	

$f_E : [0 ; 1] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -x + 4$



$(\mathscr{C}_{f_E}) = [PQ]$

♦ Exercice 1.c page 58

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-x$	$\boxed{0}$	x	
$g(x)$		-1	$\boxed{0}$	1	

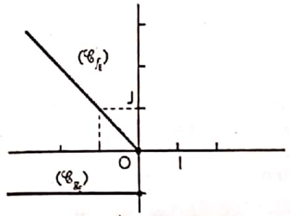
Posons : $E =]-\infty ; 0]$

f_E la restriction de f à E.

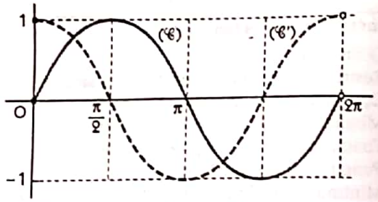
g_E la restriction de g à E.

$f_E : E \to \mathbb{R}$; $g_E : E \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -x$; $x \mapsto -1$

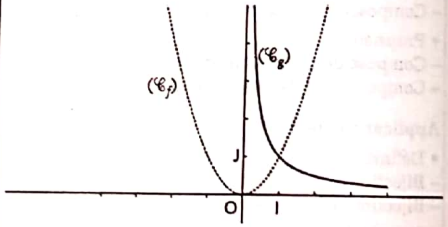


♦ Exercice 1.d page 58



$(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont respectivement les représentations graphiques des restrictions à $[0 ; 2\pi[$ des fonctions sinus et cosinus.

♦ Exercice 1.e page 59



x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	f est en dessous de g		f est au-dessus de g

$f(1) = g(1)$

♦ Exercice 1.f page 59

• x étant un nombre réel,

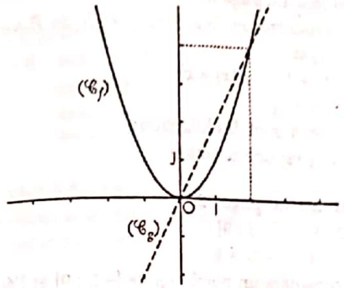
$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 > 2x$

$\Leftrightarrow x(x-2) > 0$

$\Leftrightarrow x \in]\leftarrow ; 0[\cup]2 ; \rightarrow[$.

$]\leftarrow ; 0[\cup]2 ; \rightarrow[$ est le plus grand ensemble sur lequel on a : $f > g$.

• Illustration graphique



♦ Exercice 1.g page 59

$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$; $g(x) = \dfrac{5x^2 - 1}{x^2 + 1}$

a) Pour justifier que, sur $[0 ; 5]$, f n'est pas supérieure à g, il suffit de trouver un nombre α de $[0 ; 5]$ tel que : $f(\alpha) < g(\alpha)$.

Or : $f(5) = 0$ et $g(5) = \dfrac{62}{13}$

donc : $f(5) < g(5)$.

b) Pour justifier que, sur $[0 ; 5]$, f n'est pas inférieure à g, il suffit de trouver un nombre β de $[0 ; 5]$ tel que : $f(\beta) > g(\beta)$.

Or : $f(0) = 5$ et $g(0) = -1$

donc : $f(0) > g(0)$.

♦ Exercice 1.h page 62

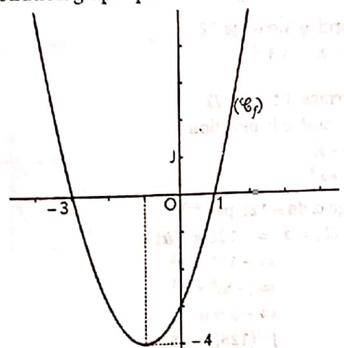
• $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$= (x-1)(x+3)$

$f(x) \geq 0$ pour $x \in]\leftarrow ; -3] \cup [1 ; \rightarrow[$;

$f(x) \leq 0$ pour $x \in [-3 ; 1]$.

• Illustration graphique



♦ Exercice 1.i page 62

• $f : [-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$

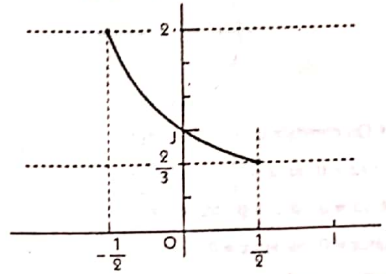
$x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$

$-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2} \leq x + 1 \leq \dfrac{3}{2}$

$2 \geq \dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{2}{3}$

• Illustration graphique



♦ Exercice 2.a page 65

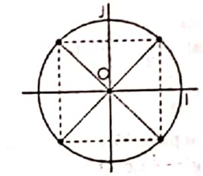
$f(x) = 2x + 3$; $g(x) = x^2 - 1$.

$D_{f+g} = \mathbb{R}$; $D_{fg} = \mathbb{R}$; $D_{f/g} = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$.

♦ Exercice 2.b page 65

• $f : [0 ; 2\pi[\to \mathbb{R}$; $g : [0 ; 2\pi[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \cos x$



On constate que sur $[0 ; 2\pi[$:

$\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

$\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$

On en déduit que :

$D_{1/f+g} = [0 ; 2\pi[\setminus \{\frac{3\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}\}$;

$D_{1/f-g} = [0 ; 2\pi[\setminus \{\frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}\}$.

♦ Exercice 2.c page 65

$f(x) = \sqrt{x+1}$; $g(x) = \sqrt{x-1}$; $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$D_f = [-1 ; +\infty[$;

$D_g = [1 ; +\infty[$;

$D_h =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$.

On en déduit que :

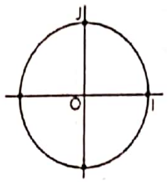
$(fg)(x) = \sqrt{x+1} \times \sqrt{x-1}$
$= \sqrt{x^2-1}$

et $D_{fg} = D_f \cap D_g = [1 ; +\infty[$

donc : fg est la restriction de h à $[1 ; +\infty[$.

♦ Exercice 2.d page 65

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\cotan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.



• On constate que sur $[0 ; 2\pi[$:

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$

$\tan x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0.$

• On en déduit que :

$D_{\tan} = [0 ; 2\pi[\setminus \{\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\}$

$D_{\cotan} = [0 ; 2\pi[\setminus \{0 ; \pi\}.$

• Or : $\dfrac{1}{\tan}(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$,

avec $x \in D_{1/\tan} \Leftrightarrow x \in D_{\tan}$ et $\tan x \neq 0$.

Par conséquent,

$D_{1/\tan} = [0 ; 2\pi[\setminus \{\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2} ; 0 ; \pi\}$

donc : $\cotan \neq \dfrac{1}{\tan}$.

♦ Exercice 2.e page 67

(1) On a : $f \circ g(x) = 5x - 19$
$g \circ f(x) = 5x - 7$

donc : $f \circ g \neq g \circ f.$

(2) On a : $f \circ g(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

$g \circ f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

donc : $f \circ g \neq g \circ f.$

♦ Exercice 2.f page 67

On a : $g \circ f \circ h(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 8}$

$h \circ g \circ f(x) = \dfrac{1}{(2x-4)^2} - 2$

donc : $g \circ f \circ h \neq h \circ g \circ f.$

♦ Exercice 3.a page 69

$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est la seule bijection.
$x \mapsto x^2$

♦ Exercice 3.b page 69

$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une bijection.
$x \mapsto \sqrt{x}$

♦ Exercice 3.c page 69

• On considère les fonctions g et h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$g(x) = 2x + 1$; $h(x) = x^3$

donc : $f = h \circ g$.

• Or : g et h sont des bijections,

donc $h \circ g$ est une bijection.

♦ Exercice 3.d page 72

$f : [-2 ; 5] \to [-5 ; 9]$
$x \mapsto -2x + 5$

• On considère un nombre y de $[-5 ; 9]$ et l'équation :

(E) $\quad -2x + 5 = y$

donc : $\quad x = \dfrac{5-y}{2}$

or : $\quad -5 \leq y \leq 9$

d'où : $\quad -2 \leq \dfrac{5-y}{2} \leq 5$

$\dfrac{5-y}{2} \in [-2 ; 5].$

L'équation (E) $f(x) = a$ admet une solution unique dans $[-2 ; 5]$; f est donc une bijection.

On sait que :

$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(x)$

$-2x + 5 = y \Leftrightarrow x = \dfrac{5-y}{2}$

donc : $f^{-1}(x) = \dfrac{5-y}{2}$.

$f^{-1} : [-5 ; 9] \to [-2 ; 5]$
$x \mapsto -\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}$

♦ Exercice 3.e page 72

Voir exercice 3.d.

♦ Exercice 3.f page 72

On considère la bijection :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$

• Image α de -125 par f^{-1}

$f^{-1}(-125) = \alpha \Leftrightarrow -125 = f(\alpha)$
$\Leftrightarrow -125 = \alpha^3$
$\Leftrightarrow (-5)^3 = \alpha^3$
$\Leftrightarrow -5 = \alpha$

d'où : $\quad f^{-1}(125) = -5.$

• Image β de -8 par f^{-1}

$f^{-1}(-8) = \alpha \Leftrightarrow -8 = f(\beta)$
$\Leftrightarrow (-2)^3 = \beta^3$
$\Leftrightarrow -2 = \beta$

d'où : $\quad f^{-1}(-8) = -2.$

• Image γ de 27 par f^{-1}

$f^{-1}(27) = \gamma \Leftrightarrow 27 = f(\gamma)$
$\Leftrightarrow 3^3 = \beta^3$
$\Leftrightarrow 3 = \beta$

d'où : $\quad f^{-1}(27) = 3.$

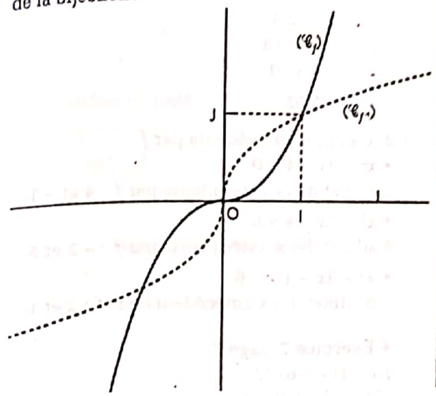
• Image δ de 64 par f^{-1}

$f^{-1}(64) = \delta \Leftrightarrow 64 = f(\delta)$
$\Leftrightarrow 4^3 = \delta^3$
$\Leftrightarrow 4 = \delta$

d'où : $\quad f^{-1}(64) = 4.$

♦ Exercice 3.g page 72

Représentation graphique de la bijection réciproque de la bijection $x \mapsto x^3$.



♦ Exercice 3.h page 72

• Définition explicite de f.

f est une fonction affine par intervalle.

Sur chacun des intervalles $[-1 ; 1]$ et $[1 ; 3]$, $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax + b$.

Or : $f(-1) = 0$
$f(1) = 1$
$f(3) = 4.$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [-1 ; 1] & f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} \\ \text{si } x \in [1 ; 3] & f(x) = \dfrac{3x}{2} - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

• On constate que toute droite d'équation

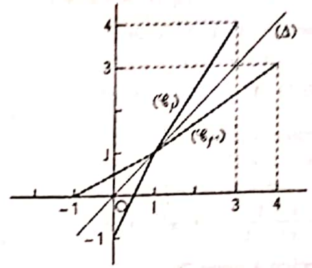
$y = b ; b \in [0 ; 4]$

coupe $(\mathscr{C}_f)$ en un unique point.

Donc f est une bijection de $[-1 ; 3]$ dans $[0 ; 4]$.

• Construction de $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$

$(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ et $(\mathscr{C}_f)$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

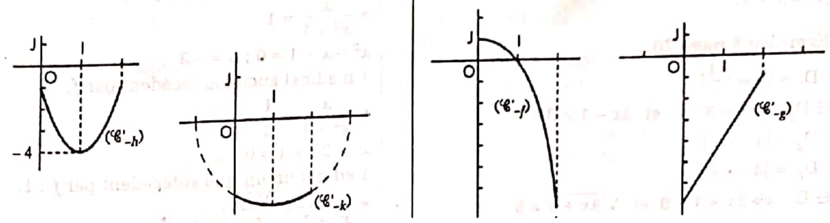


Exercices d'apprentissage

♦ Exercice 1 page 76

1. $(\mathscr{C}_1) = (\mathscr{C}_h)$; $(\mathscr{C}_2) = (\mathscr{C}_k)$;
$(\mathscr{C}_3) = (\mathscr{C}_f)$; $(\mathscr{C}_4) = (\mathscr{C}_g)$.

2. Restriction à $[0 ; 2]$ de l'opposée de chaque fonction.



3. Tableaux de variation de ces restrictions

x	0		1		2
$-h(x)$	$\boxed{-1}$	$\searrow$	$\boxed{-4}$	$\nearrow$	$\boxed{0}$

x	0		1		2
$-k(x)$	$\boxed{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$\boxed{2}$	$\searrow$	$\boxed{\sqrt{3}}$

x	0		1		2
$-f(x)$	$\boxed{1}$	$\searrow$	$\boxed{0}$	$\searrow$	$\boxed{-7}$

x	0		2
$-g(x)$	$\boxed{-7}$	$\nearrow$	$\boxed{1}$

♦ Exercice 2 page 76

$f(x) = \dfrac{x^3}{|x|} + 1$

$f_{\mathbb{R}_+^*}(x) = x^2 + 1$; $f_{\mathbb{R}_-^*}(x) = -x^2 + 1$.

On pose : $E = [-1 ; 0] \setminus \{0\}$

$\begin{cases} \text{si } x \in [-1 ; 0[& f_E(x) = -x^2 + 1 \\ \text{si } x \in]0 ; 1] & f_E(x) = x^2 + 1. \end{cases}$

♦ Exercice 3 page 76

On pose : $E = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$F = \mathbb{R}^- \setminus \{-1\}$

$f(x) = \dfrac{x-1}{|x|-1}$; $f_E(x) = 1$; $f_F(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

♦ Exercice 4 page 76

$f(x) = |2x+1| - |x-3|$

On pose : $E =]-\infty ; -\frac{1}{2}]$; $F = [\frac{1}{2} ; 3]$; $G = [3 ; +\infty[$. Par conséquent :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
$\|2x+1\|$	$-2x-1$	$\boxed{0}$	$2x+1$		$2x+1$
$\|x-3\|$	$-x+3$		$-x+3$	$\boxed{0}$	$x-3$
$f(x)$	$-x-4$		$3x-2$		$x+4$

$f_E(x) = -x - 4$

$f_F(x) = 3x - 2$

$f_G(x) = x + 4$.

♦ Exercice 5 page 76

$D_f =]-\infty ; \frac{3}{2}]$

$x \in D_g \Leftrightarrow x - 3 \geq 0$ et $3x - 1 \geq 0$

$D_g = [3 ; +\infty[$

$D_h =]4 ; +\infty[$

$x \in D_l \Leftrightarrow 3x + 1 \geq 0$ et $\sqrt{3x+1} \neq 5$

$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$ et $x \neq 8$

$D_l = [-\frac{1}{3} ; 8[\cup]8 ; +\infty[$.

On sait que : $\sqrt{2x-1} + \sqrt{12-2x} > 0$

donc :

$x \in D_j \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0$ et $12 - 2x \geq 0$

$D_j = [\frac{1}{2} ; 6]$

$x \in D_k \Leftrightarrow x + 3 \geq 0$ et $2x - 1 \neq 0$ et $\Leftrightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} \neq 0$

$D_j = [\frac{1}{2} ; 4[\cup]4 ; +\infty[$.

♦ Exercice 6 page 77

1. La calculatrice donne :

$f(-3,75) \approx -1,18$

$f(-0,5) \approx -4,50$

$f(\frac{9}{8}) \approx -6,48$

$f(0,125) \approx -4,35$

$f(\sqrt{2}) \approx -6,24$

$f(1,25) \approx -6,18$

$f(\sqrt{5}) \approx -5,70$

$f(\frac{7}{3}) \approx -5,55$

2. Calcul d'antécédents par f

• $x^2 - 3x - 4 = 0$

0 admet deux antécédents par f : 4 et -1.

• $x^2 - 3x - 4 = 6$

6 admet deux antécédents par f : -2 et 5.

• $x^2 - 3x - 4 = -6$

-6 admet deux antécédents par f : 2 et 1.

♦ Exercice 7 page 77

$f(0,24) \approx 3,6972$

$f(01,52) \approx 6,9444$

$f(3,44) \approx 32,5668$

♦ Exercice 8 page 77

1. Calculer les images

$f(-0,25) \approx -0,23$

$f(-0,8) \approx -0,48$

$f(1,4) \approx -0,47$

$f(2,2) \approx -0,37$

2. Calcul d'antécédents par f

• $\dfrac{x}{x^2+1} = 1$

$x^2 - x + 1 = 0$; $\Delta = -3$

1 n'admet aucun antécédent par f.

• $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

1 admet un unique antécédent par f : 1.

• $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\sqrt{3}x^2 - x + \sqrt{3} = 0$

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ admet deux antécédents par f : $\sqrt{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

♦ Exercice 9 page 77

(1) $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x+1)(x^2+4)$

$x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x-1)(x^2+4)$

$D_g = D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $g(x) = f(x)$

d'où : $f = g$.

(2) $f(x) = \dfrac{|x+2|}{x+2}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$g(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2}} = \dfrac{x+2}{|x+2|} = \dfrac{|x+2|}{x+2}$; $D_g = D_f$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1-2\}$, $g(x) = f(x)$

d'où : $f = g$.

(3) On vérifie que :

$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x$

De plus : $D_f = D_g = \mathbb{R}$

donc : $f = g$.

♦ Exercice 10 page 77

$D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$g(x) = \dfrac{ax^2 + (b-3a)x + c - 3b}{x-3}$

Pour que $g(x) = f(x)$, il suffit que, pour tout x,

$ax^2 + (b-3a)x + c - 3b = 4x^2 - 15x + 11$,

c'est-à-dire :

$\begin{cases} a = 4 \\ b - 3a = -15 \\ c - 3b = 1 \end{cases}$

d'où : $a = 4$; $b = -3$; $c = 2$.

♦ Exercice 11 page 77

$g(x) = x - 3$

$f(x) = \dfrac{|(x+1)(x-3)|}{x+1}$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f(x)$	$x-3$	$\boxed{0}$	$-x+3$	$\boxed{0}$	$x-3$

Par conséquent :

$f = g$ sur $]-\infty ; -1] \cup [3 ; +\infty[$

$f = -g$ sur $[-1 ; 3]$.

♦ Exercice 12 page 77

1. $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont sécants en deux points d'abscisse -2 et 3.

On constate sur le graphique que :

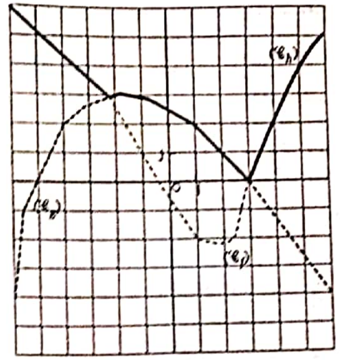
$f > g$ sur $[-6 ; -2[\cup]3 ; 6]$

$f < g$ sur $]-2 ; 3[$

$f(-2) = g(-2)$; $f(3) = g(3)$.

2. Représentation graphique de h définie par :

$h(x) = \max\{f(x) ; g(x)\}$.



♦ Exercice 13 page 77

On a : $OK = AH = \sin\alpha$

mes $\widehat{AI} = \alpha$

On constate sur le graphique que :

$OK < AI <$ mes $\widehat{AI}$

d'où : $\sin\alpha < \alpha$.

♦ Exercice 14 page 77

1. Signe de $-3x^2 + 8x + 8$

On pose : $P(x) = -3x^2 + 8x + 8$

α et β sont les deux zéros de $P(x)$.

$\alpha = \dfrac{4 - 2\sqrt{10}}{3}$; $\beta = \dfrac{4 + 2\sqrt{10}}{3}$.

On vérifie que : $\alpha < 0 < 1 < \beta$.

x	$-\infty$	α	0	1	β	$+\infty$
$P(x)$	$-$	$\boxed{0}$	$+$		$\boxed{0}$	$-$

2. Comparaison sur $[0 ; 1]$ de f et g définies par :

$f(x) = 2\sqrt{4 - (x-1)^2}$

$g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

$f(x)$ et $g(x)$ sont positifs. Pour les comparer, il suffit de comparer leurs carrés.

$$[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = P(x)$$

De l'étude précédente, on déduit que, pour tout x de $[0 ; 1]$:

$$[f(x)]^2 > [g(x)]^2$$
$$[f(x)] > [g(x)]$$

sur $[0 ; 1]$, $f > g$.

♦ Exercice 15 page 77

On suppose : $x > 1$

On obtient donc :

$$0 < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3$$
$$0 < 7\sqrt{x} + 5 < 7x + 5 < 7x^2 + 5 < 7x^3 + 5$$
$$\frac{1}{7\sqrt{x}+5} < \frac{1}{7x+5} < \frac{1}{7x^2+5} < \frac{1}{7x^3+5}$$

♦ **Exercice 16 page 77**

1. $f(x) = 2x + 4$; $g(x) = 4 - x^2$

$f(x) - g(x) = x(x + 2)$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	$\boxed{0}$	$-$	$\boxed{0}$	$+$	

Par conséquent :

$f > g$ sur $]-\infty ; -2[\cup]0 ; +\infty[$

$f < g$ sur $]-2 ; 0[$

$f(-2) = g(-2)$; $f(0) = g(0)$.

2. $f(x) = \dfrac{6 - 2x}{x - 1}$; $g(x) = 2x - 2$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $D_g = \mathbb{R}$

$f(x) - g(x) = \dfrac{2(x + 1)(2 - x)}{x - 1}$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	$\boxed{0}$	$-$	$\|$	$+$	$\boxed{0}$	$-$	

Par conséquent :

$f > g$ sur $]-\infty ; -1[\cup]1 ; 2[$

$f < g$ sur $]-1 ; 1[\cup]2 ; +\infty[$

$f(-1) = g(-1)$; $f(2) = g(2)$.

♦ **Exercice 17 page 77**

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; $g(x) = -\dfrac{x}{2} + 1$; $h(x) = \dfrac{x}{2} + 1$

Supposons x un nombre $[0 ; 1]$

- $g(x) - f(x) = \dfrac{-x(x^2 - x + 1)}{2(x^2 + 1)}$

Par conséquent :

pour tout x, $g(x) - f(x) \leq 0$

d'où : $g \leq f$

- $f(x) - h(x) = \dfrac{-x^2(x^2 + 3)}{2(x^2 + 1)}$

Par conséquent :

pour tout x, $f(x) - h(x) \leq 0$

d'où : $f \leq h$

- Il en résulte que : $g \leq f \leq h$.

♦ **Exercice 18 page 77**

La division euclidienne de $x^3 + x^2 + 2x + 1$ par $x^2 + 2$ donne :

$f(x) = x + 1 - \dfrac{1}{x^2 + 2}$

On a :

$$0 < \frac{1}{x^2 + 2} \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{x^2 + 2} < 0$$

$$(x + 1) - \frac{1}{2} \leq x + 1 - \frac{1}{x^2 + 2} < x + 1$$

$$x + \frac{1}{2} \leq f(x) < x + 1$$

♦ **Exercice 19 page 77**

1. Détermination graphique d'images

$f(1) = f(5) = -2$

$f(0) = f(6) = -\dfrac{16}{3}$

$f(3) = \dfrac{2}{3}$.

2. Image de $f = [-\dfrac{16}{3} ; \dfrac{2}{3}]$.

3. Résolution graphique d'équations

(1) $f(x) = 0$ a pour solutions 2 et 4

(2) $f(x) = -2$ a pour solution 1

(3) $f(x) = \dfrac{3}{2}$ n'a pas de solution

(4) $f(x) = \dfrac{2}{3}$ a pour solution 3

(5) $f(x) = -6$ n'a pas de solution

(6) $f(x) = 1$ n'a pas de solution

4. Résolution d'inéquations

(1) $f(x) > 0$ a pour ensemble de solutions $]2 ; 4[$

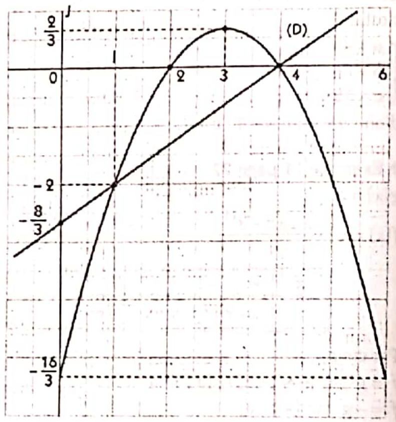
(2) $f(x) \leq 0$ a pour ensemble de solutions $[0 ; 2] \cup [4 ; 6]$

(3) $f(x) \geq -2$ a pour ensemble de solutions $[1 ; 5]$

(4) $f(x) < 2$ a pour ensemble de solutions $[0 ; 6]$.

♦ **Exercice 20 page 78**

1. Résolutions graphiques



(D) : $y = \dfrac{2}{3}(x - 4)$

(E) $f(x) = \dfrac{2}{3}(x - 4)$ a pour solutions 4 et 1

(I) $f(x) > \dfrac{2}{3}(x - 4)$ a pour ensemble de solutions $]1 ; 4[$.

2. Maximum de f

On constate que f admet un maximum égal à $\dfrac{2}{3}$

Tableau de variation de f

x	0		2		3		4		6
$f(x)$	$-\frac{16}{3}$	↗	0	↗	$\frac{2}{3}$	↘	0	↘	$-\frac{16}{3}$

3. Détermination de la fonction polynôme p

Justifions que f est la restriction à $[0 ; 6]$ d'une fonction polynôme p du 2^{nd} degré.

$p(x)$ est alors de la forme :

$p(x) = ax^2 + bx + c$

On obtient le système :

$$\begin{cases} f(0) = c = -\dfrac{16}{3} \\ f(1) = a + b + c = -2 \\ f(2) = 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient :

$p(x) = -\dfrac{2}{3}x^2 + 4x - \dfrac{16}{3}$

♦ **Exercice 21 page 78**

x	-5		-3		2		4		5
$f(x)$	6	↘	1	↗	3	↘	1	↘	-4

1. Extremums relatifs de f

minimum relatif 1 atteint en -3

maximum relatif 3 atteint en 2

minimum -4 atteint en 5

maximum 6 atteint en -5

2. Résolution d'équation et d'inéquation

(E) $f(x) = 1$ a pour solutions -3 et 4

(I) $f(x) > 1$ a pour ensemble de solutions $]-5 ; 4[$.

3. Nombre de solutions de (F) $f(x) = m$

si $m < -4$ (F) n'a pas de solution

si $m = -4$ (F) a une unique solution : 5

si $-4 < m < 1$ (F) a une unique solution : α ; $\alpha \in]4 ; 5[$

si $m = 1$ (F) a deux solutions : -3 et 4

si $1 < m < 3$ (F) a trois solutions : β, γ, δ ; $\beta \in]-5 ; -3[$; $\gamma \in]-3 ; 2[$; $\delta \in]2 ; 4[$

si $m = 3$ (F) a deux solutions : ε et 2 ; $\varepsilon \in]-5 ; -3[$

si $3 < m < 6$ (F) a une unique solution : η ; $\eta \in]6 ; -3[$

si $m = 6$ (F) a une unique solution : -5

si $m > 6$ (F) n'a pas de solution.

♦ **Exercice 22 page 78**

1. Ensemble de définition de f

$D_f = [-0{,}8 ; 4]$

Images par f de 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4

$f(0) = -3$; $f(1) = -4$; $f(2) = 0$;

$f(3) = 4$; $f(4) = 3$

2. Image de $f = [-4{,}5 ; 4{,}5]$.

3. Équation (E) $f(x) = 0$

(E) admet deux solutions α et β

$\alpha = 2 > 0$; $\beta = -0{,}4 < 0$.

4. Résolution graphique d'équations

$f(x) = 4$ a pour solutions $-0{,}8$; 3 et 3,7

$f(x) = -4$ a pour solutions 0,3 et 1

$f(x) = -\dfrac{25}{4}$ n'a pas de solution

Résolution graphique d'inéquations

$f(x) \geq 0$ a pour ensemble de solutions $[-0{,}8 ; -0{,}4] \cup [2 ; 4]$

$f(x) < 0$ a pour ensemble de solutions $]-0{,}4 ; 2[$

$f(x) \leq 4$ a pour ensemble de solutions $[-0{,}8 ; 3] \cup [3{,}7 ; 4]$

$f(x) < -4$ a pour ensemble de solutions $]0{,}3 ; 1[$

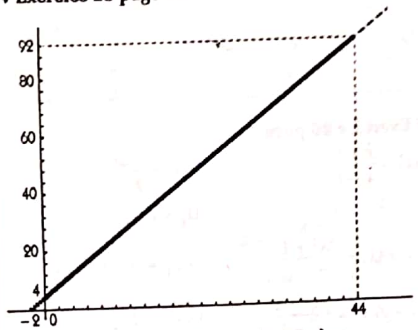
5. Le minimum de f est $-4{,}5$; il est atteint en 0,6

Le maximum de f est 4,5 ; il est atteint en 3,3

Tableau de variation de f

x	$-0{,}8$		$0{,}6$		$3{,}3$		4
$f(x)$	4	↘	$-4{,}5$	↗	$4{,}5$	↘	3

♦ **Exercice 23 page 78**



1. Représentations graphiques de f et de g

f est la restriction à $[-2 ; +\infty[$ de la fonction affine $x \mapsto 2x + 4$

g est la restriction à $[0 ; 44]$ de f.

2. image de $g = [4 ; 92]$.

3. -93 est un minorant de f
93 est un majorant de g.

♦ **Exercice 24 page 78**

$f(x) = x^2 - 8x + 7$

1. Forme canonique de $f(x)$

$f(x) = (x-4)^2 - 9$

2. minimum de f

x étant un nombre réel quelconque,

$(x-4)^2 \geq 0$

$(x-4)^2 - 9 \geq -9$

Donc f admet un minimum égal à -9 ; ce minimum est atteint pour $x = 4$.

3. On donne : $\quad 4 \leq x \leq 5$

On en déduit :

$$0 \leq x-4 \leq 1$$
$$0 \leq (x-4)^2 \leq 1$$
$$-9 \leq f(x) \leq -8$$
$$-\frac{1}{8} \leq \frac{1}{f(x)} \leq -\frac{1}{9}$$

♦ **Exercice 25 page 78**

1. Antécédents de -4 ; -3 ; 0

Les antécédents de -4 sont : -1 et 3

Les antécédents de -3 sont : $-1{,}2$; $-0{,}8$; $2{,}8$ et $3{,}2$

Les antécédents de 0 sont : $-1{,}5$; $-0{,}4$; $2{,}4$ et $3{,}5$.

2. -4 est le minimum de f car c'est la plus petite valeur prise par f.

3. 21 est un majorant de f car 1 est plus grande que toutes les valeurs prises par f.

4. 12 est un maximum relatif de f sur $[0 ; 2]$ car sur cet intervelle, 12 est la plus grande valeur prise par f et $f(1) = 12$.

5. Tableau de variation de f

x	-2		-1		1		3		4
$f(x)$	19	↘	-4	↗	12	↘	-4	↗	19

♦ **Exercice 26 page 79**

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$(f+g)(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2-1}$; $D_{f+g} = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$

$(2f-g)(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2-1}$; $D_{2f-g} = D_{f+g}$

$(2f-g)^2(x) = \left(\dfrac{3x^2+1}{x^2-1}\right)^2$; $D_{(2f-g)^2} = D_{2f-g}$

$(fg)(x) = \dfrac{2x}{x-1}$; $D_{fg} = D_{f+g}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2x(x-1)}$; $D_{f/g} = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 0 ; 1\}$.

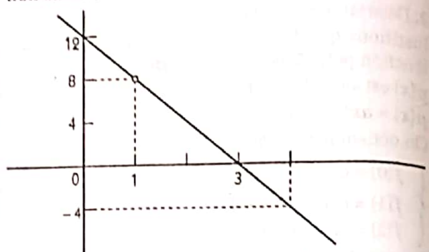
♦ **Exercice 27 page 79**

$f(x) = \dfrac{6-2x}{x-1}$; $g(x) = 2x - 2$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $D_g = \mathbb{R}$

$(fg)(x) = 4(x-3)$; $D_{fg} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

fg est la restriction à $]\leftarrow ; -1[\cup]1 ; \rightarrow[$ de la fonction affine $x \mapsto -4x + 12$.



♦ **Exercice 28 page 79**

• $f(x) = \dfrac{6x^2-2x-2}{2x-2}$; $g(x) = \dfrac{-6x^2+4x+2}{2x-2}$

$D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$(f+g)(x) = \dfrac{x}{x-1}$; $D_{f+g} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Représentation graphique de $f+g$

$(f+g)(x) = 1 + \dfrac{1}{x-1}$

On désigne par h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

$(\mathscr{C}_h)$ est la représentation graphique de h.

$(f+g)(x) = h(x-1) + 1$

$(\mathscr{C}_{f+g})$ est l'image de $(\mathscr{C}_h)$ par le vecteur $\vec{v}(1 ; 1)$.

♦ **Exercice 29 page 79**

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; -2\}$;

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $D_l = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; -2\}$;

$D_{f+g} = D_{h+l} = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; -2\}$

$(f+g)(x) = \dfrac{x+4}{(x+1)(x+2)}$

$(h+l)(x) = \dfrac{x+4}{(x+1)(x+2)}$

donc : $f + g = h + l$.

♦ **Exercice 30 page 79**

• f et g sont deux fonctions croissantes.

On considère deux nombres x_1 et x_2 de l'intervalle K tels que : $x_1 < x_2$.

On a : $f(x_1) \leq f(x_2)$
$g(x_1) \leq f(x_2)$

d'où : $f(x_1) + g(x_1) \leq f(x_2) + f(x_2)$
$(f+g)(x_1) \leq (f+g)(x_2)$

$f+g$ est donc croissante sur K.

• On démontre de même que si f et g sont décroissantes sur K, alors $f+g$ est décroissante sur K.

• Application

(1) $f : x \mapsto x^3 + \sqrt{x}$

f est la somme des deux fonctions f_1 et f_2 croissantes sur $\mathbb{R}^+$

$f_1 : x \mapsto x^3$; $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$.

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

(2) $f : x \mapsto x^2 - 2x + 7$

f est la somme des deux fonctions f_1 et f_2 décroissantes sur $\mathbb{R}^-$

$f_1 : x \mapsto x^2$; $f_2 : x \mapsto -2x + 7$.

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

(3) $f : x \mapsto x^3 + \sin x$

f est la somme des deux fonctions f_1 et f_2 croissantes sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$

$f_1 : x \mapsto x^3$; $f_2 : x \mapsto \sin x$.

Donc f est croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

(4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + \cos x$

f est la somme des deux fonctions f_1 et f_2 décroissantes sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$

$f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $f_2 : x \mapsto \cos x$.

Donc f est décroissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

♦ **Exercice 31 page 79**

(1) $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x-1}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

$\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{x-1}{x^2-x-6}$; $D_{1/f} = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 1 ; 3\}$

(2) $f(x) = \dfrac{x^4-16}{|x|-2}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$

$x^4 - 16 = (x^2+4)(x-2)(x+2)$

$\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{|x|-2}{x^4-16}$; $D_{1/f} = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$

(3) $f(x) = |2x-1| - |x+1|$; $D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow |2x-1| = |x+1|$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = x + 1$ ou $2x - 1 = -x - 1$

$\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{|2x-1| - |x+1|}$

$D_{1/f} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2} ; 2\}$

(4) $f(x) = |x-1| - x + 1$; $D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-1| = x - 1$

$\Leftrightarrow x - 1 = x - 1$ ou $x - 1 = -x + 1$

$\Leftrightarrow x = 1$

$\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{|x-1| - x + 1}$; $D_{1/f} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-2x^2-3x+5} - x}{x^2}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-2x^2-3x+5} = x$

$\Leftrightarrow -2x^2 - 3x + 5 = x^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{69}}{6}$ ou $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{69}}{6}$

$\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{-2x^2-3x+5} - x}$; $D_{1/f} = \mathbb{R} \setminus \{x_1 ; x_2\}$

♦ **Exercice 32 page 79**

$f(x) = \dfrac{20}{x+4}$; $g(x) = \dfrac{20}{x} - 4$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$; $D_g = \mathbb{R}^*$

$(f \circ g)(x) = x$; $D_{f \circ g} = \mathbb{R}^* \setminus \{-4\}$.

♦ **Exercice 33 page 79**

(1) $f(x) = -x + 5$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

$D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R}^*$

$(f \circ g)(x) = \dfrac{5x-1}{x}$; $D_{f \circ g} = \mathbb{R}^*$

$(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{5-x}$; $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

(2) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+3}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; $D_g = \mathbb{R}^*$

$(f \circ g)(x) = \dfrac{3-x}{1+3x}$; $D_{f \circ g} = \mathbb{R}^* \setminus \{-\frac{1}{3}\}$

$(g \circ f)(x) = \dfrac{x+3}{3x-1}$; $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-3 ; \frac{1}{3}\}$

(3) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$; $g(x) = 2x + 3$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $D_g = \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = \dfrac{3x+5}{x+2}$; $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$(g \circ f)(x) = \dfrac{9x+5}{x+1}$; $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(4) $f(x) = \dfrac{5-2x}{x-1}$; $g(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$

$(f \circ g)(x) = -\dfrac{8x+17}{x+4}$; $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2} ; -4\}$

$(g \circ f)(x) = \dfrac{3x-6}{x-7}$; $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{1 ; 7\}$

(5) $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$

$D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R}^+$

$(f \circ g)(x) = x$; $D_{f \circ g} = \mathbb{R}^+$

$(g \circ f)(x) = |x|$; $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

(6) $f(x)=x^2-x-2$; $g(x)=\sqrt{x}$

$D_f=\mathbb{R}$; $D_g=\mathbb{R}^+$

$(f\circ g)(x)=x-\sqrt{x}-2$; $D_{f\circ g}=\mathbb{R}^+$

$(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-x-2}$; $D_{g\circ f}=]-\infty\,;-1]\cup[2\,;+\infty[$.

♦ **Exercice 34 page 79**

$f(x)=x^2-4$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$; $h(x)=\sqrt{x}$

$i(x)=2x-3$; $j(x)=x^2$

$f_1=i\circ h$; $f_2=h\circ f$; $f_3=g\circ i$

$f_4=j\circ i$; $f_2=g\circ f$; $f_3=h\circ i$.

♦ **Exercice 35 page 79**

(1) $f(x)=5x^2-3$

$f_1(x)=x^2$; $f_2(x)=5x$; $f_3(x)=x-3$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{3x-2}$

$f_1(x)=3x$; $f_2(x)=x-2$; $f_3(x)=\dfrac{1}{x}$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

(3) $f(x)=\sqrt{5x-2}$

$f_1(x)=5x$; $f_2(x)=x-2$; $f_3(x)=\sqrt{x}$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

(4) $f(x)=3\sqrt{x}+2$

$f_1(x)=\sqrt{x}$; $f_2(x)=3x$; $f_3(x)=x+2$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

(5) $f(x)=2x^3+1$

$f_1(x)=x^3$; $f_2(x)=2x$; $f_3(x)=x+1$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

(6) $f(x)=\dfrac{5}{x}-1$

$f_1(x)=\dfrac{1}{x}$; $f_2(x)=5x$; $f_3(x)=x-1$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

(7) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$

$f_1(x)=x$; $f_2(x)=x^3$; $f_3(x)=\dfrac{1}{x}$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

(8) $f(x)=-2x^2+3|x|-1$

$=-2|x|^2+3|x|-1$

$f_1(x)=x$; $f_2(x)=|x|$; $f_3(x)=-2x^2+3x-1$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

♦ **Exercice 36 page 79**

(1) $f(x)=3(x-5)^2+1$

$f_1(x)=x-5$; $f_2(x)=x^2$; $f_3(x)=3x+1$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{(3x-1)^2}$

$f_1(x)=3x-1$; $f_2(x)=x^2$; $f_3(x)=\dfrac{1}{x}$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

(3) $f(x)=5\sqrt{x+1}+2$

$f_1(x)=x+1$; $f_2(x)=\sqrt{x}$; $f_3(x)=3x+2$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

(4) $f(x)=3\sqrt{x}+2$

$f_1(x)=\sqrt{x}$; $f_2(x)=3x$; $f_3(x)=x+2$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

(5) $f(x)=\dfrac{3}{x^2}-1$

$f_1(x)=x^2$; $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$; $f_3(x)=3x-1$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

(6) $f(x)=\dfrac{3}{x+2}-1$

$f_1(x)=x+2$; $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$; $f_3(x)=3x-1$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

(7) $f(x)=\sqrt{|5x+1|}$

$f_1(x)=5x+1$; $f_2(x)=|x|$; $f_3(x)=\sqrt{x}$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

(8) $f(x)=\dfrac{\sin^3x-1}{\sin^3x+2}$

$f_1(x)=\sin x$; $f_2(x)=x^3$; $f_3(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

♦ **Exercice 37 page 79**

$f(x)=2x-1$; $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$; $h(x)=x^2-2$

$D_f=\mathbb{R}$; $D_g=\mathbb{R}\setminus\{3\}$; $D_h=\mathbb{R}$

• $h\circ g\circ f(x)=\dfrac{-8x^2+32x-31}{(2x-4)^2}$

$D_{h\circ g\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{2\,;3\}$

• $g\circ h\circ f(x)=\dfrac{1}{4(x^2-x-1)}$

$D_{g\circ h\circ f}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

♦ **Exercice 38 page 79**

1. f est la restriction à $[-2\,;3]$ d'une fonction affine par intervalle.

$$\begin{cases} \text{si } x\in[-2\,;0] & f(x)=\dfrac{5}{2}x+2 \\ \text{si } x\in[0\,;3] & f(x)=\dfrac{2}{3}x+2 \end{cases}$$

2. $(\mathscr{C}_f)$ montre que f est une bijection de $[-2\,;3]$ dans $[-3\,;4]$.

• Détermination de f^{-1}

Résolvons l'équation :

$\dfrac{5}{2}x+2=b\,;\ b\in[-3\,;2]$

d'où : $x=\dfrac{2}{5}b-\dfrac{4}{5}$

Résolvons l'équation :

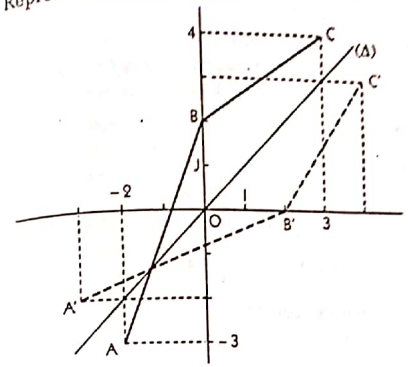
$\dfrac{2}{3}x+2=b\,;\ b\in[2\,;4]$

d'où : $x=\dfrac{3}{2}b-3$

f^{-1} est définie par :

$$\begin{cases} \text{si } x\in[-3\,;2] & f^{-1}(x)=\dfrac{2}{5}x-\dfrac{4}{5} \\ \text{si } x\in[2\,;4] & f^{-1}(x)=\dfrac{3}{2}x-3 \end{cases}$$

• Représentations graphiques



♦ **Exercice 39 page 80**

1. $f(x)=8x^3-12x^2+6x-1$

$=(2x-1)^3$

$f_1(x)=2x-1$; $f_2(x)=x^3$

$f=f_2\circ f_1$

2. f_1 et f_2 sont des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

♦ **Exercice 40 page 80**

$f(x)=8x^3+1$

$f_1(x)=x^3$; $f_2(x)=8x+1$

$f=f_2\circ f_1$

f_1 et f_2 sont des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

♦ **Exercice 41 page 80**

$f(x)=\sqrt{x^3+1}$

Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $x^3+1>0$

f est donc définie sur $\mathbb{R}^+$

$f_1(x)=x^3$; $f_2(x)=x+1$; $f_3(x)=\sqrt{x}$

$f=f_3\circ f_2\circ f_1$

f_1 est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$

f_2 est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[1\,;+\infty[$

f_3 est une bijection de $[1\,;+\infty[$ vers $[1\,;+\infty[$

Par conséquent, f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[1\,;+\infty[$.

♦ **Exercice 42 page 80**

$f(x)=\dfrac{1}{8x^3+1}$

$f_1(x)=8x^3+1$; $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$

$f=f_2\circ f_1$

f_1 est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, donc f_2 est u
bijection de $]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty[$ dans $]0\,;+\infty[$.

f_2 est une bijection de $\mathbb{R}^*_+$ vers $\mathbb{R}^*_+$.

Par conséquent, f est une bijection de $]-\dfrac{1}{2}\,;+$
dans $\mathbb{R}^*_+$.

♦ **Exercice 43 page 80**

• $f(x)=\sqrt{2x-4}$

$f_1(x)=2x-4$; $f_2(x)=\sqrt{x}$

$f=f_2\circ f_1$

f_1 est une bijection de $[2\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$.

f_2 est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$.

Par conséquent, f est une bijection de $[2\,;+$
dans $\mathbb{R}^+$.

• On sait que, pour tout x de $[2\,;+\infty[$ et y de $[0\,;+\infty$

$f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

or : $\sqrt{2x-4}=y$

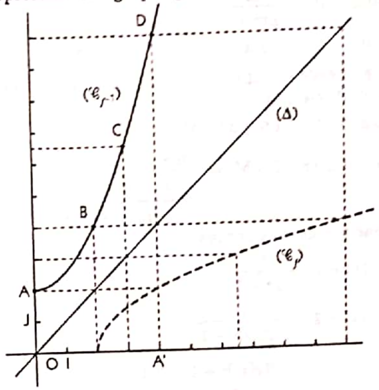
$x=\dfrac{y^2}{2}+2$

$f^{-1}(y)=\dfrac{y^2}{2}+2$

$f^{-1}:[0\,;+\infty[\ \to[2\,;+\infty[$

$x\mapsto\dfrac{x^2}{2}+2$

• Représentation graphique



♦ **Exercice 44 page 80**

$f:\ \mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$x\mapsto\dfrac{2x-3}{x-1}$

y étant un élément de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, résolvons l'équation

(E) $\dfrac{2x-3}{x-1}=y$

$x=\dfrac{y-3}{y-2}$

(E) admet donc une solution et une seule ; et

pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et
pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

d'où : $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{y-2}$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$$
$$x \mapsto \frac{x-3}{x-2}$$

♦ Exercice 45 page 80

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+5}$

1. Forme canonique de $f(x)$

$f(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2+5}$

2. On a : $x^2 + 5 \geq 5$

d'où : $0 < \dfrac{1}{x^2+5} \leq \dfrac{1}{5}$

3. Donc : $-\dfrac{4}{5} \leq \dfrac{-4}{x^2+5} < 0$

$\dfrac{1}{5} \leq f(x) < 1$

♦ Exercice 46 page 80

$f(x) = \dfrac{4x^2+1}{2x^2+1}$; $g(x) = 3x - 2$

1. $f(x) = 1 + \dfrac{2x^2}{2x^2+1}$

On a : $0 \leq \dfrac{2x^2}{2x^2+1} \leq 1$

d'où : $1 \leq f(x) \leq 2$.

2. g bornée signifie qu'il existe deux nombres réels m et M tels que :
pour tout x, $m \leq g(x) \leq M$.

Or : $m \leq 3x - 2 \leq M \Leftrightarrow \underbrace{\dfrac{m+2}{3} \leq x \leq \dfrac{M+2}{3}}_{\text{ce qui est faux}}$

donc g n'est pas bornée.

3. $f(x) = 2 - \dfrac{1}{2x^2+1}$

$f \circ g(x) = 2 - \dfrac{1}{2[g(x)]^2+1}$

On a : $2[g(x)]^2 + 1 \geq 1$

d'où : $0 < \dfrac{1}{2[g(x)]^2+1} \leq 1$

$1 \leq f \circ g(x) \leq 2$.

$f \circ g$ est donc bornée.

4. $g \circ f(x) = 4 - \dfrac{3}{2x^2+1}$

On a : $2x^2 + 1 \geq 1$

d'où : $0 < \dfrac{1}{2x^2+1} \leq 1$

$1 \leq g \circ f(x) < 4$.

$g \circ f$ est donc bornée.

♦ Exercice 47 page 80

1. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

On vérifie que f est impaire. $(\mathscr{C}_f)$ admet donc O comme centre de symétrie.

2. f étant impaire, il suffit de résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$\frac{x^2+1}{x} \leq 2$$
$$x^2 - 2x + 1 \leq 0$$
$$(x-1)^2 \leq 0$$

qui a pour unique solution : 1.
On en déduit que l'équation : $-2 \leq f \leq 2$ a pour ensemble de solutions $\{-1 ; 1\}$.

3. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

• Supposons $x \in \mathbb{R}_+^*$

On a : $\dfrac{1}{x} > 0$; d'où : $x + \dfrac{1}{x} > x$.

• Supposons $x \in \mathbb{R}_-^*$

On a : $\dfrac{1}{x} < 0$; d'où : $x + \dfrac{1}{x} < x$.

♦ Exercice 48 page 80

1. $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$; $D_f = \mathbb{R}$

2. $f(x) = 3 - \dfrac{2}{x^2+1}$

3. Considérons f_1, f_2 et f_3 définies par :

$f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = \dfrac{1}{x+1}$; $f_3(x) = -2x + 3$

$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$

4. f_1 est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$
f_2 et f_3 sont décroissantes sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, u et v étant deux nombres réels :

• si $0 < u < v$

alors : $f_1(u) < f_1(v)$
$f_2 \circ f_1(u) > f_2 \circ f_1(v)$
$f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) < f_3 \circ f_2 \circ f_1(v)$

f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

• si $u < v < 0$

alors : $f_1(u) > f_1(v)$
$f_2 \circ f_1(u) < f_2 \circ f_1(v)$
$f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) > f_3 \circ f_2 \circ f_1(v)$

f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

5. x étant un nombre réel,

on a : $0 < \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$

d'où : $-2 \leq \dfrac{-2}{x^2+1} < 0$

$1 \leq 3 - \dfrac{2}{x^2+1} < 3$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$ par 1 et 3.

♦ Exercice 49 page 80

1. Parité de $g \circ f(x)$

a) f et g sont paires
$g \circ f(-x) = g \circ f(x)$
donc : $g \circ f$ est paire.

b) f et g sont impaires
$g \circ f(-x) = g[-f(x)] = -g \circ f(x)$
donc : $g \circ f$ est impaire.

c) f est paire et g est impaire
$g \circ f(-x) = g[f(x)] = g \circ f(x)$
donc : $g \circ f$ est paire.

d) f est impaire et g est paire
$g \circ f(-x) = g[-f(x)] = g \circ f(x)$
donc : $g \circ f$ est paire.

2. Parité de $g \circ f$ lorsque f est paire
$g \circ f(-x) = g[f(-x)] = g[f(x)] = g \circ f(x)$
donc : $g \circ f$ est paire.

♦ Exercice 50 page 80

1. $f : [-3 ; 5[\to A$
$x \mapsto 3x - 5$

f est strictement croissante.
f est une bijection $\Leftrightarrow A = [f(-3) ; f(5)[$
$\Leftrightarrow A = [-14 ; 10[$

• $g : [-3 ; 5[\to B$
$x \mapsto (x-5)^2$

g est strictement décroissante.
g est une bijection $\Leftrightarrow B =]g(5) ; g(-3)]$
$\Leftrightarrow B =]0 ; 64]$

• $h : [-3 ; 5[\to C$
$x \mapsto \dfrac{3}{x+5}$

h est strictement décroissante.
h est une bijection $\Leftrightarrow C =]h(5) ; h(-3)]$
$\Leftrightarrow C =]0{,}3 ; 1{,}5]$

2. La bijection réciproque f^{-1}
y étant un élément de $[-14 ; 10[$, on résoud l'équation :

(1) $3x - 5 = y$

d'où : $x = \dfrac{y+5}{3} = f^{-1}(y)$

$f^{-1} : [-14 ; 10[\to [-3 ; 5[$
$x \mapsto \dfrac{x+5}{3}$

• La bijection réciproque g^{-1}
y étant un élément de $]0 ; 64]$, on résoud l'équation :

(2) $(x-5)^2 = y$

d'où : $x = 5 + \sqrt{y}$ ou $x = 5 - \sqrt{y}$

Or : $0 < y \leq 64$
$0 < \sqrt{y} \leq 8$; $-8 \leq -\sqrt{y} < 0$
$5 < 5 + \sqrt{y} \leq 13$; $-3 \leq 5 - \sqrt{y} < 5$

Par conséquent :
$x = 5 - \sqrt{y} = g^{-1}(y)$

$g^{-1} :]0 ; 64] \to [-3 ; 5[$
$x \mapsto 5 - \sqrt{x}$

• La bijection réciproque h^{-1}
y étant un élément de $]0{,}3 ; 1{,}5]$, on résoud l'équation :

(3) $\dfrac{3}{x+5} = y$

d'où : $x = \dfrac{3}{y} - 5 = h^{-1}(y)$

$h^{-1} :]0{,}3 ; 1{,}5] \to [-3 ; 5[$
$x \mapsto \dfrac{3}{x} - 5$.

5. Limites - Continuité

(pages 81 à 92 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
– faire la mise en place des premiers éléments nécessaires à l'étude analytique d'une fonction.

Commentaires

La notion de limite en a et de continuité en a sont des notions très voisines, la notion de continuité en a étant un cas spécifique de celle de la limite en a.
On pourra sensibiliser les élèves à la notion de limite en a en utilisant une calculatrice programmable.
Cet aspect numérique peut être très motivant.
Les auteurs ont profité de la mise en place en classe de seconde S de l'image réciproque d'un intervalle par une fonction. Cette étude avait été faite graphiquement et, dans la continuité, on a privilégié ici l'aspect graphique de ces notions. Ainsi, l'élève en difficulté se contentera d'observer les graphiques et d'analyser le tableau d'illustrations.
Ici encore, les fonctions élémentaires interviennent à plusieurs reprises et jouent leur rôle de fonctions de référence.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Limite et continuité en a • Propriétés – Continuité en a des fonctions élémentaires. – Critère de continuité en a. – Continuité et coïncidence de fonctions. – Opérations et limite en a. • Méthode – Pour calculer la limite en a de la fonction $\frac{f}{g}$, avec $f(a) = g(a) = 0$.	• À l'aide de sa représentation graphique, dire si une fonction admet ou non une limite en a ; trouver cette limite (si elle existe). • À l'aide de sa représentation graphique, dire si une fonction est continue ou non en a. • Reconnaître une fonction continue en a. • Calculer la limite en a de la fonction $\frac{f}{g}$, avec $f(a) = g(a) = 0$. • Calculer la limite en a d'une somme, d'un produit, d'un quotient.
Limite à gauche, limite à droite • Définition – Limite à gauche en a d'une fonction. – Limite à droite en a d'une fonction. • Propriétés – Limite à gauche en a, limite à droite en a, limite en a d'une fonction. – Continuité de la fonction valeur absolue.	• Étudier la limite en a d'une fonction à l'aide de sa limite à gauche en a et de limite à droite en a.

Exercices d'application directe

♦ **Exercice 1.a page 84**

$\lim\limits_{x \to 2}(5x + 3) = 13$

$\lim\limits_{x \to -1}(x^3 + 8x^2 - 2) = 5$

$\lim\limits_{x \to 1}\frac{1}{\sqrt{x}} = 1$

$\lim\limits_{x \to 3}\frac{x^3 - 7}{x - 4} = -20$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}}(x - \sin x) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{6}}\frac{3}{\cos x} = -2\sqrt{3}$

$\lim\limits_{x \to 0}(\sqrt{x} - 3x) = 0$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}}\tan x = 1$

♦ **Exercice 1.b page 84**

• f est continue en b et en d car :

$\lim\limits_{x \to b}f(x) = f(b) = \ell_1$

$\lim\limits_{x \to d}f(x) = f(d) = \ell_5$

• f n'est pas continue en a car f est définie en a mais n'a pas de limite en a.

• On ne peut pas parler de continuité en c car f n'est pas définie en c.

♦ **Exercice 1.c page 87**

• $f(x) = \frac{x^3 + 8}{x + 2} = x^2 - 2x + 4$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$\lim\limits_{x \to -2}f(x) = \lim\limits_{x \to -2}(x^2 - 2x + 4) = 12$

• $g(x) = \frac{x - 4}{2 - \sqrt{x}} = -\sqrt{x} - 2$; $D_g = \mathbb{R}\setminus\{4\}$

$\lim\limits_{x \to 4}g(x) = \lim\limits_{x \to 4}(-x - 2) = -4$

• $h(x) = \frac{|x| - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{|x| + 1}$; $D_g = \mathbb{R}\setminus\{-1 ; 1\}$

$$\begin{cases} \text{si } x \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\},\ h(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ \text{si } x \in \mathbb{R}^-\setminus\{-1\},\ h(x) = \dfrac{1}{-x+1} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to -1}h(x) = \lim\limits_{x \to -1}\frac{1}{-x + 1} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 1}h(x) = \lim\limits_{x \to 1}\frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}$

♦ **Exercice 1.d page 87**

• $f(x) = x - E(x)$; $\lim\limits_{x \to 5,2}f(x) = 5,2 - 5 = 0,2$

• $g(x) = |2x - 3|$; $\lim\limits_{x \to 0}g(x) = 3$

• $h(x) = |2x^2 - x - 1|$; $\lim\limits_{x \to -1}h(x) = 2$

• $k(x) = |\tan x|$; $\lim\limits_{x \to \frac{2\pi}{3}}\tan x = \frac{\left|\sin\frac{2\pi}{3}\right|}{\left|\cos\frac{2\pi}{3}\right|} = \sqrt{3}$

♦ **Exercice 2.a page 90**

• $f(x) = x\,E(x)$

x	-1		0		1
$E(x)$	-1	-1	0	0	1
$f(x)$		$-x$	0	0	

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}}f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(-x) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}f(x) = 0$

d'où : $\lim\limits_{x \to 0}f(x) = 0$

• $g(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x|} = |x| + 1$; $D_g = \mathbb{R}^*$

x	-1		0		1
$f(x)$		$-x + 1$	1	$x + 1$	

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}}g(x) = \lim\limits_{x \to 0}(x + 1) = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}g(x) = \lim\limits_{x \to 0}(-x + 1) = 1$

d'où : $\lim\limits_{x \to 0}g(x) = 1$

• $h(x) = x - E(x)$

x	-1		0		1
$E(x)$	-1	-1	0	0	1
$h(x)$		$x + 1$	0	x	

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}h(x) = \lim\limits_{x \to 0}x = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}h(x) = \lim\limits_{x \to 0}(x + 1) = 1$

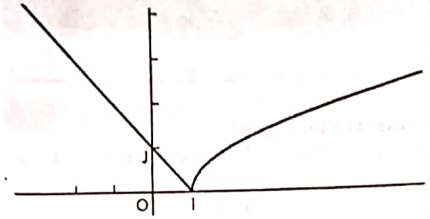
h n'admet pas de limite en 0.

