COLLECTION
INTER
AFRICAINE DE
MATHÉMATIQUES

1re SM

MATHÉMATIQUES

GUIDE PÉDAGOGIQUE

EDICEF

Collection
Inter
Africaine de
Mathématiques

sous la direction
de Saliou Touré
Professeur à l'Université
d'Abidjan

MATHÉMATIQUES

1re SM
SCIENCES
MATHÉMATIQUES

GUIDE PÉDAGOGIQUE

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen,
92178 Vanves Cedex

L'idée d'harmoniser les programmes de mathématiques des pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien remonte à l'année 1983 où fut organisé par l'IRMA, à Abidjan, le premier séminaire d'harmonisation. Depuis, d'autres séminaires ont suivi : en 1985 à Cotonou, en 1988 à Conakry et en juin 1992 à Abidjan avec la participation de 20 pays.

PARTICIPATION DES DIFFÉRENTS PAYS

BÉNIN	COMORES	GUINÉE	RÉP. DÉM. CONGO
BURKINA FASO	CONGO	MADAGASCAR	RWANDA
BURUNDI	COTE D'IVOIRE	MALI	SÉNÉGAL
CAMEROUN	DJIBOUTI	MAURITANIE	TCHAD
CENTRAFRIQUE	GABON	NIGER	TOGO

La suite logique, souhaitée par tous les participants, est l'élaboration d'une Collection Inter-Africaine de manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Des rédacteurs de tous les pays participent à la réalisation de ce projet. Un comité de coordination travaille avec les cellules nationales mises en place dans chaque pays.

COMITÉ DE COORDINATION

Mamadou COULIBALY	Missa COULIBALY
Isidore KOFFI	Soma TRAORÉ

D'autres séminaires de concertation ont réuni les responsables de ces cellules, à Libreville en 1993, à Ndjaména en 1994, à Yaoundé en 1995, à Antananarivo en 1996, à Dakar en 1997, à Niamey en 1998, à Nouakchott en 1999, à Ouagadougou en 2000 et à Cotonou en 2001.

ISBN 2-84-129759-4

SOMMAIRE

1 - TABLEAU SYNOPTIQUE DES PROGRAMMES DU SECOND CYCLE SCIENTIFIQUE

Les programmes du Second Cycle Scientifique ont été établis en juin 1992, lors du quatrième séminaire d'harmonisation des programmes de mathématiques des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien. Constitués d'un tronc commun en classe de seconde (S) et de deux séries à partir de la classe de première (SM et SE), ils sont ici présentés dans un tableau synoptique afin de faire apparaître :

– la cohérence des différents thèmes à un niveau donné ;

– l'évolution d'un thème d'un niveau à l'autre ;

– les différences de contenus entre les deux séries.

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
ENSEMBLE DE NOMBRES	♦ Nombres réels • Rationnels et irrationnels • Opérations • Ordre - propriétés - partie entière - encadrement et opérations - majorant, minorant, maximum, minimum d'un ensemble • Valeur absolue - définition - propriétés - distance de deux nombres réels - inéquations : $\lvert x-a\rvert < r$, $\lvert x-a\rvert > r$, $\lvert x-a\rvert \leq r$, $\lvert x-a\rvert \geq r$ • Calculs approchés - approximations décimales d'ordre n - encadrement et valeurs approchées - écriture scientifique, ordre de grandeur			♦ Corps des nombres complexes • Forme algébrique : égalité, opérations, conjugué et module • Affixe d'un point, d'un vecteur ; point image, vecteur image d'un complexe • Forme trigonométrique : - module, argument, - produit, quotient - notation exponentielle - formules de Moivre et d'Euler • Racines n-ièmes • Équations du 2nd degré • Utilisation en trigonométrie • Utilisation en géométrie : - écriture complexe de transformations - caractérisation complexe de configurations planes - lieux géométriques	♦ Nombres complexes • Forme algébrique : égalité, opérations, conjugué et module • Affixe d'un point, d'un vecteur ; point image, vecteur image d'un complexe • Forme trigonométrique : - module, argument, - produit, quotient - notation exponentielle - formules de Moivre et d'Euler • Racines n-ièmes • Équations du 2nd degré • Utilisation en trigonométrie • Utilisation en géométrie : - écriture complexe de transformations - caractérisation complexe de configurations planes

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
ARITHMÉTIQUE				• Division euclidienne • Numération (décimale et binaire) • Multiples et diviseurs d'un entier relatif ; notation $n\mathbb{Z}$ • Congruence modulo n et utilisation • PGCD et PPCM - algorithme d'Euclide - nombres premiers entre eux - théorèmes de Bézout et de Gauss • Nombres premiers	• Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers
CALCUL LITTÉRAL	♦ Polynômes • Racines • Factorisation • Différentes écritures • Signe ♦ Fractions rationnelles • Différentes écritures • Signe				
	♦ Équations • Équations se ramenant au 1er degré • Équations du 2nd degré (utilisation de la forme canonique) • Systèmes linéaires d'équations dans $\mathbb{R}^2$ (sans théorie) ; interprétation graphique	♦ Équations • Équations du 2nd degré - discriminant - somme et produit des solutions • Équations se ramenant au 2nd degré (bicarrées, irrationnelles) • Systèmes linaires d'équations dans $\mathbb{R}^3$ (pivot de Gauss)	♦ Équations • Équations du 2nd degré - discriminant - somme et produit des solutions • Équations se ramenant au 2nd degré (bicarrées, irrationnelles) • Systèmes linaires d'équations dans $\mathbb{R}^3$ (pivot de Gauss)	♦ Équations • Équations faisant intervenir les fonctions ln ou exp • Équations du 2nd degré dans $\mathbb{C}$	♦ Équations • Équations faisant intervenir les fonctions ln ou exp • Équations du 2nd degré dans $\mathbb{C}$
	♦ Inéquations • Inéquations se ramenant au 1er degré • Inéquations du 2nd degré (forme canonique) • Interprétation graphique d'une inéquation ou d'un système linéaire d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$	♦ Inéquations Inéquations du 2nd degré ou s'y ramenant (bicarrées, irrationnelles)	♦ Inéquations Inéquations du 2nd degré ou s'y ramenant (bicarrées, irrationnelles)	♦ Inéquations Inéquations faisant intervenir les fonctions ln ou exp	♦ Inéquations Inéquations faisant intervenir les fonctions ln ou exp
		♦ Problèmes se ramenant à la résolution d'équations, d'inéquations ou de systèmes (programmation)	♦ Problèmes se ramenant à la résolution d'équations, d'inéquations ou de systèmes (programmation)		

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
FONCTIONS	♦ **Généralités** • Notion de fonction • Ensemble de définition • Coïncidence de deux fonctions sur un ensemble	♦ **Généralités** • Restriction • Composition • Injection et surjection ; bijection et réciproque ; composée de bijections	♦ **Généralités** • Restriction • Composition • Injection et surjection ; bijection et réciproque ; composée de bijections		
	♦ **Fonctions numériques** • Représentation graphique • Image directe, image réciproque d'un intervalle (étude graphique) • Maximum, minimum d'une fonction sur un ensemble • Sens de variation	♦ **Fonctions numériques** • Opérations • Fonctions associées et représentations graphiques • Comparaison de fonctions ; fonctions majorées, minorées, bornées • Représentations graphiques de deux bijections réciproques • Parité, périodicité ; éléments de symétrie d'une courbe ; ensemble d'étude d'une fonction	♦ **Fonctions numériques** • Opérations • Fonctions associées et représentations graphiques • Comparaison de fonctions ; fonctions majorées, minorées, bornées • Représentations graphiques de deux bijections réciproques • Parité, périodicité ; éléments de symétrie d'une courbe ; ensemble d'étude d'une fonction		
ÉTUDE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES		♦ **Limites** • Notions • Limite à gauche, à droite • Limites de fonctions élémentaires • Propriétés de comparaison • Opérations • Limites à l'infini de fonctions polynôme ou rationnelle ♦ **Continuité en un point** • Notion • Prolongement par continuité	♦ **Limites** • Limite en a • Limite à gauche, à droite en a • Limites de fonctions élémentaires • Opérations • Limite infinie en a • Limite à l'infini • Opérations • Limites à l'infini de fonctions polynôme ou rationnelle ♦ **Continuité en a** • Notion • Critère de continuité	♦ **Limites** • Composition • Fonction monotone sur un intervalle ouvert • Formes indéterminées ♦ **Continuité sur un intervalle** • Opérations, composition • Image d'un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires • Fonction strictement monotone ; fonctions puissances d'exposant rationnel	♦ **Limites** • Propriétés de comparaison • Composition • Formes indéterminées ♦ **Continuité sur un intervalle** • Prolongement par continuité • Opérations, composition • Image d'un intervalle, valeurs intermédiaires • Fonction strictement monotone ; fonctions puissances d'exposant rationnel

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
ÉTUDE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES		♦ **Dérivation** • Nombre dérivé en a • Interprétations - tangente, vitesse - approximation locale affine • Nombre dérivé à gauche, à droite • Dérivabilité sur un intervalle • Dérivées de fonctions élémentaires • Opérations, composition avec une fonction affine • Signe de la dérivée et sens de variation • Extremum relatif d'une fonction	♦ **Dérivation** • Nombre dérivé en a • Interprétation - tangente • Dérivabilité sur un intervalle • Dérivées de fonctions élémentaires • Opérations, composition avec une fonction affine. • Signe de la dérivée et sens de variation • Extremum relatif d'une fonction	♦ **Dérivation** • Composition ; fonction réciproque • Dérivées successives, position relative d'une courbe et de ses tangentes • Dérivées de : u^r ($r \in \mathbb{Q}$), $\ln \circ u$, $\exp \circ u$ et u^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) • Inégalité des accroissements finis	♦ **Dérivation** • Interprétations - vitesse - approximation locale affine • Dérivabilité à gauche, à droite • Composition ; fonction réciproque • Dérivées successives, notion de point d'inflexion • Dérivées de : u^r ($r \in \mathbb{Q}$), $\ln \circ u$, $\exp \circ u$ et u^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) • Inégalité des accroissements finis.
	♦ **Étude de fonctions** • Fonctions affines par intervalles • Fonctions élémentaires : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto x^3$ • Composées des fonctions précédentes avec une fonction linéaire	♦ **Étude de fonctions** • Fonctions polynômes (degré ≤ 3) • $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ • $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ • Fonctions sinus, cosinus, tangente et fonctions trigonométriques simples	♦ **Étude de fonctions** • Fonctions polynômes (degré ≤ 3) • $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ • $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ • Fonction tangente	♦ **Étude de fonctions** • Fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles et trigonométriques • $x \mapsto \ln x$; $x \mapsto e^x$ • $x \mapsto a^x$; $x \mapsto x^\alpha$ • Fonctions $\ln \circ u$, $\exp \circ u$ et u^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) • Croissances comparées de $\ln x$, e^x et x^α	♦ **Étude de fonctions** • Fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles et trigonométriques • $x \mapsto \ln x$; $x \mapsto e^x$ • $x \mapsto a^x$; $x \mapsto x^\alpha$ • Fonctions $\ln \circ u$, $\exp \circ u$ et u^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) • Croissances comparées de $\ln x$, e^x et x^α
	♦ **Compléments** • Résolution graphique d'équations et d'inéquations	♦ **Compléments** • Asymptote • Résolution d'équations par dichotomie	♦ **Compléments** • Asymptote • Résolution d'équations par dichotomie ou balayage	♦ **Compléments** • Branches infinies • Résolution d'équations par balayage	♦ **Compléments** • Branches infinies
SUITES NUMÉRIQUES		• Diverses façons de définir et représenter une suite • Suites définies par une formule de récurrence : détermination graphique des termes • Minoration, majoration ; sens de variation • Notion de convergence • Suites arithmétiques et géométriques	• Diverses façons de définir et représenter une suite • Suites définies par une formule de récurrence : détermination graphique des termes • Minoration, majoration ; sens de variation • Notion de convergence • Suites arithmétiques et géométriques	• Suites bornées ; suites monotones • Limite, convergence et divergence • Calculs de limites - limite de $u_n = f(n)$, lorsque f a une limite en $+\infty$; - opérations - croissances comparées de (a^n), (n^α) et $\ln n$; - propriétés de comparaison - image d'une suite par une fonction - suite monotone • Suite définie par récurrence ; méthodes du point fixe et de Newton • Suites arithmétiques et géométriques	• Suites bornées ; suites monotones • Limite, convergence et divergence • Calculs de limites - limite de $u_n = f(n)$, lorsque f a une limite en $+\infty$; - opérations - propriétés de comparaison - suite monotone • Suite définie par récurrence ; notion de point fixe • Suites arithmétiques et géométriques

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
INTÉGRATION				♦ **Définitions** • Primitives et intégrale d'une fonction continue sur un intervalle • Interprétations graphique (aire) et cinématique	♦ **Définitions** • Primitives et intégrale d'une fonction continue sur un intervalle • Interprétation graphique (aire)
				♦ **Propriétés** • Chasles, linéarité, positivité • Inégalité de la moyenne, valeur moyenne	♦ **Propriétés** • Chasles, linéarité positivité • Inégalité de la moyenne, valeur moyenne
				♦ **Techniques de calcul** • Calculs de primitives • Intégration par parties • Changement de variable affine ♦ **Intégration de** • fonctions paires, impaires ou périodiques • « polynômes » trigonométriques • fonctions rationnelles ♦ **Calcul approché d'intégrale**	♦ **Techniques de calcul** • Calculs de primitives • Intégration par parties ♦ **Intégration de** • fonctions paires, impaires ou périodiques • « polynômes » trigonométriques • fonctions rationnelles ♦ **Calcul approché d'intégrale**
				♦ **Applications** • Aires et volumes • Fonction définie par une intégrale	♦ **Applications** • Aires et volumes • Fonction définie par une intégrale
				♦ **Équations différentielles** • $y' - ay = 0$ • $y'' + ay' + by = 0$	♦ **Équations différentielles** • $y' - ay = 0$ • $y'' + ay' + by = 0$
ORGANISATION DES DONNÉES	♦ **Statistiques** • Consolidation des acquis du 1er Cycle • Notation Σ • Séries non regroupées en classes : - effectifs et fréquences cumulées - caractéristiques de position (mode, moyenne, médiane) et de dispersion (écart moyen, variance, écart type) • Séries regroupées en classes ; - histogramme	♦ **Statistiques** • Séries simples regroupées en classes ; - courbes cumulatives - caractéristiques de position et de dispersion • Séries doubles ; - nuage de points, point moyen - ajustement linéaire (moindres carrés) - droites de régression, covariance et coefficient de corrélation	♦ **Statistiques** • Séries simples regroupées en classes ; - polygone des effectifs et courbes cumulatives - caractéristiques de position et de dispersion		• Séries doubles : - nuage de points, point moyen - ajustement linéaire (Mayer, moindres carrés) - droites de régression, covariance et coefficient de corrélation

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
ORGANISATION DES DONNÉES		♦ **Analyse combinatoire** • Ensemble - cardinal - ensemble des parties et partition - produit cartésien • p-uplets, arrangements (A_n^p), permutations ($n!$), combinaisons (C_n^p) • Nombre d'applications, d'injections et de bijections entre deux ensembles finis • Formule du binôme ♦ **Dénombrement** • Comptage, diagrammes, arbres • Tirages successifs (avec ou sans remise), tirages simultanés • Principes de la somme et du produit	♦ **Analyse combinatoire** • Ensemble - cardinal - parties - produit cartésien • p-uplets, arrangements (A_n^p), permutations ($n!$), combinaisons (C_n^p) • Nombre d'applications, d'injections et de bijections entre deux ensembles finis ♦ **Dénombrement** • Comptage, diagrammes, arbres • Tirages successifs (avec ou sans remise), tirages simultanés • Principes de la somme et du produit	♦ **Analyse combinatoire** • Consolidation des acquis de 1[re] • Formule du binôme et triangle de Pascal ♦ **Probabilités** • Vocabulaire • Propriétés • Équiprobabilité • Indépendance • Épreuve de Bernoulli ♦ **Variable aléatoire** • Loi de probabilité • Fonction de répartition • Espérance mathématique, variance et écart type • Loi binomiale	♦ **Analyse combinatoire** • Consolidation des acquis de 1[re] • Formule du binôme et triangle de Pascal ♦ **Probabilités** • Vocabulaire • Propriétés • Équiprobabilité • Probabilité conditionnelle, événements indépendants, probabilités totales ♦ **Variable aléatoire** • Loi de probabilité • Fonction de répartition • Espérance mathématique, variance et écart-type • Épreuve de Bernoulli • Loi binomiale
ANGLES	♦ **Angles inscrits non orientés** • Arcs capables • Quadrilatères inscriptibles • Relations métriques dans un triangle : - $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$ - théorème des sinus ♦ **Polygones réguliers** ♦ **Angles orientés** • Orientation du plan • Angle orienté de deux vecteurs ; mesure principale	♦ **Angles orientés** • Mesures • Somme • Propriétés : - Chasles, double d'un angle orienté - angles inscrits - points cocycliques	♦ **Angles orientés** • Mesures • Somme et différence • Chasles	♦ **Lignes de niveau** $M \mapsto \mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$	
TRIGONOMETRIE	• Cercle trigonométrique • Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté	• Définition et propriétés des fonctions circulaires • Formules : addition, duplication, linéarisation ... • Équations, inéquations trigonométriques	• Définition et propriétés des fonctions circulaires • Formules : addition, duplication, linéarisation ... • Équations trigonométriques	♦ **Utilisation des complexes** • Expression de $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ • Linéarisation • Transformation de produit en somme et de somme en produit	♦ **Utilisation des complexes** • Expression de $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ • Linéarisation • Transformation de produit en somme et de somme en produit

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
CALCULS VECTORIELS DANS LE PLAN	♦ Vecteurs • Combinaison linéaire • Colinéarité • Mesure algébrique • Bases, repères • Déterminant de deux vecteurs • Caractérisation vectorielle de : - droite ou demi-droite - droites parallèles ou perpendiculaires - centre de gravité d'un triangle	♦ Barycentre de 2, 3 ou 4 points pondérés • Définition • Propriétés - homogénéité - réduction - barycentres partiels - conservation par projection • Construction • Ensemble des barycentres de deux points	♦ Barycentre de 2, 3 ou 4 points pondérés • Définition • Propriétés - homogénéité - réduction - barycentres partiels • Construction • Ensemble des barycentres de deux points	♦ Barycentre de n points pondérés • Définition • Propriétés - homogénéité - réduction - barycentres partiels • Construction • Ensemble des barycentres de trois points non alignés	
	♦ Utilisation des vecteurs Démonstration de propriété	♦ Utilisation du barycentre • Problèmes d'alignement et de concours • Lignes de niveau - $M \mapsto aMA^2 + bMB^2$ - $M \mapsto \frac{MA}{MB}$	♦ Utilisation du barycentre • Problèmes d'alignement et de concours • Ligne de niveau - $M \mapsto MA^2 + MB^2$	♦ Utilisation du barycentre • Lignes de niveau - $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$ - $M \mapsto \frac{MA}{MB}$	
	♦ Produit scalaire • Définition • Propriétés • Norme d'un vecteur • Expression analytique dans une base orthonormée • Relations métriques dans un triangle ; théorèmes d'Al-Kashi et de la médiane	♦ Utilisation du produit scalaire • Ligne de niveau - $M \mapsto MA^2 - MB^2$	♦ Utilisation du produit scalaire • Lignes de niveau - $M \mapsto MA^2 - MB^2$ - $M \mapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$		
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE	♦ Droites Représentations paramétriques	♦ Orthogonalité • Équation normale d'une droite • Distance d'un point à une droite			
	♦ Cercle Équations cartésiennes	♦ Cercle • Représentation paramétrique • Tangente(s) issue(s) d'un point	♦ Cercle Représentation paramétrique		
		♦ Expression analytique • d'une translation • de symétries orthogonales particulières • d'une homothétie	♦ Expression analytique • d'une translation • de symétries orthogonales particulières	♦ Expression analytique • d'une application affine	

APPLICATIONS DU PLAN

Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
♦ Rotations [niveau 1 (*)] • Définition • Propriétés - point invariant - rotation réciproque - décomposition (symétries-droite) - propriété fondamentale - images de figures	♦ Translations et rotations [niveau 2 (*)] • Propriété caractéristique • Composée (deux translations, deux rotations ou deux symétries-droite) • Décomposition (symétries-droite) d'une translation ou d'une rotation	♦ Translations et rotations [niveau 2 (*)] • Composée (deux rotations ou une rotation et une translation) • Décomposition (rotation de centre donné et translation) d'une rotation		
	♦ Isométries [niveaux 1 et 2 (*)] • Définition • Propriétés - images de figures - conservations • Composition • Déplacements et antidéplacements • Critères d'isométrie de deux triangles • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété)	♦ Isométries [niveaux 1 et 2 (*)] • Définition • Propriété - conservations • Déplacements et retournements • Détermination par deux triangles superposables • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété)	♦ Isométries [niveaux 1 et 2 (*)] • Composition et décomposition ; symétrie glissée • Classifications - points invariants - déplacements et antidéplacements • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété)	
			♦ Applications affines • Définition • Propriétés - conservation du barycentre - composition - application vectorielle associée - détermination par l'image d'un repère - points invariants - images d'une droite, d'un plan - conservation du parallélisme • Affinités du plan	
♦ Homothéties [niveau 1 (*)] • Définition • Propriétés - point invariant - réciproque - propriété fondamentale - images de figures - conservations - longueurs et aires • Déterminations d'une homothétie - centre, un point et son image - rapport, un point et son image - deux points et leurs images	♦ Homothéties [niveau 2 (*)] • Propriété caractéristique • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété) ♦ Composée d'isométrie et homothétie • Images de figures • Critères de similitude de deux triangles	♦ Homothéties [niveau 2 (*)] • Composition : homothéties de même centre, homothétie et translation • Décomposition (homothétie de centre donné et translation) • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété) ♦ Similitudes • Définition (par les longueurs) • Images de figures • Détermination - deux triangles semblables	♦ Similitudes directes [niveaux 1 et 2 (*)] • Écriture complexe • Forme réduite • Composition • Propriété caractéristique • Images de figures • Déterminations - centre, un point et son image - rapport, angle, un point et son image - deux points et leurs images • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété)	♦ Similitudes directes [niveaux 1] • Écriture complexe • Forme réduite

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
CONIQUES				• Définition - foyer et directrice - bifocale • Constructions point par point • Équations réduites et éléments caractéristiques • Courbes d'équation : $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$ • Étude analytique, équation de la tangente en un point • Représentation paramétrique de l'ellipse • Équation de l'hyperbole par rapport à ses asymptotes • Régionnement du plan par une conique	
GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE	**♦ Description de l'espace** • Positions relatives de droites et plans • Parallélisme (étude)	**♦ Description de l'espace** • Orthogonalité • Distance : point à une droite, à un plan	**♦ Description de l'espace** • Orthogonalité • Projections orthogonales	**♦ Orientation de l'espace** • Repère direct • Repère indirect	**♦ Orientation de l'espace** • Repère direct • Repère indirect
		♦ Vecteurs de l'espace • Définition • Calcul vectoriel • Base et repère **♦ Produit scalaire** • Définition • Propriétés • Expression analytique • Utilisation : - équations d'une sphère - surfaces de niveau	**♦ Vecteurs de l'espace** • Définition • Vecteurs colinéaires, coplanaires • Base et repère	**♦ Produit vectoriel** • Définition • Propriétés • Expression analytique • Utilisation : - équation d'un plan - positions relatives de deux plans - distance (point à une droite, à un plan) - aires et volumes	**♦ Produit scalaire** • Définition • Propriétés • Expression analytique • Utilisation : équation d'un plan, d'une sphère **♦ Produit vectoriel** • Définition • Propriétés • Expression analytique • Utilisation : alignement et aires
		♦ Géométrie analytique • Vecteur normal à un plan • Équations et représentations paramétriques (plan, droite) • Distance d'un point à un plan • Étude analytique du parallélisme et de l'orthogonalité		**♦ Applications de l'espace** • Projections sur un plan, sur une droite • Translations et homothéties • Symétries orthogonales : réflexion, demi-tour	

(*) **Niveaux d'étude des transformations**

Niveau 1	• Se familiariser avec les transformations • Reconnaître une transformation • Construire l'image d'un point, d'une figure usuelle par une transformation définie de diverses façons • Reconnaître deux figures « homologues » par une transformation (« figures clés »)
Niveau 2	• Propriété caractéristique • Composer des transformations • Utiliser des transformations (mais pas leurs composées) pour : – trouver un lieu géométrique ; – résoudre un problème de construction ; – démontrer une propriété.
Niveau	• Utiliser une composée de transformations pour : – trouver un lieu géométrique ; – résoudre un problème de construction ; – démontrer une propriété.

2 COMMENTAIRES GÉNÉRAUX POUR LE SECOND CYCLE

La Collection Inter-Africaine de Mathématiques (C.I.A.M.) est l'aboutissement d'une volonté, déjà ancienne, des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien de mettre en place un cadre commun pour Harmoniser les Programmes de Mathématiques (H.P.M.) et leur enseignement.
Cette harmonisation vise essentiellement à améliorer la qualité de l'enseignement, à le rendre accessible à un plus grand nombre d'élèves et à prendre en compte les résultats des dernières recherches en didactique des mathématiques. Elle a, dans un premier temps, débouché sur une rénovation des programmes et des méthodes. Elle s'est par la suite accompagnée d'une formation adéquate des professeurs puis concrétisée par la rédaction de manuels-élève, au coût réduit, et de guides pédagogiques, à l'usage exclusif des professeurs.
Les manuels-élève comprennent deux parties (géométrie / algèbre et analyse) mieux équilibrées en série Sciences Mathématiques (SM) qu'en série Sciences Expérimentales (SE), où la géométrie est moins développée. Les contenus de ces manuels peuvent être couverts en **25 semaines**, si les volumes horaires suivants sont retenus :

Classe	2nde S	1re SM	1re SE	T SM	T SE
Horaire hebdomadaire	5 h	6 h	5 h	9 h	6 h
Total	125 h	150 h	125 h	225 h	150 h

À noter que tous les livres ont un index et que ceux de terminales se terminent par un chapitre « Problèmes de synthèse », dont la plupart sont extraits des différents baccalauréats africains.

2.1. Options académiques

Les auteurs des manuels CIAM, conscients du mouvement pendulaire des réformes successives des programmes de mathématiques entre :
- le tout conceptuel, tout abstrait, tout rigueur des années 70, à l'instar des programmes français (repris, parfois exagérément, dans les programmes africains),
- le tout concret, beaucoup (trop ?) de propriétés admises des années 90, toujours selon les programmes français (pas systématiquement repris cette fois en Afrique),

ont opté pour plus de mesure et sont délibérément restés dans un **juste milieu**, voulant ainsi stabiliser le mouvement.
C'est ainsi que l'on trouve (s'agissant des classes scientifiques du second cycle) des aperçus théoriques et des vraies démonstrations, un chapitre d'arithmétique et quelques structures (à dose homéopathique et en terminale SM uniquement), mais **aucune théorie des ensembles, aucun chapitre de logique théorique ... avec tables de vérité !**

2.2. Options pédagogiques

Utilisation de la calculatrice

La calculatrice est un outil qui, avec ou sans instructions officielles, connaît une large diffusion. Il est de l'intérêt des enseignants d'en tenir compte. S'il ne peut être encore question, vu les coûts, d'imposer son usage par des mentions dans les programmes officiels, les manuels-élève recensent les points de programmes ou les activités motivant son emploi et favorisant chez l'élève l'habitude d'une utilisation intelligente.

Apprentissage du raisonnement

- Les démonstrations de certaines propriétés et les résolutions d'exercices permettent de dégager de nombreuses **méthodes** qui enrichissent la boîte à outils de l'élève. Ces points méthodes sont repérés par l'avertisseur **M**.
- Les éléments de **logique** (notion de proposition, connecteurs, quantificateurs, méthodes de raisonnement : contraposition, absurde, récurrence) ne font pas l'objet d'un cours, mais sont introduits et réinvestis chaque fois que le besoin s'en fait sentir. La rubrique **L** a été crée à cet effet.

Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes. Pour répondre à cette nécessité, des **travaux dirigés** sont proposés en fin de leçon. Outre un renforcement de l'apprentissage du raisonnement, ces travaux dirigés constituent soit un inventaire des exercices types de la leçon, soit un prolongement non exigible à certaines notions, soit enfin une ouverture interdisciplinaire. Lorsqu'ils semblent un peu difficiles et montrent une propriété intéressante ou un type de raisonnement inédit, les solutions sont intégralement données ; sinon, les solutions sont guidées par un questionnement.

1.3. Aspects culturels

Les notes historiques

Traitant d'événements ou d'hommes qui ont marqué l'évolution des mathématiques, les notes historiques doivent convaincre les élèves que les mathématiques se sont construites peu à peu, à travers recherches, tâtonnements et découvertes, et leur permettre de prendre contact avec quelques problèmes célèbres.

Contextualisation des contenus

Autant que faire se peut, les auteurs ont voulu mettre à profit l'environnement socioculturel africain, aussi bien pour lutter contre le désintérêt des élèves pour une discipline réputée importée, que pour les convaincre que cette réputation est fallacieuse (*il y a des mathématiques dans la vie de l'Africain, comme dans celle de l'Indien ou de l'Asiatique*) et leur donner le goût d'oeuvrer au développement de leur continent.

Les informations scientifiques

Il s'agit cette fois de convaincre les élèves et, si besoin est, leurs professeurs que les mathématiques sont en constante évolution, comme de rester en contact avec quelques récentes découvertes (rôle croissant, en particulier, de l'informatique).

1.4. Utilisation du manuel

Le manuel n'est pas un livre saint, mais un outil pédagogique précieux comme le tableau ou le rétroprojecteur, au service du professeur et de l'élève. En plus de ses fonctions classiques d'aide aux préparations de cours et de recueil d'exercices, il a de nombreuses autres fonctions avant, pendant et après le cours qu'il convient de préciser ici.

Utilisation du manuel	Le professeur	L'élève
avant le cours	• lit le programme • lit les instructions officielles • étudie la traduction des contenus du programme dans le manuel • choisit, en relation avec le manuel : – la présentation d'une notion – des démarches – des motivations – des activités – des traces écrites – des exercices à traiter en classe ou à la maison • repère les points précis d'utilisation du manuel pendant le cours	• apprend la leçon précédente sur son livre et son cahier • prépare sur le cahier de recherche un tableau, une activité du livre, une figure, un organigramme, un exercice • étudie les pages de révisions
pendant le cours	• fait analyser, commenter, identifier des planches, des tableaux, des figures, des textes du manuel • fait reconnaître une démarche, une construction, une démonstration déjà vue par l'élève • fait lire une définition, une propriété • fait critiquer cette lecture par la classe • fait reconnaître, rechercher dans le livre, recopier sur le cahier de cours : – des définitions ou propriétés – des notations de symboles, des figures, des schémas • fait analyser des énoncés d'exercices	• utilise le manuel selon les indications du professeur • exploite oralement ou sur le cahier de recherche des planches, des tableaux, des figures, des textes du manuel • recherche dans le manuel (utilisation de l'index, du sommaire) des définitions, propriétés, symboles, figures, schéma • analyse oralement des énoncés d'exercices • traite les exercices sur le cahier de recherche
après le cours		• relit le cours sur le cahier, le livre • traite les exercices

Il faut apprendre à l'élève à se servir du manuel où il trouvera les résultats essentiels, les méthodes de résolution de certains types de problèmes, des exercices d'entraînement et d'approfondissement qui lui permettront de contrôler ses acquis et de s'initier à la recherche.

Avant de proposer des exercices ou des travaux aux élèves, le professeur devra se poser les questions suivantes :

– font-ils partie des capacités requises dans cette classe ?
– constituent-ils des activités possibles en classe ou faut-il les réserver pour le travail à la maison ?
– leur contexte mathématique est-il compréhensible par un élève de ce niveau ?
– leur résolution relève-t-elle de l'entraînement, de l'approfondissement ? a-t-elle valeur de méthode ?

3 COMMENTAIRES SPÉCIFIQUES À LA CLASSE DE PREMIÈRE SM

La classe de première Science Mathématique assure à la fois une continuité avec la classe de seconde S et une préparation à la classe de terminale SM, où l'élève devra passer l'examen du baccalauréat.

3.1. Activités des élèves

Énumérons quelques raisons qui militent en faveur de la mise en activités de l'élève :
- les instructions officielles le demandent ;
- on connaît bien les limites d'un enseignement fondé sur le principe « je leur apprends - ils appliquent donc ils savent. » ;
- il convient de prendre en compte les recherches en psychologie cognitive et en didactique ;
- comme le dit si bien Vergnaud, **l'action est source et critère du savoir** ;
- **faire des mathématiques c'est avant tout :**
  - **déceler qu'il y a un problème,**
  - **(se) poser des questions à propos de ce problème,**
  - **(tenter de) résoudre des problèmes ;**
- c'est un moyen - certes non exclusif - d'amener l'élève à s'investir personnellement.

Les nouvelles notions et les théorèmes sont, pour la plupart, précédés par une ou deux activités de motivation.
De plus, en continuité avec le premier cycle, on a voulu :
- mettre l'accent sur le raisonnement, la démonstration et sa rédaction ;
- proposer des exercices types ou donner des prolongements intéressants mais non exigibles. Pour cela, on a proposé des démonstrations complètes ou guidées de propriétés, des solutions complètes ou guidées de travaux dirigés.

3.2. Présentation du manuel

Organisation des chapitres

Chaque chapitre est découpé en leçons, chaque leçon en paragraphes et chaque paragraphe en sous-paragraphes.
Les leçons se terminent par des exercices **de fixation des savoirs** et les chapitres par des exercices **d'entraînement** et **d'approfondissement**, classés par thème.

Notation et vocabulaire

Dans la mesure du possible on a gardé les notations et le vocabulaire utilisés dans le manuel CIAM de seconde S.

Proposition de progression

6 heures hebdomadaires.

Géométrie (3 h / semaine)		**Algèbre et analyse (3 h / semaine)**	
Barycentre	9 h	Fonctions	9 h
Trigonométrie	12 h	Équations, inéquations, systèmes linéaires	9 h
Géométrie analytique du plan	6 h	Dénombrement	12 h
Isométries du plan	12 h	Limites et continuité	9 h
Homothéties	6 h	Dérivation	9 h
Orthogonalité dans l'espace	12 h	Études de fonctions	9 h
Vecteurs de l'espace	9 h	Suites numériques	9 h
Géométrie analytique de l'espace	9 h	Statistiques	9 h
Total	**75 h**	**Total**	**75 h**

3.3. Points méthodes

On relève dans le manuel de première Science Mathématique les points méthodes suivants :

Géométrie	Pages	Algèbre et analyse	Pages
Déterminer le barycentre de plusieurs points pondérés	13	Résoudre une équation irrationnelle	193
Démontrer un alignement de points	17, 29	Utiliser le principe de la somme pour dénombrer	219
Déterminer la mesure principale d'un angle orienté	25	Utiliser le principe du produit pour dénombrer	219
Résoudre une équation du type : $a\cos x + b\sin x + c = 0$	39	Utiliser la disjonction des cas ou le complémentaire pour dénombrer	220
Déterminer une équation normale d'une droite dont on connaît une équation cartésienne	50	Calculer la limite en a d'un quotient de fonctions qui s'annulent en a	236
Utiliser une transformation pour chercher un lieu géométrique	75	Démontrer qu'une droite est un axe de symétrie d'une courbe	268
Utiliser une transformation pour construire	76	Démontrer qu'un point est un centre de symétrie d'une courbe	269
Associer une transformation à une configuration plane	77	Étudier une fonction	273
Démontrer que deux droites de l'espace sont orthogonales	110	Démontrer qu'une suite est arithmétique	292
Démontrer que deux droites de l'espace sont parallèles	112	Démontrer qu'une suite est géométrique	294
Démontrer que deux plans de l'espace sont parallèles	112		
Démontrer que deux plans de l'espace sont perpendiculaires	116		

3.4. Points logiques

On relève dans le manuel de première Science Mathématique les points logiques suivants :

Points logiques	Pages
Égalité de deux ensembles	7
Expressions « tous nuls », « non tous nuls », « tous non nuls »	19
Raisonnement par contraposition	170
Raisonnement par récurrence	253

3.5. Principes de démonstration

3.5.1. Implication directe

Le raisonnement mathématique le plus courant est *l'implication directe*, appelée également *raisonnement déductif.*

Principe

On suppose une propriété p vraie et on en déduit une propriété q vraie.
On note : p ⇒ q.

Exemples

P. 45, n° 31 ; p. 181, n° 38 ; p. 182, n° 39 ; p. 264, n° 33.

3.5.2. Disjonction des cas

Principe

Pour démontrer une propriété, il est parfois nécessaire d'étudier cas par cas.
Au lieu de démontrer p ⇒ q, on décompose en n sous-cas et on démontre $p_1 \Rightarrow q$, $p_2 \Rightarrow q$...

Exemples

P. 43, n° 10 ; p. 58, n° 11 ; p. 85, n° 36 ; p. 105, n° 33 ; p. 120, n° 8 ; p. 200, n° 12 et 13 ; p. 223, n° 18.

3.5.3. Élimination des cas

Principe

Il est parfois utile, quand le nombre de cas est fini, d'étudier toutes les possibilités et de ne retenir que celles qui sont « bonnes ».
Ce raisonnement est une variante de la disjonction des cas.

Exemples

P. 45, n° 32 et 41 ; p. 222, n° 3 ; p. 224, n° 34.

3.5.4. Contraposée

Principe

Il est parfois plus facile de démontrer non q ⇒ non p, plutôt que p ⇒ q.
Ces deux implications sont logiquement équivalentes.

Exemple

P. 120, n° 2.

3.5.5. Raisonnement par l'absurde

Principe

Pour démontrer que p ⇒ q, il est parfois plus pratique de supposer que p est vrai et q est faux et d'aboutir à une contradiction.
Ces deux propositions sont logiquement équivalentes.

Exemples

P. 120, n° 5 et 8 ; p. 121, n° 18 ; p. 122, n° 29 ; p. 222, n° 5.

3.5.6 . Raisonnement par récurrence

Principe

Pour démontrer qu'une proposition $P(n)$ qui concerne un nombre entier naturel n, est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0, on procède en deux étapes :

- on démontre que : $P(n)$ est vraie ;
- on démontre que : pour tout nombre entier k supérieur ou égal à n_0, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k + 1)$ est vraie.

Exemples

P. 297, n° 9 ; p. 298, n° 23 ; p. 300, n° 35.

3.5.7. Utilisation d'un contre-exemple

Principe

Il s'agit de trouver un exemple qui contredit une affirmation, une règle.

Exemples

P. 179, n° 12 et 15 ; p. 242, n° 25.

3.5.8. Équivalence

Principe

Démontrer que deux propositions p et q sont équivalentes revient à démontrer les deux implications suivantes : p ⇒ q et q ⇒ p.

Exemples

P. 120, n° 11 ; p. 121, n° 16 et 17.

3.6. Travaux dirigés

3.6.1. Objectifs généraux

- apprendre à chercher
- faire fonctionner un outil
- dégager des méthodes

• donner un prolongement (non exigible) à certaines notions.

Apprendre à chercher

L'élève suit généralement deux étapes : la lecture de l'énoncé et la recherche d'une démarche.

Lecture de l'énoncé

Faite avec attention, elle permet à l'élève de bien distinguer :

• les données et contraintes(ce que l'on sait) ;

• les conclusions (ce que l'on cherche).

Recherche d'une démarche

L'élève dispose de connaissances minimales (définitions, propriétés). Il doit faire l'inventaire de celles qui ont un rapport avec les objets mathématiques entrant en jeu et sélectionner les plus opérationnnelles. Pour certains types de problèmes, la démarche est plus élaborée et donne lieu à des points méthodes :

– les problèmes de lieux ;

– les problèmes de construction ;

– les problèmes conduisant à une équation ou une inéquation.

Les problèmes de modélisation et les problèmes ouverts sont des cadres appropriés pour mettre un élève en situation de recherche.

Exemples

– Démontrer (pages 13, 117).

– Conjecturer (page 295).

Faire fonctionner un outil

Il s'agit d'outils déjà formalisés dans le cours :

– propriétés ;

– méthodes de résolution de problèmes ;

– principes de démonstration.

Exemples

– Utiliser des formules pour calculer des lignes trigonométriques (page 35).

– Démontrer que des points sont coplanaires (pages 129, 134).

– Étudier le signe des solutions d'une équation du second degré (page 190).

– Dénombrer des tirages simultanés (page 220).

– Utiliser la dérivation pour optimiser (page 260).

– Utiliser la dérivation pour comparer deux fonctions (page 261).

Dégager des méthodes

Certains travaux dirigés et exercices résolus donnent l'occasion de rappeler ou de mettre en place des points méthodes.

Exemples

– Déterminer la mesure principale d'un angle orienté (page 25).

– Utiliser le barycentre pour démontrer un alignement de points, une concourance de droites (pages 16, 17).

Donner un prolongement à certaines notions

Certains travaux dirigés permettent de démontrer un résultat connu ou de donner un prolongement à une notion.

Exemples

– Caractériser une tangente à un cercle (page 30).

– Définir la droite de Simson (page 30).

– Établir l'expression trigonométrique du déterminant de deux vecteurs (page 51).

– Exprimer les aires d'un triangle, d'un parallélogramme à l'aide du déterminant de deux vecteurs (page 52).

– Déterminer une équation cartésienne de la tangente en un point d'un cercle (page 54).

– Déterminer une équation cartésienne des tangentes à un cercle passant par un point extérieur (page 55).

– Étudier le groupe des transformations laissant globalement invariant un rectangle (page 81).

– Démontrer le théorème de Ménélaüs (page 101).

– Déterminer la perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires (page 118).

– Déterminer une équation cartésienne d'une sphère (page 138).

– Déterminer des surfaces de niveau (page 139).

– Établir des limites de référence (page 237).

– Faire un ajustement linéaire par la méthode de Mayer (page 313).

3.6.2. Conduite d'une séance de travaux dirigés

Choix d'un problème

- Le professeur propose le travail dirigé adapté à l'objectif qu'il veut atteindre.
- Il précise alors aux élèves le temps de recherche qui peut varier d'un travail dirigé à l'autre suivant la longueur ou la difficulté du problème.

Gestion de la classe

Après la phase de recherche, le professeur organise dans la classe un débat :
- les élèves sont invités à communiquer leurs idées, à partir desquelles on essaie de trouver une solution ;
- s'il n'y a aucune piste sérieuse, le professeur donne une, deux, ou plusieurs indications suivant la réaction des élèves.

Rédaction d'une solution

Lorsqu'on a trouvé une solution, le professeur demande aux élèves de la rédiger.
Rédiger, en mathématiques, c'est mettre en évidence les grandes lignes et les articulations du raisonnement. Si cela s'est fait souvent à l'aide d'un schéma ou d'un organigramme au premier cyclce, l'accent sera mis au second cycle sur une rédaction en français. En effet, c'est d'après ses rappports et ses projets que l'élève, cadre de demain, sera jugé par ses collègues et ses supérieurs hiérarchiques. Le professeur lui apprendra donc à être précis, concis et clair.

3.7. Géométrie

Le tableau suivant énumère les principales activités de géométrie et les outils pour les aborder.

Objectifs	Activités	Outils
- Apprendre à lire, à travailler sur une figure - Développer la capacité à analyser des configurations - Renforcer les méthodes essentielles à travers la résolution de problèmes	– Démontrer des propriétés liées à des configurations – Construire une configuration respectant certaines contraintes – Rechercher des lieux géométriques	– Configurations – Vectoriel – Analytique – Transformations

3.7.1. Les activités de la géométrie

Les problèmes d'études de configurations

Un problème d'étude de configuration consiste à étudier une figure donnée et à en établir des propriétés :
- des égalités de distances, d'angles, ... ;
- des alignements de points, des parallélismes, des orthogonalités, des concourances de droites, etc.

Les démonstrations de propriétés de configurations occupent une place dominante dans notre enseignement.
Il est pratique de faire réaliser par les élèves, au fur et à mesure, des fiches à thèmes :
- démontrer que trois points sont alignés,
- démontrer que des doites sont parallèles,
- démontrer que des doites sont perpendiculaires,
- démontrer que des doites sont concourantes,
- démontrer que deux distances sont égales,
- démontrer que deux angles sont égaux,
- démontrer que deux vecteurs sont égaux,
- démontrer qu'un angle est droit,
- démontrer que quatre points sont cocycliques, etc.

Les problèmes de construction

Un problème de construction consiste à reconstituer une figure connaissant certains de ses éléments ou certaines de ses propriétés.

M Pour résoudre un problème de construction, on peut procéder en deux étapes : analyse et synthèse.
- L'analyse consiste à supposer le problème résolu et à étudier une figure répondant à la question pour en dégager les propriétés permettant sa construction.
- La synthèse consiste à construire la figure en utilisant les propriétés dégagées dans l'analyse, à justifier que la figure construite répond à la question et, éventuellement, à discuter le nombre de solutions du problème.

Les problèmes de lieu géométrique

Un problème de lieu a pour objet de rechercher un ensemble de points.

On considère une configuration dont certains éléments sont fixes et d'autres variables. On recherche l'ensemble des positions d'un des points variables, lorsqu'un autre point variable, auquel il est lié par la configuration, décrit une courbe donnée (droite, segment, cercle, ...).

Lieux définis par des conditions numériques

- Ces lieux sont définis par des équations, inéquations, lignes de niveaux, etc.
- Pour déterminer de tels lieux, on choisit un bon repère et on utilise une méthode analytique.

Lieux liés à des configurations

Ⓜ Pour chercher le lieu géométrique des points vérifiant une propriété (p), on peut procéder de la façon suivante :

– on démontre que tout point M qui vérifie (p) appartient à un certain ensemble (E) ;

– réciproquement, on cherche à savoir si tout point de (E) vérifie (p).

Si tel est le cas, le lieu cherché est (E) ;

sinon, le lieu cherché est une partie de (E).

Lieux obtenus par des transformations

L'intérêt de ces lieux est que leur étude ne nécessite pas de réciproque.

Ⓜ Pour résoudre un problème de lieu géométrique à l'aide des transformations, on se ramène à la situation suivante : le point M dont on cherche le lieu, est l'image par une transformation d'un point N, décrivant un ensemble connu(droite, segment, cercle,...)

La résolution se fait en deux étapes :

– reconnaître une transformation f qui, au point N, associe le point M ;

– déterminer l'image par f de l'ensemble (E) décrit par le point N.

Lieux classiques à savoir en première SM

A et B sont deux points donnés distincts.

- Ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
- Ensemble des points M tels que : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.
- Ensemble des points M tels que : MA + MB = AB.
- Ensemble des points équidistants de A et B.
- Ensemble des points équidistants de A.
- Ensemble des points équidistants de deux droites parallèles.
- Ensemble des points équidistants de deux droites sécantes.
- Ensemble des points situés à une distance donnée d'une droite.
- Ensemble des points M tels que : $a\mathrm{MA}^2 + b\mathrm{MB}^2 = k$.
- Ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB} = k$.
- Ensemble des points M tels que : $\dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = k$.
- Ensemble des points M tels que : Mes $\widehat{AMB} = \alpha$.
- Ensemble des points M tels que : Mes $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \alpha$.

3.7.2. Les outils de la géométrie

On doit apprendre à l'élève à effectuer le choix des outils pour résoudre un problème.

Aucun outil n'est à privilégier ni à exclure.

L'outil des configurations

L'outil des configurations, présent dans toutes les classes du secondaire, **est absolument indispensable** ; les élèves doivent reconnaître, visualiser et maîtriser un certain **nombres de configurations-clés** enrichies tout au long de leur progression scolaire.

Le tableau ci-après résume les configurations étudiées jusqu'en **classe de première SM.**

	3ᵉ	2ᵉ S	1ʳᵉ SM
Droites	• Points alignés, droites parallèles : caractérisation vectorielle • Caractérisation de droites parallèles ou perpendiculaires : – par les équations – par les coefficients directeurs	• Caractérisation vectorielle d'une droite (ou d'une demi-droite) • Caractérisation de droites parallèles ou perpendiculaires : – par des vecteurs directeurs ou normaux – par les équations réduites • Représentation paramétrique d'une droite	• Équation normale d'une droite • Distance d'un point à une droite • Image d'une droite par une isométrie, par une homothétie
Segments		• Caractérisation vectorielle d'un segment	• Image d'un segment par une isométrie, par une homothétie
Angles	• Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu • Somme des carrés du cosinus et du sinus d'un angle	• Angle orienté de deux vecteurs : – mesure principale – cosinus, sinus et tangente	• Angles orientés – mesure d'un angle orienté – relation de Chasles • Image d'un angle non orienté par une isométrie
Cercles	• Angle inscrit dans un cercle : – relation avec l'angle au centre associé (mesures) – angles interceptant le même arc	• Extension de la notion d'angle inscrit (corde et demi–tangente) : – relation avec l'angle au centre associé (mesures) – angles interceptant le même arc • Arcs capables • Équation d'un cercle • Cercle trigonométrique	• Caractérisation d'un cercle – par les angles orientés : $M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ – par une représentation paramétrique • Images d'un cercle par une isométrie, par une homothétie
Triangles	• Thalès et réciproque • Triangles semblables	• Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle • Relations métriques dans un triangle : – $\mathscr{A} = \frac{1}{2} bc\sin\widehat{A}$ – théorème des sinus • Relations métriques caractérisant un triangle rectangle – théorème d'Al Kashi – théorème de la médiane	• Triangles isométriques
Quadrilatères	• Angles opposés dans un quadrilatère (convexe) inscriptible dans un cercle	• Caractérisation par les angles : – d'un quadrilatère croisé inscriptible – d'un quadrilatère convexe inscriptible	• Points cocycliques
Polygones	• Polygone régulier à n côtés : mesure des angles	Construction d'un pentagone régulier	• Images des solutions d'une équation trigonométrique • Image d'un polygone par une isométrie, par une homothétie
Espace	• Pyramide et cône • Pyramide régulière • Cône de révolution • Sections planes (pyramide régulière, cône de révolution)	• Positions relatives de droites et de plans • Sections planes – d'un pavé droit – d'un tétraèdre • Étude du parallélisme	• Droites et plans orthogonaux – propriétés – distance d'un point à un plan – plan médiateur d'un segment • Plans perpendiculaires • Représentation d'un point de l'espace • Vecteur normal • Équations cartésiennes d'un plan, d'une droite • Représentation paramétrique d'un plan, d'une droite

L'outil vectoriel

Les vecteurs sont connus depuis la classe de quatrième, mais les notations $\vec{u}$, $\vec{v}$, $a\vec{u} + b\vec{v}$ sont nouvelles en classe de Seconde S. Ils ne constituent pas un objet d'étude mais un outil.

- Cet outil permet de caractériser certaines configurations :

– parallélogramme,
– milieu et point d'un segment,
– points alignés (éléments d'une droite ou d'une demi-droite),
– droites parallèles ou perpendiculaires,
– centre de gravité d'un triangle,
– configuration de Thalès.

- Il permet également de faire le lien entre les vecteurs et certaines transformations :

– translations;
– symétries centrales,
– homothéties.

L'outil analytique

Le recours systématique aux méthodes analytiques est exclu. Toutefois, on exercera l'élève à trouver un « bon repère » permettant une solution rapide.

L'outil des transformations

Outre le fait de donner des solutions souvent plus rapides et élégantes, cet outil permet, en relation avec certaines configurations, des raisonnements plus riches.

Les symétries centrales, symétries orthogonales et translations ont été étudiées au premier cycle, les homothéties et les rotations en classse de seconde S.

En classe de première SM, on renforcera ces acquis et on les utilisera pour résoudre des problèmes.

Le tableau ci-dessous résume le niveau d'utilisation des différentes transformations rencontrées.

Transformations	**6e**	**5e**	**4e**	**3**	**2nde S**	**1re SM**
Symétrie centrale	niveau 1	niveau 1	niveau 2	niveau 2		niveau 3
Symétrie orthogonale	niveau 1	niveau 1	niveau 2	niveau 2		niveau 3
Translation			niveau 1	niveau 2		niveau 3
Rotation				* niveau 1	niveau 1	niveau 3
Homothétie				* niveau 1	niveau 1	niveau 3

* pour certains pays seulement.

Niveau 1 : familiarisation avec la transformation

– Image d'un point par la transformation définie de diverses façons.
– Image de figures simples.
– Reconnaissance de figures homologues par la transformation.

Niveau 2 : utilisation de transformations pour résoudre des problèmes

– Démonstrations de propriétés.
– Constructions.
– Recherche de lieux géométriques.

Niveau 3 : utilisation de compositions de transformations pour résoudre des problèmes

Configurations et transformations

M Pour résoudre un problème de géométrie, une transformation peut s'avérer utile. Le choix de cette transformation est suggéré par la configuration géométrique existante ou à construire :

- **Points alignés, droites concourantes : toutes isométries et homothétie.**
- **Orthogonalité, parallélisme : toutes isométries et homothétie.**
- **Triangle isocèle : symétrie orthogonale.**
- **Triangle rectangle isocèle : symétrie orthogonale, quart de tour.**
- **Triangle équilatéral : symétrie orthogonale, rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$.**
- **Parallélogramme : symétrie centrale, translation.**
- **Rectangle, losange : symétrie centrale, symétrie orthogonale.**
- **Carré : symétrie centrale, symétrie orthogonale, quart de tour.**
- **Configuration de Thalès : homothétie.**

3.8. Algèbre et analyse

Trois thèmes généraux se dégagent en classe de première SM :

- *calcul littéral,*
- *organisation de données,*
- *analyse.*

Calcul littéral

Cette rubrique vise autant la maîtrise d'une (relative) virtuosité dans certains calculs sur les polynômes (développement, réduction, factorisation) et les fractions rationnelles, que celle des différentes méthodes de résolution des équations et inéquations, des systèmes d'équations ou d'inéquations.

La résolution de problèmes concrets, qui permet de donner du sens à des techniques abstraites, reste (au moment de la mise en équation) un exercice difficile pour l'élève.

Organisation de données

Les statistiques jouent un rôle important comme outil d'aide à la prise de décision dans un contexte donné. Il est cependant important de savoir qu'à chaque étape du traitement allant de données observées à des conclusions statistiques, un gain en signification a pour prix la perte d'une partie des informations. Le meilleur moyen pour les élèves de s'en convaincre est d'avoir eu l'occasion de mener, au moins une fois, une étude statistique complète, c'est-à-dire allant du relevé de données à l'élaboration d'une réponse à une question posée au départ.

Analyse

On renforcera les acquis sur les fonctions (limites, dérivées, constructions de courbes, ...). Puis l'on abordera la notion de suite qui est un thème nouveau et riche.

Ces deux thèmes permettront de résoudre de nombreux problèmes concrets et/ou historiques.

4 ANALYSE DES CHAPITRES

1. Barycentre

(pages 5 à 22 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

• Donner un modèle mathématique à des notions rencontrées en Physique (centre d'inertie, centre de gravité) ou en Statistique (moyenne pondérée).

• Utiliser l'outil barycentre pour résoudre des problèmes d'alignements, de concours, de parallélisme, ainsi que de recherche de lieux géométriques et de lignes de niveau.

COMMENTAIRES

• Ce chapitre utilise et réinvestit les résultats acquis dans les classes précédentes sur les notions de vecteurs et de produit scalaire.

• Il peut être traité directement et faire l'objet du premier chapitre de Géométrie de l'année ou faire suite au chapitre de Trigonométrie, mais il doit précéder l'étude des transformations du plan.

• Le barycentre est avant tout un outil supplémentaire (s'ajoutant au calcul vectoriel, aux configurations géométriques, aux transformations, à l'outil analytique, ...) pour résoudre les problèmes classiques de géométrie : alignements, concours, lieux géométriques.

• Il faut également indiquer, à l'aide d'exercices, l'utilisation de cet outil dans d'autres disciplines, notamment en Statistique, en Physique, en Biologie.

• L'étude du barycentre de n points pondérés n'est pas au programme de Première ; elle sera traitée en classe de Terminale.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Barycentre de 2 points pondérés. • Définition. • Propriétés : – homogénéité ; – réduction de la somme $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$; – ensemble des barycentres de deux points ; – coordonnées du barycentre de 2 points ; – conservation du barycentre par projection ; **Barycentre de plus de 2 points pondérés** • Définition • Propriétés : – homogénéité ; – réduction de la somme $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$; – coordonnées du barycentre de 3 points ; – théorème des barycentres partiels. **Utilisations du barycentre** • Nature des lignes de niveau : – $M \mapsto aMA^2 + bMB^2 \quad (a + b \neq 0)$. – $M \mapsto MA^2 - MB^2$. – $M \mapsto \dfrac{MA}{MB}$.	• Traduire par une égalité vectorielle qu'un point est le barycentre de 2, 3 ou 4 points pondérés. • Reconnaître, à partir d'une égalité vectorielle, le barycentre de 2, 3 ou 4 points pondérés. • Exprimer un point donné d'une droite (resp. d'un plan) comme barycentre de 2 autres points de cette droite (resp. de 3 autres points du plan). • Construire le barycentre de 2 ou 3 points pondérés. • Réduire les expressions de la forme $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ ou $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$. • Utiliser le théorème des barycentres partiels " dans les deux sens " : regroupement et dédoublement (il sera en particulier utilisé pour construire le barycentre de 3 points pondérés ou plus). • Utiliser l'outil barycentre pour résoudre des problèmes d'alignements ou de concours. • Déterminer et construire les lignes de niveau : – $M \mapsto aMA^2 + bMB^2 \quad (a + b \neq 0)$; – $M \mapsto MA^2 - MB^2$; – $M \mapsto \dfrac{MA}{MB}$.

Exercices du cours

♦ **Exercice 1.a p. 11**

$2222\overrightarrow{GA} + 3333\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

♦ **Exercice 1.b p. 10**

On a : $\overrightarrow{AG} = 7\overrightarrow{AB} = 7(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) \Leftrightarrow 6\overrightarrow{GA} - 7\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Donc : $G = \text{bar}\{(A,6), (B,-7)\}$

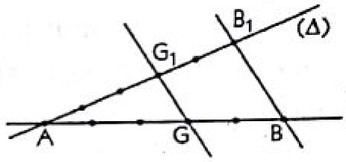
Remarque : Tout couple de nombres réels (a,b) tels que $a = 6k$ et $b = -7k$ $(k \neq 0)$ est également solution.

♦ **Exercice 1.c p. 10**

On a : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(2\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$; donc : $x_G = \frac{1}{3}(2x_A + x_B)$ et $y_G = \frac{1}{3}(2y_A + y_B)$. Donc : $G\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

♦ **Exercice 1.d p. 10**

On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2+3}\,\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{AB}$.



On trace une droite graduée (Δ) sécante à (AB) en A.

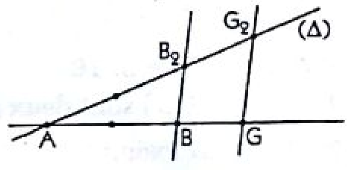
Sur cette droite, on place les points G_1 et B_1, tels que : $\overline{AG_1} = 3$ et $\overline{AB_1} = 5$.

La parallèle à (B_1B) passant par G_1 coupe (AB) en G tel que : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{AB}$.

• De même, on a : $\overrightarrow{AG'} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$.

Sur la droite graduée (Δ) sécante à (AB) en A, on place les points G_2 et B_2, tels que : $\overline{AG_2} = 3$ et $\overline{AB_2} = 2$.

La parallèle à (B_2B) passant par G_2 coupe (AB) en G' tel que : $\overrightarrow{AG'} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$.



♦ **Exercice 1.e p. 10**

$2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$; donc : $A = \text{bar}\{(B,2), (C,-3)\}$

$\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$; donc : $B = \text{bar}\{(A,1), (C,-3)\}$

$\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$; donc : $C = \text{bar}\{(A,1), (B,2)\}$.

$5\overrightarrow{HK} - 2\overrightarrow{HL} = \vec{0}$; donc : $H = \text{bar}\{(K,5), (L,-2)\}$

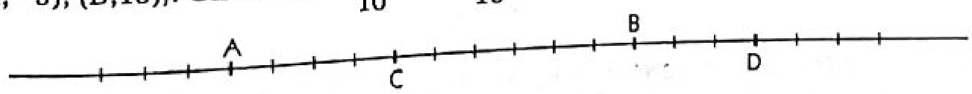
$3\overrightarrow{KH} + 2\overrightarrow{KL} = \vec{0}$; donc : $K = \text{bar}\{(H,3), (L,2)\}$

$3\overrightarrow{LH} - 5\overrightarrow{LK} = \vec{0}$; donc : $L = \text{bar}\{(H,3), (K,-5)\}$.

♦ **Exercice 1.f p.10**

Soit $C = \text{bar}\{(A,3), (B,2)\}$. On a : $\overline{AC} = \frac{2}{5}\,\overline{AB} = \frac{2}{5} \times 10 = 4$.

Soit $D = \text{bar}\{(A,-3), (B,13)\}$. On a : $\overline{AD} = \frac{13}{10}\,\overline{AB} = \frac{13}{10} \times 10 = 13$.



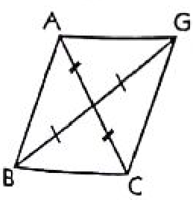
♦ **Exercice 2.a p. 16**

D est l'isobarycentre des points A, B et C, d'où : $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$. (1)

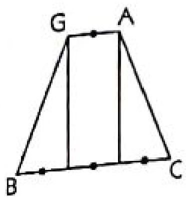
(1) $\Leftrightarrow -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

Donc, A est le barycentre des points pondérés (B,1), (C,1) et (D,– 3).

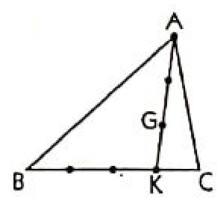
♦ **Exercice 2.b p. 16**



$G = \text{bar}\{(A,1), (B,-1), (C,1)\}$.

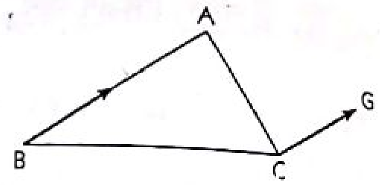


$G = \text{bar}\{(A,3), (B,1), (C,-1)\}$.



$G = \text{bar}\{(A,2), (B,1), (C,3)\}$.

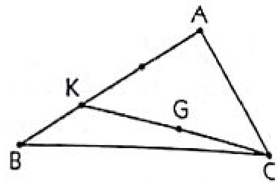
♦ Exercice 2.c p. 16



1. Soit $G = \text{bar}\{(A,1), (B,-1), (C,2)\}$. (1)

On a : (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

D'où, la construction du point G.



2. Soit $G = \text{bar}\{(A,1), (B,2), (C,3)\}$ (2)

Utilisons le théorème des barycentres partiels.

Soit $K = \text{bar}\{(A,1), (B,2)\}$.

Donc, K est le point tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

On a : (2) $\Leftrightarrow$ $G = \text{bar}\{(K,3), (C,3)\}$. Donc, G milieu de [CK].

D'où, la construction du point K, puis celle du point G.

♦ Exercice 2.d p. 16

1. On a : $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; donc : G a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ dans le repère (A,B,C)

2. Soit I , J , K les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].

Dans le repère (A,B,C) : $A\binom{0}{0}$; $B\binom{1}{0}$ et $C\binom{0}{1}$.

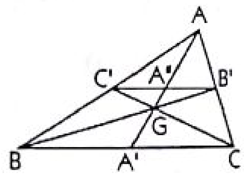
Donc, I, J et K ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$, $\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$.

On en déduit que les médianes (AI), (BJ) et (CK) ont pour équations respectives $y = x$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et $y = -2x + 1$.

3. Dans le repère (A, B, C), G a pour coordonnées $(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$; donc G appartient à chacune des médianes.

♦ Exercice 2.e p. 16

1. (BB') et (CC') sont deux médianes du triangle ABC, donc G est le centre de gravité de ce triangle.



2. On a, par exemple : $\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB'} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GC'} = \vec{0}$.

Donc, pour tout couple (b, c) de réels tels que $b + c \neq 0$:

$$b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} + 2b\,\overrightarrow{GB'} + 2c\,\overrightarrow{GC'} = \vec{0}.$$

Donc, G est le barycentre des points (B,b), (C,c), $(B',2b)$ et $(C',2c)$.

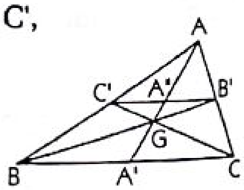
♦ Exercice 2.f p.16

1. Soit A', A'' et I les milieux respectifs des segments [BC], [B'C'] et [A'A''].

A' est l'isobarycentre des points B et C, A'' est l'isobarycentre des points B' et C',

I est l'isobarycentre des points A' et A''.

Donc, I est l'isobarycentre des points B, C, B' et C'.



2. On a : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IA'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

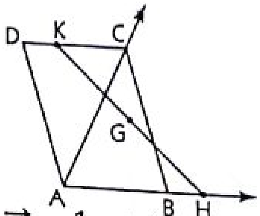
Donc : $I = \text{bar}\{(A,2), (B,3), (C,3)\}$.

♦ Exercice 2.g p.16

1. Soit (H,3) le barycentre des points (A,– 1) et (B,4) et (K,3) le barycentre des points (C,1) et (D,2). Les points H et K sont tels que :

$\overrightarrow{AH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

Le point G, barycentre des points (H,3) et (K,3) est le milieu du segment [HK].



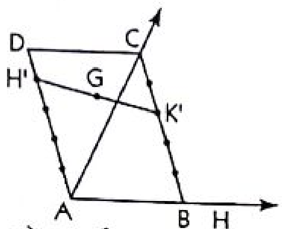
2. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}(4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD})$; donc : $G\binom{1/3}{1/2}$.

• Soit (H',5) le barycentre des points (A,1) et (D,4) et (K',5) le barycentre des points (B,2) et (C,3).

Les points H' et K' sont tels que :

$\overrightarrow{AH'} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BK'} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.

Le point G', barycentre des points (H',5) et (K',5) est le milieu du segment [H'K'].



$\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{10}(2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AD})$; donc : $G'\binom{-1/5}{7/10}$.

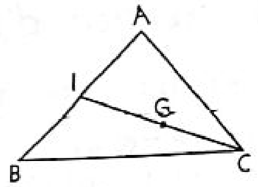
♦ **Exercice 2.h p. 16**

1. Soit I le milieu de [AB].

G est alors le barycentre de (I,2) et (C,2) ; donc : G est le milieu de [IC].

2. On a : $4\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CC}$; ou : $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - 4\overrightarrow{CG} = \vec{0}$;

donc : C = bar{(A,1),(B,1),(C,– 4)}.



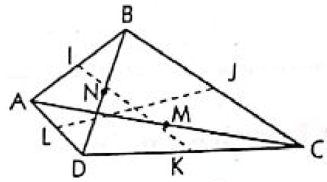
♦ **Exercice 3.a p. 19**

I, milieu de [AB], est l'isobarycentre des points A et B. K, milieu de [CD], est l'isobarycentre des points C et D.

Donc, le milieu de [IK] sera l'isobarycentre des points A, B, C et D.

On démontrerait de même que les milieux de [JL]et [MN] sont aussi isobarycentres des points A, B, C et D.

Donc, les segments [IK], [JL]et [MN] ont même milieu.



♦ **Exercice 3.b p. 19**

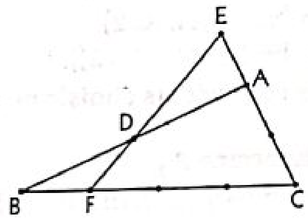
Soit E' = bar {(D,3), (F,– 2)}. On a :

$D = \text{bar}\{(A,1), (B,1)\} = \text{bar}\{(A,\frac{3}{2}), (B,\frac{3}{2})\}$;

$F = \text{bar}\{(B,3), (C,1)\} = \text{bar}\{(B,-\frac{3}{2}), (C,-\frac{1}{2})\}$.

D'où : $E' = \text{bar}\{(A,\frac{3}{2}), (B,\frac{3}{2}), (B,-\frac{3}{2}), (C,-\frac{1}{2})\} = \text{bar}\{(A,3), (C,-1)\} = E$.

Donc, E = bar {(D,3), (F,– 2)} et les points D, E et F sont alignés.



♦ **Exercice 3.c p. 19**

$MA^2 + MB^2 = AB^2 \iff$ M appartient au cercle de diamètre [AB].

Donc, l'ensemble des points M est le cercle de diamètre [AB].

♦ **Exercice 3.d p. 19**

Soit I le milieu de [AB].

$MA^2 - MB^2 = AB^2 \iff (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = AB^2$

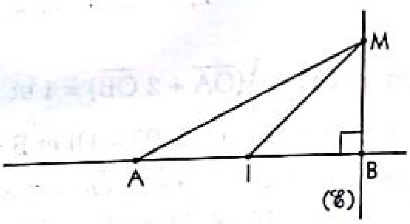
$\iff 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM} = AB^2$.

Désignons par H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) ;

on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM} = \overline{AB} \times \overline{IH}$.

Donc : $MA^2 - MB^2 = AB^2 \iff \overline{AB} \times \overline{IH} = \frac{1}{2}AB^2 \iff \overline{IH} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

L'ensemble (𝒞) des points M est la droite perpendiculaire à (AB) en H tel que : $\overline{IH} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, c'est-à-dire en B.

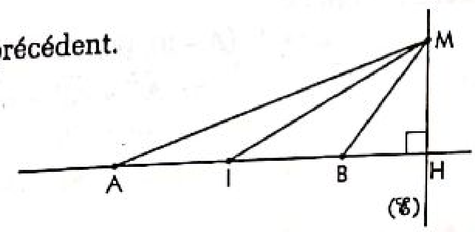


♦ **Exercice 3.e p. 19**

La démarche et les calculs sont analogues à ceux de l'exercice précédent.

$MA^2 - MB^2 = 2AB^2 \iff \overline{AB} \times \overline{IH} = \frac{1}{2}AB^2 \iff \overline{IH} = \overline{AB}$.

L'ensemble (𝒞) des points M est la droite perpendiculaire à (AB) en H tel que : $\overline{IH} = \overline{AB}$.



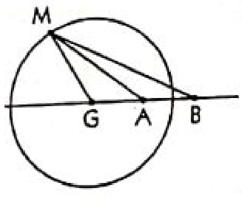
♦ **Exercice 3.f p. 19**

$MA\sqrt{2} = MB \iff 2MA^2 - MB^2 = 0$ (1).

Soit G le barycentre des points (A,2) et (B,– 1).

On a : (1) $\iff MG^2 = -2GA^2 + GB^2 \iff MG^2 = 2AB^2 \iff MG = AB\sqrt{2}$.

L'ensemble (𝒞) des points M est le cercle de centre G et de rayon $R = AB\sqrt{2}$.

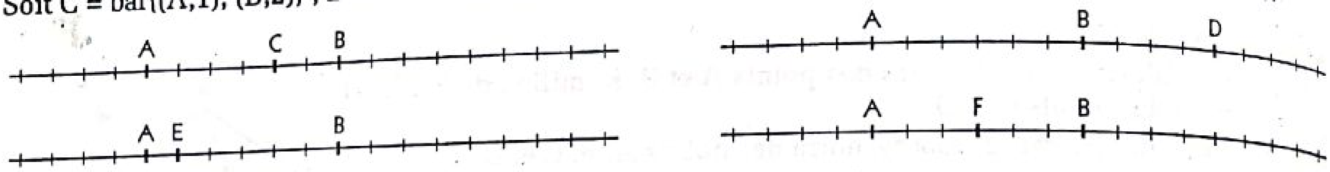


Exercices d'apprentissage

Barycentre de deux points pondérés

♦ **Exercice 1 p. 20**

Soit C = bar{(A,1), (B,2)} ; D = bar{(A,2), (B,– 5)} ; E = bar{(A,– 5), (B,– 1)} et F = bar{(A,10), (B,10)}.



♦ **Exercice 2 p. 20**

A = bar{(B,3), (C,– 2)}
B = bar{(A,1), (C,2)}
C = bar{(A,1), (B,– 3)}.

D = bar{(E,5), (F,– 1)}
E = bar{(D,4), (F,1)}
F = bar{(D,4), (E,– 5)}.

Les coefficients choisis ne sont pas uniques (*voir propriété d'homogénéité du barycentre*).

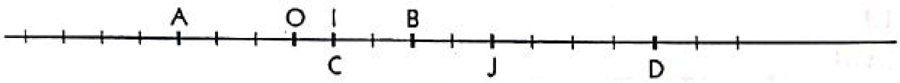
♦ **Exercice 3 p. 20**

a) C = bar{(A,1), (B,1)} *b)* C = bar{(A,3), (B,– 5)} *c)* C = bar{(A,1), (B,– 2)} *d)* C = bar{(A,2), (B,3)}.

♦ **Exercice 4 p. 20**

1. G = bar{(A,– 1), (B,4)} ; donc : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(-\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB})$.
2. $x_G = \frac{1}{3}(-x_A + 4x_B) = 6$ et $y_G = \frac{1}{3}(-y_A + 4y_B) = \frac{7}{3}$.

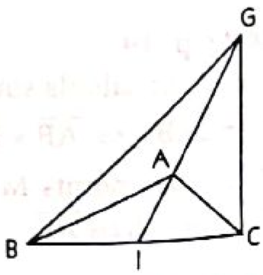
♦ **Exercice 5 p. 20**



1. On a : $\overline{OC} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + 2\,\overline{OB}) = 1$ et $\overline{OD} = -(\overline{OA} - 2\overline{OB}) = 9$.
2. On a : A = bar{(C,3), (D,– 1)} et B = bar{(C,3), (D,1)}.
3. $OA^2 = OB^2 = 9$ et $\overline{OC} \times \overline{OD} = 1 \times 9 = 9$; donc : $OA^2 = OB^2 = \overline{OC} \times \overline{OD}$.
   $JC^2 = JD^2 = 16$ et $\overline{JA} \times \overline{JB} = -8 \times -2 = 16$; donc : $JC^2 = JD^2 = \overline{JA} \times \overline{JB}$.

Barycentre de plus de deux points pondérés

♦ **Exercice 6 p. 20**



1. G est barycentre de (A,– 3), (B,1) et (C,1) ;
   donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
   Donc, A est le centre de gravité du triangle GBC.
2. Le point A est tel que $\overrightarrow{AG} = -2\,\overrightarrow{AI}$, I étant le milieu de [BC].

♦ **Exercice 7 p. 20**

1. La moyenne m est telle que : $m = \dfrac{4 \times 14 + 2 \times 8 + 1 \times 5}{4 + 2 + 1} = 11$.
2. On a : $4\overline{GA} + 2\overline{GB} + \overline{GC} = 4\overline{OA} + 2\overline{OB} + \overline{OC} - 7\overline{OG} = 4 \times 14 + 2 \times 8 + 1 \times 5 - 7 \times 11 = 0$.
   Donc : $4\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, et G est le barycentre de (A,4), (B,2) et (C,1).

♦ **Exercice 8 p. 20**

1. Soit O, un point quelconque.
   G, centre de gravité du triangle ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.
   G', centre de gravité du triangle A'B'C' $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = 3\overrightarrow{OG'}$.

En retranchant membre à membre ces deux égalités, il vient : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

2. Les triangles ABC et A'B'C' ont même centre de gravité si et seulement si : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Application

$\overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$;

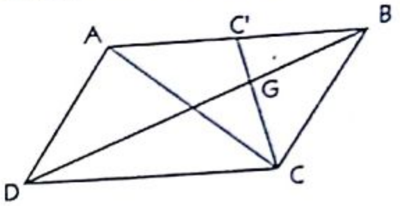
$\overrightarrow{CB'} = k\overrightarrow{CA} \iff \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{CA}$;

$\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{CC'} - \overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{AB}$.

Additionnons ces trois dernières égalités : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} - \underbrace{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})}_{\vec{0}} = k\,\underbrace{(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})}_{\vec{0}}$.

Donc, $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ et les triangles ABC et A'B'C' ont le même centre de gravité.

♦ Exercice 9 p. 20



1. (CC') est une médiane du triangle ABC. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux, donc (BD) est aussi une médiane de ce triangle. G est donc le centre de gravité du triangle ABC.

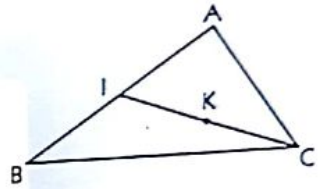
2. $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Donc, C est le barycentre de (A,1), (B,– 1) et (C,– 1).

3. De la question **1.**, on déduit : $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Or : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; donc : $3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, soit $3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

♦ Exercice 10 p. 20



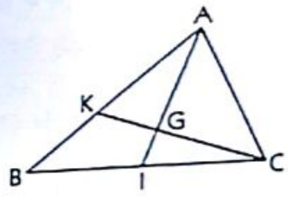
I, milieu de [AB], donc barycentre de (A,1) et (B,1).

K, milieu de [IC], donc barycentre de (I,1) et (C,1) ou (I,2) et (C,2).

Donc, K est le barycentre de (A,1), (B,1) et (C,2).

ou : $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = 2\overrightarrow{KI} \iff \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

♦ Exercice 11 p. 20



1. I, milieu de [BC], donc : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{GA} \iff 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Donc : G = bar {(A,2), (B,3), (C,3)}.

De l'égalité précédente, on déduit : $2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} = 8\overrightarrow{BG}$, ou : $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

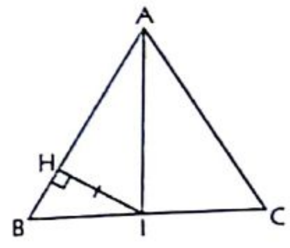
Donc, $G\binom{3/8}{1/4}$ dans le repère (B, C, A).

2. Les points C, G et K sont alignés ; donc, K est le barycentre partiel de (A,2) et (B,3).

G = bar {(A,2), (B,3), (C,3)} = bar {(K,5), (C,3)}. Donc : $5\overrightarrow{GK} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ou $3\overrightarrow{KC} - 8\overrightarrow{KG}) = \vec{0}$.

Par suite, K est le barycentre de (G,– 8) et (C,3).

♦ Exercice 12 p.20



1. On a : $HB = \frac{1}{2}\ IB = \frac{1}{4}\ AB$; donc : $3\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HA} = \vec{0}$.

Donc, H est le barycentre de (A,1) et (B,3).

2. K est le milieu de [IH] ; donc : K = bar {(I,1), (H,1)} = bar {(I,4), (H,4)}.

Or : I = bar {(B,2), (C,2)} et H = bar {(A,1), (B,3)}.

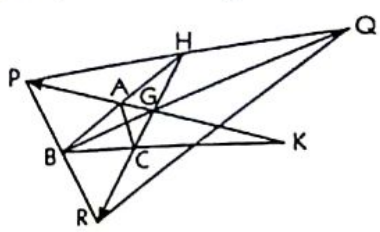
Donc : K = bar {(A,1), (B,3), (B,2), (C,2)} = bar {(A,1), (B,5), (C,2)}.

La démonstration peut également se faire en utilisant les égalités vectorielles correspondantes.

♦ Exercice 13 p.20

1. On construit les points H, barycentre de (A,2) et (B,– 1) et K, barycentre de (B,– 1) et $(C,\frac{3}{2})$;

On a : $\overrightarrow{HB} = 2\overrightarrow{HA}$ et $3\overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{KB}$.



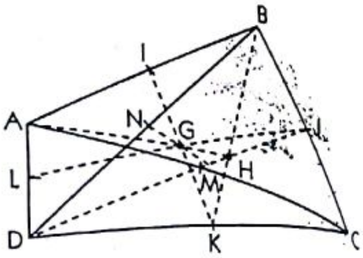
G est le point d'intersection des droites (CH) et (AK).

2. On a : $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR} = 4\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Donc, G est le centre de gravité du triangle PQR.

Utilisations du barycentre

♦ Exercice 14 p. 21



1. G est l'isobarycentre des points A, B, C et D ;

donc : $G = \text{bar}\{(A,1), (B,1), (C,1), (D,1)\}$.

$G = \text{bar}\{(I,2), (K,2)\}$ $\Leftrightarrow$ G milieu de [IK] ;

$G = \text{bar}\{(J,2), (L,2)\}$ $\Leftrightarrow$ G milieu de [JL] ;

$G = \text{bar}\{(M,2), (N,2)\}$ $\Leftrightarrow$ G milieu de [MN].

Donc, les segments [IK], [JL] et [MN] se coupent en leur milieu.

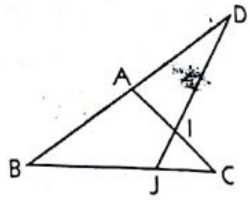
2. $H = \text{bar}\{(B,1), (C,1), (D,1)\}$; donc : $G = \text{bar}\{(A,1), (H,3)\}$.

Par suite, les points A, G et H sont alignés.

On démontrerait de même que :

- les points B, G et P sont alignés, P étant le centre de gravité du triangle ACD ;
- les points C, G et Q sont alignés, Q étant le centre de gravité du triangle ABD ;
- les points D, G et R sont alignés, R étant le centre de gravité du triangle ABC.

♦ Exercice 15 p.21



I est milieu de [AC], donc isobarycentre de A et C.

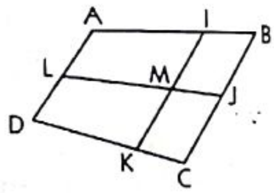
A est milieu de [BD], donc isobarycentre de B et D.

On a donc : $I = \text{bar}\{(A,2), (C,2)\} = \text{bar}\{(B,1), (D,1), (C,2)\}$.

De plus : $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ $\Leftrightarrow$ $J = \text{bar}\{(B,1), (C,2)\}$.

Donc : $I = \text{bar}\{(J,3), (D,1)\}$ et les points D, I, J sont alignés.

♦ Exercice 16 p.21



$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, donc $I = \text{bar}\{(A,1), (B,2)\}$;

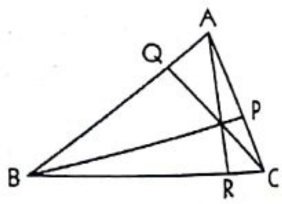
$\overrightarrow{DK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$, donc $K = \text{bar}\{(C,2), (D,1)\}$.

Soit M le milieu de [IK]. On a :

$M = \text{bar}\{(I,1), (K,1)\} = \text{bar}\{(I,3), (K,3)\} = \text{bar}\{(A,1), (B,2), (C,2), (D,1)\} = \text{bar}\{(L,2), (J,4)\}$.

Donc, le milieu M de [IK] appartient à la droite (LJ).

♦ Exercice 17 p.21



$\overrightarrow{CP} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CA}$, donc $P = \text{bar}\{(A,3), (C,5)\}$;

$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, donc $Q = \text{bar}\{(A,3), (B,1)\}$;

$\overrightarrow{BR} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$, donc $R = \text{bar}\{(B,1), (C,5)\}$.

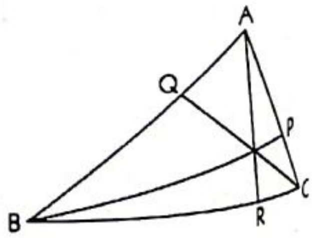
Soit G le barycentre de (A,3), (B,1) et (C,5).

En appliquant trois fois le théorème des barycentres partiels, il vient :

$G = \text{bar}\{(A,3), (R,6)\}$, d'où $G \in (AR)$; $G = \text{bar}\{(B,1), (P,8)\}$, d'où $G \in (BP)$; $G = \text{bar}\{(C,5), (Q,4)\}$, d'où $G \in (CQ)$

Donc, les droites (AR), (BP) et (CQ) sont concourantes.

♦ Exercice 18 p.21



$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, donc $Q = \text{bar}\{(A,2), (B,1)\}$;

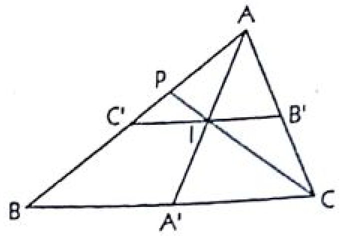
$\overrightarrow{BR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$, donc $R = \text{bar}\{(B,1), (C,4)\}$;

$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, donc $P = \text{bar}\{(A,1), (C,2)\} = \text{bar}\{(A,2), (C,4)\}$.

Soit G le barycentre de (A,2), (B,1) et (C,4).

Comme dans l'exercice précédent, on démontrerait que (AR), (BP) et (CQ) sont concourantes.

♦ Exercice 19 p.21



Soit I le point d'intersection des droites ((AA') et (B'C').

I est le milieu de [AA'] et A' est le milieu de [BC].

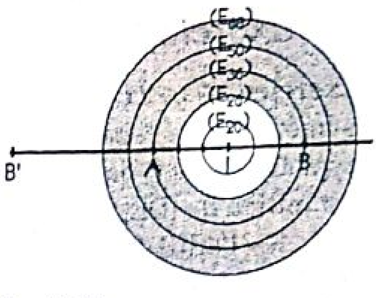
Donc : I = bar {(A,2), (A',2)} = bar {(A,2), (B,1), (C,1)}.

Or : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ P = bar {(A,2), (B,1)}.

Donc : I = bar {(P,3), (C,1)}, et les points I, P et C sont alignés.

Par suite, les droites (AA'), (B'C') et (CP) sont concourantes en I.

♦ Exercice 20 p.21



Soit I, le milieu de [AB]. En utilisant la relation de Chasles dans l'expression de f(M), on obtient :

$f(M) = 2\ IM^2 + \frac{AB^2}{2} = 2\ IM^2 + 18.$

1. Désignons par (E_k) la ligne de niveau k de la fonction f.

$M \in (E_k) \quad \Leftrightarrow \quad IM^2 = \frac{k}{2} - 9.$

Ainsi, pour $k \geq 18$, (E_k) est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{k}{2} - 9}$.

- (E_{50}) est le cercle de centre I et de rayon 4.
- (E_{36}) est le cercle de diamètre [AB].
- (E_{26}) est le cercle de centre I et de rayon 2.
- (E_{20}) est le cercle de centre I et de rayon 1.

2. • (E_k) est réduit à un point si et seulement si : $\frac{k}{2} - 9 = 0$, c'est-à-dire pour $k = 18$.

• (E_k) passe par A si et seulement si $k = 36$, car $AB^2 = 36$ (A et B ont la même ligne de niveau (E_{36})).

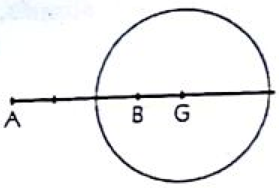
• Le symétrique B' de B par rapport à A est au niveau $k = 180$, car $AB'^2 + BB'^2 = 180$.

3. Soit ($\mathscr{E}$) l'ensemble des points M tel que : $26 \leq MA^2 + MB^2 \leq 68$. (1)

(1) $\Leftrightarrow$ $26 \leq 2\ MI^2 + 18 \leq 68$ $\Leftrightarrow$ $4 \leq MI^2 \leq 25$ $\Leftrightarrow$ $2 \leq MI \leq 5$.

L'ensemble ($\mathscr{E}$) est donc la couronne délimitée par les cercles de centre I et de rayon 2 et 5 (partie colorée).

♦ Exercice 21 p.21



$MA = 2MB \quad \Leftrightarrow \quad MA^2 - 4MB^2 = 0$ (1).

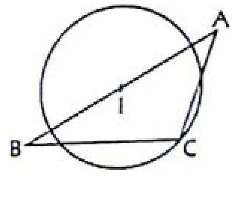
Soit G = bar {(A,1), (B,– 4)}.

(1) $\Leftrightarrow$ $-3\ MG^2 + GA^2 - 4\ GB^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $MG^2 = \frac{1}{3}(GA^2 - 4\ GB^2)$.

D'où : $MG^2 = \frac{1}{3}(16\ GB^2 - 4\ GB^2) = 4\ GB^2$. Ou : MG = 2 GB.

Donc, l'ensemble des points M est le cercle de centre G et de rayon 2 GB = $\frac{2}{3}$ AB.

♦ Exercice 22 p.21



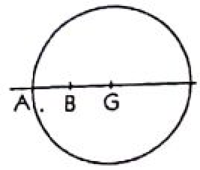
Soit ($\mathscr{E}$) la ligne de niveau recherchée et I le milieu de [AB].

$M \in (\mathscr{E}) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ (1)

(1) $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{IA})$ $\Leftrightarrow$ $MI^2 - IA^2 = CI^2 - IA^2$.

Donc, MI = IC et ($\mathscr{E}$) est le cercle de centre I , passant par C.

♦ Exercice 23 p.21



1. G barycentre de (A,1) et (B,– 2) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Donc, G est le point tel que B milieu de [AG].

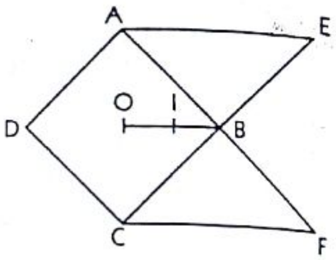
2. *a)* On a : $2\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{AB}$; donc, $2\,\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB}$ est indépendant du point M.

b) G = bar {(A,1) et (B,– 2)} ; donc : $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG}$.

D'où : $\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| = \|2\,\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\|$ $\Leftrightarrow$ MG = 2 AB.

Donc, l'ensemble des points M est le cercle de centre G et de rayon 2AB.

♦ **Exercice 24 p.21**

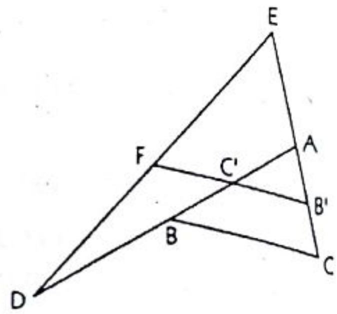


Cette plaque est constituée d'un carré dont le centre d'inertie est son centre O et de deux triangles égaux dont le centre d'inertie est le centre de symétrie B.

L'aire du carré est égale à la somme des aires des deux triangles. Il en est de même pour les masses, donc le centre d'inertie de l'ensemble sera le milieu I du segment [OB].

Exercices d'approffondissement

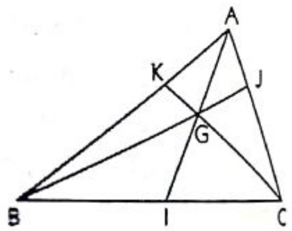
♦ **Exercice 25 p. 21**



D symétrique de A par rapport à B, donc D = bar {(A,– 1), (B,2)} ;
E symétrique de C par rapport à A, donc E = bar {(A,2), (C,– 1)} ;
F est milieu de [DE].
Donc : F = bar{(D,1), (E,1)} = bar {(A,– 1), (B,2), (A,2), (C,– 1)}.

D'autre part :
B' est milieu de [AC], donc B' = bar {(A,– 1), (C,– 1)} ;
C' est milieu de [AB], donc C' = bar {(A,2), (B,2)}.
D'où : F = bar{(B',– 2), (C',4)}.
Les points F, B' et C' sont donc alignés et C' est milieu de [B'F].

♦ **Exercice 26 p.21**

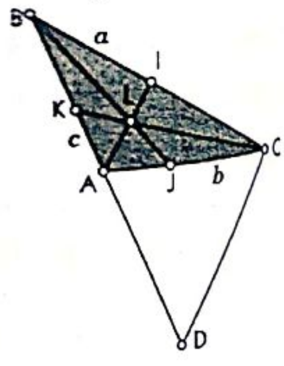


a) G est le barycentre de (A,p), (B,q) et (C,q), donc :
$p\overrightarrow{GA} + q\,(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 0$ ou $p\overrightarrow{GA} + 2q\,\overrightarrow{GI'} = 0$, avec I' milieu de [BC].

Cette dernière égalité implique que A, G et I' sont alignés, donc les points I et I' sont confondus : I est le milieu de [BC].

b) B, G et J sont alignés, donc J est le barycentre partiel de (A,p) et (C,q). De même, K est le barycentre partiel de (A,p) et (B,q). Donc : $\dfrac{JA}{JC} = \dfrac{KA}{KB} = \dfrac{q}{p}$;
d'après la réciproque de la propriété de Thalès, les droites (KJ) et (BC) sont parallèles.

♦ **Exercice 27 p.21**



1. Le triangle ACD est isocèle en A, en effet :
$\widehat{ACD} = \widehat{CAI} = \widehat{IAB} = \widehat{CDA}$.
D'après Thalès : $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}$.

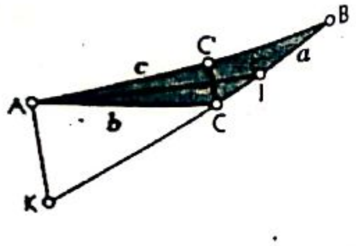
2. Ainsi : $b\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$ (car, de plus, I ∈ [BC]) ;
donc : I = bar{(B,b), (C,c)}.

De même, dans le triangle ABC, les bissectrices issues de B et C coupent respectivement (AC) et (AB) en J = bar{(A,a), (C,c)} et K = bar{(A,a), (B,b)}.

3. Soit L le barycentre de (A,a), (B,b) et (C,c). D'après la remarque consécutive au théorème des barycentres partiels, L est le point de concours des droites (AI), (BJ) et CK).

Or ces droites sont les bissectrices de ABC, L est donc le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

♦ **Exercice 28 p.21**



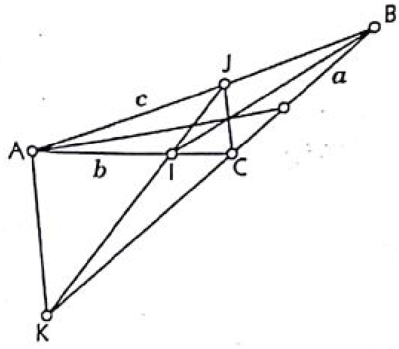
1. Dans le triangle ACC', la hauteur et la bissectrice issues de A sont confondues ; donc ACC' est isocèle en A.

2. D'après Thalès : $\dfrac{KC}{KB} = \dfrac{AC'}{AB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{b}{c}$.

De plus, K est extérieur à [BC], d'où le résultat.

♦ Exercice 29 p.21

D'après l'exercice 27, I (resp. J) est barycentre de (A,a) et (C,c) (resp. (A,a) et (B,b)). Donc :



$$\begin{cases}(a+c)\,\overrightarrow{KI} = a\overrightarrow{KA} + c\overrightarrow{KC} \\ (a+b)\,\overrightarrow{KJ} = a\overrightarrow{KA} + b\overrightarrow{KB}\end{cases} \quad ;$$

Par suite : $(a+c)\,\overrightarrow{KI} - (a+b)\,\overrightarrow{KJ} = c\overrightarrow{KC} - b\overrightarrow{KB}$.

Le premier membre est un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{IJ}$ alors que le second est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ n'étant pas colinéaires, chaque membre de l'égalité est nul.

Par conséquent : $K = \text{bar}\{(I,a+c), (J,-(a+b))\}$ et $K = \text{bar}\{(B,-b), (C,c)\}$.

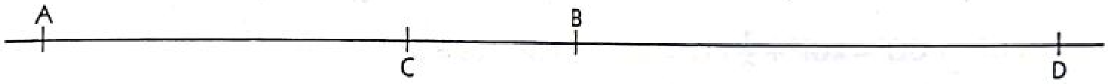
D'après l'exercice 28, la droite (AK) est donc la bissectrice extérieure de l'angle $\hat{A}$.

♦ Exercice 30 p.21

1. Les points C et D sont définis car $a+b$ et $a-b$ ne sont pas nuls. C appartient au segment [AB] et est plus proche de B que de A. D est à l'extérieur du segment [AB] sur la demi-droite [AB).

2. Les points C et D ont respectivement pour abscisse $\dfrac{b}{a+b}$ et $\dfrac{-b}{a-b}$, car $\overrightarrow{AC} = \dfrac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = \dfrac{-b}{a-b}\,\overrightarrow{AB}$.

$$\overline{CA}\times\overline{DB} + \overline{CB}\times\overline{DA} = \frac{-b[(a-b)-(-b)] + [(a+b)-(b)]b}{(a+b)(a-b)} = 0. \text{ D'où : } \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$



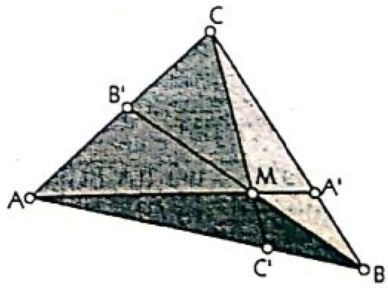
3. $\overline{CA}\times\overline{DB} + \overline{CB}\times\overline{DA} = 0$; donc : $\overline{BD}\,\overrightarrow{AC} + \overline{BC}\,\overrightarrow{AD} = \vec{0}$ et $\overline{AC}\,\overrightarrow{BD} + \overline{AD}\,\overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

On en déduit : $A = \text{bar}\,\{(C,BD),(D,BC)\} = \text{bar}\,\{(C,\frac{a}{a-b}),(D,\frac{a}{a+b})\} = \text{bar}\,\{(C,a+b),(D,a-b)\}$;

$B = \text{bar}\,\{(C,AD),(D,AC)\} = \text{bar}\,\{(C,\frac{-b}{a-b}),(D,\frac{b}{a+b})\} = \text{bar}\,\{(C,-(a+b)),(D,a-b)\}$.

Donc, A est le barycentre de $(C,a+b)$ et $(D,a-b)$, et B est le barycentre de $(C,a+b)$ et $(D,b-a)$.

♦ Exercice 31 p.22



1. *a)* Les triangles BAA', CAA' d'une part et BMA', CMA' d'autre part, ont même hauteur issue respectivement de A et M, le rapport de leurs aires égale donc celui de leurs bases ; ainsi :

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{\text{aire}(AA'B)}{\text{aire}(AA'C)} = \frac{\text{aire}(MA'B)}{\text{aire}(MA'C)} = \frac{\text{aire}(AA'B) - \text{aire}(MA'B)}{\text{aire}(AA'C) - \text{aire}(MA'C)} = \frac{\text{aire}(MAB)}{\text{aire}(MAC)}.$$

b) De plus : $A' \in [BC]$, donc : $\text{aire}(MAC)\,\overline{A'B} = -\,\text{aire}(MAB)\,\overline{A'C}$.

Donc, A' est le barycentre de (B,aire(MAC)) et (C,aire(MAB)).

De même : B' est le barycentre de (A,aire(MBC)) et (C,aire(MBA)) ;

C' est le barycentre de(A,aire(MBC)) et (B,aire(MAC)).

2. En appliquant le théorème du barycentre partiel aux points A', B' et C', on en déduit que G est le point de concours des droites (AA'), (BB') et (CC'). Les points G et M sont donc confondus.

Application

Soit I le centre et r le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC. Les aires des triangles IBC, IAC et IAB sont respectivement $\dfrac{a.r}{2}$, $\dfrac{b.r}{2}$ et $\dfrac{c.r}{2}$.

D'après les questions précédentes, I est le barycentre de $(A,\frac{a.r}{2})$, $(B,\frac{b.r}{2})$ et $(C,\frac{c.r}{2})$ donc, de (A,a), (B,b) et (C,c).

♦ Exercice 32 p.22

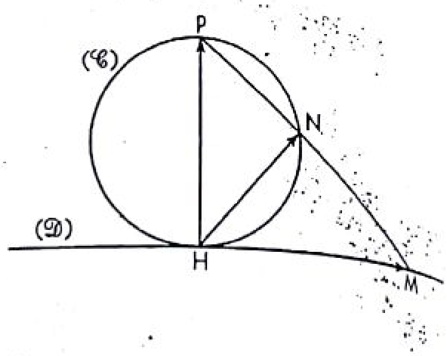
1. N est le barycentre de (M,HP^2) et (P,HM^2) ;

donc : $HP^2\overrightarrow{HM} + HM^2\,\overrightarrow{HP} = (HP^2 + HM^2)\overrightarrow{HN}$

Or : $HP^2 + HM^2 = MP^2$. D'où : $\overrightarrow{HN} = \dfrac{1}{MP^2}\,(HP^2\,\overrightarrow{HM} + HM^2\overrightarrow{HP})$.