♦ **Exercice 2.b page 90**

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}}f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(-x + 1) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}}f(x) = \lim\limits_{x \to 1}\sqrt{x - 1} = 0$

d'où : $\lim\limits_{x \to 1}f(x) = 0$



♦ **Exercice 2.c page 90**

On pose A(− 1 ; 0) et B(1 ; 0)

$f(x) = x^2 - 1$

$g(x) = x^2 + bx + c$

Il suffit de déterminer b et c pour que la représentation graphique (𝒞') de g passe par A et B, d'où le système :

$$\begin{cases} g(-1) = 1 - b + c = 0 \\ g(1) = 1 + b + c = 0 \end{cases}$$

donc : $c = -1$ et $b = 0$

$g(x) = x^2 - 1$

Considérons la fonction h définie par

$$\begin{cases} \text{si } x \in [-1 ; 1],\ h(x) = g(x) \\ \text{si } x \notin]-1 ; 1[,\ h(x) = f(x) \end{cases}$$

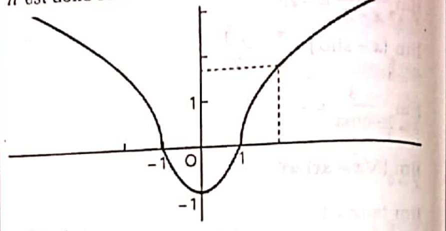
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} h(x) = \lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x^2 - 1} = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} h(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 1) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} h(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} h(x) = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x^2 - 1} = 0$

h est donc continue en − 1 et en 1.



Exercices d'apprentissage

♦ **Exercice 1 page 91**

Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions élémentaires est continue en tout élément de son ensemble de définition.

♦ **Exercice 2 page 91**

$f(x) = \left(\dfrac{2x^3 + x^2 + 5}{3x}\right)^2$; $D_f = \mathbb{R}^*$

$g(x) = \left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right)^2 + 1$; $D_g = \mathbb{R} \backslash \{2\}$

f et g sont continues en tout élément de leur ensemble de définition (voir exercice 1).

♦ **Exercice 3 page 91**

(1) $\lim\limits_{x \to 1515} 3 = 3$

(2) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} (2 - \sqrt{7}) = 2 - \sqrt{7}$

(3) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2} + \sqrt{3}} 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(4) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} x^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$

(5) $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} (1 - x + \dfrac{3}{x}) = \dfrac{3}{2}$

(6) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 - 20x + 3}{x - 2} = -\dfrac{128}{7}$

(7) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{x - 7}{x + 2} = -\dfrac{13}{5}$

(8) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{9}} \sqrt{x} = \dfrac{1}{3}$

(9) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x + 5} = 3$

♦ **Exercice 4 page 91**

(1) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\tan x} = 1$

(3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin x) = -1$

(4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} (4\sin x - 3\cos x) = 2\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}$

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 2}{4 + \cos x} = -\dfrac{2}{5}$

(6) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$

♦ **Exercice 5 page 91**

(1) $\lim\limits_{x \to 0} (2|x| - 8) = 0$

(2) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x - 3}{|x| + 3} = -1$

(3) $\lim\limits_{x \to -3} (x^2 - 2x + 7) = 10$

(4) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + |x - 2|}{x^2 + 3} = \dfrac{2}{7}$

♦ **Exercice 6 page 91**

(1) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} (x - 2) = -4$

(2) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{x^2 - 3x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{1}{5}$

(3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (3x + 1) = 7$

4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^3}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} -(1 + x + x^2) = -3$

5) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x - 3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x - 1}{x - 1} = \dfrac{7}{4}$

6) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 - 25}{x + 5} = \lim\limits_{x \to -5} (x - 5) = -10$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x - 2}{x^3 + x^2 + x - 3} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \dfrac{2}{3}$

8) $\lim\limits_{x \to -2} (x - 2) = -4$

9) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 1}{x + 2} = \dfrac{2}{5}$

10) $\lim\limits_{x \to \frac{4}{3}} \dfrac{(x - 2)(3x - 4)}{3x - 4} = \lim\limits_{x \to \frac{4}{3}} (x - 2) = -\dfrac{2}{3}$

11) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{7 + 13x - 2x^2}{x - 7} = \lim\limits_{x \to 7} (1 - 2x) = -13$

12) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + x^3}{x^3 + x^2 + 4x + 4}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 4} = \dfrac{3}{5}$

13) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} x(x + 1) = 2$

14) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3 - 3x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 3x(x - 1) = 0$

♦ **Exercice 7 page 91**

1) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = 1 + \sqrt{x}$

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 3$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = (x + 2)(\sqrt{x} + \sqrt{3})$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 10\sqrt{3}$

3) $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{x^3 + x^2 + x - 3} = \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 3}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{2}{3}$

4) $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} = \dfrac{1}{3 + \sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x \to 9} f(x) = \dfrac{1}{6}$

5) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x + 2}}{\sqrt{4x + 1} - 3} = \dfrac{(x + 1)(\sqrt{4x + 1} + 3)}{4(x + \sqrt{x + 2})}$

$\lim\limits_{x \to 9} f(x) = \dfrac{9}{8}$

6) $f(x) = \dfrac{x^3 + 27}{x + 3} = x^2 - 3x + 9$

$\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 9$

♦ **Exercice 8 page 91**

1) $f(x) = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \sqrt{2}$

(2) $f(x) = \dfrac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\sin x} = \dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

♦ **Exercice 9 page 91**

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (3x - 1) = 2$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x + 1} = 0$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$

Donc f n'admet pas de limite en 1.

♦ **Exercice 10 page 91**

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x^2 - x + 5) = 11$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (3x + 1) = 7$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x)$

Donc f n'a pas de limite en 2.

♦ **Exercice 11 page 91**

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - 3}{x^2 + 2} = -\dfrac{3}{2}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + x + 3}{x^2 + 5x - 2} = -\dfrac{3}{2}$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\dfrac{3}{2}$

♦ **Exercice 12 page 91**

(1) $f(x) = |x - 3|$; $a = 3$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x + 3) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x - 3) = 0$

(2) $f(x) = |x - 1|$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x + 1) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = 0$

(3) $f(x) = \dfrac{|2x - 1|}{x}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0,5 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0,5} \dfrac{-2x + 1}{x} = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0,5 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0,5} \dfrac{2x - 1}{x} = 0$

(4) $f(x) = \dfrac{x(x + 1)}{|x|}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} -(x + 1) = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x + 1) = 1$

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 13 page 92

$$\begin{cases} \text{Si } x \neq \frac{2}{3}, \ f(x) = \dfrac{2-3x}{9x^2-4} \\ f(\frac{2}{3}) = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$

Si $x \neq \frac{2}{3}$, $f(x) = -\dfrac{1}{3x+2}$

$\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} -\dfrac{1}{3x+2} = -\dfrac{1}{4}$

d'où : $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} f(x) = f(\frac{2}{3})$

f est donc continue en $\frac{2}{3}$.

♦ Exercice 14 page 92

$$\begin{cases} \text{Si } x \neq 3 \text{ et } x \neq -3, \quad f(x) = \dfrac{x^2-9}{|x|-3} \\ f(-3) = f(3) = 6 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$

Pour $x \neq 3$ et $x \neq -3$

$f(x) = \dfrac{|x|^2-9}{|x|-3} = |x| + 3$

x	$-\infty$	3	$-\infty$
$f(x)$	$-x+3$	$\boxed{0}$	$x+3$

$\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} (-x+3) = 6$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x+3) = 6$

d'où : $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3)$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

f est donc continue en -3 et en 3.

♦ Exercice 15 page 92

1. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$; $g(x) = x-3$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$; $D_g = \mathbb{R}$

$(fg)(x) = x+2$; $D_{fg} = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

2. $\begin{cases} \text{Si } x \neq 3, h(x) = (fg)(x) \\ h(3) = 5 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 3} h(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x+2) = 5$

d'où : $\lim\limits_{x \to 3} h(x) = h(3)$

fg est donc continue en 3.

♦ Exercice 16 page 92

$$\begin{cases} \text{Si } x < 2, \ f(x) = x^2+x-6 \\ \text{si } x > 2, \ f(x) = 2x-a \\ f(2) = b \end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2+x-6) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x-a) = 4-a$

f continue en 2 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

$\Leftrightarrow 4-a = 0 = b$

$\Leftrightarrow a = 4$ et $b = 0$

♦ Exercice 17 page 92

a) $$\begin{cases} \text{Si } x \neq 3, \ f(x) = \dfrac{x^2-x-6+(x-3)}{x^2-9} \\ f(3) = a \end{cases}$$

$D_g = \mathbb{R}$

b)

x	$-\infty$	3	$-\infty$
$f(x)$	$\dfrac{x+1}{x+3}$	$\boxed{a}$	1

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = 1$

c) d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \neq \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x)$

f n'a pas de limite en 3.

Il n'existe donc aucune valeur de a pour laquelle f est continue en 3.

♦ Exercice 18 page 92

$f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$

1. $\sin 2x = 0$

$x = \dfrac{k(2\pi)}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$ ou . $x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k(2\pi)}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

$x \in D_g \Leftrightarrow x \neq k\pi$ et $x \neq \pi + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

• Écriture simplifiée de $f(x)$

$f(x) = \dfrac{1-(\cos^2 x - \sin^2 x)}{2\sin x \cos x}$

$= \dfrac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \tan x$

2. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \tan x = 0$

♦ Exercice 19 page 92

• $1 + \cos x + \sin x = 2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$= 2\cos\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2})$

• $1 - \cos x + \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$= 2\sin\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2})$

$\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1+\cos x + \sin x}{\cos\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x \to \pi} 2(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}) = 2$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x + \sin x}{2\sin\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x \to 0} (\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}) = 1.$

6. Dérivation

(pages 93 à 110 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
- faire la mise en place des premiers éléments nécessaires à l'étude analytique d'une fonction ;
- compléter le chapitre 5.

Commentaires

Ce chapitre présente moins de difficulté que le précédent. L'aspect graphique de la tangente à une courbe a été privilégié.

Ici encore, l'étude démarre avec les fonctions élémentaires. Pour des élèves en difficulté, on passera rapidement sur l'introduction de la notion afin de consacrer plus de temps à la technique de calcul de la dérivée.

Par ailleurs, il est vivement conseillé que les élèves maîtrisent la technique de calcul de la dérivée avant d'aborder l'application de la dérivation à l'étude des fonctions.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Dérivation en a • Définitions – Taux de variation d'une fonction. – Nombre dérivé en a d'une fonction. – Tangente en un point de la représentation graphique d'une fonction.	• En utilisant la définition de la dérivée en a d'une fonction, calculer cette dérivée.
Détermination de la dérivée • Définition – Fontion dérivée. • Propriétés – Dérivabilité et continuité en a. – Règles de calcul des dérivées de la somme, du produit et du quotient de deux fonctions dérivables.	• À l'aide de la dérivabilité, justifier la continuité en a d'une fonction. • Calculer la dérivée de fonctions simples.

Exercices d'application directe

♦ **Exercices 1.a page 96**

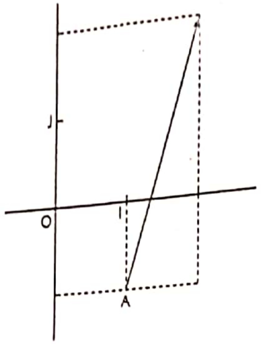
$f(x) = 5x^3 - x^2 + 2x - 7$

• $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 5x^2 + 4x + 6$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 15$

f est donc dérivable en 1 et $f'(1) = 15$.

• La tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en $A(1\,;-1)$ a donc pour coefficient directeur 15 et pour vecteur directeur $\vec{v}(1\,;15)$.



♦ **Exercice 1.b page 96**

$f(x) = \sqrt{x}\,;\ g(x) = x\sqrt{x}$

$D_f = D_g = \mathbb{R}^+$

• $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ n'a pas de limite finie en 0.

f n'est pas dérivable en 0.

• $\dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \dfrac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$

g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

♦ **Exercice 2.a page 100**

(1) $f(x) = 5x^3 - 7x + 2\,;$ $\quad f'(x) = 15x - 7$

(2) $f(x) = (2x+1)^3\,;$ $\quad f'(x) = 6(2x+1)^2$

(3) $f(x) = \sqrt{x}\cos x\,;$ $\quad f'(x) = \dfrac{\cos x - 2x\sin x}{2\sqrt{x}}$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2+1}\,;$ $\quad f'(x) = \dfrac{-6x}{(3x^2+1)^2}$

♦ **Exercice 2.b page 100**

(1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+5}}\,;$ $\quad f'(x) = \dfrac{3}{2(3x+5)\sqrt{3x+5}}$

(2) $f(x) = \sin 2x \times \cos 3x\,;$

$f'(x) = 2\cos 2x \times \cos 3x - 3\sin 3x \times \sin 2x$

(3) $f(x) = \tan\left(5x - \dfrac{\pi}{2}\right)\,;$ $\quad f'(x) = \dfrac{5}{\cos^2\left(5x - \dfrac{\pi}{2}\right)}$.

♦ **Exercice 3.a page 102**

$f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 7\,;\ D_f = \mathbb{R}$

• $f'(x) = x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$

• Sens de variation de f

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	$\boxed{0}$	−	$\boxed{0}$	+	
$f(x)$		↗	$\boxed{3}$	↘	$\boxed{-\frac{79}{3}}$	↗	

♦ **Exercice 3.b page 102**

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 4}{x^2 + 2}\,;\ D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{4(3x-1)}{(x^2+2)^2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	$\boxed{0}$	+	
$f(x)$		↘	$\boxed{-\frac{41}{19}}$	↗	

♦ **Exercice 3.c page 102**

$f(x) = \dfrac{3x^2 - 3x - 8}{x-1}\,;\ D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$f'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 11}{(x-1)^2}$

On vérifie que $f'(x)$ ne s'annule pas et est positif.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$		↗	‖	↗	

♦ **Exercice 3.d page 102**

$f(x) = \sqrt{3x-4}\,;\ D_f = \left[\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right[$

$f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-4}}$

x	$\frac{4}{3}$		→
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	$\boxed{0}$	↗	

♦ **Exercice 3.e page 103**

• $f(x) = -\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{5}{3}x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 5x + 1$

$f'(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$
$= (x-1)(x+1)(x-5)$

x	←		-1		1		5		→
$f'(x)$		−	$\boxed{0}$	+	$\boxed{0}$	−	$\boxed{0}$	+	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

f admet :
un minimum relatif en -1 ;
un maximum relatif en 1 ;
un minimum relatif en 5.

• $g(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5}{2} + 3x - 7$

$g'(x) = (x-1)^2(x+3)$

g admet un minimum en -3.

x	←		-3		1		→
$f'(x)$		−	$\boxed{0}$	+	$\boxed{0}$	+	
$f(x)$		↘		↗		↗	

• $h(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + 9$

$h'(x) = x^2 + x + 1$

Pour tout x, $h'(x) > 0$;

h n'admet pas d'extremum relatif.

Exercices d'apprentissage

♦ **Exercice 1 page 105**

(1) $f(x) = -2x + 7\,;$

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -2\,;\ f'(1) = -2$

(2) $f(x) = 3x^2 + 5\,;$

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 3(x+1)\,;\ f'(1) = 6$

(3) $f(x) = x^3 - 9$

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = x^2 + x + 1\,;\ f'(1) = 3$

(4) $f(x) = \sqrt{x+1}$

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\,;\ f'(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{-(x+1)}{2(x^2+1)}\,;\ f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

(6) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{2x+1}{2(x+1)}\,;\ f'(1) = \dfrac{3}{4}$.

♦ **Exercice 2 page 105**

• $f(x) = |x^3| = x^2|x|$

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = x|x|\,;\ f'(0) = 0$

• $g(x) = x|x|$

$\dfrac{g(x)-g(0)}{x} = x\,;\ g'(0) = 0$

• $h(x) = \sqrt{|x|}$

$\dfrac{h(x)-h(0)}{x} = \dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$

$x \mapsto \dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$ n'admet pas de limite finie en 0, donc f n'est pas dérivable en 0.

♦ **Exercice 3 page 105**

$\begin{cases} \text{si } x \geq 3, & f(x) = x + 1 \\ \text{si } x < 3, & f(x) = ax^2 - 2x \end{cases}$

• f continue en 3 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

or $\quad f(3) = 4$

et $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (ax^2 - 2x) = 9a - 6$

$\quad \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x + 1) = 4$

d'où f continue en 3 $\Leftrightarrow 9a - 6 = 4$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{10}{9}$.

• dérivabilité de f en 3

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = 1$

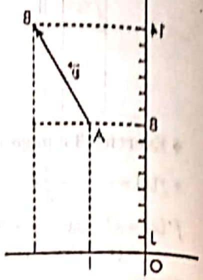
$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{ax^2 - 2x - 9a + 6}{x-3}$

La fonction $x \mapsto \dfrac{ax^2 - 2x - 9a + 6}{x-3}$ pour $a \neq 0$ n'a pas de limite finie.

f n'est donc pas dérivable en 3 pour $a = \dfrac{10}{9}$.

♦ **Exercice 4 page 105**

(2) $f(x) = 3x^2 + 5$; $f'(1) = 6$; $A(1 ; 8)$



$f'(1)$ est le coefficient directeur de (Δ)

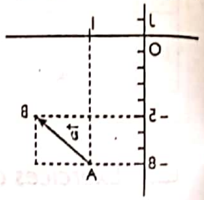
$\vec{u}(1 ; f'(1))$ est un vecteur directeur de (Δ).

Pour construire (Δ), il suffit de construire le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.

$\vec{u} = \vec{AB} = \vec{OI} + 6\vec{OJ}$

$(\Delta) : y = 6x + 2$.

(3) $f(x) = x^3 - 9$; $f'(1) = 3$

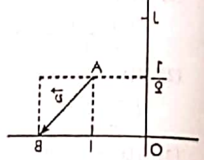


$A(1 ; -8)$

$\vec{u}(1 ; 3)$

$(\Delta) : y = 3x - 11$.

(5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

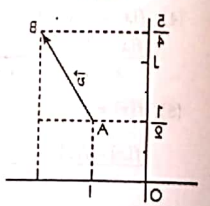


$A(1 ; \frac{1}{2})$

$\vec{u}(1 ; -\frac{1}{2})$

$(\Delta) : y = -\dfrac{x}{2} + 1$

(6) $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$; $f'(1) = \dfrac{3}{4}$



$A(1 ; \frac{1}{2})$

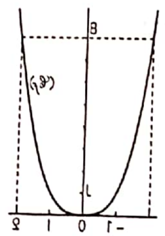
$\vec{u}(1 ; \frac{3}{4})$

$(\Delta) : y = \dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{4}$

♦ **Exercice 5 page 105**

• $f(x) = |x^2|$

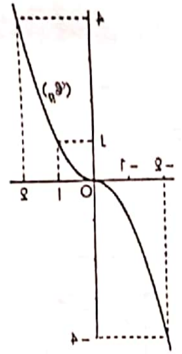
$(\mathscr{C}_f)$ est symétrique par rapport à (OJ).



• $g(x) = x|x|$

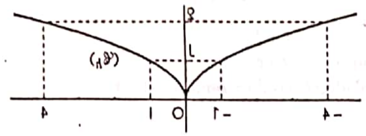
$\begin{cases} \text{si } x \in \mathbb{R}^+, g(x) = x^2 \\ \text{si } x \in \mathbb{R}^-, g(x) = -x^2 \end{cases}$

$(\mathscr{C}_g)$ est symétrique par rapport à O.



• $h(x) = \sqrt{|x|}$

$(\mathscr{C}_h)$ est symétrique par rapport à O.



♦ **Exercice 6 page 105**

$f(x) = |x|x^2$; $D_f = \mathbb{R}$

$\begin{cases} \text{si } x \in \mathbb{R}_+^*, & f(x) = x^3 \\ \text{si } x \in \mathbb{R}_-^*, & f(x) = -x^3 \\ & f(0) = 0 \end{cases}$

• f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$
et pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 3x^2$

• f est dérivable sur $]-\infty ; 0[$
et pour tout x de $]-\infty ; 0[$, $f'(x) = -3x^2$

• Étude de la dérivabilité en 0

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0}(-x^2) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$

Par conséquent, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

• f est donc dérivable en $\mathbb{R}$ et

$\begin{cases} \text{si } x \in \mathbb{R}_+^*, & f'(x) = 3x^2 \\ \text{si } x \in \mathbb{R}_-^*, & f'(x) = -3x^2 \\ & f'(0) = 0 \end{cases}$

f' est définie par : $f'(x) = 3x|x|$.

♦ **Exercice 7 page 105**

$f(x) = x^2\sqrt{x}$; $D_f = \mathbb{R}^+$

• Dérivabilité en 0

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x\sqrt{x} = 0$

f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

• f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ $(x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x})$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$.

Par conséquent,
f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$.

♦ **Exercice 8 page 105**

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2x$

$(\Delta) : y = 2x - 1$

• Points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (Δ)

$(E) : f(x) - (2x - 1) = 0$

$(x^2 - 1)^2 = 0$

(E) admet donc deux solutions doubles : -1 et 1.

Les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (Δ) sont :

$A(-1 ; -3)$ et $B(1 ; 1)$.

• Vérifions que (Δ) est tangente à $(\mathscr{C})$ en A et en B.

♦ **Exercice 9 page 105**

(6) $f(x) = 3x(x - 4)^2(3x + 1)^3$
$f'(x) = 3(x - 4)(3x + 1)^2(18x^2 - 45x - 4)$

(8) $f(x) = (2x + 1)^3(1 - 5x)^4$
$f'(x) = -14(2x + 1)^2(1 - 5x)^3(5x + 1)$

(12) $f(x) = x^4(x^3 + 4x - 3)^4$
$f'(x) = x^3(x^3 + 4x - 3)^3(13x^3 + 28x - 12)$.

♦ **Exercice 10 page 105**

Dans chacun des cas suivants, la fonction rationnelle f est dérivable en tout élément de son ensemble de définition D_f.

(1) $f(x) = \dfrac{3}{2x - 1}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$

$f'(x) = \dfrac{-6}{(2x - 1)^2}$

(2) $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{x + 4}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$

$f'(x) = \dfrac{-13}{(x + 4)^2}$

(3) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 2}{3x - 1}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{3}\}$

$f'(x) = \dfrac{9x^2 - 6x - 5}{(3x - 1)^2}$

(4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{5x^2 - x - 1}$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{\dfrac{1 + \sqrt{21}}{10} ; \dfrac{1 - \sqrt{21}}{10}\}$

$f'(x) = \dfrac{-x^2 + 28x - 3}{(5x^2 - x - 1)^2}$

(6) $f(x) = \dfrac{3x + 2}{2x - 3}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\frac{3}{2}\}$

$f'(x) = \dfrac{-13}{(2x - 3)^2}$

(7) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 6x}{7 - 4x}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\frac{7}{4}\}$

$f'(x) = \dfrac{-16x^3 + 66x^2 - 90x + 42}{(7 - 4x)^2}$

(8) $f(x) = \dfrac{2 + 3x}{-x^2 + 3x - 2}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1 ; 2\}$

$f'(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 12}{(-x^2 + 3x - 2)^2}$

(9) $f(x) = \dfrac{(x - 3)^2}{(3x + 5)^2}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{5}{3}\}$

$f'(x) = \dfrac{6x^2 - 17x - 12}{(3x + 5)^4}$

(10) $f(x) = \dfrac{3x(x^2 + 4)}{(x - 5)^4}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{5\}$

$f'(x) = \dfrac{-6x^3 - 45x^2 - 48x - 60}{(x - 5)^5}$.

♦ **Exercice 11 page 105**

(3) $f(x) = x^2\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$; $D_f = \mathbb{R}_+^*$

f est dérivable en tout élément de $\mathbb{R}_+^*$.

$f'(x) = \dfrac{5x^3 - 2}{2x\sqrt{x}}$

(4) $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x - 1}$; $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

f est dérivable en tout élément de D_f.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{(x - 1)^2}$

(5) $f(x) = x + \sqrt{x}$; $D_f = \mathbb{R}_+^*$

f est dérivable en tout élément de $\mathbb{R}_+^*$.

$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(6) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$; $D_f = \mathbb{R}_+^*$

f est dérivable en tout élément de $\mathbb{R}_+^*$.

$f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

♦ **Exercice 12 page 105**

(1) $f(x) = 2\cos^2 x - 3\cos x + 1$
f est dérivable en tout x de $\mathbb{R}$.
$f'(x) = \sin x(3 - 4\cos x)$

(2) $f(x) = \sin^5 x + \cos^5 x$
f est dérivable en tout x de $\mathbb{R}$.
$f'(x) = \sin x \cos x(5\sin^3 x - 3\cos x)$

(3) $f(x) = \dfrac{2\sin x}{1 + \sin x}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3\pi}{2} + k(2\pi) : k \in \mathbb{Z}$

f est dérivable en tout x de D_f.

$f'(x) = \dfrac{2\cos x}{(1 + \sin x)^2}$

(4) $f(x) = \sin^2 x \cos x - 3\cos^3 x$
f est dérivable en tout x de $\mathbb{R}$.
$f'(x) = \sin x(12\cos^2 x - 1)$

(5) $f(x) = 2x - \cos x$

f est dérivable en tout x de $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2 + \sin x$

(6) $f(x) = x\sin x$

f est dérivable en tout x de $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \sin x + x\cos x$

(7) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}$

f est dérivable en tout x de D_f.

$f'(x) = \dfrac{3 - \cos^2 x}{\cos^4 x}$

(8) $f(x) = \dfrac{\tan x}{1 + \tan x}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k(2\pi) \,;\, k \in \mathbb{Z}$

f est dérivable en tout x de D_f.

$f'(x) = \dfrac{1 + \tan 2x}{(1 + \tan x)^2}$

♦ Exercice 13 page 105

(1) $f(x) = \sqrt{2x - 3}$; $D_f = [\dfrac{3}{2} \,;\, +\infty[$

f est dérivable en tout x de $]\dfrac{3}{2} \,;\, +\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

(2) $f(x) = x - \sqrt{2x - 3}$; $D_f = [-\dfrac{3}{2} \,;\, +\infty[$

f est dérivable en tout x de $[-\dfrac{3}{2} \,;\, +\infty[$.

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - 5x}}$; $D_f =]-\infty \,;\, \dfrac{3}{5}]$

$f'(x) = \dfrac{5}{2(3 - 5x)\sqrt{3 - 5x}}$

(4) $f(x) = x\sqrt{x}$; $D_f = \mathbb{R}_+^*$; $f'(x) = \dfrac{3x}{2\sqrt{x}}$

(6) $f(x) = \tan 2x$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + k(\pi)$ et $x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k(\pi)$

f est dérivable en tout x de D_f

$f'(x) = 2(1 + \tan^2 2x) = \dfrac{2}{\cos^2 2x}$

(7) $f(x) = \sin(x + 1)$; $f'(x) = \cos(x + 1)$

(8) $f(x) = \cos(3x + 2)$; $f'(x) = -3\sin(3x + 2)$

♦ Exercice 14 page 106

Calcul de la dérivée à l'aide de la forme factorisée, puis de la forme développée et réduite.

(1) $f(x) = (x + 1)^2(3 - 2x)$

$= -2x^3 - x^2 + 4x + 3$

$f'(x) = 2(x + 1)(2 - 3x)$

$= -6x^2 - 2x + 4.$

(2) $f(x) = (4x^2 - 5)(7x + 9)$

$= 28x^3 + 36x^2 - 35x - 45$

$f'(x) = 8x(7x + 9) + 7(4x^2 - 5)$

$= 84x^2 + 72x - 35.$

♦ Exercice 15 page 106

(1) $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{2x + 9} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{\frac{29}{2}}{2x + 9}$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\dfrac{9}{2}\}$

$f'(x) = \dfrac{-29}{(2x + 9)^2}$

(2) $f(x) = \dfrac{4x^2 + 7}{x^2 + 1} = \dfrac{4 + 3}{x^2 + 1}$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2 + 1)^2}$

(3) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5}{x^3 + 1} = \dfrac{2 - 7}{x^3 + 1}$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f'(x) = \dfrac{21x^2}{(x^3 + 1)^2}$

(4) $f(x) = 25x^2 + 30x + 3 = 25(x + \dfrac{3}{5})^2 - \dfrac{6}{25}$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 50x + 30 = 50(x + \dfrac{3}{5})$

♦ Exercice 16 page 106

(1) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 2}{x + 3} = 2x - 1 + \dfrac{1}{x + 3}$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$f'(x) = \dfrac{4x^2 + 12x + 17}{(x + 3)^2} = 2 - \dfrac{1}{(x + 3)^2}$

(2) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^2 + 1} = x + 1 + \dfrac{1}{x^2 + 1}$

$f'(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} = 1 - \dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

(3) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^3} = x + 1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

$f'(x) = x^4 - 2x - \dfrac{3}{x^4} = 1 - \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^4}$

(4) $f(x) = \dfrac{7x + 3}{x - 1} = 7 + \dfrac{10}{x - 1}$

$f'(x) = \dfrac{-10}{(x - 1)^2}$

♦ Exercice 17 page 106

$f(x) = 5x^2 + 3$; $g(x) = x + 2$

$f'(x) = 10x$; $g'(x) = 1$

- Dérivée de $f - g$; $D' = \mathbb{R}$

$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 10x - 1$

- Dérivée de $2f + 3g$; $D' = \mathbb{R}$

$(2f + 3g)'(x) = 2f'(x) + 3g'(x) = 20x + 3$

- Dérivée de fg ; $D' = \mathbb{R}$

$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = 15x^2 + 20x + 3$

- Dérivée de g^2 ; $D' = \mathbb{R}$

$(g^2)'(x) = 2g'(x)g(x) = 2(x + 2)$

- Dérivée de $\dfrac{1}{g}$; $D' = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$(\dfrac{1}{g})'(x) = -\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\dfrac{1}{(x + 2)^2}$

- Dérivée de $\dfrac{f}{g}$; $D' = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$(\dfrac{f}{g})'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2} = \dfrac{5x^2 + 20x - 3}{(x + 2)^2}$

♦ Exercice 18 page 106

(1) $f'(2) = -1$; $f'(-2) = -9$

(2) $f'(0) = -1$; $f'(4) = 87$

(3) $f'(3) = 58$; $f'(-3) = -110$

(4) $f'(2) = -6(1 + \sqrt{2})$; $f'(-2) = -6(1 - \sqrt{2})$

♦ Exercice 19 page 106

(1) $f'(-1) = 6$; $f'(1) = \dfrac{18}{25}$

(2) $f'(-2) = -\dfrac{20}{49}$; $f'(3) = \dfrac{5}{24}$

♦ Exercice 20 page 106

(1) $f'(2) = -116$

(2) $f'(1) = \dfrac{1}{9}$

(3) $f'(-1) = 8$

(4) $f'(0) = \dfrac{35}{10}$

(5) $f'(0) = 1$

(6) $f'(\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$

(7) $f'(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(8) $f'(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\pi^2}{8} + \dfrac{\pi}{2} + 2$

(9) $f'(\dfrac{\pi}{4}) = 1 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

(10) $f'(\dfrac{\pi}{3} + 2) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

♦ Exercice 21 page 106

$f(x) = \dfrac{x - a}{x + a}$; $f'(x) = \dfrac{2a}{(x + a)^2}$

$f'(a) = \dfrac{1}{2a} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$

♦ Exercice 22 page 106

Dans l'ordre, on a : g' ; f' ; h'.

♦ Exercice 23 page 106

1. Dérivées successives

(1) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

$f'(x) = 6x - 5$; $f''(x) = 6$; $f'''(x) = 0.$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x - 1)^2}$; $f''(x) = \dfrac{2}{(x - 1)^3}$

$f'''(x) = \dfrac{-6}{(x - 1)^4}$; $f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{(x - 1)^5}$

♦ Exercice 24 page 106

1. Un polynôme P de degré 2 s'écrit :

$P(x) = ax^2 + bx + c \,;\, a \neq 0$

d'où : $P'(x) = 2ax + b$

$P''(x) = 2a$

$P(0) = c$; $P'(0) = b$; $P''(0) = 2a$

donc : $P(x) = P''(0)\dfrac{x^2}{2} + P'(0)x + P(0).$

2. On montre de même qu'un polynôme Q du 3[e] degré peut s'écrire :

$Q(x) = Q^{(3)}(0)\dfrac{x^3}{6} + Q''(0)\dfrac{x^2}{2} + Q'(0)x + Q(0).$

♦ Exercice 25 page 107

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

On vérifie que $f(-1) = 0$,

par conséquent :

$f(x) = (x + 1)(x^2 - 4x + 4)$

$= (x + 1)(x - 2)^2$

$(\mathscr{C}_f)$ coupe donc (OI) en deux points $A(-1 \,;\, 0)$ et $B(2 \,;\, 0)$.

2. Tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en A : $(T_A) : y = 9x + 9$

Tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en B : $(T_B) : y = 0$; $T_B = (OI)$.

♦ Exercice 26 page 107

$f(x) = 3x^2 - x - 1$; $f'(x) = 6x - 1$

1. La tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en $A(a \,;\, f(a))$ est perpendiculaire à $(\Delta) : y = 11x - 3$

Donc : $f'(a) = 6a - 1 = 11$; $a = 2$; $A(2 \,;\, 9)$.

2. La tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en $B(b \,;\, f(b))$ est perpendiculaire à $(\Delta') : y = 2x + 5$

Donc : $f'(b) = 6b - 1 = -\dfrac{1}{2}$; $b = \dfrac{1}{12}$; $B(\dfrac{1}{12} \,;\, -\dfrac{153}{144})$.

♦ Exercice 27 page 107

(voir exercice 26)

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$; $f'(x) = 3x^2 - 4x$

1. La tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en $A(a \,;\, f(a))$ est parallèle à $(D) : y = 7x - 9$

Donc : $f'(a) = 3a^2 - 4a = 7$

On obtient deux valeurs pour a, d'où les deux points $A(-1 \,;\, 2)$ et $A'(\dfrac{7}{3} \,;\, \dfrac{76}{27})$

2. La tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en $B(b \,;\, f(b))$ est perpendiculaire à $(\Delta') : y = x + 3$

Donc : $f'(b) = 3b^2 - 4b = -1$

On obtient deux valeurs pour b, d'où les deux points $B(1\,;2)$ et $B'(\frac{1}{3}\,;\frac{22}{27})$.

♦ Exercice 28 page 107

(7) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - x^2 - 5x$

$f'(x) = (x-1)(x+1)(2x+5)$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-\frac{185}{24}$	↗	$\frac{17}{6}$	↘	$-\frac{23}{6}$	↗	

(8) $f(x) = (x^2+1)(5x-7)$

$f'(x) = 15x^2 - 14x + 5$

$\Delta = -26 < 0$

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

♦ Exercice 29 page 107

(1) $f(x) = \frac{-2x+1}{3x+5}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{5}{3}\}$

$f'(x) = \frac{-13}{(3x+5)^2}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$		↘	‖	↘	

f est strictement décroissante sur $]\leftarrow\,; -\frac{5}{3}[$ et sur $]-\frac{5}{3}\,;\rightarrow[$

(2) $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x-1}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↘	8	↗	

♦ Exercice 30 page 107

(1) $f(x) = \sqrt{2x+1}$; $D_f = [-\frac{1}{2}\,;\rightarrow[$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > 0$

f est donc strictement croissante sur D_f.

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$; $D_f =]\frac{1}{3}\,;\rightarrow[$

$f'(x) = \frac{-3}{2(3x-1)\sqrt{3x-1}} < 0$

f est donc strictement décroissante sur D_f.

♦ Exercice 31 page 107

(1) $f(x) = x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 4x + 5$

$f'(x) = (x+4)(3x-1)$

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	45	↘	4	↗	

- 45 est un maximum relatif atteint en -4.
- 4 est un minimum relatif de f atteint en $\frac{1}{3}$.

(2) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x - 7$

$f'(x) = (x+2)^2$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; elle n'admet pas d'extremum relatif.

(3) $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = (x-1)^2(x-4)$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{5}{4}$	↘	$-\frac{11}{4}$	↗	$\frac{5}{4}$	↘	

-7 est un minimum relatif de f, atteint en 4.

(4) $f(x) = -\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x - 1$

$f'(x) = -(x-1)(x+1)(x+3)$

- $\frac{5}{4}$ est un maximum relatif de f atteint en -3 et en 1.
- $-\frac{11}{4}$ est un minimum relatif de f atteint en -1.

(5) $f(x) = x + 3 + \frac{4}{x-1}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↘	‖	↘	8	↗	

- 0 est un maximum relatif de f atteint en -1.

- 8 est un minimum relatif de f atteint en 3.

(6) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

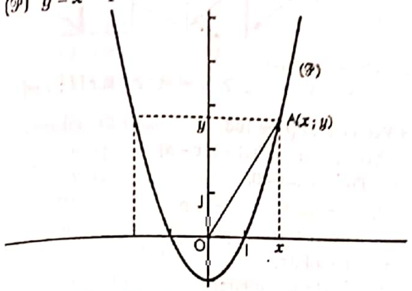
$f'(x) = (x+1)(3x-1)$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↘	$-\frac{32}{27}$	↗	

- 0 est un maximum relatif de f atteint en -1.
- $-\frac{32}{27}$ est un minimum relatif de f atteint en $\frac{1}{3}$.

♦ Exercice 32 page 107

$(\mathscr{P})$ $y = x^2 - 1$



Notons $d(O\,;A)$ la distance de O à A.

$d(O\,;A) = \sqrt{x^2 + (x^2-1)^2}$

$f(x) = [d(O\,;A)]^2$

$f(x) = x^4 - x^2 + 1$

$f'(x) = 2x(2x^2-1)$

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		1		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\frac{3}{4}$	↗		↘	$\frac{3}{4}$	↗	

- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est la distance minimale d'un point A de $\mathscr{P}$ à 0 : elle est atteinte par les abscisses $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

♦ Exercice 33 page 107

On sait (voir TP2) que pour tout h proche de 0 :

$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h$.

(1) $(0{,}999)^2 = (1-0{,}001)^2$

$f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$

Posons : $a = 1$; $h = -0{,}001$.

$f(1-0{,}001) \approx f(1) - f'(1) \times 0{,}001$

$\approx 1 - 2 \times 0{,}001$

$\approx 0{,}998$.

- La calculatrice affiche : $(0{,}999)^2 \approx 0{,}998\,001$.

(2) $(0{,}98)^3 = (1-0{,}002)^3$

- $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$

Posons : $a = 1$; $h = -0{,}002$.

On obtient : $(0{,}98)^3 \approx 0{,}94$.

- La calculatrice affiche : $(0{,}98)^3 \approx 0{,}941\,192$.

(3) $(1{,}048)^3 = (1+0{,}048)$

- $f(x) = x^3$

Posons : $a = 1$; $h = 0{,}048$.

On obtient : $(1{,}048)^3 \approx 1{,}144$.

- La calculatrice affiche : $(1{,}048)^3 \approx 1{,}151\,022\,592$.

(4) $\sqrt{0{,}998} = \sqrt{1-0{,}002}$

- $f(x) = x$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Posons : $a = 1$; $h = -0{,}002$.

On obtient : $\sqrt{0{,}998} \approx 0{,}999$.

- La calculatrice affiche : $\sqrt{0{,}998} \approx 0{,}998\,999\,499$.

(5) $\frac{1}{1{,}024} = \frac{1}{1+0{,}024}$

- $f(x) = \frac{1}{x}$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Posons : $a = 1$; $h = 0{,}024$.

On obtient : $\frac{1}{1{,}024} \approx 0{,}976$.

- La calculatrice affiche : $\frac{1}{1{,}024} \approx 0{,}976\,5625$.

(6) $\frac{1}{1{,}012^3} = \frac{1}{(1+0{,}012)^3}$

- $f(x) = \frac{1}{x^3}$; $f'(x) = \frac{-3}{x^4}$

Posons : $a = 1$; $h = 0{,}012$.

On obtient : $\frac{1}{1{,}012^3} \approx 0{,}964$.

- La calculatrice affiche : $\frac{1}{1{,}012^3} \approx 0{,}964\,847\,025$.

♦ Exercice 34 page 107

(1) $f(x) = |1+x| + 2x^2$

x	$-\infty$ $\quad -3$	-1 $\quad 2$ $\quad +\infty$
$f(x)$	$2x^2 - x - 1$	$2x^2 + x + 1$
$f'(x)$	$4x - 1$	$4x + 1$

d'où : $f'(-3) = -13$; $f'(2) = 9$.

(2) $f(x) = |1-x^2| - x$

x	$-\infty$ $\quad -2$	-1 $\quad 0$	1 $\quad +\infty$
$f(x)$	$x^2 - x - 1$	$-x^2 - x + 1$	$x^2 - x - 1$
$f'(x)$	$2x - 1$	$-2x - 1$	$2x - 1$

d'où : $f'(-2) = -5$; $f(0) = -1$.

♦ Exercice 35 page 107

- $f(x) = (3x+1)(2x-1)$

$f'(x) = 12x - 1$

- $g(x) = 6x^2 - x + 9$

$g'(x) = 12x - 1$

d'où : $f' = g'$

- $(f - g)(x) = -10$

d'où : $(f' - g')(x) = (f - g)' = 0$;

on a bien $f' = g'$.

♦ Exercice 36 page 107

$f(x) = 3x^2 + 10x + 7$

- On sait que :

$(x^3)' = 3x^2$; $(5x^2)' = 10x$; $(7x)' = 7$.

Les fonctions f_1, f_2, f_3 ont pour dérivée f.

$f_1(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + a_1$

$f_2(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + a_2$

$f_3(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + a_3$

a_1, a_2, a_3 sont des constantes.

- Celle qui prend la valeur 9 en 2 vérifie l'égalité :

$2^3 + 5 \times 2^2 + 7 \times 2 + a = 9$

d'où : $a = -33$.

♦ Exercice 37 page 107

(1) $f'(x) = 3x - 1$

$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + a$

$f(1) = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

(2) $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 1$

$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x + \frac{13}{4}$

(3) $f'(x) = x^2 - 5x + 7$

$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 29$

(4) $f'(x) = -x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 8$

$f(x) = -\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{5}{3}x^3 - 8x + \frac{181}{30}$

♦ Exercice 38 page 107

- h croissante sur $[a\,;\,b[$ signifie que pour tous nombres u et v tels que $a \leq u < v < b$, on a :

$h(a) \leq h(u) \leq h(v)$;

de plus : $h(a) \geq 0$;

donc, pour tout x de $[a\,;\,b[$, $0 \leq h(a) \leq h(x)$.

- Pour comparer f et g sur $[a\,;\,b[$, on peut procéder comme suit :

– poser $h = f - g$

– étudier le sens de variation de h

– étudier le signe de $h(a)$

- Application

(1) $f(x) = x^3 - x^2$; $g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$

On pose : $h(x) = f(x) - g(x)$.

$h'(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x$.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{7}$		0		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$h'(x)$		+	$\boxed{0}$	−	$\boxed{0}$	+	$\boxed{0}$	−	

h est croissante sur $[0\,;\,2+\sqrt{7}[$ et $h(0) = 0$,

donc h est positive sur $[0\,;\,2+\sqrt{7}[$,

et $f \geq g$ sur $[0\,;\,2+\sqrt{7}[$.

(2) $f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{x-1}$; $g(x) = \frac{2x+1}{3x+5}$

On pose : $h = f - g$; $D_h = \mathbb{R}\backslash\{1\,;\,-\frac{5}{3}\}$

$h(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{x-1} - \frac{2x+1}{3x+5}$

$h'(x) = 20x^2 + 134x + 93$

$h'(x)$ s'annule pour x_1 et x_2.

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{5}{3}$		x_2		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		+	$\boxed{0}$	−	‖	−	$\boxed{0}$	+		+	‖	+	
$h(x)$		↗		↘	‖	↘		↗		↗	‖	↗	

On vérifie que $h(2) > 0$,

donc h est positive sur $[2\,;\,+\infty[$ et $f \geq g$ sur $[2\,;\,+\infty[$.

♦ Exercice 39 page 108

1. $P(x) = (x - a)^2$; $P'(x) = 2(x - a)$

donc $P(a) = P'(a) = 0$.

2. On suppose $P(a) = P'(a) = 0$,

donc il existe $P_1(x)$ tel que :

$P(x) = (x - a)P_1(x)$

$P'(x) = P_1(x) + (x - a)P_1'(x)$

$P'(a) = P_1(a) = 0$

donc il existe $P_2(x)$ tel que :

$P_1(x) = (x - a)P_2(x)$

d'où : $P(x) = (x - a)^2P_2(x)$.

Par conséquent, $P(x)$ est factorisable par $(x - a)^2$ si et seulement si $(x - a)^2$.

Application

- $P(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 15x - 9$

$P'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 4x + 15$

d'où $P(3) = P'(3) = 0$

donc $P(x)$ est factorisable par $(x - 3)^2$.

- Résolution de $P(x) = 0$ (E)

$P(x) = (x - 3)^2Q(x)$

Par identification ou par division, on a :

$P(x) = (x - 3)^2(x^2 + x - 1)$

$S_{(E)} = \{3\,;\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$

♦ Exercice 40 page 108

1. $P(x) = \lambda(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

2. $P'(x) = \lambda[(x - \beta)(x - \gamma) + (x - \gamma)(x - \alpha) + (x - \alpha)(x - \beta)]$

d'où : $P'(\alpha) = \lambda(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) \neq 0$

$P'(\beta) = \lambda(\beta - \gamma)(\beta - \alpha) \neq 0$

$P'(\gamma) = \lambda(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) \neq 0$

3. Posons : $A = \frac{\alpha}{P'(\alpha)} + \frac{\beta}{P'(\beta)} + \frac{\gamma}{P'(\gamma)}$

$$A = \frac{\lambda[\alpha P'(\beta)P'(\gamma) + \beta P'(\gamma)P'(\alpha) + \gamma P'(\alpha)P'(\beta)]}{P'(\alpha)P'(\beta)P'(\gamma)}$$

Posons : $B = \frac{\lambda^3}{P'(\alpha)P'(\beta)P'(\gamma)}$

$A = B(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta) \times [\alpha(\beta - \gamma) + \beta(\gamma - \alpha) + \gamma(\alpha - \beta)]$

$[\alpha(\beta - \gamma) + \beta(\gamma - \alpha) + \gamma(\alpha - \beta)] = 0$

Donc : $\frac{\alpha}{P'(\alpha)} + \frac{\beta}{P'(\beta)} + \frac{\gamma}{P'(\gamma)} = 0$.

♦ Exercice 41 page 108

On a : $P(1) = 0$

d'où : $P(x) = (x - 1)(4x^2 + ax + 3)$

$= (x - 1)(4x^2 - 7x + 3)$

$= (x - 1)Q(x)$.

On a : $Q(1) = 0$

d'où : $Q(x) = (x - 1)(x - 3)$

donc : $P(x) = (x - 1)^2(x - 3)$

♦ Exercice 42 page 108

1. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

f est dérivable sur K. a étant un élément de K :

$f'(a) = \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v^2(a)}$

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow u'(a)v(a) = u(a)v'(a)$

$\Leftrightarrow \frac{u'(a)}{v'(a)} = \frac{u(a)}{v(a)} = f(a)$

2. Application

- $g(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$; $D_g = \mathbb{R}\backslash\{-1\,;\,1\}$

$g'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0\,;\,-3\,;\,3\}$.

- $u(x) = 2x^3 - x^2 + 1$; $u'(x) = 6x^2 - 2x$

$v(x) = x^2 - 1$; $v'(x) = 2x$

$g(-\sqrt{3}) = \frac{u'(-\sqrt{3})}{v'(-\sqrt{3})} = 3\sqrt{3} + 1$

$g(\sqrt{3}) = \frac{u'(\sqrt{3})}{v'(\sqrt{3})} = 3\sqrt{3} - 1$

$g(0) = \frac{u(0)}{v(0)} = -1$

(compte tenu de D_f et $v'(0) = 0$:

$v'(-3) \neq 0$; $v'(\sqrt{3}) \neq 0$).

♦ Exercice 43 page 108

(voir exercice précédent)

- $f(x) = \frac{-2x^2}{3x - 1}$; $f'(x) = \frac{x(14x - 1)}{(3x - 1)^2}$

$(\mathscr{C}_f)$ admet une tangente en $A(a\,;\,f(a))$ parallèle à (OI) *équivaut* à $a = 0$ ou $a = \frac{1}{14}$.

- Calcul de $f(a)$

Posons : $u(x) = -2x^2$; $v(x) = 3x - 1$

d'où : $u'(x) = -4x$; $v'(x) = 3$

on a : $v(0) \neq 0$ et $v'(0) \neq 0$

$v(\frac{1}{14}) \neq 0$ et $v'(\frac{1}{14}) = 0$

d'où : $f(0) = \frac{u'(0)}{v'(0)} = 0$

$f(\frac{1}{14}) = \frac{u'(\frac{1}{14})}{v'(\frac{1}{14})} = -\frac{2}{21}$.

♦ Exercice 44 page 108

- $f(x) = x - 2$; $D_f = [2\,;\,+\infty[$

f est dérivable de $]2\,;\,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

- $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = \frac{1}{2}$.

♦ Exercice 45 page 108

(voir exercice 44)

(1) Posons $f(x) = \sqrt{5x + 4}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{5x+4} - 2}{x} = f'(0) = \frac{5}{4}$.

(2) Posons $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

$\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x - 4} = f'(4) = \frac{1}{3}$.

(3) Posons $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

$\lim\limits_{x \to -2} \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt{5}}{x + 2} = f'(-2) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(4) Posons $f(x) = \sqrt{3x - 5}$

$\frac{\sqrt{3x-5} - 1}{x^2 - 4} = \frac{1}{x + 2} \times \frac{\sqrt{3x-5} - 1}{x - 2}$

or $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{4}$

et $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x-5} - 1}{x - 2} = f'(2) = \frac{3}{2}$

d'où $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x-5} - 1}{x^2 - 4} = \frac{3}{8}$.

♦ Exercice 46 page 108

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\pi x} = \frac{2}{\pi} \times \lim\limits_{x \to 0} \cos x \times \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

or $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$

et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

d'où $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\pi x} = \frac{2}{\pi}$

♦ **Exercice 47 page 108**

$f(x) = x^2$; $g(x) = 3x^2 - 4x + 2$;
$h(x) = -2x^2 + 6x - 3$.

• On vérifie que $f(1) = g(1) = h(1) = 1$,
donc $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_h)$ passent par le point A(1 ; 1).

• On vérifie que $f'(1) = g'(1) = h'(1) = 2$,
donc $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_h)$ ont la même tangente en A(1 ; 1), la droite (D) d'équation :
(D) $y - 1 = 2(x - 1)$
(D) $y = 2x - 1$

• Position de $(\mathscr{C}_f)$ et (D)
$f(x) - (2x - 1) = (x - 1)^2 \geq 0$
$(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de (D).

• Position de $(\mathscr{C}_g)$ et (D)
$g(x) - (2x - 1) = 3(x - 1)^2 \geq 0$
$(\mathscr{C}_g)$ est au-dessus de (D).

• Position de $(\mathscr{C}_h)$ et (D)
$h(x) - (2x - 1) = -2(x - 1)^2 \leq 0$
$(\mathscr{C}_h)$ est en dessous de (D).

♦ **Exercice 48 page 108**

1. $f_m(x) = m^2 + (2 - 4m)x + 4m$
$m \in \mathbb{R} \setminus \{0 ; \frac{1}{2}\}$

• $f_1(x) - f_2(x) = -(x - 2)^2$
$(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ ont donc en commun le point A(2 ; 4).

• $f_1'(2) = f_2'(2) = 2$
$(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ ont donc la même tangente en A, la droite (D) d'équation :
(D) $y = 2x$.

2. m étant un élément de $m \in \mathbb{R} \setminus \{0 ; \frac{1}{2}\}$, $f_m(2) = 4$;
d'où $(\mathscr{C}_m)$ passe par A(2 ; 4).
$f_m'(2) = 2$
$(\mathscr{C}_m)$ est bien tangente en A à (D).

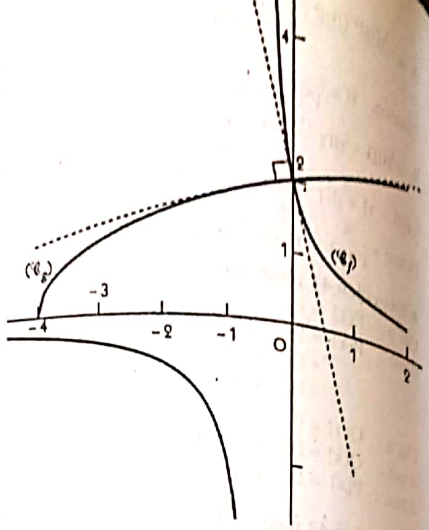
♦ **Exercice 49 page 108**

$f(x) = \dfrac{1}{x + a}$; $g(x) = \sqrt{x + b}$

1. $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ ont en commun A(0 ; 2)
$\Leftrightarrow f(0) = g(0) = 2$
$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ et $b = 4$

2. $f'(x) = \dfrac{1}{(x + \frac{1}{2})^2}$; $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 4}}$

$f'(0) = -4$; $g'(0) = \frac{1}{4}$.
Notons (D) la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en A,
(L) la tangente à $(\mathscr{C}_g)$ en A.
Le coefficient directeur de (D) est -4.
Le coefficient directeur de (L) est $\frac{1}{4}$.
On a : $(-4) \times (\frac{1}{4}) = -1$, donc : (D) ⊥ (L).



♦ **Exercice 50 page 108**

$f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; $g(x) = x^2 + bx + c$

1. $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ ont en commun le point J(0 ; 1)
équivaut à $f(0) = g(0) = 1$
ce qui équivaut à $c = 1$.

• $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ admettent en J(0 ; 1) des tangentes perpendiculaires *équivaut à* $f'(0) \times g'(0) = -1$
ce qui équivaut à $b = 1$.

2. Construction
On pose : $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$; $g_1(x) = x^2$
on a : $f(x) = f_1(x + 1)$; $g(x) = g_1(x + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4}$.

♦ **Exercice 51 page 108**

(E) $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ [$a \in \mathbb{R}$].

1. $\Delta = a^2 + 16 > 0$; (E) admet donc deux solutions :
$x' = \dfrac{a - 2 + \sqrt{a^2 + 16}}{2}$; $x'' = \dfrac{a - 2 - \sqrt{a^2 + 16}}{2}$

2. Détermination de a
• $(x'^2 + x''^2)$ est minimale
On a : $x' + x'' = a - 2$ et $x'x'' = -a - 3$
d'où : $x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x''$
$= a^2 - 2a + 10 = (a - 1)^2 + 9$
$x'^2 + x''^2$ minimale $\Leftrightarrow a = 1$.

• $(x'x''^2 + x'^2x'')$ maximale pour $a = -\frac{1}{2}$
car : $x'x''^2 + x'^2x'' = x'x''(x' + x'')$
$= (-a - 3)(a - 2) = -a^2 - a + 6$.

• $\dfrac{1}{x'^2} + \dfrac{1}{x''^2}$ minimale pour $a = \dfrac{13}{4}$

car : $\dfrac{1}{x'^2} + \dfrac{1}{x''^2} = \dfrac{x'^2 + x''^2}{(x'x'')^2} = \dfrac{a^2 - 2a + 10}{(a + 3)^2}$.

7. Extension de la notion de limite

(pages 111 à 124 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :
– faire la mise en place des premiers éléments nécessaires à l'étude analytique d'une fonction ;
– compléter les chapitres 5 et 6.

COMMENTAIRES

Il s'agit de la limite infinie et de la limite à l'infini.
L'approche de la notion peut se faire par une calculatrice programmable. Cependant, comme aux deux chapitres précédents auxquels celui-ci fait suite, l'approche graphique a été privilégiée car elle est plus parlante dans un manuel.
Les élèves en difficulté pourront se contenter d'observer les graphiques et de les analyser, puis ils pourront aborder assez rapidement le calcul des limites en respectant toutes les étapes qui assurent un bon apprentissage.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Limite infinie – limite à l'infini • Définition – Limite à gauche en a, limite à droite en a, infinies. – Asymptote verticale. – Asymptote horizontale. • Propriétés – Conditions pour avoir : $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$. – Limite à l'infini des fonctions élémentaires.	• Utiliser la limite à gauche en a et la limite à droite en a pour calculer une limite infinie en a.
Calcul des limites • Propriétés – Limite et somme de fonctions. – Limite et produit de fonctions. – Limite et inverse d'une fonction.	• Utiliser les propriétés des limites et opérations pour calculer des limites.
• Propriété – Méthode – Limite en a de $\left(x \mapsto \frac{1}{(x - a)^n}\right)$. – Pour calculer la limite en a de la fonction rationnelle $\frac{p}{q}$ telle que $p(a) \neq 0$ et $q(a) = 0$. • Propriétés – Limite à l'infini des fonctions $x \mapsto x^n$; $x \mapsto \frac{1}{x^n}$. – Limite à l'infini d'une fonction polynôme. – Limite à l'infini d'une fonction rationnelle.	• Sur des exemples, calculer la limite en a de $\left(x \mapsto \frac{1}{(x - a)^n}\right)$. • Calculer la limite de fonctions rationnelles du type $\frac{p}{q}$ [$p(a) \neq 0$ et $q(a) = 0$]. • Sur des exemples, calculer les limites à l'infini de $x \mapsto x^n$; $x \mapsto \frac{1}{x^n}$. • Calculer la limite à l'infini de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles.