2. $\overrightarrow{HN}.\overrightarrow{MP} = \dfrac{1}{MP^2}\left(HP^2\,\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{MP} + HM^2\,\overrightarrow{HP}.\overrightarrow{MP}\right)$

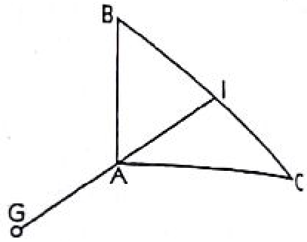
$\qquad\qquad = \dfrac{1}{MP^2}\left(-HP^2\,HM^2 + HM^2\,HP^2\right) = 0.$



Les vecteurs $\overrightarrow{HN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont donc orthogonaux.

3. D'après la question précédente, N appartient au cercle (𝒞) de diamètre [HP]. Réciproquement, soit N' un point de (𝒞) distinct de P. La droite (PN') coupe la droite (𝒟) en un point M. Le point N associé à M appartient à (𝒞) et au segment [PM] donc N = N'. Ainsi, le lieu cherché est le cercle (𝒞) privé du point P.

♦ Exercice 33 p.22



1. Soit I le milieu de [BC]. G est le barycentre de (A,4), (B,– 1) et (C,– 1) ; donc : $2\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AI}$.

D'où, les points G et I sont symétriques par rapport au point A.

2. $4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$

$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + 4GA^2 - GB^2 - GC^2$

3. $A \in (E)$, car : $4AA^2 - AB^2 - AC^2 = -BC^2 = -4a^2$ (Pythagore).

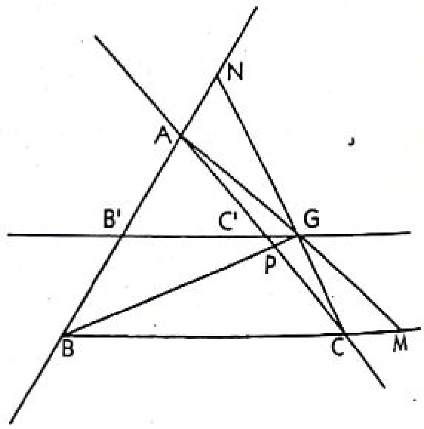
$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -4a^2 \qquad (1)$

(1) $\Leftrightarrow 2MG^2 + 4GA^2 - GB^2 - GC^2 = -4a^2 \Leftrightarrow GM = \sqrt{\dfrac{-4a^2 - 4GA^2 + GB^2 + GC^2}{2}}$.

Or : $GA^2 = a^2$ et $GB^2 + GC^2 = 2GI^2 + \dfrac{1}{2}BC^2 = 10a^2$. Donc $GM = a$.

(E) est le cercle de centre G passant par A (le rayon de ce cercle est a).

♦ Exercice 34 p.22



1. • Il faut choisir M tel que : $\overline{BC} + \overline{MC} \neq 0$ et $\overline{BC} + \overline{BM} \neq 0$, soit $M \neq B_1$ et $M \neq C_1$ avec B symétrique de B_1 par rapport à C et C_1 symétrique de C par rapport à B, par contre on peut prendre M = B ou M = C.

a) $\overline{MC}\,\overrightarrow{MB} + \overline{BM}\,\overrightarrow{MC} = 0$; donc : $M = \text{bar}\{(B,\overline{MC}),(C,\overline{BM})\}$;

b) $\overrightarrow{AN} = \dfrac{\overline{MC}}{\overline{BC} + \overline{MC}}\overrightarrow{AB}$; donc : $N = \text{bar}\{(A,\overline{BC}),(B,\overline{MC})\}$;

c) $\overrightarrow{AP} = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{BC} + \overline{BM}}\overrightarrow{AC}$; donc : $P = \text{bar}\{(A,\overline{BC}),(C,\overline{BM})\}$.

2. Posons : $G = \text{bar}\{(A,\overline{BC}), (B,\overline{MC}), (C,\overline{BM})\}$.

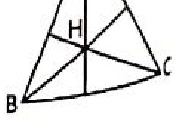
En appliquant trois fois le théorème des barycentres partiels et les relations précédentes, il vient : $G = \text{bar}\{(A,\overline{BC}), (M,\overline{BC})\}$; $G = \text{bar}\{(C,\overline{BM}), (N,\overline{BC}+\overline{MC})\}$; $G = \text{bar}\{(B,\overline{MC}), (P,\overline{BC}+\overline{BM})\}$.

Par conséquent les droites (AM), (BP) et (CN) sont concourantes en G, milieu du segment [AM].

3. G est l'image de M par l'homothétie h de centre A et de rapport $\dfrac{1}{2}$. Soit B' et C' les milieux respectifs des segments [AB] et [AC]. Le lieu cherché est l'image par h de la droite (BC) privée des images de B_1 et C_1 ; c'est donc la droite (B'C') privée des milieux de $[AB_1]$ et de $[AC_1]$.

♦ Exercice 35 p.22

1. H est le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ), donc : $\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\beta\,\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC})$.



2. $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\beta\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \gamma\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}) = \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(-\beta\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \gamma\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB})$

$\qquad = \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(-b\cos\hat{A}\cos\hat{C}\,ac\cos\hat{B} + c\cos\hat{A}\cos\hat{B}\,ab\cos\hat{C}) = 0.$

Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc orthogonaux.

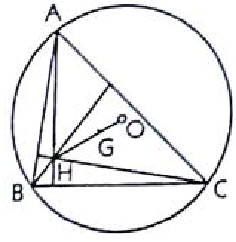
3. De même les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Le point H est donc l'orthocentre de ABC.

♦ **Exercice 36 p.22**

1. *a)* $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}$, avec I milieu de [BC].

Or, le triangle BOC est isocèle et les droites (OI) et (BC) sont perpendiculaires. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

b) De même, on établirait que les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Le point H est donc l'orthocentre du triangle ABC.



2. G est le centre de gravité du triangle ABC.

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$; d'où : $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = \vec{0}$.

O est donc le barycentre des points pondérés (G,3) et (H,– 1).

3. *a)* $\beta + \gamma = \cos\hat{A}(b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B}) = a\cos\hat{A}$.

On obtient de même : $\alpha + \gamma = b\cos\hat{B}$ et $\alpha + \beta = c\cos\hat{C}$.

b) D'après l'exercice précédent, on a : H = bar $\{(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)\}$ = bar $\{(A,-\alpha), (B,-\beta), (C,-\gamma)\}$.

De plus : G = bar $\{(A,1), (B,1), (C,1)\}$ = bar$\{(A,\alpha+\beta+\gamma), (B,\alpha+\beta+\gamma), (C,\alpha+\beta+\gamma)\}$.

Appliquons au point O le théorème des barycentres partiels :

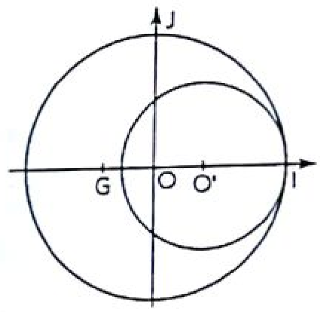
O = bar$\{(G,3),(H,-1)\}$ = bar$\{(A,\alpha+\beta+\gamma), (B,\alpha+\beta+\gamma), (C,\alpha+\beta+\gamma), (A,-\alpha), (B,-\beta), (C,-\gamma)\}$

= bar$\{(A,\beta+\gamma), (B,\alpha+\gamma), (C,\alpha+\beta)\}$ = bar$\{(A,a\cos\hat{A}), (B,b\cos\hat{B}), (C,c\cos\hat{C})\}$.

♦ **Exercice 37 p.22**

1. Le disque de centre O est la réunion du croissant et du disque de centre O'. Donc, O est le barycentre de (O',r^2) et $(G,1-r^2)$.

On a : $r^2\overrightarrow{OO'} + (1-r^2)\overrightarrow{OG} = \vec{0}$. $O'\begin{pmatrix}1-r\\0\end{pmatrix}$; donc : $G\begin{pmatrix}\dfrac{-r^2}{1+r}\\0\end{pmatrix}$.



2. La condition est réalisée lorsque l'abscisse de G est : $1 - 2r$.

$\dfrac{-r^2}{1+r} = 1 - 2r \quad \Rightarrow \quad r^2 + r - 1 = 0.$

De plus, r est positif ; donc : $r = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarque : $\dfrac{1}{r} = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ ***(nombre d'or)***.

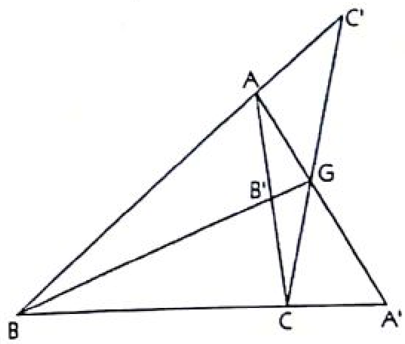
♦ **Exercice 38 p.22**

1. *a)* Soit (b,c) les coordonnées de G dans le repère (A,B,C).

$\overrightarrow{AG} = b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad (1-b-c)\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Posons : $a = 1 - b - c$; on a : G = bar $\{(A,a), (B,b)$ et $(C,c)\}$.

b) $b + c \neq 0$ (sinon on aurait $b = -c$, $\overrightarrow{AG} = c\overrightarrow{BC}$ et (AA')//(BC) ce qui est absurde). De même $a + c \neq 0$ et $a + b \neq 0$.



Donc, les points A', B' et C' sont des barycentres partiels et :

A' = bar$\{(B,b), (C,c)\} \;\Rightarrow\; b\,\overrightarrow{A'B} + c\,\overrightarrow{A'C} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\dfrac{c}{b}$

B' = bar$\{(A,a), (C,c)\} \;\Rightarrow\; a\,\overrightarrow{B'A} + c\,\overrightarrow{B'C} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\dfrac{a}{c}$

C' = bar$\{(A,a), (B,b)\} \;\Rightarrow\; a\,\overrightarrow{C'A} + b\,\overrightarrow{C'B} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\dfrac{b}{a}$

Donc : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \left(-\dfrac{c}{b}\right)\left(-\dfrac{a}{c}\right)\left(-\dfrac{b}{a}\right) = -1.$

2. Soit C'' le point d'intersection des droites (CK) et (AB). D'après **1.** : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = -1$;

Donc : $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \dfrac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}}$. Posons : $r = \dfrac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}}$. C' et C'' sont barycentres de (A,1) et (B,– r) ; donc : C' = C''.

Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont donc concourantes.

Remarque : les droites (CK) et (AB) sont sécantes, sinon on déduirait du théorème de Thalès :

$\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1$; donc : $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$, ce qui est impossible.

2. Angles orientés – Trigonométrie

(pages 23 à 46 du livre de l'élève)

Objectifs

- Consolider et approfondir la notion d'angle orienté, ébauchée en classe de Seconde.
- Introduire les mesures d'angles orientés.
- Investir les résultats obtenus dans l'étude de certaines configurations : points alignés ou cocycliques...
- Établir les formules trigonométriques et les utiliser (factorisations, linéarisations).
- Résoudre des équations et inéquations trigonométriques.

Commentaires

• Ce chapitre est d'accès direct, les notions requises pour l'aborder ayant été établies en classe de Seconde. Toutefois, il doit être étudié avant les chapitres concernant les isométries, la géométrie analytique du plan et l'étude des fonctions.

• Les notions d'angle orienté et de mesure principale sont vues en seconde, il est inutile de revenir sur leurs définitions. Par contre, on mettra soigneusement en place la notion de mesure quelconque d'un angle orienté, parfois difficile à saisir par l'élève.

• Nous avons adopté la notation $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ pour un angle orienté de deux vecteurs mais nous n'avons pas défini de notation pour une mesure d'angle orienté. Il faudra toutefois signaler à l'élève qu'il peut trouver, dans d'autres manuels, des notations comme mes$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou bien $\overline{(\vec{u},\vec{v})}$. Un angle orienté de mesure α peut être noté $\hat{\alpha}$; cependant on évitera des notations ambiguës du type $\widehat{\frac{\pi}{3}}$ ou $\widehat{0{,}5\pi}$, qui pourraient induire des « opérations-élève ». On rappelle que la seule opération définie sur les angles est l'addition.

• La démonstration du théorème des angles inscrits devrait utiliser le résultat analogue obtenu en classe de Seconde.

• On veillera à se limiter à des applications raisonnables du théorème des points cocycliques.

• Les résolutions d'inéquations trigonométriques seront traitées uniquement sous forme d'exemples simples. Les ensembles de solutions, généralement des intervalles ou des réunions d'intervalles de $\mathbb{R}$, pourront être présentés sous forme d'arcs du cercle trigonométrique, pour en donner une vision plus concrète.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Angles orientés • Image d'un réel sur le cercle trigonométrique. • Mesures d'un angle orienté. • Définition de la somme de deux angles orientés. **Propriétés des angles orientés** • Relation de Chasles. • $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v},\vec{u}}) = \hat{0}$. • Mesures de $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}})$, $(\widehat{\vec{u},k\vec{v}})$ et $(\widehat{k\vec{u},k\vec{v}})$ en fonction des mesures de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. • Si A et B sont les images des réels α et β, $\beta - \alpha$ est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$. • Double d'un angle orienté. • Angle orienté et cercle : – propriété des angles inscrits : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$. Extension au cas limite de la tangente ;	• Pour tout nombre réel x, placer l'image de x sur le cercle trigonométrique. • Réciproquement, pour tout point M du cercle trigonométrique, déterminer les antécédents de M dans $\mathbb{R}$. • Déterminer la mesure principale d'un angle orienté, connaissant une mesure quelconque. • Exploiter la relation de Chasles dans diverses situations. • Utiliser l'angle orienté double pour démontrer l'alignement de trois points. • Propriété des angles inscrits : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$.

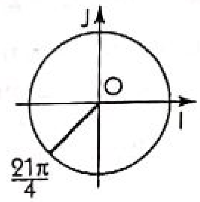
savoirs	savoir-faire
- condition nécessaire et suffisante de cocyclicité de quatre points.	
Trigonométrie • Sinus, cosinus, tangente d'un angle orienté. • Sinus, cosinus, tangente d'un nombre réel. • Relations entre les lignes trigonométriques du même angle. • Formules de trigonométrie : - formules d'addition ; - formules de duplication et de linéarisation ; - expressions de $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$ en fonction de $\tan\frac{\alpha}{2}$.	• À partir des lignes trigonométriques des angles de mesures $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ déterminer celles des angles remarquables. • Déterminer les lignes trigonométriques de $-x, x+\pi, \pi-x, \frac{\pi}{2}-x$, connaissant celles de x. • Transformer des expressions trigonométriques. • Retrouver, à partir des formules d'addition, les autres formules de transformation (duplication, linéarisation, expression de $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$).
Équations trigonométriques • Équations de type : $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\tan x = a$. • Équations du type : $a\cos x + b\sin x + c = 0$. **Inéquations trigonométriques**	• Résoudre des équations et inéquations trigonométriques.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

ANGLES ORIENTÉS

♦ Exercice 1.a p. 26



On a : $\frac{21\pi}{4} \equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ et $-\frac{3\pi}{4} \in]-\pi\,;\pi]$;

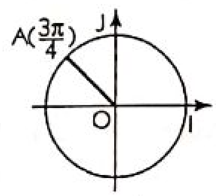
donc : $-\frac{3\pi}{4}$ est la mesure principale de cet angle.

$-\frac{11\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{13\pi}{4}$ sont également des mesures de cet angle orienté.

♦ Exercice 1.b p. 26

a) $x - y = 2\pi$; *b)* $x - y = -2\pi$; *c)* $x - y = -4\pi$; *d)* $x - y = -8\pi$.

♦ Exercice 1.c p. 26

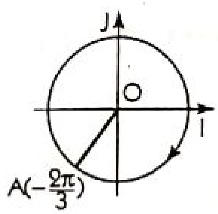


On considère un angle orienté de mesure principale $\frac{3\pi}{4}$.

Mesures en degrés de cet angle : 135° (mesure principale), – 225°, 495°, ...

Mesures en grades de cet angle : 150 (mesure principale), – 250, 550, ...

♦ Exercice 1.d p. 26

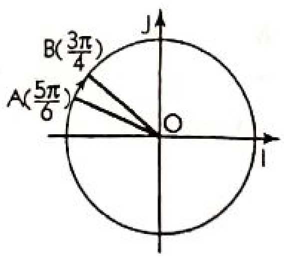


Déterminons la mesure principale de l'angle de mesure $\frac{16\pi}{3}$.

On a : $\frac{16\pi}{3} = 6\pi - \frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3} \in]-\pi,\pi]$; donc l'arc $\widehat{IA}$ a pour longueur $\frac{2\pi}{3}$.

PROPRIÉTÉS DES ANGLES ORIENTÉS

♦ Exercice 2.a p. 31



1. $-\frac{1999\pi}{6} = -334\pi + \frac{5\pi}{6}$; de plus : $\frac{5\pi}{6} \in]-\pi,\pi]$ et $\frac{3\pi}{4} \in]-\pi,\pi]$.

2. $\text{mes}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{12}$ et $-\frac{\pi}{12} \in]-\pi,\pi]$.

♦ Exercice 2.b p. 31

Le triangle ABC étant donné, on désigne par α une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.

- $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}})$ a pour mesure $\pi + \alpha$; $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}})$ a pour mesure $-\alpha$.
- $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}})$ a pour mesure $\pi - \alpha$; $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BA}})$ a pour mesure $-\alpha$.

♦ Exercice 2.c p. 31

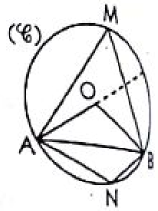
- Si k et k' sont deux réels de même signe : $(\widehat{k\vec{u}, k'\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.
- Si k et k' sont deux réels de signes contraires, $(\widehat{k\vec{u}, k'\vec{v}}) = (\widehat{k\vec{u},-k\vec{u}}) + (\widehat{-k\vec{u}, k'\vec{v}}) = \hat{\pi} + (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

♦ Exercice 2.d p. 31

On a : $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}}) = (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AD}})$;

donc : $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) + (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}) + (\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}}) = (\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}}) + (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}) + (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AD}}) \doteq \hat{0}$.

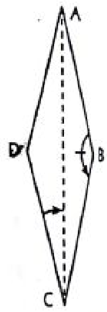
♦ Exercice 2.e p. 31



1. On sait que $2(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$; donc, $(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$ sont égaux ou diffèrents de $\hat{\pi}$. Les points M et N n'appartenant pas au même demi-plan de frontière (AB), $(\widehat{\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}})$ a pour mesure $\alpha - \pi$.

- Dans le cercle (𝒞), $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AO}})$ est un angle au centre et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}})$ est un angle inscrit qui interceptent le même arc donc $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AO}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}})$.

♦ Exercice 2.f p. 36



Dans le losange ABCD : $2(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) = 2\hat{\pi}$; donc : **mes$(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = \frac{5\pi}{6}$**.

De plus : $2(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}) = (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$; donc : **mes$(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}) = -\frac{\pi}{12}$**.

TRIGONOMÉTRIE

♦ Exercice 3.a p. 36

Les résultats demandés sont regroupés dans le tableau suivant :

Mesure de l'angle	Mesure principale	sinus	cosinus	tangente
$-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$-\frac{121\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$-\frac{1999\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{29\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

♦ Exercice 3.b p. 36

En utilisant les formules d'addition, on démontre ces égalités.

♦ Exercice 3.c p. 36

$\cos\alpha = -\frac{5}{3}$; $\cos 2\alpha = \frac{1}{9}$; $\tan 2\alpha = -4\sqrt{5}$.

♦ Exercice 3.d p. 36

$\sin(2x - y) = \frac{24 + 14\sqrt{2}}{75}$.

♦ Exercice 3.e p. 36

x est un nombre réel différent d'un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$, donc $\cos x \neq 0$ et $\sin x \neq 0$.

1. $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2.$

2. *a)* $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = 4\cos 2x$ *b)* $\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 4\cos 2x$.

♦ **Exercice 3.f p. 36**

• $\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$

• $\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$

♦ **Exercice 3.g p. 36**

1. $1 + \tan^2 x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

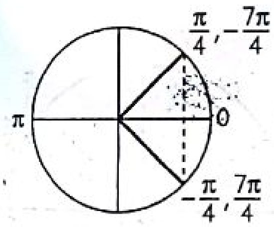
2. *a)* $\sin x = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $\cos x = \frac{3}{\sqrt{10}}$ *b)* $\sin x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; $\cos x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$

ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

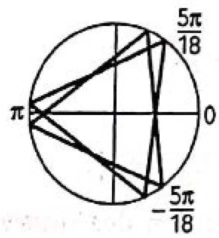
♦ **Exercice 4.a p. 41**

1. $x \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi].$

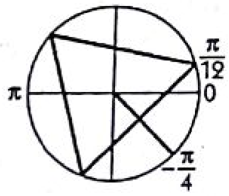
Dans $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$, les solutions sont : $-\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.



2. $x \equiv \frac{5\pi}{18}\ [\frac{2\pi}{3}]$ ou $x \equiv -\frac{5\pi}{18}\ [\frac{2\pi}{3}].$



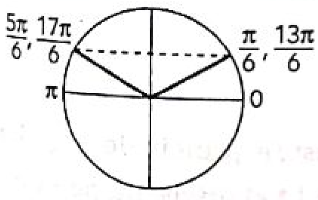
3. $x = \frac{\pi}{12}\ [\frac{2\pi}{3}]$ ou $x = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi].$



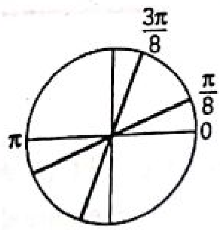
♦ **Exercice 4.b p. 41**

1. $x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi].$

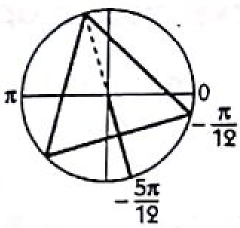
Dans $[-\pi\ ;\ 3\pi]$, les solutions sont : $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$.



2. $x \equiv \frac{\pi}{8}\ [\pi]$ ou $x \equiv \frac{3\pi}{8}\ [\pi].$



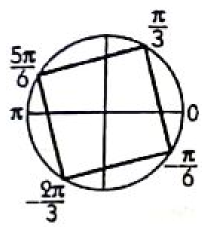
3. $x = -\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $x = -\frac{\pi}{36}\ [\frac{2\pi}{3}].$



♦ **Exercice 4.c p. 41**

$\tan 2x = -\sqrt{3} \iff \tan 2x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\iff x = -\frac{\pi}{6}\ \ [\frac{\pi}{2}].$



♦ **Exercice 4.d p. 41**

$\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2} \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

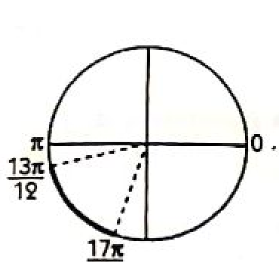
$x \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi].$

INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

♦ **Exercice 5.a p. 42**

$2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} < 0 \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \cos\frac{5\pi}{6}.$

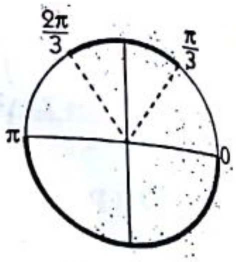
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est la réunion des intervalles de la forme : $]\frac{13\pi}{12} + k.2\pi\ ;\ \frac{17\pi}{12} + k.2\pi[,\ k \in \mathbb{Z}.$



♦ **Exercice 5.b p. 42**

On pose : $\sin x = X$; les solutions sont les nombres réels de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ dont le sinus est solution de l'inéquation du second degré : $2X^2 - \sqrt{3}\,X \geq 0$.

$2X^2 - \sqrt{3}\,X \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \leq 0$ ou $X \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc : $S =]-\pi\,;0] \cup \left[\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{2\pi}{3}\right]$.



♦ **Exercice 5.c p. 42**

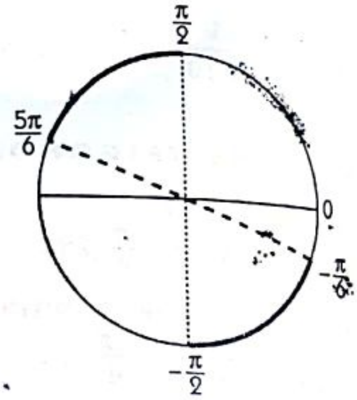
L'inéquation est définie pour : $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k.\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$\sqrt{3}\tan x + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$, $\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Donc : $\tan x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{6}\right[\cap \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right[$.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est la réunion des intervalles de la forme : $\left]\dfrac{\pi}{2} + k.\pi\,;\dfrac{5\pi}{6} + k.\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$.



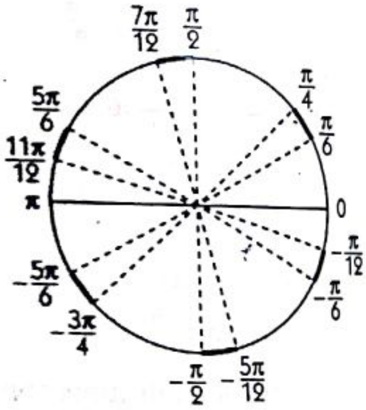
♦ **Exercice 5.d p. 42**

L'inéquation est définie pour $x \neq \dfrac{\pi}{6} + k.\dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

$\tan(3x) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \tan(3x) < \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Donc : $\tan(3x) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{4}\right[$.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est la réunion des intervalles de la forme : $\left]\dfrac{(2k+1)\pi}{6}\,;\dfrac{(4k+3)\pi}{12}\right[,\ k \in \mathbb{Z}$.

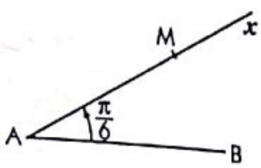


Exercices d'apprentissage

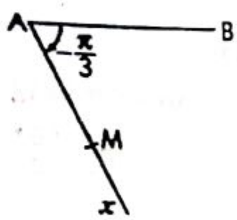
Angles orientés

♦ **Exercice 1 p. 43**

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ a pour mesure principale $\dfrac{\pi}{6}$. L'ensemble des points M est [Ax) privée du point A.



b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ a pour mesure principale $-\dfrac{\pi}{3}$. L'ensemble des points M est [Ax) privée du point A.

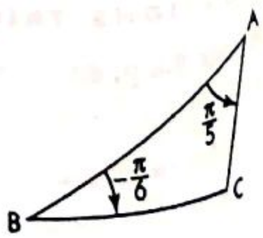


c) L'ensemble des points M est la demi-droite [Ax) contenant B et privée du point A.

d) L'ensemble des points M est le segment [AB] privé des points A et B.

♦ **Exercice 2 p. 43**

- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ ont repectivement pour mesures principales $\dfrac{\pi}{5}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$.
- $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure $\dfrac{6\pi}{5}$ ou $-\dfrac{4\pi}{5}$.
- $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ a pour mesure $\dfrac{19\pi}{30}$; $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA})$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{5}$.



♦ **Exercice 3 p. 43**

On a : $-\frac{9\pi}{5} \equiv \frac{\pi}{5}$ $[2\pi]$ et $\frac{22\pi}{5} \equiv \frac{2\pi}{5}$ $[2\pi]$.

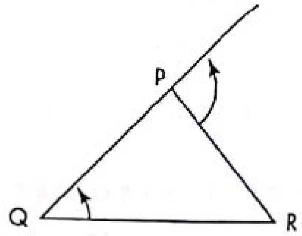
Dans le triangle PQR : $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) + (\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP}) + (\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) = \hat{\pi}$;

donc : $(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) = \hat{\pi} - ((\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) + (\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP}))$.

De plus : $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = \hat{\pi} - (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QP})$; d'où, $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$ a pour mesure $\frac{3\pi}{5}$.

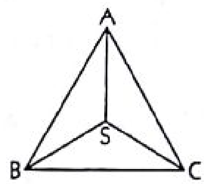
Donc, $(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ})$ a pour mesure $\pi - \left(\frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$ et $(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) = (\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP})$.

Par suite, le triangle PQR est isocèle de sommet P.



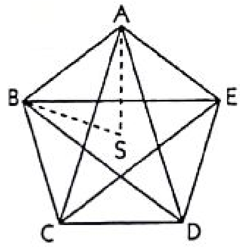
♦ **Exercice 4 p. 43**

- $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ ont pour mesure principale $\frac{\pi}{3}$ ou 60°.
- $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB})$ a pour mesure principale $\frac{2\pi}{3}$ ou 120°.
- $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC})$ a pour mesure principale $-\frac{\pi}{2}$ ou $-$ 90°.
- $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CA})$ a pour mesure principale $\frac{\pi}{6}$ ou 30°.
- $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB})$ a pour mesure principale $\frac{5\pi}{6}$ ou 150°.



♦ **Exercice 5 p. 43**

- $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB})$ a pour mesure principale $\frac{2\pi}{5}$ ou 72°.
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$ a pour mesure principale $\frac{3\pi}{5}$ ou 108°.
- $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BA})$ ont même mesure principale $\frac{\pi}{5}$ ou 36°.
- $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA})$ a pour mesure principale π ou 180°.

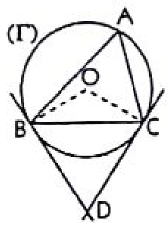


♦ **Exercice 6 p. 43**

Soit O le centre du cercle (Γ).

$(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = \hat{\pi} - (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = \hat{\pi} + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \hat{\pi} + 2\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

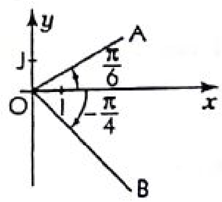
Donc, $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ a pour mesure $\pi + 2\alpha$ (ou $2\alpha - \pi$).



♦ **Exercice 7 p. 43**

Les coordonnées des points A et B sont :

$A\begin{pmatrix} 3\cos\frac{\pi}{6} \\ 3\sin\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 5\cos(-\frac{\pi}{4}) \\ 5\sin(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$, soit : $A\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{5\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.



♦ **Exercice 8 p. 43**

1. $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\tan x = -\frac{1}{2}$.

2. $\cos x = -\frac{4}{5}$; $\sin x = \frac{3}{5}$ et $\tan x = -\frac{3}{4}$.

3. $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$; $\cos x = \frac{3}{\sqrt{13}}$ et $\tan x = -\frac{2}{3}$.

♦ **Exercice 9 p. 43**

Soit $A = (\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$; $B = (1 + \cos x + \sin x)^2$; $C = \sin^4 x + \cos^4 x$; $D = \sin^6 x + \cos^6 x$.

- $A = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x\cos x = 4\sin x\cos x = 2\sin 2x$.
- $B = 1 + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x + 2\cos x + 2\sin x\cos x = 2(1 + \sin x) + 2\cos x\,(1 + \sin x) = 2\,(1 + \sin x)(1 + \cos x)$.
- $C = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$.
- $D = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^4 x - 3\sin^4 x\cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x\,(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$.

♦ **Exercice 10 p. 43**

1. $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x + 1 - 2\sin x\cos x = 2.$

2. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\,2\pi$ ou $x = \pi + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ b) $\begin{cases} \cos x = \frac{1+\sqrt{7}}{4} \\ \sin x = \frac{\sqrt{7}-1}{4} \end{cases}$ ou $\begin{cases} \cos x = \frac{1-\sqrt{7}}{4} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{7}+1}{4} \end{cases}$

Angles associés

♦ **Exercice 11 p. 43**

$A = -\cos x$; $B = -\sin x$; $C = \cos x - \sin x$; $D = 0.$

♦ **Exercice 12 p. 43**

$\sin(\frac{\pi}{3} + x) - \sin(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \sin x.$

$\cos(\frac{\pi}{3} + x) + \cos(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos x.$

Formules de trigonométrie

♦ **Exercice 13 p. 43**

$\cos^2\frac{\pi}{8} = \dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$; donc : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$

$\sin^2\frac{\pi}{8} = \dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$; donc : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$

$\cos\frac{3\pi}{8} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\sin\frac{3\pi}{8} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$

♦ **Exercice 14 p. 43**

- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$; $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$
- Pour $x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$, $\tan 3x = \dfrac{3\sin x - 4\sin^3 x}{4\cos^3 x - 3\cos x} = \tan x\,\dfrac{3 - 4\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}{\frac{4}{1+\tan^2 x} - 3} = \tan x\,\dfrac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x}.$

♦ **Exercice 15 p. 43**

1. $A = \cos\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$; $B = \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) = 0.$

2. $A + B = 2\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2}$ et $A - B = 2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2}$; donc : $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$

♦ **Exercice 16 p. 44**

Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{1+\sin 4x} = \sqrt{\cos^2 2x + \sin^2 2x + 2\sin 2x\cos 2x} = \sqrt{(\cos 2x + \sin 2x)^2} = |\cos 2x + \sin 2x|.$

♦ **Exercice 17 p. 44**

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ et $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = -\frac{4}{5}$ et $\sin x = \frac{3}{5}$

c) $\cos x = -\frac{1}{3}$ et $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

d) $\cos x = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin x = \frac{\sqrt{3}-1}{-2\sqrt{2}}.$

♦ **Exercice 18 p. 44**

a) $\cos 2x = \frac{7}{9}$ et $\sin 2x = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ b) $\cos 2x = -\frac{7}{25}$ et $\sin 2x = \frac{24}{25}$ c) $\cos 2x = -\frac{4}{5}$ et $\sin 2x = -\frac{3}{5}.$

♦ **Exercice 19 p. 44**

$A + B = 4$ et $A - B = 0$; donc : $A = B = 2.$

♦ **Exercice 20 p. 44**

Soit $A = 16\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}$. On a : $\frac{11\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24}$ et $\frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{24}.$

Donc : $A = 16\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24} = 4\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = 4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1.$

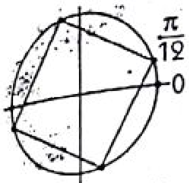
♦ Exercice 21 p. 44

a) (1) $\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{12}\ [\frac{\pi}{2}]$ ou $x \equiv 0\ [\pi]$

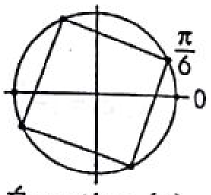
b) (2) $\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{6}\ [\frac{\pi}{2}]$

c) (3) $\Leftrightarrow x \equiv -\frac{11\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \frac{13\pi}{18}\ [\frac{2\pi}{3}]$

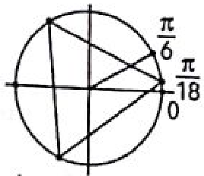
d) (4) $\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{3}\ [\frac{\pi}{2}]$.



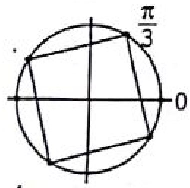
Équation (1)



Équation (2)



Équation (3)



Équation (4)

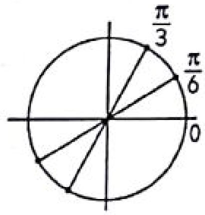
♦ Exercice 22 p. 44

a) (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = X \\ -2X^2 + X + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = X \\ X = 2 \text{ ou } X = -\frac{3}{2}. \end{cases}$

Or : $-1 \leq \cos x \leq 1$; donc : l'équation (E) n'a pas de solution.

b) (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = X \\ X^2 - X\sqrt{3} + \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = X \\ X = 2 \text{ ou } X = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow\ 2x \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{6}\ [\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$.

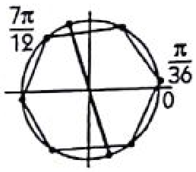


♦ Exercice 23 p. 44

a) (E) $\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ (1)

$\Leftrightarrow 4x - \frac{2\pi}{3} \equiv 2x + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $4x - \frac{2\pi}{3} \equiv -2x - \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

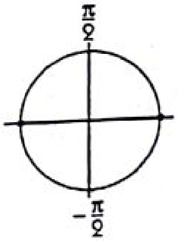
$\Leftrightarrow x \equiv \frac{7\pi}{12}\ [\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{36}\ [\frac{\pi}{3}]$.



b) (E) $\Leftrightarrow 4\cos^2 x + 12\cos^2 x \sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x\,(1 + 3\sin^2 x) = 0$

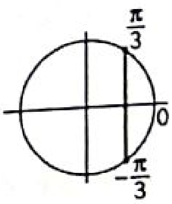
$\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.



c) (E) $\Leftrightarrow 4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = X \\ (2X - 1)(2X + 3) = 0 \end{cases}$

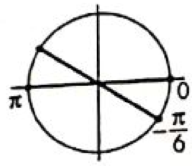
$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.



d) (E) $\Leftrightarrow 2\sin x\left[\cos x - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x \equiv 0\ [\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{6}\ [\pi]$.

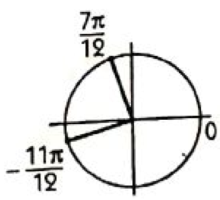


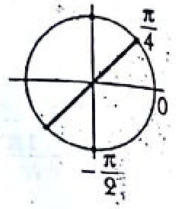
♦ Exercice 24 p. 44

a) $(E_1) \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ ou $x + \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow x \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{11\pi}{12}\ [2\pi]$.





b) $(E_2) \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$

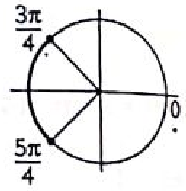
$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ ou $2x + \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

♦ Exercice 25 p. 44

a) $S = \{\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ *b)* $S = \{-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\}$ *c)* $S = \{\frac{3\pi}{4} ; \frac{2\pi}{3} ; \frac{7\pi}{4} ; \frac{5\pi}{3}\}$.

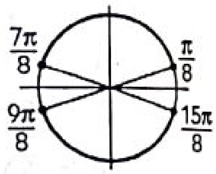
INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES



♦ Exercice 26 p. 44

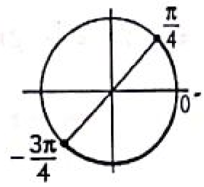
a) L'ensemble des solutions est la réunion des intervalles de la forme :

$]\frac{3\pi}{4} + k.2\pi ; \frac{5\pi}{4} + k.2\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$.



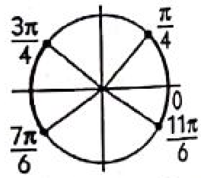
b) (I) $\Leftrightarrow \cos 2x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\pi}{8} + k.\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{8} + k.\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

L'ensemble des solutions est : $[\frac{\pi}{8} ; \frac{7\pi}{8}] \cup [\frac{9\pi}{8} ; \frac{15\pi}{8}]$.



c) (I) $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x \leq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$

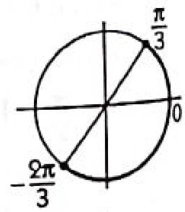
$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} + k.2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k.2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.



♦ Exercice 27 p. 44

a) $x \in [0 ; 2\pi[; -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc : $S = [0 ; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4} ; \frac{7\pi}{6}] \cup [\frac{11\pi}{6} ; 2\pi]$.

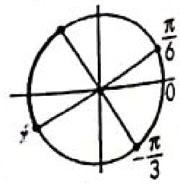


b) L'ensemble des solutions est la réunion des intervalles de la forme :

$[-\frac{2\pi}{3} + k.2\pi ; \frac{\pi}{3} + k.2\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) (I) $\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} + k.2\pi \leq 2x < \frac{\pi}{3} + k.2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + k.\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + k.\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.



♦ Exercice 28 p. 44

a) $S = [-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}[$

b) $S =]\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{2\pi}{3} ; \frac{5\pi}{6}[\cup]\frac{7\pi}{6} ; \frac{4\pi}{3}[\cup]\frac{5\pi}{3} ; \frac{11\pi}{6}[$.

♦ Exercice 29 p. 44

a) $S =]-\pi ; -\frac{3\pi}{4}] \cup [-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4} ; \pi]$

b) $S = [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{6}]$

c) $S = [0 ; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{5\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6}] \cup [\frac{3\pi}{2} ; 2\pi[$

d) $S = [0 ; \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4} ; 2\pi[$.

♦ Exercice 30 p. 44

a) $\frac{\pi}{6} + k.\pi \leq x < \frac{2\pi}{3} + k.\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

b) $\begin{cases} \frac{\pi}{4} + k.\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k.\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ -\frac{\pi}{2} + k.\pi \leq x < -\frac{\pi}{4} + k.\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$

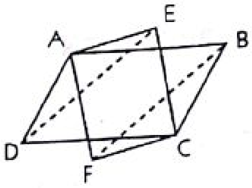
Exercices d'approffondissement

Exercice 31 p. 45

ABCF et AECF sont deux parallélogrammes ;

donc : $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DF}$.

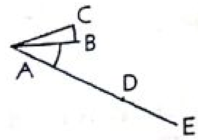
Par suite : $(\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}}) = (\widehat{\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{DF}}) = (\widehat{\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FD}})$.



Exercice 32 p. 45

1. $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}}) - (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) - (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}})$.

Or : $-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Donc : $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}}) = \hat{0}$ et les points A, D, E sont alignés dans cet ordre. DE = AE – AD = 1.



2. A, D, E alignés $\Leftrightarrow$ $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}}) = \hat{0}$ ou $\hat{\pi}$ $\Leftrightarrow$ $c - a - b = 0 + k.\pi$.

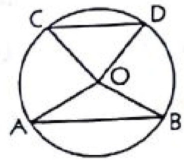
Deux cas sont possibles :

- si $a + b = c + k.2\pi$: A, D, E sont alignés dans cet ordre et DE = AE – AD = 1 ;
- si $a + b = \pi + c + k.2\pi$: D, A, E sont alignés dans cet ordre et DE = AE + AD = 5.

Exercice 33 p. 45

1. $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}}) + (\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{CD}})$

$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}})$



On démontre de même que : $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}}) = (\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}})$.

2. OAC équilatéral $\Leftrightarrow$ $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}})$ a pour mesure $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$ $\Leftrightarrow$ $(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}})$ a pour mesure $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$

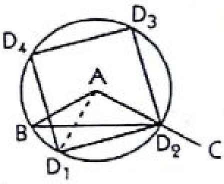
$\Leftrightarrow$ OBD équilatéral (sens contraire à OAB).

Exercice 34 p. 45

Soit D un point et α une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})$.

$$\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = 4(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \\ AB = AD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \equiv \frac{\pi}{6} \left[\frac{\pi}{2}\right] \\ AB = AD. \end{cases}$$

Les points D cherchés sont les quatre points D_1, D_2, D_3, D_4 situés sur le cercle de centre A et de rayon AB et formant.un carré $D_1D_2D_3D_4$ dont l'un des sommets est sur [AC] avec AB = AD.



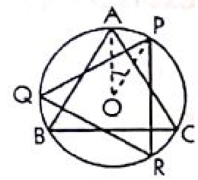
Exercice 35 p. 45

On a : OA = OB = OC = OP = OQ = OR.

On considère la rotation r de centre O et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}})$ telle que : r(A) = P.

Le triangle PQR est équilatéral de sens direct si et seulement si le triangle PQR est l'image de ABC par cette rotation ;

c'est-à-dire : si et seulement si $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}}) = (\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OQ}}) = (\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OR}})$.



Exercice 36 p. 45

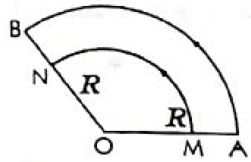
1. Soit α la mesure de l'angle au centre d'un tel secteur.

On a : $\frac{R^2\alpha}{2} = R^2$; donc : $\alpha = 2$.

2. On pose : OM = x. Les trajets T_1 et T_2 ont pour mesures respectives :

$T_1 = R\alpha$ et $T_2 = x\alpha + 2(R - x)$.

$\forall x \in [0 ; R]$, $T_1 = T_2$, $\Leftrightarrow$ $\forall x \in [0 ; R]$, $(\alpha - 2)x - R(\alpha - 2) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\alpha = 2$.



Exercice 37 p. 45

En utilisant les formules d'addition, on démontre que :

1. $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$.

2. $\sin 5x = 0 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{5}\ [\frac{\pi}{5}]$. Donc, $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ sont des solutions de cette équation.

3. $16X^5 - 20X^3 + 5X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = 0$ ou $X = \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $X = \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

4. $\sin 5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x = X \\ 16X^5 - 20X^3 + 5X = 0 \end{cases}$. De plus : $\sin\frac{2\pi}{5} > \sin\frac{\pi}{5} > 0$.

Donc : $\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ et $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

♦ Exercice 38 p. 45

1. On a bien : $\cos 5x = \cos x\,(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 5)$.

$(1-\cos x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)^2 = 1 - \cos 5x$.

2. *a)* $\cos 5x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5x \equiv 0\ [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv 0\ [\frac{2\pi}{5}]$.

b) D'autre part, d'après la question **1.** :

$\cos 5x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 1 \quad$ ou $\quad 4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x = 1 \quad$ ou $\quad \cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad$ ou $\quad \cos x = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Or : $\cos\frac{4\pi}{5} \le 0 \le \cos\frac{2\pi}{5}$; donc : $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

De plus : $\frac{\pi}{5} = \pi - (\frac{4\pi}{5})$; donc : $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

♦ Exercice 39 p. 45

Soit a le côté de chaque carré. On a : $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, \frac{\pi}{2}]^3$ et $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

De plus : $\cos(\beta+\gamma) = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc : $\alpha = \beta + \gamma$

♦ Exercice 40 p. 45

1. $r = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$, avec $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2. *a)* et *b)* $\begin{cases} x\cos t + y\sin t = a \\ -x\sin t + y\cos t = b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a\cos t - b\sin t = r\cos(t+\varphi) \\ y = a\sin t + b\cos t = r\sin(t+\varphi). \end{cases}$

c) $OM^2 = x^2 + y^2 = a^2 + b^2$; donc, M décrit le cercle de centre O et de rayon $r = \sqrt{a^2+b^2}$; si $a^2 + b^2 = 4$, on obtient le cercle de centre O et de rayon 2.

♦ Exercice 41 p. 45

1. On a : $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ (1) et $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$ (2).

De (1) et (2), on déduit :

$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ et $\sin x\sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$.

Donc : (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

2. $x + y \in [0, 2\pi]$ et $x - y \in [-\pi, \pi]$; donc, il y a quatre cas possibles :

(1) $\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{3} \\ x-y = \frac{\pi}{6} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{3} \\ x-y = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x+y = \frac{5\pi}{3} \\ x-y = \frac{\pi}{6} \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x+y = \frac{5\pi}{3} \\ x-y = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$

Soit : (1) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ y = \frac{\pi}{12} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} \\ y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x = \frac{11\pi}{12} \\ y = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} \\ y = \frac{11\pi}{12}. \end{cases}$

Exercice 42 p. 45

1. a) $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$; donc : $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.

b) $X = -\frac{1}{2}$ ou $X = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $X < -\frac{1}{2}$ ou $X > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

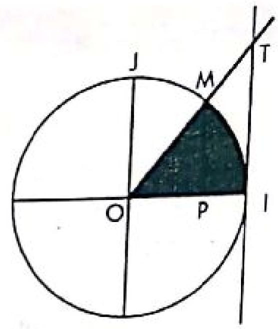
2. On a : $\cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc : $x = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi$; $x = -\frac{2\pi}{3} + k.2\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + k.2\pi$; $x = -\frac{\pi}{4} + k.2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

3. On a : $\cos x < -\frac{1}{2}$ ou $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $S =]-\pi ; -\frac{2\pi}{3}[\cup]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{2\pi}{3} ; \pi]$.

Exercice 43 p. 46



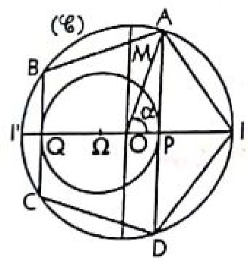
1. Les aires du triangle OIM, du secteur circulaire (OIM) et du triangle OIT sont respectives égales à $\sin \alpha$, α et $\tan \alpha$.

Donc, dans l'intervalle $]O ; \frac{\pi}{2}[$: $\sin \alpha \leq \alpha \leq \tan \alpha$ et $\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$.

2. En posant $\alpha = x$ et en divisant les termes de la double inégalité par x, on obtient : $\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\tan x}{x}$.

En divisant la dernière inégalité par $\frac{\sin x}{x}$ et en inversant les rapports, on obtient : $\cos x < \frac{\sin x}{x}$.

Exercice 44 p. 46



1. Soit α une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}})$.

$\cos \alpha = \overline{OP} = \overline{O\Omega} + \overline{\Omega P} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

2. $\cos \beta = \overline{OQ} = \overline{O\Omega} + \overline{\Omega Q} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Donc : $\cos \beta = \cos 2\alpha$, avec $(\beta, 2\alpha) \in [0, \pi]^2$; donc : $\hat{\beta} = 2\hat{\alpha}$.

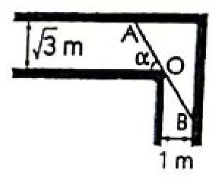
3. $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OQ}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OQ}}) - (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}) = \hat{\pi} - \hat{\beta}$.

Donc : $\cos \gamma = -\cos \beta = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\cos 2\gamma = 2\cos^2\gamma - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos \alpha$. Donc : $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}})$.

D'après ce qui précède et les propriétés de symétrie de la figure, IABCD est un pentagone régulier.

Exercice 45 p. 46

1. On a : $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{OA}$ et $\cos \alpha = \frac{1}{OB}$; donc : $OA = \frac{\sqrt{3}}{\sin \alpha}$; $OB = \frac{1}{\cos \alpha}$; $AB = \frac{\sqrt{3}}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$.



2. On pose : $AB = f(\alpha)$.

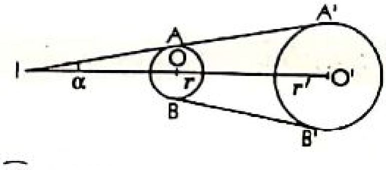
On a : $f(\alpha) = \dfrac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha + \frac{1}{2}\sin \alpha\right)}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \dfrac{4\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2\alpha}$.

3. a) $AB = 4 \Leftrightarrow \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \Leftrightarrow \alpha - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ ou $\alpha - \frac{\pi}{6} = -\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$.

Donc : $\alpha = \frac{2\pi}{9}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

b) $OA = OB \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \Leftrightarrow \tan \alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 46



1. $\sin \alpha = \frac{r'}{IO'} = \frac{r}{IO} = \frac{r'-r}{d}$. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{d^2 - 2(r'-r)^2}{d^2}$.