Exercices d'application directe

♦ Exercice 2.a page 117

• $\lim_{x\to-\infty}(-3x^2) = -3\times\underbrace{\lim_{x\to-\infty}x^2}_{+\infty} = -\infty$

• $\lim_{x\to-\infty}(-2x^3) = -2\times\underbrace{\lim_{x\to-\infty}x^3}_{-\infty} = +\infty$

♦ Exercice 2.b page 117

• $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-5x} = \frac{1}{-5}\times\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}_{0} = 0$

• $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-5x} = \frac{1}{-5}\times\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}}_{0} = 0$

• $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\times\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}_{0} = 0$

• $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\times\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}_{0} = 0$

♦ Exercice 2.c page 119

• $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4} = +\infty$

• $\lim_{x\underset{<}{\to}0}\frac{1}{x^5} = -\infty$

$\lim_{x\underset{>}{\to}0}\frac{1}{x^5} = +\infty$

x		0	
x^5	$-$	0	$+$

$x\mapsto\frac{1}{x^5}$ n'a pas de limite en 0.

• Si n pair, $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^n} = +\infty$

Si n impaire, $\lim_{x\underset{<}{\to}0}\frac{1}{x^n} = -\infty$

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^n} = +\infty$

x		0	
x^n	$-$	0	$+$

$x\mapsto\frac{1}{x^n}$ n'a pas de limite en 0.

• $\lim_{x\to0}\frac{2x-1}{x^2} = \underbrace{\lim_{x\to0}(2x-1)}_{-1}\times\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}}_{(+\infty)} = -\infty$

• $\lim_{x\underset{<}{\to}0}\frac{x+1}{x^3} = \underbrace{\lim_{x\to0}(x+1)}_{1}\times\underbrace{\lim_{x\underset{<}{\to}0}\frac{1}{x^3}}_{(-\infty)} = -\infty$

$\lim_{x\underset{>}{\to}0}\frac{x+1}{x^3} = \underbrace{\lim_{x\to0}(x+1)}_{1}\times\underbrace{\lim_{x\underset{>}{\to}0}\frac{1}{x^3}}_{(+\infty)} = +\infty$

$x\mapsto\frac{x+1}{x^3}$ n'a pas de limite en 0.

♦ Exercice 2.d page 119

• $\lim_{x\underset{<}{\to}-7}\frac{1}{x+7} = -\infty$

$\lim_{x\underset{>}{\to}-7}\frac{1}{x+7} = +\infty$

x		-7	
$x+7$	$-$	0	$+$

$x\mapsto\frac{1}{x+7}$ n'a pas de limite en -7.

• $\lim_{x\to-7}\frac{1}{(x+7)^2} = +\infty$

• $\lim_{x\to-7}\frac{x-1}{(x+7)^2} = \underbrace{\lim_{x\to-7}(x-1)}_{-8}\times\underbrace{\lim_{x\to-7}\frac{1}{(x+7)^2}}_{(+\infty)} = -\infty$

• $\lim_{x\to-7}\frac{2x+13}{(x+7)^6} = \underbrace{\lim_{x\to-7}(2x+13)}_{1}\times\underbrace{\lim_{x\to-7}\frac{1}{(x+7)^6}}_{(+\infty)} = +\infty$

♦ Exercice 2.e page 119

$\lim_{x\to+\infty}(-2x^2+5x-1) = \lim_{x\to+\infty}(-2x^2) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(-2x^2+5x-1) = \lim_{x\to-\infty}(-2x^2) = -\infty$

♦ Exercice 2.f page 119

• $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{2x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{2x} = 0$

• $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-5x+1}{2x+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}x = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-5x+1}{2x+3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}x = -\infty$

Exercices d'apprentissage

♦ Exercice 1 page 123

(1) $f(x) = \frac{-7}{2x+4}$

x		-2	
$2x+4$	$-$	0	$+$

• $\lim_{x\underset{<}{\to}-2}f(x) = -7\times\underbrace{\lim_{x\underset{<}{\to}-2}\frac{1}{2x+4}}_{-\infty} = +\infty$

• $\lim_{x\underset{>}{\to}-2}f(x) = -7\times\underbrace{\lim_{x\underset{>}{\to}-2}\frac{1}{2x+4}}_{+\infty} = -\infty$

(2) $f(x) = \frac{5}{5-x}$

x		5	
$5-x$	$+$	0	$-$

• $\lim_{x\underset{<}{\to}5}f(x) = 5\times\underbrace{\lim_{x\underset{<}{\to}5}\frac{1}{5-5x}}_{+\infty} = +\infty$

• $\lim_{x\underset{>}{\to}5}f(x) = 5\times\underbrace{\lim_{x\underset{>}{\to}5}\frac{1}{5-5x}}_{-\infty} = -\infty$

(3) $\lim_{x\underset{<}{\to}-1}f(x) = +\infty$; $\lim_{x\underset{>}{\to}-1}f(x) = -\infty$

(4) $\lim_{x\underset{<}{\to}-0{,}8}f(x) = -\infty$; $\lim_{x\underset{>}{\to}-0{,}8}f(x) = +\infty$

(5) $\lim_{x\underset{<}{\to}1}f(x) = -\infty$; $\lim_{x\underset{>}{\to}1}f(x) = +\infty$

♦ Exercice 2 page 123

(1) $f(x) = \frac{1}{(x-1)(2x-1)}$

• $\lim_{x\underset{<}{\to}0{,}5}f(x) = \underbrace{\lim_{x\to0{,}5}\frac{1}{x-1}}_{(-2)}\times\underbrace{\lim_{x\to0{,}5}\frac{1}{2x-1}}_{(-\infty)}$

$\lim_{x\underset{<}{\to}0{,}5}f(x) = +\infty$; $\lim_{x\underset{>}{\to}0{,}5}f(x) = -\infty$.

• $\lim_{x\underset{<}{\to}1}f(x) = -\infty$; $\lim_{x\underset{>}{\to}1}f(x) = +\infty$.

(2) $f(x) = \frac{-2}{(3x+6)(x+9)}$

• $\lim_{x\underset{<}{\to}-9}f(x) = \underbrace{\lim_{x\to-9}\frac{-2}{3x+6}}_{\frac{2}{21}}\times\underbrace{\lim_{x\underset{<}{\to}-9}\frac{1}{x+9}}_{(-\infty)}$

• $\lim_{x\underset{<}{\to}-9}f(x) = -\infty$; $\lim_{x\underset{>}{\to}-9}f(x) = +\infty$

• $\lim_{x\underset{<}{\to}-2}f(x) = +\infty$; $\lim_{x\underset{>}{\to}-2}f(x) = -\infty$

(3) $f(x) = \frac{3}{(x+2)(x+3)}$

• $\lim_{x\underset{<}{\to}-2}f(x) = \underbrace{\lim_{x\to-2}\frac{3}{x+3}}_{3}\times\underbrace{\lim_{x\underset{<}{\to}-2}\frac{1}{x+2}}_{(-\infty)}$

$\lim_{x\underset{<}{\to}-2}f(x) = -\infty$; $\lim_{x\underset{>}{\to}-2}f(x) = +\infty$

• $\lim_{x\underset{<}{\to}-3}f(x) = +\infty$; $\lim_{x\underset{>}{\to}-3}f(x) = -\infty$

(4) $f(x) = \frac{-3}{(x-1)(x+2)}$

• $\lim_{x\underset{<}{\to}-2}f(x) = \underbrace{\lim_{x\to-2}\frac{-3}{x-1}}_{1}\times\underbrace{\lim_{x\to-2}\frac{1}{x+2}}_{(-\infty)}$

$\lim_{x\underset{<}{\to}-2}f(x) = -\infty$; $\lim_{x\underset{>}{\to}-2}f(x) = +\infty$

• $\lim_{x\underset{<}{\to}1}f(x) = \underbrace{\lim_{x\to1}\frac{-3}{x+2}}_{-1}\times\underbrace{\lim_{x\underset{<}{\to}1}\frac{1}{x-1}}_{(-\infty)}$

$\lim_{x\underset{<}{\to}1}f(x) = +\infty$; $\lim_{x\underset{>}{\to}1}f(x) = -\infty$

(5) $f(x) = \frac{4}{6x^2-9x-6} = \frac{2}{3(x+0{,}5)(x-2)}$

• $\lim_{x\underset{<}{\to}0{,}5}f(x) = \lim_{x\to0{,}5}\frac{2}{3(x-2)}\times\lim_{x\underset{<}{\to}0{,}5}\frac{1}{x+0{,}5}$

$\lim_{x\underset{<}{\to}0{,}5}f(x) = +\infty$; $\lim_{x\underset{>}{\to}0{,}5}f(x) = -\infty$.

• $\lim_{x\underset{<}{\to}2}f(x) = -\infty$; $\lim_{x\underset{>}{\to}2}f(x) = +\infty$

♦ Exercice 4 page 123

(1) $\lim_{x\to2}\frac{-1}{(x-2)^2} = -1\times\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2} = -\infty$

(2) $\lim_{x\underset{<}{\to}-1}\frac{9}{(x+1)^3} = 9\times\lim_{x\underset{<}{\to}-1}\frac{1}{(x+1)^3} = -\infty$

$\lim_{x\underset{>}{\to}-1}\frac{9}{(x+1)^3} = 9\times\lim_{x\underset{>}{\to}-1}\frac{1}{(x+1)^3} = +\infty$

(3) $\lim_{x\underset{<}{\to}3}\frac{-2}{(x-3)^5} = -2\times\lim_{x\underset{<}{\to}3}\frac{1}{(x-3)^5} = +\infty$

$\lim_{x\underset{>}{\to}3}\frac{-2}{(x-3)^5} = -2\times\lim_{x\underset{>}{\to}3}\frac{1}{(x-3)^5} = -\infty$

(4) $\lim_{x\to-4}\frac{4}{(x+4)^6} = +\infty$

(5) $\lim_{x\to1}\frac{3}{(x-1)^2} = +\infty$

♦ **Exercice 5 page 123**

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} f(x) = \underbrace{\lim\limits_{x \to 5}(2x-3)}_{7} \times \underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{1}{x-5}}_{-\infty} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x) = \underbrace{\lim\limits_{x \to 5}(2x-3)}_{7} \times \underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} \frac{1}{x-5}}_{+\infty} = +\infty$

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to -0.5 \\ <}} \frac{x^2+3}{2x+1} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -0.5 \\ >}} \frac{x^2+3}{2x+1} = +\infty$

♦ **Exercice 6 page 123**

(1) $f(x) = \frac{x^2-2x}{3x^2+3} = \frac{x-2}{3x+1}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0 ; -\frac{1}{3}\}$

• $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{3} \\ <}} f(x) = \underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{3} \\ <}} (x-2)}_{-\frac{7}{3}} \times \underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{3} \\ <}} \frac{1}{3x+1}}_{-\infty}$

$= +\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{3} \\ >}} f(x) = \underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{3} \\ <}} (x-2)}_{-\frac{7}{3}} \times \underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{3} \\ >}} \frac{1}{3x+1}}_{+\infty}$

$= -\infty$

• $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x-2}{3x+1} = -2$

(2) $f(x) = \frac{(x+4)(x-2)}{(x+2)(x-4)}$

• $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = \underbrace{\lim\limits_{x \to -2} \frac{(x+4)(x-2)}{(x-4)}}_{\frac{4}{3}} \times \underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{1}{x+2}}_{-\infty}$

$= -\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = \underbrace{\lim\limits_{x \to -2} \frac{(x+4)(x-2)}{(x-4)}}_{\frac{4}{3}} \times \underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{1}{x+2}}_{+\infty}$

$= +\infty$

(3) $f(x) = \frac{x+2}{3x^2+2x-8} = x + \frac{2}{3(x+2)(x-\frac{4}{3})}$

$= \frac{1}{3(x-\frac{4}{3})}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{4}{3}\}$

• $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\frac{1}{10}$

• $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{4}{3} \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{4}{3} \\ >}} f(x) = +\infty$

(4) $f(x) = \frac{4x^3+1}{2x^2-5x-3} = \frac{4x^3+1}{2(x-3)(x+0,5)}$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x \to -0,5 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -0,5 \\ >}} f(x) = +\infty$

(5) $f(x) = \frac{2x+3}{x^3(x+7)}$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x \to -7 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -7 \\ >}} f(x) = +\infty$

(6) $f(x) = \frac{-x^3+2x+1}{-2(x+0,5)(x-5)}$

• $\lim\limits_{\substack{x \to -0,5 \\ <}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -0,5 \\ >}} f(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x) = +\infty$

♦ **Exercice 7 page 123**

(1) $f(x) = \frac{3x+2}{x-2}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote verticale, la droite d'équation : $x = 2$.

(2) $f(x) = \frac{12}{x-4}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{4\}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = +\infty$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote verticale la droite d'équation : $x = 4$.

(3) $f(x) = \frac{8-x}{2x-2}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote verticale, la droite d'équation : $x = 1$.

(4) $f(x) = \frac{-2x}{2x-5}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\frac{5}{2}\}$

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{5}{2} \\ <}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{5}{2} \\ >}} f(x) = -\infty$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote verticale, la droite d'équation : $x = \frac{5}{2}$.

(5) $f(x) = x + \frac{2}{x^2}$; $D_f = \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote verticale, l'axe (OJ), c'est-à-dire la droite d'équation : $x = 0$.

(6) $f(x) = \frac{2x^2-3x-1}{x-2}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote verticale, la droite d'équation : $x = 2$.

(7) $f(x) = \frac{4}{(x-3)(x+5)}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3 ; -5\}$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ <}} f(x) = +$; $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ >}} f(x) = -\infty$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet deux asymptotes verticales, les droites d'équations : $x = 3$ et $x = -5$.

(8) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^3-1} = \frac{x^2-3x}{(x-1)(x^2+x+1)}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote verticale, la droite d'équation : $x = 1$.

(9) $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{-x^2+4x-4} = \frac{x+1}{2-x}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote verticale, la droite d'équation : $x = 2$.

(10) $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x^2-x-6} = \frac{x^2+3x-1}{(x+2)(x-3)}$;

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{3 ; -2\}$

• $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet deux asymptotes verticales, les droites d'équations : $x = -2$ et $x = 3$.

(11) $f(x) = x - 1 + \frac{5}{x-3}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote verticale, la droite d'équation : $x = 3$

(12) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$= \frac{x^2-x+1}{x-1}$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote verticale, la droite d'équation : $x = 1$.

♦ **Exercice 8 page 124**

(1) $f(x) = 2x - 3$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$

(2) $f(x) = (3x+4)(2x-5)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 6x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 6x^2 = +\infty$

(3) $f(x) = -\frac{12}{5}x^3 - 565$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{12}{5}x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{12}{5}x^3 = -\infty$

♦ **Exercice 9 page 124**

(1) $f(x) = \frac{x+6}{x^2-35}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

(3) $f(x) = \frac{8-x}{3x+2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x}{3x} = -\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$

(4) $f(x) = \frac{3x^3-7}{2x^2-8x+5}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^3}{2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{2x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{2x} = +\infty$

(5) $f(x) = \frac{x^4+5x^2-1}{-3x^2+x+2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^4}{-3x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{3x^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{3x^2} = -\infty$

(6) $f(x) = \frac{-2x+3}{5x^3-x+7}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{2x}{5x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{2}{5x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{2}{5x^2} = 0$

♦ **Exercice 10 page 124**

(1) $f(x) = \frac{3x+2}{x-2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une asymptote horizontale, la droite d'équation : $y = 3$.

(2) $f(x) = \frac{12}{x-4}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une asymptote horizontale, l'axe (OI), c'est-à-dire la droite d'équation : $y = 0$.

♦ **Exercice 11 page 124**

$f(x) = x^3 + ax + b$, $[a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}]$

1. f a un extremum en -1 égal à 4.

équivaut à $f'(-1) = 0$ et $f(-1) = 4$.
On obtient : $a = -3$ et $b = 2$.

2. Sens de variation de f

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f'(x) = 3(x^2 - 1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\boxed{0}$	$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\boxed{4}$	$\searrow$	$\boxed{2}$	$\nearrow$	

3. Sens de variation de g

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x+2)(x-1)^2}{(x+2)(x+1)}$$

$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1} \ ; D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2 \ ; -1\}$$

$$g'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\boxed{0}$	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\boxed{-8}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	$\boxed{0}$	$\nearrow$	

♦ Exercice 12 page 124

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2} \ ; D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\boxed{0}$	$-$	$\|$	$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\boxed{2}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	$\boxed{6}$	$\nearrow$	

♦ Exercice 14 page 124

(1) $f(x) = \dfrac{2}{x^4} - \dfrac{20}{x^3} + \dfrac{200}{x^2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)\frac{2}{x^4} - \lim_{x\to-\infty} f(x)\frac{20}{x^3} + \lim_{x\to-\infty} f(x)\frac{200}{x^2}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \ ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(2) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3} - \dfrac{x-3}{x+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} - \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \ ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(3) $f(x) = \dfrac{5-x}{2x+3} - \dfrac{3-3x}{4x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{2x}}_{-\frac{1}{2}} - \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{4x}}_{-\frac{3}{4}}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{1}{4} \ ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{4}$

(4) $f(x) = \dfrac{7}{3}x + 5 - \dfrac{7x^2 + 2x - 5}{1 + 3x} = \dfrac{40x + 30}{9x + 3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{40}{9} \ ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{40}{9}$

(5) $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 11 + \dfrac{4x^2 + 2}{3x^2 + 2}$

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 37x^2 - \frac{4}{3}x + 24}{3x^2 + 2}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3}{3x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

(6) $f(x) = \dfrac{x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 2x - 5}{x^3 - 3x^2 + 2} + \dfrac{1 - 3x}{3x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^5}{3x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

♦ Exercice 15 page 124

$f(x) = x - \sqrt{x} \ ; D_f = \mathbb{R}^+$

1. $f(x) = \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 1)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}}_{+\infty} \times \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - 1)}_{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

♦ Exercice 16 page 124

$f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} \ ; {}_f = \mathbb{R}^*_+$

1. $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}}_{+\infty} + \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}}_{0}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

8. Étude de fonctions

(pages 125 à 142 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :
– dégager les grandes lignes d'une méthode d'étude de fonctions ;
– exploiter les propriétés d'une fonction pour résoudre un problème graphiquement ou algébriquement.

COMMENTAIRES

En classe de première SE, on se bornera à étudier les fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques simples dont on sait étudier le signe de la dérivée.
Pour l'élève, une première étape consiste à maîtriser l'étude de la variation d'une fonction et à construire avec soin sa représentation graphique. Une deuxième étape consistera alors à exploiter cette représentation graphique.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Étude de fonctions • Définition – vocabulaire – Asymptote oblique. – Ensemble d'étude. • Méthodes – Pour déterminer une asymptote oblique. – Pour étudier et représenter une fonction paire, impaire ou périodique.	• Étudier les variations d'une fonction polynôme ou rationnelle dont on sait étudier le signe de la dérivée. • Représenter graphiquement une fonction dont on a étudié les variations.
Calcul approché des zéros d'une fonction • Définition – Zéro d'une fonction. • Propriété – Existence de zéros d'une fonction strictement monotone sur un intervalle.	• Déterminer graphiquement le nombre de solutions d'une équation du type : $f(x) = m$; $f(x) = g(x)$. • Déterminer un encadrement de chacune des solutions ci-dessus par la méthode de dichotomie ou de balayage.

Exercices d'application directe

♦ Exercices 1.a page 127

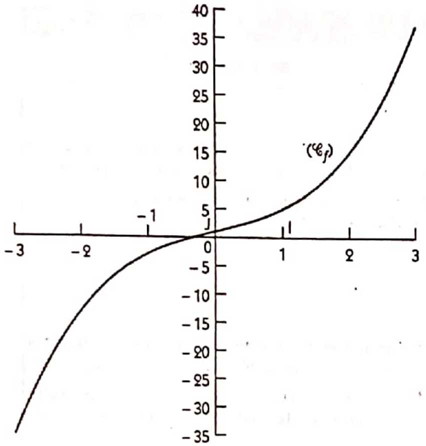
$f(x) = x^3 + 3x + 1$; $D_f = \mathbb{R}$

• Variations de f

$f'(x) = 3(x^2 + 1)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

• Représentation graphique ($\mathscr{C}_f$)



• Propriétés géométriques de ($\mathscr{C}_f$)

Le point J (0 ; 1) semble être un centre de symétrie de ($\mathscr{C}_f$). Vérifions-le par le calcul.

La translatée de ($\mathscr{C}_f$) par le vecteur $\overrightarrow{JO}$ est la représentation graphique de la fonction g définie par :

$g(x) = f(x) - 1$; $g(x) = x^3 + 3x$.

g est une fonction impaire ; donc O est un centre de symétrie de ($\mathscr{C}_g$) ; par suite, J est un centre de symétrie de ($\mathscr{C}_f$).

♦ Exercice 1.b page 127

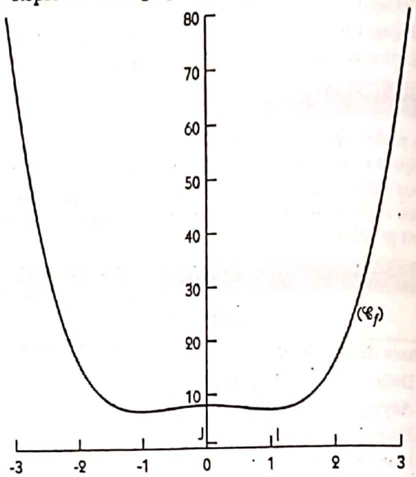
$f(x) = x^4 - 2x^2 + 8$

• Variations de f

$f'(x) = 4x(x^2 - 1)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	7	↗	8	↘	7	↗	$+\infty$

• Représentation graphique ($\mathscr{C}_f$)



• Propriété géométrique de $\mathscr{C}_f$

L'axe (OJ) est un axe de symétrie de ($\mathscr{C}_f$) ; en effet, la fonction f est paire.

♦ Exercice 1.c page 129

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = \frac{(x-1)(x-5)}{x-3} \text{ ; } D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$$

• Variations de f

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{(x-3)^2}$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

• Asymptote verticale à ($\mathscr{C}_f$)

Les limites en 3 montrent que ($\mathscr{C}_f$) admet une asymptote verticale (Δ) d'équation : $y = 3$.

• Asymptote oblique à ($\mathscr{C}_f$)

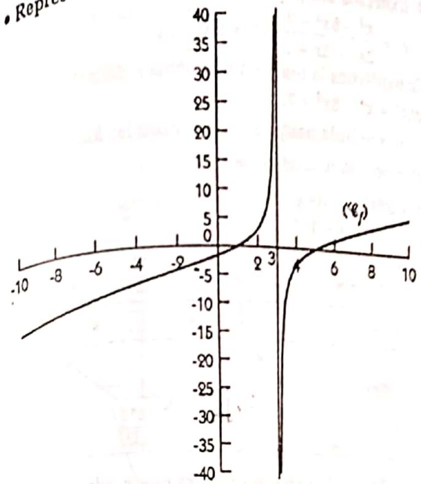
On obtient l'écriture canonique :

$$f(x) = x - 3 - \frac{4}{x-3}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-4}{x-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{x-3} = 0.$$

Il en résulte que ($\mathscr{C}f$) admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une asymptote (D) d'équation : $y = x - 3$.

• Représentation graphique ($\mathscr{C}_f$)



♦ Exercice 1.d page 129

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} \text{ ; } D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$$

• Variation de f

$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 - 1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	3	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3

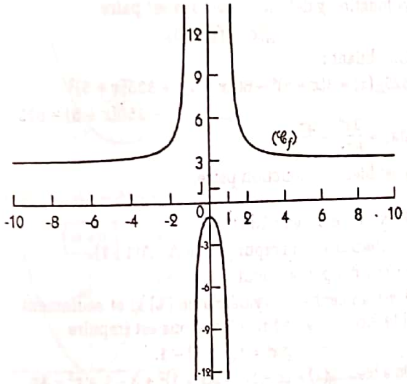
• Asymptotes verticales

(D) : $x = -1$; (D') : $x = 1$.

• Asymptote horizontale

(D) : $y = 3$.

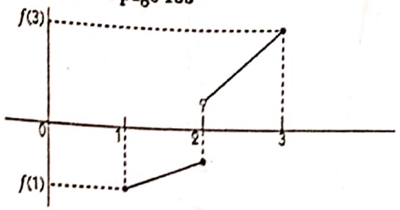
• Représentation graphique ($\mathscr{C}_f$)



• Propriétés géométriques

(OJ) est un axe de symétrie de ($\mathscr{C}_f$) ; en effet, la fonction f est paire.

♦ Exercice 2.a page 133



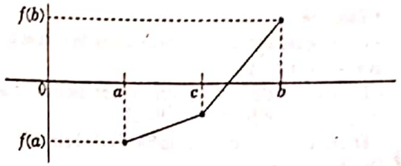
Considérons la fonction f de représentation graphique ci-dessus.

f est strictement croissante sur [1 ; 3] et $f(1) < 0 < f(3)$.

Cependant f n'admet pas de zéro sur [1 ; 3].

(On constate que f n'est pas continue en 2.)

♦ Exercice 2.b page 133



Considérons la fonction f de représentation graphique ci-dessus.

f est strictement croissante sur $[a ; b]$ et $f(a) < 0 < f(b)$.

f est continue en tout élément de $[a ; b]$.

f admet un unique zéro sur $[a ; b]$.

Cependant f n'est pas dérivable en c.

Remarque

Les exercices 2.a et 2.b montrent que, f étant une fonction strictement croissante sur $[a ; b]$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$, pour que f admette un unique zéro sur $[a ; b]$:

– la dérivabilité est une condition suffisante mais non nécessaire ;

– la continuité est une condition nécessaire et suffisante.

♦ Exercice 2.c page 135

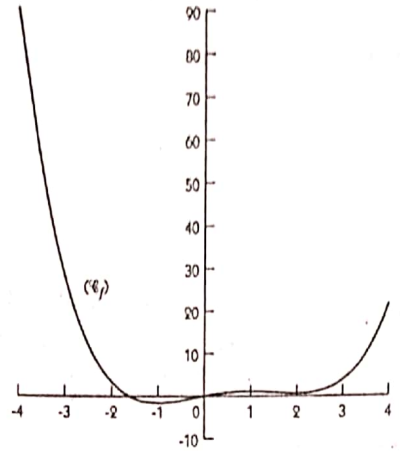
$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

• Variations de f

$f'(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{19}{12}$	↗	$\frac{13}{12}$	↘	$\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$

• Représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$



• Zéros de f

– Graphiquement, on note deux zéros de f : α et 0 avec $-2 < \alpha < -1$.

– En effet, f est dérivable, strictement décroissante sur $[-2\,;-1]$ et $f(-1) < 0 < f(-2)$

– Encadrement de α par la méthode du balayage

On obtient successivement :

$$f(-1{,}7) < 0 < f(-1{,}6)$$

$$f(-1{,}62) < 0 < f(-1{,}63)$$

donc : $\quad -1{,}63 < \alpha < -1{,}62$

♦ **Exercice 2.d page 135**

$f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 7}{2x^2 - 3x + 1}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\,;1\}$

Considérons la fonction polynôme g définie par : $g(x) = x^3 - 5x^2 + 7$.

g ne s'annule pas pour $\frac{1}{2}$ et 1, donc les fonctions f et g ont les mêmes zéros.

• Variations de g

$g'(x) = x(3x - 10)$.

x	$-\infty$		0		$\frac{10}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	$\boxed{0}$	−	$\boxed{0}$	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\boxed{7}$	↘	$\boxed{-\frac{611}{27}}$	↗	$+\infty$

Ce tableau de variation montre que g admet trois zéros α, β, γ tels que :

$$\alpha < 0 < \beta < \frac{10}{3} < \gamma$$

• Encadrements des zéros de f

Par la méthode de dichotomie, on obtient successivement :

$-2 < \alpha < 1$; $1 < \beta < 2$; $4 < \gamma < 5$

$-2 < \alpha < -1{,}5$

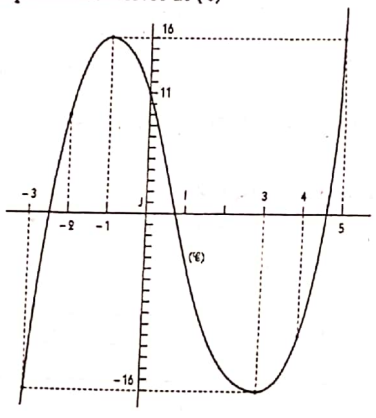
$-1{,}75 < \alpha < -1{,}5$, c'est un encadrement d'amplitude 0,25.

On procède de même pour β et γ.

Exercices d'apprentissage

♦ **Exercice 1 page 138**

Esquisse à main levée de $(\mathscr{C})$



Unités graphiques

1 cm sur (OI) ; 0,25 cm sur (OJ).

♦ **Exercice 2 page 138**

• Détermination graphique de (Δ)

$$(\Delta) : x = 5.$$

• Contrôle par le calcul

(Δ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$ si et seulement si la fonction g définie ci-dessous est paire

$$g(x) = f(x + 5).$$

On obtient :

$$625g(x) = 3(x+5)^4 - 60(x+5)^3 + 325(x+5)^2 - 250(x+5) - 625$$

$$g(x) = \frac{3x^4}{625} - \frac{x^2}{5} + 1$$

g est bien une fonction paire.

♦ **Exercice 3 page 138**

• Détermination graphique de A : A(1 ; 1).

• Contrôle par le calcul

A est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$ si et seulement si la fonction g définie ci-dessous est impaire

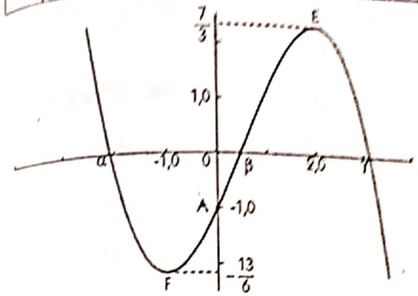
$$g(x) = f(x + 1) - 1.$$

On a bien : $g(x) = (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3 - 1 = x^3 - 3x$.

♦ **Exercice 5 page 138**

1. Étude de f : $f'(x) = -x^2 + x + 2$.

x	$-\infty$	α		-1		β		2		γ	$+\infty$
$f'(x)$		−		$\boxed{0}$		+		$\boxed{0}$		−	
$f(x)$	$+\infty$		↘	$\boxed{-\frac{13}{6}}$	↗			$\boxed{\frac{7}{3}}$	↘		$-\infty$



2. (D_m) : $y = mx - 1$; $m > 0$.

Toutes les droites (D_m) passent par le point A(0 ; – 1) ; de plus, la tangente en A à $(\mathscr{C})$ est la droite (D_2).

Nombre de points d'intersection de (D_m) et $(\mathscr{C})$

• $m = 2$; 1 point double ;

• $0 < m < 2$; 3 points ;

• $m > 2$; 1 point.

3. (Δ) : $y = 2x$

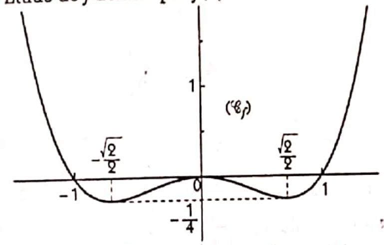
Une droite parallèle à (Δ) est tangente à $(\mathscr{C})$ en un point d'abscisse x_0 si et seulement si : $f'(x_0) = 2$, d'où $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$.

Coordonnées des points de contact :

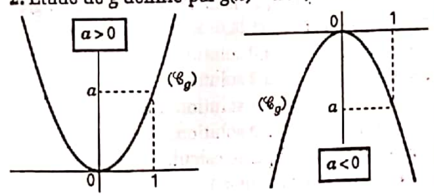
$$(0\,;-1) \text{ et } (1\,;\frac{7}{6})$$

♦ **Exercice 6 page 138**

1. Étude de f définie par $f(x) = x^4 - x^2$.



2. Étude de g définie par $g(x) = ax^2$; $a \in \mathbb{R}^*$



3. Position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$

On pose :

$\varphi(x) = f(x) - g(x) = x^2(x^2 - 1 - a)$.

• $a \leqslant -1$; on a $\varphi(x) \geqslant 0$. $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_g)$.

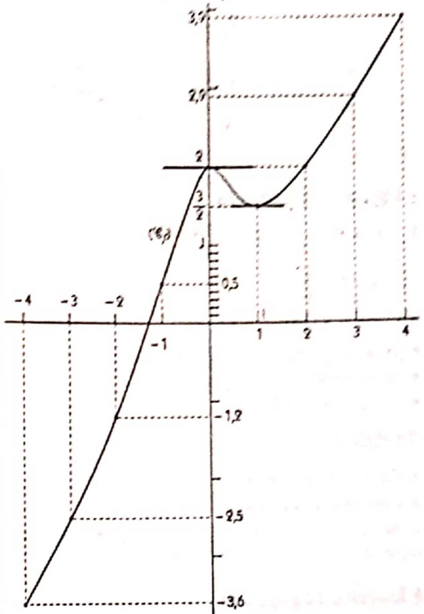
• $a > -1$

$\varphi(x)$ s'annule en $-\sqrt{a+1}$ et $\sqrt{a+1}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{a+1}$		$\sqrt{a+1}$		$+\infty$
$\varphi(x)$		+	$\boxed{0}$	−	$\boxed{0}$	+	
courbes		$(\mathscr{C}_f)$ au-dessus de $(\mathscr{C}_g)$		$(\mathscr{C}_g)$ au-dessus de $(\mathscr{C}_f)$		$(\mathscr{C}_f)$ au-dessus de $(\mathscr{C}_g)$	

♦ **Exercice 8 page 138**

Esquisse à main levée de $(\mathscr{C}_f)$.



Unités graphiques : 1 cm sur (OI) ; 1,5 cm sur (OJ).

♦ **Exercice 10 page 139**

1. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{x + 2}$

$f'(x) = \dfrac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	$\boxed{0}$	−	‖	−	$\boxed{0}$	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\boxed{-9}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\boxed{-1}$	↗	$+\infty$

2. $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{2}{x+2}$ (par division).

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x+2} = 0$

$(\mathscr{C})$ admet donc pour asymptotes les droites d'équations : $x = -2$; $y = 2x - 1$.

3. Leur point d'intersection est le point $A(-2 ; -5)$.

On vérifie que A est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$ *(voir exercice 3)*.

4. Construction de $(\mathscr{C})$.

5. $(D_m) : y = mx - 1$.

Nombre de points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (D_m)

On pose :

$\varphi(x) = f(x) - (mx - 1)$

$\varphi(x) = (2 - m)x^2 + 2(2 - m)x + 2$; $\Delta = 4m(m - 2)$.

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
Δ	+	$\boxed{0}$	−	$\boxed{0}$	+
$(\mathscr{C})$ (D_m)	2 points d'intersection		pas de point d'intersection		2 points d'intersection

un point d'intersection

♦ Exercice 11 page 139

1. $f(x) = \dfrac{ax+b}{c+x} = a + \dfrac{b-ac}{x+c}$

$f'(x) = \dfrac{ac-b}{(c+x)^2}$

(D) : $x = -2$; $(\Delta) : y = 1$.

- (D) asymptote à $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow c = 2$.
- (Δ) asymptote à $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow a = 1$.
- $f'(-1) = -1 \Leftrightarrow b = 3$.

On obtient : $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$.

2. Construction de $(\mathscr{C}_f)$.

3. Construction de $(\mathscr{C}_g)$.

g est définie par $g(x) = f(-x)$; $(\mathscr{C}_g)$ est la symétique de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à l'axe (OJ).

♦ Exercice 12 page 139

$f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - x + 3}{x^2 - 1}$

1. $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{x+2}{x^2-1}$ (obtenue par division).

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{x^2-1} = 0.$

2. $(\mathscr{C}_f)$ admet donc une asymptote oblique :

$$(D) : y = 2x - 1.$$

3. Position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et (D)

$\varphi(x) = f(x) - (2x - 1) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$.

- $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
- $\varphi'(x) = -\dfrac{x^2+4x+1}{(x^2-1)^2}$

On pose : $x_1 = -2 - \sqrt{3}$; $x_2 = -2 + \sqrt{3}$.

On obtient :

$\varphi'(x_1) = 0$; $\varphi(x_1) = m_1 < 0$;

$\varphi'(x_2) = 0$; $\varphi(x_2) = m_2 < 0$.

- Tableau de variation de φ

x	$-\infty$		x_1		-2		-1		x_2		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		−	$\boxed{0}$	+		+	‖	+	$\boxed{0}$	−	‖	−	
$\varphi(x)$	0	↘	$\boxed{m_1}$	↗	$\boxed{0}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$\boxed{m_2}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

Le tableau de variation de φ donne les résultats suivants :

– sur $]-\infty ; -2[\cup]-1 ; 1[$ $\qquad \varphi(x) < 0$;

$(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de (D) ;

– sur $]-2 ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ $\qquad \varphi(x) > 0$;

$(\mathscr{C}_f)$ est en dessous de (D).

– $(\mathscr{C}_f)$ et (D) sont sécants en $A(-2 ; -5)$.

♦ Exercice 13 page 139

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

- Tableau de variation de f

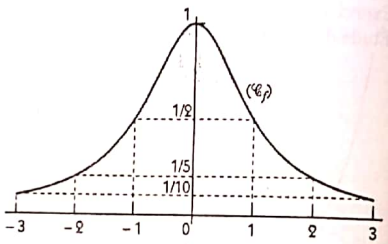
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	$\boxed{0}$	−	
$f(x)$	0	↗	$\boxed{1}$	↘	0

1. Le tableau de variation montre que :

– pour tout x réel, $f(x) > 0$;

– le maximum de f est 1.

2. Courbe de f sur $[-3 ; 3]$.



3. Résolution de (E) : $\dfrac{1}{1+x^2} = m$

- Le nombre de solutions de (E) est déterminé graphiquement par $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (D_m) : $y = m$.

$-\infty < m \leq 0$ $\qquad$ (E) a 0 solution ;

$0 < m < 1$ $\qquad$ (E) a 2 solutions ;

$m = 1$ $\qquad$ (E) a 1 solution double ;

$1 < m < +\infty$ $\qquad$ (E) a 0 solution.

- Résolution de (E) par le calcul.

On envisage donc $0 < m < 1$

(E) $\qquad \dfrac{1}{1+x^2} = m$

$$mx^2 - 1 + m = 0$$

- $m \neq 0$ $\qquad$ (E) $x^2 - \dfrac{1-m}{m} = 0$;
- $m = 1$; 0 est l'unique solution de (E)
- $0 < m < 1$;

$\sqrt{\dfrac{1-m}{m}}$ et $-\sqrt{\dfrac{1-m}{m}}$ sont les 2 solutions de (E).

♦ Exercice 14 page 139

$f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$; $f'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$.

- Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	$\boxed{0}$	−	$\boxed{0}$	+	
$f(x)$	1	↗	$\boxed{2}$	↘	$\boxed{0}$	↗	1

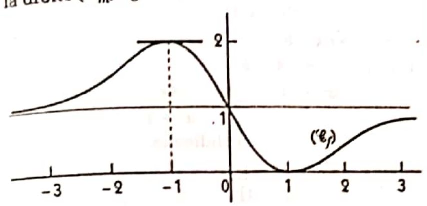
- (E) $\qquad (m-1)x^2 + 2x - 1 + m = 0$

$\qquad m(x^2+1) - x^2 + 2x - 1 = 0$

– si $m = 0$; (E) $(x-1)^2 = 0$;

– si $m \neq 0$; (E) $f(x) = m$.

D'où l'étude des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ avec la droite (D_m) : $y = m$.



$-\infty < m < 0$: (E) n'a pas de solution ;

$m = 0$: 1 est l'unique solution de (E) ;

$0 < m < 1$: 2 solutions positives ;

$m = 1$: 0 est l'unique solution de (E) ;

$1 < m < 2$: 2 solutions négatives ;

$m = 2$: -1 est l'unique solution de (E) ;

$2 < m < +\infty$: (E) n'a pas de solution.

♦ Exercice 15 page 139

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2 - x}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f'(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 1}{(2-x)^2}$

1. Tableau de variation

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	$\boxed{0}$	+	‖	+	$\boxed{0}$	−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\boxed{-2+2\sqrt{3}}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$\boxed{-2-2\sqrt{3}}$	↘	$-\infty$

- Équation de l'asymptote oblique

$f(x) = -x + \dfrac{3}{2-x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{2-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{2-x} = 0$

$$(D) : y = -x.$$

- Équation de l'asymptote verticale

$$(\Delta) : x = 2.$$

2. Point d'intersection de (D) et (Δ) : $A(2 ; -2)$.

A est centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$ si et seulement si la fonction g définie ci-dessous est impaire :

$$g(x) = f(x+2) + 2.$$

On a : $g(x) = -\dfrac{x^2+3}{x}$.

g est bien une fonction impaire ; A est donc centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

3. Construction de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{|f|})$

– pour $x < 2$; $\qquad f(x) > 0$,

donc : $\qquad |f(x)| = f(x)$;

– pour $x > 2$; $\qquad f(x) < 0$,

donc : $\qquad |f(x)| = -f(x)$.

Conclusion

Sur $]-\infty ; 2[$, $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{|f|})$ coïncident.

Sur $]2 ; +\infty[$, $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{|f|})$ sont symétriques par rapport à (OI).

♦ Exercice 16 page 139

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$.

$f(x) = x - \dfrac{1}{x}$; $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$.

- Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	‖	+	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\boxed{0}$ ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$\boxed{0}$ ↗ $+\infty$

Asymptote oblique (D) : $y = x$.

Asymptote verticale (Δ) : $x = 0$.

2. O est le point d'intersection de (D) et (Δ).

f est une fonction impaire, donc O est centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

3. g est définie par $g(x) = f(|x|)$.

$g(x) = \dfrac{|x|^2 - 1}{|x|} = \dfrac{x^2-1}{|x|}$. g est une fonction paire.

Sur $\mathbb{R}^*_+$, $g(x) = f(x)$.

Sur $\mathbb{R}^*_-$, $g(x) = -f(x)$.

4. Équation (E) $\quad x^2 - m|x| + 1 = 0$

$\qquad x^2 + 1 = m|x|$.

O n'est pas solution de (E) donc : (E) $\dfrac{x^2+1}{|x|} = m$.

Construction de $(\mathscr{C}_f)$, puis celle de $(\mathscr{C}_g)$ en utilisant la question 3.

Résolution graphique de (E).

♦ **Exercice 17 page 139**

$f(x) = \dfrac{2-x}{2x+3}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\dfrac{3}{2}\}$.

$f'(x) = \dfrac{-7}{(2x+3)^2}$.

• Tableau de variation

x	$-\infty$		$-3/2$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	$-1/2$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2/3$	↘	0	↘	$-1/2$

• Fonction g définie par : $g(x) = f(|x|)$.

$D_g = \mathbb{R}\setminus\{-\dfrac{3}{2} ; \dfrac{3}{2}\}$.

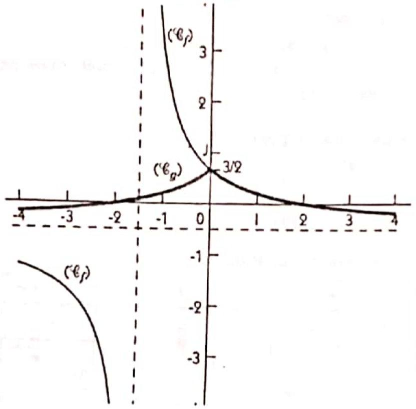
On vérifie que : si $x \in D_g$, alors $|x| \in D_g$.

$g(-x) = g(x)$; g est une fonction paire.

$(\mathscr{C}_g)$ est donc symétrique par rapport à (OJ).

De plus, sur $\mathbb{R}_+\setminus\{\frac{3}{2}\}$, les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ coincident.

• Construction de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$



♦ **Exercice 18 page 140**

$f(x) = \dfrac{2(x-3)^2}{x^2-7x+10}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2 ; 5\}$.

$f'(x) = \dfrac{-2(x+1)(x-3)}{(x^2-7x+10)^2}$.

• Tableau de variation

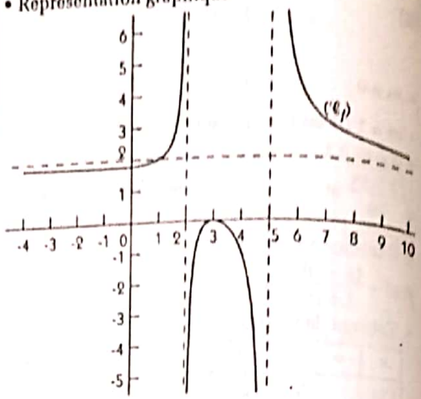
x	$-\infty$		-1		2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	2	↘	$16/9$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

• Nombre et signe des solutions de (E)

(E) $(m-2)x^2 - (7m-12)x + 2(5m-9) = 0$

$f(x) = m$.

• Représentation graphique



♦ **Exercice 20 page 140**

$f(x) = \dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$

$f'(x) = \dfrac{-ax^2+(6-2b)x+a}{(x^2+1)^2}$.

(D) : $y = 4x + 3$

1. Détermination de a et b pour que la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 0 soit parallèle à (D).

$y - f(0) = xf'(0)$

avec $f(0) = b$; $f'(0) = a$;

d'où : $y = ax + b$.

On obtient : $a = 4$ et $b = 3$.

2\. $f(x) = \dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1} = 3 + \dfrac{4x}{x^2+1}$.

Obtenu par division euclidienne.

3\. $f'(x) = -4 \times \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

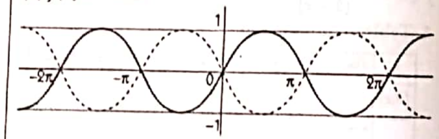
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	1	↗	5	↘	3

4\. I(0 ; 3) est centre de symétrie si et seulement si la fonction h définie ci-dessous est impaire :

$h(x) = f(x) - 3$; on a : $h(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

♦ **Exercice 21 page 140**

(1) $f(x) = -\sin x$

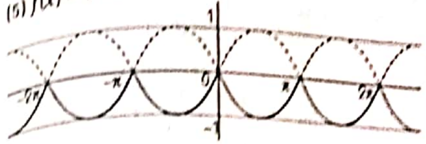


(2) $f(x) = \sin(x+2)$; $(\mathscr{C}_f) = t_{-2\vec{OI}}(\mathscr{C}_{\sin})$

(3) $f(x) = \sin(-x) = -\sin x$

(4) $f(x) = 3 + \sin x$; $(\mathscr{C}_f) = t_{3\vec{OJ}}(\mathscr{C}_{\sin})$

(5) $f(x) = |\sin x|$



(6) $f(x) = 2 + \sin(x-1)$; $(\mathscr{C}_f) = t_{\vec{u}}(\mathscr{C}_{\sin})$

avec : $\vec{u} = \vec{OI} + 2\vec{OJ}$

♦ **Exercice 25 page 140**

(1) $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 1$

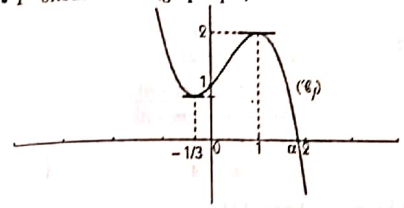
• *Première approximation*

(Tableau de variation)

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{22}{27}$	↗	2	↘	$-\infty$

Un zéro unique α : $\alpha > 1$.

• *1^er^ encadrement* (graphique)



Un zéro unique α : $1 < \alpha < 2$ ①

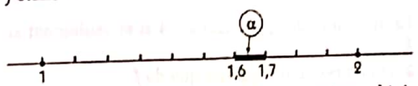
C'est un encadrement par deux nombres entiers consécutifs (ordre 0).

• *2^e^ encadrement* (balayage)

x	1,1	…	1,6	1,7	…
$f(x)$	1,979	…	1,064	− 1,023	…

d'où : $f(1{,}7) < 0 < f(1{,}6)$.

f étant décroissante sur]1 ; 2[, on a : $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$ ②



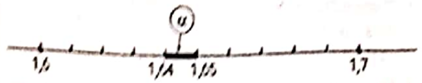
C'est un encadrement par deux nombres décimaux consédutifs d'ordre 1.

• *3^e^ encadrement* (balayage)

x	1,61	…	1,64	1,65	
$f(x)$	1,0288		0,9187	−0,1962	…

d'où : $f(1{,}65) < 0 < f(1{,}64)$,

et : $1{,}64 < \alpha < 1{,}65$ ③



C'est un encadrement par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2, d'amplitude 10^{-2} (l'intervalle d'encadrement]1,64 ; 1,65[a pour amplitude 0,01).

(3) $f(x) = 3x^3 + x^2 + 1$

$-1 < \alpha < 0$

$-0{,}9 < \alpha < -0{,}8$

$-0{,}87 < \alpha < -0{,}86$

(4) $f(x) = -x^3 + x - 12$

$-3 < \alpha < -2$

$-2{,}3 < \alpha < -2{,}2$

$-2{,}29 < \alpha < -2{,}28$

♦ **Exercice 26 page 140**

(1) $f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 - 3x + 1$

• *Première approximation*

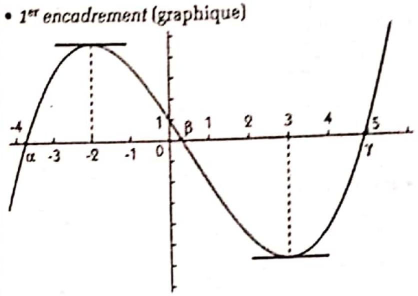
(Tableau de variation)

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{14}{3}$	↘	$-\frac{23}{4}$	↗	$-\infty$

Trois zéros α, β, γ tels que :

$\alpha < -2$; $-2 < \beta < 3$; $\gamma > 3$.

• *1^er^ encadrement* (graphique)



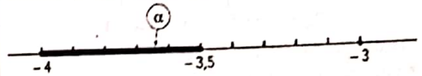
$-4 < \alpha < -3$; $0 < \beta < 1$; $4 < \gamma < 5$ ①.

• *2^e^ encadrement* (dichotomie)

– On a : $\alpha \in]-4 ; -3[$

$f(-4) < 0$; $f(-3{,}5) > 0$; $f(-3) > 0$;

donc : $-4 < \alpha < -3{,}5$ ②.



– De même, on obtient :

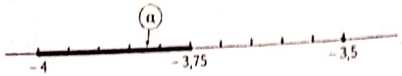
$0 < \beta < 0{,}5$; $4 < \alpha < 4{,}5$

• *3ᵉ encadrement* (dichotomie)

– On a : $\alpha \in]-4\,;-3,5[$

$f(-4) < 0\,;\, f(-3,75) > 0\,;\, f(-3,5) > 0\,;$

donc : $-4 < \alpha < -3,75$ ③.



– De même, on obtient :

$$0 < \beta < 0,25 \quad ; \quad 4 < \gamma < 4,25.$$

(2) $f(x) = -2x^3 + x^2 + 20x + 12$

Trois zéros α, β, γ tels que :

$-3 < \alpha < -2$	$-1 < \beta < 0$
$-3 < \alpha < -2,5$	$-1 < \beta < -0,5$
$-2,75 < \alpha < -2,50$	$-0,75 < \beta < -0,5$

$3 < \gamma < 4$

$3,5 < \gamma < 4$

$3,50 < \gamma < 3,75$

(3) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 1$

Deux zéros α, β tels que :

$-1 < \alpha < 0$	$1 < \beta < 2$
$-1 < \alpha < -0,5$	$1 < \beta < 1,5$
$-0,75 < \alpha < -0,5$	$1,25 < \beta < 1,5$

♦ Exercice 27 page 140

1. $f(x) = \dfrac{ax+1}{x+a}$; $a \in \mathbb{R}^+$

$f'(x) = \dfrac{a^2-1}{(x+a)^2}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-a\}$

• 1ᴱᴿ CAS : $0 < a < 1$

x	$-\infty$	$-a$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$a \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow a$

• 2ᴱ CAS : $a > 1$

x	$-\infty$	$-a$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$a \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow a$

• Asymptote horizontale : $y = a$.

Asymptote verticale : $x = -a$.

2. Les abscisses des points d'intersection de (D) et $(\mathscr{C})$ sont les racines du polynôme $P_m(x)$:

$$P_m(x) = mx^2 + a(m-1)x - 1.$$

Conditions d'existence de ces points

• pour $m = 0$; $P_0(x) = -(ax+1)$.

Un point unique $A(-\frac{1}{a}\,;0)$.

• pour $m \neq 0$,

$\Delta = (m-1)^2a^2 + 4m \geq 0$.

– Si $m = 1$; $P_1(x) = x^2 - 1$.

On a deux points : $A(1\,;1)$ et $B(-1\,;-1)$.

– Si $m \neq 1$ (puisque $a > 0$),

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq \dfrac{-4m}{(m-1)^2} \Leftrightarrow a \geq \dfrac{2\sqrt{-m}}{|m-1|}$.

♦ Exercice 28 page 141

1. Résolution du système

$(\Sigma)\ -1 < \dfrac{4-x}{2x-4} < 1$

• Sur $]2\,;+\infty[$; $2x - 4 > 0$.

(Σ) équivaut à : $-(2x-4) < 4 - x < 2x - 4$,

$$\begin{cases} -(2x-4) < 4-x \\ 4-x < 2x-4 \\ x > 2 \end{cases}$$

d'où : $S_\Sigma =]\frac{8}{3}\,;+\infty[$.

• Sur $]-\infty\,;2[$; $2x - 4 < 0$.

(Σ) équivaut à : $2x - 4 < 4 - x < -(2x-4)$,

d'où : $S_\Sigma =]-\infty\,;0[$.

2. Vérification graphique de 1.

3. m et n sont des nombres réels différents de 2, tels que : $m + n = 6$.

$$f(m)\times f(n) = \frac{(4-m)(4-n)}{4(m-2)(n-2)} = \frac{mn + 16 - 4(m+n)}{4mn + 16 - 8(m+n)} = \frac{mn-8}{4(mn-8)} = \frac{1}{4}.$$

♦ Exercice 30 page 141

$f_k(x) = x^2 - 2kx + k^2 + k + 1$.

1. $f'_k(x) = 2(x-k)$

Tableau de variation

x	$-\infty$	k	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\boxed{0}$	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$\boxed{k+1}$	$\nearrow +\infty$

Le minimum de f_k est égal à -4 si et seulement si $k = -5$.

2. $(\mathscr{C})$ représentation graphique de f

Points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (D)

(D) : $y = mx$

$(\mathscr{C})$: $y = x^2 + 10x + 21$

On obtient l'équation :

(E) $x^2 + (10-m)x + 21 = 0$

avec : $\Delta = m^2 - 20m + 16$.

• $(\mathscr{C})$ et (D) admettent deux points d'intersection si et seulement si $\Delta > 0$:

$$m \in]-\infty\,;4[\,\cup\,]16\,;+\infty[.$$

• $(\mathscr{C})$ et (D) admettent un unique point d'intersection si et seulement si $\Delta = 0$:

$$m = 4\,;\, m = 16.$$

• $(\mathscr{C})$ étant une parabole, toute droite non parallèle à (OJ) qui a un unique point d'intersection avec $(\mathscr{C})$ est une tangente à $(\mathscr{C})$.

(D) est une droite passant par l'origine.

En conclusion, il existe deux droites passant par l'origine qui sont tangente à $(\mathscr{C})$; elles ont pour équation :

$$y = 4m\,;\, y = 16m.$$

• Cas où $(\mathscr{C})$ et (D) ont deux points d'intersection d'abscisses x_1 et x_2.

Désignons par $(x\,;y)$ le couple de coordonnées du milieu M de ces points d'intersection.

Compte tenu de (E), on obtient :

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1+x_2}{2} = \dfrac{10-m}{2} \\ y = m\,\dfrac{x_1+x_2}{2} = \dfrac{m(10-m)}{2} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} m = 2x + 10 \\ y = \dfrac{m^2 - 10m}{2} \end{cases} \qquad y = 2x^2 + 10x.$$

M décrit la parabole (P) d'équation : $y = 2x^2 + 10x$.

♦ Exercice 31 page 141

$f(x) = \dfrac{Ax+3}{x+B}$

$g(x) = ax^2 + bx + 3$

1. $(\mathscr{C}_f)$ passe par les points $M(-2\,;-1)$ et $N(-3\,;0)$ si et seulement si : $A = 1$ et $B = 1$.

• $(\mathscr{C}_g)$ passe par les points $M(-2\,;-1)$ et $N(-3\,;0)$ si et seulement si : $a = 1$ et $b = 4$.

2. On obtient alors :

$f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$; $g(x) = x^2 + 4x + 3$.

• Calcul du 3ᵉ point d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$

(E) $f(x) = g(x)$

(E) $\dfrac{x+3}{x+1} = x^2 + 4x + 3$

Pour $x \neq -1$, (E) équivaut à :

(E') $\quad x^3 + 5x^2 + 6x = 0$

$\qquad x(x^2 + 5x + 6) = 0$

On sait que -2 et -3 doivent être solution de (E'), ce qui est bien le cas.

Le 3ᵉ point d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ a pour couple de coordonnées : $(0\,;3)$.

9. Suites numériques

(pages 143 à 162 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
- familiariser les élèves avec la notion de suite, le vocabulaire et les notations liées à cette notion ;
- développer les capacités à décrire des phénomènes discrets récurrents.

Commentaires

C'est un chapitre à base d'exercices et d'activités sur des situations concrètes (ne pas oublier des situations géométriques).
On veillera, en première SE, à donner des suites simples ayant de « bons ensembles de définition ».
Pour éviter des erreurs, il est conseillé de parler du n^e terme d'une suite plutôt que du terme de rang n.
La suite numérique est un outil de modélisation. Dans la première phase de son étude, on abordera les problèmes d'une très grande simplicité. Une familiarisation progressive sera donc possible avec les indices.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Généralités • Définition – vocabulaire – Suite numérique. – Terme général d'une suite. – Suite définie par une formule explicite, par récurrence.	• Utiliser la notation indicielle. • Calculer les termes d'une suite. • Passer d'un mode de détermination à l'autre. • Représenter graphiquement les termes d'une suite.
Étude d'une suite numérique • Définition – vocabulaire – Suite croissante, décroissante, strictement croissante... – Suite monotone, strictement monotone. – Suite constante. – Suite convergente, divergente. • Propriété – Convergence et divergence d'une suite définie par une formule explicite.	• Déterminer graphiquement des termes d'une suite. • Sur un graphique, conjecturer le comportement d'une suite. • Établir la croissance ou la décroissance d'une suite. • Démontrer qu'une suite numérique définie explicitement est convergente ou divergente.
Suite arithmétique – suite géométrique • Vocabulaire – Suite arithmétique, suite géométrique. – La raison d'une suite arithmétique ou géométrique.	• Reconnaître une suite arithmétique, géométrique. • Calculer le terme d'indice n d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique. • Calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.

Exercices d'application directe

♦ Exercice 1.a page 146

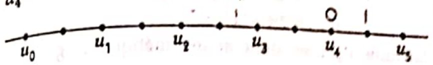
On obtient :
$u_1 = 4$; $u_2 = 1$; $u_3 = -\frac{1}{2}$; $u_4 = -\frac{5}{4}$.

♦ Exercice 1.b page 146

On obtient :
$u_2 = \frac{13}{4}$; $u_3 = \frac{329}{104}$.

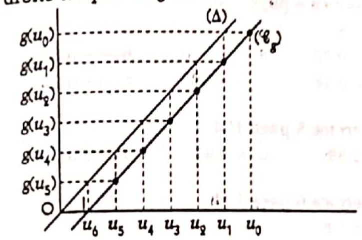
♦ Exercice 1.c page 147

$u_0 = -8$; $u_1 = -6$; $u_2 = -4$; $u_3 = -2$; $u_4 = 0$; $u_5 = 2$.



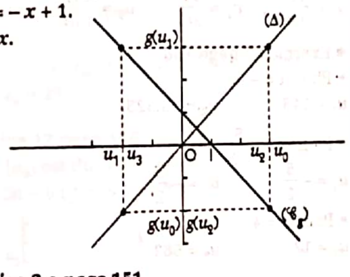
♦ Exercice 1.d page 147

(u_n) est du type $g(u_n) = u_{n+1}$.
g étant la fonction définie par : $g(x) = x - 1$.
$(\mathscr{C}_g)$ représentation graphique de g.
(Δ) droite d'équation $y = x$.



♦ Exercice 1.e page 147

(u_n) est du type $g(u_n) = u_{n+1}$.
$(\mathscr{C}_g) : y = -x + 1$.
$(\Delta) : y = x$.



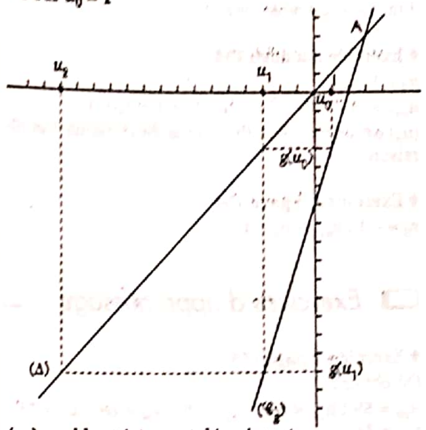
♦ Exercice 2.a page 151

• Sens de variation de (u_n)
On a : $u_{n+1} - u_n = 17$
donc (u_n) est strictement croissante.
• Sens de variation de (v_n)
On a : $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{3}n + \frac{3}{4}$
donc (v_n) est strictement croissante.

♦ Exercice 2.b page 151

(u_n) est du type $g(u_n) = u_{n+1}$.
Étude graphique de (u_n) avec : $(\mathscr{C}_g) : y = 3x - 6$
$(\Delta) : y = x$

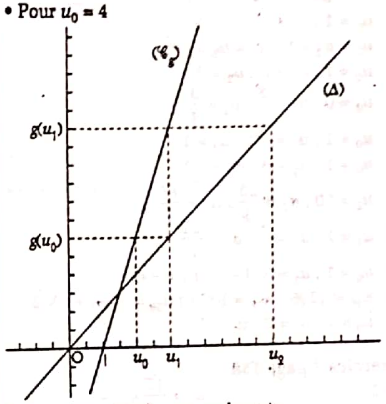
• Pour $u_0 = 1$



(u_n) semble strictement décroissante.

• Pour $u_0 = 3$
(u_n) est une suite constante car $(\mathscr{C}_g)$ et (Δ) sont des droites sécantes au point A(3 ; 3).

• Pour $u_0 = 4$



(u_n) semble strictement croissante.

♦ Exercice 2.c page 152

(u_n) est du type $u_n = f(n)$
f étant la fonction définie par :
$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}$; $x \in \mathbb{R}^*$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
donc (u_n) converge vers 0.

♦ Exercice 2.d page 152

$v_n=\dfrac{1}{3n+1}$; $n\in\mathbb{N}$

f est du type $v_n=f(n)$

f étant la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1}{3x+1}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

donc (u_n) converge vers 0.

♦ Exercice 3.a page 154

$u_0=1$

$u_{n+1}=3(n+1)+1=(3n+1)+3=u_n+3.$

(u_n) est une suite arithmétique de 1er terme 1 et de raison 3.

♦ Exercice 3.b page 154

$v_0=-1$; $v_{n+1}=v_n+1.$

♦ Exercice 3.c page 156

$v_n=3^n$

On a : $v_0=1$

$v_{n+1}=3\times3^n=3\times v_n$

donc (v_n) est une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison 3.

♦ Exercice 3.d page 156

$5u_{n+1}+3u_n=0$

d'où : $u_{n+1}=-\dfrac{3}{5}u_n$

(u_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{5}$.

♦ Exercice 3.e page 156

$v_n=n^2$

d'où : $v_{n+1}=(n+1)^2$
$=n^2+2n+1$
$=v_n+2n+1$

La suite (v_n) n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

Exercices d'apprentissage

♦ Exercice 1 page 158

On obtient :

$u_{20}=59$; $u_{21}=62$; $u_{22}=65$; $u_{23}=68$; $u_{24}=71$; $u_{25}=74$.

♦ Exercice 2 page 158

(1) $u_0=0$; $u_1=3$; $u_2=8$

(2) $u_0=\dfrac{1}{6}$; $u_1=\dfrac{2}{7}$; $u_2=\dfrac{3}{8}$

(3) $u_0=1$; $u_1=3$; $u_2=5$

(4) $u_0=u_2=1$; $u_1=u_3=-1$

(5) $u_0=1$; $u_1=0$; $u_2=5$

(6) $u_0=0$; $u_1=\dfrac{3}{2}$; $u_2=\dfrac{3}{4}$

(7) $u_0=1$; $u_1=-1$; $u_2=1$

(8) $u_0=1$; $u_1=0$; $u_2=-1$

(9) $u_2=10$; $u_3=\dfrac{22}{3}$; $u_4=\dfrac{13}{2}$

(10) $u_1=1$; $u_2=\dfrac{3}{2}$; $u_3=\dfrac{11}{6}$

(11) $u_0=1$; $u_1=\sqrt{3}-4$; $u_3=-4$

(12) $u_{36}=1296$; $u_{37}=1371$; $u_{38}=1444+2\sqrt{2}$

(13) $u_0=1$; $u_1=2$; $u_2=7$

♦ Exercice 3 page 158

$u_0=2$	$u_1=\dfrac{17}{12}\approx1{,}41$
$u_2=\dfrac{11}{10}=1{,}1$	$u_3=\dfrac{9}{10}=0{,}9$
$u_4=\dfrac{16}{21}\approx0{,}76$	$u_5=\dfrac{37}{56}\approx0{,}66$
$u_6=\dfrac{7}{12}\approx0{,}58$	$u_7=\dfrac{47}{90}\approx0{,}52$

♦ Exercice 4 page 158

$u_0=0{,}5$

$u_1=-0{,}75$	$u_2\approx-0{,}43$	$u_3\approx-0{,}81$
$u_4\approx-0{,}34$	$u_5\approx-0{,}88$	$u_6\approx-0{,}22$

♦ Exercice 5 page 158

$u_0=2{,}88$ $u_1=2{,}96$ $u_2=3{,}07$

♦ Exercice 6 page 158

$\begin{cases}u_0=1{,}8\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{u_n}\end{cases}$

$u_1=\dfrac{19}{18}$; $u_2=\dfrac{55}{38}$; $u_3=\dfrac{131}{110}$; $u_4=\dfrac{351}{262}$

♦ Exercice 7 page 158

• Pour $\alpha=-8$

$u_1=113$ $u_2=25{,}523$

• Pour $\alpha=-\dfrac{5}{2}$

$u_1=-\dfrac{5}{2}$ $u_2=-\dfrac{5}{2}$

• Pour $\alpha=4$

$u_1=17$ $u_2=563$

♦ Exercice 8 page 158

$u_n=3n-1$

$u_{n-1}=3(n-1)-1=3n-1-3=u_n-3$

$u_n=u_{n-1}+3$

♦ Exercice 9 page 158

a) $u_1=2$; $u_5=-18$

b) On considère la suite (v_n) définie par :

$\begin{cases}v_0=7\\ v_n=7-5n\end{cases}$

On a : $v_{n+1}=7-5(n+1)=7-5n-5$
$v_{n+1}=v_n-5$

donc les suites (u_n) et (v_n) sont égales.

♦ Exercice 10 page 158

On a : $u_0=7$
$u_1=7+14$
$u_2=7+14+14$
...

Il semble que :
$u_n=7+14n$

Contrôlons cette conjecture.

Considérons la suite (v_n) définie par :

$\begin{cases}v_0=7\\ v_n=7+14n\end{cases}$

On a : $v_{n+1}=7+14(n+1)$
$=7+14n+14$
$=v_n+14$

donc les suites (u_n) et (v_n) sont égales. Par suite :
$u_n=7+14n.$

♦ Exercice 11 page 158

a) $u_1=1=2^1-1$
$u_2=3=2^2-1$
$u_3=7=2^3-1$

b) Il semble que
$u_n=2^n-1$

Contrôlons cette conjecture.

Considérons la suite (v_n) définie par :
$v_n=2^n-1$

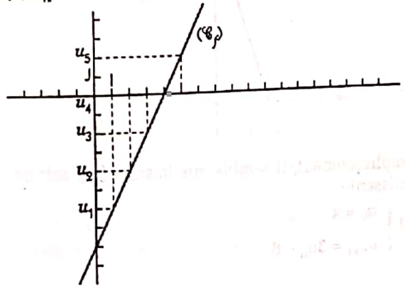
On a : $v_{n+1}=2\times2^n-1$
$=2(2^n-1)+1$
$=2v_n+1$

donc les suites (u_n) et (v_n) sont égales. Par suite :
$u_n=2^n-1.$

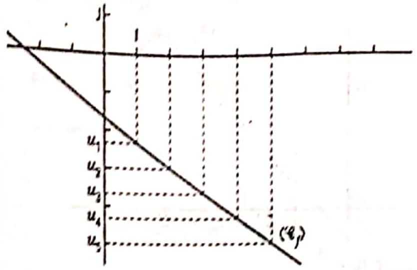
♦ Exercice 12 page 158

La suite (u_n) est du type $f(n)=u_n$

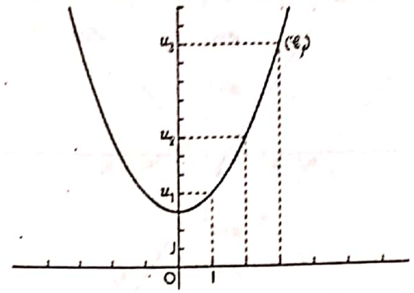
(1) $u_n=2n-8$; $f(x)=2x-8$



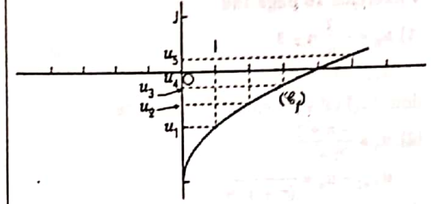
(2) $u_n=-\dfrac{2}{3}n-\dfrac{5}{3}$; $f(x)=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}$



(3) $u_n=n^2+3$; $f(x)=x^2+3$



(4) $u_n=\sqrt{n}-2$; $f(x)=\sqrt{x}-2$

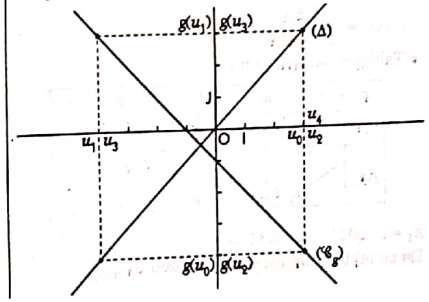


♦ Exercice 13 page 158

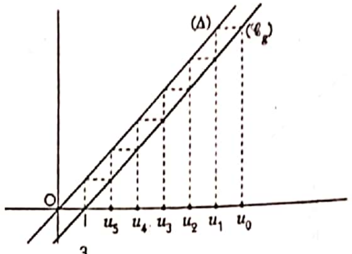
La suite (u_n) est du type : $u_{n+1}=g(u_n)$

g étant une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

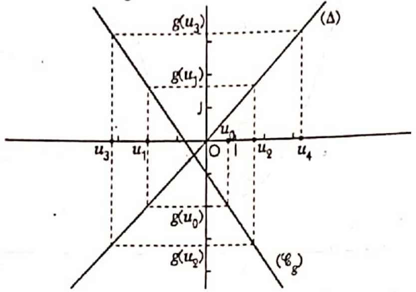
(1) $\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=-u_n-1\ ;\ g(x)=-x-1\end{cases}$



(2) $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n - 1 \; ; g(x) = x - 1 \end{cases}$



(2) $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{4} \\ u_{n+1} = -\dfrac{4}{3}u_n - 1 \; ; g(x) = -\dfrac{4}{3}x - 1 \end{cases}$



♦ Exercice 16 page 159

(1) $u_n = -\dfrac{3}{4}n + 3$

$u_{n+1} - u_n = -\dfrac{3}{4}$

donc (u_n) est strictement décroissante.

(2) $u_n = \dfrac{-n+1}{n+2}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3}{(n+3)(n+2)}$

donc (u_n) est strictement décroissante.

(3) $u_n = \dfrac{-4n^2+3}{2n-235}$

Le calcul de $u_{n+1} - u_n$ n'est pas aisé.

La suite (u_n) est du type $u_n = f(n)$, f étant la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{-4x^2+3}{2x-235}$$

• Tableau de variation de f

x	$-\infty$	x_1		117,5		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\boxed{0}$	$+$	‖	$+$	$\boxed{0}$	$-$
$f(x)$	↘	$f(x_1)$	↗	‖	↗	$f(x_2)$	↘

$x_1 \approx 0,0031$; $x_2 \approx 234,99$.

De ce tableau de variation, on déduit que :

• (u_n) est croissante de l'indice 1 à l'indice 117.

• (u_n) est croissante de l'indice 118 à l'indice 234.

• (u_n) est décroissante à partir de l'indice 235.

(4) $u_n = n^3 - 25n^2 + 3$

(u_n) est du type $u_n = f(n)$

f étant la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^3 - 25x^2 + 3$$

• Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0		50/3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\boxed{0}$	$-$	$\boxed{0}$	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	$f(50/3)$	↗

$\dfrac{50}{3} \approx 16,66$

De ce tableau de variation, on déduit que :

• (u_n) est décroissante jusqu'à l'indice 16.

• (u_n) est croissante à partir de l'indice 17.

♦ Exercice 17 page 159

(1) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 6 \end{cases}$

La suite (u_n) est du type $u_{n+1} = g(u_n)$

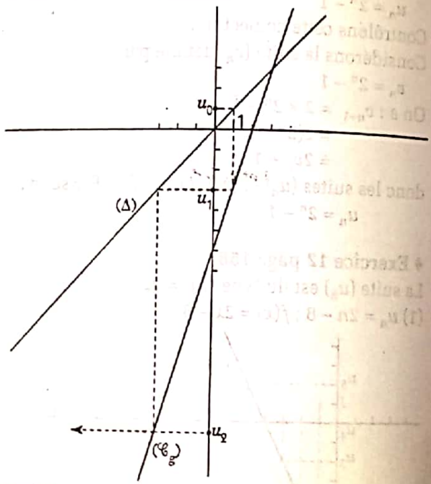
g étant la fonction affine définie par :

$$g(x) = 3x - 6.$$

• Étude graphique de la variation de la suite (u_n)

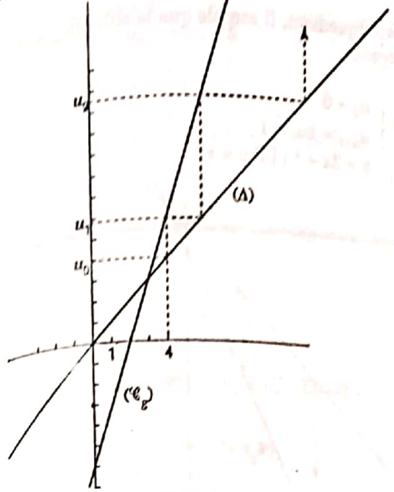
$(\mathscr{C}_g)$ est la représentation graphique de g

(Δ) est la droite d'équation $y = x$



Graphiquement, il semble que la suite (u_n) soit décroissante.

(2) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 3u_n - 6 \end{cases}$



Graphiquement, il semble que la suite (u_n) soit croissante.

♦ Exercice 19 page 159

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -2u_n + 8 \end{cases}$

La suite (u_n) est du type $u_{n+1} = g(u_n)$

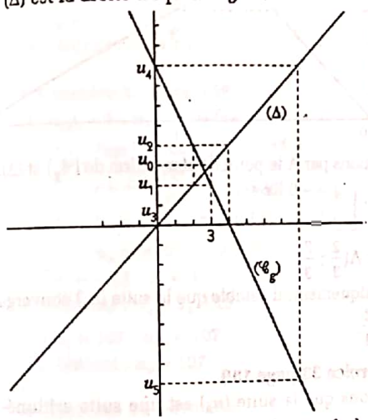
g étant la fonction affine définie par :

$$g(x) = -2x + 8$$

• Étude graphique de la variation de la suite (u_n)

$(\mathscr{C}_g)$ est la représentation graphique de g

(Δ) est la droite d'équation $y = x$



Graphiquement, il semble que la suite (u_n) ne soit ni croissante, ni décroissante.

• Vérification de cette conjecture par le calcul.

– Calculons et déterminons le signe de $u_1 - u_0$

On a : $u_1 - u_0 = -1 < 0$

– Exprimons en fonction de $u_1 - u_0$ les différences suivantes $(u_2 - u_1)$; $(u_3 - u_2)$...

On a : $u_2 - u_1 = -2(u_1 - u_0)$

$u_3 - u_2 = (-2)^2(u_1 - u_0)$

$u_4 - u_3 = (-2)^3(u_1 - u_0)$

On peut conjecturer et nous admettons que :

pour tout n, $u_{n+1} - u_n = (-2)^n(u_1 - u_0)$.

Le signe de $u_{n+1} - u_n$ dépend donc de la parité de n.

La suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

♦ Exercice 20 page 159

$\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+2} = 3u_n^2 + 3u_n + 1 \end{cases}$

La suite (u_n) est du type $u_{n+2} = g(u_n)$

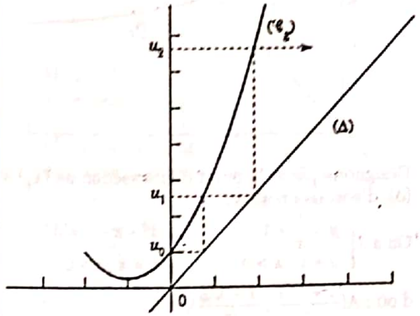
g étant la fonction polynôme définie par :

$$g(x) = 3x^2 + 3x + 1.$$

• Étude graphique de la variation de la suite (u_n)

$(\mathscr{C}_g)$ est la représentation graphique de g

(Δ) est la droite d'équation $y = x$



Graphiquement, il semble que la suite (u_n) soit croissante.

• Vérification de cette conjecture par le calcul.

On a : $u_{n+1} - u_n = 3u_n^2 + 2u_n + 2$

Le discriminant du polynôme $3x^2 + 2x + 2$ est strictement négatif, donc :

pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite (u_n) est strictement positive.

♦ Exercice 21 page 159

La suite u_n est du type : $u_n = f(n)$.

Il suffit donc de calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

• Les suites (1) (2) (3) (4) (5) (10) sont divergentes.

• Les suites (6) (7) (8) (9) (11) (12) sont convergentes.

(6) $u_n = \dfrac{16(2n-1)^2}{9n(n+1)}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{16 \times 4n^2}{9n^2}$

La suite converge vers $\dfrac{64}{9}$.

(7) La suite converge vers 2

(8) La suite converge vers 0

(9) La suite converge vers -1

(11) $u_n = \frac{n}{3} - \frac{n^2+5n}{3n-5} = \frac{-20n}{9n-1}$

La suite converge vers $-\frac{20}{9}$.

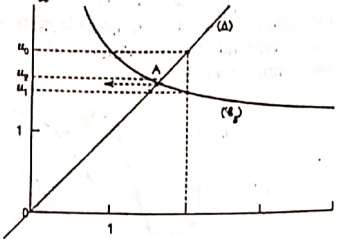
♦ Exercice 22 page 159

La suite (u_n) est du type : $u_{n+1} = g(u_n)$

L'étude graphique de la convergence de la suite (u_n) peut donc se faire à l'aide de la représentation $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g.

(1) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1 \end{cases}$

$(\mathscr{C}_g)$ $y = \frac{1}{x} + 1$; (Δ) $y = x$



Désignons par A le point d'intersection de $(\mathscr{C}_g)$ et (Δ), d'abscisse positive.

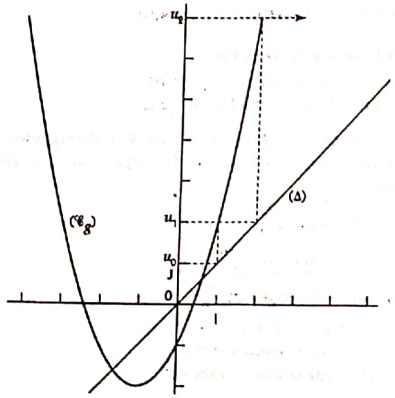
On a : $\begin{cases} y = \frac{1}{x} + 1 \\ y = x ; x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ y = x ; x > 0 \end{cases}$

d'où : $A(\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

Graphiquement, il semble que la suite (u_n) converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n - 1 \end{cases}$

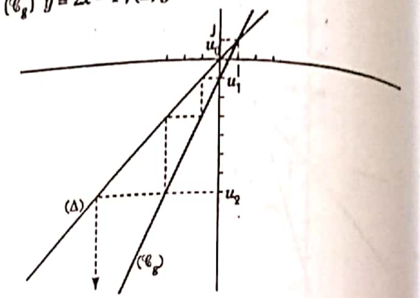
$(\mathscr{C}_g)$ $y = x^2 + 2x - 1$; (Δ) $y = x$



Graphiquement, il semble que la suite (u_n) soit divergente.

(3) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$

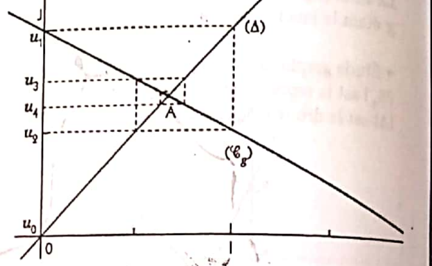
$(\mathscr{C}_g)$ $y = 2x - 1$; (Δ) $y = x$



Graphiquement, il semble que la suite soit divergente.

(4) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = -0,5u_n + 1 \end{cases}$

$(\mathscr{C}_g)$ $y = -0,5x + 1$; (Δ) $y = x$



Désignons par A le point d'intersection de $(\mathscr{C}_g)$ et (Δ).

On a : $\begin{cases} y = -0,5x + 1 \\ y = x \end{cases}$

d'où : $A(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3})$.

Graphiquement, il semble que la suite (u_n) converge vers $\frac{2}{3}$.

♦ Exercice 23 page 159

Vérifions que la suite (u_n) est une suite arithmétique.

(1) $u_n = 2n - 1$

On a : $u_{n+1} = 2(n+1) - 1$
$= 2n + 1$
$= (2n - 1) + 2$

d'où : $u_{n+1} = u_n + 2$

(u_n) est donc une suite arithmétique de raison 2.

(2) $u_n = -5n + 4$

On obtient : $u_{n+1} = u_n - 5$

(3) $u_n = -\frac{4}{3}n$

On a : $u_{n+1} = -\frac{4}{3}(n+1) = -\frac{4}{3}n - \frac{4}{3}$

d'où : $u_{n+1} = u_n - \frac{4}{3}$

(u_n) est donc une suite arithmétique de raison $-\frac{4}{3}$.

(4) $u_n = \frac{3n}{2}$

On obtient : $u_{n+1} = u_n + \frac{3}{2}$

♦ Exercice 24 page 159

On utilise la formule : $u_n = u_k + (n-k)r$

(1) $u_1 = 1$; $r = 1$

d'où : $u_n = u_1 + (n-1) \times 1$
$u_n = n$

(2) $u_1 = 4$; $r = -2$

d'où : $u_n = u_1 + (n-1)(-r)$
$u_n = 6 - 2n$

(3) $u_{10} = 1$; $r = 5$

On obtient :
$u_n = u_{10} + (n-10) \times 5$
$u_n = 5n - 49$

(4) $u_{20} = 1$; $r = 1,5$

On obtient : $u_n = 1,5n - 29$

(5) $u_{150} = 150$; $r = -3$

On obtient : $u_n = 600 - 3n$

(6) $u_8 = 32$; $r = 4$

On obtient : $u_n = 4n$

♦ Exercice 25 page 159

(1) $u_{100} = 1$; $u_{200} = 10\,000$

On a : $u_{200} = u_{100} + (200 - 100)r$

d'où : $r = \frac{10\,000 - 1}{100} = 99,99$

donc : $u_n = u_{100} + (n - 100) \times 99,99$
$u_n = 99,99n - 9\,998$

(2) $u_1 = -12$; $u_5 = 0$

On obtient : $u_n = 3_n - 15$

(3) $u_1 = 107$; $u_{10} = 107$

On obtient : $u_n = 107$

♦ Exercice 26 page 159

On utilise la formule :

$S = \frac{200 - 100 + 1}{2}(u_{100} + u_{200}) = \frac{101}{2}(u_{100} + u_{200})$

• Pour les suites de l'exercice 24 :

(1) S = 15 150
(2) S = – 29 694
(3) S = 70 801
(4) S = 19 796
(5) S = 15 150
(6) S = 60 600

• Pour les suites de l'exercice 25 :

(1) $S = \frac{1\,010\,101}{2}$
(2) S = 43 935
(3) S = 10 807

♦ Exercice 27 page 159

(1) $u_n = 5^n$

On a : $u_{n+1} = 5^{n+1} = 5 \times 5^n$

d'où : $u_{n+1} = 5u_n$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison 5.

(2) $u_n = (-1)^n$

On obtient : $u_{n+1} = (-1)u_n$

(3) $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$

On obtient : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n$

(4) $u_n = 2^{n-1}$

On obtient : $u_{n+1} = 2u_n$

♦ Exercice 28 page 159

On utilise la formule : $u_n = u_k\, q^{n-k}$

(1) $u_1 = 1$; $q = 1$

d'où : $u_n = u_1\, q^{n-1}$
$u_n = 1$

(2) $u_1 = 4$; $q = -2$

d'où : $u_n = u_1(-2)^{n-1}$
$u_n = (-2)^{n+1}$

(3) $u_1 = 1$; $q = 5$

On obtient : $u_n = \frac{5^n}{5^{10}}$

♦ Exercice 29 page 159

(1) $u_1 = \left(\frac{1}{7}\right)^6$; $u_7 = 1$

On obtient : $q = 7$
$u_n = \left(\frac{1}{7}\right)^6 \times 7^{n-1}$

(2) $u_1 = 107$; $u_{10} = 107$

On obtient : $q = 1$
$u_n = 107$

(3) $u_{21} = 225$; $u_{22} = 1125$

On obtient : $q = 5$
$u_n = 9 \times 5^{n-19}$

♦ Exercice 30 page 160

On utilise la formule : $S = u_{10} \times \frac{1 - q^{11}}{1 - q}$

• Pour les suites de l'exercice 28

(1) S = 11
(2) $S = \frac{4\,192\,256}{3}$
(3) S = 12 207 031

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 31 page 160

$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$

(u_n) est une suite constante si et seulement si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n$

$\dfrac{9}{6-u_n} = u_n$

$u_0 = u_n = 3$

♦ Exercice 32 page 160

$u_n = 5^n + 3 - n$

1) $u_0 = 4$; $u_1 = 7$; $u_2 = 26$; $u_3 = 125$; $u_4 = 624$.

2) $u_{n+1} = 5^{n+1} + 3 - (n+1)$

$= 5(5^n + 3 - n) - 13 + 4n$

$u_{n+1} = 5u_n - 13 + 4n$

(u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

3) On pose : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

$v_n = 5^n$; $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

$w_n = 3 - n$; $S''_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$

• (v_n) est une suite géométrique de raison 5

d'où : $S'_n = v_0 \dfrac{1-5^{n+1}}{1-5}$

$= \dfrac{1}{4}(5^{n+1} - 1)$

• (w_n) est une suite arithmétique de raison -1 ;

en effet : $w_{n+1} = 3 - (n+1) = w_n - 1$

d'où : $S''_n = \dfrac{1}{2}(n+1)(6-n)$

donc : $S_n = S'_n + S''_n$

♦ Exercice 33 page 160

(u_n) suite décroissante de raison q, telle que :

$u_0u_3 = 128$ et $u_0 + u_3 = 36$.

1. *a)* On a : $u_0u_3 > 0$

donc : u_0 et u_3 sont non nuls et de même signe.

• On a : (u_n) étant décroissante

donc : $0 < q < 1$

• On a : $u_0 + u_3 > 0$

$u_0 + u_3 = u_0(1 + q^3)$

$1 + q^3 > 0$

donc : $u_0 > 0$

• On a : $u_n = u_0q^n$

donc : $u_n > 0$

b) u_0 et u_3 sont solutions de l'équation :

$x^2 - 36x + 128 = 0.$

On sait que $u_0 > u_3$

On obtient donc : $u_0 = 32$; $u_3 = 4$

c) On sait que : $u_3 = u_0q^3$

donc : $q^3 = \dfrac{1}{8} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

d'où : $q = \dfrac{1}{2}$

2. On a : $S_n = u_0 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$

$S_n = 64 \times \left[1 - \dfrac{1}{2^n}\right]$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 64.$

♦ Exercice 34 page 160

(u_n) suite arithmétique telle que :

(1) (u_n) est croissante.

(2) $u_1 + u_2 + u_3 = -9$

(3) $u_{12} + u_{22} + u_{32} = 99$

On sait que : $u_n = u_0 + nr$

(1) donne $r > 0$

(2) donne $u_0 = -3 - 2r$

(3) donne $3u_0^2 + 12u_0r + 14r^2 = 99$

Par conséquent : $r^2 = 36$

$r = 6$

$u_0 = -15$; $u_n = -15 + 6n$

♦ Exercice 35 page 160

$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \dfrac{14u_n - 7}{u_n + 6} \end{cases}$

(u_n) est une suite de type : $u_{n+1} = g(u_n)$.

$(\mathscr{C}_g)$ $y = \dfrac{14x-7}{x+6}$; (Δ) $y = x$

$(\mathscr{C}_g)$ et (Δ) sont sécantes en A(1, 1) et B(7 ; 7).

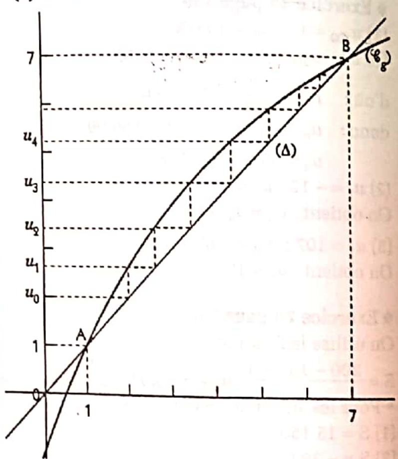
• (1) $\alpha = 1$

D'après le graphique, la suite (u_n) semble constante $(u_n = 1)$.

Par le calcul, on obtient :

$u_1 = 1$; $u_2 = 1$; …

• (2) $\alpha = 2$



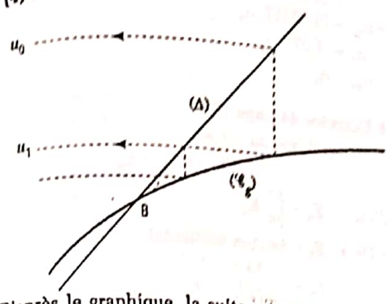
D'après le graphique, la suite semble croissante.

• (3) $\alpha = 7$

D'après le graphique, la suite (u_n) semble constante $(u_n = 7)$.

Par le calcul, on vérifie que $u_1 = u_2 = \ldots = 7$.

• (4) $\alpha = 15$



D'après le graphique, la suite est strictement décroissante.

♦ Exercice 36 page 160

Voir exercice 35.

♦ Exercice 37 page 160

$f(x) = 2x^2 - x^4$; $g(x) = x$

1. Points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$

(E) $x^4 - 2x^2 + x = 0$

$x(x^3 - 2x + 1) = 0$

$x(x-1)(x^2 + x - 1) = 0$

(E) a pour solutions :

$0 ; 1 ; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

2. $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = 2(u_n)^2 - (u_n)^4 \end{cases}$

L'étude graphique du sens de variation de (u_n) se fait par les représentations graphiques $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

On obtient les conjectures suivantes :

$\alpha < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, (u_n) est décroissante

$\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, (u_n) est constante

$\alpha > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, (u_n) est croissante

3. $\begin{cases} v_0 = 0{,}5 \\ v_{n+1} = 1 - (v_n)^2 \end{cases}$

$v_0 = 0{,}5$

$v_1 = 0{,}75$

$v_2 = 0{,}4375$

$v_{n+2} = 1 - (v_n)^2$

$= 1 - (1 - (v_{n-1})^2)^2$

$v_{n+1} = 2(v_{n-1})^2 - (v_{n-1})^4$

Démontrons que (v_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

On obtient : la suite $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = 2(u_n)^2 - (u_n)^4 \end{cases}$

est décroissante si $\alpha < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

croissante si $\alpha > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

elle n'est donc pas convergente.

Problèmes

♦ Exercice 38 page 160

On obtient :

1. $c_5 = \sqrt{2}$; $\mathscr{A}_5 = 2$

2. $c_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} c_n$; $\mathscr{A}_{n+1} = \dfrac{1}{2}\mathscr{A}_n$

3. $c_n = 8\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$; $\mathscr{A}_n = 64 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

♦ Exercice 39 page 160

Désignons par :

$\mathscr{A}_n$ l'aire du carré de côté u_n

$\mathscr{A}_{n-1}$ l'aire du carré de côté u_{n-1}

$\mathscr{B}_n$ l'aire du domaine colorié

1. On a :

$\mathscr{B}_n = \mathscr{A}_n - \mathscr{A}_{n-1}$

$= u_n^2 - u_{n-1}^2$

$= (u_n - u_{n-1})(u_n + u_{n-1})$

or : $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

d'où : $\mathscr{B}_n = u_n^2 - u_{n-1}^2 = n^3$

2. On a :

$u_1^2 - u_0^2 = 1^3$

$u_2^2 - u_1^2 = 2^3$

$u_n^2 - u_{n-1}^2 = n^3$

$u_n^2 - u_0^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

or : $u_0 = 0$; $u_n = 1 + 2 + \ldots + n$

d'où : $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

♦ Exercice 40 page 161

On obtient : $l_n = \dfrac{2\pi}{3} r_n$; $r_n = n$; donc : $l_n = \dfrac{2\pi}{3} n$.

♦ Exercice 41 page 161

Désignons par t_n le taux d'inflation de la n^e année

• On a : $t_2 = 3t_1$

d'où : $4t_1 = 5{,}07$ %

$t_1 = 1{,}2675$ %

• On a : $t_{n+1} = 3t_n$

d'où : $t_n = t_1 \times 3^{n-1}$

$t_5 = t_1 \times 3^4$

♦ **Exercice 42 page 161**

u_n est le capital disponible au 1er janvier $(1998 + n)$.

1. On obtient : $u_1 = 81\,620$

$u_2 = 86\,517{,}2$

$u_3 = 91\,708{,}232$

2. $u_{n+1} = u_n + u_n \times \dfrac{6}{100} = 1{,}06 u_n$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison 1,06

d'où $u_n = 77\,000 \times (1{,}06)^n$

♦ **Exercice 43 page 161**

1. On obtient : $a_n = (1{,}07)^n \times a_0$

2. On a : $a_n = 2a_0$

$(1{,}07)^n = 2$

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$(1{,}07)^{10} = 1{,}96$

$(1{,}07)^{11} = 2{,}10$

donc c'est au bout de 11 ans que le prix de cet objet sera multiplié par 2.

3. On obtient :

- $a_1 = 1{,}07\, a_0$

$a_2 = 0{,}93\, a_1$

$= 0{,}9951\, a_0$

- $a_3 = 1{,}07\, a_2$

$a_4 = 0{,}93\, a_3$

$= (0{,}9951)^2\, a_0$

- $a_{2n} = (0{,}9951)^n\, a_0$

$a_n = (1{,}07)^n\, a_0$

$a_{2n} > a_n$

♦ **Exercice 44 page 161**

- À l'équilibre, on obtient :

$2{,}12(E_n - E_{n-1}) = E_n$

d'où : $E_n = \dfrac{53}{28} E_{n-1}$

- On a : $E_0 = 840$ (en milliards)

$E_n = E_0\left(\dfrac{53}{28}\right)^n$

d'où : $E_n = 840\left(\dfrac{53}{28}\right)^n$ (en milliards)

- On a : $\dfrac{53}{28} > 1$

d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} E_n = +\infty$

Exercices de recherche

♦ **Exercice 46 page 161**

1. $u_n = u_{n-1} + 2$

$u_6 = 11$

2. $u_n = -u_{n-1} - 1$

$u_6 = -107$

3. $u_n = 20(u_{n-1} - 1) + 1$

$u_6 = 3.200.001$

♦ **Exercice 47 page 161**

- u_n désigne le nombre de segments définis par n points.

On a :

$u_1 = 0$

$u_2 = 1$; $u_2 = u_1 + 1$

$u_3 = 3$; $u_3 = u_2 + 2$

$u_4 = 6$; $u_4 = u_3 + 3$

$u_5 = 10$; $u_5 = u_4 + 4$

On conjecture et l'on admet que :

$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = n + u_n \end{cases}$

- Par addition membre à membre :

$u_2 = u_1 + 1$

$u_3 = u_2 + 2$

$\ldots \quad \ldots$

$u_n = u_{n-1} + (n-1)$

$u_n = u_1 + 1 + 2 + \ldots + (n-1)$

$u_n = \dfrac{n(m-1)}{2}$

- w_n désigne le nombre de demi-droites définies par n points.

On obtient : $w_n = 2n$

d'où : $v_n = u_n + w_n$

$= \dfrac{n(n+3)}{2}$

♦ **Exercice 48 page 162**

a_n est le nombre de bâtonnets nécessaires pour réaliser la construction du n^e niveau.

On obtient : $a_{n+1} = a_n + 2$

or : $a_1 = 2$

$a_n = a_1 + 2(n-1)$

d'où : $a_n = 2n$

♦ **Exercice 49 page 162**

On obtient : $c_5 = 41$; $c_6 = 61$.

On conjecture et l'on admet que :

$c_n = c_{n-1} + 4(n-1)$

On a :

$c_2 - c_1 \quad = 4$

$c_3 - c_2 \quad = 2 \times 4$

$\ldots$

$c_n - c_{n-1} = (n-1) \times 4$

$c_n - c_1 \quad = 4 + (2 \times 4) + \ldots + [(n-1) \times 4]$

$= 4\,[1 + 2 + \ldots + (n-1)]$

On obtient :

$c_n = 1 + 2n(n-1)$.

♦ **Exercice 50 page 162**

a) 3 droites 2 à 2 sécantes partagent le plan en 7 régions.

b) pour 4 droites, on a 11 régions ;
pour 5 droites, on a 16 régions ;
pour 6 droites, on a 22 régions.

c) On conjecture et l'on admet que :

$d_n = d_{n-1} + n$

On a : $d_2 = d_1 + 2$

$d_3 = d_2 + 3$

$\ldots$

$d_n = d_{n-1} + n$

d'où : $d_n = d_2 + 2 + 3 + \ldots + n$

$= 1 + [1 + 2 + 3 + \ldots + n]$

$= 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$

♦ **Exercice 51 page 162**

1. On obtient $u_1 = \dfrac{5}{3}$

2. On obtient $u_2 = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2$

3. On obtient $u_3 = \left(\dfrac{5}{3}\right)^3$

On conjecture que : $u_n = \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$

♦ **Exercice 52 page 162**

1. $\mathcal{A}$ désignant l'aire de ABC

on a : $a_1 = \dfrac{3}{4}\mathcal{A} = \dfrac{3}{4}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. $a_2 = \dfrac{3}{4} a_1 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. $a_3 = \dfrac{3}{4} a_2 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

On conjecture que : $a_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

♦ **Exercice 53 page 162**

1. On obtient $v_1 = \dfrac{20}{27}$

2. On obtient $v_2 = \left(\dfrac{20}{27}\right)^2$

3. On conjecture que : $v_n = \left(\dfrac{20}{27}\right)^n$

10. Trigonométrie

(pages 163 à 188 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
– assurer la suite du cours de trigonométrie de la classe de seconde S ;
– introduire les fonctions trigonométriques de ℝ dans ℝ.

Commentaires

En classe de seconde S, *la mesure principale d'un angle orienté* est le résultat essentiel obtenu sur les angles orientés. Cependant, la mesure principale de la somme de deux angles orientés n'étant pas toujours égale à la somme des mesures principales de ces angles orientés, la priorité est maintenant d'introduire *les mesures d'un angle orienté*.
Par suite, il sera alors aisé de définir le sinus, le cosinus et la tangente d'un nombre réel.
La représentation graphique de ces fonctions ainsi que le cercle trigonométrique serviront de supports à de nombreuses résolutions de problèmes.

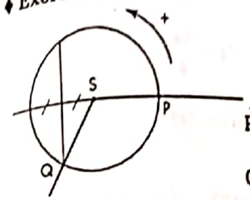
Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Mesure d'un angle orienté • Définition – Somme, différence de deux angles orientés. • Propriété – Égalité de Chasles. • Définitions – Mesures d'un angle orienté.	• Passer d'une mesure d'un angle orienté à sa mesure principale. • Justifier que deux nombres donnés sont les mesures d'un même angle orienté.
Fonctions cosinus, sinus, tangente • Définition – Cosinus, sinus, tangente d'un nombre réel. • Propriétés – $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $-1 \le \cos x \le 1$; $-1 \le \sin x \le 1$. – Cosinus, sinus, tangente d'un angle orienté. – Angles orientés de même cosinus, de même sinus ou de même tangente. • Définitions – cos ; sin ; tan. • Propriétés – Parité et périodicité des fonctions cos, sin et tan.	• Sur le cercle trigonométrique, placer le point image d'un angle orienté de mesure donné. • Reconnaître et tracer les représentations graphiques des fonctions sinus, cosinus et tangente.
Formules trigonométriques • Formules d'addition. • Formules de duplication.	
Résolution d'équations trigonométriques • Méthodes – Pour résoudre les équations : $\sin x = a$; $\cos x = b$; $\tan x = c$; $\cos x + a\sin x = b$.	• Résoudre les équations : $\sin x = a$; $\cos x = b$; $\tan x = c$; $\cos x + a\sin x = b$.

Exercices du manuel

Exercices d'application directe

♦ Exercice 1.a page 166



$\widehat{PSQ} = \left(-\widehat{\frac{2\pi}{3}}\right)$

$\widehat{QSQ} = \left(\widehat{\frac{2\pi}{3}}\right)$

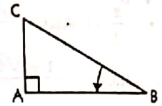
♦ Exercice 1.b page 166

$\alpha \in]\frac{3\pi}{4} ; \pi]$; $\beta \in]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}]$

$\gamma \in]-\pi ; -\frac{3\pi}{4}]$; $\eta \in]0 ; \frac{\pi}{4}]$

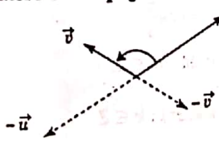
$\delta \in]-\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{4}]$; $\alpha + \beta \in]\pi ; \frac{3}{2\pi}]$

♦ Exercice 1.c page 168



angle	a pour mesures
$(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}})$	$\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$
$(\widehat{\vec{AC}, \vec{AB}})$	$-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{9\pi}{2}$
$(\widehat{\vec{AC}, \vec{BC}})$	$-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{13\pi}{3}$
$(\widehat{\vec{BC}, \vec{AB}})$	$-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{29\pi}{6}$
$(\widehat{\vec{CB}, \vec{AB}})$	$\frac{\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$
$(\widehat{\vec{AB}, \vec{CB}})$	$\frac{\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$
$(\widehat{\vec{BC}, \vec{AC}})$	$-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{13\pi}{3}$
$(\widehat{\vec{BC}, \vec{CA}})$	$\frac{2\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{14\pi}{3}$

♦ Exercice 1.d page 168



$\text{Mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{2\pi}{3}$

angle	a pour mesures
$(\widehat{-\vec{u}, \vec{v}})$	$-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{13\pi}{3}$
$(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}})$	$-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{13\pi}{3}$
$(\widehat{-\vec{u}, -\vec{v}})$	$\frac{2\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{14\pi}{3}$
$(\widehat{\vec{v}, -\vec{u}})$	$\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{3}$

♦ Exercice 1.e page 170

1. Mesure principale de $(\widehat{\alpha})$

(1) $\alpha = \frac{43\pi}{7} = \frac{7 \times 3(2\pi) + \pi}{7} = 3(2\pi) + \frac{\pi}{7}$

$\text{Mes}(\widehat{\alpha}) = \frac{\pi}{7}$

(2) $\alpha = \frac{68\pi}{7} = \frac{7 \times 5(2\pi) - 2\pi}{7} = 5(2\pi) - \frac{2\pi}{7}$

$\text{Mes}(\widehat{\alpha}) = -\frac{2\pi}{7}$

(3) $\alpha = -\frac{83\pi}{11} = \frac{-11 \times 4(2\pi) + 5\pi}{11} = -4(2\pi) + \frac{5\pi}{11}$

$\text{Mes}(\widehat{\alpha}) = \frac{5\pi}{11}$

(4) $\alpha = -\frac{60\pi}{11} = \frac{-11 \times 3(2\pi) + 6\pi}{11} = -3(2\pi) + \frac{6\pi}{11}$

$\text{Mes}(\widehat{\alpha}) = \frac{6\pi}{11}$

(5) $\alpha = -7\pi = -4(2\pi) + \pi$

$\text{Mes}(\widehat{\alpha}) = \pi$

(6) $\alpha = 35\pi = 17 \times (2\pi) + \pi$

$\text{Mes}(\widehat{\alpha}) = \pi$

2. Mesure principale de $(\widehat{\beta})$

$\beta = 35° = \frac{35 \times \pi}{180} = \frac{7\pi}{36} \approx \frac{7 \times 3{,}14}{36}$

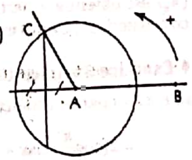
$\text{Mes}(\widehat{\beta}) = \frac{7\pi}{36} \approx 0{,}61$

♦ Exercice 1.f page 170

1. Construction de $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}})$

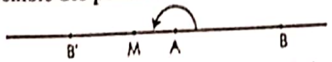
$\frac{-10\pi}{3} = -2(2\pi) + \frac{2\pi}{3}$

$\text{Mes}(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = \frac{2\pi}{3}$



2. Ensemble des points M

(1)



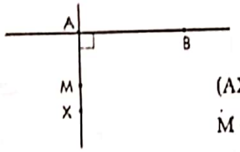
B' est l'opposé de B par rapport à A

$M \in]AB')$

(2)

$M \in]AB]$

(3)



$(AX) \perp (AB)$

$M \in]AX]$

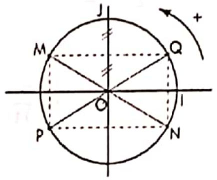
♦ Exercice 2.a page 173

Point $M(-\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2})$.

a) M est un point du cercle trigonométrique car :

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

b) Mesure principale d'angles représentés par M, N, P, Q



$\text{Mes}(\widehat{\vec{OI},\vec{OM}}) = \frac{5\pi}{6}$

$\text{Mes}(\widehat{\vec{OI},\vec{OP}}) = -\frac{5\pi}{6}$

$\text{Mes}(\widehat{\vec{OI},\vec{ON}}) = -\frac{\pi}{6}$

$\text{Mes}(\widehat{\vec{OI},\vec{OQ}}) = \frac{\pi}{6}$

♦ Exercice 2.b page 173

On donne $\sin x = -0,3$.

$P(x) = (\sin 3x + \cos^2 x \sin x)\cos(\frac{\pi}{2} + x)$

$= -\sin^2 x = -0,09$.

♦ Exercice 2.c page 175

On donne g et h définies par :

$g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$; $h(x) = 1 + \cos x$.

On en déduit que :

– $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_{\sin})$ par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{OI}$;

– $(\mathscr{C}_h)$ est l'image de $(\mathscr{C}_{\cos})$ par la translation de vecteur $\vec{OJ}$.

♦ Exercice 2.d page 175

$(\mathscr{C}_g)$ est obtenue à partir de $(\mathscr{C}_{\sin})$ et $(\mathscr{C}_{\cos})$ par une construction point par point.

♦ Exercice 3.a page 177

a) $P(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2[\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x]$

$= 2[\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x]$

b) $P(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2[\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x]$

$= 2[\sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x]$

♦ Exercice 3.b page 177

$A = \sin(x + \frac{3\pi}{2}) + \cos(x + \frac{3\pi}{2})$

$= -\cos x + \sin 2x$

$B = \sin(x + \frac{5\pi}{2}) + \cos(x + \frac{5\pi}{2})$

$= \cos x - \sin x$

$C = \sin(x - 7x) + \cos(x + 7x)$

$= -(\cos x + \sin x)$

♦ Exercice 3.c page 177

$\sin(3x) = \sin(2x + x)$

$= -4\sin^3 x + 3\sin x$

$\cos(3x) = \cos(2x + x)$

$= 4\cos^3 x - 3\cos x$

♦ Exercice 3.d page 177

$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = -\frac{7}{9}$; $\cos a = \frac{1}{3}$.

♦ Exercice 3.e page 177

On donne : $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1) • $\cos 2x = 1 - 2\sin 2x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

• $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x = \frac{5-\sqrt{5}}{8} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$

• $\sin 2x = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ car $0 < 2x < \pi$

2) $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\sin^2 4x = 1 - \cos^2 4x = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$

$\sin 4x = \text{ou} \begin{cases} \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \end{cases}$

♦ Exercice 4.a page 181

• (E_1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin x = \sin(-\frac{\pi}{3})$

$(E_1) \Leftrightarrow \text{ou} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{4\pi}{3} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

• (E_2) $\cos x = \frac{1}{2}$; $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$(E_2) \Leftrightarrow \text{ou} \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

• (E_3) $\tan x = -1$; $\tan x = \tan\frac{3\pi}{4}$

$(E_3) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \frac{k(2\pi)}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

• (E_4) $\sin(\frac{\pi}{3} - x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{3} - x) = \sin(-\frac{\pi}{4})$

$(E_4) \Leftrightarrow \text{ou} \begin{cases} \frac{\pi}{3} - x = -\frac{\pi}{4} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{3} - x = \frac{5\pi}{4} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\text{ou} \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{11\pi}{12} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

• (E_4) $\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 4x = \cos\frac{\pi}{4}$

$(E_4) \Leftrightarrow \text{ou} \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + \frac{k(2\pi)}{4} ; k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k(2\pi)}{4} ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

♦ Exercice 4.b page 181

• (E_1) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$; $\sin 2x = \sin\frac{2\pi}{3}$

$(E_1) \Leftrightarrow \text{ou} \begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \frac{\pi}{3} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\text{ou} \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k(2\pi)}{2} ; k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k(2\pi)}{2} ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

• (E_2) $\cos 3x = -\frac{3}{2}$; $\cos 3x = \cos\frac{5\pi}{6}$

$(E_2) \Leftrightarrow \text{ou} \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k(2\pi)}{3} ; k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{k(2\pi)}{3} ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

• (E_3) $\tan 5x = -3$; $\tan 5x = \tan\frac{2\pi}{3}$

$(E_3) \Leftrightarrow 5x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k(2\pi)}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{2\pi}{15} + \frac{k(2\pi)}{10}$; $k \in \mathbb{Z}$

♦ Exercice 4.c page 181

(E_1) $\sin x = 0,2$; $x \approx 2,94$.

(E_2) $\cos x = -0,6$; $x \approx 2,21$.

(E_3) $\tan x = 0,7$; $x \approx 0,61$.

(E_4) $\tan x = -3,5$; $x \approx 4,99$.

♦ Exercice 4.d page 181

• (E_1) $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$

$\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}$

$\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \cos 0$

$(E_1) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k(2\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$

• (E_2) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$

$\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{1}{2}$

$\sin(\frac{\pi}{3} + x) = \sin\frac{\pi}{6}$

$(E_2) \Leftrightarrow \text{ou} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} = k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

♦ Exercice 4.e page 181

(E) $\cos x + \sin x = m$

$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = m\frac{\sqrt{2}}{2}$

(E) admet des solutions si $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

Exercices d'apprentissage

MESURE D'UN ANGLE ORIENTÉ

♦ Exercice 1 page 184

(1) $x = 153\pi = 152\pi + \pi = 76(2\pi) + \pi$; $\text{Mes}(\hat{x}) = \pi$

(2) $x = \frac{9\pi}{5} = \frac{10\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = 2\pi - \frac{\pi}{5}$; $\text{Mes}(\hat{x}) = -\frac{\pi}{5}$

(3) $x = \frac{33\pi}{2} = 8(2\pi) + \frac{\pi}{2}$; $\text{Mes}(\hat{x}) = \frac{\pi}{2}$

(4) $x = -27x = -13(2\pi) - \pi$; $\text{Mes}(\hat{x}) = -\pi$

(5) $x = -\frac{43\pi}{5}$; $\text{Mes}(\hat{x}) = -\frac{3\pi}{4}$

(6) $x = \frac{19x}{2}$; $\text{Mes}(\hat{x}) = -\frac{\pi}{2}$

(7) $x = \frac{27\pi}{4}$; $\text{Mes}(\hat{x}) = -\frac{3\pi}{4}$

(8) $x = \frac{139\pi}{7}$; $\text{Mes}(\hat{x}) = -\frac{\pi}{7}$

(9) $x = \frac{1047\pi}{2}$; $\text{Mes}(\hat{x}) = -\frac{\pi}{2}$

(10) $x = -\frac{58\pi}{3}$; $\text{Mes}(\hat{x}) = \frac{2\pi}{3}$

(11) $x = -\frac{469\pi}{5}$; $\text{Mes}(\hat{x}) = \frac{\pi}{5}$

(12) $x = -\frac{1005\pi}{2}$; $\text{Mes}(\hat{x}) = -\frac{\pi}{2}$

♦ **Exercice 2 page 184**

(1) $x = 28\pi = 14\,(2\pi)\,;\, y = -46\pi = -23(2\pi)$
$\mathrm{Mes}(\hat{x}) = \mathrm{Mes}(\hat{y}) = 0$

(2) $x = 39\pi = 20(2\pi) - \pi\,;\, y = 63\pi = 32(2\pi) - \pi$
$\mathrm{Mes}(\hat{x}) = \mathrm{Mes}(\hat{y}) = -\pi$

(3) $x = -15\,\pi = -8(2\pi) + \pi$
$y = -69\pi = -35(2\pi) + \pi$
$\mathrm{Mes}(\hat{x}) = \mathrm{Mes}(\hat{y}) = \pi$

(4) $x = -109\pi\,;\, y = 37\pi$
$\mathrm{Mes}(\hat{x}) = \mathrm{Mes}(\hat{y}) = \pi$

(5) $x = 1451\pi\,;\, y = 2509\pi$
$\mathrm{Mes}(\hat{x}) = \mathrm{Mes}(\hat{y}) = \pi$

(6) $x = -997\pi\,;\, y = 1079\pi$
$\mathrm{Mes}(\hat{x}) = \mathrm{Mes}(\hat{y}) = \pi$

(7) $x = \frac{\pi}{3}\,;\, y = -\frac{47\pi}{3} = \frac{-3 \times 8(2\pi) + \pi}{3}$
$\mathrm{Mes}(\hat{x}) = \mathrm{Mes}(\hat{y}) = \frac{\pi}{3}$

(8) $x = -\frac{\pi}{2}\,;\, y = \frac{143\pi}{2} = \frac{2 \times 36(2\pi) - \pi}{2}$
$\mathrm{Mes}(\hat{x}) = \mathrm{Mes}(\hat{y}) = -\frac{\pi}{2}$

(9) $x = -\frac{\pi}{6}\,;\, y = -\frac{109\pi}{6} = \frac{-6 \times 9(2\pi) - \pi}{6}$
$\mathrm{Mes}(\hat{x}) = \mathrm{Mes}(\hat{y}) = -\frac{\pi}{6}$

(10) $x = -\frac{3\pi}{2}\,;\, y = \frac{42\pi}{4} = \frac{4 \times 5(2\pi) + 2\pi}{4}$
$\mathrm{Mes}(\hat{x}) = \mathrm{Mes}(\hat{y}) = \frac{\pi}{2}$

♦ **Exercice 3 page 184**

On donne $x = \frac{25\pi}{3}$.
Mesures positives de x : $\frac{7\pi}{3}\,;\,\frac{13\pi}{3}$.
Mesures négatives de x : $-\frac{5\pi}{3}\,;\,-\frac{11\pi}{3}$.