2. a) $\cos \alpha = \frac{IA'}{IO'} = \frac{IA}{IO} = \frac{AA'}{d}$; donc : $AA' = d \cos \alpha$.

b) Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'O'B'}$ ont pour mesure $\pi - 2\alpha$. Donc, le petit arc $\widehat{AB}$ a pour mesure $\pi - 2\alpha$ et pour longueur : $l = r(\pi - 2\alpha)$. Le grand arc $\widehat{A'B'}$ a pour mesure $\pi + 2\alpha$ et pour longueur : $l' = r'(\pi + 2\alpha)$.

c) Donc : $L = 2d\cos \alpha + r(\pi - 2\alpha) + r'(\pi + 2\alpha) = 2d\cos \alpha + \pi(r' + r) + 2\alpha(r' - r)$.

3. Pour $r = 5$ cm, $r' = 10$ cm et $d = 45$ cm, on trouve : $\alpha \approx 0{,}11$ radian et $L \approx 137{,}68$ cm.

3. Géométrie analytique du plan

(pages 47 à 60 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Mettre à la disposition des élèves de nouveaux outils pour la résolution analytique de problèmes de Géométrie :

– équations normales de droites ;
– distance d'un point à une droite ;
– représentation paramétrique d'un cercle dans un repère orthonormé.

COMMENTAIRES

• Ce chapitre fait suite au chapitre « Droites et cercles du plan », vu en classe de Seconde. Seule la notion d'angle orienté est nécessaire avant de l'aborder.

• La nature des notions traitées dans ce chapitre doit permettre au professeur de mettre le plus possible les élèves en situation de recherche.

• Les nouveaux outils acquis dans ce chapitre permettent un choix pour la résolution de certains problèmes :

– par exemple, pour déterminer l'intersection d'une droite et d'un cercle, les calculs seront simplifiés en utilisant une représentation paramétrique pour l'un de ces ensembles et une équation cartésienne pour l'autre ;

– par contre, l'utilisation de deux représentations paramétriques impose deux paramètres distincts et, donc, des difficultés supplémentaires.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Orthogonalité et droites du plan • Droite définie par un point et un vecteur normal. • Coordonnées d'un vecteur normal à une droite. • Équation normale d'une droite. • Expression analytique de la distance d'un point à une droite. **Cercles** • Représentation paramétrique d'un cercle défini par son centre et son rayon.	• Déterminer une équation normale de droite : – connaissant un vecteur normal unitaire et un point ; – connaissant une équation cartésienne de cette droite. • Reconnaître une équation normale de droite. • Calculer la distance d'un point à une droite. • Déterminer une représentation paramétrique d'un cercle : – défini par son centre et son rayon ; – défini par un diamètre. • Passer d'une représentation paramétrique d'un cercle à une équation cartésienne et vice-versa. • Utiliser la représentation paramétrique d'un cercle pour déterminer la position relative d'une droite et d'un cercle (points d'intersection, tangente en un point, ...).

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ **Exercice 1.a p. 53**

• Les vecteurs normaux à $(\mathcal{D})$ sont les vecteurs de la forme $\lambda\vec{n}$, où $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et λ est un nombre réel non nul.

• Les vecteurs directeurs de $(\mathcal{D})$ sont les vecteurs de la forme $\lambda\vec{u}$, où $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et λ est un nombre réel non nul.

Exercice 1.b p. 53

Une équation de $(\mathscr{D})$ est : $3x + 2y - 12 = 0$.

Exercice 1.c p. 53

1. On a : $4 \times 9 + 6 \times (-6) = 0$; donc : $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont perpendiculaires.

2. Les équations normales de $(\mathscr{D})$ sont : $\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y + \frac{1}{\sqrt{13}} = 0$ et $-\frac{2}{\sqrt{13}}x - \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{1}{\sqrt{13}} = 0$.

Les équations normales de $(\mathscr{D}')$ sont : $\frac{3}{\sqrt{13}}x - \frac{2}{\sqrt{13}}y + \frac{2}{3\sqrt{13}} = 0$ et $-\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y - \frac{2}{3\sqrt{13}} = 0$.

Exercice 1.d p. 53

Des équations des hauteurs relatives aux sommets A, B et C sont respectivement : $2x + y - 6 = 0$, $y - 2 = 0$ et $3x - y - 4 = 0$.

Les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC vérifient les équations de deux des hauteurs de ce triangle, par exemple, le système :

$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$. On en déduit : $H\binom{2}{2}$.

Exercice 1.e p. 53

On a : $d(A,\mathscr{D}) = \frac{|7 \times 3 - 1 + 6|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{13\sqrt{2}}{5}$.

Exercice 1.f p. 53

1. Une équation normale de $(\mathscr{D})$ est : $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{22}{13} = 0$ **2.** $d(B,\mathscr{D}) = \left|\frac{5}{13} \times 5 + \frac{12}{13} \times 3 - \frac{22}{13}\right| = 3$.

Exercice 2.a p. 57

On a la représentation paramétrique du cercle de centre $M\binom{3}{2}$ et de rayon 5.

Exercice 2.b p. 57

L'ensemble admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + 5\cos\theta \\ y = 5\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

C'est le cercle de centre $C\binom{2}{0}$ et de rayon 5.

Exercice 2.c p. 57

Une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$ est : $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Exercice 2.d p. 57

Une représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$ est : $\begin{cases} x = \sqrt{5}\cos\theta \\ y = \sqrt{5}\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

Exercice 2.e p. 57

Une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$ est : $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$.

Exercice 2.f p. 57

Une représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$ est : $\begin{cases} x = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{10}}{4}\cos\theta \\ y = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{10}}{4}\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

Exercice 2.g p. 57

Une représentation paramétrique du cercle de centre A et passant par B est : $\begin{cases} x = -1 + \sqrt{10}\cos\theta \\ y = 1 + \sqrt{10}\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

Exercice 2.h p. 57

Une représentation paramétrique du cercle diamètre AB est : $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{4}\cos\theta \\ y = \frac{3}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{4}\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

Exercices d'apprentissage

♦ Exercice 1 p. 58

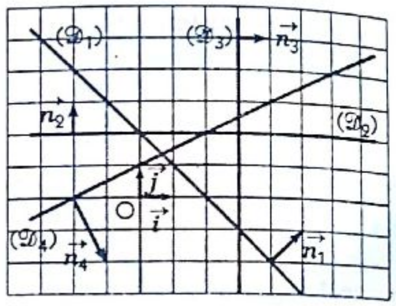
Dans chacun des cas, on écrit que le point $M\binom{x}{y}$ appartient à la droite si et seulement si : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.
On obtient : *a)* $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0$; *b)* $x - 4 = 0$; *c)* $y - 2 = 0$.

♦ Exercice 2 p. 58

On se contente ici de donner, dans chacun des cas, les coordonnées d'un vecteur normal à la droite :
a) $\binom{7}{-5}$; *b)* $\binom{1}{0}$; *c)* $\binom{3}{2}$; *d)* $\binom{0}{1}$; *e)* $\binom{-5}{-3}$; *f)* $\binom{1}{0}$; *g)* $\binom{3}{2}$; *h)* $\binom{2}{-1}$.

♦ Exercice 3 p. 58

On peut choisir, pour chacune des droites $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$, $(\mathscr{D}_3)$ et $(\mathscr{D}_4)$, les vecteurs normaux respectifs :
$\vec{n}_1 = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{n}_2 = \vec{j}$, $\vec{n}_3 = \vec{i}$ et $\vec{n}_4 = \vec{i} - 2\vec{j}$.



♦ Exercice 4 p. 58

$(\mathscr{D})$ passe par le point $A\binom{3}{-2}$ et admet pour vecteur normal tout vecteur directeur de (Δ), par exemple $\vec{n}\binom{1}{1}$.
Une équation cartésienne de $(\mathscr{D})$ est donc : $(x-3) + (y+2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$.

♦ Exercice 5 p. 58

1. Une équation cartésienne de $(\mathscr{D}_1)$ est : $2(x-3) - 5(y+2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y - 16 = 0$.

2. $(\mathscr{D}_2)$ admet le vecteur $\vec{u}\binom{5}{2}$ pour vecteur normal.
Donc une équation cartésienne de $(\mathscr{D}_2)$ est : $5(x-3) + 2(y+2) = 0 \Leftrightarrow 5x + 2y - 11 = 0$.

♦ Exercice 6 p. 58

Tout vecteur normal à $(\mathscr{D})$ est de la forme $\lambda\vec{n}$, où λ est un nombre réel non nul et $\vec{n}\,(2,6)$.
On a : $\|\lambda\vec{n}\| = 4 \Leftrightarrow |\lambda|\,\|\vec{n}\| = 4 \Leftrightarrow |\lambda| = \dfrac{2}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$ ou $\lambda = -\dfrac{2}{\sqrt{10}}$.

Les vecteurs normaux à $(\mathscr{D})$ de norme égale à 4 sont donc : $\vec{n}_1\begin{pmatrix}\dfrac{4}{\sqrt{10}}\\[2mm]\dfrac{12}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}-\dfrac{4}{\sqrt{10}}\\[2mm]-\dfrac{12}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}$.

♦ Exercice 7 p. 58

1. Les vecteurs unitaires normaux à $(\mathscr{D})$ sont : $\vec{n}_1\begin{pmatrix}\dfrac{3}{5}\\[2mm]-\dfrac{4}{5}\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{5}\\[2mm]\dfrac{4}{5}\end{pmatrix}$.

2. Les équations normales de $(\mathscr{D})$ sont : $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + \dfrac{7}{5} = 0$ et $-\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{7}{5} = 0$.

♦ Exercice 8 p. 58

a) $d(A,\Delta) = \dfrac{|2\times(-2)+1-3|}{\sqrt{2^2+1}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$; *b)* $d(A,\Delta) = \dfrac{|2\times(-1)-5|}{\sqrt{2^2}} = \dfrac{7}{2}$; $d(A,\Delta) = \dfrac{|2\times\sqrt{2}-\sqrt{2}+3|}{\sqrt{2^2+1}} = \dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

♦ Exercice 9 p. 58

a) $d(A,\mathscr{D}) = \sqrt{34}$ et $A'\binom{-1}{1}$ *b)* $d(A,\mathscr{D}) = 0$ et $A' = A$ *c)* $d(A,\mathscr{D}) = \dfrac{1}{3}$ et $A'\binom{1}{13/3}$.

♦ Exercice 10 p. 58

Une équation de la médiatrice de [BC] est : $8x + 2y - 11 = 0$.

♦ Exercice 11 p. 58

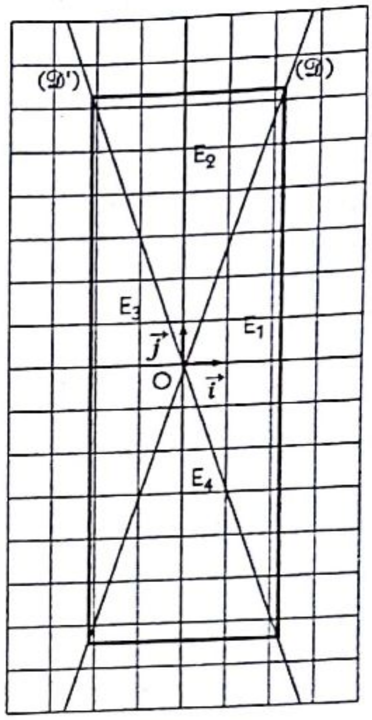
Soit $M\binom{x}{y}$ un point du plan.

On a : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \dfrac{|3x-y|}{\sqrt{10}} + \dfrac{|3x+y|}{\sqrt{10}} = 4 \Leftrightarrow |3x-y| + |3x+y| = 4\sqrt{10}$. (1)

Les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ partagent le plan en quatre régions (E_1), (E_2), (E_3) et (E_4) (cf. figure ci-jointe).

Si M appartient à (E_1), frontière comprise, M est situé au dessous de $(\mathscr{D})$ et au-dessus de $(\mathscr{D}')$. On a donc : $3x - y \geq 0$ et $3x + y \geq 0$.

On en déduit : (1) $\Leftrightarrow 6x = 4\sqrt{10}$.



• Dans (E_1), (Γ) coïncide donc avec la droite d'équation $x = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$.

Par un raisonnement analogue, on a :

• $M \in (E_2) \Leftrightarrow 3x - y \leq 0$ et $3x + y \geq 0$.

Dans (E_2), (Γ) coïncide donc avec la droite d'équation $y = 2\sqrt{10}$.

• $M \in (E_3) \Leftrightarrow 3x - y \leq 0$ et $3x + y \leq 0$.

Dans (E_3), (Γ) coïncide donc avec la droite d'équation $x = -\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$.

• $M \in (E_4) \Leftrightarrow 3x - y \geq 0$ et $3x + y \leq 0$. Dans (E_4), (Γ) coïncide donc avec la droite d'équation $y = -2\sqrt{10}$.

L'ensemble (Γ) est donc la réunion de quatre segments formant les côtés d'un rectangle.

♦ Exercice 12 p. 58

On a : $\overrightarrow{AB}\binom{1}{-4}$ et $\overrightarrow{CB}\binom{6}{2}$ ne sont pas colinéaires ; donc, A, B et C ne sont pas alignés.

La hauteur issue de A dans le triangle ABC a pour équation: $6(x-3) + 2(y-5) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 14 = 0$.

La hauteur issue de B dans le triangle ABC a pour équation : $5(x-4) + 6(y-1) = 0 \Leftrightarrow 5x + 6y - 26 = 0$.

Les coordonnées de H, orthocentre du triangle ABC, sont les solutions du système : $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 5x + 6y = 26 \end{cases}$.

Donc, H a pour coordonnées $(\dfrac{58}{13} ; \dfrac{8}{13})$.

♦ Exercice 13 p. 59

$\overrightarrow{AB}\binom{1}{-4}$ et $\overrightarrow{CB}\binom{6}{2}$ ne sont pas colinéaires ; donc, A, B et C ne sont pas alignés.

Une équation cartésienne de la médiatrice de [BC] est : $3x + y - 3 = 0$.

Une équation cartésienne de la médiatrice de [AB] est : $x - 4y + \dfrac{17}{2} = 0$.

Les coordonnées de Ω, centre du cercle circonscrit au triangle ABC, sont les solutions du système :

$\begin{cases} x - 4y + \dfrac{17}{2} = 0 \\ 3x + y - 3 = 0 \end{cases}$. Donc, Ω a pour coordonnées $(\dfrac{7}{26} ; \dfrac{57}{26})$.

♦ Exercice 14 p. 59

$M \in [AB]$, donc les coordonnées de M sont $(\lambda, 0)$, avec $\lambda \in [-4 ; 4]$.

(AC) et (BC) ont pour équations cartésiennes respectives : $5x - 4y + 20 = 0$ et $5x + 4y - 20 = 0$.

Donc : $d(M,(AC)) = \dfrac{5|\lambda + 4|}{\sqrt{41}}$; $d(M,(BC)) = \dfrac{5|\lambda - 4|}{\sqrt{41}}$. Or : $-4 \leq \lambda \leq 4$; par suite : $d(M,(AC)) + d(M,(BC)) = \dfrac{40}{\sqrt{41}}$.

♦ Exercice 15 p. 59

On a : $A\binom{2}{3}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ et $C\binom{-2}{1}$; on en déduit les équations des droites (AO) et (AC) :

(AO) : $3x - 2y = 0$; (AC) : $x - 2y + 4 = 0$, d'où : $d(B,(AO)) = \dfrac{5}{2\sqrt{13}}$ et $d(B,(AC)) = \dfrac{3}{2\sqrt{5}}$.

On a : $d(B,(AO)) \neq d(B,(AC))$; donc la droite (AB) n'est pas la bissectrice de l'angle $\widehat{AOC}$.

♦ Exercice 16 p. 59

On a : $BC = \sqrt{(2+1)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{73}$. Soit $H\binom{x}{y}$ le pied de la hauteur issue de A. On a :

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \iff 3(x-1) - 8(y-2) = 0 \iff 3x - 8y = -13.$

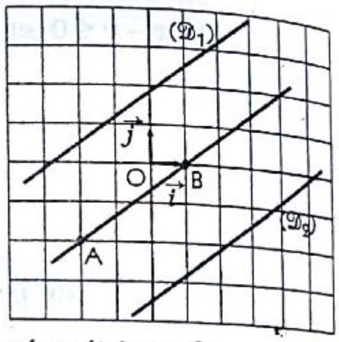
$H \in (BC) \iff \det(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}) = 0 \iff 8x + 3y = 7.$

Le système $\begin{cases} 3x - 8y = -13 \\ 8x + 3y = 7 \end{cases}$ a une solution unique : $x = \frac{17}{73}$, $y = \frac{125}{73}$.

Donc : $AH = \frac{7}{\sqrt{73}}$ et $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{7}{2}$.

Si on a fait avec les élèves le TD n°2 § 1.3., on peut vérifier le résultat à l'aide de l'égalité :
$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \times |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$; mais cette égalité ne constitue pas un savoir exigible.

♦ Exercice 17 p. 59



Pour tout point $M\binom{x}{y}$ du plan : $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -2x + 3y + 2$.
Le point $M\binom{x}{y}$ appartient au lieu cherché si et seulement si :
$-2x + 3y + 2 = 8$ ou $-2x + 3y + 2 = -8$.
Le lieu des points M du plan vérifiant $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})| = 8$ est la réunion des deux droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ d'équations respectives :
$-2x + 3y - 6 = 0$ et $-2x + 3y + 10 = 0$.

Si on a fait avec les élèves le TD n°2 § 1.3., on peut donner une justification géométrique de ce résultat : $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})| = 8 \iff \text{Aire}(ABM) = 4$. Or : $AB = \sqrt{13}$; donc le lieu cherché est l'ensemble des points M tels que : $d(M,(AB)) = \frac{8}{\sqrt{13}}$. Ce lieu est donc la réunion de deux droites parallèles à la droite (AB).

♦ Exercice 18 p. 59

Une représentation paramétrique du cercle de diamètre [AB] est : $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{34}}{2}\cos\theta \\ y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{34}}{2}\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

La tangente en A au cercle est la droite passant par A, de vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$;
une équation de cette tangente est : $5x - 3y + 21 = 0$.
La tangente en B passe par B et a pour vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}$; une équation de cette tangente est : $5x - 3y - 13 = 0$.

♦ Exercice 19 p. 59

On a : $d(A, \mathscr{D}) = \frac{6}{\sqrt{5}}$; le cercle de centre A, tangent à la droite $(\mathscr{D})$ a donc pout rayon $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

Une représentation paramétrique de ce cercle est : $\begin{cases} x = 6 + \frac{6}{\sqrt{5}}\cos\theta \\ y = -1 + \frac{6}{\sqrt{5}}\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 20 p. 59

1. $(\mathscr{C})$ a pour rayon : $d(A, \mathscr{D}) = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

Une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$ est donc : $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{36}{5} \iff 5x^2 + 5y^2 - 20x - 10y - 11 = 0$.

2. Soit $M\binom{x}{y}$ le point de contact entre $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$. M appartient à $(\mathscr{D})$, **donc : $y = 2x + 3$.**
L'équation obtenue en remplaçant y par $2x + 3$ dans l'équation cartésienne de $(\mathscr{C})$ s'écrit : $(5x + 2)^2 = 0$.
On en déduit que le point de contact entre $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$ admet pour coordonnées : $(-\frac{2}{5} ; \frac{11}{5})$.

♦ Exercice 21 p. 59

L'équation de $(\mathscr{C})$ s'écrit : $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$; donc $(\mathscr{C})$ a pour centre $A\binom{2}{-1}$ et pour rayon $2\sqrt{2}$.
On a : $d(A, \mathscr{D}) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$; donc $(\mathscr{D})$ est tangente à $(\mathscr{C})$.
Pour déterminer le point de contact entre $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$, on procède comme dans l'exercice précédent :
L'équation obtenue en remplaçant y par $x + 1$ dans l'équation cartésienne de $(\mathscr{C})$ s'écrit : $2x^2 = 0$.
Donc le point de contact entre $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$ admet pour coordonnées : (0 ; 1).

♦ Exercice 22 p. 59

L'équation de ($\mathscr{C}$) s'écrit : $(x+1)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{2}$; donc ($\mathscr{C}$) a pour centre $A\binom{-1}{3}$ et pour rayon $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

On a : $d(A, \mathscr{D}) = \frac{|m-4|}{\sqrt{2}}$; donc ($\mathscr{D}$) est tangente à ($\mathscr{C}$) ssi : $|m-4| = 5 \Leftrightarrow m \in \{-1 ; 9\}$.

• Si $m = -1$, on remplace y par $x - 1$ dans l'équation cartésienne de ($\mathscr{C}$). On obtient : $2(x - \frac{3}{2})^2 = 0$.

Donc le point de contact entre ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{D}$) admet pour coordonnées : $(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2})$.

• Si $m = 9$, on remplace y par $x + 9$ dans l'équation cartésienne de ($\mathscr{C}$). On obtient : $2(x + \frac{7}{2})^2 = 0$.

Donc le point de contact entre ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{D}$) admet pour coordonnées : $(-\frac{7}{2} ; \frac{11}{2})$.

♦ Exercice 23 p. 59

$d(O, \Delta_m) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{1+m^2}} = 1$. Toutes les droites ($\Delta_m$) sont donc tangentes au cercle de centre O et de rayon 1.

❏ Exercices d'approffondissement

♦ Exercice 24 p. 59

Soit ($\mathscr{C}$) le cercle cherché, Ω son centre et r son rayon.

Une équation de ($\mathscr{C}$) est : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$. Le cercle ($\mathscr{C}$) répond à la question si et seulement si : • O appartient à ($\mathscr{C}$) • A appartient à ($\mathscr{C}$) • Les droites ($A\Omega$) et ($\mathscr{D}$) sont perpendiculaires.

• O appartient à ($\mathscr{C}$), donc : $a^2 + b^2 - r^2 = 0$; l'équation de ($\mathscr{C}$) s'écrit : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$.

• A a pour coordonnées $(-1 ; 1)$; A appartient à ($\mathscr{C}$), donc : $2a - 2b + 2 = 0$ (1).

• Les droites ($A\Omega$) et ($\mathscr{D}$) sont perpendiculaires ; on en déduit : $a - 3b + 4 = 0$ (2).

Des équations (1) et (2), on déduit : $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{3}{2}$.

D'où une équation cartésienne de ($\mathscr{C}$) : $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$.

♦ Exercice 25 p. 59

1. Soit $M\binom{x}{y}$ un des points cherchés. On a : $\overrightarrow{\Omega M}\binom{x-2}{y-1}$.

Une équation de ($\mathscr{C}$) est : $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ (1).

Le point M répond à la question si et seulement si : $M \in (\mathscr{C})$ et $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $(x-2) = \sqrt{3}(y-1)$ (2).

En remplaçant $(x-2)$ par $\sqrt{3}(y-1)$ dans l'équation (1), on obtient : $4(y-1)^2 = 9$.

On a donc deux solutions : $y = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ et $y = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.

On calcule les valeurs correspondantes de x à l'aide de l'équation (2), et on en déduit que les points du cercle où la tangente admet pour vecteur normal $\vec{v}$ sont les points $M_1\begin{pmatrix}\frac{4+3\sqrt{3}}{2}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix}\frac{4-3\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

2. La tangente au cercle en M_1 est la droite passant par M_1 et de vecteur normal $\vec{v}$.

Une équation de cette tangente est : $\sqrt{3}\,x + y - 2\sqrt{3} - 7 = 0$.

De manière analogue, on a une équation de la tangente au cercle en M_2 : $\sqrt{3}\,x + y - 2\sqrt{3} + 5 = 0$.

On peut trouver une solution plus rapide en utilisant les résultats du TD n°1 § 2.2., à condition de l'avoir étudié avec les élèves (ces résultats ne constituent pas des savoirs exigibles).

♦ Exercice 26 p. 59

1. On a : $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 0$; les vecteurs normaux de ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{D}'$) sont colinéaires, donc ces droites sont parallèles.

2. Soit ($\mathscr{C}$) le cercle cherché, $\Omega\binom{a}{0}$ son centre et r son rayon.

On a : $d(\Omega,\mathscr{D}) = d(\Omega,\mathscr{D}) = r$; on en déduit : $\frac{|3a+6|}{5} = \frac{|-6a+9|}{10} = r$. D'où : $a = -\frac{1}{4}$ et $r = \frac{21}{20}$.

Une représentation paramétrique de ce cercle est : $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{21}{20}\cos\theta \\ y = \dfrac{21}{20}\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 27 p. 59

1. Une représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$ est : $\begin{cases} x = 4 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

2. Une équation de $(\mathscr{D}_m)$ est : $mx - y = 0$. On a : $d(\Omega,\mathscr{D}_m) = \dfrac{|4m|}{\sqrt{m^2+1}}$.

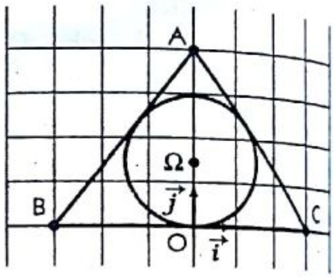
$(\mathscr{D}_m)$ est tangente à $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(\Omega,\mathscr{D}_m) = 2 \Leftrightarrow 16m^2 = 4(m^2+1) \Leftrightarrow m = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ou $m = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Donc, il existe deux valeurs de m pour lesquelles $(\mathscr{D}_m)$ est tangente à $(\mathscr{C})$.

♦ Exercice 28 p. 59

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle cherché, Ω son centre et r son rayon.
Le triangle est isocèle en A, donc Ω est sur l'axe des ordonnées. Soit a l'ordonnée de Ω.
Les droites (AC) et (BC) ont pour équations respectives : $4x + 3y - 12 = 0$ et $y = 0$.

$d(\Omega,(AC)) = d(\Omega,(BC)) \Leftrightarrow \dfrac{|3a-12|}{5} = |a| \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{2}$ ou $a = -6$.



Ω est à l'intérieur du triangle, donc son ordonnée est positive.

On en déduit : $a = \dfrac{3}{2}$ et $r = d(\Omega,(BC)) = \dfrac{3}{2}$.

Une représentation paramétrique du cercle inscrit dans le triangle ABC est donc : $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\cos\theta \\ y = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 29 p. 59

On a : $\overrightarrow{AB}\binom{2}{-1}, \overrightarrow{AC}\binom{4}{2}, \overrightarrow{AD}\binom{1}{-5}, \overrightarrow{BC}\binom{2}{3}, \overrightarrow{BD}\binom{-1}{-4}$. Donc :

aire (ABC) = 4 ; aire (ABD) = $\dfrac{9}{2}$; aire (ACD) = 11 ; aire (BCD) = $\dfrac{5}{2}$.

♦ Exercice 30 p. 59

1. Les droites (AB) et (AC) ont pour équations respectives : $3x - 4y + 12 = 0$ et $x = 0$.
Soit x l'abscisse d'un point M de l'axe des abscisses, équidistant des droites (AB) et (AC).

On a : $d(M,(AB)) = d(M,(AC)) \Leftrightarrow \dfrac{|3x+12|}{5} = |x| \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ ou $x = 6$.

Les points de l'axe des abscisses, équidistants des droites (AB) et (AC), sont donc $I\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $J\binom{6}{0}$.

2. Le cercle de diamètre [IJ] a pour équation cartésienne : $2x^2 + 2y^2 - 9x - 18 = 0$.
On vérifie que A appartient à ce cercle.

3. La tangente au cercle en A est la droite passant par A, de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$.
Une équation de cette tangente est : $9x - 12y + 36 = 0$.

♦ Exercice 31 p. 59

1. Les coordonnées $(x\,;y)$ d'un point commun à $(\mathscr{C})$ et à $(\mathscr{C}')$ vérifient le système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x^2 + (y-2)^2 = 1 \end{cases}$

On en déduit que : $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont sécants en : $A\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

2. Les tangentes en A à $(\mathscr{C})$ et à $(\mathscr{C}')$ ont pour vecteurs normaux respectifs : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{O'A}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{O'A} = 0$; donc les tangentes en A à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont perpendiculaires.
On démontre de manière analogue que les tangentes en B à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont perpendiculaires.

3. Soit $(\mathscr{D})$ une droite d'équation normale : $x\cos\theta + y\sin\theta + k = 0$.
On a : $d(O,\mathscr{D}) = |k|$ et $d(O',\mathscr{D}) = |2\sin\theta + k|$

$(\mathscr{D})$ est une tangente commune à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}') \Leftrightarrow d(O,\mathscr{D}) = \sqrt{3}$ et $d(O',\mathscr{D}) = 1 \Leftrightarrow |k| = \sqrt{3}$ et $|2\sin\theta + \sqrt{3}| = 1$.

Or : $2\sin\theta + \sqrt{3} \geq \sqrt{3} - 2 > -1$) ; donc : $d(O,\mathscr{D}) = \sqrt{3}$ et $d(O',\mathscr{D}) = 1 \Leftrightarrow |k| = \sqrt{3}$ et $2\sin\theta + \sqrt{3} = 1$.

On a : $d(O,\mathscr{D}) = \sqrt{3} \Leftrightarrow k = \sqrt{3}$ ou $k = -\sqrt{3}$.

• Si $k = \sqrt{3}$, on a : $\sin\theta = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$; on déduit : $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ ou $\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

On obtient ainsi les équations normales de deux tangentes communes à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$:

$(\mathscr{D}_1) : \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\,x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\,y + \sqrt{3} = 0$; $(\mathscr{D}_2) : -\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\,x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\,y + \sqrt{3} = 0$.

• Si $k = -\sqrt{3}$, on obtient deux nouvelles équations qui sont les deuxièmes équations normales de $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$.

Exercice 32 p. 60

1. Une représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$ est : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

Une représentation paramétrique de $(\mathscr{C}')$ est : $\begin{cases} x = d + r'\cos\beta \\ y = r'\sin\beta \end{cases}$ $(\beta \in \mathbb{R})$.

2. a) Une équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ en M est : $x\cos\theta + y\sin\theta - r = 0$.

Une équation de la tangente à $(\mathscr{C}')$ en M' est : $x\cos\beta + y\sin\beta - r' - d\cos\beta = 0$.

b) Ces deux tangentes sont confondues si et seulement si les deux équations obtenues à la question précédente représentent la même droite. Or ces deux équations sont des équations normales et une droite donnée admet deux équations normales. Donc, les deux tangentes sont confondues si et seulement si :

$(\cos\alpha = \cos\beta$, $\sin\alpha = \sin\beta$ et $r = r' + d\cos\beta)$ ou $(\cos\alpha = -\cos\beta$, $\sin\alpha = -\sin\beta$ et $r = -r' - d\cos\beta)$.

Cette condition est équivalente à : $(\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$ et $\cos\alpha = \dfrac{r-r'}{d})$ ou $(\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} + \widehat{\pi}$ et $\cos\alpha = \dfrac{r+r'}{d})$.

c) • $d > r + r' > r > r - r' \Rightarrow \dfrac{r-r'}{d} < 1$ et $d > r + r' > r' > r' - r \Rightarrow \dfrac{r-r'}{d} > -1$. Donc : $-1 < \dfrac{r-r'}{d} < 1$.

On en déduit que l'équation $\cos\alpha = \dfrac{r-r'}{d}$ admet deux solutions opposées dans l'intervalle $]-\pi ; \pi[$;

de l'égalité $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, on déduit : $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{d^2-(r-r')^2}}{d}$ ou $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{d^2-(r-r')^2}}{d}$.

On obtient ainsi deux tangentes communes à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

On est dans le cas où $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$, donc : $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}}) = (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{O'M'}})$.

Les points M et M' étant du même côté de la droite (OO'), les tangentes sont extérieures.

Leurs équations respectives sont :

$(r-r')x + \sqrt{d^2-(r-r')^2}\,y - rd = 0$ et $(r-r')x - \sqrt{d^2-(r-r')^2}\,y - rd = 0$.

• On a : $0 < r + r' < d \Rightarrow 0 < \dfrac{r+r'}{d} < 1$.

On obtient de même deux tangentes intérieures communes à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, d'équations respectives :

$(r+r')x + \sqrt{d^2-(r+r')^2}\,y - rd = 0$ et $(r+r')x - \sqrt{d^2-(r+r')^2}\,y - rd = 0$.

Application numérique : $r = 4$, $r' = 1$ et $d = 6$.

Tangentes extérieures communes à $(\mathscr{C})$ et à $(\mathscr{C}')$: $x + \sqrt{3}\,y - 8 = 0$ et $x - \sqrt{3}\,y - 8 = 0$.

Tangentes intérieures communes à $(\mathscr{C})$ et à $(\mathscr{C}')$: $5x + \sqrt{11}\,y - 24 = 0$ et $5x - \sqrt{11}\,y - 24 = 0$.

Exercice 33 p. 60

1. Les droites (AB) et (AC) admettent pour équations respectives : $ax + by - ab = 0$ et $ax + cy - ac = 0$.

Soit $M\binom{x}{y}$ un point du plan. On a :

$$d(M,(AB)) = d(M,(AC)) \Leftrightarrow \frac{|ax+by-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax+cy-ac|}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\Leftrightarrow (a^2+c^2)(ax+by-ab)^2 = (a^2+b^2)(ax+cy-ac)^2. \quad (1)$$

L'ensemble des points du plan équidistants des droites (AB) et (AC) est donc la réunion des deux droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives :

$a\left(\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right)x+\left(b\sqrt{a^2+c^2}-c\sqrt{a^2+b^2}\right)y-a\left(b\sqrt{a^2+c^2}-c\sqrt{a^2+b^2}\right)=0$ et

$a\left(\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+b^2}\right)x+\left(b\sqrt{a^2+c^2}+c\sqrt{a^2+b^2}\right)y-a\left(b\sqrt{a^2+c^2}+c\sqrt{a^2+b^2}\right)=0.$

On vérifie que les droites sont perpendiculaires en montrant, par exemple, que le produit scalaire des vecteurs normaux est nul.

2. La droite (BC) est l'axe des abscisses. En remplaçant y par 0 dans l'équation (1) on obtient une équation dont les solutions sont les abscisses x_I et x_J des points I et J. Cette équation s'écrit :

$(a^2+c^2)\,(ax-ab)^2=(a^2+b^2)\,(ax-ac)^2 \iff (b+c)^2x^2+2(a^2-bc)x-a^2(b+c)=0$ (2)

3. On a : $AB^2\times IC^2-AC^2\times IB^2=(a^2+b^2)\,(c-x_I)^2-(a^2+c^2)\,(b-x_I)^2$

$=(b-c)\,[(b+c)x_I{}^2+2(a^2-bc)x_I-(a^2-b^2)(b+c)]$

$=0$ (car x_I est une solution de l'équation (2)).

De plus, I et B sont distincts car B n'est pas équidistant des droites (AB) et (AC) ; de même, $I\neq C$.

On en déduit : $\dfrac{IB}{IC}=\dfrac{AB}{AC}$; on démontre de manière analogue que : $\dfrac{JB}{JC}=\dfrac{AB}{AC}$.

♦ Exercice 34 p. 60

1. *a)* Si $\mathcal{P}(M)>0$, alors $M\Omega>r$; donc, M est à l'extérieur de $(\mathscr{C})$.

Si $\mathcal{P}(M)<0$, alors $M\Omega<r$; donc, M est à l'intérieur de $(\mathscr{C})$.

Si $\mathcal{P}(M)=0$, alors $M\Omega=r$; donc, M appartient $(\mathscr{C})$.

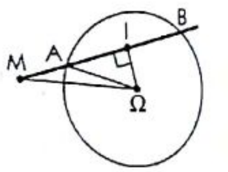
b) $(\mathscr{C}')$ a pour équation cartésienne : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$; donc $\Omega\,(a\,;b)$ et $c=a^2+b^2-r^2$.

On a : $\mathcal{P}(M)=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2=x_0{}^2+y_0{}^2-2ax_0-2by_0+a^2+b^2-r^2=x_0{}^2+y_0{}^2-2ax_0-2by_0+c.$

Application

$0^2+7^2+5\times0-7\times7=-12$; donc, A est à l'intérieur de $(\mathscr{C})$.

$3^2+1^2+5\times3-7\times1=6$; donc, B est à l'extérieur de $(\mathscr{C})$.



2. Soit I le milieu du segment [AB]. On a :

$\overline{MA}.\overline{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\,(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$

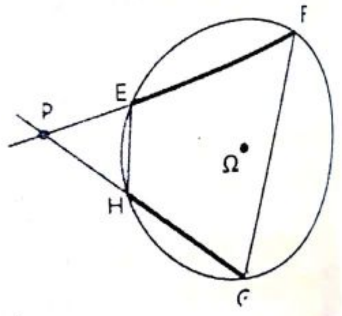
$=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\,(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=MI^2-IA^2$

$=(M\Omega^2-I\Omega^2)-(A\Omega^2-I\Omega^2)=M\Omega^2-r^2=\mathcal{P}(M).$

b) • Si le quadrilatère EFGH est inscriptible, la puissance du point P par rapport au cercle dans lequel il est inscrit est égale à $\overline{PE}\times\overline{PF}$ et à $\overline{PG}\times\overline{PH}$.

Cette puissance ne dépendant que du point P et du cercle, on a :

$\overline{PE}\times\overline{PF}=\overline{PG}\times\overline{PH}.$



• Si $\overline{PE}\times\overline{PF}=\overline{PG}\times\overline{PH}$, notons $(\mathscr{C}')$ le cercle circonscrit au triangle EFG, et H' le point d'intersection de $(\mathscr{C}')$ avec la droite (GP).

Le quadrilatère EFGH' est inscriptible et les droites (EF) et (GH') se coupent en P :

D'après ce qui précède, on a : $\overline{PE}\times\overline{PF}=\overline{PG}\times\overline{PH'}$.

On en déduit : $\overline{PG}\times\overline{PH'}=\overline{PG}\times\overline{PH}$; d'où : $\overline{PH}=\overline{PH'}$.

Les points H et H' sont donc confondus et le quadrilatère EFGH est inscriptible dans le cercle $(\mathscr{C}')$.

♦ Exercice 35 p. 60

1. $M\binom{x}{y}\in(\mathscr{C}')\cap(\mathscr{C}'')\iff\begin{cases}x^2+y^2+x-4y+1=0 & (L_1)\\ x^2+y^2-3x+2y-13=0 & (L_2)\end{cases}\iff\begin{cases}x^2+y^2+x-4y+1=0 & (L_1)\\ 4x-6y+14=0 & (L_1)-(L_2)\end{cases}$

En exprimant y en fonction de x dans la deuxième équation et en reportant cette valeur dans la première équation on démontre que les deux cercles $(\mathscr{C}')$ et $(\mathscr{C}'')$ sont sécants en deux points $A\binom{1}{3}$ et $B\binom{-2}{1}$.

2. Remarquons tout d'abord que pour toute valeur de k les points A et B appartiennent à (E_k) puisque leurs coordonnées vérifient les équations de $(\mathscr{C}')$ et $(\mathscr{C}'')$ et par suite celle de (E_k)

a) • Si $k = -1$ (E_{-1}) a pour équation : $4x - 6y + 14 = 0$, c'est une équation de la droite (AB).

• Si $k \neq -1$ (E_k) a pour équation : $\left(x + \frac{1}{2}\left(\frac{1-3k}{1+k}\right)\right)^2 + \left(y - \left(\frac{2-k}{1+k}\right)\right)^2 - \frac{65k^2 + 26k + 13}{4\,(k+1)^2} = 0$

c'est l'équation d'un cercle passant par A et B.

b) Pour $k \neq -1$ le cercle (E_k) a pour centre $C_k\begin{pmatrix} \frac{3k-1}{2(1+k)} \\ \frac{2-k}{1+k} \end{pmatrix}$ et l'ensemble des centres des cercles (E_k) a pour représentation paramétrique :

$\begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{2}{k+1} \\ y = -1 + \frac{3}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$ avec $t = \frac{1}{k+1}$, lorsque k varie dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ t parcourt $\mathbb{R}^*$ et l'ensemble des centres est la médiatrice de [AB] privé du point $C\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ centre du cercle $(\mathscr{C}'')$.

3. a) Un cercle passant par les points A et B a son centre sur la médiatrice de [AB], d'après les questions précédentes les cercles passant par A et B distincts du cercle $(\mathscr{C}'')$ admettent une équation du type : $\lambda(x^2 + y^2 + x - 4y + 1) + \mu(x^2 + y^2 + x - 4y + 1) = 0$ avec $(\lambda, \mu) = (1, k)$ et on obtient le cercle $(\mathscr{C}'')$ pour $(\lambda, \mu) = (0, 1)$ ce qui répond à la question. Remarquons que pour $\lambda \neq 0$ l'équation précédente est l'équation du cercle (E_k) avec $k = \frac{\mu}{\lambda}$ et pour $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$ on obtient le cercle $(\mathscr{C}'')$.

note : L'ensemble des cercles d'équation $\lambda(x^2 + y^2 + x - 4y + 1) + \mu(x^2 + y^2 + x - 4y + 1) = 0$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est un faisceau de cercle.

4. Isométries du plan

(pages 61 à 86 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- Compléter l'étude et faire une classification des isométries connues : translations, symétries orthogonales, rotations.
- Dégager les propriétés générales de ces isométries (propriétés de conservation, images de figures usuelles).
- Utiliser des isométries pour :
  - résoudre des problèmes de construction ;
  - rechercher des lieux géométriques ;
  - démontrer des propriétés.
- À partir des isométries connues, dégager la notion de déplacement et d'antidéplacement ; composer des déplacements ; définir les critères qui permettent de reconnaître des triangles isométriques.

COMMENTAIRES

• Les translations et les symétries orthogonales ont été vues dans les classes précédentes ; on récapitulera leurs propriétés à l'occasion d'exercices, sans en faire de démonstration.

• Les exercices utilisant les isométries pour la démonstration de propriétés ou pour la résolution de problèmes de construction, de recherche de lieu géométrique et d'optimisation sont souvent d'un abord délicat. Il est conseillé d'être très prudent en proposant ce type d'exercice pour une évaluation des élèves. On n'hésitera pas à donner des indications, si nécessaire.

• La classification des isométries en Première ne concerne que les isométries connues. L'étude systématique des déplacements et antidéplacements (incluant entre autres la symétrie glissée) se fera en Terminale.

• Certains ensembles de transformations étudiés dans ce chapitre ont des propriétés communes : stabilité par composition et passage à l'inverse. Ceci nous a conduit à définir la notion de groupe de transformations. Cependant, toute étude de structure algébrique est hors programme.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Translations et symétries orthogonales • Propriété caractéristique d'une translation : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$. • Nature et élément caractéristique de la composée de deux translations. • Expression analytique d'une translation. • Caractérisation d'une symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{u})$. • Nature et éléments caractéristiques de la composée de deux symétries orthogonales : – d'axes parallèles ; – d'axes sécants.	• Utiliser sa propriété caractéristique pour reconnaître une translation. • Déterminer la composée de deux translations. • Déterminer l'expression analytique d'une translation. • Déterminer l'expression analytique d'une symétrie orthogonale dans des cas simples : par rapport à une droite parallèle à l'un des axes du repère, par rapport à la première bissectrice du repère. • Déterminer l'image d'une figure par une translation ou une symétrie orthogonale simple en utilisant son expression analytique. • Déterminer la composée de deux symétries orthogonales : – d'axes parallèles ; – d'axes sécants.
Rotations • Propriété caractéristique d'une rotation d'angle $\hat{\alpha}$. • Nature et éléments caractéristiques de la composée de deux rotations de même centre. • Nature de la composée de deux rotations de centres distincts.	• Décomposer une translation ou une rotation en produit de deux symétries orthogonales. • Déterminer les éléments caractéristiques de la composée de deux rotations.
Isométries • Définitions d'une isométrie, d'un déplacement, d'un antidéplacement. • Propriétés des isométries : – conservations (produit scalaire, barycentre,...) ; – images de figures usuelles.	• Démontrer qu'une application est une isométrie. • Construire l'image d'un point, d'une figure usuelle par une isométrie. • Utiliser les isométries pour rechercher un lieu géométrique, résoudre un problème de construction, démontrer une propriété.
Compléments sur les isométries • Nature de la composée de déplacements et antidéplacements. • Critères d'isométrie de deux triangles.	• Déterminer, dans des cas simples, une isométrie connaissant un triangle et son image. • Reconnaître et démontrer une isométrie de triangles.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 65.

$t_{\overrightarrow{OA}} \circ t_{\overrightarrow{OB}} \circ t_{\overrightarrow{OC}} = \mathrm{Id} \quad \Leftrightarrow \quad t_{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}} = t_{\vec{0}}$.

$O = \mathrm{bar}\{(A;1), (B,1), (C,1)\}$; donc : O existe et est unique.

♦ **Exercice 1.b p. 65**

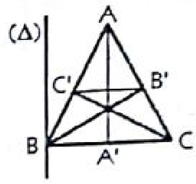
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$; donc : $t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BD}} = t_{\overrightarrow{AD}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$.

♦ **Exercice 1.c p. 65**

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AG} \quad \Rightarrow \quad t_{\overrightarrow{GB}} \circ t_{\overrightarrow{GC}}(A) = t_{\overrightarrow{AG}}(A) = G.$

On a de même : $t_{\overrightarrow{GC}} \circ t_{\overrightarrow{GA}}(B) = G$ et $t_{\overrightarrow{GA}} \circ t_{\overrightarrow{GB}}(C) = G$.

♦ **Exercice 1.d p. 65**



1. $s_{(BC)} \circ s_{(B'C')} = t_{\overrightarrow{AA'}}$.

2. Soit (Δ) la droite parallèle à (AA') passant par B. $s_{(AA')} \circ s_{\Delta}$ est une translation et $s_{(AA')} \circ s_{\Delta}(B) = C$; donc : $s_{(AA')} \circ s_{\Delta} = t_{\overrightarrow{BC}}$.

♦ **Exercice 1.e p. 65**

Les expressions analytiques des transformations s, t, t∘s et s∘t sont :

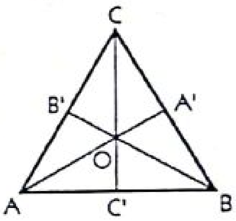
$s:\begin{cases} x' = -x-6 \\ y' = y \end{cases}$; $t:\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y+1 \end{cases}$; $t\circ s:\begin{cases} x' = -x-8 \\ y' = y+1 \end{cases}$ et $s\circ t:\begin{cases} x' = -x-4 \\ y' = y+1 \end{cases}$.

♦ **Exercice 1.f p. 65**

$t_{\overrightarrow{AD}}(AB) = (DC)$ et $t_{\overrightarrow{DC}}(AD) = (BC)$.

♦ **Exercice 2.a p. 70**

1. $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}})$ sont l'angle orienté de mesure $\frac{2\pi}{3}$. Par conséquent, $s_{(OA)} \circ s_{(OB)}$ et $s_{(OB)} \circ s_{(OC)}$ sont deux décompositions de la rotation de centre O et d'angle $-\frac{4\pi}{3}$, c'est à dire $r(O, \frac{2\pi}{3})$.



2. On en déduit : $s_{(OA)} \circ s_{(OB)} \circ s_{(OC)} = s_{(OB)} \circ s_{(OC)} \circ s_{(OC)} = s_{(OB)}$.

$s_{(OA)} \circ s_{(OB)} \circ s_{(OC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OB).

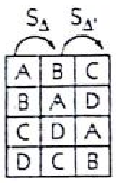
3. • $s_{(AB)} \circ s_{(AC)}$ est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

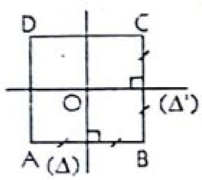
• $s_{(BC)} \circ s_{(OA)}$ est la symétrie de centre A', milieu du segment [BC].

♦ **Exercice 2.b p. 70**

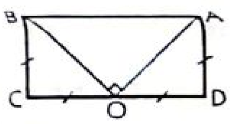
Par la transformation $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ les points A, B, C et D ont respectivement pour images C, D, A et B.

$s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ est la symétrie de centre le point O, centre du carré ABCD.





♦ **Exercice 2.c p. 70**

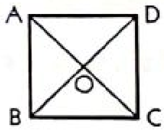


1. L'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ est droit ; donc, $s_{(OA)} \circ s_{(OB)}$ est la symétrie de centre O.

2. $s_{(OA)} \circ s_{(OD)}$ est le quart de tour direct de centre O.

3. $s_{(OC)} \circ s_{(OD)} = Id$ et $s_{(OA)} \circ s_{(OB)} \circ s_{(OC)} \circ s_{(OD)} = s_O$.

♦ **Exercice 2.d p. 70**

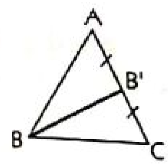


1. $r_2 \circ r_1$ est la symétrie de centre O.

2. $r_3 \circ r_1$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

3. $r_3 \circ r_2$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

♦ **Exercice 2.e p. 70**



On a : $f(C) = r(A, \frac{\pi}{3}) \circ r(B, \frac{\pi}{3})(C) = r(A, \frac{\pi}{3})(A) = A$ et $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$.

Donc, f est la symétrie de centre B', milieu du segment [AC].

♦ Exercice 2.f p. 70

Posons : $f = r(A, \frac{\pi}{2}) \circ r(B, \frac{\pi}{2}) \circ r(C, \frac{\pi}{2}) \circ r(D, \frac{\pi}{2})$.

On a : $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi$ et $f(D) = D$; donc, f est la transformation identique.

♦ Exercice 3.a p. 78

h est une isométrie ssi $k = 1$ ou $k = -1$.

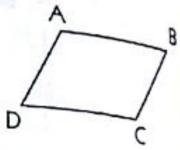
♦ Exercice 3.b p. 78

Les segments [AB], [AC] et [BC] ont respectivement pour image par la projection p : [DC], [DC] et {C}.

La projection p n'est pas une isométrie car p([BC]) n'est pas un segment de longueur non nulle BC.

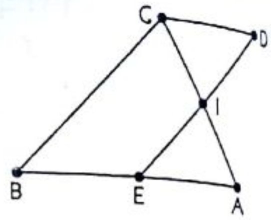
p

A	D
B	C
C	C



♦ Exercice 3.c p. 78

1. Soit s la symétrie de centre I. Elle transforme I en I, et D en E ; de plus s(C) est le point d'intersection de (IC) et de la parallèle à (CD) passant par E, c'est-à-dire s(C) = A. Donc, s(CID) = AIE.



2. D'après la question **1.**, les triangles CID et AIE ont même aire.
De plus : aire(BCDE) – aire(CID) = aire(ABC) – aire(AIE).
On en déduit : aire(BCDE) = aire(ABC).

♦ Exercice 3.d p. 78

a) Soit ABC un triangle, O son centre de gravité, A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

• Si le triangle ABC est isocèle en A, alors l'ensemble des isométries laissant invariant le triangle ABC est : $\{Id, s_{(AA')}\}$. C'est un groupe de transformations.

• Si le triangle ABC est équilatéral, alors l'ensemble des isométries laissant invariant le triangle ABC est : $\{Id, s_{(AA')}, s_{(BB')}, s_{(CC')}, r(O, \frac{2\pi}{3}), r(O, -\frac{2\pi}{3})\}$. C'est un groupe de transformations.

b) Soit ABCD un parallélogramme non carré de centre O et A', B', C', D' les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

• Si le parallélogramme ABCD n'est ni rectangle ni losange, alors l'ensemble des isométries laissant invariant le parallélogramme ABCD est : $\{Id, s_O\}$. C'est un groupe de transformations.

• Si ABCD est un rectangle, alors l'ensemble des isométries laissant invariant le rectangle ABCD est : $\{Id, s_O, s_{(\Delta)}, s_{(\Delta')}\}$, où (Δ) est la médiatrice de [AB] et (Δ') celle de [BC]. C'est un groupe de transformations.

• Si ABCD est un losange, alors l'ensemble des isométries laissant invariant le losange ABCD est : $\{Id, s_O, s_{(AC)}, s_{(BD)}\}$. C'est un groupe de transformations.

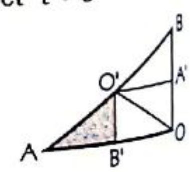
♦ Exercice 4.a p. 82

Les déplacements sont : $s \circ r \circ s$ et $s \circ t \circ s$. Les antidéplacements sont : $r \circ s \circ r^{-1}$ et $t \circ s \circ t^{-1}$.

♦ Exercice 4.b p. 82

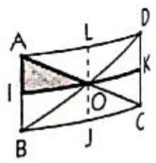
Les triangles O'B'O et AO'B' sont isométriques. On a : $S_{(O'B'O)(O'B')} = AO'B'$.

Les triangles O'A'B et AO'B' sont isométriques. On a : $t_{\overrightarrow{A'B'}}(O'A'B) = AO'B'$.



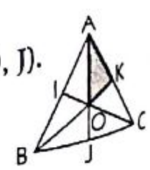
♦ Exercice 4.c p. 82

a) $t_{\overrightarrow{IJ}}(A, I, O) = (O, J, C)$ *b)* $S_{(OJ)}(A, I, O) = (D, K, O)$ *c)* $S_O(A, I, O) = (C, K, O)$.



♦ Exercice 4.d p. 82

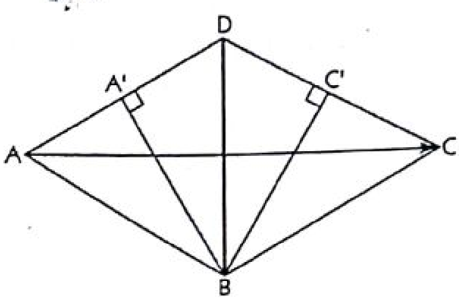
a) $S_{(OK)}(A, O, K) = (C, O, K)$ *b)* $r(O, \frac{2\pi}{3})(A, O, K) = (B, O, I)$ *c)* $S_{(OC)}(A, O, K) = (B, O, J)$.



Exercices d'entraînement

Symétries orthogonales et translations

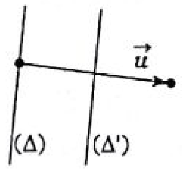
Exercice 1 p. 83



Les triangles ABD et BCD sont équilatéraux.

1. Soit A' le milieu du segment [AD], on a : $(A'B) \perp (AD)$.
   - Les droites (BC) et (AD) sont parallèles, on en déduit : $f = t_{2\overrightarrow{A'B}}$.
   - Soit C' le milieu du segment [DC], on a : $(C'B) \perp (DC)$.
   - Les droites (AB) et (DC) sont parallèles, on en déduit : $g = t_{2\overrightarrow{BC'}}$.
2. Les translations commutent, on a : $f \circ g = g \circ f = t_{2\overrightarrow{A'C'}} = t_{\overrightarrow{AC}}$.

Exercice 2 p. 83



Soit (Δ') l'image de (Δ) par $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}$.

On a : $t_{\vec{u}} = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$.

On en déduit : $t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta'}$.

Exercice 3 p. 83

La composée de n'importe quelle élément f de E avec Id donne f.

$s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta} \circ s_{\Delta'} = s_O$.

$s_O \circ s_{\Delta} = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta'}$;

$s_O \circ s_{\Delta'} = s_{\Delta} \circ s_{\Delta'} \circ s_{\Delta'} = s_{\Delta}$;

$s_{\Delta} \circ s_O = s_{\Delta} \circ s_{\Delta} \circ s_{\Delta'} = s_{\Delta'}$;

$s_{\Delta'} \circ s_O = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta}$.

On obtient ainsi le tableau ci-contre.

$\circ$	Id	s_O	s_{Δ}	$s_{\Delta'}$
Id	Id	s_O	s_{Δ}	$s_{\Delta'}$
s_O	s_O	Id	$s_{\Delta'}$	s_{Δ}
s_{Δ}	s_{Δ}	$s_{\Delta'}$	Id	s_O
$s_{\Delta'}$	$s_{\Delta'}$	s_{Δ}	s_O	Id

Commentaires

- *On dit que l'ensemble E est stable par composition et par passage à l'inverse.*
- *Chaque élément est sa propre réciproque.*

Exercice 4 p. 83

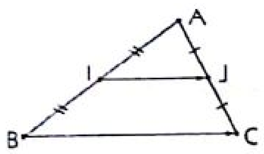
1. L'expression analytique de $t_{\vec{u}}$ est : $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2. \end{cases}$
2. Soit $M\binom{x}{y}$ un point du plan et $M'\binom{x'}{y'}$ son image par $t_{\vec{u}}$.

$M' \in (\mathscr{D}') \Leftrightarrow M \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow 2x - 3y + 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x' - 1) - 3(y' - 2) + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x' - 3y' + 8 = 0$.

La droite $(\mathscr{D}')$ a pour équation cartésienne : $2x - 3y + 8 = 0$.

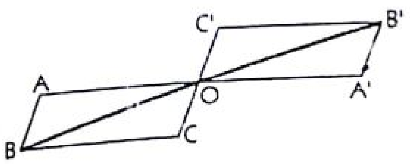
Rotations

Exercice 5 p. 83



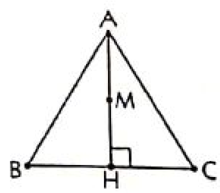
1. $s_M \circ s_N = t_{2\overrightarrow{NM}}$.
2. Soit $\vec{u}$ un vecteur, N un point du plan et M l'image de N par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$. On a : $t_{\vec{u}} = s_M \circ s_N$.
3. On a : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $t_{\overrightarrow{BC}} = s_J \circ s_I$. Donc : $t_{\overrightarrow{BC}} \circ s_I = s_J \circ s_I \circ s_I = s_J$ et $s_J \circ t_{\overrightarrow{BC}} = s_J \circ s_J \circ s_I = s_I$.

Exercice 6 p. 83



1. D'après l'exercice 5 : $s_B \circ s_A = t_{2\overrightarrow{AB}} = t_{2\overrightarrow{OC}} = s_C \circ s_O$.
2. $s_C \circ s_B \circ s_A = s_C \circ s_C \circ s_O = s_O$.
3. Voir figure ci-contre.

Exercice 7 p. 83



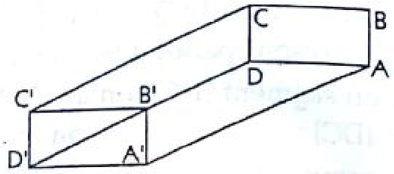
- $s_{(AB)} \circ s_{(AH)} = r(A, -\frac{\pi}{3})$.
- $s_{(BC)} \circ s_{(AH)} = s_H$.
- Soit M le milieu du segment [AH]. D'après l'exercice 5 : $t_{\overrightarrow{AH}} = s_M \circ s_A$; donc : $t_{\overrightarrow{AH}} \circ s_A = s_M$.

♦ Exercice 8 p. 83

1. Les expressions analytiques de $s_{(OI)}$ et s_Δ sont : $s_{(OI)} : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ et $s_\Delta : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

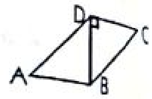
2. On sait que : $r = s_\Delta \circ s_{(OI)}$.
On en déduit l'expression analytique de r : $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$.

♦ Exercice 9 p. 83



1. $s_{(DA)} \circ s_{(CD)} \circ s_{(BC)} \circ s_{(AB)} = s_D \circ s_B = t_{2\overrightarrow{BD}}$.
2. Voir figure ci-contre.

♦ Exercice 10 p. 83

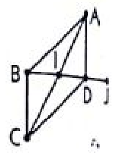


On a : $s_{(AB)} \circ s_{(DC)} = t_{2\overrightarrow{DB}}$ et $s_B \circ s_D = t_{2\overrightarrow{DB}}$. Donc : $s_{(AB)} \circ s_{(DC)} = s_B \circ s_D$.

♦ Exercice 11 p. 83

a) $s_{(AD)} \circ s_A \circ s_{(AB)} = s_{(AD)} \circ s_{(AD)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AB)} = \mathrm{Id}$.
b) $s_{(CD)} \circ s_A \circ s_{(AB)} = s_{(CD)} \circ s_{(AD)} \circ s_{(AB)} \circ s_{(AB)} = s_{(CD)} \circ s_{(AD)} = s_D$.
c) $s_{(AD)} \circ s_C \circ s_{(AB)} = s_{(AD)} \circ s_{(CD)} \circ s_{(BC)} \circ s_{(AB)} = s_D \circ s_B = t_{2\overrightarrow{BD}}$.

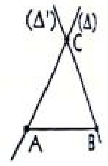
♦ Exercice 12 p. 83



1. Soit I le milieu de [BD] et J le symétrique de I par rapport à (AD).
Le triangle AIJ est équilatéral de sens direct.

2. • $f = s_{(AC)} \circ s_{(AD)} = r(A, -\frac{\pi}{3})$ • $g = s_{(BD)} \circ s_{(AC)} = r(I, -\frac{2\pi}{3})$.
• $g \circ f = s_{(BD)} \circ s_{(AC)} \circ s_{(AC)} \circ s_{(AD)} = s_{(BD)} \circ s_{(AD)} = r(D, -\pi) = s_D$.

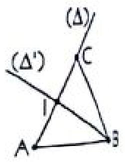
♦ Exercice 13 p. 83



Soit C le point tel que le triangle ABC soit équilatéral de sens direct.
Posons : $(\Delta) = (AC)$ et $(\Delta') = (BC)$.

1. $r(A, -\frac{2\pi}{3}) = s_{(AB)} \circ s_\Delta$ 2. $r'\left(B, -\frac{2\pi}{3}\right) = s_{(\Delta')} \circ s_{(AB)}$ 3. $r' \circ r = s_{\Delta'} \circ s_\Delta = r\left(C, \frac{2\pi}{3}\right)$.

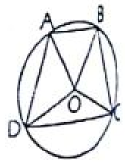
♦ Exercice 14 p. 83



Soit C le point tel que le triangle ABC soit équilatéral de sens direct et (Δ') la hauteur issue de B. On désigne par (Δ) la droite (AC) et par I le milieu de [AC].

1. $r\left(A, \frac{2\pi}{3}\right) = s_{(\Delta)} \circ s_{(AB)}$ 2. $r'\left(B, \frac{\pi}{3}\right) = s_{(AB)} \circ s_{(\Delta')}$ 3. $r \circ r' = s_{(\Delta)} \circ s_{(\Delta')} = s_I$.

♦ Exercice 15 p. 84



On a : $s_{(OA)} \circ s_{(OB)} = r\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$ et $s_{(OC)} \circ s_{(OD)} = r\left(O, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

Donc : $s_{(OA)} \circ s_{(OB)} \circ s_{(OC)} \circ s_{(OD)} = \mathrm{Id}$.

ISOMÉTRIES

♦ Exercice 16 p. 84

Les isométries conservent les distances, l'orthogonalité et le parallélisme. Ainsi par une isométrie l'image d'un quadrilatère ayant ses côtés opposés de même longueur est un quadrilatère ayant ses côtés opposés de même longueur ;
l'image d'un quadrilatère ayant ses quatre côtés de même longueur est un quadrilatère ayant ses quatre côtés de même longueur ;
l'image d'un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires est un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires. On en déduit que : l'image d'un carré est un carré ; l'image d'un rectangle est un rectangle ; l'image d'un losange est un losange.

♦ Exercice 17 p. 84

1. Toutes les symétries dont l'axe passe par O laissent globalement invariant tout cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.
2. Toutes les rotations de centre O laissent globalement invariant tout cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.

♦ Exercice 18 p. 84

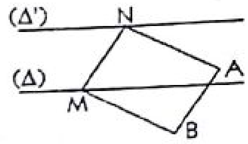
a) Les isométries qui laissent globalement invariant le pentagone ABCDE sont :

Id ; $r\left(O, \frac{2\pi}{5}\right)$; $r\left(O, \frac{4\pi}{5}\right)$; $r\left(A, -\frac{2\pi}{3}\right)$; $r\left(O, -\frac{4\pi}{5}\right)$; $s_{(AA')}$; $s_{(BB')}$; $s_{(CC')}$; $s_{(DD')}$; $s_{(EE')}$.

b) Les isométries qui laissent globalement invariant l'hexagone FGHIJK sont :

Id : $r\left(O', \frac{\pi}{3}\right)$; $r\left(O', \frac{2\pi}{3}\right)$; $r\left(O', -\frac{\pi}{3}\right)$; $r\left(O', -\frac{2\pi}{3}\right)$; $s_{O'}$; $s_{(GJ)}$; $s_{(HK)}$; $s_{(IF)}$; $s_{(G'J')}$; $s_{(H'K')}$; $s_{(I'F')}$.

♦ Exercice 19 p. 84

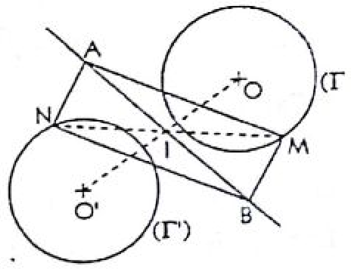


1. NABM est un parallélogramme $\Leftrightarrow \begin{cases}(NM) // (AB)\\(NA) // (BM)\end{cases}$.

2. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow N = t_{\overrightarrow{BA}}(M)$.

Le lieu de N lorsque M décrit (Δ) est la droite (Δ'), image de (Δ) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

♦ Exercice 20 p. 84

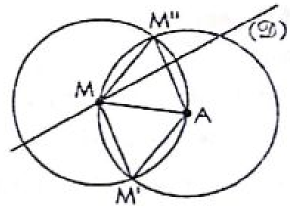


1. NABM est un parallélogramme $\Leftrightarrow \begin{cases}(AN) // (BM)\\(NB) // (AM)\end{cases}$.

2. Soit I le milieu de [AB]. On a : $N = S_I(M)$.

Le lieu de N lorsque M décrit (Γ) est le cercle (Γ'), image de (Γ) par la symétrie de centre I.

♦ Exercice 21 p. 84

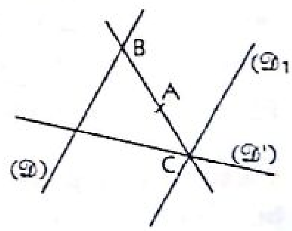


Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. On remarque que : $r' = r^{-1}$.

On a : M' = r(M) ; donc le lieu de M' lorsque M décrit (𝒟) est la droite (𝒟'), image de (𝒟) par la rotation r.

On a : M'' = r'(M) ; donc le lieu de M'' lorsque M décrit (𝒟) est la droite (𝒟''), image de (𝒟) par la rotation r'.

♦ Exercice 22 p. 84



$\begin{cases}B \in (\mathscr{D})\\S_A(B) = C\end{cases} \Rightarrow C \in S_A(\mathscr{D})$.

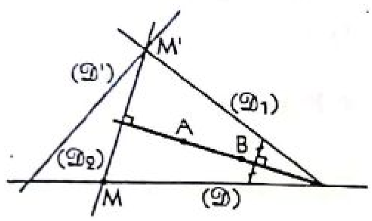
Donc, C est le point d'intersection de $S_A(\mathscr{D})$ et (𝒟').

Programme de construction

Construire la droite $(\mathscr{D}_1)$, image de (𝒟) par la symétrie S_A ;

C est le point d'intersection de $(\mathscr{D}_1)$ et (𝒟') ; B est le point d'intersection de (𝒟) et (AC).

♦ Exercice 23 p. 84



$\begin{cases}AM = AM'\\BM = BM'\end{cases} \Leftrightarrow$ (AB) est la médiatrice de [MM'].

On a : $M \in (\mathscr{D}) \Rightarrow M' \in S_{(AB)}(\mathscr{D})$.

Donc, M' est le point d'intersection de $S_{(AB)}(\mathscr{D})$ et (𝒟').

Programme de construction

- Construire la droite $(\mathscr{D}_1)$, image de (𝒟) par la symétrie $S_{(AB)}$;

M' est le point d'intersection de $(\mathscr{D}_1)$ et (𝒟') ;

- construire la perpendiculaire $(\mathscr{D}_2)$ à (AB) passant par M' ;

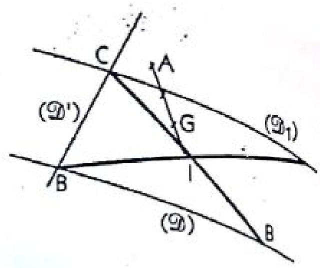
M est le point d'intersection de $(\mathscr{D}_2)$ et (𝒟).

♦ Exercice 24 p. 84

Soit I le milieu de [BC].

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

I milieu de [BC] $\Leftrightarrow S_I(B) = C$.
$B \in (\mathcal{D}) \;\Rightarrow\; C \in S_I(\mathcal{D})$.
Donc, C est le point d'intersection de $S_I(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

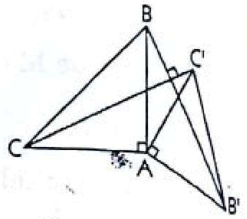


Programme de construction

- Construire le point I tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AG}$;
- contruire la droite $(\mathcal{D}_1)$, image de $(\mathcal{D})$ par la symétrie S_I ;

C est le point d'intersection de $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}')$;
B est le point d'intersection de $(\mathcal{D})$ et (IC).

♦ Exercice 25 p. 84

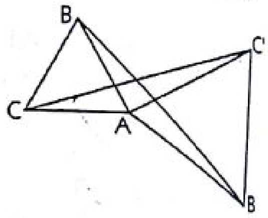


Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On a : $r(B) = C$ et $r(B') = C'$.

Donc : $BB' = CC'$ et mes $(\widehat{\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'}}) = \frac{\pi}{2}$.

♦ Exercice 26 p. 84

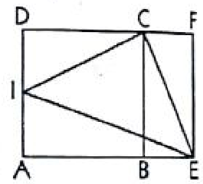


Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a : $r(B) = C$ et $r(B') = C'$.

Donc : $BB' = CC'$ et mes $(\widehat{\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'}}) = \frac{\pi}{3}$.

♦ Exercice 27 p. 84



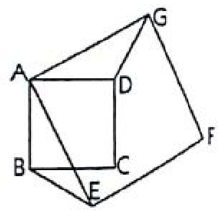
Soit r le quart de tour direct de centre C.

On a : $r(D) = B$; donc : $r([DI]) = [BE]$.

De plus : $DI = BE$; donc : $r(I) = E$.

On en déduit que le triangle ICE est isocèle et rectangle en C.

♦ Exercice 28 p. 84

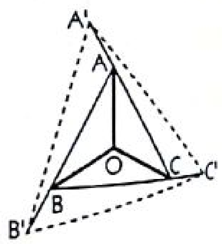


Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On a : $r(B) = D$ et $r(E) = G$.

$BE = DG$ et mes $(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{DG}}) = \frac{\pi}{2}$.

♦ Exercice 29 p. 84



Soit O le centre du triangle ABC.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

- On a : $r(C) = A$ et mes $(\widehat{\overrightarrow{CA'},\overrightarrow{AB'}}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$;

donc : $r([CA']) = [AB']$.

De plus : $AA' = BB'$; donc : $r(A') = B'$.

- On montre de la même façon que : $r(B') = C'$ et $r(C') = A'$.

Donc, A'B'C' est un triangle équilatéral de sens direct.

♦ Exercice 30 p. 84

On a : $r \circ r = s_O$ et $(s_O)^{-1} = s_O$. Donc : $r \circ r(A') = A$ et $r(A') = r^{-1}(A) = C$.

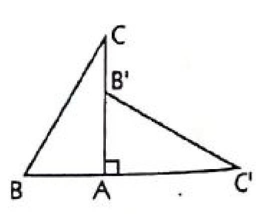
On en déduit : $A'B = CD$ et mes $(\widehat{\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{CD}}) = \frac{\pi}{2}$.

♦ Exercice 31 p. 84

Soit r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On a : $r(B) = B'$ et $r(C) = C'$.

Donc : $BC = B'C'$ et mes $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{B'C'}}) = -\frac{\pi}{2}$.



Exercice 32 p. 84

1. Les triangles PQR et SRT vérifient le second critère d'isométrie et sont orientés dans le même sens ; ils sont donc directement superposables.

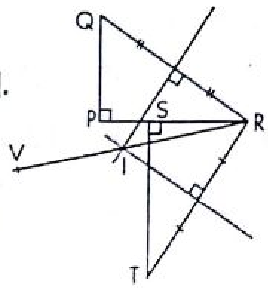
On a :

$$\begin{array}{c} \overset{r}{\curvearrowright} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline S & P \\ \hline R & Q \\ \hline T & R \\ \hline \end{array} \end{array}$$

L'angle de la rotation r est $(\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{PR})$ qui a pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

Soit I le centre de la rotation r.

I est le point d'intersection des médiatrices des segments [QR] et [RT].



2. On a : $s_I(R) = V$; donc : $s_I(V) = R$; c'est-à-dire : $r \circ r(V) = R$.

On en déduit : $r(V) = r^{-1}(R) = T$.

• D'après la question 1 : $r(S) = P$.

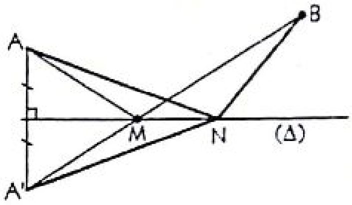
• On a : $r(Q) = r \circ r(R) = s_I(R) = V$.

L'image du triangle VSQ par la rotation r est le triangle TPV.

Exercices d'approfondissement

Exercice 33 p. 85

Soit A' le symétrique de A par rapport à (Δ) et M le point d'intersection des droites (Δ) et (A'B).



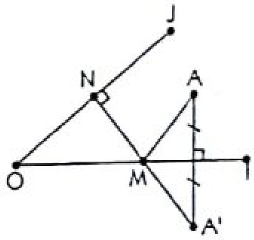
On a : AM + MB = A'M + MB = A'B.

Le trajet AM + MB est minimal. En effet, soit N un autre point de (Δ). Dans le triangle A'BN, on a : A'B < A'N + NB ;

c'est-à-dire : AM + MB < AN + NB.

Exercice 34 p. 85

Soit A' le symétrique de A par rapport à (OI).



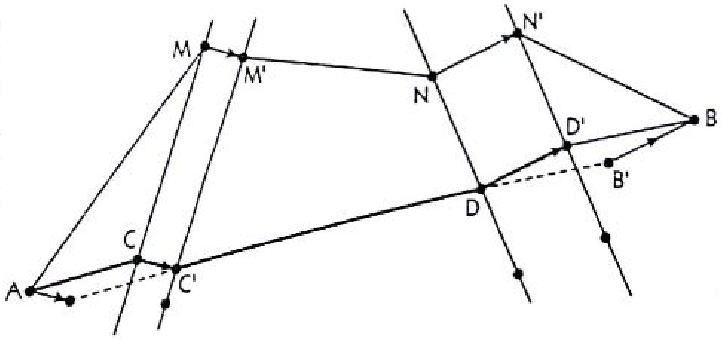
On a : AM + MN = A'M + MN.

Cette somme est minimale si M appartient au segment [A'N].

On construit donc le projeté orthogonal N de A' sur [OJ) ; M est le point d'intersection du segment [A'N] et de la demi-droite [OI).

Exercice 35 p. 85

Chaque pont détermine un vecteur. Soit A' l'image de A par la translation correspondant au premier bras, B' l'antécédent de B par la translation correspondant au second bras et C', D les points d'intersections respectifs du segment [A'B'] avec les intérieurs du premier et du second bras. Pour tout trajet AMM'NN'B, on a :



AM + M'N + N'B = A'M' + M'N + NB'.

Donc, d'après l'inégalité triangulaire :

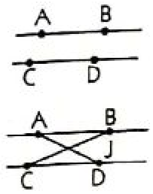
AM + M'N + N'B ≥ A'B'.

De plus, la somme MM' + NN' est constante ;

le trajet minimal est donc : ACC'DD'B.

Exercice 36 p. 85

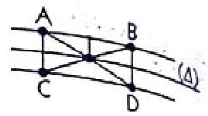
1. Si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont soit égaux soit opposés.



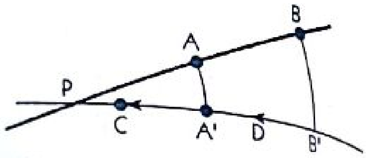
• S'ils sont égaux, on peut prendre : $f = t_{\overrightarrow{AC}}$

• S'ils sont opposés, on peut prendre : $f = S_J$, où J est le milieu de [AC].

2. Si [AB] et [CD] ont même milieu I, alors le quadrilatère ACBD est un rectangle. On peut prendre : $f = S_{(\Delta)}$, où (Δ) est la parallèle à (AD) passant par I.



3. Si (AB) et (CD) sont deux droites sécantes en un point P, alors on considère la rotation r de centre P et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$ et le point A', image de A par r. On peut prendre : $f = t_{\overrightarrow{A'C}} \circ r$.



♦ Exercice 37 p. 85

On a : $s_A(A) = A$, $r''(A) = C$, $r'(C) = C$ et $r(C) = A$.
Le point A est donc un point invariant de f.
f est une composée de rotations, c'est donc soit une rotation soit une translation.

- Si γ est l'angle nul, alors f est l'identité.
- Si γ n'est pas l'angle nul, alors f est la rotation de centre A et d'angle γ.

♦ Exercice 38 p. 85

1. Soit I le point d'intersection des demi-droites [AC) et [BD).

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}})$ mesure $\frac{\pi}{6}$; donc : $f = r(I, \frac{\pi}{3})$.

2. Soit J le point d'intersection des demi-droites [AB) et [CD).

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JC}})$ mesure $-\frac{\pi}{6}$; donc : $g = r(J, -\frac{\pi}{3})$.

3. La symétrie s d'axe (AD) transforme [AC) en [AB) et [BD) en [CD), donc I en J. Le triangle AIJ est isocèle en A et mes $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$; donc AIJ est équilatéral.

On a : $g \circ f = r(J, -\frac{\pi}{3}) \circ r(I, \frac{\pi}{3})$ et $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$;

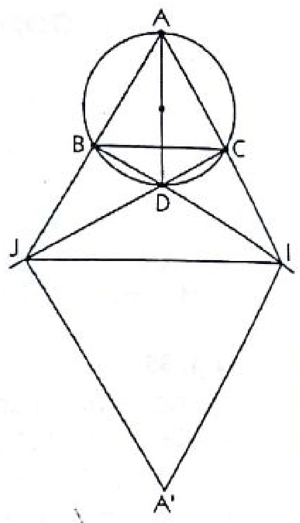
donc, $g \circ f$ est une translation ou l'identité.

Soit A' le point tel que IJA' soit équilatéral direct.

On a : $g \circ f(I) = r(J, -\frac{\pi}{3})(I) = A$; donc : $g \circ f = t_{\overrightarrow{IA}}$.

De même $f \circ g$ est une translation ou l'identité.

On a : $f \circ g(J) = r(I, \frac{\pi}{3})(J) = A'$; donc : $f \circ g = t_{\overrightarrow{JA'}}$.



♦ Exercice 39 p. 85

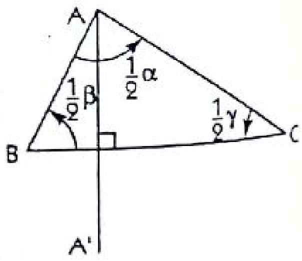
On a : $2\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + 2\,(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) + 2\,(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \hat{0}$.

On en déduit que $r(A, \alpha) \circ r'(B, \beta) \circ r''(C, \gamma)$ est une translation ou l'identité.

Soit A' le symétrique de A par rapport à (BC).

On a : $r''(A) = A'$, $r'(A') = A$ et $r(A) = A$.

Donc, $r(A, \alpha) \circ r'(B, \beta) \circ r''(C, \gamma)$ est l'identité.



♦ Exercice 40 p. 85

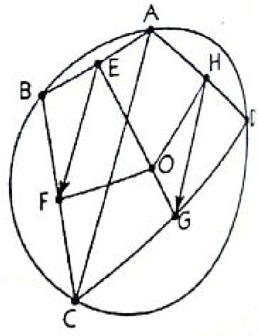
1. *a)* Appliquons le théorème des milieux aux triangles ABC et ACD :

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HG}$; donc EFGH est un parallélogramme.

b) $s_E \circ s_F \circ s_G \circ s_H = t_{2\overrightarrow{FE}} \circ t_{2\overrightarrow{HG}} = t_{2(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{HG})} = Id$.

2. *a)* O est équidistant des points A, B, C et D ; c'est donc le point de concours des médiatrices des côtés du quadrilatère ABCD.

b) $s_{(OE)} \circ s_{(OF)} \circ s_{(OG)} \circ s_{(OH)}$ est une rotation (composée de rotations de même centre) qui laisse invariant les points O et A ; c'est donc l'identité.



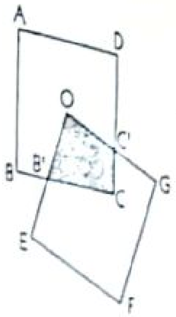
Exercice 41 p. 85

Soit r le quart de tour direct de centre O,

B' le point d'intersection des segments [BC] et [OE].

C' le point d'intersection des segments [CD] et [OG].

Le triangle OB'C a pour image par r le triangle OC'D ;



donc : Aire(OB'C) = Aire(OC'D).

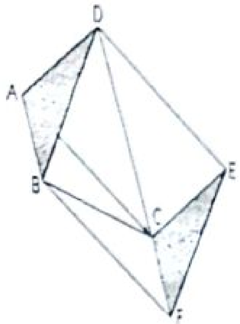
On a : Aire(OB'CC') = Aire(OB'C) + Aire(OCC')

= Aire(OC'D) + Aire(OCC')

= Aire(OCD) = a^2.

Exercice 42 p. 85

La translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ applique le triplet (A,B,D) sur le triplet (C,F,E) ; donc : Aire(ABD) = Aire(CEF).



On a : Aire(BDEF) = Aire(BCD) + Aire(ECF) + Aire(CED) + Aire(CFB)

Or : Aire(ECF) = Aire(BAD) ; Aire(CED) = Aire(ADC) ;

Aire(CFB) = Aire(ABC).

Donc : Aire(BDEF) = Aire(BCD) + Aire(BAD) + Aire(ADC) + Aire(ABC)

= Aire(ABCD) + Aire(ABCD) = 2Aire(ABCD).

Exercice 43 p. 85

1. Soit s une symétrie orthogonale laissant globalement invariant le triangle ABC. La symétrie s conserve l'isobarycentre, donc O est invariant par s ; ainsi O appartient à l'axe de s. L'image d'un sommet est un sommet, le point A a donc pour image soit A, soit B, soit C ; ces trois cas correspondent respectivement à $s = s_{(OA)}$, $s = s_{(OC)}$ et $s = s_{(OB)}$.

2. Soit f une rotation laissant globalement invariant le triangle ABC. La rotation f conserve l'isobarycentre, donc O est invariant par f ; ainsi O est le centre de f (si f ≠ Id). L'image d'un sommet est un sommet, le point A a donc pour image soit A, soit B, soit C ; ces trois cas correspondent respectivement à f = Id, f = r et $f = r^{-1}$.

$\circ$	Id	r	r^{-1}	$s_{(OA)}$	$s_{(OB)}$	$s_{(OC)}$
Id	Id	r	r^{-1}	$s_{(OA)}$	$s_{(OB)}$	$s_{(OC)}$
r	r	r^{-1}	Id	$s_{(OC)}$	$s_{(OA)}$	$s_{(OB)}$
r^{-1}	r^{-1}	Id	r	$s_{(OB)}$	$s_{(OC)}$	$s_{(OA)}$
$s_{(OA)}$	$s_{(OA)}$	$s_{(OB)}$	$s_{(OC)}$	Id	r	r^{-1}
$s_{(OB)}$	$s_{(OB)}$	$s_{(OC)}$	$s_{(OA)}$	r^{-1}	Id	r
$s_{(OC)}$	$s_{(OC)}$	$s_{(OA)}$	$s_{(OB)}$	r	r^{-1}	Id

3. D'après le tableau ci-joint (E) est stable par composition et par passage à l'inverse, c'est donc un groupe de transformations du plan.

Commentaire

Il conviendra de signaler que (E) est en fait le groupe des isométries du triangle équilatéral ABC.

Exercice 44 p. 86

1. Soit s une symétrie orthogonale laissant globalement invariant le carré ABCD. La symétrie s conserve l'isobarycentre, donc O est invariant par s ; ainsi O appartient à l'axe de s. L'image d'un sommet est un sommet, le point A a donc pour image soit A, soit B, soit C, soit D ; ces quatre cas correspondent respectivement à $s = s_{(AC)}$, $s = s_{\Delta}$, $s = s_{(BD)}$ et $s = s_{\Delta'}$.

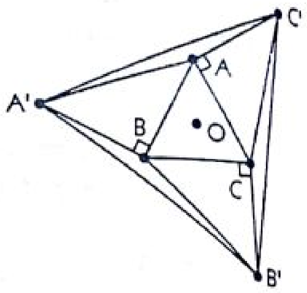
$\circ$	Id	r	r^{-1}	s_O	s_{Δ}	$s_{\Delta'}$	$s_{(AC)}$	$s_{(BD)}$
Id	Id	r	r^{-1}	s_O	s_{Δ}	$s_{\Delta'}$	$s_{(AC)}$	$s_{(BD)}$
r	r	s_O	Id	r^{-1}	$s_{(BD)}$	$s_{(AC)}$	s_{Δ}	$s_{\Delta'}$
r^{-1}	r^{-1}	Id	s_O	r	$s_{(AC)}$	$s_{(BD)}$	$s_{\Delta'}$	s_{Δ}
s_O	s_O	r^{-1}	r	Id	$s_{\Delta'}$	s_{Δ}	$s_{(BD)}$	$s_{(AC)}$
s_{Δ}	s_{Δ}	$s_{(AC)}$	$s_{(BD)}$	$s_{\Delta'}$	Id	s_O	r	r^{-1}
$s_{\Delta'}$	$s_{\Delta'}$	$s_{(BD)}$	$s_{(AC)}$	s_{Δ}	s_O	Id	r^{-1}	r
$s_{(AC)}$	$s_{(AC)}$	$s_{\Delta'}$	s_{Δ}	$s_{(BD)}$	r^{-1}	r	Id	s_O
$s_{(BD)}$	$s_{(BD)}$	s_{Δ}	$s_{\Delta'}$	$s_{(AC)}$	r	r^{-1}	s_O	Id

2. Soit f une rotation laissant globalement invariant le carré ABCD. La rotation f conserve l'isobarycentre, donc O est invariant par f ; ainsi O est le centre de f (si f ≠ Id). L'image d'un sommet est un sommet, le point A a pour image soit A, soit B, soit C ,soit D ; ces quatre cas correspondent respectivement à f = Id, f = r, f = s_O et f = r^{-1}.

3. D'après le tableau ci-joint (E) est stable par composition et par passage à l'inverse, c'est donc un groupe transformations.

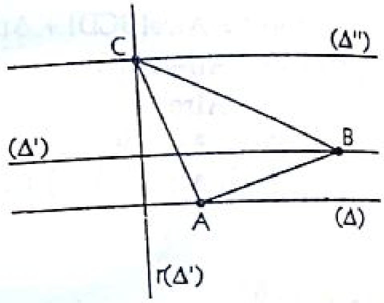
Commentaire
Il conviendra de signaler que (E) est en fait le groupe des isométries du carré.

♦ **Exercice 45 p. 86**



Les triangles ACC', BAA', et CBB' sont directement superposables.
Soit O le centre de gravité du triangle ABC et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
r conserve les angles orientés et r([AC]) = [BA], on en déduit : r([AC']) = [BA'] ;
or : BA' = AC', donc : r(C') = A'.
De même : r(A') = B' et r(B') = C'.
Le triangle A'B'C' est donc équilatéral de sens direct.

♦ **Exercice 46 p. 86**



• On choisit un point A quelconque sur la droite (Δ).
On considère la rotation : $r = r(A, \frac{\pi}{2})$.
• On construit l'image de (Δ') par r.
Les droites r(Δ') et (Δ'') se coupent au point C.
On a : $B = r^{-1}(C)$.

♦ **Exercice 47 p. 86**
Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
1. Le triangle recherché peut être direct ou indirect.
• S'il est direct, alors C = r(B). Le point C appartient à l'intersection des cercles (𝒞') et r(𝒞) et B est l'ar cédent de C par r. On obtient alors les triangles ABC et AB'C' construits sur la figure 1.
• S'il est indirect, alors $C = r^{-1}(B)$. Le point C appartient à l'intersection des cercles (𝒞') et r^{-1}(𝒞) et B l'image de C par r. On obtient alors les deux autres triangles équilatéraux construits sur la figure 1.
Il y a donc en tout quatre triangles solutions.
2. Le triangle recherché peut être direct ou indirect.
• S'il est direct, alors C = r(B). Le point C appartient à l'intersection des cercles (𝒞') et r(𝒞') et B est l'ai cédent de C par r. On obtient alors les triangles ABC et AB'C' construits sur la figure 2.
• S'il est indirect, alors B = r(C). Le point B appartient à l'intersection des cercles (𝒞') et r(𝒞') et C est l técédent de B par r. On obtient alors les mêmes triangles.
Il y a donc deux triangles solutions.

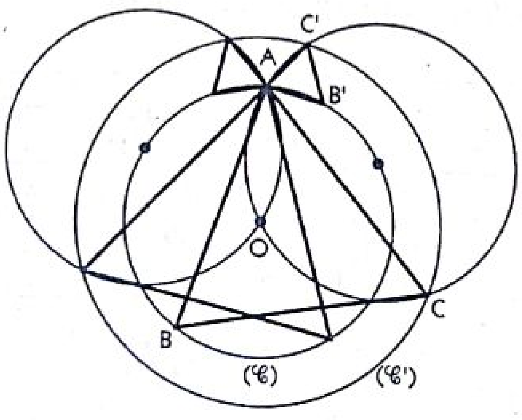


figure 1

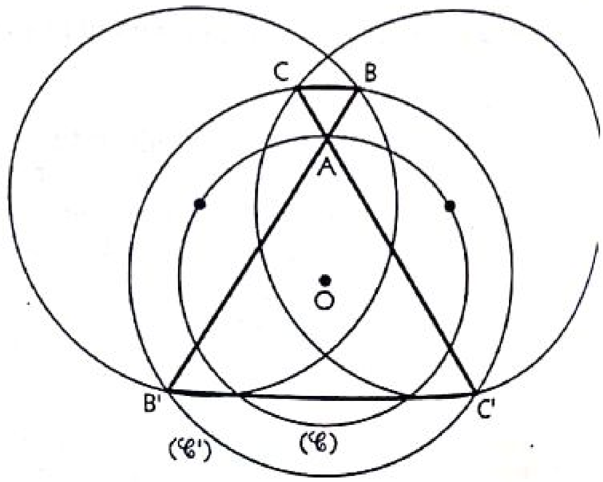
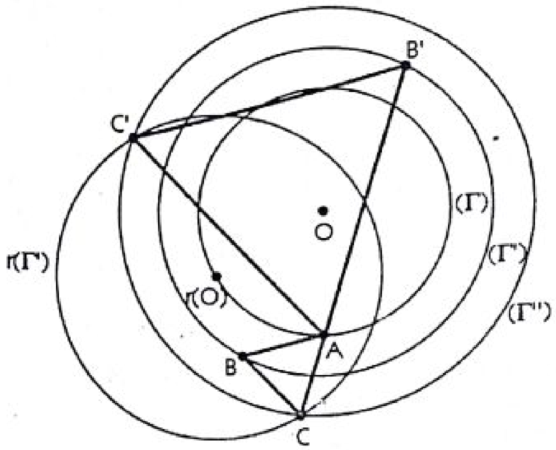


figure 2

♦ **Exercice 48 p. 86**
• On choisit un point A sur le cercle (Γ).
• On construit l'image de (Γ) par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Les cercles $r(\Gamma')$ et (Γ'') se coupent en deux ponts C et C'.
On prend : $B = r^{-1}(C)$ et $B' = r^{-1}(C')$.
Il y a donc deux triangles solutions ABC et AB'C'.



♦ Exercice 49 p. 86

Soit N l'image de M par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
La rotation r applique (A,M,B) sur (A,N,C).

Donc, le triangle AMN est équilatéral et : $(\widehat{\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CA}}) = (\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}})$.

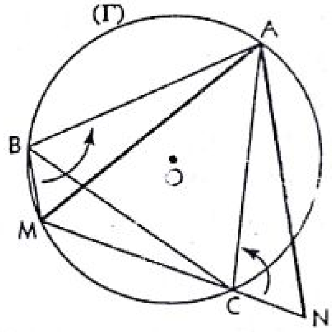
Les angles inscrits $\widehat{ABM}$ et $\widehat{ACM}$ sont supplémentaires ;

donc : $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}}) + (\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}}) = \hat{\pi}$.

On en déduit que : $(\widehat{\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CA}}) = \hat{\pi} - (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}})$.

Donc, le point C appartient au segment [MN].

On a : BM + MC = CN + MC = MN = MA.



♦ Exercice 50 p. 86

• Si le triangle IJK n'est pas rectangle en K (figure 1) :
- on choisit un point A sur la droite (IJ) ;
- on construit l'image de (JK) par le quart de tour direct r de centre A ;
- les droites r[(JK)] et (IK) se coupent au point C. On prend : $B = r^{-1}(C)$.

• Si le triangle IJK est rectangle en K (figure 2), alors la bissectrice issue de K coupe (IJ) au point A. B et C sont les projetés orthogonaux de A respectivement sur (KJ) et (KI).

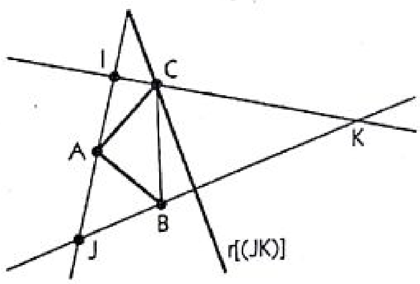


figure 1

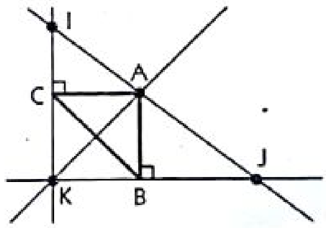


figure 2

♦ Exercice 51 p. 86

1. a) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{OI}$.

La droite (OI) est la médiatrice de [BC] ; donc : $(AM) \perp (BC)$.

b) On a de même : $(BM) \perp (AC)$ et $(CM) \perp (AB)$.

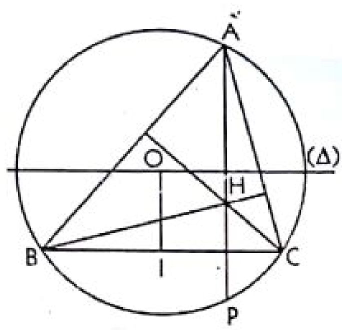
Donc, M est l'orthocentre du triangle ABC.

2. a) $f(P) = t_{\overrightarrow{HA}}(s_{(BC)}(P)) = t_{\overrightarrow{HA}}(H) = A$.

b) D'après **1.a** : $\overrightarrow{HA} = 2\,\overrightarrow{IO}$.

Soit (Δ) la parallèle à (BC) passant par O ; on a : $t_{\overrightarrow{HA}} = s_\Delta \circ s_{(BC)}$.

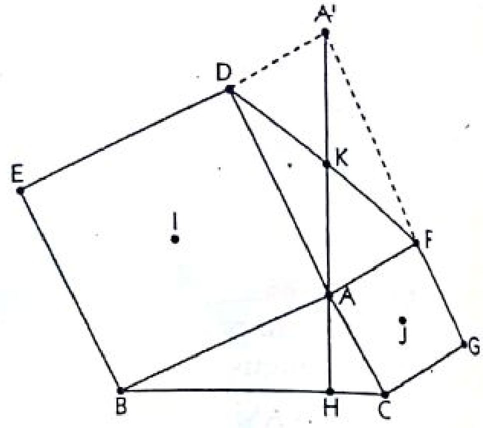
c) On déduit de *a)* et *b)* que : $f = s_\Delta$.



Or le cercle (Γ) est globalement invariant par s_Δ ; donc P appartient au cercle (Γ).

Nous venons d'établir la théorème suivant : « *Dans un triangle, le symétrique de l'orthocentre par rapport à l'un des côtés appartient au cercle circonscrit.* »

♦ Exercice 52 p. 86



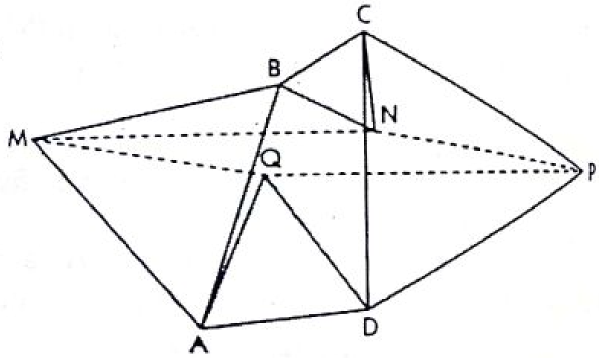
1. $r \circ r'$ est la composée de deux quarts de tour directs, c'est donc une symétrie centrale. De plus, $r \circ r'(F) = D$; donc : $r \circ r' = s_K$.
$r'^{-1} \circ r^{-1}$ est la composée de deux quarts de tour indirects ; c'est donc une symétrie centrale.
De plus : $r'^{-1} \circ r^{-1}(D) = F$; donc : $r'^{-1} \circ r^{-1} = s_K$.

2. L'image de (AH) par r' est perpendiculaire à (AH) et passe par $r'(A) = C$; donc : $r(AH) = (BC)$.
De même : $r(BC) = (AH)$.
On a ainsi : $s_K(AH) = (AH)$;
donc les points A, H et K sont alignés.

3. On a : $r \circ r'(A) = A' \Leftrightarrow r(C) = A'$.
La rotation r applique (C,E) sur (A',B) ; donc : $(EC) \perp (A'B)$.
On a : $r'^{-1} \circ r^{-1}(A) = A' \Leftrightarrow r'^{-1}(B) = A'$.
La rotation r'^{-1} applique (B,G) sur (A',C) ; donc : $(BG) \perp (A'C)$.

4. Les droites (EC), (BG) et (AH) sont les trois hauteurs du triangle A'BC ; elles sont donc concourantes.

♦ Exercice 53 p. 86



Soit r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a : $r_1^{-1}(M) = B$ et $r_2(B) = N$; donc : $r_2 \circ r_1^{-1}(M) = N$.
$r_1^{-1}(Q) = D$ et $r_2(D) = P$; donc : $r_2 \circ r_1^{-1}(Q) = P$.

Or $r_2 \circ r_1^{-1}$ est une translation ; donc : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$
On en déduit que MNPQ est un parallélogramme.

5. Homothéties

(pages 87 à 106 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise à :
- consolider les connaissances sur les homothéties vues en Seconde ;
- étudier la composée de deux homothéties, la composée d'une homothétie et d'une isométrie ;
- utiliser des homothéties dans la résolution de problèmes de constructions, de recherche de lieux géométriques ou dans la démonstration de propriétés.

Commentaires

Ce chapitre doit être traité après celui des isométries et celui du barycentre.
L'homothétie a été vue en Seconde au niveau 1 (définition, construction d'images de points et de figures). Le programme de Première indique que l'on doit poursuivre cette étude au niveau 2.
- L'assimilation des propriétés rappelées dans la première leçon est indispensable pour la suite, mais elle est facilitée par l'analogie avec les propriétés des isométries.
- L'expression analytique est un outil puissant pour reconnaître une homothétie. Cependant, l'essentiel de l'étude des homothéties sera consacré à l'aspect géométrique de ces transformations.
- Les exercices utilisant les homothéties pour la démonstration de propriétés ou pour la résolution de problèmes de construction, de recherche de lieu géométrique et d'optimisation sont souvent d'un abord délicat. Il est conseillé d'être très prudent en proposant ce type d'exercices pour une évaluation des élèves. On n'hésitera pas à donner des indications, si nécessaire.
- L'étude des similitudes n'est pas au programme de Première. Le seul usage qu'on peut en faire, et sans excès, doit être la recherche d'images de figures simples ou la détermination de critères de similitude de deux triangles. En particulier, si on peut se permettre de déterminer les éléments caractéristiques de la composée de deux homothéties ou d'une homothétie et d'une translation, il ne saurait en être question pour la composée d'une homothétie et d'une rotation, ou d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Les homothéties et leurs utilisations • L'homothétie est une transformation. • Nature et éléments caractéristiques de la réciproque d'une homothétie. • Propriété caractéristique. • Expression analytique d'une homothétie. • Images de figures simples • Conservation : – du barycentre ; – du contact.	• Reconnaître une homothétie à partir de la propriété caractéristique. • Dans des cas simples, utiliser les propriétés des homothéties pour résoudre un problème de construction, de recherche de lieu géométrique ou pour démontrer une propriété. • Déterminer l'expression analytique d'une homothétie. • Reconnaître une homothétie et ses éléments caractéristiques à partir de son expression analytique. • Déterminer l'image d'un point ou d'une figure par une homothétie en utilisant son expression analytique.
Composition d'homothéties et d'isométrie • Nature de la composée : – de deux homothéties ; – d'une homothétie et d'une translation. • Triangles semblables.	• Déterminer les éléments caractéristiques de la composée : – de deux homothéties ; – d'une homothétie et d'une translation. • Déterminer l'image d'un point ou d'une figure par la composée : – de deux homothéties ; – d'une homothétie et d'une translation.