♦ **Exercice 4 page 184**

$a = -\frac{16\pi}{3}$; $\mathrm{Mes}(\hat{a}) = \frac{2\pi}{3}$

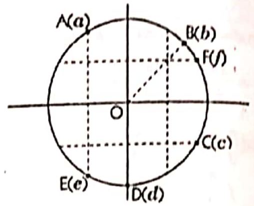
$b = \frac{17\pi}{4}$; $\mathrm{Mes}\,(\hat{b}) = \frac{\pi}{4}$

$c = -\frac{13\pi}{6}$; $\mathrm{Mes}(\hat{c}) = -\frac{\pi}{6}$

$d = \frac{11\pi}{2}$; $\mathrm{Mes}(\hat{d}) = -\frac{\pi}{2}$

$e = -\frac{14\pi}{3}$; $\mathrm{Mes}(\hat{e}) = -\frac{2\pi}{3}$

$f = \frac{49\pi}{6}$; $\mathrm{Mes}(\hat{f}) = \frac{\pi}{6}$



♦ **Exercice 5 page 184**

$x = -\frac{22\pi}{3}$; $\mathrm{Mes}(\hat{x}) = \frac{2\pi}{3}$;
longueur $\widehat{IM} = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$.

♦ **Exercice 6 page 184**

(1) $x = -\frac{5\pi}{6}\,;\, y = \frac{2\pi}{3}$
$x + y = -\frac{\pi}{6}$; $\mathrm{Mes}(x + y) = -\frac{\pi}{6}$

(2) $x = \frac{68\pi}{3}\,;\, y = -\frac{41\pi}{4}$
$x + y = \frac{149\pi}{12}$; $\mathrm{Mes}(x + y) = \frac{5\pi}{12}$

(3) $x = \frac{58\pi}{3}\,;\, y = -25\pi$
$x + y = -\frac{17\pi}{3}$; $\mathrm{Mes}(x + y) = \frac{\pi}{3}$

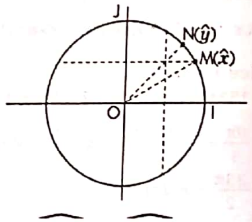
(4) $x = -\frac{29\pi}{4}\,;\, y = \frac{34\pi}{3}$
$x + y = \frac{49\pi}{12}$; $\mathrm{Mes}(x + y) = \frac{\pi}{12}$

(5) $x = -\frac{7\pi}{2}\,;\, y = \frac{48\pi}{3}$
$x + y = -\frac{117\pi}{6}$; $\mathrm{Mes}(x + y) = \frac{\pi}{2}$

(6) $x = \frac{213\pi}{6}\,;\, y = \frac{904\pi}{3}$
$x + y = \frac{2021}{6}$; $\mathrm{Mes}(x + y) = \frac{5\pi}{6}$

♦ **Exercice 7 page 184**

$x = \frac{373\pi}{6}\,;\, y = -\frac{207\,\pi}{4}$; $\mathrm{Mes}(\hat{x}) = \frac{\pi}{6}$; $\mathrm{Mes}(\hat{y}) = \frac{\pi}{4}$



• $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}}) - (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$

$\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$

• $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI}}) = -(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$

$\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI}}) = -\frac{\pi}{6}$

• $(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}}) - (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}})$

$\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

• $(\widehat{\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) - (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}})$

$\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM}}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3}$

FONCTIONS SINUS, COSINUS, TANGENTE

♦ **Exercice 8 page 184**

(1) $x = \frac{25\pi}{3}$; $\mathrm{Mes}(\hat{x}) = \frac{\pi}{3}$
$\cos x = \frac{1}{2}$; $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan x = \sqrt{3}$

(2) $x = -\frac{97\pi}{3}$; $\mathrm{Mes}(\hat{x}) = -\frac{\pi}{3}$
$\cos x = \frac{1}{2}$; $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan x = -\sqrt{3}$

(3) $x = \frac{5\pi}{6} = \mathrm{Mes}(\hat{x})$
$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(4) $x = -\frac{11\pi}{4}$; $\mathrm{Mes}(\hat{x}) = -\frac{3\pi}{4}$
$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan x = 1$

(5) $x = \frac{109\pi}{3}$; $\mathrm{Mes}(\hat{x}) = \frac{\pi}{3}$
$\cos x = \frac{1}{2}$; $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan x = \sqrt{3}$

(6) $x = \frac{22\pi}{3}$; $\mathrm{Mes}(\hat{x}) = -\frac{2\pi}{3}$
$\cos x = -\frac{1}{2}$; $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan x = \sqrt{3}$

♦ **Exercice 9 page 184**

(1) $A = \sin(\pi - x) - \cos(\frac{\pi}{2} + x) = 2\sin x$

(2) $B = \cos(x + \frac{21\pi}{2}) + \cos(x - \frac{19\pi}{2})$
$= 2\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -2\sin x$

♦ **Exercice 10 page 184**

$A = \sin(\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \sin(4\pi - x) + \cos(8\pi + x)$
$= \sin x - \cos x - \sin x + \cos x = 0$

♦ **Exercice 11 page 184**

(1) $A = \sin(x + \pi) + \cos(x - \pi) - \sin(x - 2\pi) + \cos(x + 5\pi)$
$= -2(\cos x + \sin x)$

(2) $A = \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{7\pi}{2} - x) - \sin(x + \frac{5\pi}{2})$
$= 0$

(3) $A = \tan(\frac{\pi}{2} - x) + \frac{1}{\tan(x + \frac{\pi}{2})} - \tan(\frac{7\pi}{2} + x) - \frac{1}{\tan(\frac{7\pi}{2} - x)}$
$= \frac{2}{\tan x} - 2\tan x$

(4) $A = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + \cos(-x) = -\cos x$

(5) $A = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x) = -\sin x$

(6) $A = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + 2\sin(x + \frac{3\pi}{2}) + \sin(x + \frac{5\pi}{2})$
$= \cos x + 2\cos x - \cos x = 2\cos x$

(7) $A = \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{3\pi}{2} - x) + \cos(x - \frac{\pi}{2}) + \cos(x - \frac{3\pi}{2})$
$= \cos x - \sin x$

♦ **Exercice 13 page 185**

(1) $A = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$
$= 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2$

(2) $A = \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x$
$= \cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x - 1) = 0$

♦ **Exercice 14 page 185**

$\sin x = -\frac{3}{5}$; $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{16}{25}$

On obtient :

$\sin x = -\frac{3}{5}$; $\cos x = \frac{4}{5}$; $\tan x = -\frac{3}{4}$
ou
$\sin x = -\frac{3}{5}$; $\cos x = -\frac{4}{5}$; $\tan x = \frac{3}{4}$

♦ **Exercice 15 page 185**

$\cos x = \frac{1}{3}$; $\sin^2 x = \frac{8}{9}$

On obtient :

$\cos x = \frac{1}{3}$; $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\tan x = 2\sqrt{2}$
ou
$\cos x = \frac{1}{3}$; $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\tan x = -2\sqrt{2}$

♦ **Exercice 16 page 185**

1. $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

2. Calcul de $\cos x$ et $\sin x$

(1) $\tan x = \frac{1}{3}$; $x \in [0\,;\frac{\pi}{2}[$; $\cos^2 x = \frac{9}{10}$

On obtient : $\cos x = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\sin x = \frac{1}{\sqrt{10}}$

(2) $\tan x = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$; $x \in]-\frac{\pi}{2}\,; 0]$; $\cos^2 x = \frac{2}{4 + \sqrt{3}}$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 + \sqrt{3}}}$; $\sin x = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2\sqrt{4 + \sqrt{3}}}$

♦ **Exercice 19 page 185**

(1) On construit la représentation graphique ($\mathscr{C}_{\sin}$) de la fonction sinus point par point.
Les autres représentations graphiques sont obtenues à partir de ($\mathscr{C}_{\sin}$) à l'aide de symétries ou de translations (voir chapitre 1).

FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

♦ **Exercice 21 page 185**

$x \in]0\,;\frac{\pi}{2}[\,;\ \cos x = \frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{\sqrt3}{2}$

$\cos 2x = \cos\frac{\pi}{6}\,;\ x \in]0\,;\frac{\pi}{2}[\,;$ d'où : $x = \frac{\pi}{12}$

♦ **Exercice 22 page 185**

• $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2+\sqrt2}{4}$

$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$

• $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2-\sqrt2}{4}$

$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$

♦ **Exercice 23 page 185**

(1) $A = \cos(2x+\frac{\pi}{2}) \times \cos(-x+\frac{\pi}{4})$

$= \frac12[\cos(x+\frac{3\pi}{4}) + \cos(3x+\frac{\pi}{4})]$

(2) $A = \sin(-x+\frac{\pi}{9}) \times \sin(2x-\frac{\pi}{4})$

$= \frac12[\cos(-3x+\frac{13\pi}{36}) - \cos(x-\frac{5\pi}{36})]$

(3) $A = \sin(-2x+\frac{\pi}{4}) \times \cos(2x+\frac{3\pi}{4})$

$= -\frac12 \sin(4x+\frac{\pi}{2})$

♦ **Exercice 26 page 185**

$A + B = 4\,;\ A - B = 0$. D'où $A = 2\,;\ B = 2$

♦ **Exercice 28 page 185**

• (1) $\begin{cases} \tan x = 2 \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x = 2\cos x \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x = 2\cos x \\ 5\cos^2 x = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \cos^2 x = \frac15 \\ \sin^2 x = \frac45 \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt5}{5}$ et $\sin x = \frac{2\sqrt5}{5}$

• (2) $\begin{cases} \tan x = 0{,}8 \\ -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow \cos x = -\frac{5\sqrt{41}}{41}$ et $\sin x = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$

• (3) $\begin{cases} \tan x = -\frac13 \\ \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

(3) $\Leftrightarrow \cos x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$ et $\sin x = \frac{\sqrt{10}}{10}$

• (4) $\begin{cases} \tan x = -3 \\ -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$

(4) $\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{10}}{10}$ et $\sin x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

♦ **Exercice 29 page 185**

(1) $\cos x = \frac12\,;\ \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = -\frac{\pi}{3} + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$

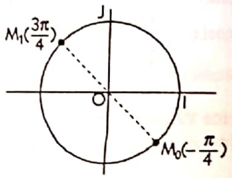
(2) $\sin x = -\frac{\sqrt2}{2}\,;\ \sin x = \sin(-\frac{\pi}{4})$

$x = -\frac{\pi}{4} + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = \frac{5\pi}{4} + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$

(3) $\cos x = -\sin x\,;\ \cos x = \cos(x+\frac{\pi}{2})$

$x = x + \frac{\pi}{2} + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = -x - \frac{\pi}{2} + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$

(3) $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k(2\pi)}{2}\,;\ k \in \mathbb{Z}$

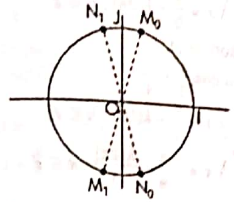


(4) $2\sin x = \sqrt2\,;\ \sin x = \sin\frac{\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4} + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = \frac{3\pi}{4} + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$

(5) $\cos(2x) = -\frac{\sqrt3}{2}\,;\ \cos(2x) = \cos\frac{5\pi}{6}$

$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k(2\pi)}{2}\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = -\frac{5\pi}{12} + \frac{k(2\pi)}{2}\,;\ k \in \mathbb{Z}$



(6) $\sin(3x) = \frac12\,;\ \sin 3x = \sin\frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{18} + \frac{k(2\pi)}{3}\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k(2\pi)}{3}\,;\ k \in \mathbb{Z}$

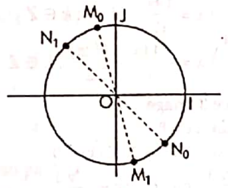
♦ **Exercice 30 page 186**

(1) $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt3}{2}$

$x = \frac{7\pi}{6} + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = -\frac{\pi}{2} + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$

(2) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{2}$

$x = \frac{7\pi}{12} + \frac{k(2\pi)}{2}\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k(2\pi)}{2}\,;\ k \in \mathbb{Z}$

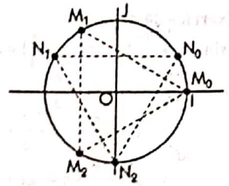


(3) $2\sin(4x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt2$

$x = -\frac{\pi}{48} + \frac{k(2\pi)}{4}\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k(2\pi)}{4}\,;\ k \in \mathbb{Z}$

(4) $\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt2}{2}$

$x = \frac{k(2\pi)}{3}\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k(2\pi)}{3}\,;\ k \in \mathbb{Z}$



♦ **Exercice 31 page 186**

$\cos(3x + \pi) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = 0$

$-\cos(3x) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = 0$

$\cos(3x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$

$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k(2\pi)}{2}\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k(2\pi)}{4}\,;\ k \in \mathbb{Z}$

♦ **Exercice 32 page 186**

(E) $|\sin 3x| = |\sin 2x|$

(E) $\Leftrightarrow$ $\sin 3x = \sin 2x$ (1)
ou
$\sin 3x = -\sin 2x$ (2)

(1) $\sin 3x = \sin 2x$

$3x = 2x + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$3x = \pi - 2x + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = \frac{\pi}{5} + \frac{k(2\pi)}{5}\,;\ k \in \mathbb{Z}$

(2) $\sin 3x = -\sin 2x$

$\sin 3x = \sin(-2x)$

$x = \frac{k(2\pi)}{5}\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = \pi + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$

♦ **Exercice 33 page 186**

(E) $\cos x + \sin 2x = 0$

$\cos x - \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = 0$

(E) $\Leftrightarrow \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

$2x + \frac{\pi}{2} = x + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$2x + \frac{\pi}{2} = -x + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{2} + k(2\pi)\,;\ k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k(2\pi)}{3}\,;\ k \in \mathbb{Z}$

AUTRE MÉTHODE

(E) $\Leftrightarrow \cos x\,(1 + 2\sin x) = 0$

♦ **Exercice 34 page 186**

(1) $\sin(-x + \frac{3\pi}{2}) - \sin(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$

$\sin(-x + \frac{3\pi}{2}) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

$$\left\{\begin{array}{l} -x + \frac{3\pi}{2} = 2x + \frac{\pi}{3} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ -x + \frac{3\pi}{2} = \pi - (2x + \frac{\pi}{3}) + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{18} + \frac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

(2) $\sin(5x - \frac{5\pi}{6}) + \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$

$\sin(5x - \frac{5\pi}{6}) = \sin(-2x - \frac{\pi}{4})$

$$\left\{\begin{array}{l} 5x - \frac{5\pi}{6} = -2x - \frac{\pi}{4} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 5x - \frac{3\pi}{6} = \pi + 2x + \frac{\pi}{4} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k(2\pi)}{7}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{12} + \frac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

♦ **Exercice 35 page 186**

(1) $\cos5x = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

$\cos5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (2x + \frac{\pi}{3})\right)$

$\cos5x = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{42} + \frac{k(2\pi)}{7}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

(2) $\cos(x - \frac{5\pi}{4}) = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$

$\cos(x - \frac{5\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2})$

$\cos(x - \frac{5\pi}{4}) = \cos(x + \frac{2\pi}{3})$

$$x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k(2\pi)}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

♦ **Exercice 36 page 186**

(1) $\sin^2(x - \frac{\pi}{3}) - \cos^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0$

$\left[\sin(x - \frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right] \times \left[\sin(x - \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right] = 0$

$$\left\{\begin{array}{ll} \sin(x - \frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0 & (1') \\ \text{ou} & \\ \sin(x - \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0 & (1'') \end{array}\right.$$

• Résolution de (1')

(1') $\cos(\frac{5\pi}{6} - x) = \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{18} + \frac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{6} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

• Résolution de (1'')

(1'') $\cos x = \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

(2) $\cos^2(2x - \frac{\pi}{3}) - \cos^2(x + \frac{\pi}{4}) = 0$

$\left[\cos(2x - \frac{\pi}{3}) - \cos(x + \frac{\pi}{4})\right] \times \left[\cos(2x - \frac{\pi}{3}) + \cos(x + \frac{\pi}{4})\right] = 0$

$$\left\{\begin{array}{ll} \cos(2x - \frac{\pi}{3}) - \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0 & (2') \\ \text{ou} & \\ \cos(2x - \frac{\pi}{3}) + \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0 & (2'') \end{array}\right.$$

• Résolution de (2')

(2') $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{12} + \frac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{36} - \frac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

• Résolution de (2'')

(2'') $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos(x + \frac{5\pi}{4})$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{19\pi}{12} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{11\pi}{36} + \frac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

♦ **Exercice 37 page 186**

(1) $3 - 4\cos^2 2x = 0$

$(\sqrt{3} - 2\cos2x)(\sqrt{3} + 2\cos2x) = 0$

$\cos2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k(2\pi)}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k(2\pi)}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k(2\pi)}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{5\pi}{12} + \frac{k(2\pi)}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

(2) $\sin x + 2\cos3x \times \sin x = 0$

$\sin x(1 + 2\cos3x) = 0$

$\sin x = 0$ ou $\cos3x = -\frac{1}{2}$

$x = k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \pi + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

♦ **Exercice 38 page 186**

a) Égalités à vérifier

b) Résolution d'équation

(E) $\cos x + \sin x = 1$; $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

(F) $\cos x - \sin x = 1$; $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = -\pi + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

♦ **Exercice 39 page 186**

(1) $\tan x = -\sqrt{3}$; $\tan x = \tan\frac{2\pi}{3}$

$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

(2) $\tan x = 1$; $\tan x = \tan\frac{\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

(3) $\tan x = -1$; $\tan x = \tan\frac{3\pi}{4}$

$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

(4) $\tan x = 0$; $\tan x = \tan 0$

$x = k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

(5) $\tan 2x = \sqrt{3}$; $\tan 2x = \tan\frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{9}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

(6) $\tan 3x = -1$; $\tan 3x = \tan\frac{2\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

♦ **Exercice 40 page 186**

(1) $\sin x = 0{,}8$; $x \approx 0{,}927$

(2) $\cos x = -0{,}4$; $x \approx -1{,}15$

(4) $\sin x = -0{,}3$; $x \approx -0{,}30$

(5) $\cos x = 0{,}9$; $x \approx 5{,}83$

(6) $\tan x = -0{,}7$; $x \approx 2{,}53$

♦ **Exercice 41 page 186**

(1) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$

$\cos x - \tan\frac{\pi}{4}\sin x = \sqrt{2}$

$\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \cos\frac{\pi}{4} \times \sqrt{2}$

$\cos(\frac{\pi}{4} + x) = 1$

$x = -\frac{\pi}{4} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

(2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = -1$

$\tan\frac{\pi}{3}\sin x + \cos x = -1$

$\cos(\frac{\pi}{3} - x) = \cos\frac{2\pi}{3}$

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

(3) $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = \sqrt{3}$

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

$\sin x + \tan\frac{\pi}{3}\cos x = 1$

$\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{1}{2}$

$\sin(\frac{\pi}{3} + x) = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

(4) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{2}$

$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{4})$

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\frac{7\pi}{12} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{11\pi}{12} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Exercices d'approfondissement

♦ **Exercice 42 page 186**

(E) $3\cos5x - 4\sin5x = 3$

On a : $\cos5x = 1 + \frac{4}{3}\sin5x$

$\cos^2 5x + \sin^2 5x = 1$

donc : $\sin5x\,(\frac{25}{3}\sin5x + 8) = 0$

$$\text{(E)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin5x = 0 \\ \text{ou} \\ \sin5x = -0{,}96 \end{array}\right.$$

♦ **Exercice 43 page 186**

(E) $-6\sin^2 5x - 4\sin5x = 2$

$3\sin^2 5x + 2\sin5x + 1 = 0$

On pose : $u = \sin5x$

$3u^2 + 2u + 1 = 0$

$\Delta = -8$; (E) n'a pas de solution.

♦ **Exercice 44 page 186**

(1) $\sin^2 3x - \sin^2 x = 0$

$(\sin3x - \sin x)(\sin3x + \sin x) = 0$

(1') $\sin 3x = \sin x$

$$\text{ou}\begin{cases} x = \dfrac{k(2\pi)}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k(2\pi)}{4}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(1'') $\sin 3x = \sin(-x)$

$$\text{ou}\begin{cases} x = \dfrac{k(2\pi)}{4}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k(2\pi)}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(2) $\cos 4x + \sin^2 x - 2 = 0$

$(2\cos^2 2x - 1) + \dfrac{1 - \cos 2x}{2} - 2 = 0$

$4\cos^2 2x - c\cos 2x - 5 = 0$

On pose : $\cos 2x = u$.

$4u^2 - u - 5 = 0$

$(u + 1)(4u - 5) = 0$

$u = -1$ ou $u = \dfrac{5}{4}$

(2') $\cos 2x = -1$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{k(2\pi)}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

(2'') $\cos 2x = \dfrac{5}{4}$

(2'') n'a pas de solution

(3) $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 1$

$\sin x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$

$\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x = \sin x\cos x$

$\sin 2x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

$\sin x\cos x = 0$

L'équation (3) n'a pas de solution.

(4) $\tan x - \dfrac{3}{\tan x} = 2$

$\tan x \neq 0$

$\tan^2 x - 2\tan x - 3 = 0$

$(\tan x + 1)(\tan x - 3) = 0$

(4') $\tan x = -1$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

(4'') $\tan x = 3$

♦ Exercice 45 page 186

(E) $-4\cos^2(\frac{3x}{2}) + 4\sin^2(\frac{3x}{2}) - 2 = 0$

$\sin^2(\frac{3x}{2}) = \dfrac{3}{4}$

$$\text{ou}\begin{cases} \sin(\frac{3x}{2}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{(E')} \\ \sin(\frac{3x}{2}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{(E'')} \end{cases}$$

$x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \dfrac{4\pi}{9} + \dfrac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = -\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \dfrac{8\pi}{9} + \dfrac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

♦ Exercice 46 page 186

(1) $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$

On pose $X = \cos x\ ;\ -1 \leq X \leq 1$

$X^2 - X - 2 = 0$

$(X + 1)(X - 2) = 0$

(1) $\Leftrightarrow \cos x = -1$

$$x = \pi + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

(2) $2\cos^2 x - (2 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} = 0$

Posons : $X = \cos x\ ;\ -1 \leq X \leq 1$

$2X^2 - (2 + \sqrt{2})X + \sqrt{2} = 0$

$(X - 1)(2X - \sqrt{2}) = 0$

$$(2) \Leftrightarrow \text{ou}\begin{cases} \cos x = 1 & \text{(2')} \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{(2'')} \end{cases}$$

(2') $\Leftrightarrow x = k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$$(2'') \Leftrightarrow \text{ou}\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(3) $2\sin^2 3x - \sqrt{3}\sin 3x = 0$

$\sin 3x(2\sin 3x - \sqrt{3}) = 0$

$$(3) \Leftrightarrow \text{ou}\begin{cases} \sin 3x = 0 & \text{(3')} \\ \sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{(3'')} \end{cases}$$

$$(3') \Leftrightarrow \text{ou}\begin{cases} x = \dfrac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(3'') \Leftrightarrow \text{ou}\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{k(2\pi)}{3}\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(4) $2\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$

$\sin^2 x + (\sin^2 x + \cos^2 x) - 1 = 0$

$\sin x = 0$

$$(4) \Leftrightarrow \text{ou}\begin{cases} x = k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

♦ Exercice 47 page 186

- $\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$
- (E) $\sin 3x = 2\sin x$

$\sin x\,(1 - 4\sin^2 x) = 0$

$$(E) \Leftrightarrow \text{ou}\begin{cases} \sin x = 0 & (E_1) \\ \sin x = \dfrac{1}{2} & (E_2) \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} & (E_3) \end{cases}$$

♦ Exercice 48 page 186

$A(x) = \cos^2 x - \cos^4 x$

1. Factorisation de $A(x)$

$A(x) = \cos^2 x \times \sin^2 x$

2. Résolution d'équation

(E) $A(x) = 0$

$$(E) \Leftrightarrow \text{ou}\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

3. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus S_{(E)}$

$f(x) = \dfrac{\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = 1$

♦ Exercice 49 page 186

(E) $8x^3 - 4\sqrt{3}x^2 - 2x + \sqrt{3} = 0$

1. On vérifie que $\dfrac{1}{2}$ est solution de (E)

2. Résolution de (E)

$(x - \frac{1}{2})[8x^2 + (4 - 4\sqrt{3})x - 2\sqrt{3}] = 0$

$S_{(E)} = \{\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

3. Résolution de (F)

(F) $8\sin^3 x - 4\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x + \sqrt{3} = 0$

$(\sin x - \frac{1}{2})(\sin x + \frac{1}{2})(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$

$$(F) \Leftrightarrow \text{ou}\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

♦ Exercice 50 page 186

(E) $2\sin x + \dfrac{2}{\sin x} + \dfrac{3}{\sin^2 x} - 7 = 0$

$\sin x \neq 0$

$2\sin^3 x - 7\sin^2 x + 2\sin x + 3 = 0$

Posons : $X = \sin x\ ;\ -1 \leq X \leq 1$

$2X^3 - 7X^2 + 2X + 3 = 0$

$(X - 1)(2X^2 - 5X - 3) = 0$

$(X - 1)(X - 3)(X + \frac{1}{2}) = 0$

$(\sin x - 1)(\sin x - 3)(\sin x + \frac{1}{2}) = 0$

$$(E) \Leftrightarrow \text{ou}\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

♦ Exercice 51 page 186

(E) $\cos 4x - \sqrt{2}\cos 2x = 1$

$2\cos^2 2x - \sqrt{2}\cos 2x - 2 = 0$

Posons : $X = \cos 2x\ ;\ -1 \leq X \leq 1$.

$2X^2 - \sqrt{2}X - 2 = 0$

$(X - \sqrt{2})(X + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$

$$(E) \Leftrightarrow \text{ou}\begin{cases} \cos 2x = \sqrt{2}\ \text{(impossible)} \\ \cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

♦ Exercice 52 page 186

1. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$

2. Résolution de l'équation

(E) $4x^2 + 2x(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \sqrt{6} = 0$

$\Delta = 4(5 + 2\sqrt{6}) = 4(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

$S_{(E)} = \{-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\}$

3. Résolution de l'équation

(F) $-4\sin^2 y + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\cos y - \sqrt{6} + 4 = 0$

$4\cos^2 y + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\cos y - \sqrt{6} = 0$

On pose : $x = \cos y$: $-1 \leq x \leq 1$.

On obtient :

$$(F) \Leftrightarrow \text{ou}\begin{cases} \cos y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

♦ Exercice 53 page 186

$P(x) = 4x^3 - 3x - 1$

1. On vérifie que $P(1) = 0$

$P(x) = (x - 1)(2x + 1)^2$

Résolution de l'équation (E) $P(x) = 0$

$S_{(E)} = \{1\ ;\ -\frac{1}{2}\}$

2. Résolution de l'équation

(F) $4\cos^3 x - 3\cos x - 1 = 0$

Posons : $X = \cos x\ ;\ -1 \leq X \leq 1$.

On obtient :

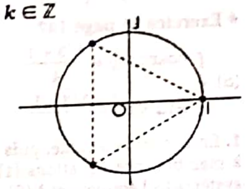
$4X^2 - 3X - 1 = 0$

$\cos x = 1$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

$x = k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \dfrac{2\pi}{3} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$x = -\dfrac{2\pi}{3} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z}$



♦ Exercice 54 page 187

1. On vérifie que :
$\sin 5x = \sin(4x + x) = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$

2. On vérifie que $\frac{\pi}{5}$ est solution de : $\sin 5x = 0$

(E) $16\sin 5x - 20\sin 3x + 5\sin x = 0$

3. Résolution de l'équation (E)

(E) $\sin 5x = 0$

$$x = \frac{k(2\pi)}{5} ; k \in Z \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{5} + \frac{k(2\pi)}{5} ; k \in Z$$

4. Résolution de l'équation (F)

(F) $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$

$x(16x^4 - 20x^2 + 5) = 0$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 16x^4 - 20x^2 + 5 = 0 \ (F')$$

En posant $X = x^2$; $X \geq 0$, l'équation (F') donne :

$16X^2 - 20X + 5 = 0$

Cette équation a pour solutions :

$$\frac{5 + \sqrt{5}}{8} \text{ et } \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

On obtient les solutions de (F)

$$0 ; \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} ; -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} ;$$

$$\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} ; -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}.$$

5. En posant $x = \sin Y$, $-1 \leq x \leq 1$;
l'équation (F) donne l'équation :
(E) $16\sin^5 Y - 20\sin^3 Y + 5Y = 0$.

Or $\frac{\pi}{5}$ est une solution de (E),
donc $\sin\frac{\pi}{5}$ est une solution de (F).

On sait par ailleurs que la fonction sinus est strictement croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ donc :

$$0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad 0 < \sin\frac{\pi}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On vérifie que $5 - \sqrt{5} < 4$

donc $0 < \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

par suite, $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$.

♦ Exercice 55 page 187

$$(S) \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3} + 1}{4} & (1) \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3} - 1}{4} & (2) \end{cases}$$

1. En faisant la somme, puis la différence membre à membre, des équations (1) et (2), on obtient le système (S') équivalant à (S).

$$(S') \begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(S') \begin{cases} \cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2} & (3) \\ \cos(x + y) = \frac{1}{2} & (4) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S) est donc l'ensemble des solutions des systèmes :

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} + k(2\pi) \\ x + y = \frac{\pi}{3} + k(2\pi) \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = -\frac{\pi}{6} + k(2\pi) \\ x + y = \frac{\pi}{3} + k(2\pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} + k(2\pi) \\ x + y = -\frac{\pi}{3} + k(2\pi) \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = -\frac{\pi}{6} + k(2\pi) \\ x + y = -\frac{\pi}{3} + k(2\pi) \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

♦ Exercice 56 page 187

$$(S) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6} & (1) \\ \sin x \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{4} & (2) \end{cases}$$

1. a)

$$\begin{array}{l} \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \hline \cos(x + y) - \cos(x - y) = -2\sin x \sin y \end{array}$$

b) (1) donne $\cos(x + y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

En tenant compte des résultats précédents, (2) donne : $\cos(x - y) = \cos(x + y) + 2\sin x \sin y$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(S) équivaut donc à

$$(S') \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6} \\ \cos(x - y) = 0 \end{cases}$$

2. L'ensemble des solutions de (S) est donc l'ensemble des solutions des systèmes

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6} \\ x - y = \frac{\pi}{2} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6} \\ x - y = -\frac{\pi}{2} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

♦ Exercice 57 page 187

1. (Voir méthode de l'exercice 56)
$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x \cos y$

$$(S) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{4} & (1) \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4} & (2) \end{cases}$$

(1) donne $\cos(x - y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) donne, en tenant compte des résultats précédents :

$\cos(x + y) = 2\cos x \cos y \ - \cos(x - y)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

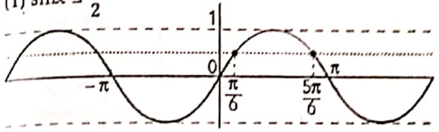
(S) équivaut donc à

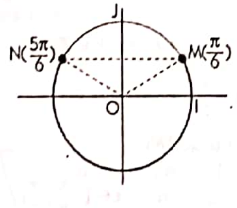
$$(S') \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{4} \\ \cos(x + y) = 0 \end{cases}$$

2. Résolution de (S') : *voir exercice 56.*

♦ Exercice 58 page 187

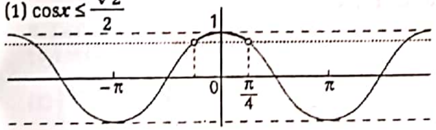
(1) $\sin x \leq \frac{1}{2}$

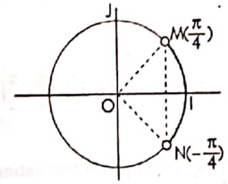




♦ Exercice 59 page 187

(1) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$





♦ Exercice 60 page 187

1. • Résolution de l'équation

(E) $2y^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})y + \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$

$\Delta = 5 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

$S_{(E)} = \{\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

• Résolution de l'inéquation

(I) $2y^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})y + \frac{\sqrt{6}}{2} \leq 0$

$S_{(I)} = [\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}]$

2. • Résolution de l'équation

(1) $-2\cos^2 x - (\sqrt{3} + \sqrt{2})\sin x + \frac{\sqrt{6}}{2} + 2 = 0$

(1) devient, en tenant compte de l'égalité $\cos^2 x = 1 - \sin 2x$:

$2\sin^2 x - (\sqrt{3} + \sqrt{2})\sin x + \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$

En posant $y = \sin x$; $-1 \leq y \leq 1$, on obtient (E), d'où :

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d'où : $x = \frac{\pi}{4} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{3\pi}{4} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{3} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{2\pi}{3} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z}$

• Résolution de l'inéquation

(2) $-2\cos^2 x - (\sqrt{3} + \sqrt{2})\sin x + \frac{\sqrt{6}}{2} + 2 \leq 0$

$2\sin x - (\sqrt{3} + \sqrt{2})\sin x + \frac{\sqrt{6}}{2} \leq 0$

(2) $\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{4} \leq \sin x \leq \sin\frac{\pi}{3}$

On sait que $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$; sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, la fonction sinus est strictement croissante, donc :

(2) $\Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4} + k(2\pi) ; \frac{\pi}{3} + k(2\pi)\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$

♦ Exercice 61 page 187

1. On vérifie que $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$

• Résolution de l'équation

(E) $2x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$\Delta = 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$

$S_{(E)} = \{-\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\}$

• Résolution de l'inéquation

(I) $2x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

$S_{(I)} =]-\infty ; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty[$

2. Résolution de l'équation

(1) $2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

En posant $X = \cos x$; $-1 \leq X \leq 1$, on obtient (E) d'où :

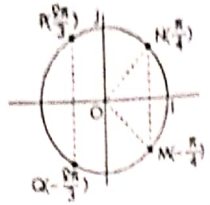
$\cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d'où : $x = \frac{2\pi}{3} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{2\pi}{3} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{4} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{4} + k(2\pi) ; k \in \mathbb{Z}$

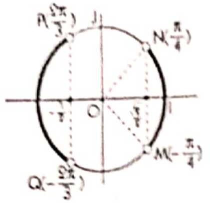


3. Résolution dans $[0 ; 2\pi]$ de l'inéquation

(2) $2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

(2) $\Leftrightarrow \cos x < -\frac{1}{2}$ ou $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Le graphique donne l'ensemble des solutions de (2) appartenant à $[0 ; 2\pi]$:



$[0 ; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3}[\cup]\frac{7\pi}{4} ; 2\pi]$.

♦ **Exercice 67 page 188**

$A + B + C = \pi$

$\cos(\frac{B + C}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}) = \sin\frac{A}{2}$

$\tan(\frac{B + C}{2}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2})} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$

♦ **Exercice 69 page 188**

1. On vérifie que $\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

On donne :

x et y éléments de $[0 ; \frac{\pi}{2}]$

$\sin x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On obtient :

$\cos x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; $\sin y = \frac{1}{2}$; $y = \frac{\pi}{6}$

$\cos(x + y) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$\sin(x + y) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$\cos(x - y) = \sin(x - y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

x et y sont donc les solutions dans $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ du système :

$x - y = \frac{\pi}{4}$ et $y = \frac{\pi}{6}$; d'où : $x = \frac{5\pi}{12}$.

♦ **Exercice 70 page 188**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x + \frac{\pi}{3})$

1. Périodicité de f

On vérifie que, pour tout x, $f(x + 2\pi) = f(x)$.

f est donc périodique, de période 2π.

2. Construction de $(\mathscr{C}_g)$ à partir de $(\mathscr{C}_f)$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x + \frac{\pi}{3})$

$(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{3}\vec{OI}$.

3. Résolution de l'équation

(E) $f(x) = \frac{1}{2}$

- graphiquement
- algébriquement

(E) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$x = -\frac{\pi}{6} + k(2\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = \frac{\pi}{2} + k(2\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$

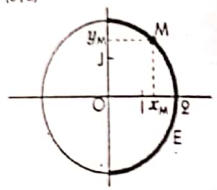
♦ **Exercice 71 page 188**

1. $M(x_M ; y_M)$ étant un point de E,

$x_M = 2\cos\alpha$ et $y_M = 2\sin\alpha$; $\alpha \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$

d'où : $x_M^2 + y_M^2 = 4$

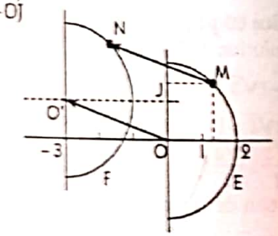
donc : $E \subset \mathscr{C}_{(O ; 2)}$



2. $N(2\cos\alpha - 3 ; 2\sin\alpha + 1)$; $\alpha \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$

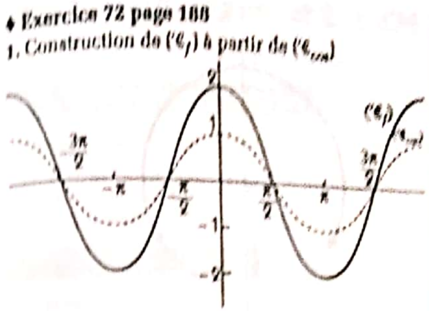
$\begin{cases} x_N = x_M - 3 \\ y_N = y_M + 1 \end{cases}$

N est donc l'image de M par la translation de vecteur $-3\vec{OI} + \vec{OJ}$



♦ **Exercice 72 page 188**

1. Construction de $(\mathscr{C}_f)$ à partir de $(\mathscr{C}_{\cos})$



2. $g(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{4})$; $D_g = \mathbb{R}$

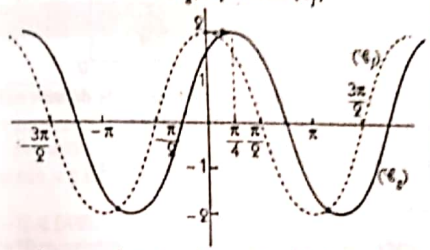
a) Pour tout x, $g(x + 2\pi) = g(x)$

g est donc une fonction périodique, de période 2π.

b) $g(x) = f(x - \frac{\pi}{4})$

$(\mathscr{C}_g)$ est donc l'image $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\frac{\pi}{4}\vec{OI}$.

c) Construction de $(\mathscr{C}_g)$ à partir de $(\mathscr{C}_f)$



3. Les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont solutions du système :

$(\Sigma)\begin{cases} g(x) = f(x) \\ y = f(x) \end{cases}$

$\begin{cases} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos x \\ y = f(x) \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \\ y = \cos(\frac{\pi}{8} + k\pi) ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

or $\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$

$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

$\cos(\frac{\pi}{8} + \pi) = -\cos\frac{\pi}{8}$

Les points d'intersection de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ ont donc pour coordonnées x et y telles que :

$x = \frac{\pi}{8} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$y = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ si k est pair

$y = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ si k est impair

4. Éléments de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$

On vérifie que $(\mathscr{C}_f)$ admet :

– des axes de symétrie, les droites

$\Delta_k : y = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

– des centres de symétrie, les points

$\Omega_k(\frac{\pi}{2} + k\pi ; 0)$; $k \in \mathbb{Z}$

$(\mathscr{C}_g)$ étant l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\frac{\pi}{4}\vec{OI}$, on en déduit que $(\mathscr{C}_g)$ admet :

– des axes de symétrie, les droites

$\Delta'_k : y = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

– des centres de symétrie, les points

$\Omega'_k(\frac{3\pi}{4} + k\pi ; 0)$; $k \in \mathbb{Z}$

♦ **Exercice 73 page 188**

$f(x) = \frac{1}{2\sin 2x + 1}$

1. Ensemble de définition de f

$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{12} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{7\pi}{12} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2. • Parité de f

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$ et $f(-\frac{\pi}{4}) = -1$

f n'est ni paire, ni impaire

• Périodicité de f

$f(x + \pi) = \frac{1}{2\sin 2(x + \pi) + 1}$

$= \frac{1}{2\sin(2x + 2\pi) + 1}$

$= \frac{1}{2\sin 2x + 1} = f(x)$

f est périodique de période π.

3. Les antécédents de $\frac{1}{2}$ par f sont les solutions de l'équation :

$f(x) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2\sin 2x + 1} = \frac{1}{2}$

$\sin 2x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{12} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
ou
$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

4. L'image réciproque de $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$f(x) \geq 0$$

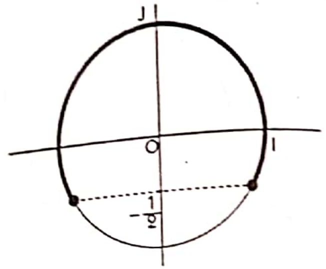
$$\frac{1}{2\sin 2x + 1} \geq 0$$

$$\sin 2x \geq -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6} + k(2\pi) \leq 2x \leq \frac{7\pi}{6} + k(2\pi)\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

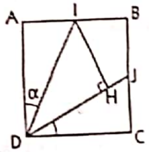
L'image réciproque de $\mathbb{R}^+$ est la réunion des intervalles :

$$[-\frac{\pi}{12} + k\pi\ ;\ \frac{7\pi}{12} + k\pi]\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$



Problèmes

♦ Exercice 74 page 188



• $\sin\widehat{ADI} = \frac{AI}{DI}$

$\cos\widehat{ADI} = \frac{AD}{DI} = \frac{2AI}{DI} = 2\sin\widehat{ADI}$

• Les triangles ADI et CDJ sont supperposables

$\text{mes}\widehat{ADI} = \text{mes}\widehat{CDJ} = \alpha$

$\text{mes}\widehat{IDJ} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$

$\sin\widehat{IDJ} = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$= 1 - 2\left(\frac{AI}{DI}\right)^2$

$\sin\widehat{IDJ} = \frac{3}{5}$

• On donne $AB = 2a\sqrt{5}$

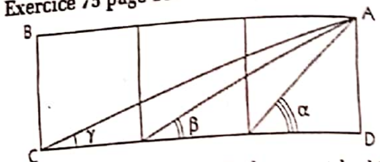
On obtient par la propriété de Pythagore :

$DI = 5a$; $DH = Ha$

de plus : $\sin\widehat{IDJ} = \frac{IH}{DI}$

d'où : $IH = 3a$.

♦ Exercice 75 page 188



En utilisant la propriété de Pythagore et la définition du cosinus et du sinus, on obtient :

$\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

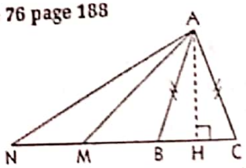
On vérifie que :

$\cos\gamma \times \cos\beta - \sin\gamma \times \sin\beta = \cos\alpha$

$\cos(\beta + \gamma) = \cos\alpha$

d'où : $\beta + \gamma = \alpha$.

♦ Exercice 76 page 188



1. En considérant les triangles rectangles AHM et AHN, on obtient :

$AM = \sqrt{b^2 + 2a^2}$; $AN = \sqrt{b^2 + 6a^2}$

2. Si ABC est équilatéral : $AM = a\sqrt{3}$; $AN = a\sqrt{7}$.

11. Vecteurs et configurations

(pages 189 à 212 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
- caractériser et construire le barycentre de deux ou trois points ;
- utiliser des propriétés du barycentre ;
- établir une représentation paramétrique d'un cercle.

Commentaires

Les élèves de première SE ont déjà rencontré la notion de barycentre en sciences physiques. En mathématiques, ils rencontrent cette notion pour la première fois et pourront l'utiliser ultérieurement dans des situations variées.

Il est possible d'utiliser les propriétés du barycentre pour :
- justifier que des points sont confondus ;
- résoudre des problèmes d'intersection de droites, d'alignement de points ;
- transformer une expression vectorielle relative à ces points ;
- résoudre des problèmes relevant de situations concrètes issues des sciences physiques, des statistiques, des sciences économiques...

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Barycentre • Barycentre G de (A, α) et (B, β). – Réduction de la somme vectorielle : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$ $(\alpha + \beta) \neq 0$. – G ∈ (AB). – Homogénéité : G barycentre de (A, kα) et (B, kβ). • Barycentre de trois ou quatre points – Propriété des barycentres partiels. • Isobarycentre – Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment. – Caractérisation du centre de gravité d'un triangle. • Coordonnées du barycentre	• Justifier qu'un point donné est barycentre de deux ou trois points pondérés donnés, en utilisant : – une égalité vectorielle ; – des barycentres partiels. • Construire le barycentre de deux ou trois points pondérés donnés. • Déterminer des nombres réels α et β pour que G soit barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β), A, B et G étant des points alignés. • Déterminer les coordonnées d'un barycentre.
Cercle • Représentation paramétrique d'un cercle.	• Trouver une représentation paramétrique d'un cercle. • Trouver des éléments d'un cercle défini par une représentation paramétrique. • Passer de la représentation paramétrique à l'équation cartésienne.

Exercices d'application directe

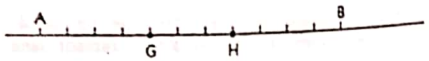
♦ Exercice 1.a page 194

G est le barycentre de (A, 7) et (B, 4)

d'où : $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{11}\ \overrightarrow{AB}$

H est le barycentre de (A, 4) et (B, 7)

d'où : $\overrightarrow{AH} = \frac{7}{11}\ \overrightarrow{AB}$



On vérifie que : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{HB} = \frac{4}{11}$

d'où : [AB] et [GH] ont le même milieu.

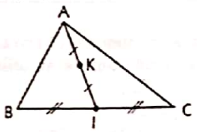
♦ Exercice 1.b page 194

G est le barycentre de (A, α) et (B, 6) équivaut à :

$$(\alpha + 6)\overrightarrow{OG} = \alpha\overrightarrow{OA} + 6\overrightarrow{OB}.$$

On obtient : $\alpha = -\frac{18}{5}$.

♦ Exercice 1.c page 197



On a : $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{KI}$

or : $\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KI}$

donc : $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 2\overrightarrow{KA} = \vec{0}$

K est donc le barycentre de : (B, 1), (C, 1) et (A, 2).

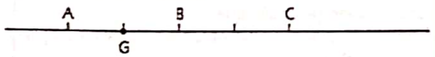
♦ Exercice 1.d page 197

On a : $3\overrightarrow{AG} - 5\overrightarrow{BG} + 4\overrightarrow{CG} = \vec{0}$

or : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BC}$

On obtient : $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

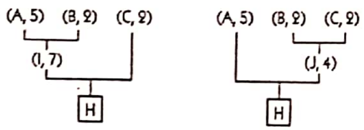
G est le milieu de [AB].



♦ Exercice 1.e page 197

Désignons par H le barycentre de (A, 5) (B, 2) (C, 2).

On a :



d'où : H ∈ (CI) et H ∈ (AJ)

Le point d'intersection H de (CI) et (AJ) est donc le barycentre de : (A, 5), (B, 2) et (C, 2).

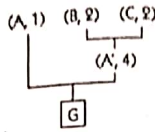
♦ Exercice 1.f page 198

Désignons par A' le milieu de [B,C].

C'est l'isobarycentre de B et C.

Désignons par G le barycentre de (A, 1) (B, 2) (C, 2).

On a :



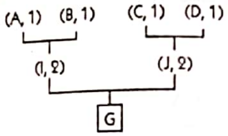
d'où : G ∈ (AA')

♦ Exercice 1.g page 198

1. I, J, K, H, M, N sont respectivement les isobarycentres de A et B ; C et D ; B et C ; A et D ; A et C ; B et D.

2. Notons G l'isobarycentre des points A, B, C, D. On a donc :

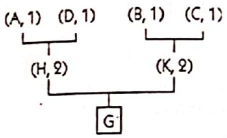
•



G ∈ (IJ)

① G est le milieu de [IJ].

•



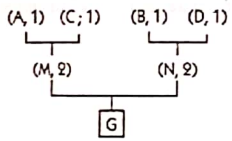
G ∈ (HK)

② G est le milieu de [HK].

• On en déduit alors que l'isobarycentre G des points A, B, C est le point d'intersection de (IJ) et (HK).

3. On a par ailleurs :

•



③ G est le milieu de [MN].

• De ①, ② et ③, on déduit que G est le milieu des segments [IJ], [HK] et [MN].

♦ Exercice 1.h page 200

Transformons l'égalité suivante :

(1) $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

$AB^2 - BC^2 = AD^2 - DC^2$

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC})$

$\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}$

$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}.$$

♦ Exercice 1.i page 200

Il suffit d'utiliser les barycentres partiels des points pondérés.

♦ Exercice 1.j page 200

G(− 1 ; 2) est l'isobarycentre des points A(2 ; 5), B(− 4 ; 5), C(x ; y)

On a : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

d'où : $\begin{cases} -1 = \frac{1}{3}(2 - 4 + x) \\ 2 = \frac{1}{3}(5 + 5 + y) \end{cases}$

$x = -1 ; y = -4$.

♦ Exercice 1.k page 200

On a : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

d'où : $\begin{cases} x = \frac{1}{4}(2 + 4 + 5 + 1) = 3 \\ y = \frac{1}{4}(3 + 3 + 1) = 2 \end{cases}$

♦ Exercice 2.a page 204

Notons (ℒ) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 12.$$

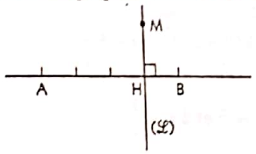
Notons H le projeté orthogonal de M sur (AB).

On a : $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB} = 12$

$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens et $AH \times AB = 12$;

$AH = \frac{12}{AB} = 3$.

(ℒ) est la droite perpendiculaire à (AB) au point H.



♦ Exercice 2.b page 204

Notons (ℒ) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 = 58.$$

Notons I le milieu de [AB].

On a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

d'où : $58 = 2MI^2 + 8$.

$$MI = 5.$$

(ℒ) est le cercle de centre I et de rayon 5.

♦ Exercice 3.a page 205

(𝒞) est le cercle de centre O'(− 3 ; − 4) et de rayon $\sqrt{5}$.

M(x ; y) ∈ (𝒞) *équivaut à* $\begin{cases} x = -3 + \sqrt{5}\cos\theta \\ y = -4 + \sqrt{5}\sin\theta \end{cases}$

avec : θ ∈]− π ; π].

a) $\theta = Mes(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{O'M}) = \frac{\pi}{4}$

On obtient : $M\left(\frac{-6 + \sqrt{10}}{2} ; \frac{-8 + \sqrt{10}}{2}\right)$.

b) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

On obtient : $M\left(\frac{-6 - \sqrt{5}}{2} ; \frac{-8 + 15}{2}\right)$.

c) $\theta = \pi$

On obtient : $M(-3 - \sqrt{5} ; -4)$

d) $\theta = -\frac{\pi}{6}$

On obtient : $M\left(\frac{-6 + \sqrt{15}}{2} ; \frac{-8 - \sqrt{5}}{2}\right)$.

♦ Exercice 3.b page 205

1.

$M(x ; y) \in (\mathscr{C})_{(C\,;\,3)}$ *équivaut à* $\begin{cases} x = 2 + 3\cos\theta \\ y = 4 + 3\sin\theta \end{cases}$

avec : $\theta = Mes(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{CM})$

θ ∈]− π ; π].

2. (𝒞) est le cercle de diamètre [AB]. On obtient :

centre de (𝒞) est O'(2 ; − 1) ;

rayon de (𝒞) est $2\sqrt{5}$.

Une représentation paramétrique de (𝒞) est :

$\begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{5}\cos\theta \\ y = -1 + 2\sqrt{5}\sin\theta. \end{cases}$

♦ Exercice 3.c page 205

Notons O'(a ; b) le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

On a : O'A = O'B = O'C

$O'A^2 = (a + 3)^2 + b^2$

$O'B^2 = a^2 + (b + 2)^2$

$O'C^2 = (a - 2)^2 + (b + 2)^2$

On obtient : $O'\left(1 ; \frac{11}{4}\right)$;

le rayon r du cercle : $r = O'A = \frac{\sqrt{377}}{4}$.

♦ Exercice 3.d page 206

1. Il suffit de donner des valeurs particulières à θ, ce qui permet de calculer x et y.

Exemple :

– pour θ = π ; $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

– pour θ = 0 ; $\begin{cases} x = 9 \\ y = -3 \end{cases}$

2. • Pour le point A(1 ; − 3),

on obtient : $\begin{cases} \cos\theta = -1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases}$; d'où : θ = π ; A ∈ (𝒞).

• *Autre méthode* :

Le cercle (𝒞) a pour centre le point Ω(5 ; − 3) et pour rayon 4.

On obtient : $\Omega A = \sqrt{(1 - 5)^2 + (-3 + 3)^2} = 4$

$\Omega B = \sqrt{(5-5)^2 + (1+3)^2} = 4$

$\Omega C = \sqrt{(3-5)^2 + (-6+3)^2} = \sqrt{13}$

donc : $A \in (\mathscr{C})$; $B \in (\mathscr{C})$; $C \notin (\mathscr{C})$.

♦ Exercice 3.e page 206

On obtient :

$(x+2)^2 + (y-6)^2 = (5\cos\theta)^2 + (5\sin\theta)^2$

$x^2 + y^2 + 4x - 12y - 15 = 0.$

♦ Exercice 3.f page 206

On a : $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$

d'où : $(x^2 + 10x) + (y^2 - 2y) + 22 = 0$

$[(x+5)^2 - 25] + [(y-1)^2 - 1] + 22 = 0$

$(x+5)^2 + (y-1)^2 = 4$

$(\mathscr{C})$ est donc le cercle de centre $\Omega(-5\,;1)$ et de rayon 2.

Une représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$ est :

$\begin{cases} x = -5 + 2\cos\theta \\ y = 1 + 2\sin\theta \end{cases}$; $\theta \in \,]-\pi\,;\pi]$.

Exercices d'apprentissage

♦ Exercice 1 page 209

(1) $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

(2) $\vec{AG} = 2\vec{AB}$

(3) $\vec{AG} = 2\vec{AB}$ (voir 2)

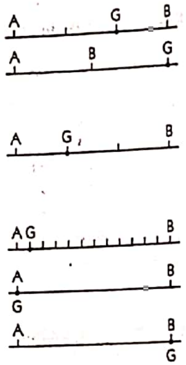
(4) $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB}$

(5) $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ (voir 1)

(6) $\vec{AG} = \frac{1}{12}\vec{AB}$

(7) $\vec{AG} = \vec{0}$

(8) $\vec{AG} = \vec{AB}$



♦ Exercice 2 page 209

1. Programme de construction de la figure.

– Construire N tel que $\vec{AN} = (a+b)\,\vec{v}$

– Construire M tel que $\vec{AM} = b\,\vec{v}$

– Tracer (BN)

– Tracer la droite parallèle à (BN) et passant par M

– Cette droite coupe (AB) en un point, noter C ce point

• Démontrer que C est le barycentre de (A, a) et (B, b)

En effet : $\vec{AM} = \frac{b}{a+b}\vec{AN}$

d'où : $\vec{AC} = \frac{b}{a+b}\vec{AB}$

On obtient : $a\vec{AC} + b\vec{BC} = \vec{0}$.

♦ Exercice 3 page 209

X est le barycentre de (A, a) et (B, b) signifie que :

$AX = \frac{b}{a+b}\vec{AB}$

(1) Cas où M = X

On a : $\vec{AM} = \frac{4}{6}\vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

d'où : $b = 2$ et $a = 1$

(2) Cas où N = X

On a : $\vec{AN} = -\frac{5}{6}\vec{AB}$

d'où : $b = -5$ et $a = 11$

(3) Cas où P = X

On a : $\vec{AP} = \frac{9}{6}\vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{AB}$

d'où : $b = 3$ et $a = -1$

♦ Exercice 4 page 209

(1) $\vec{AG} = \frac{9}{6}\vec{AB}$; $\alpha + \beta = 6$

d'où : $\beta = 9$ et $\alpha = 3$

(2) $\vec{AG} = -\frac{6}{3}\vec{AB}$; $\alpha + \beta = -3$

d'où : $\beta = 6$ et $\alpha = -9$

(3) $\vec{BG} = -\frac{2}{3}\vec{BA}$

$= \frac{-2/3}{1}\vec{BA}$; $\alpha + \beta = 1$

d'où : $\beta = -\frac{2}{3}$ et $\alpha = \frac{5}{3}$

(4) Pour tout M du plan :

$2\vec{MA} + 3\vec{MB} = 5\vec{MG}$; $\alpha + \beta = -1$

d'où : $-\frac{2}{5}\vec{MA} - \frac{3}{5}\vec{MB} = -\vec{MG}$

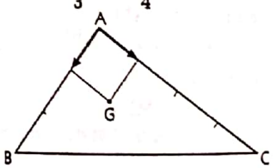
d'où : $\alpha = -\frac{2}{5}$ et $\beta = -\frac{3}{5}$

♦ Exercice 5 page 209

G est le barycentre de (A, a) ; (B, b) ; (C, c).