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 95

1. L'homothétie a pour centre G, centre de gravité de ABC, et pour rapport $-\frac{1}{2}$.

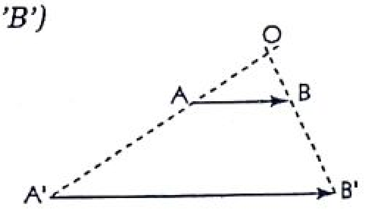
2. L'homothétie conserve le centre de gravité ; donc le centre de gravité du triangle A'B'C' est l'image par h du centre de gravité G du triangle ABC. Or : h(G) = G ; donc les triangles ABC et A'B'C' ont même centre de gravité.

♦ Exercice 1.b p. 95

1. $\overrightarrow{A'B'} = 3\overrightarrow{AB}$. Donc, il existe une homothétie de rapport 3 transformant A en A' et B en B'.

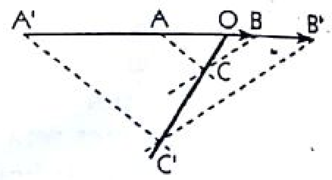
Construisons son centre O :

a) $(AB) \neq (A'B')$



• Si $(A'B') \neq (AB)$, alors O est le point d'intersection des droites (AA') et (BB').

b) $(AB) = (A'B')$

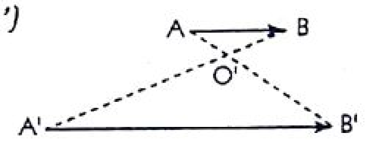


• Si (A'B') = (AB), on utilise un point intermédiaire C et son image C'. O est le point d'intersection des droites (AB) et (CC').

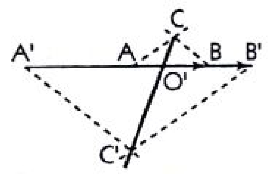
2. $\overrightarrow{A'B'} = -3\overrightarrow{AB}$. Donc, il existe une homothétie de rapport – 3 transformant A en B' et B en A'.

Construisons son centre O' :

a) $(AB) \neq (A'B')$



b) $(AB) = (A'B')$



♦ Exercice 1.c p. 95

On a : $\overrightarrow{GM'} = 3\,\overrightarrow{GM}$. Donc : f = hom(G,3).

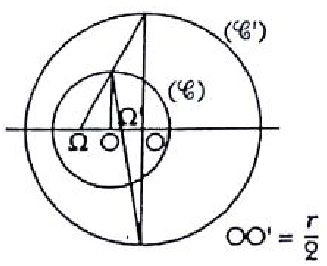
♦ Exercice 1.d p. 95

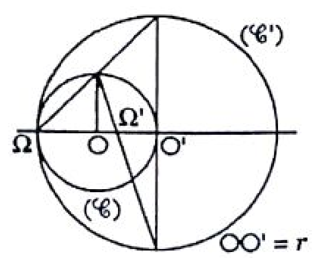
1. Il existe deux homothéties h et h', de rapport respectifs 2 et – 2, transformant $(\mathscr{C})$ en $(\mathscr{C}')$.

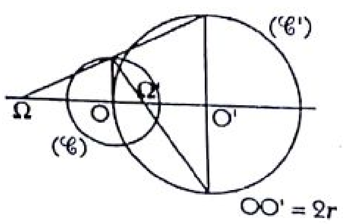
2. Soit Ω et Ω' les centres respectifs des homothéties h et h'.

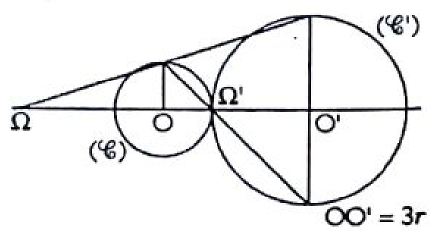
a) On a : $\overrightarrow{\Omega O'} = 2\,\overrightarrow{\Omega O} \Leftrightarrow \overline{O\Omega} = -\overline{OO'}$ et $\overrightarrow{\Omega' O'} = -2\,\overrightarrow{\Omega' O} \Leftrightarrow \overline{O\Omega'} = \frac{1}{3}\,\overline{OO'}$.

b) Construction de Ω et Ω' :









♦ Exercice 1.e p. 95

1. L'homothétie h a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = -\frac{3}{2}x - 5 \\ y' = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2} \end{cases}$.

2. On a : $A\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$.

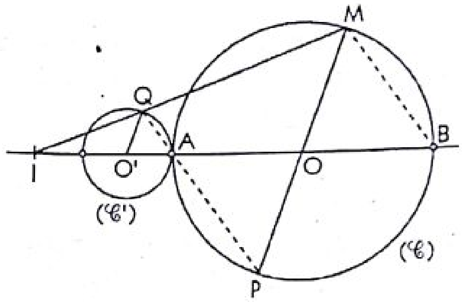
♦ Exercice 1.f p. 95

1. Les droites (BM) et (PQ) sont toutes deux perpendiculaires à (AM), donc elles sont parallèles.

2. Soit h l'homothétie de centre I qui transforme B en A ; h a pour rapport $\frac{1}{3}$ et M a pour image Q par h.

Le point M décrit ($\mathscr{C}$) privé de A et B ; donc, Q décrit l'image de ($\mathscr{C}$) par h, privée des images de A et B.

Le lieu de Q est le cercle passant par A et de centre O' point d'intersection de (AB) avec la parallèle à (MP) passant par Q.



♦ Exercice 1.g p. 95

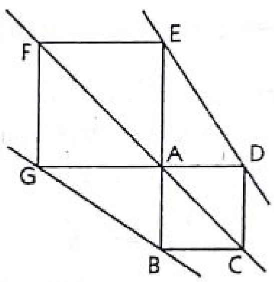
$\overrightarrow{AE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; donc : $\overrightarrow{FG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

On en déduit que les points A, B, C, D ont pour images respectives F, G, A, E par une homothétie h de rapport $\frac{3}{2}$.

Soit O le centre de cette homothétie.

Le centre de l'homothétie, un point et son image sont alignés.

Donc, les droites (AC), (DE) et (BG) sont concourantes en O.



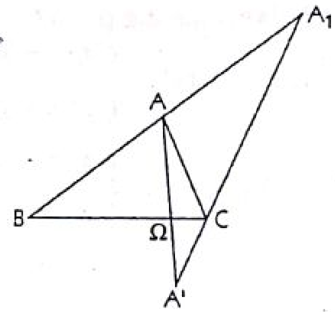
♦ Exercice 2.a p. 102

1. h'∘h est une homothétie de rapport $-\frac{2}{3}$.

2. Le centre Ω de cette homothétie est le point d'intersection des droites (BC) et (AA'), A' étant l'image du point A par h'∘h.

Construction de A'

- On construit A_1 tel que : $\overrightarrow{BA_1} = 2\overrightarrow{BA}$;
- on construit A' tel que : $\overrightarrow{CA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CA_1}$.



♦ Exercice 2.b p. 102

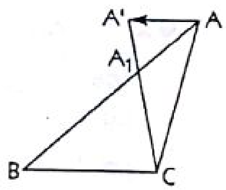
1. Le produit des rapports des homothéties h et h' est égal à 1. Donc, h'∘h est une translation.

2. Le vecteur de cette translation est $\overrightarrow{AA'}$, A' étant l'image de A par h'∘h.

Construction de A'

- On construit A_1 tel que : $\overrightarrow{BA_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$;
- on construit A' tel que : $\overrightarrow{CA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA_1}$.

On a : $\overrightarrow{AA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.



♦ Exercice 2.c p. 102

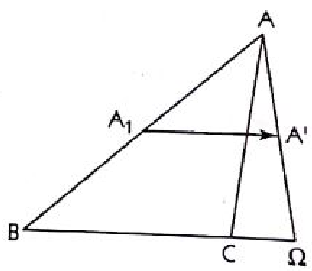
1. On sait que la composée d'une homothétie de rapport k différent de 1 et d'une translation est une homothétie de rapport k.

Donc, t∘h est une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.

2. Le centre Ω de cette homothétie est le point d'intersection des droites (BC) et (AA'), A' étant l'image du point A par t∘h.

Construction de A'

- On construit A_1 tel que : $\overrightarrow{BA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$;
- on construit A' tel que : $\overrightarrow{A_1A'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.



♦ **Exercice 2.d p. 102**

a) Le produit des rapports des homothéties h et h' est égal à -1. Donc, $h' \circ h$ est une symétrie.
Le centre I de cette symétrie est le milieu de $[OO_1]$, avec $O_1 = h' \circ h(O) = h'(O)$.

On a : $\overrightarrow{O'O_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}$.

I est tel que : $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OO_1} \iff \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'O_1}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OO'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{OO'}$.

b) La transformation $h \circ h'$ est une symétrie centrale.
Son centre I' est le milieu de $[O'O'_1]$, avec $O'_1 = h \circ h'(O') = h(O')$.

On a : $\overrightarrow{OI'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}$.

♦ **Exercice 2.e p. 102**

a) Le produit des rapports de ces deux homothéties est égal à 1, donc $h' \circ h$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$ tel que : $O_1 = h' \circ h(O) = h'(O)$.

On a : $\overrightarrow{O'O_1} = \frac{1}{k}\overrightarrow{O'O} = (1 - \frac{1}{k})\overrightarrow{OO'}$.

b) De même, $h \circ h'$ est la translation de vecteur $(k-1)\overrightarrow{OO'}$.

♦ **Exercice 2.f p. 102**

a) $h' \circ h$ et $h \circ h'$ sont des homothéties de rapport $-2 \times \frac{3}{2} = -3$.

On a : $h' \circ h : \begin{cases} x' = -3x - 4 \\ y' = -3y \end{cases}$; $h \circ h' : \begin{cases} x' = -3x + 8 \\ y' = -3y \end{cases}$.

b) Le centre de chacune de ces homothéties est leur point invariant, soit $\Omega\binom{-1}{0}$ pour $h' \circ h$ et $\Omega'\binom{2}{0}$ pour $h \circ h'$.

♦ **Exercice 2.g p. 102**

1. On a : $t \circ h : \begin{cases} x' = -3x - 7 \\ y' = -3y + 7 \end{cases}$; $h \circ t : \begin{cases} x' = -3x - 11 \\ y' = -3y - 5 \end{cases}$.

2. On a : $\sigma \circ h : \begin{cases} x' = -3x - 8 \\ y' = -3y - 4 \end{cases}$; $h \circ \sigma : \begin{cases} x' = -3x - 8 \\ y' = 3y + 4 \end{cases}$.

Exercices d'apprentissage

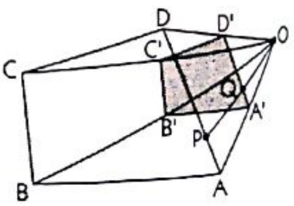
LIEUX GÉOMÉTRIQUES

♦ **Exercice 1 p. 103**

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.

On a : Q milieu de [OP]. Donc : $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$ et h (P) = Q.

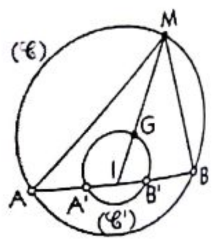
Lorsque P décrit ABCD, Q décrit l'image de ABCD par h.
Le lieu de Q est le quadrilatère A'B'C'D', les points A', B', C', D' étant les images respectives des points A, B, C, D par h.



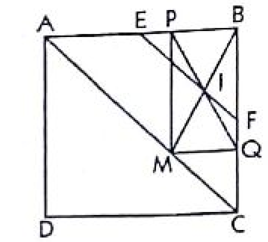
♦ **Exercice 2 p. 103**

Soit I le milieu de [AB]. On a : $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$, donc le centre de gravité G du triangle ABM est l'image de M par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$.

Lorsque M décrit $(\mathscr{C})$ privé de A et B ; G décrit l'image de cet ensemble par h.
Soit A' = h (A) et B' = h (B). Le lieu de G est le cercle $(\mathscr{C}')$ circonscrit à A'B'G, privé de A' et B'.



♦ Exercice 3 p. 103



Le quadrilatère BPMQ est un rectangle ; donc, I est milieu de [BM]. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$. On a : $I = h(M)$.

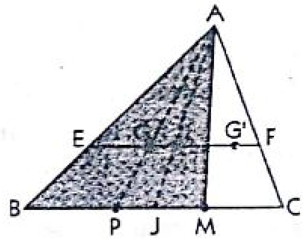
Lorsque M décrit [CA], I décrit l'image de [CA] par h.

On désigne par E et F les milieux respectifs des côtés [AB] et [BC].

On a : $h(A) = E$ et $h(C) = F$.

Le lieu géométrique de I est donc le segment [EF].

♦ Exercice 4 p. 103



1. Soit P le milieu de [BM]. On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$. Donc, G est est l'image de P par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.

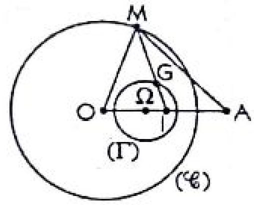
Lorsque M décrit [BC], P décrit [BJ], J étant le milieu de [BC]. Donc, le point G décrit l'image de [BJ] par h.

Le lieu (Γ) de G est donc le segment [EI] tel que $E = h(B)$ et $I = h(J)$.

De même, on démontre que le lieu (Γ') de G' est le segment [IF] avec $F = h(C)$.

2. Les deux ensembles (Γ) et (Γ') ont en commun le point I, centre de gravité du triangle ABC.

♦ Exercice 5 p. 103



Soit I, milieu de [OA]. On a : $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$; donc, G est l'image de M par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$.

Lorsque M décrit (𝒞), G décrit l'image (Γ) de (𝒞) par h, c'est-à-dire le cercle de centre Ω tel que $\overrightarrow{I\Omega} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$ et de rayon ΩG.

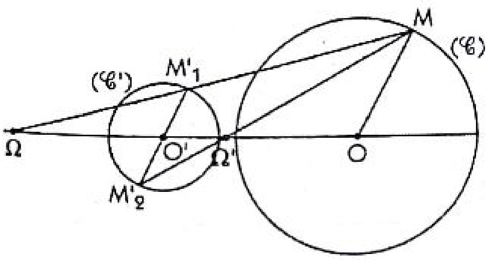
Problèmes de construction

♦ Exercice 6 p. 103

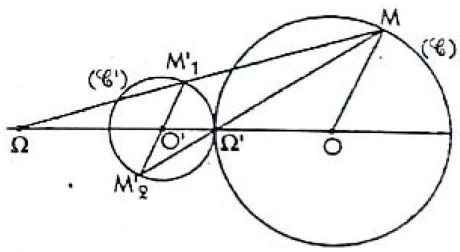
1. Il existe deux homothéties transformant (𝒞) en (𝒞'), de rapports respectifs $\frac{r'}{r}$ et $-\frac{r'}{r}$.

2. Construction des centres de ces homothéties

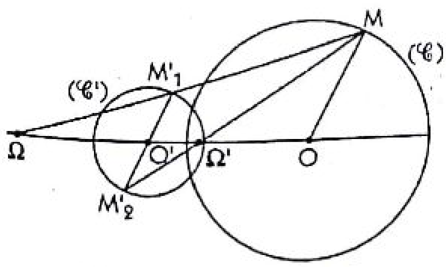
a) (𝒞) et (𝒞') extérieurs



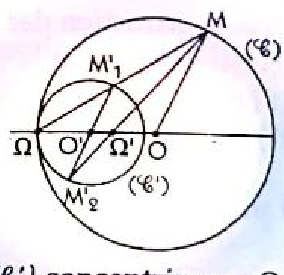
b) (𝒞) et (𝒞') tangents extérieurement



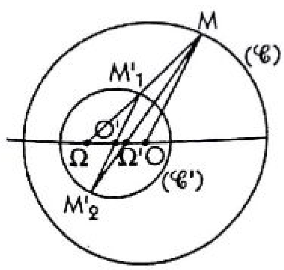
c) (𝒞) et (𝒞') sécants



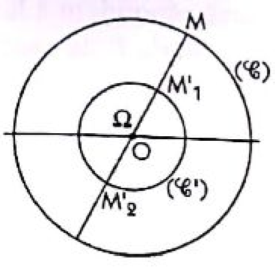
d) (𝒞) et (𝒞') tangents intérieurement



e) (𝒞') intérieur à (𝒞)



(𝒞) et (𝒞') concentriques : Ω et Ω' en O



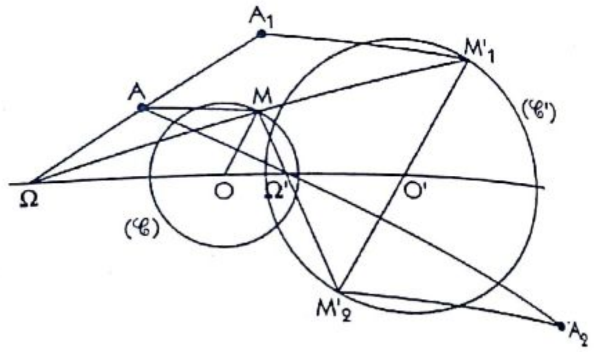
♦ Exercice 7 p. 103

Soit M un point quelconque de ($\mathscr{C}$) et $[M'_1M'_2]$ le diamètre de ($\mathscr{C}'$) tel que : $(M'_1M'_2) // (OM)$.

Soit h_1 et h_2 les homothéties de centres respectifs Ω et Ω', transformant ($\mathscr{C}$) en ($\mathscr{C}'$).

On a : $M'_1 = h_1(M)$ et $M'_2 = h_2(M)$.

Le problème revient à construire l'image d'un point par une homothétie définie par son centre, un point et son image (cf & 1. 1.).



- $A_1 = h_1(M)$ est le point d'intersection de (ΩA) et de la droite parallèle à (AM) passant par M'_1 ;
- $A_2 = h_2(M)$ est le point d'intersection de (ΩA) et de la droite parallèle à (AM) passant par M'_2.

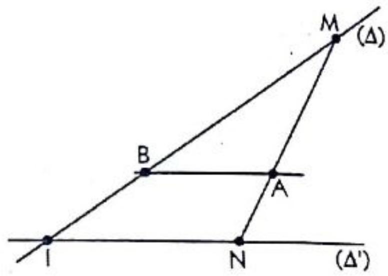
♦ Exercice 8 p. 103

Analyse

La parallèle à (Δ') passant par A coupe (Δ) en B.

On a : $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} + 2\,\overrightarrow{BI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = 3\,\overrightarrow{IB}$.

Donc, M est l'image de B par l'homothétie h de centre I et de rapport 3.



Synthèse

On en déduit une construction des points M et N.

- On trace la parallèle à (Δ') passant par A ; soit B le point d'intersection de cette droite avec (Δ).
- On construit le point M tel que $\overrightarrow{IM} = 3\,\overrightarrow{IB}$, puis N, le point d'intersection des droites (AM) et (Δ').

Il existe une et une seule solution à ce problème.

Autre méthode

On a : $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$; soit h' l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.

N est le point d'intersection de h(Δ) et (Δ') ; M est le point d'intersection de (AN) et (Δ).

♦ Exercice 9 p. 103

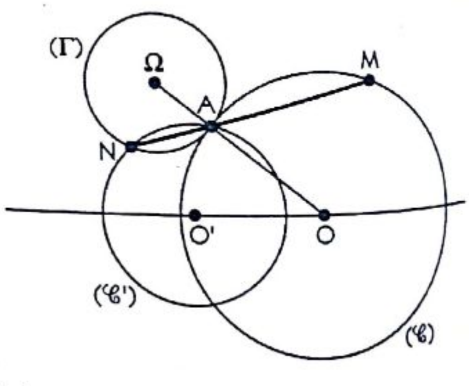
Analyse

Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.

On a : N = h(M).

M est un point de ($\mathscr{C}$), donc N appartient à l'image de ($\mathscr{C}$) par h, c'est-à-dire le cercle (Γ) de centre Ω = h (O) et de rayon ΩA.

N est un point commun aux cercles ($\mathscr{C}'$) et (Γ).



Synthèse

On en déduit une construction des points M et N.

- On trace (Γ), image de ($\mathscr{C}$) par h.
- Les cercles (Γ) et ($\mathscr{C}'$) ont deux points communs, A et le point N cherché.
- On trace (AN) qui coupe ($\mathscr{C}$) en M.

♦ Exercice 10 p. 103

Analyse

Soit I, J, K les points d'intersection respectifs des droites (Δ_1) et (Δ_2), (Δ_1) et (Δ_3), (Δ_2) et (Δ_3).

Soit ABCD un carré répondant à la question.

Il existe une homothétie h de centre I transformant les points A et B respectivement en J et K. L'image par h du carré ABCD sera le carré JKLM.

Donc, les points I, D, M sont alignés, ainsi que les points I, C, L.

Synthèse

On en déduit une construction du carré ABCD.

• On construit le carré JKLM à l'extérieur du triangle IJK.
• On trace les droites (IM) et (IL) qui coupent la droite (JK) respectivement en D et C.
• Les perpendiculaires à (JK) en D et C coupent (Δ_1) et (Δ_2) respectivement en A et B.

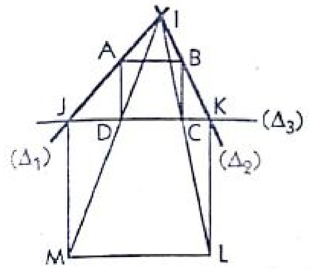


figure 1

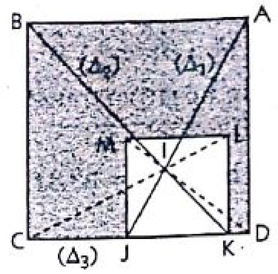


figure 2

Discussion

On peut également construire le carré JKLM dans le demi-plan contenant le point I (*figure 2*).
On en déduit une deuxième construction du carré ABCD : le problème a deux solutions.

• Exercice 11 p. 103

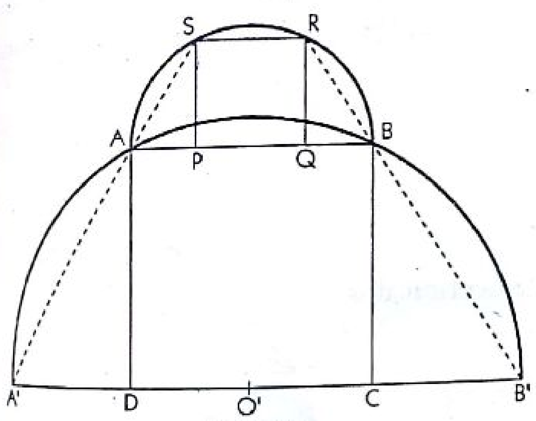


figure 1

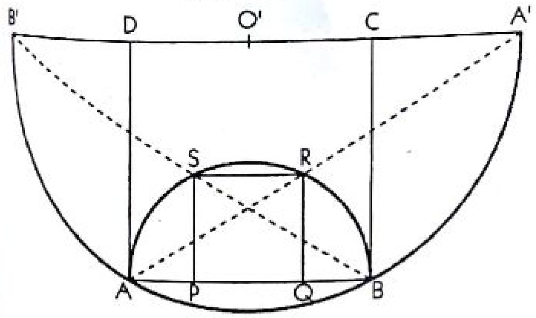


figure 2

Analyse

Soit PQRS un carré répondant à la question.
Il existe une homothétie h qui transforme les points S et R respectivement en A et B.
L'image du carré PQRS par cette homothétie est un carré DCBA inscrit dans le demi-cercle de diamètre [A'B'], A' et B' étant les images respectives des points A et B par h.
Les points S, A, A' sont alignés avec le centre de l'homothétie, ainsi que les points R, B, B'.

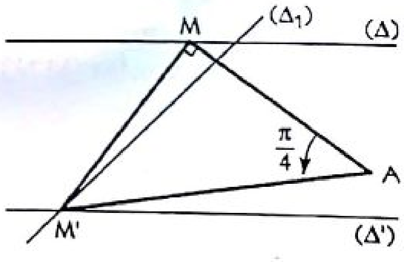
Synthèse

On en déduit une construction du carré PQRS (figure 1).
• On trace le carré ABCD extérieur au demi-cercle de diamètre [AB] ; soit O', milieu de [CD].
• On trace le demi-cercle de centre O' et passant par A et B ; soit [A'B'] le diamètre de ce demi-cercle, de support parallèle à (AB).
• Les droites (AA') et (BB') coupent le demi-cercle de diamètre [AB] respectivement en S et R.
• Les perpendiculaires à (AB) menées par S et R coupent (AB) respectivement en P et Q.

Discussion

On peut également considérer l'homothétie h' qui transforme les points S et R respectivement en B et A.
On obtient une deuxième méthode de construction du carré PQRS (figure 2).

• Exercice 12 p. 103



Analyse

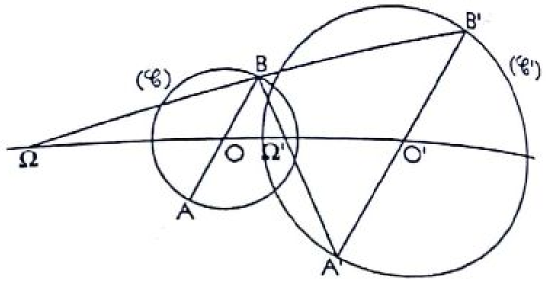
M' est l'image de M par la similitude s de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
M' est le point d'intersection des droites (Δ') et (Δ_1), image de (Δ) par s.

Synthèse

• On construit l'image (Δ_1) de (Δ) par s, en construisant l'image de deux points quelconques de (Δ).
• On a : $M' \in (\Delta') \cap (\Delta_1)$.
• On construit le point M tel que le triangle AMM' soit rectangle isocèle en M et de sens direct.

Démonstrations de propriétés

♦ Exercice 13 p. 103



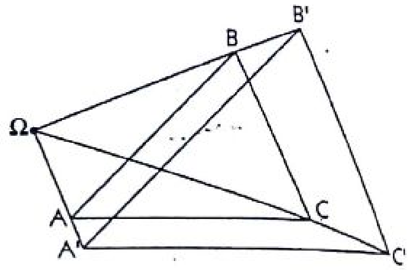
Soit h l'homothétie positive transformant (𝒞) en (𝒞') et (A, B) en (A', B').

On a : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ $(k > 0)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{A'B'} = -k\overrightarrow{BA}$.

Soit h' l'homothétie négative transformant (𝒞) en (𝒞').
h' transforme (A, B) en (B', A').

On a : A' = h'(B) = h(A) ; B' = h'(A) = h(B).

♦ Exercice 14 p. 103



1. Les triangles ABC et A'B'C' ont leurs côtés parallèles deux à deux, donc leurs angles égaux deux à deux.
Les triangles ABC et A'B'C' sont donc semblables.

On pose : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} = k$.

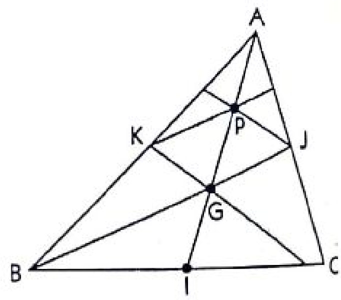
Selon les sens des triangles ABC et A'B'C', on a :

- $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{C'A'} = k\overrightarrow{CA}$, s'ils sont de même sens ;
- $\overrightarrow{A'B'} = -k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = -k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{C'A'} = -k\overrightarrow{CA}$, s'ils sont de sens contraires.

Dans les deux cas, on en déduit qu'il existe une homothétie de rapport k (ou $-k$) transformant ABC en A'B'C'.

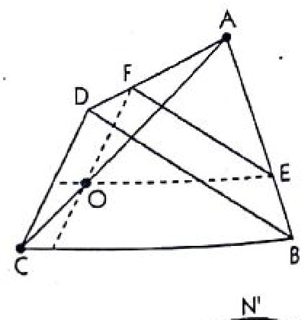
2. Le centre de cette homothétie appartiendra aux droites (AA'), (BB') et (CC'), qui sont donc concourantes.

♦ Exercice 15 p. 103



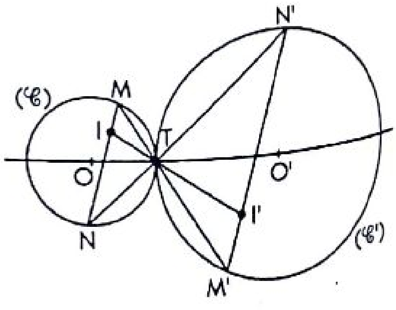
Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
On a : h(B) = K et (KP) // (BJ).
Donc, la droite (BJ) a pour image par h la droite (KP).
De même, la droite (CK) a pour image par h la droite (JP).
On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC, intersection des médianes (BJ) et (CK).
On a : h(G) = P et les points A, P, G sont alignés.
Donc, P appartient à la médiane (AI) et les points A, P, I sont alignés.

♦ Exercice 16 p. 103



On a : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AD}$ $\Rightarrow$ (FE) // (BD).
Donc, il existe une homothétie h de centre A tel que :
h(F) = D et h(E) = B.
L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle.
Donc, les images par h des droites (FO) et (EO) sont respectivement (DC) et (BC).
Donc, h (O) = C et les points A, O, C sont alignés.

♦ Exercice 17 p. 103



Soit h l'homothétie de centre T transformant (𝒞) en (𝒞') et I' l'image de I par h. On a : M' = h(M) et N' = h(N)
Les points M, I, N sont alignés, donc les points M', I', N' sont alignés.
Ainsi, toutes les droites (M'N') passent par le point I'.

♦ Exercice 18 p. 104

Les carrés ABCD et A'B'C'D' sont tels que : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{A'D'} = k\overrightarrow{AD}$.
Donc, il existe une homothétie de rapport k tel que les points A, B, C, D ont pour images respectives par h les points A', B', C', D'.
Les droites (AA'), (BB'), (CC'), (DD') passent toutes par le centre de cette homothétie.

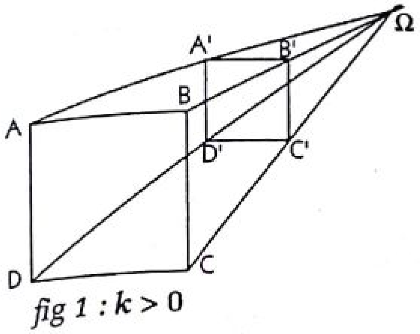


fig 1 : $k > 0$

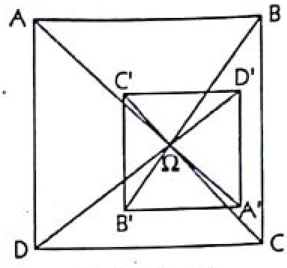
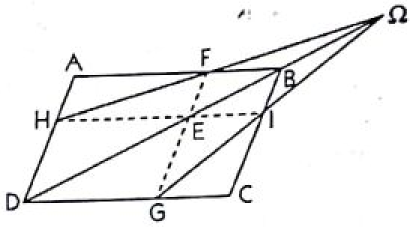


fig 2 : $k < 0$

♦ **Exercice 19 p. 104**



Soit k le nombre réel tel que : $\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{BD}$ $(0 < k < 1)$.

On a : $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AH}$

$= \left(\dfrac{1}{k} - 1\right)\overrightarrow{AH} = \left(\dfrac{1}{k} - 1\right)\overrightarrow{FE}$;

$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{GC} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GC}$

$= \left(\dfrac{1}{k} - 1\right)\overrightarrow{GC} = \left(\dfrac{1}{k} - 1\right)\overrightarrow{EI}$.

Donc, il existe une homothétie de rapport $\dfrac{1-k}{k}$ transformant les points I, E, F respectivement en G, D, H.

Les droites (IG), (ED) et (FH) sont donc concourantes en Ω, centre de cette homothétie.

SIMILITUDES

♦ **Exercice 20 p. 104**

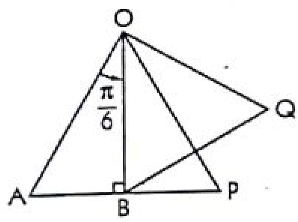
1. *a)* Soit M' l'image d'un point M par la transformation h∘t. On a : $\overrightarrow{OM'} = 2(\overrightarrow{OM} + \vec{u})$.

b) Ω est le point invariant de h∘t. Donc : $\overrightarrow{O\Omega} = 2(\overrightarrow{O\Omega} + \vec{u}) \Leftrightarrow \overrightarrow{O\Omega} = -2\vec{u}$.

2. Soit M'' l'image d'un point M par la transformation t∘h. On aura : $\overrightarrow{OM''} = 2\overrightarrow{OM} + \vec{u}$.

Soit Ω' le point invariant de t∘h. On a : $\overrightarrow{O\Omega'} = 2\,\overrightarrow{O\Omega'} + \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{O\Omega'} = -\vec{u}$.

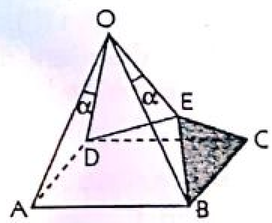
♦ **Exercice 21 p. 104**



Deux triangles équilatéraux ayant leurs angles égaux deux à deux, ils sont semblables. Donc, il existe une similitude s telle que les points O, A, P ont pour images respectives les points O, B, Q.

s est la similitude de centre O, de rapport $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

♦ **Exercice 22 p. 104**



On note s la similitude h∘r.

Le triangle ODE est l'image par s du triangle OAB ;

donc ces deux triangles sont semblables et OD = OE.

On a : OA = OB, OD = OE et $\widehat{AOD} = \widehat{BOE} = \alpha$.

Donc, les triangles OAD et OBE sont isométriques.

D'où : AD = BE.

De plus : AD = BC ; donc BC = BE et le triangle BCE est isocèle en B.

♦ **Exercice 23 p. 104**

1. On a : h : $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases}$; S_A : $\begin{cases} x' = -x - 6 \\ y' = -y + 2 \end{cases}$; $S_A \circ h$: $\begin{cases} x' = 2x - 6 \\ y' = 2y + 2 \end{cases}$.

2. $s_A \circ h$ est l'homothétie de centre $\Omega(6\,;-2)$ et de rapport 2.

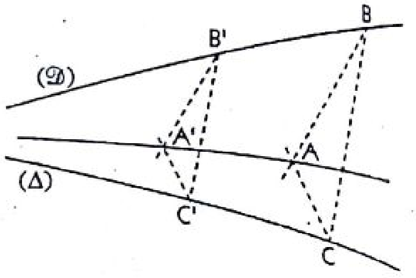
Exercices d'appronfondissement

♦ Exercice 24 p. 104

($\mathscr{C}'$) est le cercle de centre $\Omega'(-2\,;-8)$ et de rayon 3.

Donc, ($\mathscr{C}'$) a pour équation cartésienne : $(x+2)^2 + (y+8)^2 = 9$.

♦ Exercice 25 p. 104



Soit B, B' deux points de ($\mathscr{D}$) et C, C' deux points de (Δ) tels que : (BC) // (B'C') et A non situé sur (BC).

Il existe une homothétie h telle que les points B et C ont pour images respectives B' et C' par h.

Le centre O de cette homothétie est le point d'intersection de ($\mathscr{D}$) et (Δ).

L'image A' du point A par h est le point d'intersection des droites parallèles à (BA) et (CA) passant respectivement par B' et C'.

La droite (AA') passe par le point O et est donc la droite (OA) cherchée.

♦ Exercice 26 p. 104

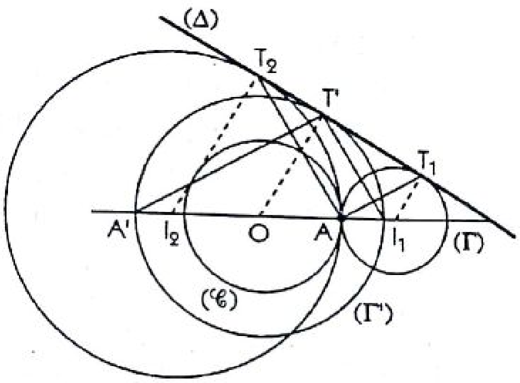
Analyse

Soit O le centre du cercle ($\mathscr{C}$).

On construit le cercle (Γ') de centre O et tangent à (Δ) ; on désigne par A' un point commun à la droite (OA) et au cercle (Γ').

Le cercle (Γ) cherché est l'image du cercle (Γ') par l'homothétie qui transforme A' en A.

Synthèse



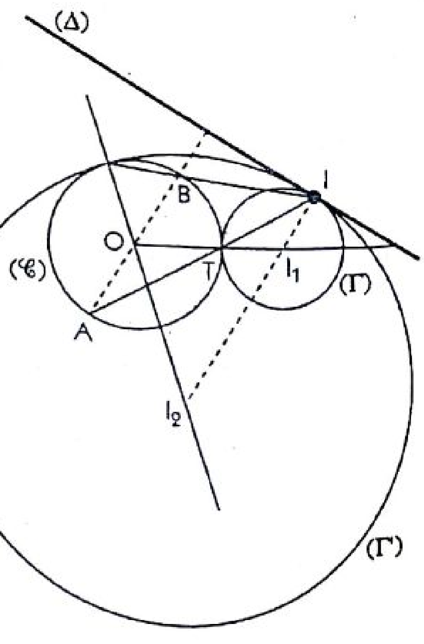
On construit (Γ') ; soit A' un des points communs à (Γ') et (AO), et T' le point de contact de (Γ') avec (Δ).

- La parallèle à (A'T') menée par A coupe (Δ) en T_1.
- La perpendiculaire à (Δ) menée par T_1 coupe (AO) en I_1, centre du cercle (Γ) cherché.

Discussion

Il y a autant de solutions que de points A', donc il y a deux cercles solutions, de centres respectifs I_1 et I_2.

♦ Exercice 27 p. 104



Analyse

Soit (Γ) un cercle solution.

On désigne par T le point de tangence entre les cercles (Γ) et ($\mathscr{C}$) : T est le centre d'une homothétie h transformant ($\mathscr{C}$) en (Γ).

Soit [AB] le diamètre de ($\mathscr{C}$) perpendiculaire à (Δ). I est l'image par h de l'un des points A ou B.

Synthèse

- On trace le diamètre [AB], puis la droite (IA) qui recoupe ($\mathscr{C}$) en T.
- La perpendiculaire à (Δ) en I coupe (OT) en I_1, centre du cercle cherché.

Discussion

Il y a deux points T :

$\{T_1\} = (IA) \cap (\mathscr{C})$ et $\{T_2\} = (IB) \cap (\mathscr{C})$.

Il y a deux cercles (Γ) : (Γ_1) tangent à (Δ) en I et passant par T_1, et (Γ_2) tangent à (Δ) en I et passant par T_2.

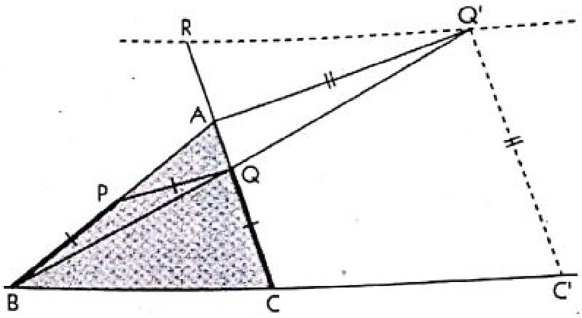
♦ Exercice 28 p. 104

Analyse

Soit h l'homothétie de centre B transformant P en A.
On désigne par Q' et C' les images respectives de Q et C par h.

Si BP = PQ = QC, alors : BA = AQ' = Q'C'.

Donc, le point Q' est sur le cercle de centre A et de rayon AB et sur la droite parallèle à (BC) passant par le point R de (CA) tel que : CR = C'Q' = BA.



Synthèse

On construit le point Q' comme indiqué dans l'analyse.

La droite (BQ') coupe [AC] en Q.

La parallèle à (AQ') passant par Q coupe [AB] en P.

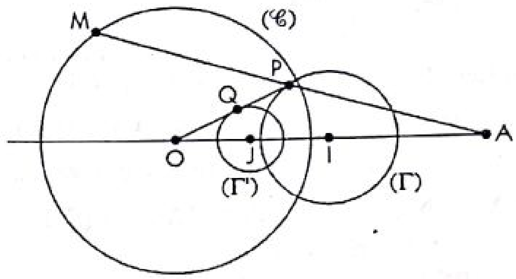
♦ Exercice 29 p. 104

1. • P est l'image de M par $h\left(A, \frac{1}{2}\right)$.

Lorsque M décrit (𝒞), P décrit (Γ), image de (𝒞) par h.

Soit I, milieu de [OA] ; on a : h(O) = I.

Donc, (Γ) est le cercle de centre I et de rayon $\frac{r}{2}$, r étant le rayon du cercle (𝒞).



• Q est l'image de P par $h'\left(O, \frac{1}{2}\right)$.

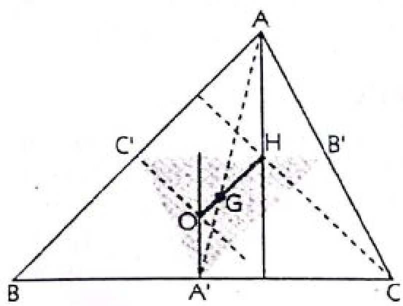
Lorsque P décrit (Γ), Q décrit (Γ'), image de (Γ) par h'.

Soit J, milieu de [OI] ; on a : h'(I) = J. Donc, (Γ') est le cercle de centre J et de rayon $\frac{r}{4}$.

2. (Γ') est l'image de (𝒞) par h'∘h qui est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{4}$, avec : $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$.

♦ Exercice 30 p. 104

1. Soit h l'homothétie de centre G et de rapport – 2.
On a : h(A') = A. De plus, (OA') et (AH) étant deux droites perpendiculaires à (BC), on a : (OA') // (AH).
Donc, l'image de la droite (OA') par h est la droite (AH).
De même, les images des droites (OB') et (OC') par h sont les droites (BH) et (CH).



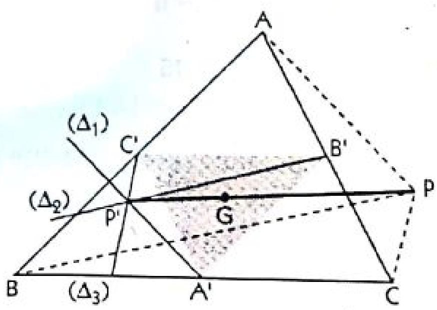
2. Les droites (OA'), (OB'), (OC') sont sécantes en O ; les droites (AH), (BH), (CH) sont sécantes en H.
Donc : h(O) = H et $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$; par suite, les points O, G et H sont alignés.

♦ Exercice 31 p. 104

Soit G le centre gravité du triangle ABC, donc du triangle A'B'C', et P' l'image de P par l'homothétie $h\left(G, -\frac{1}{2}\right)$ qui transforme (A,B,C) en (A',B',C').

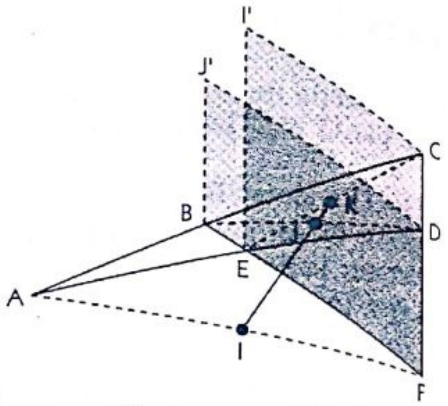
La droite (Δ_1) contient A' et est parallèle à la droite (PA), donc elle passe par P'.

On démontrerait de même que les droites (Δ_2) et (Δ_3) passent par le point P'.



Donc, les droites (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) sont concourantes en un point P' tel que : $\overrightarrow{GP'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GP}$.

♦ Exercice 32 p. 105



1. *a)* On a : (BJ') // (CD) et h (B) = C, donc : h(BJ') = (CD) ;
(CD) // (EI') et h'(D) = E, donc : h'(CD) = (EI').

Par suite, l'image de (BJ') par h'∘h est la droite (EI').
De même, l'image de (DJ') par h∘h' est la droite (CI').

b) h et h' sont des homothéties de même centre ;
donc : h'∘h = h∘h'.

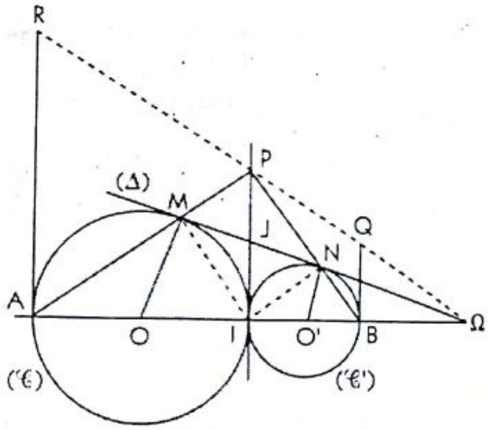
On a : (DJ') ∩ (BJ') = {J'} et (EI') ∩ (CI') = {I'} ;
donc : h∘h' (J') = I', et les points A, I', J' sont alignés.

2. I est le milieu de [AF].

De plus, FCI'E et FDJ'B étant des parallélogrammes, J et K sont les milieux respectifs de [FJ'] et [FI'].
Donc, I, J, K sont les images respectives de A, J', I' par l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$.
Les points A, J' et I' étant alignés, les points I, J et K sont alignés.

♦ Exercice 33 p. 105

1. • Si I est milieu de [AB], f est la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ ou la symétrie orthogonale par rapport à la tangente commune en I à ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$).

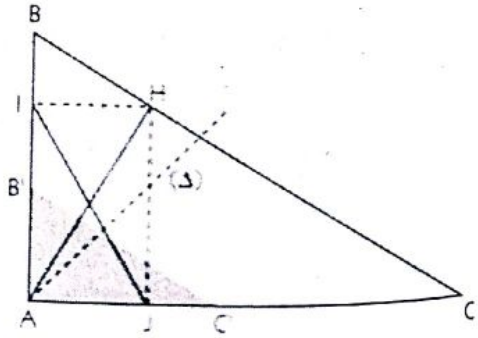


• Si I est distinct du milieu de [AB], alors (Δ) coupe (AB) en un point Ω ; f est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{IB}{IA}$.

2. f(M) = N et f(A) = I, donc (AM) // (IN).
f(I) = B, donc (BN) // (IM).
Donc, PMIN est un parallélogramme.
De plus, $\widehat{IMP}$ est droit ; donc, PMIN est un rectangle.

3. f(P) = Q et f (I) = B, donc (PI) // (QB).
De même, (PI) // (RA).
Soit J le centre du rectangle PMIN. On a : JM = JI = JN ; donc, (JI) est la tangente commune à ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) en I.
Donc, les droites (RA) et (QB) sont tangentes à ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) respectivement en A et B.

♦ Exercice 34 p. 105



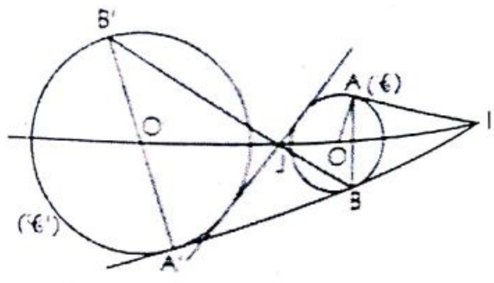
1. Les triangles AJI et AHJ sont isométriques ; les triangles AJH et ABC ont leurs angles égaux deux à deux : ils sont semblables. Donc, AJI et ABC sont semblables.

On a : $k = \dfrac{IJ}{BC} = \dfrac{AH}{BC} = \dfrac{AH \times BC}{BC^2} = \dfrac{AB \times AC}{BC^2} = \dfrac{bc}{b^2 + c^2}$.

2. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport k et s la symétrie orthogonale d'axe (Δ), bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
On a : h(A, B, C) = (A, B', C') et s(A, B', C') = (A, J, I).
Donc, l'image par s∘h du triangle ABC est le triangle AJI.

♦ Exercice 35 p. 105

1. Les triangles IAO et IA'O' sont rectangles et, tels que :
$\widehat{AIO} = \widehat{A'IO'}$. Donc, il existe une similitude σ telle que :
σ(I, A, O) = (I, A', O').



Soit s la symétrie orthogonale d'axe (OO') et h l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{r'}{r}$.

On a : h∘s(I, A, O) = (I, A', O') ; donc : σ = h∘s.

2. h = hom $(I, \frac{r'}{r})$; donc : h^{-1} = hom $(I, \frac{r}{r'})$;

$h' = \text{hom}(J, -\frac{r'}{r})$; donc : $h'^{-1} = \text{hom}(J, -\frac{r}{r'})$.

On en déduit que $h'^{-1} \circ h$ est une symétrie. De plus : $h'^{-1} \circ h(O) = O$; donc $h'^{-1} \circ h$ est la symétie de centre O.

On démontre de même que $h' \circ h^{-1}$ est la symétrie de centre O'.

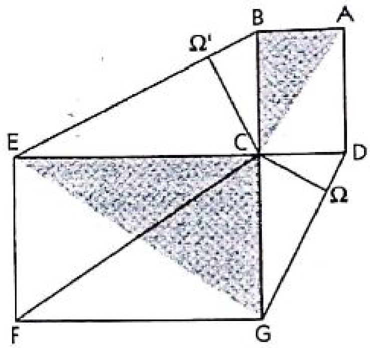
3. On a : $B' = h' \circ h^{-1}(A') = h'(h^{-1}(A'))$ et $h^{-1}(A') = B$; donc : $h'(B) = B'$.

♦ Exercice 36 p. 105

1. Les triangles rectangles ABC et EFG ont leurs côtés deux à deux proportionnels, ils sont semblables. Donc, il existe une similitude directe s, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2, telle que : $s(A, B, C) = (E, F, G)$.

La similitude conservant le parallélisme, on a aussi : $s(D) = C$.

On démontre de même qu'il existe une similitude directe s', d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2, telle que : $s'(A, B, C, D) = (G, C, E, F)$.



2. a) L'image du triangle CΩD par s est le triangle GΩC ; $s(C) = G$ et $s(D) = C$, donc $s(\Omega) = \Omega$.

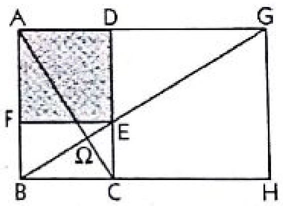
b) Soit $h = \text{hom}(\Omega, 2)$ et $r = \text{rot}(\Omega, \frac{\pi}{2})$. On a : $s = r \circ h = h \circ r$.

3. Soit Ω' le projeté orthogonal de C sur (BE). On démontre de même que $s'(\Omega') = \Omega'$.

Donc : $s' = h' \circ r' = r' \circ h'$, avec $h' = \text{hom}(\Omega', 2)$ et $r' = \text{rot}\left(\Omega', -\frac{\pi}{2}\right)$.

♦ Exercice 37 p. 105

1. On a : $\frac{FE}{FB} = \frac{AD}{AB - AD} = \frac{1}{\varphi - 1} = \varphi = \frac{AB}{BC}$.



Les triangles rectangles BCE et ABC sont donc semblables. Soit s la similitude, de rapport φ, telle que les points B, C, E ont pour images respectives A, B, C. La similitude conservant le parallélisme, on a également $s(F) = D$.

2. On a : $\frac{AG}{AB} = \frac{AD + AB}{AB} = 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi = \frac{AB}{BC}$.

On démonstre comme précédemment que les points A, B, C, D ont pour images respectives G, A, B, H par s.

3. a) Les triangles BHG et BCE sont semblables, donc les droites (BE) et (GB) sont confondues.

Donc les droites (BE), (AC) et (GB) sont concourantes en un point Ω.

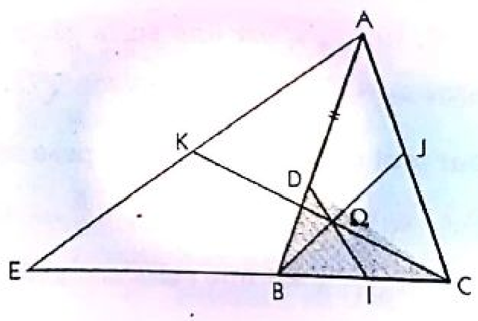
b) Soit $h = \text{hom}(\Omega, \varphi)$ et $r = \text{rot}\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$. On pose : $\sigma = h \circ r = r \circ h$.

On a : $\sigma(B, C, E) = (A, B, C)$; donc : $\sigma(B, C, E, F) = (A, B, C, D)$.

De même, on a : $\sigma(A, B, C) = (G, A, B)$; donc : $\sigma(A, B, C, D) = (G, A, B, H)$.

♦ Exercice 38 p. 106

1. a) On a : $\frac{BC}{BD} = \frac{BC}{AB - BC} = \frac{1}{\varphi - 1} = \varphi$ et $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{BC} = \varphi$.



Donc : $\frac{AC}{BC} = \frac{CB}{DB}$. De plus, on a : $\widehat{ACB} = \widehat{CBD}$.

Le théorème d'AL KASHI nous permet d'écrire : $AB^2 = \varphi^2 \times CD^2$.

Les triangles ABC et CDB ont leurs côtés deux à deux proportionnels, donc ils sont semblables.

b) Le triangle CDB est isocèle en C. On a : $CD = BC$ et $BC = AD$.

Donc, $CD = AD$ et le triangle ADC est isocèle en D.

On pose : $\alpha = \widehat{BAC}$.

On a : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BDC} = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$; donc : $\widehat{ADC} = \pi - \widehat{BDC} = \frac{1}{2}(\pi + \alpha)$.

Or : $\widehat{ADC} = \pi - 2\alpha$; donc : $\pi - 2\alpha = \frac{1}{2}(\pi + \alpha)$. On en déduit : $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

Les angles $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ du triangle ABC ont pour mesure respective : $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$.

Les angles du triangle ADC ont pour mesure respective : $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{\pi}{5}$.

2. Les triangles ABC et ECA sont tels que : $\frac{EC}{CA} = \frac{AB}{BC} = \varphi$ (la démonstration est identique à celle du 1. a).
De plus : $\widehat{ABC} = \widehat{ECA}$; donc, ces triangles sont semblables.

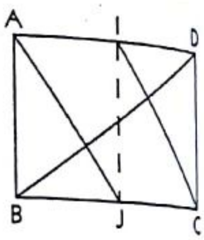
On démontre de même que les triangles ADC et EBA sont semblables.
Dans les deux cas, le rapport de similitude est φ.

3. *a)* Soit s la similitude telle que : s(C, D, B) = (A, B, C) et s(A, B, C) = (E, C, A).
On a : s(D, I) = (B, J) et s(B, J) = (C, K).
Donc : si $\Omega \in (DI) \cap (BJ)$, alors $s(\Omega) \in (BJ) \cap (CK)$.
Or : (IJ) // (BD) ; donc : $\frac{\Omega I}{\Omega D} = \frac{\Omega J}{\Omega B}$ et $s(\Omega) = \Omega$ (conservation du barycentre par s).
Donc, les droites (DI), (BJ) et (CK) sont concourantes en Ω.

b) On a : $h = \text{hom}\,(\Omega, \varphi)$ et $r = \text{rot}\left(\Omega, \frac{3\pi}{5}\right)$.

c) $r \circ h$ (A, D, C) = (E, B, A).

♦ Exercice 39 p. 106



1. Si (AJ) est perpendiculaire à (BD), alors les triangles ABJ et DAB ont leurs angles égaux deux à deux et ils sont semblables. Donc, il existe une similitude s transformant ABJ en DAB.

Réciproquement, s'il existe une similitude s transformant ABJ en DAB, alors l'angle de s est $-\frac{\pi}{2}$; donc les droites (AJ) et (BD) sont perpendiculaires. Soit k le rapport de cette similitude.

On a : $\frac{AB}{BJ} = \frac{AD}{AB} = k$; donc : $AB = k\,BJ = \frac{1}{2}k\,AD = \frac{1}{2}k \times k\,AB$.

On en déduit : $k = \sqrt{2}$.

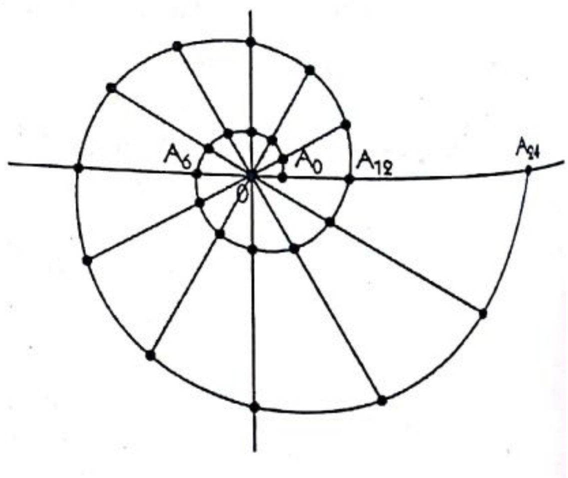
2. (A, B, J) a pour image (D, A, B) par s. Les similitudes conservent le parallélisme ; donc : s(I) = C et le rectangle IABJ a pour image le rectangle CDAB par s.
Le rapport des deux aires est égal à : $k^2 = 2$.

♦ Exercice 40 p. 106

1. On a : $OA_0 = OA_1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\widehat{A_0OA_1} = \frac{\pi}{6}$.

Donc, le triangle A_0OA_1 est un demi-triangle équilatéral, rectangle en A_0.

2. Voir figure ci-contre.



3. *a)* Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = OA_n$.
$OA_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $OA_2 = OA_1 \times \frac{2}{\sqrt{3}}$, ... $OA_n = OA_{n-1} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = OA_0 = 1$ et de raison $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_x})$

On a : $v_0 = 0$, $v_1 = \frac{\pi}{6}$, $v_2 = v_1 + \frac{\pi}{6}$,..., $v_n = v_{n-1} + \frac{\pi}{6}$.

Donc, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison $\frac{\pi}{6}$.

b) Pour tout entier naturel n, on a donc : $OA_n = u_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ et $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_n}) = v_n = n\frac{\pi}{6}$.

c) s^n est une homothétie si $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_n})$ a pour mesure 0 ou π.

- Si $n\frac{\pi}{6} \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow n \equiv 0\ [12]$, alors s^n est une homothétie de rapport : $k = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.
- Si $n\frac{\pi}{6} \equiv \pi\ [2\pi] \Leftrightarrow n \equiv 6\ [12]$, alors s^n est une homothétie de rapport : $k = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.

6. Orthogonalité dans l'espace

(pages 107 à 122 du livre de l'élève)

Objectifs

- Donner une première approche de la notion d'orthogonalité dans l'espace.
- Utiliser les définitions et les propriétés de l'orthogonalité dans l'espace pour :
  - résoudre des problèmes ;
  - faire des constructions géométriques ;
  - représenter des solides usuels ;
  - déterminer des lieux géométriques ;
  - démontrer des propriétés.

Commentaires

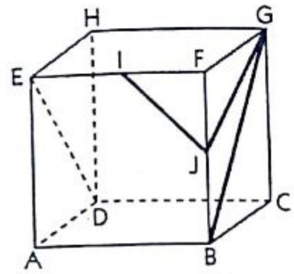
- Ce chapitre sera traité exclusivement d'un point de vue géométrique.
- Les résultats acquis seront réinvestis dans les chapitres suivants.
- On introduira la notion d'orthogonalité en utilisant comme support visuel l'environnement dans lequel nous vivons (maisons, immeubles, salles de classes) et les objets usuels (boîtes, ...).
- On privilégiera, comme support de l'étude géométrique, l'emploi des solides usuels tels que le tétraèdre ou les prismes droits, ainsi que des représentations en perspective cavalière.
- Une des principales difficultés rencontrées dans ce chapitre par les élèves réside dans la visualisation d'objets de l'espace à partir d'une représentation, forcément plane, de ces objets. En conséquence, le plus grand soin sera apporté par le professeur à la réalisation des figures illustrant le cours ou les exercices (attention aux figures à main levée ...) ; il devra également s'attacher à vérifier les figures tracées par les élèves.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Droites et plans orthogonaux • Droites orthogonales : – définition (droites orthogonales, droites perpendiculaires) ; – propriétés • Droite et plan orthogonaux : – définition ; – propriétés. **Plans perpendiculaires** • Définition. • Propriétés. • Définition de la projection orthogonale sur un plan, sur une droite. • Distance d'un point à un plan, à une droite. • Plan médiateur d'un segment (définition, propriété caractéristique) ; condition pour que le projeté orthogonal d'un angle droit sur un plan soit un angle droit.	• Démontrer que deux droites sont orthogonales. • Démontrer qu'une droite et un plan sont orthogonaux. • Démontrer que deux plans sont orthogonaux. • Utiliser les propriétés de l'orthogonalité et de parallélisme pour : – démontrer que deux droites sont parallèles ; – démontrer qu'une droite est parallèle à un plan ; – démontrer que deux plans sont parallèles. • Utiliser les propriétés de l'orthogonalité et de parallélisme pour résoudre des problèmes. • Utiliser les propriétés de l' orthogonalité pour faire des constructions géométriques. • Déterminer des lieux géométriques. • Déterminer, sur des solides simples, le projeté orthogonal, sur une droite ou sur un plan, d'un point, d'un segment, d'une droite, d'un plan. • Démontrer qu'un point appartient au plan médiateur d'un segment donné.

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 114



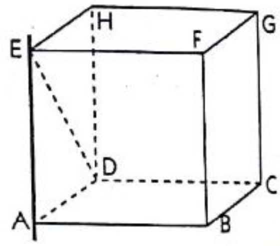
a) [BG] et [CF] sont les diagonales du carré BCGF ; donc : $(BG) \perp (CF)$.
Or : $(CF) // (ED)$; donc : $(ED) \perp (BG)$.

b) On a : $(DC) \perp (CG)$ et $(DC) \perp (CB)$;
or : (CG) et (CB) sont deux droites sécantes du plan (CBG) ;
donc : $(DC) \perp (CBG)$.
De plus : $(JG) \subset (CBG)$;
d'où : $(DC) \perp (JG)$.

c) Dans le triangle EBF, (IJ) est la droite des milieux des côtés [EF] et [FB] ; donc : $(IJ) // (EB)$.
On a : $(EB) // CH$ et $(CH) \perp (DG)$ (supports des diagonales du carré (CDHG)) ; donc : $(EB) \perp (DG)$.
De plus : $(EB) \perp (DG)$ et $(IJ) // (EB)$; donc : $(IJ) \perp (DG)$.

d) La droite (EI) est orthogonale au plan (AEH) ; donc : $(EI) \perp (AH)$.
De plus : $(AH) \perp (ED)$ (supports des diagonales du carré ADHE).
Or : (EI) et (ED) sont deux droites sécantes du plan (EID). Donc : $(AH) \perp (EID)$.
Or : $(ID) \subset (EID)$; donc : $(AH) \perp (ID)$.

♦ Exercice 1.b p. 114

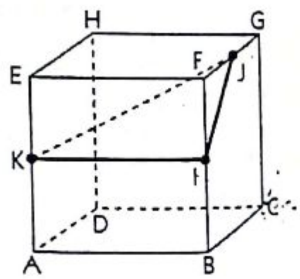


a) Les droites (AB), (BC), (CD), (DA), (EF), (FG), (GH), (HE) sont orthogonales à (AE).

b) Les plans (ABC), (EFG) sont orthogonaux à (AE).

c) Les droites (AB) et (FG) sont non coplanaires et orthogonales à (AE).
De même, (AC) et (GH) sont non coplanaires et orthogonales à (AE).

♦ Exercice 1.c p. 114



a) On a : $(IK) // (AB)$; or : $(AB) \perp (AE)$ et $(AB) \perp (AD)$.
Donc : $(IK) \perp (AE)$ et $(IK) \perp (AD)$.
On en déduit que $(IK) \perp (ADE)$, car (AE) et (AD) sont deux droites sécantes du plan (ADE).

b) On a : $(AD) \perp (AB)$ et $(AD) \perp (AE)$.
Donc : $(AD) \perp (ABE)$, car (AB) et (AE) sont deux droites sécantes du plan (ABE).
Or : $(BE) \subset (ABE)$. D'où : $(AD) \perp (BE)$.
De plus : $(BE) \perp (AF)$ (diagonales d'un carré).
On en déduit que $(BE) \perp (ADG)$, car (AF) et (AD) sont deux droites sécantes du plan (ADG).

c) On a : $(IJ) // (BG)$ (droite des milieux dans le triangle BGF) et $(BG) // (AH)$.
Or : $(DE) \perp (AH)$ (diagonales du carré ADHE).
Donc : $(DE) \perp (IJ)$.
De plus : $(IK) \perp (ADE)$; donc : $(IK) \perp (DE)$.
On en déduit que $(DE) \perp (IJK)$, car $(DE) \perp (IJ)$, $(DE) \perp (IK)$, (IJ) et (IK) sont deux droites sécantes du plan (IJK).

d) On a : $(BF) \perp (BC)$ et $(BF) \perp (AB)$.
Donc $(BF) \perp (ABC)$, car (AB) et (BC) sont deux droites du plan (ABC).
Or : $(AC) \subset (ABC)$; donc : $(BF) \perp (AC)$.

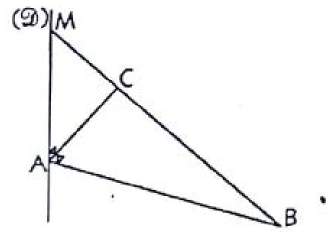
e) On a : $(IK) \perp (BCF)$ et $(CF) \subset (BCF)$;
donc : $(IK) \perp (CF)$.

f) Voir question *c)*.

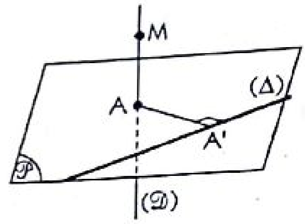
♦ Exercice 1.d p. 114

a) On a : $(MA) \perp (ABC)$ et $(BC) \subset (ABC)$; donc : $(MA) \perp (BC)$.

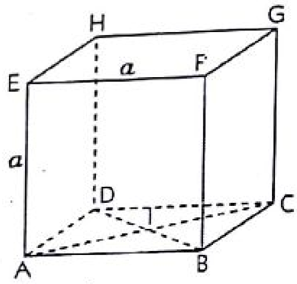
b) On a : (AB) $\perp$ (AC) et (AB) $\perp$ (AM) ;
donc : (AB) $\perp$ (AMC), car (AC) et (AM) sont deux droites sécantes du plan (AMC).
Or : (MC) $\subset$ (AMC) ; donc : (AB) $\perp$ (MC).
c) On a fait un raisonnement analogue à celui de *b)*.



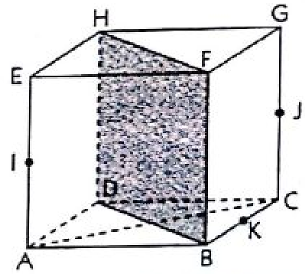
Exercice 1.e p. 114
Si M = A, alors (MA') $\perp$ (Δ).
On a : (𝒟) $\perp$ (𝒫) et (Δ) $\subset$ (𝒫) ; donc : (AM) $\perp$ (Δ).
Donc (Δ) $\perp$ (AA'M), car (MA) et (AA') sont deux droites sécantes du plan (AA'M).
Or : (MA') $\subset$ (AA'M) ; donc : (MA') $\perp$ (Δ).



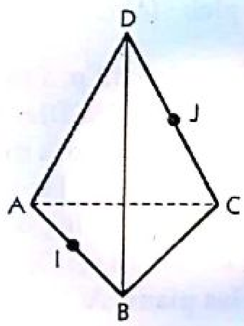
Exercice 1.f p. 114
a) On a : (GC) $\perp$ (ABC) ; donc : d(G, (ABC)) = GC = a.
b) [AC] et [BD] sont orthogonaux et se coupent en leur milieu I.
On a : (AI) $\perp$ (BD) et (AI) $\perp$ (BF) ;
donc (AI) $\perp$ (DBF), car (BD) et (BF) sont deux droites sécantes du plan (DBF).
On en déduit que : d(A, (DBF)) = AI = $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.
c) Le triangle ACG est rectangle en C ;
donc : $AG^2 = AC^2 + CG^2 = 3a^2$ et $AG = a\sqrt{3}$.



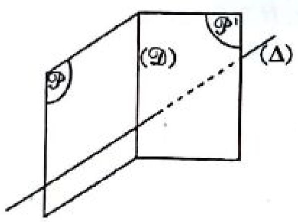
Exercice 1.g p. 114
1. On a : BI = BJ.
En effet, [BI] et [BJ] sont hypothénuses de deux triangles rectangles. Les côtés de l'angle droit mesurent AB et $\frac{AB}{2}$.
De même : DI = DJ et FI = FJ.
Donc, (BDF) est le plan médiateur de [IJ].
2. On a : ID = IF ; JD = JF et KD = KF.
Donc I, J et K appartiennent au plan médiateur de [DF].
3. On a : CD = CG ; BD = BG et ED = EG.
Donc, (BCE) est le plan médiateur du segment [DG].



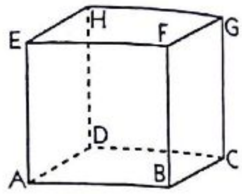
Exercice 1.h p. 114
1. On a : IA = IB ; CA = CB et DA = DB.
Donc (ICD) est le plan médiateur de [AB].
2. On a : JC = JD ; AC = AD et BC = BD.
Donc (JAD) est le plan médiateur de [CD].
3. Dans le plan (ABJ), (IJ) est la médiatrice de [AB].
Donc, (IJ) est perpendiculaire à (AB).
De même, (IJ) est perpendiculaire à [CD].



Exercice 2.a p. 119
(𝒫) $\perp$ (𝒫') ; donc il existe une droite (Δ) telle que :
(Δ) $\subset$ (𝒫) et (Δ) $\perp$ (𝒫').
Soit (Δ') une droite de (𝒫) perpendiculaire à (𝒟) dans (𝒫).
Dans (𝒫), on a : (Δ) $\perp$ (𝒟) et (Δ') $\perp$ (𝒟'). Donc : (Δ) // (Δ').
Or : (Δ) $\perp$ (𝒫) ; donc : (Δ') $\perp$ (𝒫').



♦ Exercice 2.b p. 119

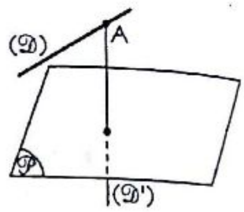


a) On a : (EA) ⊂ (EAC) et (EA) ⊥ (ABC).
En effet, (EA) ⊥ (AB) et (EA) ⊥ (AD).
De plus, (AB) et (AD) sont deux droites sécantes du plan (ABC). Donc : (EAC) ⊥ (ABC).

b) On a : (BD) ⊂ (HDB) et (BD) ⊥ (EAC).
En effet, (BD) ⊥ (AC) (diagonales du carré ABCD) et (BD) ⊥ (EA). Donc : (EAC) ⊥ (HDB).

c) On a : (FH) ⊂ (FCH) et (FH) ⊥ (AGE).
En effet, (FH) ⊥ (EG) (diagonales du carré EFGH) et (FH) ⊥ (EA). Donc : (FCH) ⊥ (AGE).

♦ Exercice 2.c p. 119



Existence

Soit A un point de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ la droite orthogonale à $(\mathscr{P})$ et passant par A.
Les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes en A, sinon $(\mathscr{D})$ serait orthogonale à $(\mathscr{P})$.
Elles déterminent donc un plan $(\mathscr{P}')$.
Le plan $(\mathscr{P}')$ contient $(\mathscr{D}')$ qui est orthogonale à $(\mathscr{P})$; donc : $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}')$.

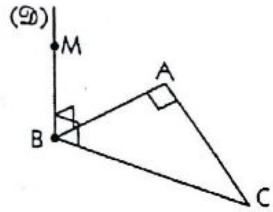
Unicité

Supposons que $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont deux plans contenant $(\mathscr{D})$ et perpendiculaires à $(\mathscr{P})$.
On a : $(\mathscr{D}) \subset (\mathscr{P}_1) \cap (\mathscr{P}_2)$; donc $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont, soit sécants suivant $(\mathscr{D})$, soit confondus.
Démontrons, par l'absurde, que $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ ne sont pas sécants.
Supposons que $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont sécants suivant $(\mathscr{D})$.
On a : $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}_2)$; donc $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{D})$, ce qui est contraire à l'hypothèse selon laquelle $(\mathscr{D})$ n'est pas orthogonale à $(\mathscr{P})$. On en déduit que $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ ne sont pas sécants.

Conclusion

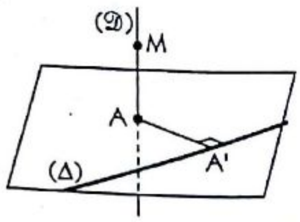
Il existe un unique plan contenant $(\mathscr{D})$ et perpendiculaire à $(\mathscr{P})$.

♦ Exercice 2.d p. 119



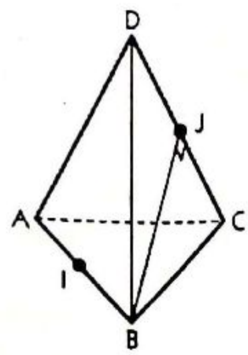
On a : $(\mathscr{D}) \perp$ (ABC) ; donc : (MB) ⊥ (AC).
(AC) ⊥ (AB) et (AC) ⊥ (MB) *entraîne* (AC) ⊥ (MAB).
Or : (AC) ⊂ (MAC) ; donc : (MAC) ⊥ (MAB).

♦ Exercice 2.e p. 119



Désignons par $(\mathscr{P}_1)$ le plan défini par M et (Δ).
Le plan défini par A' et $(\mathscr{D})$ est le plan (MAA').
On a : $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$; donc : $(\mathscr{D}) \perp (\Delta)$.
Or : (Δ) ⊥ (AA') ; donc : (Δ) ⊥ (MAA').
De plus : $(\Delta) \subset (\mathscr{P}_1)$; donc : $(\mathscr{P}_1) \perp$ (MAA').

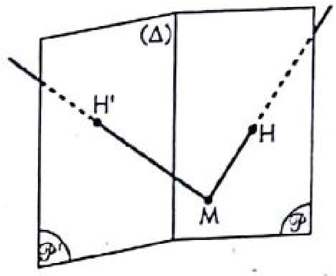
♦ Exercice 2.f p. 119



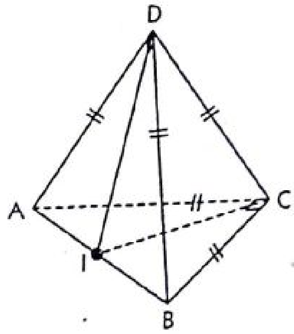
1. Les plans (ACD) et (BCD) sont sécants suivant la droite (CD).
Démontrons que la droite (CD) est orthogonale au plan (ABJ).
Les points A, B, J sont équidistants des points C et D.
Donc (ABJ) est le plan médiateur du segment [CD].
On en déduit : (CD) ⊥ (ABJ).
Or les plans (ACD) et (BCD) sont sécants suivant (CD).
Donc (ABJ) est perpendiculaire à (ACD) et à (BCD).

2. (CDI) est le plan médiateur du segment [AB].
Or les plans (ABC) et (ABD) sont sécants suivant (AB).
Donc (CDI) est perpendiculaire aux plans (ABC) et (ABD).
Les plans (BCD) et (ACD) sont sécants suivant (CD).
Or (CD) n'est pas orthogonale au plan (CDI) ; donc (CDI) n'est pas perpendiculaire aux plans (BCD) et (ACD).

Conclusion
Seuls les plans des faces ABC et ABD sont perpendiculaires au plan (CDI).
3. On a : (CD) $\perp$ (ABJ) et (CD) $\subset$ (CDI). Donc : (ABJ) $\perp$ (CDI).



♦ **Exercice 2.g p. 119**
On a : (MH) $\perp$ ($\mathcal{P}$) ; donc : (Δ) $\perp$ (MH). De même : (Δ) $\perp$ (MH').
Or, (MH) et (MH') sont deux droites sécantes du plan (MHH').
Donc : (Δ) $\perp$ (MHH').
On en déduit que le plan (MHH') est perpendiculaire aux plans ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{P}'$) qui sont sécants suivant (Δ).



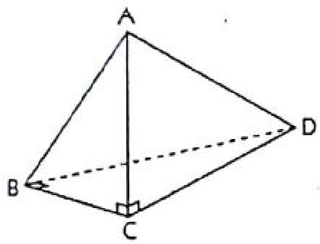
♦ **Exercice 2.h p. 119**
Désignons par I le milieu de [AB].
Démontrons que ICD est rectangle et isocèle en I.
[ID] et [IC] sont les hauteurs issues du sommet de l'angle droit des triangles isocèles ABD et ABC. Donc : IC = ID.
ABD est rectangle et isocèle en D ; donc : $AB^2 = 2AD^2$.
ADI est rectangle en I ; donc : $ID^2 = AD^2 - \frac{AB^2}{2} = \frac{AD^2}{2}$.
On en déduit que : $IC^2 + ID^2 = AD^2 = DC^2$.
Donc, le triangle ICD est rectangle et isocèle en I.
D'où : (IC) $\perp$ (ID).
Or (IC) $\perp$ (AB), car (IC) est la médiane issue du sommet C du triangle rectangle ABC.
D'où : (IC) $\perp$ (ABD), car (AB) et (ID) sont deux droites sécantes du plan (ABD).
De plus : (IC) $\subset$ (ABC) ; donc : (ABD) $\perp$ (ABC).

Exercices d'apprentissage

DROITES ET PLANS ORTHOGONAUX

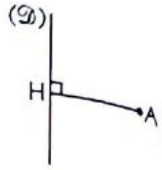
♦ **Exercice 1 p. 120**
On a : ($\mathcal{D}_1$) $\perp$ ($\mathcal{D}_2$).
a) Supposons que ($\mathcal{D}_1$) et ($\mathcal{D}_2$) sont sécantes en I et désignons par ($\mathcal{P}$) le plan passant par I et orthogonal à ($\mathcal{D}_2$).
Démontrons que : ($\mathcal{D}_1$) $\subset$ ($\mathcal{P}$).
On a : ($\mathcal{D}_1$) $\perp$ ($\mathcal{D}_2$) et ($\mathcal{D}_2$) $\perp$ ($\mathcal{P}$) ; donc : ($\mathcal{D}_1$) // ($\mathcal{P}$).
Or : I $\in$ ($\mathcal{D}_1$) $\cap$ ($\mathcal{P}$) ; donc : ($\mathcal{D}_1$) $\subset$ ($\mathcal{P}$).
Le plan ($\mathcal{P}$) ainsi construit répond à la question.
b) Supposons que ($\mathcal{D}_1$) et ($\mathcal{D}_2$) sont non coplanaires.
Soit J un point de ($\mathcal{D}_2$) et ($\mathcal{P}$) le plan passant par J et orthogonal à ($\mathcal{D}_2$) ; on a ($\mathcal{P}'$) // ($\mathcal{D}_1$).
Le plan ($\mathcal{P}$) contenant ($\mathcal{D}_1$) et parallèle à ($\mathcal{P}'$) répond à la question.

♦ **Exercice 2 p. 120**
On a : (Δ) $\perp$ ($\mathcal{D}_1$) et (Δ) $\perp$ ($\mathcal{D}_2$).
Si les droites ($\mathcal{D}_1$) et ($\mathcal{D}_2$) étaient sécantes, on aurait (Δ) $\perp$ ($\mathcal{P}$).
Or (Δ) n'est pas orthogonale à ($\mathcal{P}$) ; donc, les droites ($\mathcal{D}_1$) et ($\mathcal{D}_2$) sont parallèles.



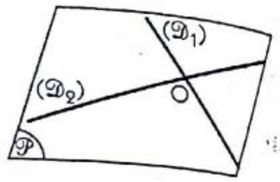
♦ **Exercice 3 p. 120**
On a : (BC) $\perp$ (BD) et (AC) $\perp$ (BD), car (AC) $\perp$ (BCD).
Or (AC) et (BC) sont deux droites sécantes du plan (ABC).
Donc : (BD) $\perp$ (ABC).
Par suite, (BD) $\perp$ (AB) et le triangle ABD est rectangle en B.

♦ Exercice 4 p. 120



Désignons par $(\mathscr{P}')$ le plan passant par A et orthogonal à $(\mathscr{D})$.
Démontrons que la droite (AH) est incluse dans le plan $(\mathscr{P})$.
On a : $(AH) \perp (\mathscr{D})$ car $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P}')$; de plus : $A \in (\mathscr{D})$.
Donc : $(AH) \perp (\mathscr{D})$ et $(AH) \subset (\mathscr{P})$.
Dans $(\mathscr{P})$, il existe une seule droite passant par A et perpendiculaire à $(\mathscr{D})$. Donc : $H = H'$.

♦ Exercice 5 p. 120



1. On a : $(\mathscr{P}_1) \perp (\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{P}_2) \perp (\mathscr{D}_2)$. Supposons que : $(\mathscr{P}_1) // (\mathscr{P}_2)$.
On a : $(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{P}_1)$; donc : $(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{P}_2)$ et par suite $(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{D}_2)$.
Or : $(\mathscr{D}_2) \perp (\mathscr{P}_2)$; donc : $(\mathscr{D}_1) // (\mathscr{P}_2)$;
ce qui est absurde car $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont sécantes.
Donc $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont sécantes.

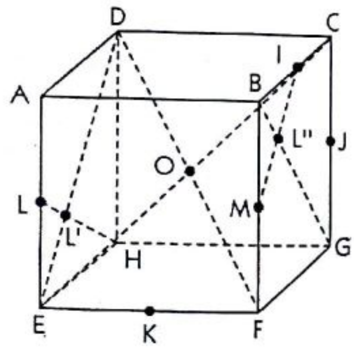
2. Posons : $(\Delta) = (\mathscr{P}_1) \cap (\mathscr{P}_2)$.
On a : $(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{P}_1)$ et $(\Delta) \subset (\mathscr{P}_1)$; donc : $(\Delta) \perp (\mathscr{P}_1)$.
De même : $(\Delta) \perp (\mathscr{D}_2)$. Donc : $(\Delta) \perp (\mathscr{P})$, car $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont deux droites sécantes du plan $(\mathscr{P})$.

♦ Exercice 6 p. 120

1. Le triangle OBC est isocèle en O et (OI) en est la médiane issue de O ; donc : $(OI) \perp (BC)$.
Or : $(BC) // (AD)$; donc : $(OI) \perp (AD)$.
Les points O et I sont équidistants de A et F ; donc O et I appartiennent au plan médiateur de [AF], d'où $(AF) \perp (OI)$. Or : $(KL) // (AF)$; donc : $(OI) \perp (KL)$.

2. On a : $(BG) \perp (EF)$, car $(EF) \perp (BCG)$; de plus : $(BG) \perp (FC)$ (diagonales du carré BCGF).
Donc : $(BG) \perp (EFC)$.

3. On a : $(IJ) // (BG)$ (droite des milieux dans le triangle BCG).
Or : $(BG) \perp (EFC)$; donc : $(IJ) \perp (EFC)$.
On en déduit que $(IJ) \perp (EC)$, car $(EC) \subset (EFC)$.



4. On a : $(BG) // (AH)$
Or : $(BG) \perp (EFC)$; donc : $(AH) \perp (EFC)$.
La droite (Δ), parallèle à (AH) passant par L, est donc orthogonale à (EFC)
De plus, (Δ) et (ED) sont sécantes dans le plan (ADH).
Donc le point d'intersection de (Δ) et (ED) est le projeté orthogonal L' de L sur (EFC).

5. Désignons par $(\mathscr{P})$ le plan passant par L et orthogonal à (BG).
On a : $(\mathscr{P}) // (EFC)$, car $(BG) \perp (EFC)$.
Désignons par M le milieu de [BF].
La droite (LM) est parallèle à (EF) ; donc elle est incluse dans $(\mathscr{P})$.
De même la droite (IM), parallèle à (CF), est incluse dans $(\mathscr{P})$. $(\mathscr{P})$ est le plan (IML)
On a : $(IML) // (EFC)$; donc : $(BG) \perp (IML)$.
Or, (BG) et (IM) sont sécantes.
Donc le point d'intersection L'' des droites (BG) et (IM) est le point d'intersection de (IML) et (BG).
On en déduit que L'' est le projeté orthogonal de L sur la droite (BG).

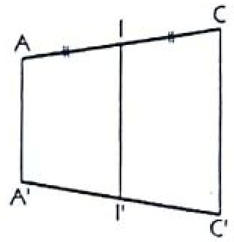
♦ Exercice 7 p. 120

1. Soit M un point de $(\mathscr{P})$.
$M \in (\Sigma) \Leftrightarrow OM^2 = r^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM})^2 = r^2 \Leftrightarrow OH^2 + HM^2 + 2\,\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{HM} = r^2$.
Or : $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{HM}$; donc : $M \in (\Sigma) \Leftrightarrow OH^2 + HM^2 = r^2 \Leftrightarrow HM^2 = r^2 - OH^2 \Leftrightarrow HM^2 = r^2 - d^2$.

2. *a)* On a : $r < d \Leftrightarrow r^2 - d^2 < 0$.
Donc, l'équation $HM^2 = r^2 - d^2$ n'a pas de solution dans $(\mathscr{P})$. On en déduit que : $(\Sigma) \cap (\mathscr{P}) = \varnothing$.
b) On a : $r = d \Leftrightarrow r^2 - d^2 = 0$.
Donc, l'équation $HM^2 = 0$ a pour solution {H}.

c) On a : $r > d \Leftrightarrow r^2 - d^2 > 0$.
$HM^2 = r^2 - d^2 \Leftrightarrow HM = \sqrt{r^2 - d^2}$.
Donc, $(\Sigma) \cap (\mathcal{P})$ est le cercle de $(\mathcal{P})$ de centre H et de rayon $\sqrt{r^2 - d^2}$.

Exercice 8 p. 120

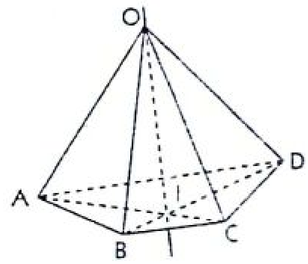


• Supposons que : $(AC) \perp (\mathcal{P})$.
Alors, $A' = C' = I'$ et $I' = \text{mil}\,[A'C']$.
• Supposons que (AC) n'est pas orthogonale à $(\mathcal{P})$.
En appliquant la propriété de Thalès dans le plan (ACA'),
on obtient : $I' = \text{mil}\,[A'C']$. De même : $J' = \text{mil}\,[B'D']$.

2. a) Supposons que les points A', B', C' et D' sont alignés sur une droite (Δ).
L'un au moins des 4 points A, B, C et D n'appartient pas à $(\mathcal{P})$, sinon ils seraient coplanaires, ce qui est absurde.
Supposons donc que $A \notin (\mathcal{P})$ et désignons par $(\mathcal{Q})$ le plan contenant (Δ) et A. On a : $(BB') \,//\, (AA')$.
Or : $(AA') \subset (\mathcal{Q})$; donc : $(BB') \,//\, (\mathcal{Q})$.
De plus : $B' \in (\mathcal{Q})$; donc : $(BB') \subset (\mathcal{Q})$ et par suite, $B \in (\mathcal{Q})$.
De même, on démontre que les points C et D appartiennent à $(\mathcal{Q})$,
Les points A, B, C et D sont donc éléments de $(\mathcal{Q})$, ce qui est absurde.
Donc les points A', B' et D' ne sont pas alignés.

b) • Supposons que A' B' C' D' est un parallélogramme.
Les segments [A'C'] et [B'D'] ont donc le même milieu, c'est-à-dire : $I' = J'$; par suite : $(IJ) \perp (\mathcal{P})$.
• Réciproquement, supposons que $(IJ) \perp (\mathcal{P})$. On a : $I' = J'$.
Par suite, les segments [A'C'] et [B'D'] ont le même milieu.
On en déduit que A'B'C'D' est un parallélogramme.

Exercice 9 p. 120



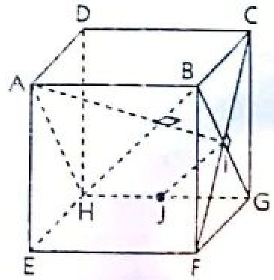
On a : $\begin{cases}(OI) \subset (AOC)\\(OI) \subset (BOD)\end{cases}$. Or : $\begin{cases}(OP) \perp (AOC)\\(OQ) \perp (BOD)\end{cases}$;

donc : $\begin{cases}(OP) \perp (OI)\\(OQ) \perp (OI)\end{cases}$ et $(OI) \perp (OPQ)$.

De plus : $(OR) \perp (OPQ))$; donc : $(OI) \,//\, (OR)$.
On en déduit que les points O, I et R sont alignés.

Exercice 10 p. 120

1. On a : $(AB) \perp (BCG)$; donc : $(AB) \perp (FC)$.
De plus : $(FC) \perp (BG)$ (diagonales d'un carré).
On en déduit que $(FC) \perp (ABG)$, car (BG) et (AB) sont deux droites sécantes du plan (ABG).
On a : $H \in (ABG)$; donc : $(BH) \subset (ABG)$. Par suite : $(BH) \perp (FC)$.



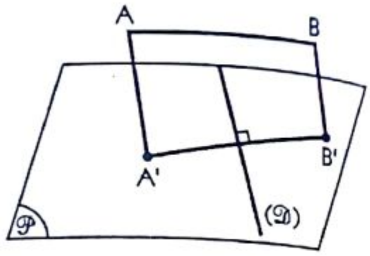
2. On a : $(BH) \perp (FC)$. Démontrons que : $(AC) \perp (BH)$.
On a : $(AC) \perp (DB)$ (diagonales d'un carré) et $(AC) \perp (DH)$.
Donc : $(AC) \perp (BDH)$; par suite : $(AC) \perp (BH)$.
On a : $(AC) \perp (BH)$ et $(BH) \perp (FC)$; donc : $(BH) \perp (ACF)$.
Or : $(AI) \subset (ACF)$; donc : $(BH) \perp (AI)$.
De plus, les droites (BH) et (AI) sont incluses dans le plan (ABG).
Donc, (BH) et (AI) sont perpendiculaires.

3. Dans le triangle BGH, on a : $\begin{cases}I = \text{mil}\,[BG]\\J = \text{mil}\,[GH]\end{cases}$; donc : $(IJ) \,//\, (BH)$.
Or : $(BH) \perp (AI)$; donc : $(IJ) \perp (AI)$.
On en déduit que le triangle AIJ est rectangle en I.

Exercice 11 p. 120

1. On a : $A' = B' \Leftrightarrow (AB) \perp (\mathcal{P})$.
Or (AB) n'est pas orthogonale à $(\mathcal{P})$; donc : $A' \neq B'$.

2. • Supposons que : $(\mathcal{D}) \perp (AB)$.
On a : $(\mathcal{D}) \perp (AA')$, car $(AA') \perp (\mathcal{P})$; donc : $(\mathcal{D}) \perp (ABA')$.
Or : $B' \in (ABA')$, car $(BB') \,//\, (ABA')$ et $B \in (ABA')$;
donc : $(\mathcal{D}) \perp (A'B')$.
• Réciproquement, supposons que : $(\mathcal{D}) \perp (A'B')$.
On a : $(\mathcal{D}) \perp (AA')$; donc : $(\mathcal{D}) \perp (AA'B')$.
Or : $B \in (AA'B')$; donc : $(\mathcal{D}) \perp (AB)$.



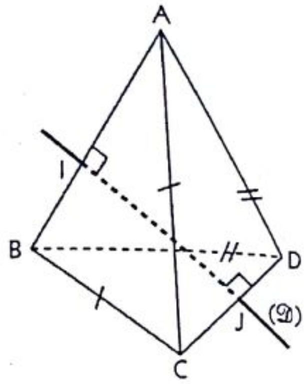
♦ Exercice 12 p. 120

1. Soit I le milieu de [AB].
On a : $(CI) \perp (AB)$ (ABC est isocèle en C)
et $(DI) \perp (AB)$ (ABD est isocèle en D) ; donc : $(AB) \perp (CDI)$.
Or : $(CD) \subset (CDI)$; donc : $(AB) \perp (CD)$.

2. On a : $A \in (\mathcal{D}_A)$ et $(\mathcal{D}_A) \perp (BCD)$; $B \in (\mathcal{D}_B)$ et $(\mathcal{D}_B) \perp (ACD)$.
Posons : $(\mathcal{Q}) = (ABJ)$, où $J \in (\mathcal{D}) \cap (CD)$.
• Démontrons que les droites $(\mathcal{D}_A)$ et $(\mathcal{D}_B)$ sont incluses dans $(\mathcal{Q})$.
On a : $(\mathcal{D}_A) \perp (CD)$, car $(\mathcal{D}_A) \perp (BCD)$.

$$(CD) \perp (\mathcal{Q}), \text{ car } \begin{cases} (CD) \perp (AB) \\ (CD) \perp (IJ) \end{cases} ; \text{ donc : } (\mathcal{D}_A) \,//\, (\mathcal{Q}).$$

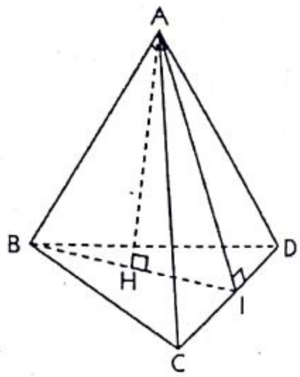
Or : $A \in (\mathcal{D}_A) \cap (\mathcal{Q})$; donc : $(\mathcal{D}_A) \subset (\mathcal{Q})$. De même : $\mathcal{D}_B \subset (\mathcal{Q})$.
Dans le plan $(\mathcal{Q})$, considérons le triangle ABJ : $(\mathcal{D})$ est la hauteur issue de J ; $(\mathcal{D}_A)$ est la hauteur issue de A, car $(\mathcal{D}_A) \perp (BJ) \subset (BCD)$; $(\mathcal{D}_B)$ est la hauteur issue de B.
Donc les droites $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{D}_A)$ et $(\mathcal{D}_B)$ sont concourantes ; leur point de concours est l'orthocentre du triangle ABJ.



♦ Exercice 13 p. 121

1. Démontrons que : $(CD) \perp (ABI)$.
On a : $(AB) \perp (ACD)$, car : $(AB) \perp (AD)$ et $(AB) \perp (AC)$;
donc : $(AB) \perp (CD)$.
On a : $(CD) \perp (AI)$ et $(CD) \perp (AB)$, donc : $(CD) \perp (ABI)$;
par suite : $(CD) \perp (BI)$.
On en déduit que (BI) est une hauteur du triangle BCD.

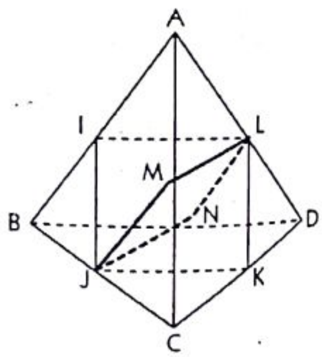
2. On a : $(CD) \perp (ABI)$; donc : $(CD) \perp (AH)$.
De plus : $(AH) \perp (BI)$; donc : $(AH) \perp (BCD)$, car (CD) et (BI) sont deux droites sécantes du plan (BCD).



♦ Exercice 14 p. 121

1. Dans le triangle ABC, on a : $(IJ) \,//\, (AC)$ et $IJ = \frac{1}{2} AC$.
De même : $KL = \frac{1}{2} AC$ et $(KL) \,//\, (AC)$; $(JK) \,//\, (IL)$ et $JK = \frac{1}{2} BD$.
Or : $AC = BD$; donc : $IJ = JK = KL = LI$.
On en déduit que IJKL est un losange.

On a, dans le triangle ACD : $(ML) \,//\, (CD)$ et $ML = \frac{1}{2} CD$.
De même : $(LN) \,//\, (AB)$ et $LN = \frac{1}{2} AB$.
Or : $AB = CD$; donc : $LN = ML = NJ = JM$ et MLNJ est un losange.



2. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires ; donc : $(JL) \perp (MN)$ et $(IK) \perp (JL)$.
On a : $(IM) \,//\, (NK) \,//\, (BC)$; donc : $N \in (IMK)$.
(JL) étant orthogonale aux deux droites sécantes (MN) et (IK) du plan (IMK), on a : $(JL) \perp (IMK)$.

3. On a : $(JL) \perp (IM)$ et $(IM) \,//\, (BC)$; donc : $(JL) \perp (BC)$. De même : $(JL) \perp (AD)$.

Exercice 15 p. 121

Existence

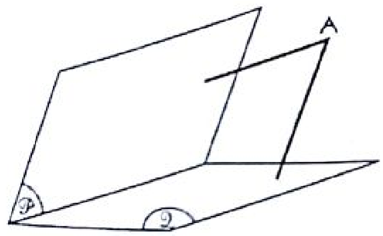
Désignons par $(\mathscr{D}_1)$ la droite orthogonale à $(\mathscr{P})$ et contenant A, et par $(\mathscr{D}_2)$ la droite contenant A et orthogonale à $(\mathscr{Q})$.

$(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont sécantes. En effet, si $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ étaient parallèles, $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ seraient parallèles.

Soit $(\mathscr{H})$ le plan défini par $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$.

On a : $(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{P})$ et $(\mathscr{D}_1) \subset (\mathscr{H})$; donc : $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{H})$.

De même : $(\mathscr{Q}) \perp (\mathscr{H})$.



Unicité

Soit $(\mathscr{H})$ et $(\mathscr{Q}')$ deux plans contenant A et perpendiculaires à $(\mathscr{P})$ et à $(\mathscr{Q})$. Posons : $(\Delta) = (\mathscr{P}) \cap (\mathscr{Q})$.

On a : $(\mathscr{H}) \perp (\mathscr{P})$ et $(\mathscr{H}) \perp (\mathscr{Q})$; donc : $(\Delta) \perp (\mathscr{H})$. De même : $(\Delta) \perp (\mathscr{H}')$.

On a : $(\Delta) \perp (\mathscr{H})$ et $(\Delta) \perp (\mathscr{H}')$; donc : $(\mathscr{H}) \,//\, (\mathscr{H}')$. Or : $A \in (\mathscr{H}) \cap (\mathscr{H}')$; donc : $(\mathscr{H}) = (\mathscr{H}')$.

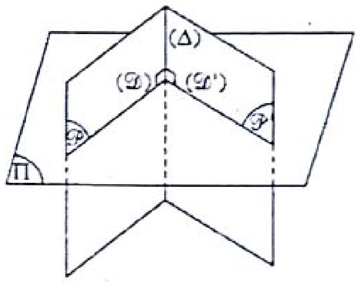
Exercice 16 p. 121

- Supposons que : $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}')$.

On a : $(\mathscr{D}) \perp (\Delta)$, car $(\Delta) \perp (\Pi)$; de plus : $(\mathscr{D}) \subset (\Pi)$.

Donc : $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P}')$, car (Δ) et $(\mathscr{D}')$ sont deux droites sécantes de $(\mathscr{P}')$.

On a : $(\mathscr{D}) \subset (\mathscr{P})$ et $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P}')$; donc : $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}')$.



- Réciproquement, supposons que : $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}')$.

On a : $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}')$, donc $(\mathscr{P})$ contient une droite $(\mathscr{D}_1)$ orthogonale à $(\mathscr{P}')$.

On a : $(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{P}')$ et $(\Delta) \subset (\mathscr{P}')$; donc : $(\mathscr{D}_1) \perp (\Delta)$.

Dans $(\mathscr{P})$: $(\mathscr{D}) \perp (\Delta)$ et $(\mathscr{D}_1) \perp (\Delta)$; donc : $(\mathscr{D}) \,//\, (\mathscr{D}_1)$.

On a : $(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{P}')$ et $(\mathscr{D}_1) \,//\, (\mathscr{D})$; donc : $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P}')$. Or : $(\mathscr{D}') \subset (\mathscr{P}')$; donc : $(\mathscr{D}') \perp (\mathscr{D})$.