(1) $a = 5$; $b = 4$; $c = 3$

On obtient : $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$



(2) $a = b = c = 4$

G est l'isobarycentre de ABC.

(3) $a = 0$; $b = c = 6$

On obtient : $\vec{AG} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$

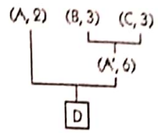
G est le milieu de [BC].

(4) $a = 625$; $b = 125$; $c = 375$

G est le barycentre de (A, 5) (B, 1) (C, 3).

On obtient : $\vec{AG} = \frac{1}{9}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}.$

♦ Exercice 6 page 209

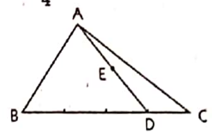


A' est le milieu de [BC] ; on a : $\vec{AD} = \frac{4}{3}\vec{AA'}$.

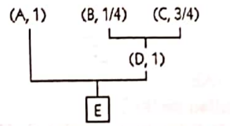
♦ Exercice 7 page 209

Notons D le barycentre de (B, 1) et (C, 3).

On obtient : $\vec{DB} = \frac{3}{4}\vec{BC}$.



E est le barycentre de (A, 1), (B, $\frac{1}{4}$) et (C, $\frac{3}{4}$)



E est le milieu de [AD].

♦ Exercice 8 page 209

• On a : $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}$.

• O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

$-2\vec{OA} + \vec{OB} + 3\vec{OC} =$

$-2(\vec{OD} + \vec{DA}) + (\vec{OD} + \vec{DB}) + 3(\vec{OD} + \vec{DC})$

$= 2\vec{OD} + \underbrace{(-2\vec{DA} + \vec{DB} + 3\vec{DC})}_{\vec{0}}$

$= 2\vec{OD}.$

• M est un point quelconque

$-\frac{2}{3}\vec{MA} + \frac{1}{3}\vec{MB} + \vec{OC} =$

$-\frac{2}{3}(\vec{MO} + \vec{OA}) + \frac{1}{3}(\vec{MO} + \vec{OB}) + \vec{OC}$

$= -\frac{1}{3}\vec{MO} + (-\frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \vec{OC})$

$= -\frac{1}{3}\vec{MO} + \frac{2}{3}\vec{OD}$

♦ Exercice 9 page 209

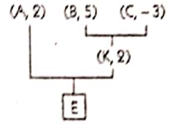
1. Le point E est tel que :

$2\vec{AE} + 5\vec{BE} - 3\vec{CE} = \vec{0}.$

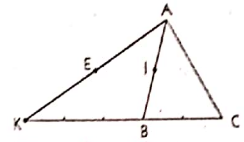
E est le barycentre de : (A, 2), (B, 5), (C, – 3).

Notons K le barycentre de (B, 5) et (C, – 3).

On a : $\vec{BK} = -\frac{3}{2}\vec{BC}$



E est donc le milieu de [AK].



2. On a : $2\vec{AE} + 5\vec{BE} - 3\vec{CE} = \vec{0}$

$2\vec{AE} + 5\vec{BE} - 3\vec{CE} - 3\vec{BE} = \vec{0}$

$2(\vec{AI} + \vec{IE}) + 2(\vec{BI} + \vec{IE}) - 3\vec{CB} = \vec{0}$

$\underbrace{2(\vec{AI} + \vec{BI})}_{\vec{0}} + 4\vec{IE} - 3\vec{CB} = \vec{0}$

$4\vec{IE} = 3\vec{CB}$.

♦ Exercice 10 page 209

O est le milieu de [AC] et [BD].

On a : $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$

$\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0}$

d'où : $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$

O est donc l'isobarycentre des points A, B, C, D.

♦ Exercice 11 page 209

• Notons I le centre du parallélogramme ABCD et G le barycentre de (A, 5), (B, 4), (C, 3), (D, 4).

I est barycentre de (B, 4) et (D, 4) ;

donc G est barycentre des points :

(A, 5), (C, 3), (I, 8).

Or, A, C, I sont alignés

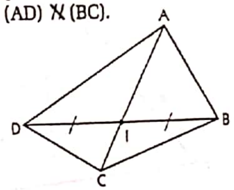
donc : $G \in (AC)$.

• Construction du quadrilatère ABCD :

I est le milieu de [B, D]

A, C, I sont alignés

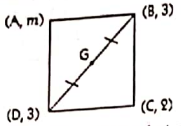
(AB) $\nparallel$ (DC) ; (AD) $\nparallel$ (BC).



♦ **Exercice 12 page 209**

G barycentre de (A, m) $(B, 3)$, $(C, 2)$ $(D, 3)$.

1.



G est le centre du carré ABCD si et seulement si G est le milieu de [BD] et de [AC],

donc : $m = 2$.

2. Notons I le centre du carré ABCD.

On a : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$; $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

O est barycentre de (A, m), $(B, 3)$, $(C, 2)$, $(D, 3)$.

On a : $m\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{CG} + 3\overrightarrow{DG} = \vec{0}$

d'où : $(m + 8)\overrightarrow{IG} + m\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{CI} + 3\overrightarrow{DI} = \vec{0}$

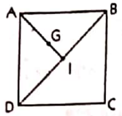
donc : $(m + 8)\overrightarrow{IG} + (m - 2)\overrightarrow{AI} = \vec{0}$ (1)

G est centre de gravité de ABD

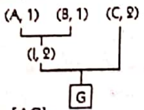
équivaut à $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}$

c'est-à-dire à : $3\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{AI} = \vec{0}$. (2)

Des égalités (1) et (2), on obtient : $m = 7$.



♦ **Exercice 13 page 209**



I est le milieu de [AC] ;

G est le milieu de [IC].

♦ **Exercice 14 page 210**

ABCD est un quadrilatère.

G est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 2)$, $(D, 1)$.

1. I est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$

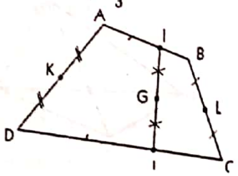
d'où : $\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{BI} = \vec{0}$.

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

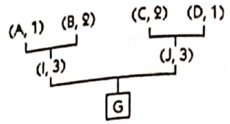
2. J est le barycentre de $(C, 2)$ et $(D, 1)$

d'où : $2\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{DJ} = \vec{0}$.

$$\overrightarrow{DJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$$



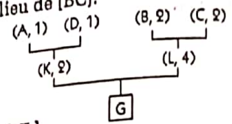
3.



donc G est le milieu de [IJ].

4. K est le milieu de [AD] ;

L est le milieu de [BC].



donc : $G \in [KL]$.

♦ **Exercice 15 page 210**

• E est le barycentre de $(B, 3)$ et $(C, 5)$

F est le barycentre de $(C, 5)$ et $(A, 2)$

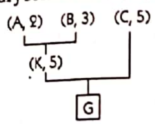
$G \in (AE) \Leftrightarrow$ [G est le barycentre de (A, α), $(B, 3)$, $(C, 5)$

$G \in (BF) \Leftrightarrow$ [G est le barycentre de (B, β), $(C, 5)$, $(A, 2)$

d'où : $\alpha = 2$ et $\beta = 3$.

G est alors le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 3)$, $(C, 5)$.

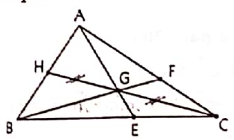
• Notons K le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 3)$.



d'où : $K \in (AB)$

G milieu de [KC]

K est donc le point d'intersection de (AB) et (CG)



♦ **Exercice 16 page 210**

• D'après la figure :

$\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} = \vec{0}$ (1)

$\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EG} = \vec{0}$ (2)

De (1), on obtient :

$\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{GE} = \vec{0}$

$\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG})$

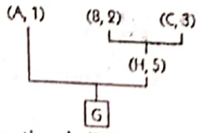
De (2), on obtient :

$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG}) = \vec{0}$

$\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{CG} = \vec{0}$

G est donc barycentre des points $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$.

• Notons H le barycentre de $(B, 2)$, $(C, 3)$.



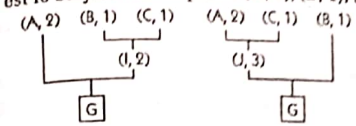
on a :

$H \in (BC)$ et $G \in (AH)$,

donc H est le point d'intersection de (BC) et (AG).

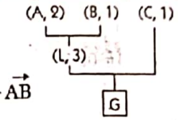
♦ **Exercice 17 page 210**

• G est le barycentre des points $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$.



G est le point d'intersection de (AI) et (BJ).

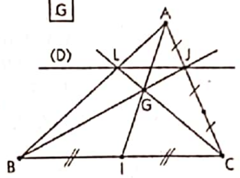
• Notons L le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$.



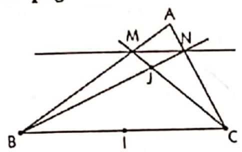
d'où : $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

or : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

donc : (LJ) // (BC).



♦ **Exercice 18 page 210**



(MN) et (BC) sont parallèles.

Donc il existe α tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB} \,;\, \overrightarrow{AN} = \alpha\,\overrightarrow{AC}$$

ou encore, tel que :

$(1 - \alpha)\overrightarrow{AM} + \alpha\,\overrightarrow{BM} = \vec{0}$

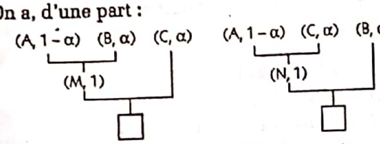
$(1 - \alpha)\,\overrightarrow{AN} + \alpha\,\overrightarrow{CN} = \vec{0}$

d'où :

M est le barycentre de $(A, 1 - \alpha)$ et (B, α)

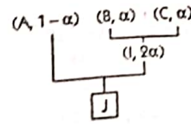
N est le barycentre de $(A, 1 - \alpha)$ et (C, α)

On a, d'une part :



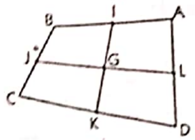
Le barycentre de $(A, 1 - \alpha)$, (B, α), (C, α) est donc le point d'intersection de (MC) et de (NB) ; c'est donc le point J.

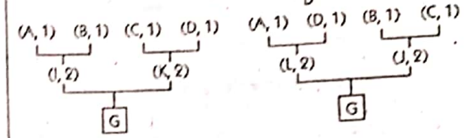
On a, d'autre part :



$J \in (AI)$.

♦ **Exercice 19 page 210**





G est le milieu de [IK] et [LJ].

♦ **Exercice 20 page 210**

1. On a : $2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{BD} - 3\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

d'où : $4\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ (1)

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ (2)

2. I est le milieu de [AB].

On a : $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$.

De (2), on déduit : $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

♦ **Exercice 21 page 210**

1. $4\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (1)

en écrivant : $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}$, de (1), on déduit :

$4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ (2)

• Si M = A, de (2) on déduit :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BD})$$

• D'où la construction de G.

2. G_1 est le barycentre de $(A, 4)$ et $(B, -3)$.

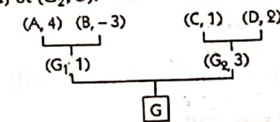
On a : $\overrightarrow{AG_1} = -3\overrightarrow{AB}$

• G_2 est le barycentre de $(C, 1)$ et $(D, 2)$.

On a : $\overrightarrow{CG_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

• a et b sont des nombres tels que G est barycentre de (G_1, a) et (G_2, b).

On a :



G est donc barycentre de $(G_1, 1)$ et $(G_2, 3)$

d'où : $a = 1$ et $b = 3$.

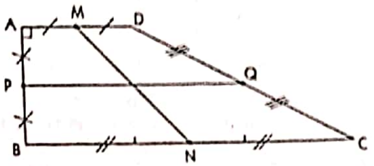
♦ Exercice 22 page 210

On obtient : $G\left(\frac{3}{4} ; \frac{3}{2}\right)$.

♦ Exercice 23 page 210

On obtient : $G\left(\frac{4}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

♦ Exercice 24 page 210



1. I est le centre d'inertie de la plaque. C'est l'isobarycentre des points A, B, C, D.
M, N, P, Q sont les milieux respectifs de [AD], [BC], [AB], [CD].
I est donc le point d'intersection de (MN) et (PQ).
2. On obtient : $I\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

♦ Exercice 25 page 210

$(\mathscr{L}_k)$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k.$$

Notons H le projeté orthogonal de M sur [AB].

$$\cdot\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k \Leftrightarrow AH = \frac{k}{12}.$$

$(\mathscr{L}_k)$ est la droite passant par A et perpendiculaire à (AB).

♦ Exercice 26 page 210

1. $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.
2. Notons I le barycentre de (B, – 3) et (C, 2).

On a : $-3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AI}$.

$(\mathscr{L}_0)$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \ (1)$$

$(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{IA} = 0.$

$$(MA) \perp (IA).$$

$(\mathscr{L}_0)$ est la droite perpendiculaire en A à (IA).

3. $(\mathscr{L})$ est l'ensemble des points M tels que :

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0.$$

Notons G l'isobarycentre de A, B, C.

On a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

or : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{IA}$

d'où : $3\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{IA} = 0$

donc : $(MG) \perp (IA)$.

$(\mathscr{L})$ est la droite perpendiculaire en G à (AI).

♦ Exercice 27 page 210

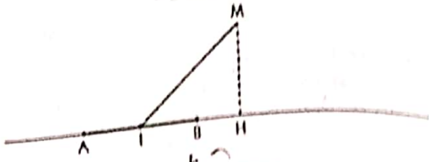
$(\mathscr{L}_k)$ est l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 - MB^2 = k \quad (1)$$

Notons I le milieu de [AB] et H le projeté orthogonal de M sur [AB].

On a : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM}$

$$= 2\,AB \times IH \times \cos(\widehat{\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{AB}}).$$



$$(1) \Leftrightarrow IH = \frac{k}{2\,AB \times \cos(\widehat{\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{AB}})}$$

♦ Exercice 28 page 210

$(\mathscr{L})$ est l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 72 \quad (1).$$

• Notons G le centre de gravité de ABC.

On a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

or : $MA^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 \ldots$

$GA = GB = GC$ (ABC équilatéral)

donc : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + 3GA^2$.

• Notons A' le milieu de [BC].

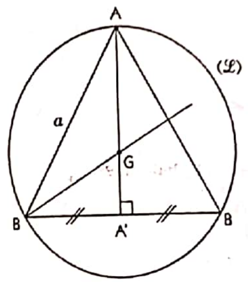
On a : $AA' = 3\sqrt{3}$; $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

d'où : $AG^2 = 12$.

• $(1) \Leftrightarrow 3MG^2 + 3GA^2 = 72$

$\Leftrightarrow MG = 2\sqrt{3}$.

$(\mathscr{L})$ est le cercle de centre G et de rayon $2\sqrt{3}$.



Dans le triangle équilatéral ABC, de côté a :

$$AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} ; AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Lorsque : $a = 6$, on a : $AG = 2\sqrt{3}$.

$(\mathscr{L})$ est donc le cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC.

♦ Exercice 29 page 211

Notons I le milieu de [AB].

On a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 32$.

1. $(\mathscr{L})$ est l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 + MB^2 = 50 \quad (1).$$

$(1) \Leftrightarrow MI = 3$.

$(\mathscr{L})$ est le cercle de centre I, de rayon 3.

2. $(\mathscr{L})$ est l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 + MB^2 = 24 \quad (2).$$

$(2) \Leftrightarrow MI^2 = -4.$

D'où : $(\mathscr{L}) = \varnothing$.

♦ Exercice 30 page 211

Notons I le milieu de [AB].

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} = MI^2 - 36.$$

$(\mathscr{L})$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k.$$

1. $k = 13$; on obtient $(\mathscr{L}) = \mathscr{C}_{(I, 7)}$
2. $k = -27$; on obtient $(\mathscr{L}) = \mathscr{C}_{(I, 3)}$
3. $k = -36$; on obtient $(\mathscr{L}) = \{I\}$.
4. $k = -40$; on obtient $(\mathscr{L}) = \varnothing$.

♦ Exercice 31 page 211

1. $(\mathscr{L})$ est l'ensemble des points M tels que :

$$3MA^2 + 2MB^2 = 60.$$

Notons G le barycentre de (A, 3) et (B, 2).

On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$.

On obtient :

$$3MA^2 + 2MB^2 = 5MG^2 + 3GA^2 + 2GB^2$$
$$= 5MG^2 + \frac{864}{5}.$$

$(1) \Leftrightarrow MG^2 = -\frac{564}{25}$.

D'où : $(\mathscr{L}) = \varnothing$.

2. $(\mathscr{L})$ est l'ensemble des points M tels que :

$$2MA^2 - MB^2 = 0.$$

Notons G le barycentre de (A, 2) et (B, – 1).

On a : $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BA}$.

On obtient :

$$2MA^2 - MB^2 = MG^2 - 288.$$

$(1) \Leftrightarrow MG = 12\sqrt{2}$.

D'où : $(\mathscr{L}) = \mathscr{C}_{(G,\, 12\sqrt{2})}$.

♦ Exercice 32 page 211

$(\mathscr{L})$ est l'ensemble des points M tels que :

$$3MA^2 - 3MB^2 = k \quad (1)$$

Notons I le milieu de [AB] et H le projeté orthogonal de M sur (AB).

$(1) \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = \frac{k}{3}$.

(Voir exercice 27 page 140.)

♦ Exercice 33 page 211

$(\mathscr{L})$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\frac{MA}{MB} = k \quad (1)$$

On suppose $M \neq B$.

$(1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0.$

Notons I le barycentre de (A, 1) et (B, – k)

J le barycentre de (A, 1) et (B, k)

On suppose $k \neq 1$ et $k \neq -1$.

$(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0.$

$(\mathscr{L})$ est le cercle de diamètre [IJ].

♦ Exercice 34 page 211

A (1 ; –2) ; B (– 3 ; 6) ; C (1 ; 3).

(1) $(\mathscr{C})$ passe par A, B, C

• Le centre O de $(\mathscr{C})$ est le point d'intersection de la médiatrice (Δ) de [AB] et de la médiatrice (Δ') de [BC].

$\overrightarrow{AB}$ (– 4 ; 8) ; C' (– 1 ; 2)

$\overrightarrow{BC}$ (4 ; – 3) ; A' (– 1 ; 4,5)

$M(x, y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{C'M} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$

Une équation de (Δ) :

$-4x + 8y - 20 = 0.$

De même, on obtient une équation de (Δ') :

$$4x - 3y + 17,5 = 0$$

d'où : O (– 4 ; 0,5).

• Le rayon r de $(\mathscr{C})$ est OA ; on obtient $OA = 2,5\sqrt{5}$.

• Une représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$ est donc :

$$(\Sigma) \begin{cases} x = -4 + 2,5\cos\theta \\ y = 0,5 + 2,5\sin\theta \end{cases} ; \theta \in]-\pi ; \pi].$$

(2) $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre A et de rayon BC ; on obtient : BC = 5.

$$(\Sigma) \begin{cases} x = 1 + 5\cos\theta \\ y = -2 + 5\sin\theta \end{cases} ; \theta \in]-\pi ; \pi].$$

(3) $(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre [BC], son centre est le point A', et son rayon est $\frac{BC}{2}$. On obtient :

$$(\Sigma) \begin{cases} x = -1 + 2,5\cos\theta \\ y = 4,5 + 2,5\sin\theta \end{cases} ; \theta \in]-\pi ; \pi].$$

♦ Exercice 35 page 211

On obtient :

$$(x + 2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta).$$

$$x^2 + y^2 + 4x - y - 2 = 0.$$

♦ Exercice 36 page 211

On obtient :

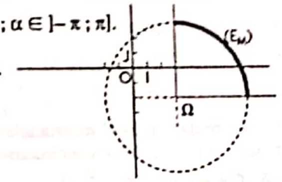
$$(E_M) \begin{cases} x_M = -10 \times \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2} + 8 \\ y_M = 10\left(\dfrac{1}{2}\sin\theta\right) - 2 \end{cases} ; \theta \in]0 ; \frac{\pi}{4}].$$

$$(E_M) \begin{cases} x_M = 3 + 5\cos\alpha \\ y_M = -2 + 5\sin\alpha \end{cases} ; \text{avec } \alpha = 2\theta,\ \alpha \in]0 ; \frac{\pi}{2}].$$

On sait que le cercle $(\mathscr{C})$ de centre $\Omega(3 ; -2)$ et de rayon 5 a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + 5\cos\alpha \\ y = -2 + 5\sin\alpha \end{cases} ; \alpha \in]-\pi ; \pi].$$

Donc : $(E_M) \subset (\mathscr{C})$.



♦ **Exercice 37 page 211**

ABC étant un triangle, les points A, B, C ne sont pas alignés.

Il existe donc deux nombres réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{AH} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}.$$

D'où l'on obtient :

$$(1 - x - y)\,\overrightarrow{HA} + x\,\overrightarrow{HB} + y\,\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

H est donc le barycentre de $(A, 1 - x - y)$, (B, x) et (C, y).

D'où : $a = 1 - x - y$; $b = x$; $c = y$.

- Si ABC est un triangle rectangle en A,

$$H = A\ ;\ x = y = b = c = 0\ ;\ a = 1.$$

- Si ABC est un triangle équilatéral, H est l'isobarycentre de A, B et C,

$$a = b = c = 1.$$

♦ **Exercice 38 page 211**

2. On obtient : $4\,\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$\overrightarrow{MG} \perp \overrightarrow{AC}$

3. On obtient : $\|\overrightarrow{MG}\| = BC.$

♦ **Exercice 39 page 211**

1. $-2x + 5y = 8$
2. *a)* $x^2 + y^2 - 2x - y - \frac{1}{4} = 0$

b) $8x - 6y - 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - y - 21 = 0$

♦ **Exercice 40 page 211**

1. $3\,\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$

$2\,\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + 2\,\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ (1)

D est donc le barycentre des points (A, 2), (B, – 1) et (C, 2).

2. I étant le milieu de [AC], l'égalité (1) donne :

$$4\,\overrightarrow{DI} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}.$$

D est donc le barycentre des points (I, 4) et (B, – 1), d'où D ∈ (IB).

ABC étant un triangle équilatéral, la médiane (IB) est aussi médiatrice de [AC].

3. On a : $BI = 2\sqrt{3}$.

- On obtient :

$$AD = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ ;\ BD = \frac{8}{3}\sqrt{3}\ ;\ CD = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

- $2MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 16$ (2)

On obtient :

$$2MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 3MD^2$$

d'où : $(2) \Leftrightarrow MD^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$

L'ensemble E des points M vérifiant (2) est le cercle de centre (D) et de rayon $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

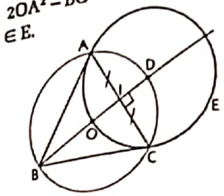
- Le centre de gravité O du triangle équilatéral ABC est aussi le centre du cercle circonscrit à ABC.

D'où : $OA = OB = OC = \frac{2}{3}BI.$

On obtient :

$$2OA^2 - BO^2 + 2OC^2 = 3OA^2 = 16$$

d'où : O ∈ E.



♦ **Exercice 41 page 211**

1. Le barycentre K de (B, 2) et (C, 2) est le milieu de [BC].
2. H est le projeté orthogonal de K sur [BC].

Notons C' le milieu de [AB].

On a :

(C'K) // (AC) et $C'K = \frac{1}{2}AC$.

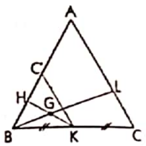
Donc : BC'K est un triangle équilatéral.

H est donc le milieu de [BC'] :

$$\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$$

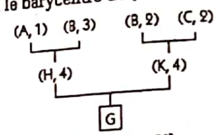
d'où : $3\,\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AH} = \vec{0}.$

H est donc le barycentre de (A, 1) et (B, 3).



3. G est le barycentre de (A, 1), (B, 5) et (C, 2).

On a :



G est donc le milieu de [H, K].

4. L est le point d'intersection de (BG) et (AC).

G étant le barycentre des points (A, 1), (B, 5) et (C, 2), L est donc le barycentre des points (A, 1) et (C, 2)

d'où : $\overrightarrow{LA} + 2\,\overrightarrow{LC} = \vec{0}.$

♦ **Exercice 42 page 211**

1. On a : $4\,\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{BC}.$

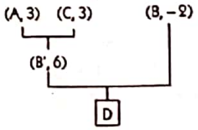
On obtient :

$4\,\overrightarrow{DA} + (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) + 3(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) = \vec{0}$

$3\,\overrightarrow{DA} - 2\,\overrightarrow{DB} + 3\,\overrightarrow{DC} = \vec{0}.$

D est donc le barycentre des points (A, 3), (B, – 2) et (C, 3).

On a :



donc : D ∈ (BB').

Le triangle ABC étant équilatéral, sa médiane (BB') est aussi médiatrice de [AC].

2. Le schéma précédent montre que D est barycentre de (B', 6) et (B, – 2)

d'où : $6\,\overrightarrow{DB'} - 2\,\overrightarrow{DB} = \vec{0}$

$6(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB'}) - 2\,\overrightarrow{DB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}.$

3. • D est le barycentre de (A, 3), (B, – 2) et (C, 3),

d'où : $\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$

On obtient : $AD^2 = \frac{63}{16}.$

- BB' est la médiatrice de [AC],

d'où : $BB' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$DB^2 = \left(\frac{3}{2}BB'\right)^2 = \frac{243}{16}.$$

4. E est l'ensemble des points M vérifiant :

$$3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12 \quad (1)$$

On a : $3MA^2 - 2\,MB^2 + 3\,MC^2 = 4\,MD^2 - \frac{108}{16}$

$(1) \Leftrightarrow MD^2 = \frac{5}{4}\sqrt{3}.$

E est donc le cercle de centre D et de rayon $\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

- G ∈ E *(voir exercice 40).*

♦ **Exercice 43 page 212**

1. $AB^2 + AC^2 = 2(AI^2 + IB^2)$, d'où : $AI^2 = 33$.
2. *a)* M est un point du plan, m un nombre réel.

Le vecteur $m\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M

lorsque : $m + 1 + 1 = 0$

c'est-à-dire : $m = -2$.

On pose : $\vec{U} = -2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

on a : $\vec{U} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\vec{U} = 2\,\overrightarrow{AI}.$

b) E est l'ensemble des points M tels que :

(1) $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = -58.$

On obtient :

$(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AI} = 0$

$\Leftrightarrow (IM) \perp (AI).$

E est donc la droite perpendiculaire à (AI) en I.

3. *a)* D est le barycentre des points (A, – 1), (B, 1) et (C, 1).

On a : $-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

d'où : $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AI}.$

I est donc le milieu de [AD].

ABCD est donc un parallélogramme.

b) F est l'ensemble des points M tels que :

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25.$$

On obtient : $MD^2 = 33$

d'où : $MD = AI = \sqrt{33}.$

F est le cercle de centre D et de rayon $\sqrt{33}$.

♦ **Exercice 44 page 212**

1. *a)* G_1 est le barycentre des points (A, 1), (B, – 1) et (C, 1).

On a : $\overrightarrow{G_1A} - \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}.$

On obtient : $\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{BC}$

d'où : $G_1 = D$.

b) E_1 est l'ensemble des points G_m, lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.

On a : $m\,\overrightarrow{G_mA} - \overrightarrow{G_mB} + \overrightarrow{G_mC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AG_m} = \frac{1}{m}\overrightarrow{BC}$

d'où : (AG_m) // (BC).

Lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$, E_1 est la droite parallèle à (BC) en A à l'exclusion du point A.

2. E_2 est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = a \quad (1)$$

On obtient :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \overrightarrow{MG_1}.$$

$(1) \Leftrightarrow MD = a.$

E_2 est donc le cercle de centre D et de rayon a.

3. E_3 est l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = \frac{a^2}{4}.$$

On obtient :

$$MG_1^2 + G_1A^2 - G_1B^2 + G_1C^2 = \frac{a^2}{4}.$$

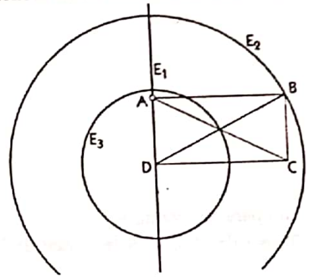
Or : $G_1 = D$,

ABCD est un rectangle,

d'où : $DB^2 = AD^2 + DC^2$

donc : $MD = \frac{a}{2}.$

E_3 est donc le cercle de centre D et de rayon $\frac{a}{2}$.



♦ **Exercice 45 page 212**

1. *a)* Les points (A, m), (B, 1) et (C, 1) admettent un barycentre lorsque $m \neq -2$

d'où : $E = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

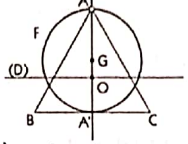
b) Notons G_m le barycentre de (A, m), (B, 1) et (C, 1).

On a : $(m+2)\overrightarrow{AG_m} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AG_m} = \frac{2}{m+2}\overrightarrow{AA'} \quad (1)$$

d'où : $(AG_m) \,//\, (AA')$.

L'ensemble des points G_m, lorsque m décrit $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, est la droite (AA') à l'exclusion du point A.



2. *a)* On prend $m = 2$.

G est le barycentre de (A, 2), (B, 1) et (C, 1).

On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ (voir (1)).

G est donc le milieu de [AA'].

b) (voir exercice 44)

F est le cercle de centre G et de rayon $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

3. $m = -2$.

D est l'ensemble des points M tels que :

$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0 \quad (1)$$

$(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}a^2$.

On note H le projeté orthogonal de M sur (AA').

$AH \times AA' = \frac{1}{2}a^2$

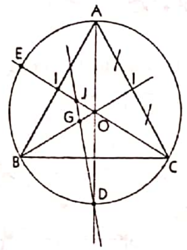
$AH = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}AA'$

d'où : $H = O$.

D est donc la perpendiculaire à (AA') en O.

♦ **Exercice 46 page 212**

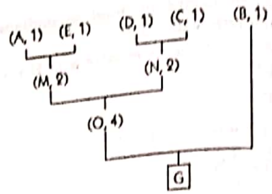
1. Figure :



2. G est l'isobarycentre de A, B, C, D, E.

a) ACDE est un parallélogramme.

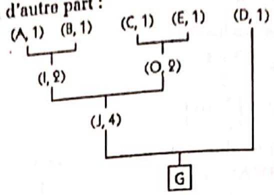
M étant le milieu de [AE] et N le milieu de [CD] on a :



d'où : $4\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (1)

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$ (2)

b) On a d'autre part :



d'où : $4\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (3)

$\overrightarrow{OG} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OJ} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OD}$ (4)

c) D'après (2) et (4), on obtient :

$F \in (OB)$ et $G \in (JD)$.

Les droites (OB) et (JD) sont donc concourantes en G.

3. Notons M' l'image de M par l'application f du plan dans le plan, définie par :

$$4\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}.$$

a) On a : $4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'}) = 5\overrightarrow{MG}$

d'où : $\overrightarrow{GM'} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{GM}$.

f est donc une homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{4}$.

b) • Notons B' l'image de B par f :

on a : $\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{GB}$

d'où : $4\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

D'après (1), on a : $B' = O$.

• L'image de D par f est J car d'après (3), on a :

$$\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{GD}.$$

♦ **Exercice 47 page 212**

1. G est le barycentre de (A, 1), (B, – 1) et (C, 1).

$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CB}$

d'où : $G = D$.

2. E est l'ensemble des points M tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5$$

d'où : $\|\overrightarrow{MG}\| = 5$.

$E = \mathscr{C}_{[D\,;\,5]}$.

3. F est l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = \frac{25}{4}$$

d'où : $MD^2 + DA^2 - DB^2 + DC^2 = \frac{25}{4}$

$MD^2 = \frac{25}{4}$

$F = \mathscr{C}_{(D,\,5\backslash 2)}$.

4. H est l'ensemble des points M tels que :

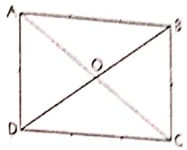
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 61.$$

Notons O le centre de ABCD.

On a : $4MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 61$

d'où : $MO^2 = 9$

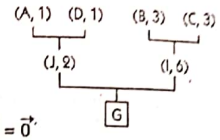
$H = \mathscr{C}_{(O\,;\,3)}$.



♦ **Exercice 48 page 212**

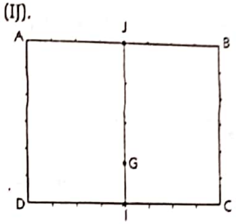
1. et 2. G barycentre de (A, 1), (B, 3) (C, 3) et (D, 1).

On a :



$2\overrightarrow{GJ} + 6\overrightarrow{GI} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GJ} + 3\overrightarrow{GI} = \vec{0}$; $G \in (IJ)$.



• On a :

$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{GJ} + 6\overrightarrow{GI} = \vec{0}$

d'où : $\overrightarrow{GJ} = -3\overrightarrow{GI}$

$\overrightarrow{GJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{GI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{JI}$; $G \in (IJ)$.

3. • On a : $GA^2 = GJ^2 + JA^2$

car : $\overrightarrow{GJ} \perp \overrightarrow{JA}$

d'où : $GA^2 = \frac{145}{4}$.

• On a : $GB^2 = GI^2 + IB^2$

car : $\overrightarrow{GI} \perp \overrightarrow{IB}$

d'où : $GB^2 = \frac{73}{4}$.

• (IJ) est un axe de symétrie de ABCD,

d'où : $GA = GB$; $GC = GD$.

4. E est l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 + MD^2 = 310$$

On obtient :

$8MG^2 + GA^2 + 3GB^2 + 3GC^2 + BD^2 = 310$

$MG^2 = 16$

d'où : $E = \mathscr{C}_{(G,\,4)}$.

♦ **Exercice 49 page 212**

FIGURE 1

m_1 est l'aire du grand carré de centre G_1 ;

m_2 est l'aire du petit carré de centre G_2 ;

donc G est le barycentre de (G_1, 9) et (G_2, 1) ;

d'où : $9\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$.

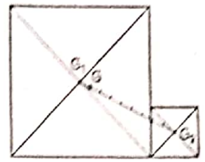
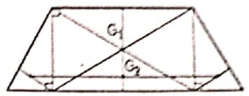


FIGURE 2

m_1 est l'aire du rectangle de centre G_1 ;

m_2 est l'aire des deux triangles rectangles ; G_2 est leur centre d'inertie.



On a : $m_1 = 3m_2$

G est donc le barycentre de (G_1, 3) et (G_2, 1).

d'où : $3\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$.

FIGURE 3

m_1 est l'aire du carré creux de centre G_1 ;

m_2 est l'aire de partie restante de la plaque ; G_2 est son centre d'inertie.

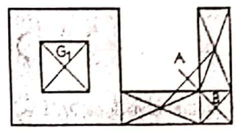
On a $m_1 = 5$ et $m_2 = 3$

G_2 est le barycentre de (A, 5) et (B, 1),

d'où : $5\overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{G_2B} = \vec{0}$.

G est donc le barycentre de (G_1, 5) et (G_2, 3),

d'où : $5\overrightarrow{GG_1} + 3\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$.

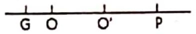


♦ **Exercice 50 page 212**

G est le centre de gravité de la plaque évidée.

C'est le barycentre des points (O, 3) et (O', – 1)

d'où : $\overrightarrow{OG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}$.



12. Transformations du plan

(pages 213 à 230 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
– compléter l'étude des homothéties et des rotations :
– utiliser les transformations du plan dans des activités géométriques ;
– introduire géométriquement la similitude.

Commentaires

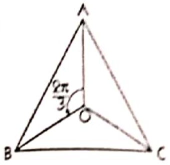
On abordera les objectifs de ce chapitre avec des exercices très simples.
Les composées et les décompositions ne sont ni à mémoriser ni à formaliser. Ce sont des activités liées à l'utilisation de constructions de figures et des tableaux de transformations.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Translation, symétrie, rotation • Caractérisations. • Composée de deux rotations.	• Construire l'image d'un point, d'une figure simple, par la composée de deux rotations de même centre.
Translation, symétrie, rotation, homothétie • Similitude comme composée d'une homothétie et d'une translation ou d'une symétrie ou d'une rotation. • Composée de deux homothéties de même centre.	• Construire l'image d'un point, d'une figure simple, par la composée de deux homothéties de même centre. • Construire l'image d'un point, d'une figure simple, par une similitude.
Utilisation des transformations du plan	• Mettre en évidence une transformation du plan pour : – construire une figure ; – démontrer une propriété ; – déterminer un ensemble de points.

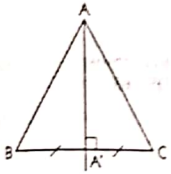
Exercices d'application directe

♦ Exercice 1.a page 216



f	
A	B
B	C
C	A

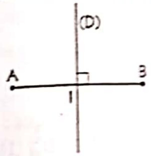
• **O est le centre du triangle équilatéral ABC,**
f est la rotation de centre O et d'angle orienté $\left(\widehat{\frac{2\pi}{3}}\right)$.



g	
A	A
B	C
C	B

• **A' est le milieu de [BC],**
g est la symétrie orthogonale d'axe (AA').

♦ Exercice 1.b page 216



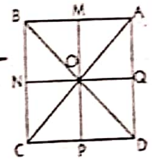
S_I		$S_{(D)}$	
I	I	I	I
A	B	A	B
B	A	B	A

I est le milieu de [AB],
(D) la médiatrice de [AB].
• La rotation de centre I et d'angle orienté $(\widehat{\pi})$ (ou S_I la symétrie de centre I) est un déplacement qui transforme [AB] en [AB].
• La symétrie orthogonale d'axe (D) S(D) est un retournement qui transforme [AB] en [AB].

♦ Exercice 1.c page 218

• On a : OA = OB = OC = OD
OM = OP = MA = PD
donc : AMO et DPO sont superposables.
• On donne : $f(A) = O$; $f(M) = P$; $f(O) = D$.
a) $f = r \circ t$
On a :

t		r	
A	A'	A'	O
M	M'	M'	P
O	O'	O'	D



donc : M' = P
t est la translation de vecteur $\overrightarrow{MP}$,

d'où :

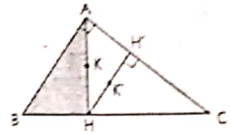
t		r	
A	D	D	O
M	P	P	P
O			D

r est la rotation de centre P et d'angle orienté $\left(\widehat{\frac{\pi}{2}}\right)$.
b) $f = r \circ t$
On a :

r		t	
A	A"	A"	O
M	M"	M"	P
O	O"	O"	D

r est la rotation de centre P et d'angle orienté $\left(\widehat{\frac{\pi}{2}}\right)$.
d'où : O" = C.
t est la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

♦ Exercice 2.a page 220



AB = 3
BC = 5
CA = 4

a) Aire de ABC $= \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2}$

d'où : $\frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AH}$ (1)

$\cos \widehat{C} = \frac{CA}{CB} = \frac{CH}{CA}$

d'où : $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC}$ (2)

de (1) et (2), on tire :

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AH} = \frac{AC}{HC} \qquad (3)$$

donc les triangles ABC et HAC sont semblables.
b) On pose H' = S(H), K' = S(K).

$$S \left(\begin{array}{ccccc} A & B & C & H & K \\ \hline H & A & C & H' & K' \end{array} \right. \qquad (4)$$

On sait que :
ABC et HAC sont semblables
H ∈ (BC) et (AH) ⊥ (BC)
K milieu de [AH]
Par conséquent, d'après (4) :
H' ∈ (AC) et (HH') ⊥ (AC
K' milieu de [HH']

c) D'après (4), on tire :
S(AHB) = HH'A.

d) • Notons k le rapport de S

D'après (3), $k = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{4}{5}$.

• Aire de HAC = k^2 aire de ABC = 3,84 cm².

♦ Exercice 2.b page 222

a) Les triangles ABC et DOC sont rectangles et isocèles ; ils sont donc semblables.

b)

$$f \left(\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \hline D & O & C & D' \end{array} \right. \qquad (1)$$

• f est la similitude qui transforme ABC en DOC.
Notons k son rapport.

$$k = \frac{DC}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

• h est une homothétie de centre C
r est une rotation de centre C
telles que : $f = h \circ r$.
Le rapport de h est donc k.
Notons $(\widehat{\alpha})$ l'angle orienté de r.

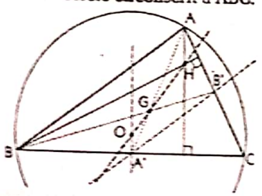
$$\alpha = \mathrm{Mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c) On sait que : ABCD est un carré
f(ABCD) = DOCD'
donc : DOCD' est un carré.

♦ Exercice 3.a page 223

ABC est un triangle ;
H est son orthocentre ;
G est son centre de gravité ;
O est centre du cercle circonscrit à ABC.



On a :
(AB) // (A'B') ; (BH) // (B'O) ; (HA) // (OA')
ABH et A'B'O sont donc des triangles homothétiques.
Par suite, il existe une homothétie telle que :

$$h \left(\begin{array}{ccc} A & B & H \\ \hline A' & B' & O \end{array} \right.$$

Son centre est le point d'intersection des droites (AA') et (BB') ; c'est donc le point G, d'où G ∈ (HO).

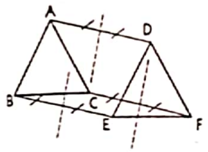
♦ Exercice 3.b page 223

ABC et DEF sont des triangles équilatéraux et superposables. Par conséquent, il existe une et une seule isométrie f, telle que :

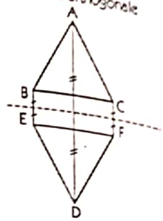
$$f \left(\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \hline D & E & F \end{array} \right.$$

1^er^ CAS : f est une translation ou une symétrie orthogonale. Les droites (AD), (BE), (CF) sont parallèles, donc les médiatrices des segments [AD], [BE], [CF] sont parallèles.

• translation

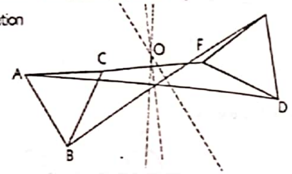


• symétrie orthogonale



2^E^ CAS : f est une rotation ; notons O son centre, d'où : OA = OD ; OB = OE ; OC = OF.
Par conséquent, O appartient aux médiatrices des segments [AD], [BE], [CF].

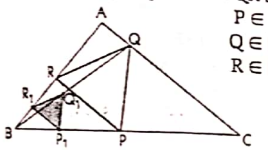
• rotation



♦ Exercice 3.c page 225

Construction d'un triangle équilatéral PQR tel que :

P ∈ [BC] (1)
Q ∈ [AC] (2)
R ∈ [AB] (3)



– On construit un triangle équilatéral $P_1Q_1R_1$ tel que :

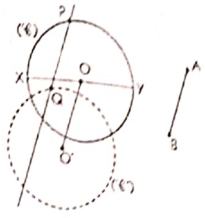
$P_1 \in$ [BC]
$R_1 \in$ [AB]
(P_1R_1) // (AC)

– On marque Q le point d'intersection de (BQ_1) avec (AC).
– On marque P le point d'intersection de (BC) avec la droite parallèle à (P_1Q_1) en Q.
– On marque R le point d'intersection de (AB) avec la droite parallèle à (Q_1R_1) en Q.

PQR est un triangle équilatéral qui vérifie les 3 conditions (1), (2) et (3).

Remarque : $P_1Q_1R_1$ est une figure auxiliaire vérifiant les conditions (1) et (2).
PQR est un triangle homothétique de $P_1Q_1R_1$ qui vérifie, lui, les trois conditions.

♦ Exercice 3.d page 225



– On construit (𝒞'), l'image de (𝒞), par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
– On marque P un point de (𝒞).
– On marque le point Q tel que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.
Q est un point d'intersection de (𝒞') et de la droite parallèle à (AB) en P.

Remarque :
Lorsque P décrit (𝒞), Q décrit (𝒞') l'image du support (𝒞) de P.

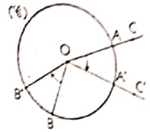
♦ Exercice 3.e page 226

(Se référer à l'exercice 3.d.)
Ici (𝒞') est l'image de (𝒞) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

Exercices d'apprentissage

♦ Exercice 1 page 228

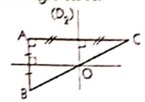
(𝒞) est le cercle de centre O et de rayon OA.
B' ∈ (𝒞) et BB' = AA'.
C' ∈ [OA'] et OC' = OC.



$$S_2 \circ S_1 \left(\begin{array}{cccc} O & A & B & C \\ \hline O & A' & B' & C' \end{array} \right.$$

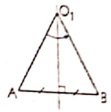
$S_2 \circ S_1$ est une isométrie.
On a : OA' = OA ; OB' = OB ; OO' = OC
or : OA = OB = OC
d'où : OA' = OA = OB' = OB = OC' = OC
A', A, B', B, C', C sont donc sur le cercle circonscrit ou triangle ABC.

• Pour que l'isométrie $S_2 \circ S_1$ soit une symétrie centrale, il faut que : $(D_1) \perp (D_2)$.
ABC est donc rectangle en A.

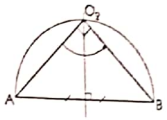


♦ Exercice 2 page 228

• r_1(A) = B ; O_1 centre r_1.
$\left(\widehat{\frac{\pi}{3}}\right)$ angle orienté de r_1.
Donc O_1AB est le triangle équilatéral direct.

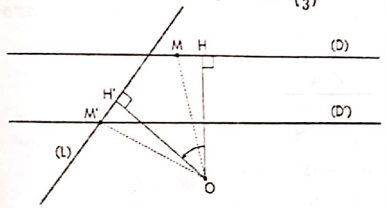


• r_2(A) = B ; O_2 centre r_2.
$\left(\widehat{\frac{\pi}{2}}\right)$ angle orienté de r2.
Donc O_2AB est le triangle direct rectangle et isocèle en O_2.



♦ Exercice 3 page 228

r : rotation de centre O d'angle orienté $\left(\widehat{\frac{\pi}{3}}\right)$.



– On construit (L), l'image de (D) par r.
– On marque M' point d'intersection de (D) et (D').
M' est l'image par r d'un point M de (D).
(OM = OM' ou encore HM = H'M'.)

♦ Exercice 4 page 228

• Notons O le point d'intersection de (D_1) et (D_2).

♦ Exercice 5 page 228

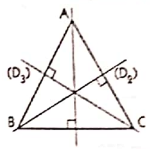
Construction de $S_A \circ S_B \circ S_C \circ$(D).

♦ Exercice 6 page 228

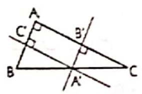
Posons $f : S_1 \circ S_2 \circ S_3$
On a f :

$$f \left(\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \hline C & B & A \end{array} \right.$$

f est donc la symétrie orthogonale d'axe (D_2).



♦ Exercice 7 page 228



Trouvons une translation t telle que :

$$S_{(A'C')}\circ S_A = t\circ S_{(A'B')}.$$

On a : $S_{(A'C')}\circ S_A$: $\begin{array}{c|c} A & B \end{array}$ $\quad S_{(A'B')}$: $\begin{array}{c|c} A & C \end{array}$

d'où : $t(C) = B$

donc t est la translation de vecteur $\vec{CB}$.

♦ Exercice 8 page 228

1. ABC est un triangle rectangle en C.

BDE est un triangle rectangle en E. Ces deux triangles rectangles ont l'angle $\widehat{B}$ en commun, ils sont donc semblables.

2. (Δ) est l'axe de symétrie de ABC,

d'où : $S_{(\Delta)}(L_1) = (L_2)$

or : $A \in (L_1)$; donc $A' \in (L_2)$.

Les points B, D, A' sont alignés.

Il existe donc une homothétie h, de centre B, qui applique A' sur D.

3. $f = h\circ S_{(\Delta)}$ $\quad S_{(\Delta)}$: $\begin{array}{c|c} A & A' \\ B & B \\ C & C' \\ (L_2) & (L_1) \end{array}$ $\quad h$: $\begin{array}{c|c} A' & D \\ B & B \\ C' & \square \\ (L_1) & (L_1) \end{array}$ $\quad h\circ S_{(\Delta)}$: $\begin{array}{c|c} A & D \\ B & B \\ C & \square \\ (L_2) & (L_1) \end{array}$

On sait que, $h\circ S_{(\Delta)}$ étant une similitude, elle conserve l'alignement et l'orthogonalité.

Notons : $h\circ S_{(\Delta)}(C) = C''$

on a : $C \in (L_2)$ et $(AC) \perp (L_2)$

d'où : $C'' \in (L_1)$ et $(DC'') \perp (L_1)$

donc : $C'' = E$

Par conséquent, $h\circ S_{(\Delta)}$ est la similitude qui transforme A en D, B en B, C en E,

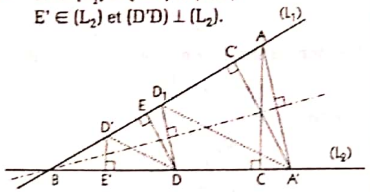
donc : $h\circ S_{(\Delta)} = f$.

4. Construction de BE'D' image par f de BED

Notons : $S_{(\Delta)}(D) = D_1$

On a : $D' \in (L_1)$ et $(DD') // (A'D)$

$E' \in (L_2)$ et $(D'D) \perp (L_2)$.



♦ Exercice 9 page 229

$(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ étant tangents en P, il existe une homothétie h de centre P qui transforme $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$.

On a : h : $\begin{array}{c|c} P & P \\ A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{array}$

d'où : $(A_1A_2) // (B_1B_2)$

♦ Exercice 10 page 229

Notons O le point d'intersection de (AD) et (BC).

Il existe deux homothéties h et h' telles que :

h : $\begin{array}{c|c} O & O \\ A & D \\ B & C \end{array}$ $\quad h'$: $\begin{array}{c|c} O & O \\ D & P \\ Q & B \end{array}$

On a : $\vec{CP} = \vec{OP} - \vec{OC}$

$= kk'\,\vec{OA} - k\,\vec{OB}$

$\vec{AQ} = \vec{OQ} - \vec{OA}$

On obtient : $\vec{CP} = -\,kk'\,\vec{AQ}$

donc : $(CP) // (AQ)$.

♦ Exercice 11 page 229

On a : $\vec{K_1O''} = \dfrac{R''}{R_2}\,\vec{K_1O_2}$ (1)

$\vec{K_2O''} = \dfrac{R''}{R_1}\,\vec{K_2O_1}$ (2)

$\vec{K''O_2} = \dfrac{R_2}{R_1}\,\vec{K''O_1}$ (3)

On obtient :

$$\vec{K_1K''} = \frac{R_2}{R_1}\left(\frac{R_1 - R''}{R_2 - R''}\right)\vec{K_2K''}.$$

Les points K_1, K_2, K'' sont donc alignés.

♦ Exercice 12 page 229

Notons O le point d'intersection des diagonales de ABCD.

• Dans PDCB, (DP) // (BC), il existe une homothétie h_1 telle que :

h_1 : $\begin{array}{c|c} O & O \\ B & D \\ C & P \end{array}$ $\quad$ d'où : $\dfrac{OC}{OP} = \dfrac{OB}{OD}$ (1)

• Dans QCDA, (CQ) // (AD), il existe une homothétie h_2 telle que :

h_2 : $\begin{array}{c|c} O & O \\ D & Q \\ A & C \end{array}$ $\quad$ d'où : $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OD}{OQ}$ (2)

De (1) et (2), on tire : $\dfrac{OA}{OP} = \dfrac{OB}{OQ}$ (3)

donc : (PQ) // (AB).

♦ Exercice 13 page 229

• On a : (BE) // (B'D) et (BB') // (ED)

donc : BB'DE est un parallélogramme

d'où : $\vec{B'D} = \vec{BE}$ (1)

De même, on obtient :

$\vec{B'D} = \vec{C'C}$ (2)

De (1) et (2), on tire : $\vec{BE} = \vec{C'C}$ (3)

donc BECC' est un parallélogramme.

A', milieu de [BC], est donc le milieu de [C'E] ;

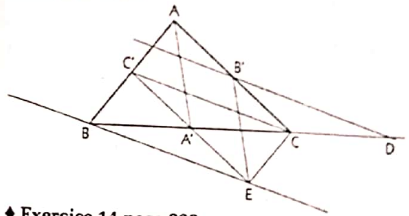
$A' \in (C'E)$.

• De (3), on tire : $\vec{AC'} = \vec{CE}$.

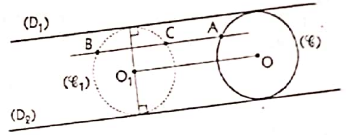
donc AC'EC est un parallélogramme.

On a : $t_{\vec{AB'}}$: $\begin{array}{cccc} A & B' & C' & A' \\ \hline B' & C & A' & E \end{array}$

d'où : $\vec{AA'} = \vec{B'E}$.



♦ Exercice 14 page 229



Construction d'un cercle $(\mathscr{C})$:

– passant par A (1)

– tangent à (D_1) (2)

– tangent à (D_2) (3)

• On construit un cercle $(\mathscr{C}_1)$ de centre O_1 et vérifiant les deux conditions (2) et (3).

B et C sont les points d'intersection de $(\mathscr{C}_1)$ avec la droite parallèle en A à (D_1).

• On marque O l'image de O_1 par la translation t de vecteur $\vec{BA}$.

• On trace le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O de rayon OA.

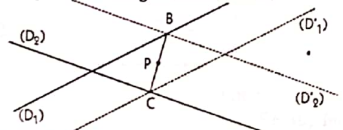
On a : $(\mathscr{C}) = t(\mathscr{C}_1)$,

donc $(\mathscr{C})$ est tangent à (D_1) et à (D_2).

Remarque : on obtient un 2ᵉ cercle $(\mathscr{C}')$ en utilisant la translation t' de vecteur $\vec{CA}$.

♦ Exercice 15 page 229

• Esquisse de la figure recherchée :



Considérons la symétrie de centre P.

S_P : $\begin{array}{c|cc} B & (D_1) & (D_2) \\ C & (D'_1) & (D'_2) \end{array}$

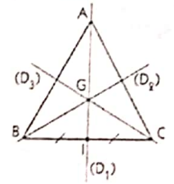
Par conséquent :

B est le point d'intersection de (D_1) et (D'_2) ;

C est le point d'intersection de (D_2) et (D'_1).

• Construction.

♦ Exercice 16 page 229



– On marque un point I sur (D_1) ;

– On construit B sur (D_2) et C sur 2.

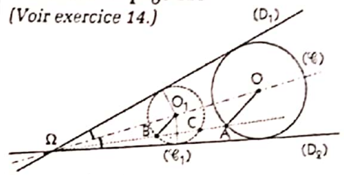
(D_3) tel que I soit le milieu de [BC] *(voir exercice 23).*

Le point de concours G de (D_1), (D_2), (D_3) est le centre de gravité de ABC.

– On marque A sur (D1) tel que : $\vec{AI} = 3\,\vec{GI}$.

♦ Exercice 17 page 229

(Voir exercice 14.)



Construction d'un cercle $(\mathscr{C})$:

– passant par A (1)

– tangent à (D_1) (2)

– tangent à (D_2) (3)

• $(\mathscr{C}_1)$ est un cercle de centre O_1 vérifiant (2) et (3).

B et C sont les points d'intersection de $(\mathscr{C}_1)$ avec (ΩA).

• O est l'image de O_1 par l'homothétie h de centre Ω qui applique B sur A.

• Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon OA est tangent à (D_1) et à (D_2) car : $(\mathscr{C}) = h(\mathscr{C}_1)$.

Remarque : on obtient un 2ᵉ cercle $(\mathscr{C}')$ en utilisant l'homothétie h' de centre Ω qui applique C sur A.

♦ Exercice 18 page 230

Construction d'un carré MNPQ tel que :

– $M \in (\mathscr{C})$ (1)

– $N \in (\mathscr{C})$ (2)

– $[PQ] \subset [AB]$ (3)

ABCD est un carré

O est le milieu de AB

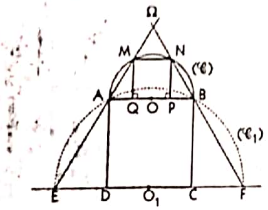
O_1 est le milieu de DC

• $(\mathscr{C}_1)$ est le demi-cercle de centre O_1 et passant par A et B ; son diamètre est [EF].

• La droite (EA) coupe $(\mathscr{C})$ en M, la droite (FB) coupe $(\mathscr{C})$ en N ; Ω est le point d'intersection de [EA) et (FB).

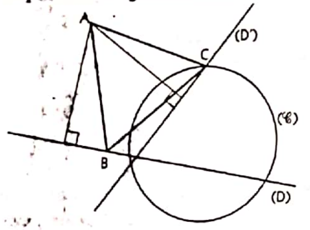
P est le projeté orthogonal de N sur [AB], Q est le projeté orthogonal de M sur [AB].

• MNPQ est un carré qui vérifie (1), (2) et (3), car c'est l'image du carré ABCD par l'homothétie de centre Ω qui applique A sur E.



♦ **Exercice 19 page 230**

• Esquisse de la figure recherchée.



ABC est un triangle équilatéral vérifiant les conditions :

B ∈ (D) et C ∈ $(\mathscr{C})$.

Puisque $\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \left(\frac{\pi}{3}\right)$.

C appartient à (D') image de (D) par la rotation r de centre A et d'angle orienté $\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

• Construction :

– on construit (D') ; (D') = r(D) ;

– on marque C l'un des points d'intersection de (D') et $(\mathscr{C})$;

– on construit le 3ᵉ sommet de B du triangle équilatéral ABC.

B est un point de (D).

Remarque : il y a deux possibilités.

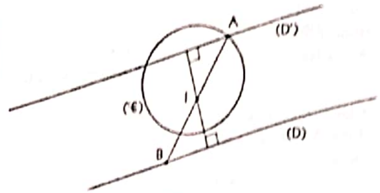
♦ **Exercice 20 page 230**

Construction de A et B vérifiant A ∈ $(\mathscr{C})$; B ∈ (D) ; I milieu de [AB]

On a : $S_I \left| \begin{array}{ccc} A & B & (D) \\ \hline B & A & (D') \end{array} \right.$

S_I symétrie de centre I.

On veut avoir B ∈ (D), d'où : A ∈ (D').



♦ **Exercice 21 page 230**

(Voir exercice 3.c page 225.)

♦ **Exercice 22 page 230**

(Voir exercice 18.)

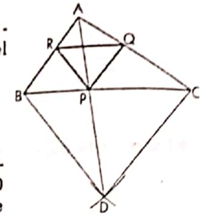
Construction d'un triangle équilatéral PQR tel que :

P ∈ [BC] (1) ;

Q ∈ [CA] (2) ;

R ∈ [AB] (3)

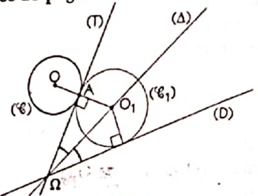
BCD est le triangle équilatéral tel que A et D soient de part et d'autre de (BC).



h est l'homothétie de centre A qui applique D sur P (point d'intersection de (AD) et (BC).

PQR = h(DCR).

♦ **Exercice 23 page 230**



(T) est la tangente en A à $(\mathscr{C})$.

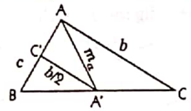
(Δ) la bisectrice de l'angle formé par (T) et (D).

O_1 point d'intersection de (OA) et (Δ).

C'est le centre d'un cercle $(\mathscr{C}_1)$ tangent en A à $(\mathscr{C})$ et tangent à (D).

♦ **Exercice 24 page 230**

• Esquisse de la figure recherchée.



On se donne le point A ;

B est tel que AB = c ;

C' est le milieu de [AB] ;

A' point d'intersection de $\mathscr{C}(A ; m_a)$ et $\mathscr{C}(C' ; \frac{b}{2})$;

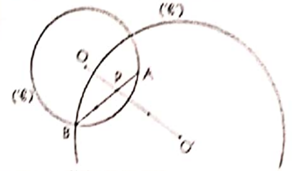
C est tel que A' est le milieu de [BC].

• Construction de la figure.

♦ **Exercice 25 page 230**

(Voir exercice 20.)

• Esquisse de la figure recherchée.



On a A ∈ $(\mathscr{C})$; B ∈ $(\mathscr{C})$.

h est l'homothétie de centre P et de rapport – 2.

$h \left| \begin{array}{cccc} P & A & O & (\mathscr{C}) \\ \hline P & O & O' & (\mathscr{C}') \end{array} \right.$

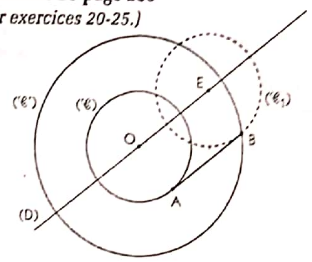
D'où : B ∈ $(\mathscr{C}')$.

B est un point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

• Construction.

♦ **Exercice 26 page 230**

(Voir exercices 20-25.)



E est un point de (D) tel que : OE = 3.

$(\mathscr{C}_1)$ est le cercle de centre E et de rayon 2.

t est la translation de vecteur $\vec{OE}$

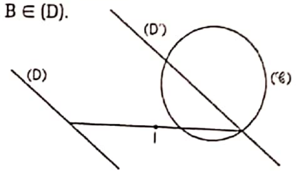
B un point d'intersection de $(\mathscr{C}')$.

A un point tel que $\vec{AB} = \vec{OE}$.

♦ **Exercice 27 page 230**

(Voir exercices 20-25-26.)

A ∈ $(\mathscr{C})$; B ∈ (D).



On considère S_I la symétrie de centre I.

$S_I \left| \begin{array}{ccc} I & A & B\ (D) \\ \hline I & B & A\ (D') \end{array} \right.$ Donc : A ∈ $(\mathscr{C})$ et A ∈ (D').

♦ **Exercice 28 page 230**

ABD est un triangle équilatéral direct ;

ABCD est un losange.

On a : $\text{Mes}\,\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \frac{\pi}{6}$

$AC = AB\sqrt{3}$.

Notons : r la rotation $r(A, \frac{\pi}{6})$

h l'homothétie h (A, 3)

S la similitude $h \circ r$.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{S} \\ \hline A & A \\ B & C \\ (L) & (L') \end{array}$$

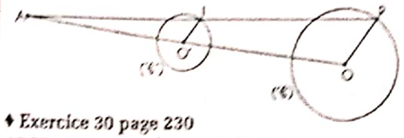
Lorsque B décrit (L), C décrit (L').

♦ **Exercice 29 page 230**

Notons h l'homothétie $h(A ; \frac{1}{2})$.

On a : $h \left| \begin{array}{cccc} A & O & P & (\mathscr{C}) \\ \hline A & O' & I & (\mathscr{C}') \end{array} \right.$

Lorsque P décrit $(\mathscr{C})$, I décrit $(\mathscr{C}')$.



♦ **Exercice 30 page 230**

ABCD est un carré de sens indirect

On a : $AO = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$; $\text{Mes}\,\widehat{(\vec{AB}, \vec{AO})} = -\frac{\pi}{4}$.

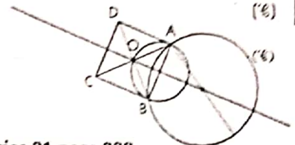
Notons : r la rotation $r(A ; -\frac{\pi}{4})$

h l'homothétie $h(A, \frac{\sqrt{2}}{2})$

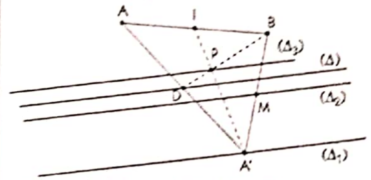
S la similitude $h \circ r$.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{S} \\ \hline A & A \\ B & O \\ E & B \\ (\mathscr{C}) & (\mathscr{C}') \end{array}$$

Lorsque B décrit $(\mathscr{C})$, O décrit $(\mathscr{C}')$.



♦ **Exercice 31 page 230**



1. Notons h_1 l'homothétie $h(A ; 2)$.

$h_1 \left| \begin{array}{ccc} A & D & (\Delta) \\ \hline A & A' & (\Delta_1) \end{array} \right.$ Lorsque D décrit (Δ), A' décrit (Δ_1).

2. Notons h_2 l'homothétie $h(B, \frac{1}{2})$.

$h_2 \left| \begin{array}{ccc} B & A' & (\Delta_1) \\ \hline B & M & (\Delta_2) \end{array} \right.$

3. P est le centre de gravité de ABA'.

On a : $\vec{BP} = \frac{2}{3}\vec{BD}$.

Notons h_3 l'homothétie $h(B, \frac{2}{3})$ $h_3 \left| \begin{array}{ccc} B & D & (\Delta) \\ \hline B & P & (\Delta_3) \end{array} \right.$

Lorsque D décrit (Δ), P décrit (Δ_3).

13. Orthogonalité dans l'espace

(pages 231 à 252 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
– assurer la suite du cours de géométrie de l'espace de la classe de seconde S ;
– compléter la formation de l'élève de première SE par des connaissances de base minimales en géométrie de l'espace.

Commentaires

Il est conseillé aux élèves de travailler sur des maquettes de solides usuels afin de se familiariser avec l'espace.
On habituera les élèves à extraire de la configuration de l'espace, des plans qu'ils dessineront « à plat ».
Ainsi, ils pourront appliquer à ces plans les propriétés du plan. Cependant, l'élève doit savoir que les propriétés du plan ne s'étendent pas toujours à l'espace.

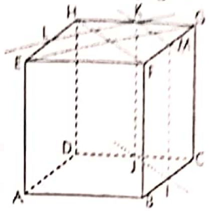
Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Droites orthogonales • Définition • Propriété **Droites et plans orthogonaux** • Définition • Propriétés **Orthogonalité et parallélisme**	• Justifier l'orthogonalité de : – une droite et un plan ; – deux droites ; – deux plans. • Justifier la parallélisme de : – une droite et un plan ; – deux droites ; – deux plans.

Exercices du manuel

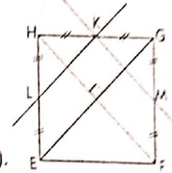
Exercices d'application directe

♦ Exercice 1.a page 233



ABCDEFGH cube
I, J, K, L, M respectivement milieux de [BC], [CD], [GH], [HE]

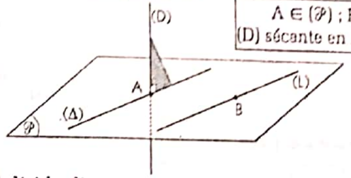
Dans le carré CGFB, (IM) // (CG)
Dans le carré CGHD, (JK)// (CG)
d'où : (IM) // (JK)
Ces deux droites parallèles déterminent le plan (IJK).
• Dans (IJK),
on a : (IM) // (JK) et IM = JK, d'où (IJ) // (MK) **(1)**.
• Dans (FGH),
on a : (EG) ⊥ (FH)
(LK) // (EG)
(MK) // (FH)
d'où : (LK) ⊥ (MK) **(2)**.



(1) et **(2)** donnent (LK) ⊥ (IJ).

♦ Exercice 1.b page 233

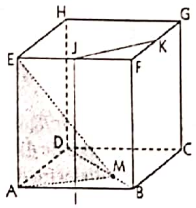
A ∈ (𝒫) ; B ∈ (𝒫)
(D) sécante en A à (𝒫)



À l'aide d'une équerre, on construit la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à (D).
Dans le plan (𝒫), on construit la droite (L) passant par B et parallèle à (Δ).
On a : (Δ) ⊥ (D) et (L) // (Δ), d'où : (L) ⊥ (D).

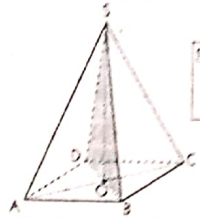
♦ Exercice 1.c page 236

ABCDEFGH cube
I, J, K respectivement milieux de [AB], [EF], [FG]
M ∈ [BD]



• On a (AE) ⊥ (AB)
(AE) ⊥ (AD)
d'où : (AE) ⊥ (ABD).
Par suite, (AE) est orthogonale à toute droite du plan (ABD),
d'où : (AE) ⊥ (AM).
Le triangle AEM est donc rectangle en A.
• On a de même : (AE) ⊥ (EFG)
Par suite, (AE) est orthogonale à toute droite du plan (EFG), d'où (AE) ⊥ (JK).
Dans ABFE, (IJ) // (AE)
d'où : (IJ) ⊥ (JK)
Le triangle IJK est donc rectangle en J.

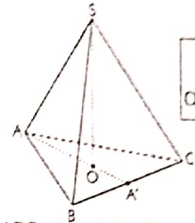
♦ Exercice 1.d page 236



SABCD pyramide régulière à base carrée
O centre de ABCD

[SO] est la hauteur de cette pyramide,
donc : (SO) ⊥ (ABC)
d'où : (SO) ⊥ (AC) **(1)**.
Dans ABCD, (BD) ⊥ (AC) **(2)**.
(1) et **(2)** donnent (AC) ⊥ (BDS).

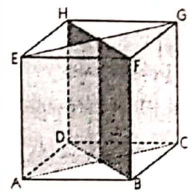
♦ Exercice 1.e page 236



SABC pyramide régulière
A' milieu de [BC]
O centre de gravité de ABC

– ABC est un triangle équilatéral ;
– SBC est un triangle isocèle en S ;
d'où : (AA') ⊥ (BC)
(SA') ⊥ (BC)
donc : (BC) ⊥ (SAA')
par suite : (BC) ⊥ (SA).

♦ Exercice 1.f page 238



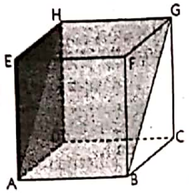
ABCDEFGH cube

Dans ABCD, (AC) ⊥ (BD) **(1)**
Dans ABCDEFGH,
(DH) ⊥ (ABC)
d'où : (DH) ⊥ (AC) **(2)**

(1) et (2) donnent $(AC) \perp (BDH)$;
or : $(AC) \subset (ACE)$
donc : $(ACE) \perp (BDH)$

♦ **Exercice 1.g page 238**

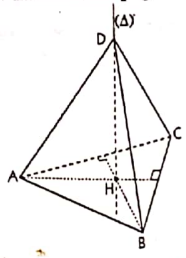
ABCDEFGH cube



On a : $(GH) \perp (AED)$
$(GH) \subset (ABG)$
d'où : $(AED) \perp (ABG)$

♦ **Exercice 1.h page 238**

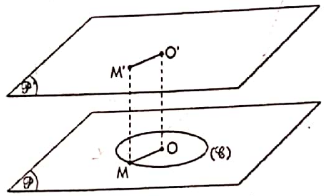
H orthocentre de ABC
$D \notin (ABC)$
$(HD) \perp (ABC)$



on a : $(DH) \perp (ABC)$
d'où : $(DH) \perp (BC)$ (1)
or : $(BC) \perp (AH)$ (2)
(1) et (2) donnent
$(BC) \perp (AHD)$.

♦ **Exercice 2.a page 240**

$(\mathscr{P}) \,//\, (\mathscr{P}')$
Cercle $(\mathscr{C})$ de centre O
$(\mathscr{C}) \subset (\mathscr{P})$



M est un point du cercle $\mathscr{C}(O ; r)$.
[O'M'] est le projeté orthogonal de [OM] sur $(\mathscr{P}')$.
O'M' = OM car $(\mathscr{P}) \,//\, (\mathscr{P}')$;
donc $M' \in \mathscr{C}(O' ; r)$,
lorsque M décrit $\mathscr{C}(O ; r)$, M' décrit $\mathscr{C}(O' ; r)$.

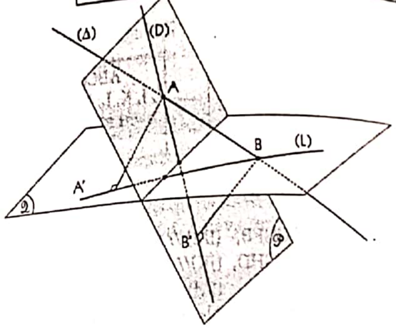
♦ **Exercice 2.b page 240**

Notons A' le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{Q})$
B' le projeté orthogonal de B sur $(\mathscr{P})$.

On a ; (D) = (AB)' ; (L) = (BA')
On a : $(AA') \perp (\mathscr{Q})$; $(BB') \perp (\mathscr{P})$
d'où : $(ABA') \perp (\mathscr{Q})$; $(ABB') \perp (\mathscr{P})$.

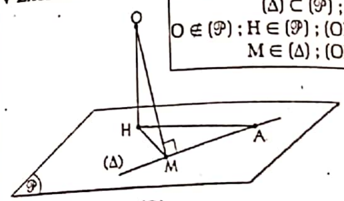
Notons $(\mathscr{P}')$ le plan contenant (D) et perpendiculaire à $(\mathscr{P})$;
$(\mathscr{Q}')$ le plan contenant (L) et perpendiculaire $(\mathscr{Q})$.
$(\mathscr{P}')$ et $(\mathscr{Q}')$ sont sécantes suivant (Δ).

$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ plans sécants
(Δ) droite sécante à $(\mathscr{P})$ en A
sécante à $(\mathscr{Q})$ en B
(D) projetée orthogonale de (Δ) sur $(\mathscr{P})$
(L) projetée orthogonale de (Δ) sur $(\mathscr{Q})$



♦ **Exercice 2.c page 241**

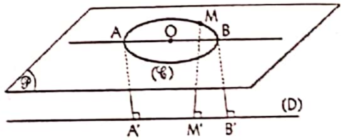
$(\Delta) \subset (\mathscr{P})$; $A \in (\Delta)$
$O \notin (\mathscr{P})$; $H \in (\mathscr{P})$; $(OH) \perp (\mathscr{P})$
$M \in (\Delta)$; $(OM) \perp (\Delta)$



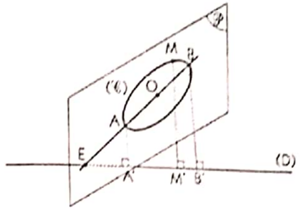
On a : $(OH) \perp (\mathscr{P})$
d'où : $(OH) \perp (\Delta)$
de plus : $(OM) \perp (\Delta)$
d'où : $(\Delta) \perp (OHM)$
donc : $(\Delta) \perp (HM)$.
M appartient donc au cercle de diamètre [AH].

♦ **Exercice 2.d page 241**

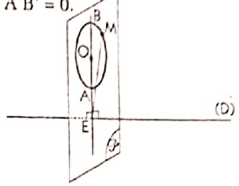
Notons $(\mathscr{P})$ le plan du cercle $(\mathscr{C})$.
1. $(D) \,//\, (\mathscr{P})$ *(voir figure ci-dessous)*
$(\mathscr{C})$ admet un diamètre [AB] tel que : $(AB) \,//\, (D)$
[A'B'] est le projeté sur (D) de [AB], donc de $(\mathscr{C})$
et l'on a : A'B' = AB = 10



2. $(D) \not\parallel (\mathscr{P})$ *(voir figure ci-dessous)*
$(\mathscr{C})$ n'admet pas de diamètre parallèle à (D).
[AB] est le diamètre de $(\mathscr{C})$ tel que :
$(AB) \cap (D) = \{E\}$.
[A'B'] est le projeté sur (D) de [AB], donc de $(\mathscr{C})$
et l'on a : A'B'< AB ; A'B'< 10.

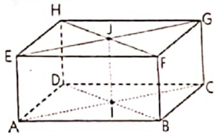


3. $(D) \perp (\mathscr{P})$ *(voir figure ci-dessous)*
E est le projeté sur (D) de [AB], donc de $(\mathscr{C})$
et l'on a : E = [A'B'] ; A'B' = 0.



♦ **Exercice 3.a page 243**

ABCDEFGH pavé droit
I, J centres resp.
de ABCD et EFGH

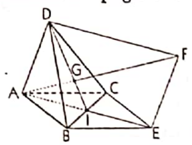


1. $\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{EF} = \vec{HG}$
$\vec{IJ} = \vec{AE} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{DH}$
$\vec{AI} = \vec{IC} = \vec{EJ} = \vec{JG}$

2. $\vec{DC} + \vec{HE} = \vec{DB}$
$\vec{EI} + \vec{FJ} = \vec{ED}$
$\vec{CG} + \vec{DI} = \vec{DJ}$

♦ **Exercice 3.b page 243**

ABCD tétraèdre

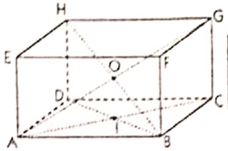


1. $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$.

2. Construction
Notons I le milieu de [BC].
– Dans le plan (ABC) : $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AI} = \vec{AE}$.
(I est le centre du parallélogramme ABEC.)
– Dans le plan (AID) :
$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 2\vec{AI} + \vec{AD} = \vec{AE} + \vec{AD} = \vec{AF}$.

♦ **Exercice 3.c page 244**

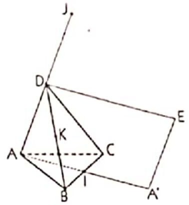
ABCDEFGH pavé droit
I centre de ABCD
O centre du pavé droit



• Les points D, I, C, O ne sont pas coplanaires car O n'appartient pas au plan de la face ABCD.
Donc les vecteurs $\vec{DI}$, $\vec{IC}$, $\vec{OI}$ ne sont pas coplanaires ; d'où $(\vec{DI}, \vec{IC}, \vec{CI})$ est une base de $\mathscr{W}$.
• Coordonnées dans cette base :
$\vec{AE}\,(0 ; 0 ; -2)$ $\vec{AD}\,(-1 ; 1 ; 0)$
$\vec{AH}\,(-1 ; 1 - 2)$ $\vec{AG}\,(0 ; 2 ; -2)$

♦ **Exercice 3.d page 244**

ABCD tétraèdre



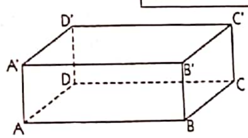
Repère (A ; B ; C ; D)
I (0,5 ; 0,5 ; 0) est le milieu de [BC].
J (0 ; 0 ; 1) est tel que D est le milieu de [AJ].
E (1 ; 1 ; 1) est tel que AA'ED est un parallélogramme (avec $\vec{AA'} = 2\vec{AI}$).
K milieu de [BD] ; K (0,5 ; 0 ; 0,5).

Exercices d'apprentissage

♦ **Exercice 1 page 248**

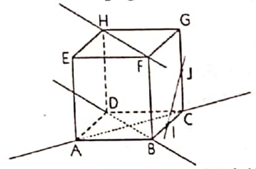
• On a : $(A'A) \perp (AB)$ et $(DC) \,//\, (AD)$
d'où : $(A'A) \perp (DC)$
• On a : $(A'A) \perp (AD)$ et $(BC) \,//\, (AD)$
d'où : $(A'A) \perp (BC)$

BCDA'B'C'D' pavé droit



♦ **Exercice 2 page 248**

ABCDEFGH cube



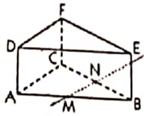
• On a : $(AC) \perp (BD)$ et $(HF) \,//\, (BD)$
d'où : $(AC) \perp (HF)$
• On a : $(IJ) \,//\, (BG)$ et $(BG) \,//\, (AH)$

d'où : (IJ) // (AH)
de plus : (AH) ⊥ (ED)
donc : (IJ) ⊥ (ID).

♦ Exercice 3 page 248

• On a : (AA') ⊥ (A'B') et (AA') ⊥ (A'D')
d'où : (AA') ⊥ (A'B'C').
• Par suite, (AA') est orthogonal à toute droite contenue dans (A'B'C'), donc : (AA') ⊥ (B'D').

♦ Exercice 4 page 248



ABCDEF prisme droit

• On a : (AD) ⊥ (DE) et (AD) ⊥ (DF)
d'où : (AD) ⊥ (EDF).
• de plus : (EDF) // (ABC)
donc : (AD) ⊥ (ABC),
par suite, (AD) est orthogonal à toute droite contenue dans (ABC)
donc : (AD) ⊥ (MN).

♦ Exercice 5 page 248

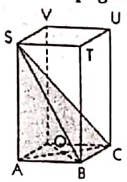


figure 1

ABCDSTUV pavé droit

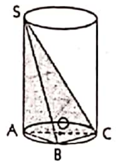


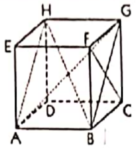
figure 2

cylindre droit

• *Dans la figure 1*
ABTS et ABCD sont des rectangles, les triangles SAB et ABC sont rectangles respectivement en A et en B.
On a : (AS) ⊥ (ABC)
d'où : (AS) ⊥ (AC)
donc SAC est un triangle rectangle en A.
On a : (BC) ⊥ (SAB)
d'où : (BC) ⊥ (SB)
donc SBC est un triangle rectangle en B.
• *Dans la figure 2*
On a : (SA) ⊥ (ABC)
d'où : (SA) ⊥ (AB) et (SA) ⊥ (AC)
donc SAB et SAC sont des triangles rectangles en A.
ABC est un triangle rectangle en B car il est inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AC].
On a : (BC) ⊥ (BA) et (BC) ⊥ (AS)
d'où : (BC) ⊥ (SAB)
d'où : (BC) ⊥ (SB)
donc SBC est un triangle rectangle en B.

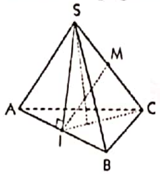
♦ Exercice 6 page 248

1. On a : (GH) ⊥ (GF) et (GH) ⊥ (GC)
d'où : (GH) ⊥ (CFG)
donc : (GH) ⊥ (CF) **(1)**
2. ABGH est un rectangle *(voir le 9)*
donc : (BC) // (AH)
or : (FC) ⊥ (BC)
d'où : (FC) ⊥ (AH) **(2)**
(1) et **(2)** donnent (FC) ⊥ (AGH) **(3)**.
3. (AGH) étant le plan du rectangle ABGH, **(3)** permet de déduire (FC) ⊥ (AG) et (FC) ⊥ (BH).



ABCDEFGH cube

♦ Exercice 7 page 248



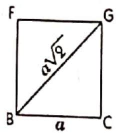
SABC pyramide régulière
I milieu de [AB]
M ∈ [SC]

Dans la pyramide régulière de sommet S, la base ABC est un triangle équilatéral.
Les faces SAB, SBC, SCA sont des triangles isocèles superposables.
1. Dans le triangle isocèle SAB, (SI) est la médiatrice de [AB].
De même, dans ABC, (CI) est la médiatrice de [AB].
On a : (AB) ⊥ (SI) et (AB) ⊥ (CI)
d'où : (AB) ⊥ (SIC) **(1)**.
2. et 3. **(1)** permet de déduire :
(AB) ⊥ (SC) et (AB) ⊥ (IM).

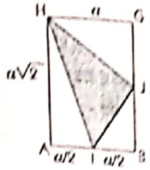
♦ Exercice 8 page 248 *(voir le 7)*

♦ Exercice 9 page 248

1. On a : (GH) ⊥ (GF) et (GH) ⊥ (GC)
d'où : (GH) ⊥ (GFC)
(GH) ⊥ (GB)
On a : (GH) // (EF) et (EF) // (AB)
d'où : (GH) // (AB) et GH = AB.
ABGH est donc un rectangle.



2. • Dans le plan (BCG), on obtient
$BG = a\sqrt{2}$



• Dans le plan (ABC), on obtient
$HI^2 = \frac{9}{4}a^2$
$IJ^2 = \frac{3}{4}a^2$
$HJ^2 = \frac{6}{4}a^2$

d'où : $HI^2 = IJ^2 + HJ^2$.
IJH est donc un triangle rectangle en J.

♦ Exercice 13 page 249

On a : (MA) ⊥ (MB) **(1)**
On a : (SA) ⊥ (AMB)
d'où : (SA) ⊥ (MB) **(2)**
(1) et **(2)** donnent (MB) ⊥ (SAM)
donc : (SAM) ⊥ (SBM)

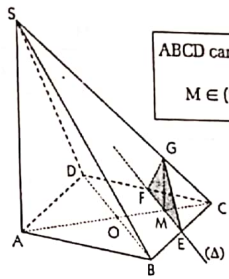
♦ Exercice 14 page 249

SABC étant une pyramide régulière, SAB est isocèle et ABC est équilatéral. Par suite,
on a : (SI) ⊥ (AB) et (CI) ⊥ (AB)
d'où : (AB) ⊥ (SIC) **(1)**
or : (AB) ⊂ (ABC) **(2)** et (AB) ⊂ (SAB) **(3)**
(1) et **(2)** donnent (ABC) ⊥ (SIC) ;
(1) et **(3)** donnent (SAB) ⊥ (SIC).

♦ Exercice 15 page 249

1. H étant l'orthocentre de ABC,
• on a : (DA) ⊥ (BC) et (HA) ⊥ (BC)
d'où : (BC) ⊥ (DAH)
de plus : (BC) ⊂ (ABC)
donc : (DAH) ⊥ (ABC).
• On démontre de même que : (DBH) ⊥ (ABC).
2. *(Voir exercice 7)*

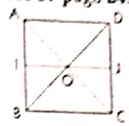
♦ Exercice 16 page 249

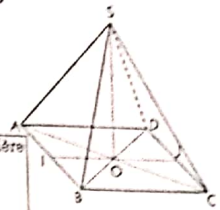


ABCD carré de centre O
(SA) ⊥ (ABC)
M ∈ $(\mathscr{P})$; $(\mathscr{P})$ ⊥ (AC)

1. *a)* On a : (AC) ⊂ (ABC) et (AC) ⊥ $(\mathscr{P})$
donc : (ABC) ⊥ $(\mathscr{P})$
b) On a : (Δ) = (ABC) ∩ $(\mathscr{P})$ et (AC) ⊥ $(\mathscr{P})$
d'où : (AC) ⊥ (Δ) **(1)**
or : (AC) ⊥ (BD) **(2)**
Dans le plan (ABC), **(1)** et **(2)** donnent (Δ) // (BD) **(3)**.
2. *a)* On a : (AC) ⊥ $(\mathscr{P})$ et (AC) ⊂ (SAC)
donc : $(\mathscr{P})$ ⊥ (SAC) **(4)**
b) Construction de $(\mathscr{P})$ ∩ SABC
• Dans le plan (ABC), tracer (Δ) passant par M et parallèle à (BD).
(Δ) coupe (BC) en E et (CD) en F.
• Dans le plan (SAC), tracer la droite parallèle en M à (SA), elle coupe (SC) en G.
• Dans le cas de figure ci-dessus,
on a : (EF) = $(\mathscr{P})$ ∩ (ABC)
(EG) = $(\mathscr{P})$ ∩ (SBC)
(GF) = $(\mathscr{P})$ ∩ (SCD)
donc : EFG = $(\mathscr{P})$ ∩ SABCD.

♦ Exercice 17 page 249





SABCD pyramide régulière
ABCD carré
I milieu de [AB]
J milieu de [CD]

1. On a : (SO) ⊥ (ABC)
donc : (SO) ⊥ (AC) **(1)**
(SO) ⊥ (AB) **(2)**
or : (AC) ⊥ (BD) **(3)**
(1) et **(3)** donnent (AC) ⊥ (SBD).
par conséquent : (SAC) ⊥ (SBD)
2. On a : (AB) ⊥ (IJ) et (AB) ⊥ (SO)
d'où : (AB) ⊥ (SIJ)
par conséquent : (SAB) ⊥ (SIJ)
de même : (SCD) ⊥ (SIJ).

♦ Exercice 18 page 249

1. On a : (AB) ⊥ (DI) et (AB) ⊥ (CI)
d'où : (AB) ⊥ (CID) **(1)**.
• On a : (DC) ⊥ (AJ) et (DC) ⊥ (BJ)
d'où : (DC) ⊥ (AJB) **(2)**.
2. On a **(1)** et AB ⊂ (ABC)
d'où : (ABC) ⊥ (CID).
• On a **(2)** et (DC) ⊂ (ACD)
d'où : (ACD) ⊥ (AJB).

♦ Exercice 19 page 249

1. On a : (JK) // (BD) et $JK = \frac{1}{2}BD$
(IL) // (BD) et $IL = \frac{1}{2}BD$
d'où : (JK) // (IL) et JK = IL
de même : (IJ) // (LK) et IJ = LK
donc IJKL est un losange de centre O.

On démontre de même que MLNJ et KNIM sont des losanges de centre O.

2. Les diagonales d'un losange sont orthogonales.

On a : $(IK) \perp (LJ)$ et $(IK) \perp (MN)$

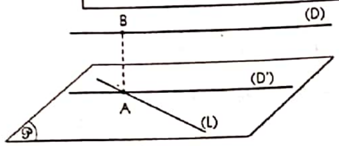
d'où : $(IK) \perp (JLM)$.

3. Par conséquent : $(IKM) \perp (JLM)$.

4. *(Voir les questions 3 et 4).*

♦ Exercice 20 page 249

$(D) \parallel (\mathcal{P})$; $(L) \subset (\mathcal{P})$; $(L) \not\parallel (D)$
(D') projeté orthogonal de (D) sur $(\mathcal{P})$
$(D') \cap (L) = \{A\}$



1. On a $(D) \parallel (\mathcal{P})$, donc $(D') \parallel (D)$.

(D) et (L) ne sont pas parallèles, donc (D') et (L) sont sécantes en un point A.

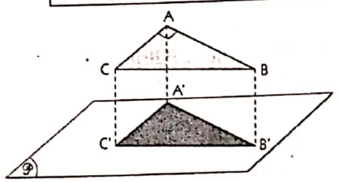
2. A étant le projeté de B, $(AB) \perp (\mathcal{P})$

d'où : $(AB) \perp (L)$ et $(AB) \perp (D')$

d'où : $(AB) \perp (D)$.

♦ Exercice 21 page 249

ABC triangle rectangle en A
A'B'C' projeté orthogonal de ABC sur $(\mathcal{P})$



1. $(AB) \parallel (\mathcal{P})$; $(AC) \parallel (\mathcal{P})$

d'où : $(ABC) \parallel (\mathcal{P})$

$(A'B') \parallel (AB)$ et $A'B' = AB$

$(A'C') \parallel (AC)$ et $A'C' = AC$

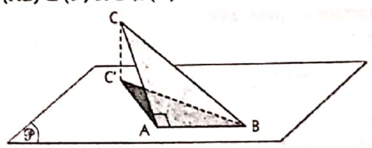
$(B'C') \parallel (BC)$ et $B'C' = BC$.

Le triangle A'B'C' est donc rectangle en A'.

Remarque : lorsque $(ABC) \perp (\mathcal{P})$, le projeté orthogonal du triangle ABC sur $(\mathcal{P})$ est un segment.

On suppose, dans les cas suivants, que les plans (ABC) et $(\mathcal{P})$ ne sont pas perpendiculaires.

2. $(AB) \subset (\mathcal{P})$ et $C \notin (\mathcal{P})$



On a : $(AB) \perp (AC)$ **(1)**

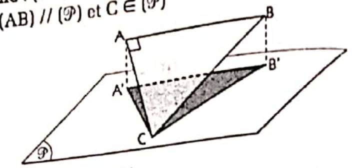
$(CC') \perp (\mathcal{P})$

d'où : $(CC') \perp (AB)$ **(2)**

(1) et **(2)** donnent $(AB) \perp (ACC')$

donc : $(AB) \perp (A'C')$

3. $(AB) \parallel (\mathcal{P})$ et $C \in (\mathcal{P})$



On a : $(AA') \perp (\mathcal{P})$

d'où : $(AA') \perp (A'B')$ **(1)**

On a : $(CA) \perp (AB)$ et $(AB) \parallel (A'B')$

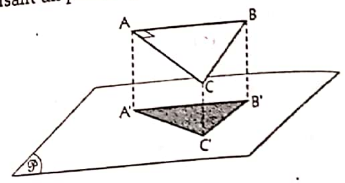
d'où : $(CA) \perp (A'B')$ **(2)**

(1) et **(2)** donnent $(A'B') \perp (AA'C)$

donc : $(A'B') \perp (A'C)$

4. $(AB) \parallel (\mathcal{P})$.

On peut se ramener à l'un des cas précédents en utilisant un plan $(\mathcal{Q})$ parallèle à $(\mathcal{P})$.



♦ Exercice 22 page 250

On a : $(AB) \perp (\mathcal{P})$

d'où : $(AB) \perp (D)$ **(1)**

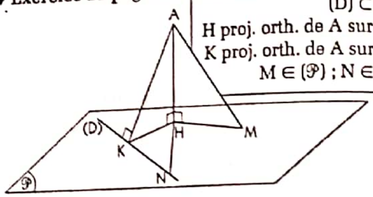
On a : $(BC) \perp (D)$ **(2)**

(1) et **(2)** donnent $(D) \perp (ABC)$,

donc : $(D) \perp (AC)$.

♦ Exercice 23 page 250

$(D) \subset (\mathcal{P})$
H proj. orth. de A sur $(\mathcal{P})$
K proj. orth. de A sur (D)
$M \in (\mathcal{P})$; $N \in (D)$



1. On a : $(AH) \perp (\mathcal{P})$

d'où : $(AH) \perp (HM)$.

AHM est donc un triangle rectangle en H ; son hypoténuse est (AM).

donc : $AM > AH$.

2. On a $(D) \perp (AH)$ et $(D) \perp (AK)$

d'où : $(D) \perp (AHK)$

donc : $(D) \perp (HK)$

HKN est donc un triangle rectangle en K ; son hypoténuse est (HN)

donc : $HN > HK$.

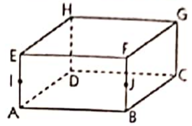
♦ Exercice 24 page 250

1. $\vec{AP} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$; **2.** $\vec{BQ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$; **3.** $\vec{CR} = -\frac{1}{2}\vec{CF}$.

♦ Exercice 25 page 250

$\vec{IA} + \vec{EJ} = \vec{EB} = \vec{HC}$

$\vec{IE} + \vec{CD} + \vec{FJ} = \vec{CD} = \vec{FE} = \vec{GH} = \vec{BA}$.



ABCDEFGH pavé droit
I milieu de [AE]
J milieu de [BF]

♦ Exercice 26 page 250

1. $\vec{i} + \vec{j} = \vec{AC}$

$\vec{j} + \vec{k} = \vec{AH}$

$\vec{k} + \vec{i} = \vec{AF}$

2. $\vec{i} - \vec{j} = \vec{DB}$

$\vec{j} - \vec{k} = \vec{ED}$

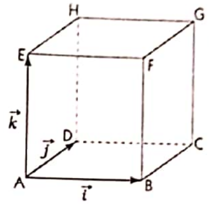
$\vec{k} - \vec{i} = \vec{BE}$

3. $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = \vec{DF}$

$\vec{j} - \vec{k} + \vec{i} = \vec{EC}$

$\vec{k} - \vec{i} + \vec{j} = \vec{FD}$

4. $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \vec{AG}$



ABCDEFGH cube

♦ Exercice 28 page 250

1. $\vec{AB} = 4\vec{i}$; $\vec{AD} = 4\vec{j}$; $\vec{AA'} = 4\vec{k}$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec{AD}\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$; $\vec{AA'}\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$.

2. $B(4\,;0\,;0)$; $D(0\,;4\,;0)$; $A'(0\,;0\,;4)$;

$C(4\,;4\,;0)$; $B'(4\,;0\,;4)$; $D'(0\,;4\,;4)$;

$C'(4\,;4\,;4)$.

♦ Exercice 29 page 250

1. $A(0\,;0\,;0)$; $B(1\,;0\,;0)$; $D(0\,;1\,;0)$;

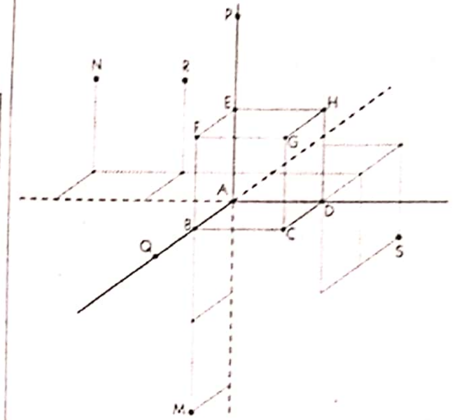
$H(0\,;0\,;1)$; $E(0\,;-1\,;1)$; $F(1\,;-1\,;1)$

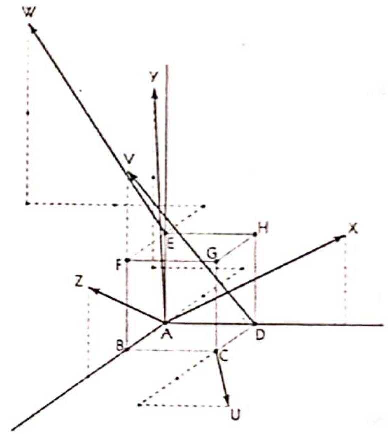
$G(1\,;0\,;1)$; $C(1\,;1\,;0)$.

2. $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{AG}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{AE}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{ED}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

♦ Exercice 30 page 250

ABCDEFGH cube





Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 31 page 251

• Puisque $(AB) \subset (\mathcal{P})$ et $(AD) \perp (\mathcal{P})$,

alors $\widehat{ACB}$ est le projeté orthogonal de $\widehat{DCB}$.

• $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit dans un cercle de diamètre $[AC]$, il est donc droit.

• On a : $(AD) \perp (\mathcal{P})$ et $(AC) \perp (CB)$,

d'où : $(DC) \perp (CB)$ *(voir exercice 23).*

♦ Exercice 32 page 251

1. On a : $(AB) \perp (CD)$

$(BH) \perp (CD)$

d'où : $(CD) \perp (ABH)$

donc : $(CD) \perp (AH)$

2. On a : $(CD) \perp (ABH)$

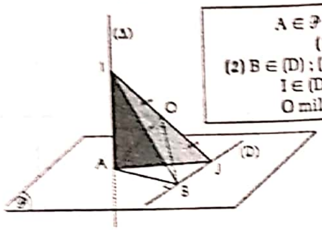
d'où : $(AI) \perp (CD)$

de plus : $(AI) \perp (BI)$

donc : $(AI) \perp (BCD)$

3. On a : (AI) ⊥ (BCD)
d'où : (BC) ⊥ (AI)
de plus : (BC) ⊥ (AD)
donc : (BC) ⊥ (AID)
par suite : (BC) ⊥ (DI)

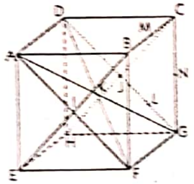
♦ Exercice 33 page 251



A ∈ $\mathcal{P}$; (D) ⊂ $\mathcal{P}$
(1) (Δ) ⊥ $\mathcal{P}$
(2) B ∈ (D) ; (AB) ⊥ (D)
I ∈ (D) ; J ∈ (D)
O milieu de [IJ]

- (1) donne (Δ) ⊥ (AJ), donc IAJ est rectangle en A.
- (1) et (2) donnent (IB) ⊥ (D) *(exercice 23)*, donc IBJ est rectangle en B.
- IAJ et IBJ ont pour même hypoténuse [IJ] ; ils sont donc inscriptibles dans le cercle de diamètre [IJ] de centre O, d'où : OA = OB ; donc : AOB est isocèle en O.

♦ Exercice 34 page 251



ABCDEFGH cube
M milieu de [CD]
N milieu de [OG]

- On désigne par I le centre de ABFE et par J le centre de DCGH.

On démontre que :

(ADG ⊥ (ABF) car : $\left\{\begin{array}{l}\text{on a : (AD) ⊥ (AB)}\\ \text{(AD) ⊥ (AE)} \quad \textbf{(1)}\\ \text{d'où : (AD) ⊥ (ABF)}\end{array}\right.$

(ADG) ⊥ (DCG) car : (ABF) // (DCG).

par conséquent :

(BE) ⊥ (ADG) car : $\left\{\begin{array}{l}\text{on a : (BI) ⊥ (AF)}\\ \textbf{(1)}\text{ donne (BE) ⊥ (AD)}\end{array}\right.$

(CH) ⊥ (ADG)
donc :
I est le projeté orthogonal de B et E sur (ADG)
J est le projeté orthogonal de C et H sur (ADG).

- On désigne par K le milieu de [IJ], L le milieu de [JG].

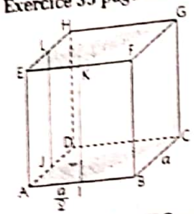
On démontre que :

(BCH) ⊥ (ADG) car : $\left\{\begin{array}{l}\text{(BE) ⊥ (AF)}\\ \text{(BE) ⊥ (IJ)}\\ \text{(BE) ⊥ (ADG)}\end{array}\right.$

(MK) ⊥ (ADG) car : $\left\{\begin{array}{l}\text{(MK) ⊥ (IJ)}\\ \text{(MK) ⊥ (AF)}\end{array}\right.$

Donc K est le projeté orthogonal de M sur (ADG).
L est le projeté orthogonal de N sur (ADG).

♦ Exercice 35 page 251



ABCDEFGH cube
I milieu de [AB]
J milieu de [AD]
K milieu de [EF]
L milieu de [EH]

Les triangles IBC et JDC ont la même aire $\frac{a^2}{4}$.

La base AICJ du prisme droit AICJEKGL a donc pour aire : $a^2 - (2 \times \frac{a^2}{4}) = \frac{a^2}{2}$.

Le prisme droit AICJEKGL a pour volume :

$$\frac{a^2}{2} \times a = \frac{a^3}{2}.$$

$\frac{a^3}{2}$ est la moitié du volume du cube.

♦ Exercice 36 page 251

Le solide ABCDIJGH est un prisme droit de bases ADHI et BCGJ, on peut alors le noter ADHIBCGJ, sa hauteur est [AB]. D'où le calcul de son volume.

♦ Exercice 37 page 251

1. La pyramide HBIDC de sommet H a pour base le trapèze BIDC et pour hauteur [DH], V_1 est son volume.

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{ID + BC}{2} \times DC \times DH = \frac{1}{4} a^3$$

2. La pyramide FBCHE de sommet F a pour base le rectangle BCHE et pour hauteur [FJ] (J étant le centre du carré ABFE).

V_2 est son volume :

$$V_2 = \frac{1}{3} \times (BC \times EB) \times \frac{1}{2} AF = \frac{a^3}{3}.$$

3. La pyramide IBCHE de sommet I a pour base le rectangle BCHE et pour hauteur [IK] (K étant le centre du rectangle BCHE).

V_3 est son volume :

$$V_3 = \frac{1}{3} \times (BC \times EB) \times IK = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3.$$

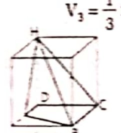


fig 1

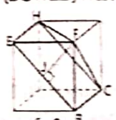


fig 2

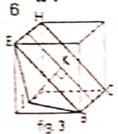
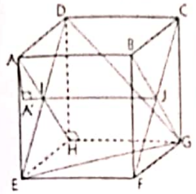


fig 3

♦ Exercice 38 page 251



ABCDEFGH cube
I centre de AEHD
J centre de BFGC
A' proj. orth. de A sur (GI)

1. On a : (DE) ⊥ (IJ) et (DE) ⊥ (AH)
d'où : (DE) ⊥ (AIG)
donc : (DEG) ⊥ (AIG).
On a : (DE) ∩ (AI) = (I)
donc : (DEG) ∩ (AIG) = (IG).

2. *a)* On a : (AA') ⊥ (IG) **(1)**
On a : (DE) ⊥ (AIG) et A' ∈ (AIG)
d'où : (DE) ⊥ (AA') **(2)**
(1) et **(2)** donnent (AA') ⊥ (DEG).
A' est donc le projeté orthogonal de A sur (ADG).

b) Dans (AIG), les triangles AA'I et GHI sont rectangles respectivement en A' et en H ; de plus, leurs angles en I sont opposés par le sommet, ils sont donc semblables.

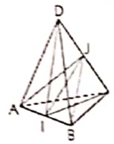
On a : $\frac{AA'}{GH} = \frac{AI}{IG}$;

or : $GH = a$; $AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $IG = a\sqrt{\frac{3}{2}}$

d'où : $AA' = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

c) On a : $IA' = \frac{a}{\sqrt{6}}$; $IG = a\sqrt{\frac{3}{2}}$; d'où : $IA' = \frac{1}{3} IG$.

♦ Exercice 39 page 251



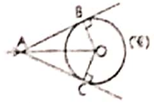
AC = BD ;
AD = BC
I milieu de [AB] ;
J milieu de [CD]

1. Les triangles BCD et ACD sont superposables ; leurs médianes [BJ] et [AJ] ont donc la même longueur,
d'où : le triangle ABJ est isocèle en J ;
par suite, (IJ) est la médiatrice de [AB],
donc : (IJ) ⊥ (AB) **(1)**
de même : (IJ) ⊥ (DC) **(2)**.

2. Supposons AC = AD.
Les triangles ABD, ACD, ABC et ACD sont donc isocèles respectivement en D, A, C, B ;
d'où : (DI) ⊥ (AB)
(CI) ⊥ (AB)
donc : (AB) ⊥ (CDI)
par suite : (AB) ⊥ (CD).

♦ Exercice 40 page 251

1. *a)* Vérifier que : (AB) ⊥ (SOB),
donc (SAB) ⊥ (SOB).
b) De même, (SAC) ⊥ (SOC).



2. *a)* Dans le plan ($\mathcal{P}$), (OA) est un axe de symétrie de la figure ci-contre
d'où : (BC) ⊥ (AO) **(1)**
or : (SO) ⊥ ($\mathcal{P}$) et (BC) ⊂ ($\mathcal{P}$)
d'où : (BC) ⊥ (SO) **(2)**.
(1) et **(2)** donnent (BC) ⊥ (SAO) **(3)**,
d'où : (BC) ⊥ (SA)
b) **(3)** donne (SBC) ⊥ (SAO).

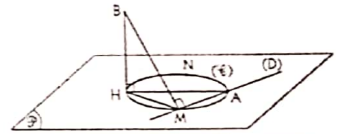
♦ Exercice 41 page 252

On a : (OH) ⊥ ($\mathcal{P}$)
(OH') ⊥ ($\mathcal{P}$')
(Δ) = ($\mathcal{P}$) ∩ ($\mathcal{P}$')
d'où : (Δ) ⊥ (OH) et (D) ⊥ (OH')
donc : (Δ) ⊥ (OHH').

♦ Exercice 42 page 252

On a : (EG) ⊥ (HF)
(HD) ⊥ (EG) car (HD) ⊥ (EGH)
d'où : (EG) ⊥ (HDF)
donc : (EG) ⊥ (DF) **(1)**.
On démontre de même que : (EB) ⊥ (DF) **(2)**.
(1) et **(2)** donnent (DF) ⊥ (EGB).
DBFH est un rectangle ; le triangle DHF est donc rectangle en H.
On démontre que $IF = \frac{1}{3} DF$.

♦ Exercice 43 page 252



(D) est une droite de ($\mathcal{P}$) passant par A.
H est le projet orthogonal de B sur ($\mathcal{P}$).
M est le projeté orthogonal de B sur (D).

- On vérifie que (HM) ⊥ (MA) *(voir exercice 24)*.

M est sur le cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [AH].

- N étant un point de ($\mathscr{C}$),

on a : (HN) ⊥ (NA)
d'où : (BN) ⊥ (NA) *(voir exercice 23)*.

♦ Exercice 44 page 252

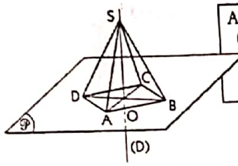
Dans un tétraèdre régulier, toutes les faces sont équilatérales et superposables.
1. I étant le milieu de [AB], (IC) ⊥ (AB) et (ID) ⊥ (AB),
donc : (AB) ⊥ (ICD) **(1)**.

2. Par conséquent :
(ABC) ⊥ (ICD) et (ABD) ⊥ (ICD) car (ABC) et (ABD) sont des plans qui contiennent (AB).

3. De même, on démontre que : (BC) ⊥ (JAD) **(2)**
d'où : (ABC) ⊥ (JAD)
(BCD) ⊥ (JAD).

4. **(1)** et **(2)** donnent (AB) ⊥ (CD) et (BC) ⊥ (AD).
On démontre de même que : (CA) ⊥ (BD).

♦ Exercice 45 page 252



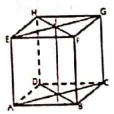
ABCD losange de (𝒫)
O centre du losange
(D) ⊥ (𝒫) ; O ∈ (D)
S ∈ (D) ; O ∉ (𝒫).

a) On a : (AC) ⊥ (BD) [car ABCD losange]
(AC) ⊥ (SO) [car (D) ⊥ (𝒫)]
d'où : (AC) ⊥ (SBD)
donc : (AC) ⊥ (SB) ; (AC) ⊥ (SD)

b) De même qu'en *a)*, on démontre que :
(BD) ⊥ (SA) ; (BD) ⊥ (SC).

c) On sait que : (AC) ⊥ (SBD)
de plus : (AC) ⊂ (SAC)
donc : (SAC) ⊥ (SBD).

♦ Exercice 46 page 252

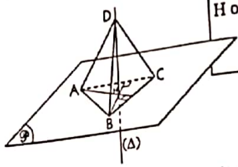


ABCDEFGH cube
I centre de ABCD
J centre de EFGH

a) Dans le rectangle ACGE,
on a : (IJ) // (AE)
or : (AE) ⊥ (ABC) ; (AE) ⊥ (EFG)
donc : (IJ) ⊥ (ABC) ; (IJ) ⊥ (EFG).

b) On démontre que (AEC) ⊥ (BDF) ;
(voir exercice 48).

♦ Exercice 47 page 252



ABC triangle de (𝒫)
H orthocentre de ABC
(Δ) ⊥ (𝒫)
D ∈ (Δ) ; D ∉ (𝒫)

a) On a : (BC) ⊥ (ADH) **(1)** (à justifier)
(BC) ⊂ (BDC)
donc : (ADH) ⊥ (BDC)

b) **(1)** donne : (BC) ⊥ (AD)
de même : (CA) ⊥ (BD)
(AB) ⊥ (CD).

♦ Exercice 48 page 252

1. ACGE est un rectangle de centre O.
Posons : AE = a
d'où : AC = $a\sqrt{2}$; EC = $a\sqrt{3}$.
Dans le triangle AOC, on a :

$$\cos(\widehat{AOC}) = \frac{AO^2 + OC^2 - AC^2}{2OA \times OC} = -\frac{1}{3}.$$

♦ Exercice 49 page 252

Dans un cube de côté a, la diagonale d'une face a pour longueur $a\sqrt{2}$.
Les triangles AIB et AJE sont rectangles respectivement en B et en E et sont superposables.

On a : AI = AJ = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$,
donc AIJ est isocèle en A. On obtient :

$\cos(\widehat{AIJ}) = \frac{1}{2}$; mes $(\widehat{AIJ}) = \frac{\pi}{3}$.

14. Dénombrement

(pages 253 à 274 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
– faire la mise en place de méthodes et techniques de dénombrement ;
– apprendre à choisir l'outil approprié pour résoudre des problèmes de dénombrement ;
– apprendre à modéliser des situations concrètes.

Commentaires

La mise en place des méthodes passe d'abord par une manipulation des arbres de choix, des diagrammes, des tableaux, des applications...
La modélisation est la partie la plus difficile.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Dénombrement de parties d'ensembles finis • **Définition – propriété** **Dénombrement de listes** **Dénombrement d'arrangements et de permutations** **Dénombrement de combinaisons**	• Utiliser des ensembles finis pour dénombrer. • Utiliser des arbres de choix pour dénombrer. • Utiliser un raisonnement par disjonction de cas. • Modéliser à l'aide d'applications, d'injections, de bijections. • Reconnaître des arrangements, des permutations, des combinaisons.

EXERCICES DU MANUEL

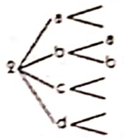
Exercices d'application directe

♦ **Exercice 2.a page 258**

E = {1 ; 2 ; 3} ; F = {a ; b ; c ; d} ; G = {a ; b}.

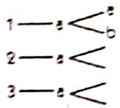
card E × F × G = 3 × 4 × 2 = 24.

• Éléments de E × F × G ayant pour 1^er^ terme 2 :



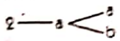
1 él. × 4 él. × 2 él. = 8 éléments

• Éléments de E × F × G ayant pour 2^e^ terme a :



3 él. × 1 él. × 2 él. = 6 éléments

• Éléments de E × F × G ayant pour 1^er^ terme 2 et pour 2^e^ terme a :



1 él. × 1 él. × 2 él. = 2 éléments

• Éléments de E × F × G n'ayant pas pour 1^er^ terme 2 :
24 él. – 8 él. = 16 éléments

♦ **Exercice 2.b page 258**

E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} ; card E = 5.

Il y a : 5^2 éléments de E × E ;
5^3 éléments de E × E × E ;
5^4 éléments de E × E × E × E.

♦ **Exercice 2.c page 259**

Les chiffres sont éléments de E.

E = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9} ; card E = 10.

La capacité du réseau téléphonique de six chiffres est : 10^6.

♦ **Exercice 2.d page 259**

E : ensemble des numéros du dé noir ;
E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.
F : ensemble des numéros du dé jaune ;
F = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.

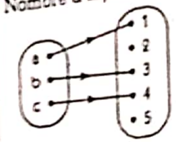
Les résultats possibles du lancer des deux dés sont les éléments de E × F.

Ils sont au nombre de 6^2.

♦ **Exercice 3.a page 263**

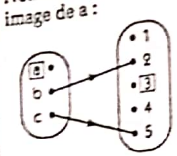
A = {a ; b ; c} ; B = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}.

Nombre d'injections de A dans B :



$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60.$

Nombre de ces injections qui donnent 3 pour image de a :



$A_4^2 = 4 \times 3 = 12.$

♦ **Exercice 3.b page 263**

Nombres de trois chiffres que l'on peut former :
$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60.$

♦ **Exercice 3.c page 263**

E = {P ; R ; O ; D ; U ; I ; T}
card E = 7.

• Mots de quatre lettres que l'on peut former :
$A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840.$

• Mots commençant par P :
P□□□ $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120.$

• Mots ne contenant pas R :
E' = {P ; O ; D ; U ; I ; T}
$A_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360.$

• Mots contenant D :
D□□□ □D□□ □□D□ □□□D
$4 \times A_6^3 = 4 \times 120 = 480.$

♦ **Exercice 3.d page 264**

E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}
Nombres de cinq chiffres que l'on peut former :
5! = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120.

♦ **Exercice 3.e page 264**

a) Les chaises sont numérotées ; le nombre de possibilités est 10!

b) Les chaises ne sont pas numérotées, l'une des chaises sert de repère ; le nombre de possibilités est 9!

♦ **Exercice 3.f page 264**

E = {B ; U ; R ; K ; I ; N ; A}
card E = 7
Nombre de mots : 7!

♦ **Exercice 4.a page 266**

Nombre de poignées de main échangées entre huit personnes :

$C_8^2 = \dfrac{8\,!}{2\,!\,6!} = \dfrac{7 \times 8}{2} = 28.$

♦ **Exercice 4.b page 266**

a) Choix possibles des huit questions :

$C_{10}^8 = \dfrac{10!}{8!\,2!} = \dfrac{9 \times 10}{2} = 45.$

b) Choix possibles s'ils doivent répondre aux trois premières questions :

$C_7^5 = \dfrac{7\,!}{5\,!\,2!} = \dfrac{6 \times 7}{2} = 21.$

♦ **Exercice 4.c page 266**

Droites déterminées par six points non alignés trois à trois :

$C_6^2 = \dfrac{6\,!}{2\,!\,4!} = \dfrac{5 \times 6}{2} = 15.$

Exercices d'apprentissage

♦ **Exercice 3 page 271**

card A = 1521 ; card B = 798.
card (A ∪ B) = 2319
card (A ∩ B) = card A + card B – card (A ∪ B) = 0
donc : A ∩ B = ∅
B\A = B
d'où : card (B\A) = card B = 798.

♦ **Exercice 4 page 271**

card (A ∩ B) = 16 ; card (A\B) = 1.

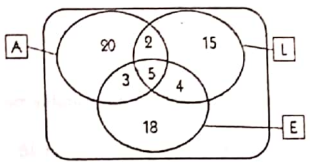
♦ **Exercice 5 page 271**

Notons :
V : ensemble de toutes les voitures ;
C : ensemble des voitures dotées de lecteurs de cassettes ;
D : ensemble des voitures dotées de climatisation ;
N : ensemble des voitures ne possédant ni lecteur de cassettes ni climatisation.

card (C ∩ D) = card C + card D – card (C ∪ D),
or : C ∪ D = V\N ;
card (C ∪ D) = card V – card N
= 8224 – 1927 = 6297 ;
card (C ∩ D) = 5243 + 4932 – 6297 = 3878.

♦ **Exercice 6 page 271**

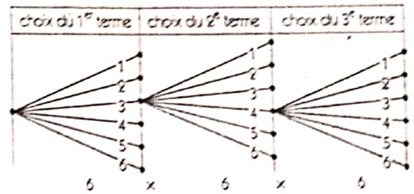
Désignons par :
L : l'ensemble des élèves qui étudient l'allemand ;
A : l'ensemble des élèves qui étudient l'anglais ;
E : l'ensemble des élèves qui étudient l'espagnol.



On a :
card (A ∩ L ∩ E) = 5 ;
card (A ∩ L) = 7 ;
card (A ∩ E) = 8 ;
card (L ∩ E) = 9.

Par conséquent, on complète le schéma ci-dessus par les autres informations. On obtient :
card (A ∪ L ∪ E) = 20 + 15 + 18 + 5 + 2 + 3 + 4 = 67.

♦ **Exercice 9 page 271**



On a au total 6^3 triplets.

♦ **Exercice 10 page 271**

La modélisation de ce problème est décrite à l'exercice 9.
On a donc 6^3 résultats possibles.

♦ **Exercice 11 page 271**

A = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} ; B = {x ; y ; z}.
Le nombre d'applications de A dans B est 3^5.
Le nombre d'applications de B dans A est 5^3.

♦ **Exercice 12 page 271**

Le nombre d'applications de E dans un ensemble contenant un seul élément est 1 (un singleton).

♦ **Exercice 13 page 271**

card E = *n*.
Le nombre d'application d'un singleton dans E est *n*.

♦ **Exercice 14 page 271**

(5 ; 2 ; 0 ; 7) (2 ; 5 ; 4 ; 3) (0 ; 1 ; 2 ; 3) sont des arrangements.

(3 ; 1 ; 0 ; 1) (1 ; 1 ; 1 ; 1) (1 ; 0 ; 0 ; 0) ne sont pas des arrangements.

♦ **Exercice 15 page 271**

$A_3^2 = 3 \times 2 = 6.$

$A_5^2 = 5 \times 4 \times 3 = 60.$

$A_{1000}^2 = 1000 \times 999 = 999\,000.$

♦ **Exercice 16 page 271**

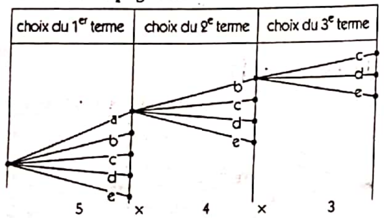
$$\frac{A_n^p}{A_{n-1}^p} = \frac{n!}{(n-p)!} \times \frac{(n-1-p)!}{(n-1)!} = \frac{n}{n-p}.$$

$$\frac{A_n^p}{A_n^{p-1}} = \frac{n!}{(n-p)!} \times \frac{(n-p+1)!}{n!} = n-p+1.$$

♦ **Exercice 17 page 272**

1. $A_5^4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120.$
2. $A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1\,310.$
3. $A_8^5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6\,720.$

♦ **Exercice 18 page 272**



Nombre d'arrangements : $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3.$

♦ **Exercice 19 page 272**

Tirages successifs sans remise de 3 objets, d'un sac en contenant 10.

Nombre de tirages possibles :

$$A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720.$$

♦ **Exercice 20 page 272**

E = {2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9}.

a) Nombres de 3 chiffres formés avec les éléments de E, sans répétition :

$$A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120.$$

b) Ces nombres inférieurs à 400 sont de l'une des deux formes suivantes :

2□□ 3□□

d'où leur nombre : $2 \times A_5^2 = 2 \times 5 \times 4 = 40.$

c) Ces nombres sont pairs s'ils sont de l'une des formes suivantes :

□□2 □□6

d'où leur nombre : $2 \times A_5^2 = 40.$

d) Un nombre non nul qui n'est pas pair est impair, d'où leur nombre :

$$120 - 40 = 80.$$

e) Un multiple de 5 est de la forme suivante :

□□5

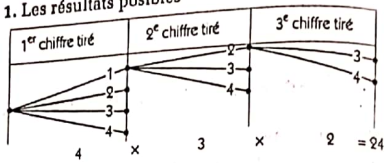
d'où leur nombre : $A_5^2 = 20.$

♦ **Exercice 21 page 272**

E = {1 ; 2 ; 3 ; 4}.

Tirages successifs sans remise de 3 boules de E.

1. Les résultats posibles



ou encore : $A_4^3.$

2. Nombres commençant par 2

Ils sont de la forme 2□□

d'où leur nombre : $A_3^2 = 3 \times 2 = 6.$

3. Nombres commençant par 1

Ils sont aussi de la forme 1□□

d'où leur nombre : 6.

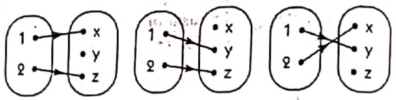
♦ **Exercice 22 page 272**

Seuls les schémas 2 et 3 sont ceux d'applications injectives.

♦ **Exercice 23 page 272**

A = {1 ; 2} ; B = {x ; y ; z}.

Trois applications injectives de A dans B.



Nombre d'injections de A dans B : $A_3^2 = 6.$

♦ **Exercice 24 page 272**

Une permutation d'un ensemble E est une bijection de E dans E.

♦ **Exercice 25 page 272**

Nombre de permutations d'une paire :

$$2! = 2.$$

Nombre de permutations d'un ensemble de 4 éléments :

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Nombre de permutations d'un ensemble de 7 éléments :

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040.$$

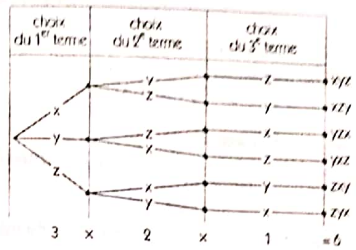
♦ **Exercice 26 page 272**

E = {x ; y ; z}.

Nombre de permutations de E :

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6.$$

Illustration :



♦ **Exercice 27 page 272**

E = {N ; I ; A ; M ; E ; Y}.

Les mots formés avec les 6 éléments de E sont des permutations de E.

D'où leur nombre : 6! = 720.

♦ **Exercice 28 page 272**

E = {u ; v ; x ; y ; z} ; card E = 5.

F = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} ; card F = 5.

Nombre de bijections de E dans F : 5! = 120.

♦ **Exercice 29 page 272**

E = {r ; s ; t ; u ; v ; w}.

Nombre de combinaisons de 2 éléments de E :

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{5 \times 6}{2} = 15.$$

Nombre de combinaisons de 3 éléments de E :

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{4 \times 5 \times 6}{3 \times 2} = 20.$$

Nombre de combinaisons de 4 éléments de E :

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{5 \times 6}{2} = 15.$$

Nombre de combinaisons de 5 éléments de E :

$$C_6^5 = 6.$$

Nombre de combinaisons des 6 éléments de E :

$$C_6^6 = 1.$$

♦ **Exercice 30 page 272**

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!\,1!} = 3 \; ; \; C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 2} = 10 \; ;$$

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!\,5!} = \frac{6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 252 \; ; \; C_4^4 = 1 \; ;$$

$$C_{17}^3 = \frac{17!}{3!\,14!} = \frac{15 \times 16 \times 17}{3 \times 2} = 680.$$

♦ **Exercice 31 page 272**

$A = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5.$

• 1^re MÉTHODE

On a : $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = n.$

Par conséquent :

$A = 2(C_5^0 + C_5^1 + C_5^2) = 2(1 + 5 + 10) = 32.$

• 2^e MÉTHODE

$(1+x)^5 = C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5.$

En posant : $x = 1,$

on obtient : $A = 2^5 = 32.$

♦ **Exercice 32 page 272**

E = {a ; b ; c ; d ; e}

• {a ; b ; c} est une combinaison de 3 éléments de E.

Nombre de ces combinaisons :

$$C_5^3 = 10.$$

• {b ; c ; e} est une combinaison de 3 éléments de E contenant c et e ; il y en a 3.

• {c ; a ; e} est une combinaison de 3 éléments de E ne contenant pas d.

Nombre de ces combinaisons :

$$C_4^3 = 4.$$

♦ **Exercice 33 page 272**

Nombre de combinaisons à 11 éléments d'un ensemble contenant 18 éléments :

$$C_{18}^{11} = \frac{18!}{11!\,7!} = 31\,824.$$

♦ **Exercice 34 page 272**

E = {a ; b ; c ; d}.

E a 4 parties à 3 éléments et 4 parties à 1 élément.

En effet : $C_4^3 = C_4^1 = 4.$

♦ **Exercice 35 page 272**

• ∅ a une seule partie qui est ∅.

• E = {a ; b ; c ; d} ; card E = 4.

Nombre de parties de E : $2^4 = 16.$

♦ **Exercice 36 page 272**

ONG formée de 18 femmes et 32 hommes.

1. Nombre de bureaux formés :

$$C_{50}^3 = 19\,600.$$

2. Nombre de bureaux dont :

a) le trésorier est une femme.

Cette condition est remplie dans les cas suivants :

– les 3 membres du bureau sont des femmes ;

le nombre de tels bureaux est :

$$C_{18}^3$$

– Seuls 2 membres du bureau sont des femmes ;

le nombre de tels bureaux est :

$$C_{18}^2 \times C_{32}^1$$

– Seul 1 membre du bureau est une femme ;

le nombre de tels bureaux est :

$$C_{18}^1 \times C_{32}^2$$

Le nombre de bureaux possibles constitués d'au moins une femme (trésorière) est :

$$C_{18}^3 + C_{18}^2 \times C_{32}^1 + C_{18}^1 \times C_{32}^2 = 14\,640.$$

b) M. et Mme Eboutou ne souhaitent par faire partie du même bureau ; le nombre de tels bureaux est :

$$2 \times C_{40}^3 = 30\,840.$$

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 37 page 272

card E = 5 ; card F = 3.

Nombre d'applications de E dans F :

$$3^5 = 245.$$

Il n'y a pas d'injections de E dans F car card E > card F.

♦ Exercice 38 page 273

L = {A ; B ; C ; D ; E}.

M = {1re lettre ; 2e lettre ;... 5e lettre}

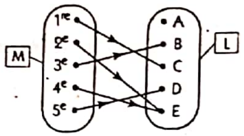
• Le nombre de mots de 5 lettres, avec répétition ou non, formés par des éléments de L est le nombre d'applications de M dans L ;

d'où leur nombre :

$$5^5 = 3\,125.$$

Exemple :

le mot CEBED correspond à l'application :



• Le nombre de mots de 5 lettres sans répétition formés avec les éléments de L est le nombre de bijections de M dans L ; d'où leur nombre :

$$5! = 120.$$

♦ Exercice 39 page 273

• Les 3 lettres sont distinctes ou non : $5^3 = 125$.

• Les 3 lettres sont distinctes : $A_5^3 = 60$.

♦ Exercice 40 page 273

C : ensembles des chiffres ; card C = 10 ;

A : ensembles des lettres ; card A = 26.

Nombres à 3 chiffres dont le 1er est différent de 0 :

$$9 \times 10^2 = 900.$$

Mots à 2 lettres distinctes :

$$A_{26}^2 = 650.$$

Plaques différentes que l'on peut constituer :

$$A_{26}^2 \times 9 \times 10^2 = 585\,000.$$

♦ Exercice 41 page 273

Nombre de délégations possibles :

$$24 \times 40 = 960.$$

♦ Exercice 42 page 273

a) Nombre de comités de 3 personnes :

$$A_{12}^3 = 1\,320.$$

b) Une femme est secrétaire :

(au moins une femme est dans le comité) :

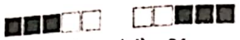
$$A_4^3 + A_4^2 + A_8^1 + A_4^1 \times A_8^2 = 344.$$

♦ Exercice 44 page 273

a) Dispositions sur un banc de 5 personnes (ce sont des permutations) ;

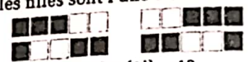
$$5! = 120.$$

b) Les garçons sont l'un à côté de l'autre, de même les filles :



$$2 \times (3!) \times (2!) = 24.$$

c) Seules les filles sont l'une à côté de l'autre :



$$4 \times (3!) \times (2!) = 48.$$

♦ Exercice 46 page 273

Éclairage par 3 ampoules allumées sur 5 : $C_5^3 = 10$.

♦ Exercice 47 page 273

a) Poignées de main échangées entre 10 personnes :

$$C_{10}^2 = 45.$$

b) Désignons par n le nombre de personnes ayant échangé 5 151 poignées de main.

On a : $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2} = 5\,151$

d'où : $n^2 - n - 10\,302 = 0$ [1]

$\Delta = 41\,209$; $\sqrt{\Delta} = 203$

donc : $n = 102$ (c'est la seule solution positive de l'équation [1]).

♦ Exercice 48 page 273

Une main de 8 cartes prises dans un jeu de 32 cartes.

a) Nombre de mains différentes : $C_{32}^8 = 10\,518\,300$.

b) Nombre de mains contenant exactement 2 as :

$$C_4^2 \times C_{28}^6 = 2\,262\,440.$$

c) Nombre de mains ne contenant aucun as :

$$C_{28}^8 = 3\,108\,105.$$

d) Nombre de mains contenant au moins 1 as :

$$C_4^1 \times C_{28}^7 + C_4^2 \times C_{28}^6 + C_4^3 \times C_{28}^5 + C_4^4 \times C_{28}^4 = 7\,410\,495.$$

e) Nombre de mains contenant exactement 2 cœurs et 3 piques : $C_8^2 \times C_8^3 \times C_{16}^3 = 878\,080$.

f) Nombre de mains contenant exactement 2 cœurs, 3 piques, 1 trèfle :

$$C_8^2 \times C_8^3 \times C_8^1 \times C_8^2 = 351\,232.$$

g) Nombre de mains contenant au plus 2 dames :

$$C_4^0 \times C_{28}^8 + C_4^1 \times C_{28}^7 + C_4^2 \times C_{28}^6.$$

♦ Exercice 49 page 273

Le mot PLAIRE et le mot LIMITE sont constitués par 6 lettres.

a) Formation du mot PLAIRE, les lettres étant obtenues dans le bon ordre :

tirage de P : $A_1^1 = 1$;

tirage de L : $A_1^1 = 1$;

tirage de A : $A_3^1 = 3$;

tirage de I : $A_3^1 = 3$;

tirage de R : $A_2^1 = 2$;

tirage de E : $A_1^1 = 1$.

Nombre de possibilités :

$$A_1^1 \times A_1^1 \times A_3^1 \times A_3^1 \times A_2^1 \times A_1^1 = 12.$$

b) Formation du mot LIMITE :

– les lettres étant obtenues dans le bon ordre :

$$A_1^1 \times A_3^1 \times A_1^1 \times A_2^1 \times A_1^1 \times A_1^1 = 6.$$

– les lettres étant obtenues dans l'ordre ou non :

$$6! \times 6 = 4\,320.$$

♦ Exercice 50 page 273

1. Arrivées possibles des 20 coureurs :

sans *ex æquo* : 20!

2. Arrivées possibles des 3 premiers coureurs sans *ex æquo* : $(3!) \times C_{20}^3 = 3\,420$.

♦ Exercice 51 page 273

1. Nombre de codes possibles : 10^4.

2. Nombre de codes commençant par 2 : 10^3.

3. Nombre de codes ne contenant pas 0 : 9^4.

♦ Exercice 52 page 273

1. Nombre de manières différentes de s'habiller :

$$C_4^1 \times C_6^1 = 4 \times 6 = 24.$$

2. Nombre de manières sachant qu'il porte :

a) une chemise blanche : $C_3^1 \times C_4^1 = 3 \times 4 = 12$;

b) un pantalon noir : $C_6^1 \times C_6^2 = 6 \times 2 = 12$;

c) un pantalon bleu et une chemise jaune :

$$C_2^1 \times C_1^1 = 2 \times 1 = 2.$$

♦ Exercice 53 page 273

Nombres possibles de rangements.

1. Les livres des 3 matières peuvent être mélangés :

$$12! = 479\,001\,600.$$

2. Les livres sont rangés par matières :

$$(4! \times 3! \times 5!) \times 3! = 103\,680.$$

3. Seuls les livres de mathématiques sont rangés ensemble : $(4! \times 8!) \times \ldots ?$

♦ Exercice 54 page 274

Nombre de possibilités différentes auxquelles Abdou sera confronté :

$$C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7.$$

♦ Exercice 55 page 274

Nombre de menus différents :

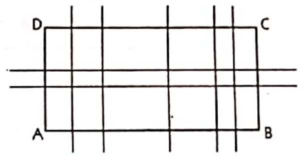
$$C_2^1 \times C_3^1 \times C_4^1 \times C_2^1 = 48.$$

Nombre de menus différents sans entrée :

$$C_3^1 \times C_4^1 \times C_2^1 = 24.$$

Exercices de recherche

♦ Exercice 56 page 274



Nombre de rectangles pouvant être constitués :

$$C_7^2 \times C_5^2 = 210.$$

[Comme droites parallèles, on n'oubliera pas de considérer les supports des côtés du rectangle ; on a donc 7 droites parallèles à (AD) et 5 parallèles à (AB).]

♦ Exercice 57 page 275

u_n désigne le nombre de segments engendrés par n points sur [AB].

(On suppose les n points distincts de A et B, on a donc $n + 2$ points.)

$u_1 = C_3^2 = 3$

$u_2 = C_4^2 = 6$

$u_3 = C_5^2 = 10$

$u_4 = C_6^2 = 15$

$u_5 = C_7^2 = 21$

♦ Exercice 58 page 275

(Voir exercice 54.)

Nombre de points	1	2	3	4	5
Nombre de demi-droites	2	4	6	8	10
Nombre de segments	0	1	3	6	10
Nombre de parties	2	5	9	14	20

$$v_n = 2n + C_n^2 = \frac{n(n+3)}{2}.$$

15. Statistiques

(pages 275 à 286 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
– apprendre à regrouper les termes d'une série statistique en classes ;
– construire et interpréter des graphiques ;
– déterminer les caractéristiques de position, de dispersion.

Commentaires

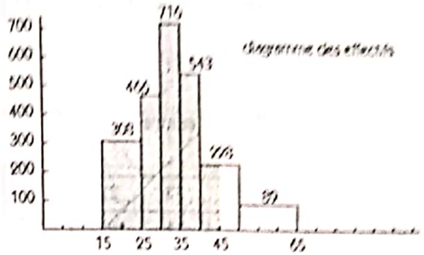
Les classes ne sont pas nécessairement de même amplitude. Les formules vues en classe de seconde S concernant les modalités du caractère étudié s'appliquent ici aux centres des classes.
On notera que les caractéristiques de position sont parfois appelées « caractéristiques de tendances centrales ».
L'utilisation d'une calculatrice permettra d'éviter des calculs à la main, souvent fastidieux et pénibles.
Les exemples, exercices et activités devront se référer à des situations issues du contexte socio-économique des élèves afin de produire une plus grande motivation à l'étude des statistiques.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Séries statistiques groupées en classes • Les représentations graphiques : – histogramme ; – courbe cumulative ; – polygone des effectifs ou des fréquences.	• Regrouper en classes. • Déterminer les effectifs de classe. • Déterminer les fréquences de classe. • Construire : – des histogrammes ; – des courbes cumulatives ; – des polygone des effectifs ou des fréquences.
Caractéristiques des séries regroupées • Caractéristique de position : – classe modale ; – moyenne ; – médiane. • Caractéristique de dispersion : – variance : – écart type.	• Déterminer la classe modale, la moyenne, la médiane (à partir de graphiques ou de tableaux de données). • Calculer la variance ou l'écart type. • Interpréter ces différentes caractéristiques.

Exercices d'application directe

♦ **Exercice 1.a page 279**

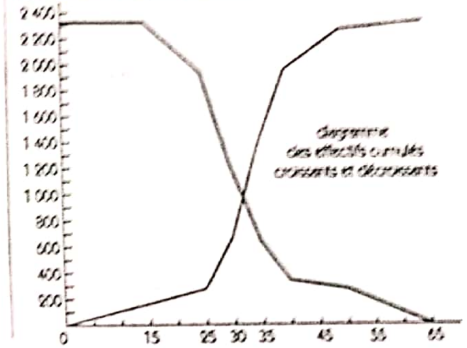


• Nombre d'ouvriers dont l'âge est compris entre 25 et 45 ans :
$466 + 716 + 543 + \frac{228}{2} = 1\,839$, soit 1 839 ouvriers.
• Nombre d'ouvriers dont l'âge est compris entre 30 et 32 ans :
$\frac{716}{5} \times 2 = 286{,}4$, soit environ 287 ouvriers.
• Nombre d'ouvriers qui ont moins de 32 ans :
$308 + 466 + 287 = 1\,061$, soit 1 061 ouvriers.

♦ **Exercice 1.b page 279**

âge (années)	[16 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 65[
effectifs	273	387	723	570	308	65
ef. cum. crois.	273	660	1 383	1 953	2 261	2 326
ef. cum. décrois.	2 326	1 999	1 278	948	338	273

• Nombre d'ouvriers ayant moins de 33 ans :
$273 + 387 + (\frac{723}{5} \times 3)$, soit environ 1 093 ouvriers.
• Nombre d'ouvriers dont l'âge est compris entre 28 et 48 ans :
$(\frac{387}{5} \times 4) + 723 + 570 + (\frac{308}{10} \times 7)$,
soit environ 1 868 ouvriers.



♦ **Exercice 2.a page 283**

Calcul de la moyenne et de l'écart type des séries 1.a et 1.b (*cf. ex. 1.a*).

classe x	centre c_i	effectif n_i	n_ic_i	c_i^2	$n_ic_i^2$	EFCD	EFCD
[16 ; 25[	20,50	308	6 314	420,25	129 437	308	2 350
[25 ; 30[	27,50	466	12 815	756,25	352 412,50	774	2 042
[30 ; 35[	32,50	716	23 270	1 056,25	756 275	1 490	1 576
[35 ; 40[	37,50	543	20 362,50	1 406,25	763 593,50	2 033	860
[40 ; 50[	45	228	10 260	2025	461 700	2 261	317
[50 ; 65[	57,50	89	5 117,5	3 306,25	294 256,25	2 350	89
Total		2 350	78 139		2 757 674,25		

Calcul $\overline{x} = \frac{1}{N}\Sigma n_ic_i = \frac{78\,139}{2\,350} = 33{,}25$ $\qquad \overline{x} = 33{,}25$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\Sigma n_ic_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{2\,757\,674{,}25}{2\,350} - 33{,}25^2 = 1\,173{,}48 - 1\,105{,}56 = 67{,}92 \qquad \sigma_x^2 = 67{,}92$$

La classe médiane est [30 ; 35[, donc la médiane M_e est 32,50.
La médiane est proche de la moyenne, et l'écart type est 8,24, donc supérieure à 10. On peut dire que les employés de cette entreprise sont relativement jeunes. Et, selon les effectifs et l'écart type, on peut dire que la préférence est donnée aux jeunes pour les embauches.

Exercices d'apprentissage

♦ Exercice 1 page 284

1. Regroupons ces notes dans les classes suivantes :

[0 ; 8[3 ; 4 ; 6 ; 6 ; 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 4 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 5 ; 6 ; 4 ; 3 ; 4 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 7 ; 6 ; 2 ; 3 ; 6 ; 3 ; 4 ; 7 ; 7 ; 7

[8 ; 10[8 ; 8 ; 9 ; 9 ; 8 ; 8 ; 8 ; 9 ; 9 ; 8 ; 9 ; 9 ; 8 ; 9 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 9

[10 ; 12[10 ; 11 ; 11 ; 10 ; 10 ; 11 11 ; 10 11 ; 10 ; 10 ; 11 ; 10 ; 11 ; 11 ; 10 ; 11 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 11 ;
10 ; 10 ; 11 ; 11 ; 10 ; 10 ; 11 ; 10 ; 11 ; 10

[12 ; 15[13 ; 13 ; 12 ; 14 ; 14 ; 13 ; 13 ; 14 ; 13 ; 12 ; 13 ; 13 ; 13 ; 12 ; 12 ; 12 ; 14 ; 14 ; 13 ; 14 ; 12 ; 12

[15 ; 20[15 ; 15 ; 17 ; 17 ; 16 ; 15 ; 16 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ;17 ; 16 ; 15

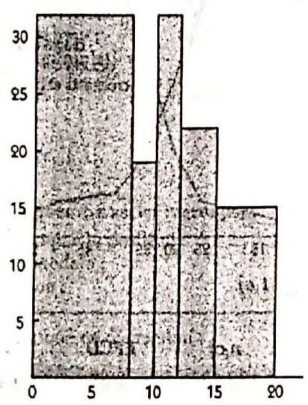
2. Déterminons les effectifs et les fréquences

Classes	Effectif n_i	Fréquences N_i
[0 ; 8[	32	0,267
[8 ; 10[	19	0,158
[10 ; 12[	32	0,267
[12 ; 15[	22	0,183
[15 ; 20[	15	0,125
Total :	120	1

3. Déterminons la série des centres de classes associées

Effectifs n_i	32	19	32	22	15
Centre c_i	4	9	11	13,5	17,5

Représentations graphiques



histogramme des effectifs

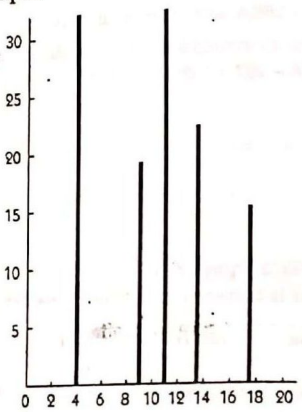
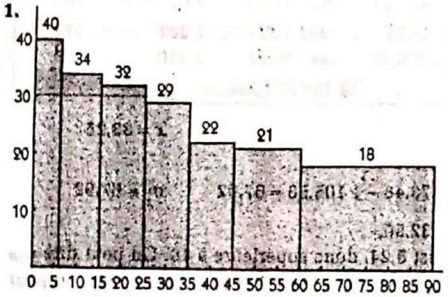


diagramme en bâtons

♦ Exercice 2 page 284

1.



histogramme des habitants de la ville de Thiès

2. • Nombre d'individus dont l'âge est compris entre 5 et 20 ans :

$\frac{40}{6} + 34 + \frac{32}{2} = 56{,}66$; soit environ 57 individus.

• Nombre d'individus dont l'âge est supérieur à 50 ans :

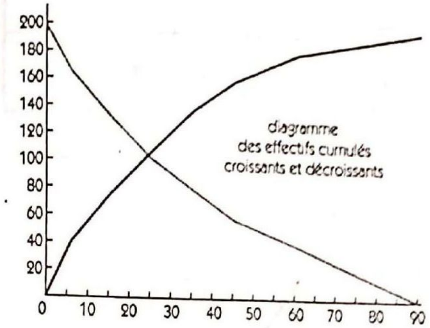
$(\frac{21}{3} \times 2) + 18 = 32$; soit 32 individus.

• Nombre d'individus dont l'âge est inférieur à 30 ans :

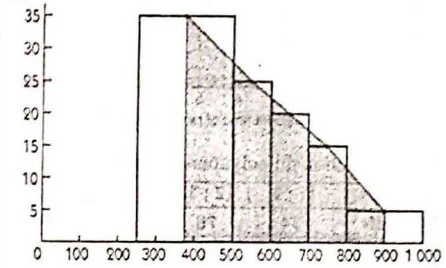
$40 + 34 + 32 + \frac{29}{2}$; soit environ 120 individus.

3.

Âge	[0 ; 6[	[6 ; 15[	[15 ; 25[	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 60[	[60 ; 90[
Nombre	40	34	32	29	22	21	18
Effectifs cumulés croissants	40	74	106	137	159	180	158
Effectifs cumulés décroissants	198	164	132	102	79	58	40



2.



histogramme (figure 1)

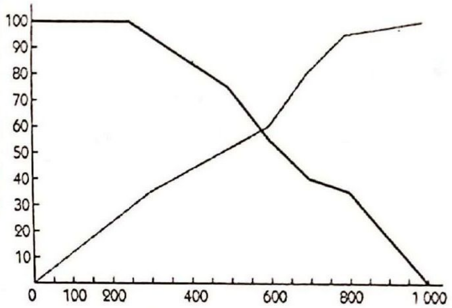


diagramme des effectifs cumulés croissants et décroissants

♦ Exercice 3 page 284

1. Calcul de la fréquence de chacune des classes.

Durée de vie (en heures)	Nombre d'ampoules	Fréquences
[250 ; 500[	35	0,35
[500 ; 600[	25	0,25
[600 ; 700[	20	0,2
[700 ; 800[	15	0,15
[800 ; 1 000[	5	0,05
Total :	100	1

3. Polynôme des effectifs *(construction, voir figure 1).*

Durée de vie (en heures)	[250 ; 500[	[500 ; 600[	[600 ; 700[	700 ; 800[	[800 ; 1 000[
Nombre d'ampoules	35	25	20	15	5
Centre de la classe n_i	375	550	650	1 150	900

4.

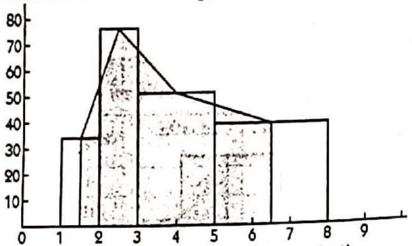
Durée de vie (en heures)	[250 ; 500[	[500 ; 600[	[600 ; 700[	[700 ; 800[	[800 ; 1 000[
Nombre d'ampoules	35	25	20	15	5
Effectifs cumulés croissants	35	60	80	95	100
Effectifs cumulés décroissants	100	75	55	40	35

♦ Exercice 4 page 284

1. Calcul de la fréquence de chacune des classes.

Salaires	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 8[	Total
Effectifs	34	76	51	39	200
Fréquences	0,17	0,38	0,225	0,195	1

2. Construction de l'histogramme.



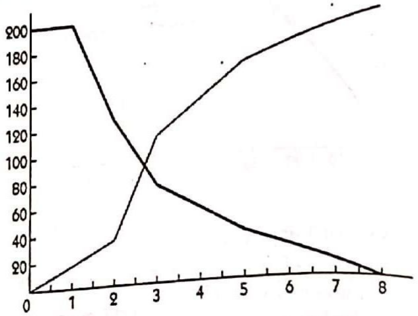
histogramme et polynôme des effectifs

3. Construction du polynôme des effectifs.

Salaires	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 8[
Effectifs	34	76	51	39
Centre de la classe n_i	1,5	2,5	4	6,5

4. Diagramme des effectifs cumulés croissants et décroissants.

Salaires	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 8[
Effectifs	34	76	51	39
Effectifs cumulés croissants	34	110	161	200
Effectifs cumulés décroissants	200	124	73	34



♦ Exercice 5 page 284

1. Calcul de l'effectif de chaque classe.

Classes	Amplitude	Centres	Hauteur en cm	Largeur en cm	Aire en cm²	Effectifs
[35 ; 45[	10	40	1,9	1	1,9	76
[45 ; 50[	5	47,5	6	0,5	3	120
[50 ; 55[	5	52,5	6,6	0,5	3,3	132
[55 ; 70[	15	62,5	1,2	1,5	1,8	72
				Total	10	400

1 cm² représente 40 élèves.

2. Pour le nombre d'élèves dont le temps de travail hebdomadaire est compris entre 40 heures et 50 heures, on obtient :

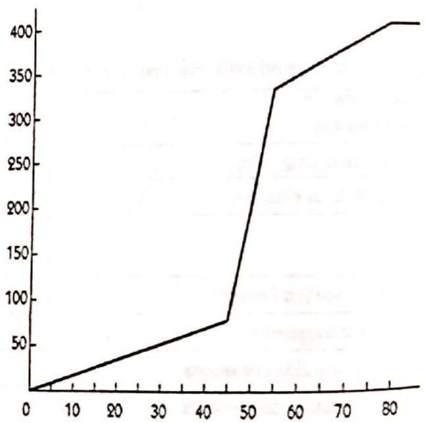
$\frac{76}{2} + 120$; soit 158 élèves.

3. Pour le nombre d'élèves dont le temps de travail hebdomadaire est inférieur à 60 heures, on obtient :

$76 + 120 + 132 + \frac{72}{3}$; soit 352 élèves.

4. Diagramme des effectifs cumulés croissants.

Classes	[35 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 70[
Effectifs	76	120	132	72
Effectifs cumulés croissants	76	196	328	400



♦ Exercice 6 page 285

1. Le nombre de chèques dont le montant est inférieur à 25 000 F CFA.

Il suffit de lire l'ordonnée du point du graphique qui a pour abscisse 25.

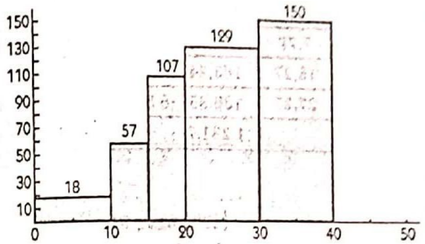
Ce nombre est 125.

2. Le nombre de chèques dont le montant est inférieur à 20 000 est 107.

Le nombre de chèques dont le montant est inférieur à 40 000 est 143.

Le nombre de chèques dont le montant est compris entre 20 000 et 40 000 est : 143 − 107 = 36.

3. Histogramme.



Classe × 1 000	Effectifs	EFCC	Centre × 1 000
[0 ; 10[	18	18	5
[10 ; 15[	39	57	12,50
[15 ; 20[	50	107	17,50
[20 ; 30[	22	129	25
[30 ; 50[	21	150	40

♦ Exercice 7 page 285

1. Déterminons la classe modale.

La classe modale est toute classe présentant un effectif maximal, d'où [4 ; 6[est la classe modale.

2.

Indemnités	Centre de la classe n_i	Effectifs	Amplitude	Densité	$n_i c_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$n_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert$	x_i^2	$n_i x_i^2$
[0 ; 2[	1	19	2	9,5	19	2,98	56,62	1	19
[2 ; 4[	3	21	2	10,5	63	0,98	20,58	9	185
[4 ; 6[	5	25	2	12,5	75	1,02	25,5	25	625
[6 ; 8[	7	15	2	7,5	105	3,02	45,3	49	735
[8 ; 10[	9	8	2	4	72	5,02	40,16	81	648
[10 ; 12[	12	2	2	1	24	8,02	16,04	144	288
Total		90			358		204,2		2 504

D'après le tableau précédent, on a :

– Le mode défini comme le centre de toute classe de densité maximale.

Donc [4 ; 6[étant la classe, le mode est 5.

– La moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{N}\Sigma n_i c_i = \frac{358}{90}$; $\bar{x} = 3,98$.

3. Calcul de la variance et de l'écart type.

• Variance : $V = (\frac{1}{N}\Sigma n_i x_i^2) - \bar{x}^2 = \frac{2\,504}{90} - 3,98^2$; **V = 11,98.**

• L'écart type : $\sigma = \sqrt{V}$; **σ = 3,46.**

4. Calculons la médiane.

♦ **Exercice 8 page 285**

1. Déterminons la classe modale.

Par définition, on a : [60 ; 65[la classe modale.

2.

Masses	Centre de la classe n_i	Effectifs	Amplitude	Densité	n_ic_i	$\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	$n_i\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	x_i^2	$n_ix_i^2$
[45 ; 55[	50	20	10	2	1 000	14,73	294,6	2500	50 000
[55 ; 60[	57,5	31	5	6,2	1 782,5	7,23	224,13	3 306,25	102 493,75
[60 ; 65[	62,5	44	5	8,8	2 750	2,33	98,12	3 906,25	171 875
[70 ; 75[	72,5	38	5	7,6	2 755	7,77	295,26	5 256,25	199 737,5
[75 ; 85[	80	12	10	1,2	960	15,27	183,24	6 400	76 800
[85 ; 100[	92,5	5	15	0,33	462,5	27,27	136,35	8 556,25	42 781,25
Total		150			9710		1 231,7		643 687,5

• Calcul du mode :

D'après le tableau précédent, le mode est 62,5.

• La moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{N}\Sigma n_ic_i = \frac{9\,710}{150}$; $\bar{x} = 64{,}73$.

3. Calculons la variance et l'écart type :

• Variance : $V = (\frac{1}{N}\Sigma n_ix_i^2) - \bar{x}^2 = \frac{643\,687{,}5}{150} - 64{,}73^2$; $V = 101{,}27$.

• L'écart type : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{101{,}27}$; $\sigma = 10{,}06$.

♦ **Exercice 9 page 285**

(Reprendre les données de l'exercice 2.)

Classe	Effectif n_i	Centre c_i	n_ic_i	c_i^2	$n_ic_i^2$	Amplitude a_i	Effectif corrigé	EFCC
[0 ; 6[	40	3	120	9	360	6	40	40
[6 ; 15[	34	10,50	357	110,25	3 748,50	9	22,67	74
[15 ; 25[	32	20	640	400	12 800	10	19,20	106
[25 ; 35[	29	30	870	900	26 100	10	17,40	135
[35 ; 45[	22	40	880	1 600	35 200	10	13,20	157
[45 ; 60[	21	52,50	1 102,50	2 756,25	15	8,40	178	
[60 ; 90[	18	75	1 350	5 625	101 250	30	3,6	196
Total	196		4 327,50		237 339,75			

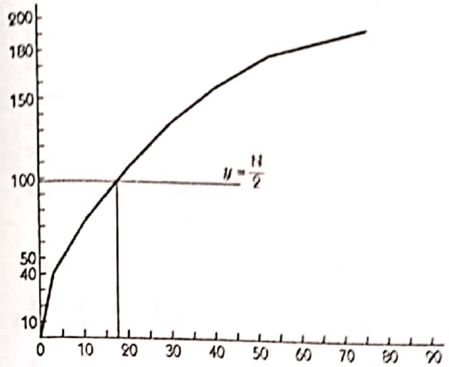
1. La classe modale est [0 ; 6[.

2. Le mode est 3 ; la moyenne : $\bar{x} = \frac{4\,327{,}50}{196} = 22{,}08$; $\bar{x} = 22{,}08$.

3. La variance : $V(x) = \frac{237\,339{,}75}{196} - 22{,}08^2 = 1\,210{,}92 - 487{,}49$; $V(x) = 723{,}43$.

L'écart type : $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{V(x)} = 723{,}43 = 26{,}90$; $\sigma_{\bar{x}} = 26{,}90$.

Polygône des effectifs cumulés croissants



Graphiquement, on obtient : $M_e = 17{,}50$.

♦ **Exercice 10 page 285**

Classe	Effectif n_i	Centre c_i	n_ic_i	c_i^2	$n_ic_i^2$	Amplitude a_i	Effectif corrigé	EFCC
[0 ; 2[	120	1	120	1	120	2	60	120
[2 ; 3[	100	2,50	250	6,25	625	1	100	220
[3 ; 4[	140	3,50	490	12,25	1 715	1	140	360
[4 ; 6[	200	5	1 000	25	5 000	2	100	560
[6 ; 8[	180	7	1 260	49	8 820	2	90	740
[8 ; 12[	160	10	1 600	100	16 000	4	40	900
[12 ; 16[	100	14	1 400	196	19 600	4	25	1 000
Total	1 000		6 120		51 880			

1. La classe modale est : [3 ; 4[.

2. Le mode est : 3,50.

La moyenne : $\bar{x} = \frac{6\,120}{1\,000} = 6{,}12$; $\bar{x} = 6{,}12$.

3. La variance : $V(x) = \frac{51\,880}{1\,000} - 6{,}12^2 = 51{,}88 - 37{,}45$; $V(x) = 14{,}43$.

L'écart type : $\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{14{,}43}$; $\sigma_x = 3{,}80$.

4. La classe médiane est [4 ; 6[, la médiane est 5,6 par interpolation linéaire.

♦ **Exercice 11 page 285**

(Reprendre les données de l'exercice 3.)

Classe	Effectif n_i	Centre c_i	n_ic_i	c_i^2	$n_ic_i^2$	Amplitude a_i	Effectif corrigé	EFCC
[250 ; 500[	35	375	13 125	140 625	4 921 875	250	14	35
[500 ; 600[	25	550	13 750	302 500	7 562 500	100	25	60
[600 ; 700[	20	650	13 000	422 500	8 450 000	100	20	80
[700 ; 800[	15	750	11 250	562 500	8 437 500	100	15	95
[800 ; 1 000[	5	900	4 500	810 000	4 050 000	200	2,50	100
Total	100		55 625		33 421 875			

1. La classe modale est [500 ; 600[.

2. Le mode est 550.

La moyenne : $\bar{x} = \dfrac{55\,025}{100} = 550{,}25$; $\bar{x} = 550{,}25$.

3. La variance :

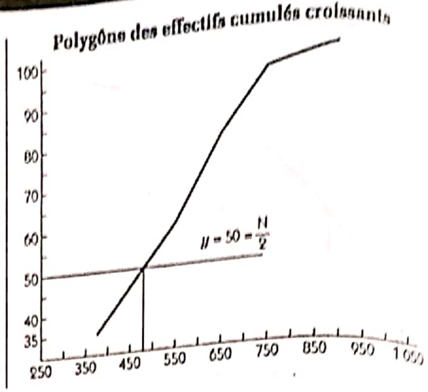
$V(x) = \dfrac{33\,421\,875}{100} - 550{,}25^2$
$= 334\,218{,}75 - 309\,414{,}062\,5.$
$V(x) = 24\,804{,}69.$

L'écart type : $\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{24\,804{,}69}$
$\sigma_x = 157{,}50.$

4. La médiane

Graphiquement, la médiane M_e est 475.

5. Le nombre d'ampoules dont la durée de vie est inférieure à la moyenne est : 60.



♦ Exercice 12 page 285

(Reprendre les données de l'exercice 4.)

Classe	Effectif n_i	Centre c_i	$n_i c_i$	c_i^2	$n_i c_i^2$	Amplitude a_i	Effectif corrigé	EFCC
[1 ; 2[	34	1,50	51	2,25	76,50	1	34	34
[2 ; 3[	76	2,50	190	6,25	475	1	76	110
[3 ; 5[	51	4	204	16	816	2	25,50	161
[5 ; 8[	39	6,50	253,50	42,25	1 647,75	3	13	200
Total	200		698,5		3 015,25			

1. La classe modale est [2 ; 3[.

2. Le mode est 2,50.

La moyenne : $\bar{x} = \dfrac{698{,}50}{200} = 2{,}326$; $\bar{x} = 2{,}33.$

3. La variance : $V(x) = \dfrac{3\,015{,}25}{200} - 2{,}33^2 = 15{,}08 - 5{,}43$; $V(x) = 9{,}65.$

L'écart type : $\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{9{,}65} = 3{,}11$; $\sigma_x = 3{,}11.$

4. La médiane

La classe médiane [2 ; 3[; la médiane est 2,90 par interpolation linéaire.

$m = 2{,}33$; $\sigma_x = 3{,}11$; $m - \sigma_x = -0{,}78$; $m + \sigma_x = 5{,}44.$

Le pourcentage d'ouvriers dont le salaire journalier se situe dans l'intervalle $]m - \sigma_x \,;\, m + \sigma_x[$ est :

$\dfrac{161 \times 100}{200} = 80{,}50\ \%.$

♦ Exercice 13 page 285

(Voir exercice 5.)

1. La classe modale est [50 ; 55[.

2. Le mode est 52,50.

La moyenne : $\bar{x} = \dfrac{20\,170}{400} = 50{,}43$; $\bar{x} = 50{,}43.$

3. La variance :

$V(x) = \left(\dfrac{1}{N}\Sigma n_i c_i^2\right) - \bar{x}^2 = \dfrac{1\,037\,425}{400} - 2\,543{,}1849$
$= 2\,593{,}56 - 2\,543{,}184\,9$; $V(x) = 50{,}38.$

L'écart type : $\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{50{,}38}$; $\sigma_x = 7{,}10.$

4. D'après le graphique, la médiane est comprise dans [50 ; 55[, classe médiane.

La médiane M_e est 50,15 par interpolation linéaire.

$m = \bar{x} = 50{,}43$; $\sigma_x = 7{,}10$;

$]m - \sigma_x \,;\, m + \sigma_x[=]43{,}33 \,;\, 57{,}53[.$

Le nombre d'élèves dont le temps de travail hebdomadaire se situe dans l'intervalle $]m - \sigma_x \,;\, m + \sigma_x[$ est : **324**.

Il représente 81 % des élèves.

♦ Exercice 14 page 285

(Voir exercice 6.)

1. La classe modale est [15 ; 20[, d'effectif 50.

2. Le mode : $17{,}50 \times 10^3 = 17\,500.$

La moyenne : $\bar{x} = \dfrac{1}{N}\Sigma n_i c_i = 18\,950$; $\bar{x} = 18\,950.$

3. La variance :

$V(x) = \left(\dfrac{1}{N}\Sigma n_i c_i^2\right) - \bar{x}^2 = 461\,375\,000 - 359\,102\,500.$

$V(x) = 102\,272\,500.$

L'écart type : $\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{102\,272\,500}.$

$\sigma_x = 10\,112{,}986\,7 = 10\,113.$

4. La médiane M_e est 16,80 selon le graphique et interpolation linéaire.

5. 66 % des chèques représente 99 chèques.

99 est l'effectif cumulé de 18 000 dont un intervalle de centre m dans lequel sont compris 66 % des chèques est $]m - 18\,000 \,;\, m + 18\,000[$, soit :

]950 ; 36 950[.

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 15 page 285

(Cf. exercice 1.)

1

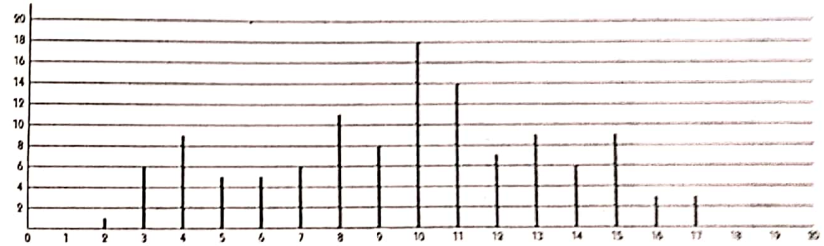
1^{re} PARTIE

1. Série statistique des notes.

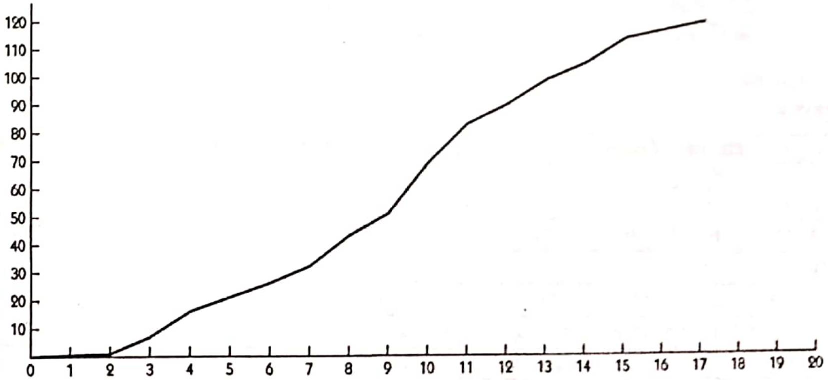
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Total
n_i	0	0	1	6	9	5	5	6	11	8	18	14	7	9	6	9	3	3	0	0	120
EFCC	0	0	1	7	16	21	26	32	43	51	69	83	90	99	105	114	117	120			
$n_i x_i$	0	0	2	18	36	25	30	42	88	72	180	154	84	117	84	135	48	51			1 166
x_i^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289			
$n_i x_i^2$	0	0	4	54	144	125	180	294	704	648	1800	1694	1008	1521	1176	2025	768	867			13012

2. Diagramme en bâtons

Abscisse : note 1 cm → 1 point ; ordonnée : effectif 1 cm → 4.



3. Diagramme cumulatif croissant



4. Le mode est 10.

5. La moyenne : $\overline{x} = \frac{1\,166}{120} = 0{,}972$; $\overline{x} = 0{,}972$.

6. La variance : $V(x) = \frac{13\,012}{120} - 9{,}72^2 = 108{,}43 - 94{,}48$; $V(x) = 13{,}95$.

L'écart type : $\sigma_x = \sqrt{13{,}95} = 3{,}74$; $\sigma_x = 3{,}74$.

2ᴱ PARTIE

1.

Classe	Effectif n_i	Centre c_i	$n_i c_i$	c_i^2	Amplitude a_i	Effectif corrigé	EFCC	$n_i c_i^2$	Fréquence f_i
[0 ; 4[	7	2	14	4	4	7	7	98	0,058
[4 ; 10[	44	7	308	9	6	29	51	396	0,367
[10 ; 14[	48	12	576	144	4	48	99	6 912	0,40
[14 ; 20[	21	17	357	289	6	14.	120	6 069	0,175
Total	120		1 255					13 485	1

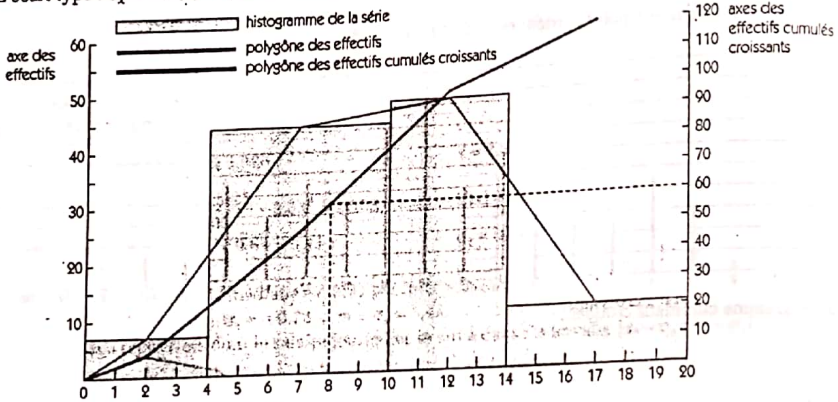
5. La classe moyenne est [10 ; 14[.

6. Le mode est 12.

La moyenne : $\overline{x} = \frac{1\,255}{120} = 10{,}46$; $\overline{x} = 10{,}46$.

7. La variance : $V(x) = \frac{13\,475}{120} - 1046^2 = 112{,}29 - 109{,}42$; $V(x) = 2{,}88$.

L'écart type : $\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{2{,}88} = 1{,}70$; $\sigma_x = 1{,}70$.



8. Graphiquement, on trouve : médiane = 8

3ᴱ PARTIE

Classe	Effectif n_i	Centre c_i	$n_i c_i$	c_i^2	$n_i c_i^2$	Amplitude a_i	Effectif corrigé	EFCC	Fréquence f_i
[0 ; 8[	32	4	128	16	512	8	8	32	0,267
[8 ; 10[	19	9	171	81	1 539	2	19	51	0,158
[10 ; 12[	32	11	352	121	3 872	2	32	83	0,267
[12 ; 15[	22	13,50	297	182,25	4 015	3	14,67	105	0,183
[15 ; 20[	15	17,50	262,50	306,25	4 593,75	5	6	120	0,125
Total	120		1 210,50		14 531,75				1

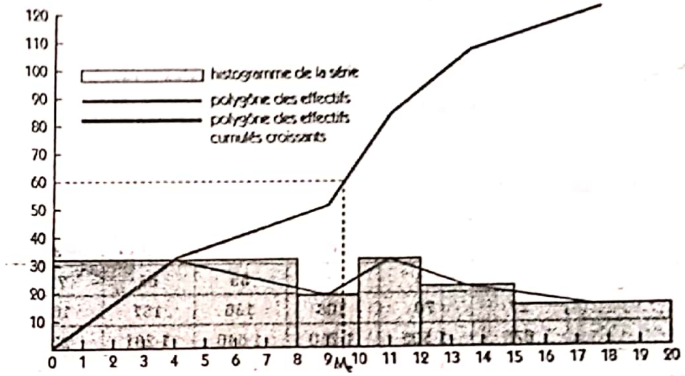
5. La classe modale est [10 ; 12[.

6. Le mode est 11.

La moyenne : $\overline{x} = \frac{1\,210{,}50}{120} = 10{,}09$; $\overline{x} = 10{,}09$.

7. La variance : $V(x) = \frac{14\,531{,}75}{120} - 10{,}09^2$; $V(x) = 19{,}29$.

L'écart type : $\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{19{,}29} = 4{,}39$; $\sigma_x = 4{,}39$.



4ᴱ PARTIE

1. $\overline{x_1} = 9{,}72$; $\overline{x_2} = 10{,}46$; $\overline{x_3} = 10{,}09$: $\overline{x_1} < \overline{x_3} < \overline{x_2}$.

2. $\sigma_1 = 3{,}74$; $\sigma_2 = 1{,}70$; $\sigma_3 = 4{,}399$: $\sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_3$.

3. La moyenne de la 2ᵉ partie est plus grande, mais son écart type est petit.

L'amplitude des classes est plus grande que l'amplitude des classes de la 2ᵉ partie.

$\overline{x_1} - \sigma_1 = 5{,}98$	$\overline{x_2} - \sigma_2 = 8{,}76$	$\overline{x_3} - \sigma_3 = 5{,}751$
$\overline{x_1} + \sigma_1 = 13{,}46$	$\overline{x_2} + \sigma_2 = 12{,}16$	$\overline{x_3} + \sigma_3 = 14{,}429$
amplitude 7,48	amplitude 3,4	amplitude 8,678

♦ **Exercice 16 page 286**

(x_i, n_i) une série statistique ;

(y_i, n_i) la nouvelle série statistique telle que :

$x_i = ay_i + b$, a et b deux réels choisis.

m la moyenne de (x_i, n_i) d'écart type δ

μ la moyenne de (y_i, n_i) d'écart type σ

1. $m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M} n_i x_i = \frac{1}{N}\sum(ay_i + b)n_i$

$= \frac{1}{N}(\sum ay_i n_i + b\sum n_i)$

$= a(\frac{1}{N}\sum ay_i n_i) + b = a\mu + b$

donc : $m = a\mu + b$.

2. $\delta^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M} n_i x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{1}{N}\sum(x_i - \overline{x})^2$

$= \frac{1}{N}\sum(ay_i + b - a\mu - b)^2$

$= \frac{1}{N}\sum(ay_i - a\mu)^2$

$= \frac{1}{N}\sum a^2(y_i - \mu)^2 = \frac{1}{N}\sum(y_i - \mu)^2 a^2$

$\delta^2 = a^2\sigma^2$; $\sigma > 0$, donc :

$\delta = |a|\sigma$.

Application numérique

• Série simple

x_i	0	1	2	3	4	5	Total
n_i	13	25	63	83	51	15	250
$n_i x_i$	0	25	126	249	204	75	679
x_i^2	0	1	4	9	16	25	
$n_i x_i^2$	0	25	252	747	816	375	2 215

$\overline{x} = \frac{679}{250} = 2{,}72$.

$\sigma^2 = \frac{2\,215}{250} - 2{,}72^2 = 8{,}86 - 7{,}40 = 1{,}46$.

$\sigma = \sqrt{1{,}46} = 1{,}21$.

• Considérons la série donnée des salaires.

Classe	Effectif	Centre
[100 ; 500[	13	450
[500 ; 600[	25	550
[600 ; 700[	63	650
[700 ; 800[	83	750
[800 ; 900[	51	850
[900 ; 1 000[	15	950
Total	250	

Soit y_i la série des centres de la série groupée en classe précédente ;

a, b deux réels tels que : $y_i = ax_i + b$

donc on a : $150 = a \times 0 + b$; $b = 450$

$550 = a \times 1 + 450$; $a = 550 - 450 = 100$.

On obtient ainsi :

$a = 100$; $b = 450$; $y_i = 100x_i + 450$.

D'après la propriété des questions 1 et 2, si l'on désigne par m la moyenne de la série en classe, δ son écart type, on a :

$m = ax + b = 100 \times 2{,}72 + 450$,

$m = 722$;

$\delta = |a|\sigma = 100 \times 1{,}21 = 121$,

$\delta = 121$.

♦ Exercice 17 page 286

Total x_i	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[	[70 ; 80[	Total
Nombre candidats	27	43	38	28	21	3	160
Centre	25	35	45	55	65	75	
EFCC	27	70	108	136	157	160	
n_ix_i	675	1 505	1 710	1 540	1 281	225	6 938
x_i^2	625	1 225	2 025	3 025	4 225	5 625	
$n_ix_i^2$	16 875	52 625	76 950	84 700	88 725	16 875	336 750

1. La moyenne : $\bar{x} = \dfrac{6\,936}{160} = 43{,}35$; **$\bar{x} = 43{,}35$.**

2. Les quartiles : par interpolation linéaire

$Q_{25} \in [30 - 40[$ $Q_{25} = 33{,}02$

$Q_{50} \in [40{,}50[$ $Q_{50} = 42{,}63$

$Q_{75} \in [50{,}60[$ $Q_{75} = 54{,}29$

3. L'écart interquartile : $Q_{75} - Q_{25} = 21{,}27$.

4. L'écart type : $\sigma_x = \sqrt{V(x)}$

$V(x) = \dfrac{336\,750}{160} - 43{,}35^2 = 225{,}47$;

$\sigma_x = 15{,}016$.