Exercice 17 p. 121

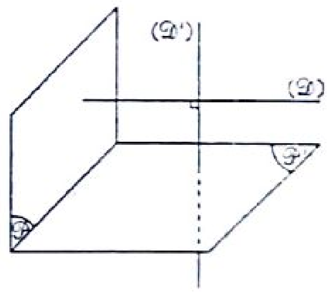
- Supposons $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}')$.

On a : $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}')$ et $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$; donc : $(\mathscr{D}) \,//\, (\mathscr{P}')$.

On en déduit qu'il existe $(\mathscr{D}'') \subset (\mathscr{P}')$ tel que : $(\mathscr{D}) \,//\, (\mathscr{D}'')$.

Or : $(\mathscr{D}') \perp (\mathscr{P}')$; donc : $(\mathscr{D}') \perp (\mathscr{D}'')$.

On a : $(\mathscr{D}') \perp (\mathscr{D}'')$ et $(\mathscr{D}'') \,//\, (\mathscr{D})$; donc : $(\mathscr{D}') \perp (\mathscr{D})$.



- Réciproquement, supposons $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}')$.

On a : $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$ et $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}')$; donc : $(\mathscr{D}') \,//\, (\mathscr{P})$.

On en déduit qu'il existe une droite $(\mathscr{D}_1)$ du plan $(\mathscr{P})$ telle que : $(\mathscr{D}_1) \,//\, (\mathscr{D}')$.

On a : $(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{P}') \,//\, (\mathscr{D}')$; donc : $(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{P}')$. Or : $(\mathscr{D}_1) \subset (\mathscr{P})$; donc : $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}')$.

Exercice 18 p. 121

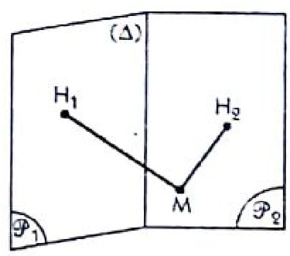
Supposons que : $M \notin (\mathscr{P}_1) \cup (\mathscr{P}_2)$. On a : $M \notin (\mathscr{P}_1)$; donc : $M \neq H_1$.

Démontrons par l'absurde que : $H_2 \notin (MH_1)$.

On a : $H_2 \in (MH_1)$; donc : $(MH_1) \perp (\mathscr{P}_2)$.

Or : $(MH_1) \perp (\mathscr{P}_1)$; donc : $H_2 \in (MH_1)$ et $(\mathscr{P}_1) \,//\, (\mathscr{P}_2)$.

Ceci est absurde, car $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont sécants.



Démontrons que le plan (MH_1H_2) est perpendiculaire à $(\mathscr{P}_1)$ et à $(\mathscr{P}_2)$.

On a : $\begin{cases}(MH_1) \perp (\mathscr{P}_1)\\(MH_2) \perp (\mathscr{P}_2)\end{cases}$; donc : $\begin{cases}(MH_1) \perp (\Delta)\\(MH_2) \perp (\Delta)\end{cases}$, car $(\Delta) = (\mathscr{P}_1) \cap (\mathscr{P}_2)$.

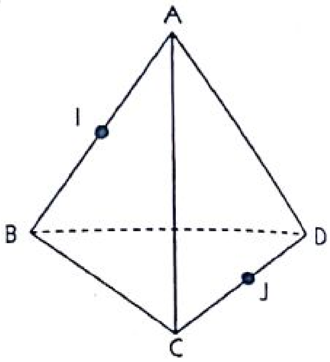
$(\Delta) \perp (MH_1)$ et $(\Delta) \perp (MH_2)$; donc : $(\Delta) \perp (MH_1H_2)$. Par suite : $(MH_1H_2) \perp (\mathscr{P}_1)$ et $(MH_1H_2) \perp (\mathscr{P}_2)$.

Exercice 19 p. 121

- Le triangle ABC est équilatéral ; donc : $(CI) \perp (AB)$.

De même : $(DI) \perp (AB)$.

On a : $\begin{cases}(AB) \perp (CI) \\ (AB) \perp (DI)\end{cases}$; donc : $(AB) \perp (ICD)$.



Or : $(AB) \subset (JAB)$; donc : $(ICD) \perp (JAB)$.

2. On a : $\begin{cases}(AB) \perp (ICD) \\ (AB) \subset (ABC)\end{cases}$; donc : $(ABC) \perp (ICD)$.

De même : $(ABD) \perp (ICD)$.

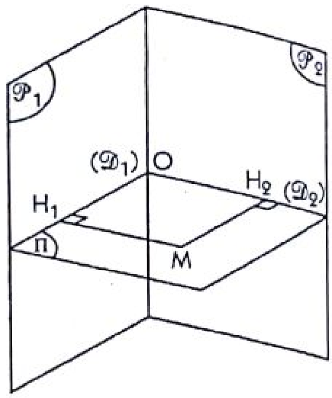
On a : $\begin{cases}(BJ) \perp (CD) \\ (AJ) \perp (CD)\end{cases}$, car les triangles BCD et ACD sont équilatéraux.

Donc : $(CD) \perp (ABJ)$.

Or : $(CD) \subset (BCD)$ et $(CD) \subset (ACD)$; donc : $\begin{cases}(ABJ) \perp (ACD) \\ (ABJ) \perp (BCD)\end{cases}$.

♦ **Exercice 20 p. 121**

1. Soit M un point du plan (Π), H_1 son projeté orthogonal sur $(\mathcal{P}_1)$ et H_2 son projeté orthogonal sur $(\mathcal{P}_2)$.



Notons : $(D_1) = (\Pi) \cap (\mathcal{P}_1)$; $(D_2) = (\Pi) \cap (\mathcal{P}_2)$ et $(D_1) \cap (D_2) = \{O\}$.

On a : $H_1 \in (D_1)$ et $H_2 \in (D_2)$; donc : $d(M,\mathcal{P}_1) = d(M,(D_1))$ et $d(M,\mathcal{P}_2) = d(M,(D_2))$.

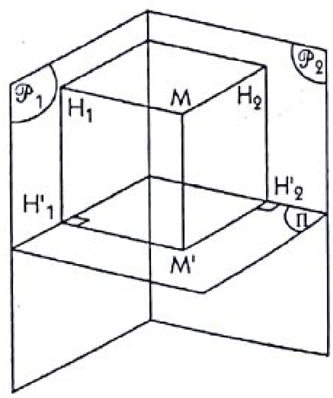
$d(M,\mathcal{P}_1) = d(M,(D_1)) = MH_1$ et $d(M,\mathcal{P}_2) = d(M,(D_2)) = MH_2$;

$M \in (\mathcal{F}) \Leftrightarrow d(M,(D_1)) = d(M,(D_2))$.

Or l'ensemble des points équidistants de deux droites sécantes est dans leur plan, la réunion de leurs deux bissectrices.

Donc $(\Pi) \cap (\mathcal{F})$ est la réunion des bissectrices des droites (D_1) et (D_2).

2. Notons H_1 et H_2 les projetés orgthogonaux respectifs de M sur $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$, H'_1 et H'_2 les projetés orthogonaux respectifs de M' sur $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.



Démontrons que : $MH_1 = M'H'_1$ et $MH_2 = M'H'_2$.

Supposons que : $M \in (\mathcal{P}_1) \cup (\Pi)$.

On a : $(MH_1) \perp (\mathcal{P}_1)$ et $(M'H'_1) \perp (\mathcal{P}_1)$; donc : $(MH_1) // (M'H'_1)$.

Soit $(\mathcal{Q}_M)$ le plan défini par les droites strictement parallèles (MH_1) et $(M'H'_1)$. $(\mathcal{Q}_M)$ et $(\mathcal{P}_1)$ sont sécantes suivant la droite $(H_1H'_1)$.

Or : $(MM') // (\mathcal{Q}_M)$ et $(MM') // (\mathcal{P}_1)$; donc : $(MM') // (H_1H'_1)$.

On en déduit que $MH_1H'_1M'$ est un parallélogramme.

D'où : $MH_1 = M'H'_1$.

On démontre aisément que $MH_1H'_1M'$ est un rectangle.

On démontre de même que : si $M \in (\mathcal{P}_2) \cup (\Pi)$, $MH_2 = M'H'_2$.

3. L'ensemble des points M dont le projeté orthogonal sur (Π) est une droite (D) de (Π) est le plan contenant (D) et perpendiculaire à (Π).

Donc d'après **1.**, $(\mathcal{F})$ est la réunion des plans (Q) et 'Q') contenant (D_1) et (D_2) respectivement et perpendiculaires à (Π).

Les plans (Q) et (Q') contiennent (Δ).

En effet $(\Delta) \perp (\Pi)$, $(Q) \perp (\Pi)$ et $(Q') \perp (\Pi)$; donc : $(\Delta) // (Q)$ et $(\Delta) // (Q')$.

Or (Δ) passe par le point d'intersection de (D_1) et (D_2) ; donc : $(\Delta) \subset (Q')$.

D'autre part : $(Q) \perp (Q')$.

En effet, $(D_1) \perp (D_2)$ et $(D_1) \perp (\Delta)$; donc : $(D_1) \perp (Q')$ et par suite, $(Q) \perp (Q')$, car $(D_1) \subset (Q)$.

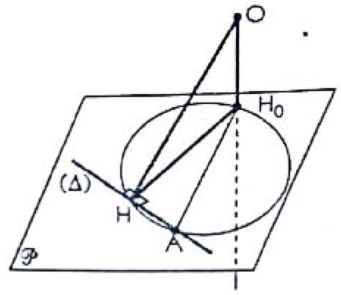
Exercices d'approfondissement

♦ **Exercice 21 p. 121**

Soit H_0 le projeté orthogonal de O sur $(\mathcal{P})$.

Notons $(\mathcal{P}_H)$ le plan contenant O et perpendiculaire à (Δ).

On a : $(\mathcal{P}_H) \cap (\Delta) = \{H\}$. Démontrons que : $H_0 \in (\mathcal{P}_H)$.
On a : $(\Delta) \perp (\mathcal{P}_H)$ et $(OH_0) \perp (\Delta)$; donc : $(OH_0) // (\mathcal{P}_H)$.
Or : $O \in (\mathcal{P}_H)$; donc : $(OH_0) \subset (\mathcal{P}_H)$; par suite : $H_0 \in (\mathcal{P}_H)$.
En fait, H_0 est une position particulière de H.
Lorsque $(\Delta) = (AH_0)$, on a : $H = H_0$.
Distinguons les 2 cas suivants :

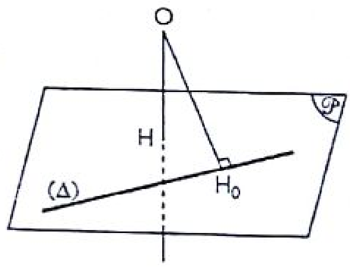


1er cas : $A \neq H_0$.
On a : $(\mathcal{P}_H) = (OH_0H)$. Or : $(\Delta) \perp (\mathcal{P}_H)$; donc : $(H_0H) \perp (\Delta)$.
D'où le triangle AH_0H est rectangle en H et H appartient au cercle de diamètre $[AH_0]$ privé de A.
Réciproquement, soit H' un point du cercle de diamètre $[AH_0]$, privé de A et de H_0.
Démontrons que H' est le projeté orthogonal de O sur $(\Delta) = (AH')$.
Pour cela, il suffit de démontrer que le plan (OH_0H') est perpendiculaire à $(\Delta) = (AH')$.
On a : $(AH') \perp (H_0H')$, car H' appartient au cercle de diamètre $[AH_0]$.
De plus $(OH_0) \perp (AH')$, car $(OH_0) \perp (\mathcal{P})$ et $(AH') \subset (\mathcal{P})$. Donc : $(AH') \perp (OH_0H')$.
Le lieu de H est le cercle de diamètre $[AH_0]$, privé de A.

2e cas : $A = H_0$.
Le lieu de H est $\{A\}$.

Exercice 22 p. 121

H_0 est le projeté orthogonal de O sur (Δ).
H_0 est une position particulière de H : lorsque $(\mathcal{P})$ est le plan contenant H_0 et orthogonal à (OH_0).
Lorsque $(\mathcal{P})$ est le plan défini par O et (Δ), on a : $H = O$.
Supposons que $(\mathcal{P})$ n'ait pas l'une des positions particulières définies ci-dessus.



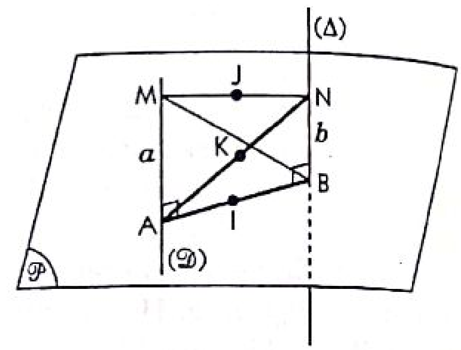
On a : $(OH) \perp (\mathcal{P})$; donc : $(OH) \perp (HH_0)$, car $(HH_0) \subset (\mathcal{P})$.
Par suite, le triangle OH_0H est rectangle en H.
De plus, H appartient au plan $(\mathcal{Q})$ passant par O et orthogonal à (Δ). En effet, $(OH) \perp (\Delta)$ et $(\Delta) \perp (\mathcal{Q})$; donc : $(OH) // (\mathcal{Q})$; par suite : $(OH) \subset (\mathcal{Q})$ et $H \in (\mathcal{Q})$.
On en déduit que H appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[OH_0]$ dans le plan $(\mathcal{Q})$.
Réciproquement, soit H' un point du cercle $(\mathcal{C})$ privé de O et de H_0.
Désignons par $(\mathcal{P})$ le plan défini par H' et (Δ).
Démontrons que H' est le projeté orthogonal de O sur $(\mathcal{P})$.
Pour cela, il suffit de démontrer que $(OH') \perp (\mathcal{P})$.
On a : $(\Delta) \perp (\mathcal{Q})$ et $(OH') \perp (\Delta)$; de plus : $(OH') \perp (H'H_0)$, car $H' \in (\mathcal{C})$.
Donc : $(OH') \perp (\mathcal{P})$, car (Δ) et $(H'H_0)$ sont deux droites sécantes du plan $(\mathcal{P})$.
On en déduit que H' est le projeté orthogonal de O sur $(\mathcal{P})$.
D'où le lieu de H est le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[OH_0]$ dans le plan $(\mathcal{Q})$ passant par O et orthogonal à (Δ).

Exercice 23 p. 121

- Dans le triangle rectangle ADC, on a : $DC^2 = AD^2 + AC^2$.
Dans le triangle rectangle ABC, on a : $BD^2 = AD^2 + AB^2$.
Dans le triangle rectangle ABC, on a : $AB^2 = AC^2 + BC^2$.
On en déduit que : $BD^2 = AD^2 + AC^2 + BC^2$ et $BD^2 = DC^2 + BC^2$.
Donc le triangle BCD est rectangle en C et par suite, (BC) et (CD) sont perpendiculaires.
- On a : $(BC) \perp (CD)$ et $(BC) \perp (AD)$; donc : $(BC) \perp (DAC)$.
Or : $(BC) \subset (DBC)$; donc : $(DAC) \perp (DBC)$.
a) On a : $(BC) \perp (DAC)$; donc : $(BC) \perp (AI)$.
De plus : $(AI) \perp (CD)$; donc : $(AI) \perp (BCD)$, car (BC) et (CD) sont deux droites sécantes du plan (BCD).
b) On a : $(AI) \perp (BCD)$ et $(IJ) \subset (BCD)$; donc : $(AI) \perp (IJ)$. Par suite, le triangle AIJ est rectangle en I.
c) On a : $(IA) \perp (BCD)$ et $(JB) \subset (BCD)$; donc : $(AI) \perp (JB)$.

De plus : (AJ) ⊥ (JB) ; donc : (JB) ⊥ (AIJ) et (JB) ⊥ (IJ).
On en déduit que le triangle BIJ est rectangle en J. De plus, le triangle BCI est rectangle en C ; donc les points B, C, I et J appartiennent au cercle de diamètre [IB] dans le plan (BCD).

♦ Exercice 24 p. 121



1. Le triangle MAB est rectangle en A ;
donc : $MB^2 = MA^2 + AB^2$ et $MB^2 = a^2 + 1$.
On a : (Δ) ⊥ (𝒫) ; donc : (NB) ⊥ (MB).
Par suite, le triangle MNB est rectangle en B ;
donc : $MN^2 = MB^2 + NB^2 = a^2 + b^2 + 1$.

2. Dans le triangle ABN, on a :
K = mil [AN] et I = mil [AB] ; donc : (IK) // (NB).
De même, dans le triangle AMN, on a : (KJ) // (AM).
Or : (NB) ⊥ (𝒫) et (MA) ⊂ (𝒫) ; donc : (NB) ⊥ (MA).
Par suite, (IK) ⊥ (KJ) et le triangle IJK est rectangle en K.

3. *Remarques*
Si, M = A ou N = B, alors deux au moins des points I, J et K sont confondus.
Supposons donc que : M ≠ A et N ≠ B.
Dans le triangle rectangle IJK, on a : $IJ^2 = KJ^2 + KI^2 = \frac{MA^2}{4} + \frac{NB^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}$.

Cette formule est valable si M = A ou N = B.
En effet, si M = A, on a K = J et dans le triangle ABN, on a $IJ = \frac{b}{2}$; d'où : $IJ^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$, car $a = 0$.
De même si N = B, on a $IJ^2 = \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$, avec $b = 0$.

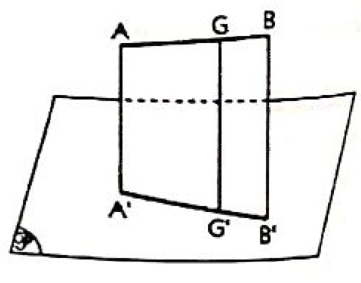
4. Remarquons que la condition M ≠ A et N ≠ B est réalisée car MN = 2.
On a : $IJ^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{MN^2 - 1}{4} = \frac{3}{4}$; d'où : $IJ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

De plus, le plan médiateur (Q) du segment [AB] contient les points I, J et K
En effet : (KI) ⊥ (AB) ; donc : (KI) ⊂ (Q).
De plus : (KJ) // (MA) et (MA) ⊥ (AB) ; donc : (KJ) ⊥ (AB). Par suite : (KJ) ⊂ (Q).
L'ensemble des points J est donc le cercle du plan (Q) de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

♦ Exercice 25 p. 122

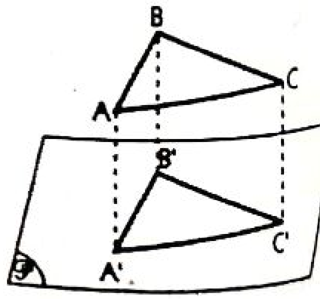
1. Désignons par G le barycentre de (A,a) et (B,b), G' le projeté orthogonal de G sur (𝒫).
• Si A ≠ B, on a : $\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{b}{a+b}$.

Les droites (AA'), (BB') et (CC') étant parallèles, il existe un plan (Q) qui les contient toutes.
Appliquons le théorème de Thalès dans ce plan.
On a : $\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'G'}}{\overline{A'B'}}$; d'où : $\overrightarrow{A'G'} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{A'B'}$.



On en déduit que G' est le barycentre de (A',a) et (B',b).
• Si les points A et B sont confondus, le résultat est évident car alors, A = B = G et A' = B' = G'.

2. L'une des sommes $a + b$, $b + c$ et $a + c$ est non nulle, sinon la somme $a + b + c$ serait nulle. Supposons donc que : $a + b \neq 0$.
G_1 est le barycentre de (A,a) et (B,b) ;
G'_1 est le projeté orthogonal de G_1 sur (𝒫).
D'après **1.**, G'_1 est le barycentre (A',a) et (B',b).
Or : G = bar {(G_1, $a + b$),(C,c)}.
D'où, d'après **1.**, G' = bar {(G'_1,$a + b$),(C',c)} = bar {(A',a), (B',b), (C',c)}.



♦ Exercice 26 p. 122

1. Il suffit de démontrer que : (AH) ⊥ (BC) et (CH) ⊥ (AB).

a) Démontrons que : (AH) ⊥ (BC).

• On a : (SH) ⊥ (BC), car (SH) ⊥ (ABC).

Or : (SA) ⊥ (SB) et (SA) ⊥ (SC) ; donc : (SA) ⊥ (SBC) et (SA) ⊥ (SB).

On en déduit que: (BC) ⊥ (SAH) ; par suite : (AH) ⊥ (BC).

b) De même, on démontre que : (CS) ⊥ (AB) et (SH) ⊥ (AB).

On en déduit que : (AB) ⊥ (SCH) et (CH) ⊥ (AB).

2. On a : $\cos \widehat{A} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$.

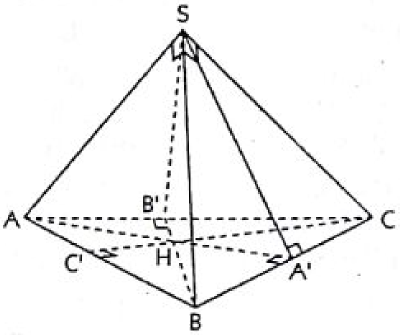
Dans le triangle rectangle SAB, on a : $AB^2 = SA^2 + SB^2$.

De même : $AC^2 = SA^2 + SC^2$ et $BC^2 = SB^2 + SC^2$.

Donc : $\cos \widehat{A} = \dfrac{2SA^2}{2AB \times AC} = \dfrac{SA^2}{AB \times AC}$.

Or : $\cos \widehat{A} > 0$; donc : l'angle $\widehat{A}$ est aigu.

On démontre de même que les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont aigus.



3. On sait que : (SA) ⊥ (SBC).

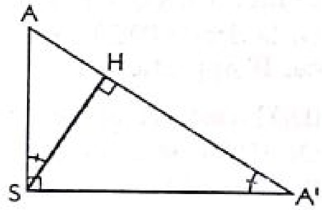
Or : A' ∈ (BC) ; donc : (SA) ⊥ (SA').

On en déduit que le triangle ASA' est rectangle en S.

On démontre de même que les triangles BSB' et CSC' sont rectangles en S.

4. On a : $\mathscr{A}(BHC) = \dfrac{A'H \times BC}{2}$ et $\mathscr{A}(SBC) = \dfrac{SA' \times BC}{2}$; donc : $\dfrac{\mathscr{A}(BHC)}{\mathscr{A}(SBC)} = \dfrac{A'H}{A'S}$.

Observons le triangle ASA' rectangle en S.



Les angles $\widehat{SA'H}$ et $\widehat{ASH}$ sont égaux, car leurs côtés sont perpendiculaires deux à deux ; donc : $\cos \widehat{SA'H} = \widehat{ASH}$.

Or : $\cos \widehat{SA'H} = \dfrac{A'H}{A'S}$ (triangle rectangle A'HS)

et $\cos \widehat{SA'H} = \dfrac{SH}{SA}$ (triangle rectangle AHS).

On en déduit que : $\dfrac{\mathscr{A}(BHC)}{\mathscr{A}(SBC)} = \dfrac{A'H}{A'S} = \dfrac{SH}{SA}$; par suite : $\mathscr{A}(BHC) = \dfrac{SH}{SA} \times \mathscr{A}(SBC)$.

5. On a : $\mathscr{A}(AHB) = \dfrac{SH}{SC} = \mathscr{A}(ASB)$ et $\mathscr{A}(AHC) = \dfrac{SH}{SB} = \mathscr{A}(ASC)$.

6. On a : $\mathscr{V}(SABC) = \dfrac{1}{3} \times SH \times \mathscr{A}(ABC) = \dfrac{1}{3} SA \times \mathscr{A}(BSC)$.

Or : $\mathscr{A}(ABC) = \mathscr{A}(AHC) + \mathscr{A}(BHC) + \mathscr{A}(AHB)$.

$$= [\frac{\mathscr{A}(SBC)}{SA} + \frac{\mathscr{A}(ASB)}{SC} + \frac{\mathscr{A}(ASC)}{SB}]$$

$$= \frac{SH}{2} [\frac{SB \times SC}{SA} + \frac{SA \times SB}{SC} + \frac{SA \times SC}{SB}].$$

Donc : $\mathscr{V}(SABC) = \dfrac{1}{6} SH^2 \times [\dfrac{SB \times SC}{SA} + \dfrac{SA \times SB}{SC} + \dfrac{SA \times SC}{SB}] = \dfrac{1}{3} SA \times \dfrac{SB \times SC}{2} = \dfrac{1}{6} SA \times SB \times SC.$

On en déduit : $SH^2 \times [\dfrac{SB \times SC}{SA} + \dfrac{SA \times SB}{SC} + \dfrac{SA \times SC}{SB}] = SA.SB.SC.$

Par suite : $\dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SC^2} = \dfrac{1}{SH^2}$.

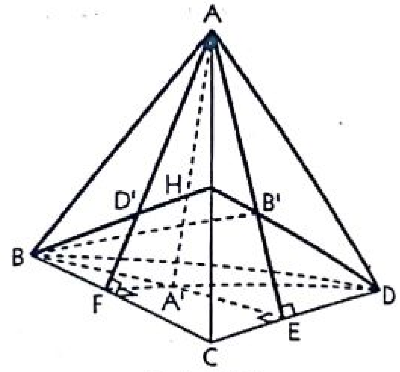
♦ Exercice 27 p. 122

1. On a : (AA') ⊥ (BCD) ; donc : (AA') ⊥ (CD).

De plus : (CD) ⊥ (BA').

On en déduit que (CD) ⊥ (ABA'), car (AA') et (BA') sont deux droites sécantes du plan (ABA').

On a : (CD) ⊥ (ABA') ; donc : (CD) ⊥ (AB).



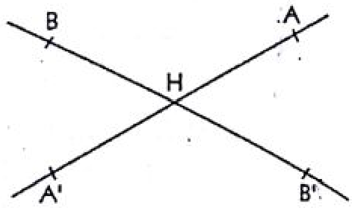
2. On utilise le même raisonnement que précédemment.
On a : (BD) ⊥ (CA') et (BD) ⊥ (AA') ; donc : (BD) ⊥ (ACA').
Par suite : (BD) ⊥ (AC).
De même : (BC) ⊥ (ADA') ; d'où : (BC) ⊥ (AD).

3. Démontrons que B' est l'orthocentre de ACD.
Pour cela, démontrons que : (AB') ⊥ (CD) et (CB') ⊥ (AD).
On a : (BB') ⊥ (ACD) ; donc : (BB') ⊥ (CD).
Or : (AB) ⊥ (CD) ; donc : (CD) ⊥ (ABB'). D'où : (CD) ⊥ (AB').

De même, on a : (BB') ⊥ (AD) et (AD) ⊥ (BC) ; donc : (AD) ⊥ (CBB'). Par suite : (AD) ⊥ (CB').

Conclusion : (AB') ⊥ (CD) et (CB') ⊥ (AD) ; donc B' est l'orthocentre de ACD.
On montre de même que C' et D' sont les orthocentres respectifs de ABD et ABC.

4. Démontrons que : A' ∈ (ABB')



On a : (CD) ⊥ (ABB') et (AA') ⊥ (CD) ; donc : (AA') // (ABB').
On en déduit : (AA') ⊂ (ABB') ; par suite : A' ∈ (ABB').
Désignons par E le point d'intersection de (AB') et (CD).
Les droites (AA') et (BB') sont des hauteurs du triangle ABE.
Soit H l'orthocentre de ce triangle. On a : H ∈ (AA') ∩ (BB').

Démontrons que : (AA') ⊂ (ADD').
On a : (BC) ⊥ (ADD') et (BC) ⊥ (AA') ; donc : (AA') // (ADD'). Par suite : (AA') ⊂ (ADD').
Désignons par F le point d'intersection de (AD') et (BC).
Les droites (AA') et (DD') sont des hauteurs du triangle ADF ; elles sont donc sécantes.
On démontre de même que les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont deux à deux sécantes.
Démontrons que H ∈ (DD'). Les droites (AA') et (BB') sont sécantes en H dans le plan (ABE).
Or la droite (DD') n'est pas incluse dans le plan (ABE) ; sinon B' appartiendrait à (AD), ce qui est absurde car B' appartient à la hauteur du triangle ACD issue de A.

(DD') n'est pas incluse dans le plan (ABE) contenant (AA') et (BB').
Or, (DD') est sécante à (AA') et à (BB').
Donc, (DD') coupe (AA') et (BB') en un seul point qui est H.
On démontre de la même façon que : H ∈ (CC').

Conclusion
Les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes en H.

♦ Exercice 28 p. 122

Figure dans le plan (OAB)

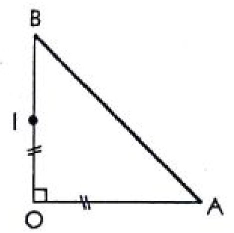
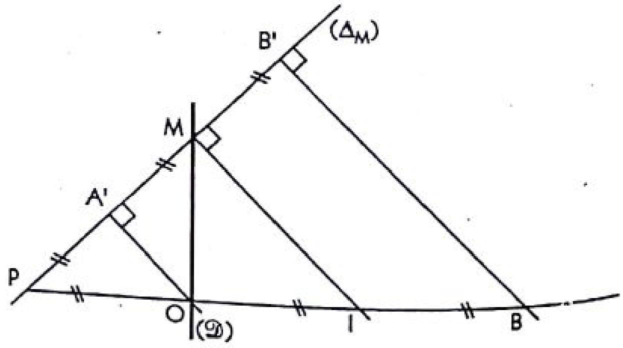


Figure dans le plan ($\mathscr{P}$)

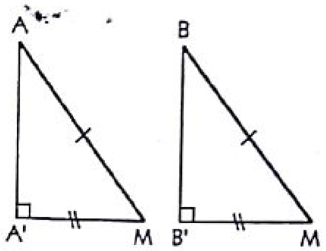


1. Démontrons que : (BB') // (IM).

Dans le plan ($\mathscr{P}$), on a : $\begin{cases} (IM) \perp (\Delta_M) \\ (BB') \perp (\Delta_M) \end{cases}$; donc : (IM) // (BB').

Démontrons que : (OA') ⊥ (Δ_M).

Désignons par $(\mathscr{P}_A)$ le plan passant par A et orthogonal à (Δ_M).
On a : $O \in (\mathscr{P}_A)$. En effet, $(OA) \perp (\Delta_M)$, car $(OA) \perp (\mathscr{P})$.
Or : $(\Delta_M) \perp (\mathscr{P}_A)$; donc : $(OA) // (\mathscr{P}_A)$.
On en déduit : $(OA) \subset (\mathscr{P}_A)$, car $A \in (\mathscr{P}_A)$; par suite : $O \in (\mathscr{P}_A)$.
Donc : $(OA') \subset (\mathscr{P}_A)$ et $(OA) \perp (\Delta_M)$.
Démontrons que : $(OA') // (IM)$.
Dans le plan $(\mathscr{P})$, on a : $(OA') \perp (\Delta_M)$ et $(IM) \perp (\Delta_M)$; donc : $(OA') // (IM)$.
Ce résultat fournit un procédé de construction du point A', projeté orthogonal de A sur (Δ_M) (voir figure).
Démontrons que : $M = \text{mil}\,[A'B']$.
On applique le théorème de Thalès dans le plan $(\mathscr{P})$ (voir figure).

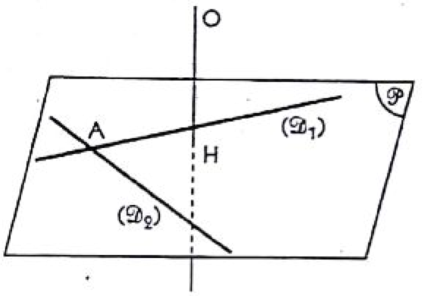


2. Démontrons que : MA = MB.
Les triangles OAM et OBM sont isométriques. En effet, ils sont tous les deux rectangles en O et OA = OB ; donc : MA = MB.
Démontrons que : AA' = BB'.
Les triangles AA'M et BB'M sont rectangles, respectivement en A' et en B'.
De plus : AM = MB et A'M = B'M ; donc : AA' = BB'.

♦ Exercice 29 p. 122

Notons $(\mathscr{P}_1)$ le plan défini par O et $(\mathscr{D}_1)$, et $(\mathscr{P}_2)$ celui défini par O et $(\mathscr{D}_2)$.

On a : $\begin{cases} (OM_1) \perp (\mathscr{P}_1) \text{ et } M_1 \in (\mathscr{P}) \\ (OM_2) \perp (\mathscr{P}_2) \text{ et } M_2 \in (\mathscr{P}) \end{cases}$.

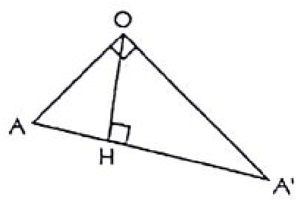


1. Supposons, que : $M_1 = M_2$.
On a : $(OM) \perp (\mathscr{P}_1)$ et $(OM) \perp (\mathscr{P}_2)$; donc : $(\mathscr{P}_1) // (\mathscr{P}_2)$.
Or : $A \in (\mathscr{P}_1) \cap (\mathscr{P}_2)$; donc : $(\mathscr{P}_1) = (\mathscr{P}_2)$.
Les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ étant sécantes, on en déduit que :
$(\mathscr{P}_1) = (\mathscr{P}_2) = \mathscr{P}$ et $O \in (\mathscr{P})$; ceci est faux, donc : $M_1 \neq M_2$.

2. On a : $(OM_1) \perp (\mathscr{P}_1)$; donc : $(OM_1) \perp (OA)$.
De même : $(OM_2) \perp (OA)$.
(OM_1) et (OM_2) étant deux droites sécantes du plan (OM_1M_2), on en déduit que : $(OA) \perp (OM_1M_2)$.

3. On a : $(OH) \perp (M_1M_2)$ et $(OA) \perp (M_1M_2)$; donc : $(M_1M_2) \perp (OAH)$. Par suite : $(M_1M_2) \perp (AH)$.
(M_1M_2) et (AH) étant deux droites du plan $(\mathscr{P})$, on en déduit qu'elles sont perpendiculaires.

4. On a : $(OA) \perp (OM_1M_2)$;
or (OA) est une droite du plan (OM_1M_2) ; donc : $(OA) \perp (OA')$.
Donc, le triangle OAA' est rectangle en O.
Dans le triangle rectangle OAA', on a : $OH^2 = AH \times A'H$.



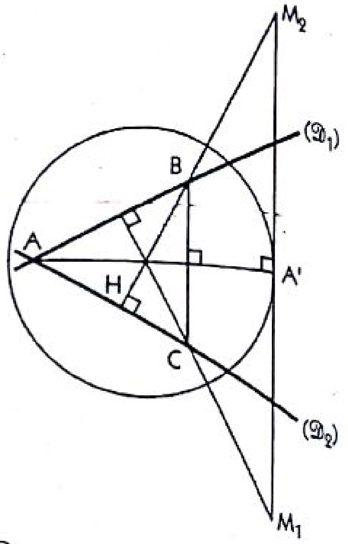
5. Démontrons que : $(BH) \perp (AC)$ et $(CH) \perp (AB)$.
On a : $(OH) \perp (\mathscr{D}_1)$ et $(OM_1) \perp (\mathscr{D}_1)$; donc : $(\mathscr{D}_1) \perp (OHM_1)$ et $(\mathscr{D}_1) \perp (M_1H)$.
Or : $(\mathscr{D}_1) = (AC)$ et $(M_1H) = (BH)$; donc : $(BH) \perp (AC)$.
De même : $(\mathscr{D}_2) \perp (M_2H)$.
Or : $(\mathscr{D}_2) = (AB)$ et $(M_2H) = (CH)$; donc : $(CH) \perp (AB)$.
Dans le triangle ABC, (BH) est la hauteur issue de B et (CH) est la hauteur issue de C.
Donc, H est l'orthocentre de ABC.
La 3e hauteur du triangle ABC est la droite (AH) qui est donc perpendiculaire à (BC).
Or : $(AH) \perp (M_1M_2)$.
Donc $(BC) // (M_1M_2)$, car les droites (BC), (AH) et (M_1M_2) sont toutes incluses dans le plan $(\mathscr{P})$.

6. Reprenons la figure du plan $(\mathscr{P})$.
D'après **4.**, on a : $A'H = \dfrac{OH^2}{AH}$ = constante.
Donc, A' appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de $(\mathscr{P})$ de centre H et de rayon $\dfrac{OH^2}{AH}$.

D'autre part, le triangle OAA' étant rectangle en O et H le pied de la hauteur issue de O, on a $H \in [AA']$. D'où : $A' \in (AH) - [AH]$.

La droite (AH) coupe $(\mathscr{C})$ en deux points situés de part et d'autre du point H et $A' \in (AH)$; donc A' est fixe : c'est le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de la demi-droite d'origine H qui est dirigée par $\overrightarrow{AH}$.

Les points M_1 et M_2 sont donc sur la droite tangente à $(\mathscr{C})$ en A'.



♦ Exercice 30 p. 122

1. Les droites (OA) et (OB) sont coplanaires puisqu'elles sont sécantes en O.
Démontrons que les points Q et R sont éléments du plan (AOB).
On a : $(OQ) \perp (POC)$; donc : $(OQ) \perp (OP)$. Or : $(OP) \perp (AOB)$; par suite : $(OQ) \mathbin{/\!/} (AOB)$.
Le point O étant un point commun à la droite (OQ) et au plan (AOB), on a : $(OQ) \subset (AOB)$.
On démontre de même que : $(OR) \subset (AOB)$.
Les droites (OA), (OB), (OQ) et (OR) sont incluses dans le plan (AOB) ; elles sont donc coplanaires.

2. Les plans (AOB) et (POC) ont un point commun O et ils sont différents car $P \notin (AOB)$; donc (AOB) et (POC) sont sécants suivant une droite qui passe par O.
On a : $(OR) \perp (POQ)$; donc : $(OR) \perp (OQ)$. Or : $(OQ) \perp (POC)$; donc : $(OR) \mathbin{/\!/} (POC)$. Par suite : $(OR) \subset (POC)$.
On a : $(OR) \subset (POC)$ et $(OR) \subset (AOB)$; donc $(AOB) \cap (POC) = (OR)$.

1. Vecteurs de l'espace

(pages 123 à 144 du livre de l'élève)

Objectifs

• Étendre du plan à l'espace l'outil vectoriel : notion de vecteur, opérations sur les vecteurs, produit scalaire, barycentre, bases, repères.

• Utiliser l'outil vectoriel de l'espace pour :

– caractériser les droites et les plans de l'espace ;

– effectuer des calculs vectoriels et des représentations dans l'espace à l'aide de bases ou repères de l'espace.

Commentaires

• Il conviendra de traiter rapidement la première et la deuxième partie de ce chapitre qui ne sont qu'une extension à l'espace de notions déjà étudiées dans le plan.

• On évitera les calculs vectoriels faisant intervenir des changements de base.

• Pour les représentations dans un repère de l'espace, on se limitera à des repères orthonormés.

• Certains exercices de fin de chapitre traitent de sphère circonscrite ou de sphère inscrite à un polyèdre. Il conviendra, avant de les proposer, de signaler les propriétés élémentaires utiles à leur résolution :

– un tétraèdre admet une et une seule sphère inscrite ;

– un tétraèdre admet une et une seule sphère circonscrite ;

– si un polyèdre admet une sphère circonscrite, elle est unique ;

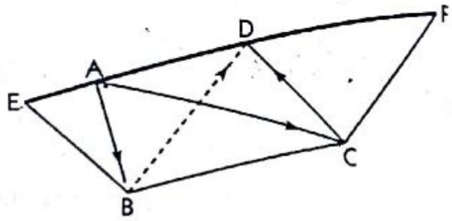
– si un polyèdre admet une sphère inscrite, elle est unique ;

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Extension à l'espace de la notion de vecteurs • Vecteurs de l'espace, norme, vecteurs colinéaires, vecteurs orthogonaux. • Opérations sur les vecteurs de l'espace : définitions et propriétés. • Barycentre de 4 points non coplanaires. • Caractérisations vectorielles d'une droite de l'espace, représentations paramétriques. • Caractérisations vectorielles d'un plan de l'espace, représentations paramétriques. • Vecteurs coplanaires.	• Reconnaître deux vecteurs colinéaires, deux vecteurs orthogonaux de l'espace. • Utiliser les propriétés des vecteurs de l'espace pour effectuer des calculs vectoriels. • Démontrer que 3 vecteurs sont coplanaires. • Démontrer que 4 points sont coplanaires.
Bases et repères • Bases de l'espace, bases orthonormées. • Coordonnées d'un vecteur dans une base donnée. • Coordonnées de la somme de deux vecteurs, du produit d'un vecteur par un nombre réel. • Coordonnées d'un point dans un repère de l'espace. • Coordonnées du milieu d'un segment, du barycentre de 2, 3 ou 4 points.	• Effectuer des calculs vectoriels dans une base donnée de l'espace. • Représenter des points, des droites dans un repère donné de l'espace. • Déterminer graphiquement les coordonnées d'un point donné de l'espace, connaissant son projeté sur l'un des plans du repère (orthonormé).
Produit scalaire • Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace : définition et propriétés. • Expression du produit scalaire, de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée. • Repères de l'espace, repères orthonormés. • Expression de la distance dans un repère orthonormé.	• Calculer le produit scalaire de deux vecteurs : – à l'aide de la définition ; – à l'aide de l'expression analytique. • Calculer la distance de deux points.

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 130



1. • Voir figure ci-contre.

2. • D est le milieu de [EF]. En effet,

on a : $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$;

donc : $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{EA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{FA}$

$= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}.$

• $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

$= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = 2\overrightarrow{BC}.$

♦ Exercice 1.b p. 130

1. • $\overrightarrow{BG} = \vec{v} + \vec{w}$; $\overrightarrow{CH} = \vec{w} - \vec{u}$; $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$; $\overrightarrow{FD} = \vec{v} - \vec{w} - \vec{u}$; $\overrightarrow{CE} = \vec{w} - \vec{u} - \vec{v}.$

2. I, J et K sont les milieux respectifs de [EG], [DG] et [BG].

♦ Exercice 1.c p. 130

On a : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$; $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$; $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$;

Donc : $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{DL} = \vec{0}.$

♦ Exercice 1.d p. 130

Les vecteurs ne sont pas coplanaires : *a), b), c)* et *d).* Les vecteurs sont coplanaires : *e).*

♦ Exercice 1.e p. 130

a) Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, tel que : $\alpha(\vec{i} + \vec{j}) + \beta(\vec{j} + \vec{k}) + \gamma(\vec{k} + \vec{i}) = \vec{0}.$

On a : $\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$; donc : $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Par suite, les vecteurs sont non coplanaires.

b) On démontre de la même façon que les 3 vecteurs sont non coplanaires, dans chaque cas.

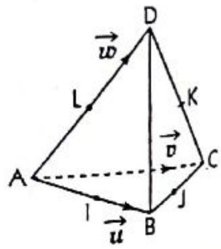
♦ Exercice 1.f p. 130

1. • On a : $I \in (\mathscr{D}_1)$ par définition de $(\mathscr{D}_1)$ et $\overrightarrow{IL} = -\frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{w})$; donc : $L \in (\mathscr{D}_1)$.

• On a : $J \in (\mathscr{D}_2)$ par définition de $(\mathscr{D}_2)$ et $\overrightarrow{JA} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$; donc : $A \in (\mathscr{D}_2)$.

• On a : $L \in (\mathscr{D}_3)$ par définition de $(\mathscr{D}_3)$ et $\overrightarrow{LJ} = \overrightarrow{LI} + \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w})$; donc : $J \in (\mathscr{D}_3)$.

2. *a)*



• Un couple de vecteurs directeurs de (A J K) est $(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{JK})$, avec :
$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$ et $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{w})$.

• Un couple de vecteur directeurs de (B K L) est $(\overrightarrow{LB}, \overrightarrow{LK})$, avec :
$\overrightarrow{LB} = -\frac{1}{2}\vec{w} + \vec{u}$ et $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\vec{v}.$

• Un couple de vecteurs directeurs de (CIK) est $(\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IC})$, avec :
$\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$ et $\overrightarrow{IC} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}.$

• Un couple de vecteurs directeurs de (DJL) est $(\overrightarrow{JL}, \overrightarrow{JD})$, avec : $\overrightarrow{JL} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w})$ et $\overrightarrow{JD} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}).$

b) $\begin{cases} (IL) // (BD) \\ (KJ) // (BD) \end{cases} \Rightarrow (IL) // (KJ)$; donc I, J, K et L appartiennent au plan (ILK) de repère $(I, \overrightarrow{IL}, \overrightarrow{IK})$.

♦ Exercice 1.g p. 130

G = bar {(A, – 1), (C, 1), (I, 4)}, car I = bar {(B, 2), (D, 2)} ; donc : G ∈ (ACI).

♦ Exercice 2.a p. 135

1. On a : $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}\begin{pmatrix}-4\\6\\-8\end{pmatrix}$; $2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}\begin{pmatrix}-3\\4\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\6\\-9\end{pmatrix}$.

2. On a : $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$; donc : $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

♦ Exercice 2.b p. 135

1. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, tel que : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0$. On a : $\begin{cases} -2\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ -\beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$

Donc, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathcal{W}$.

2. On a : $\vec{i} = \frac{1}{2}(\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w})$; $\vec{j} = 2\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$; $\vec{k} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$.

♦ Exercice 2.c p. 135

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3/2\\-1\\-1\end{pmatrix}$; donc : $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et A, B, C sont alignés.

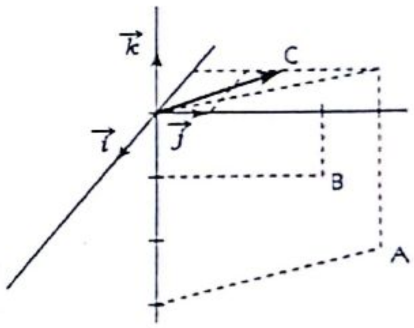
2. Le point D a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

♦ Exercice 2.d p. 135

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\1\\-5\end{pmatrix}$.

2. On a : $\overrightarrow{AD} = 5\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}$; donc : D, A, B et C sont coplanaires.

♦ Exercice 2.e p. 135



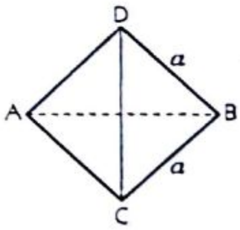
1. Voir figure ci-contre.

2. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$.

3. On a : $I\begin{pmatrix}-1/2\\3/2\\-1/2\end{pmatrix}$; $J\begin{pmatrix}-1\\3/2\\-3/2\end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix}-1/2\\2\\-2\end{pmatrix}$.

4. On a : $G\begin{pmatrix}-2/3\\5/3\\-4/3\end{pmatrix}$.

♦ Exercice 3.a p. 140



1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow (AB) \perp (CD)$.
On montre de même que : $(AD) \perp (BC)$ et $(DB) \perp (AC)$.

♦ Exercice 3.b p. 140

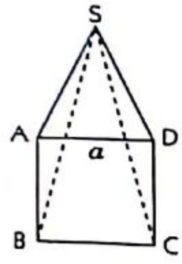
$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$; $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

♦ Exercice 3.c p. 140

1. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{2}$.

2. $\cos(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}}) = 0$.

♦ Exercice 3.d p. 140



1. $(AS) \perp (AB)$ et $(AS) \perp (AD) \Rightarrow (AS) \perp (ABD)$;
de plus : $C \in (ABD)$; donc : $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

2. ASC est rectangle en A $\Rightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}}) = \frac{AS}{SC} = \frac{a}{\sqrt{3a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Donc : $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = SA \times SC \cos(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}}) = a \times a\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = a^2$;
et : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS}) = AC^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS} = 2a^2$.

3. $\overrightarrow{SD}^2 = (\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BD})^2 = SB^2 + BD^2 + 2\,\overrightarrow{SC}\,.\,\overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{SC}\,.\,\overrightarrow{BD} = -a^2.$

$\overrightarrow{SB}\,.\,\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CB}).\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SC}\,.\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 2a^2 - a^2 = a^2.$

$\overrightarrow{SB}\,.\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SB}\,.\,(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{SB}\,.\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SB}\,.\,\overrightarrow{AC} = -a^2 + a^2 = 0.$

3. Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y, z).

On a : $\vec{u}\,.\,\vec{i} = x$; $\vec{u}\,.\,\vec{j} = y$; $\vec{u}\,.\,\vec{k} = z$; donc : $\vec{u} = (\vec{u}\,.\,\vec{i}).\,\vec{i} + (\vec{u}\,.\,\vec{j}).\vec{j} + (\vec{u}\,.\,\vec{k}).\,\vec{k}.$

Exercices d'apprentissage

CALCULS VECTORIELS

♦ Exercice 1 p. 141

1. On a : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

2. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$; donc, ACBD est un parallélogramme.

♦ Exercice 2 p. 141

On a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NC}$.

♦ Exercice 3 p. 141

On a : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$. Or : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$; donc : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ et I J K L est un parallélogramme.

♦ Exercice 4 p. 141

1. On a : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; donc : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ et I J K L est un parallélogramme.

2. On a : $\overrightarrow{NM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{IJ}$; donc : I J M N est un trapèze.

♦ Exercice 5 p. 141

1. On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

2. *a)* $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$;

donc, [AS] et [BD] ont le même milieu.

b) On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{AI} = 2\,\overrightarrow{JI}$.

♦ Exercice 6 p. 141

On a : $\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}$.

♦ Exercice 7 p. 141

On a : $\vec{u} = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}) = 4\overrightarrow{MG} + (2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 4\overrightarrow{GD}) = 4\overrightarrow{MG}.$

REPERES DE DROITES ET DE PLANS

♦ Exercice 8 p. 141

$M \in \mathcal{D}\,(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \exists\,\lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = \lambda\,\vec{u}.$ $M \in \mathcal{D}'\,(D, \vec{v}) \Leftrightarrow \exists\,\mu \in \mathbb{R} / \overrightarrow{DM} = \mu\,\vec{v}.$

On a : $\mu\vec{v} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \lambda\,\vec{u} - \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \mu(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AD}$

$\Leftrightarrow \lambda\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{AD}) - \lambda\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow (\mu - \lambda)\,\overrightarrow{AB} + (\mu - \lambda)\,\overrightarrow{AC} + (1 - 2\mu)\,\overrightarrow{AD} = \vec{0}.$

On en déduit : $\begin{cases} \mu - \lambda = 0 \\ 1 - 2\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu = \lambda = \frac{1}{2}$. Donc : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\,\vec{u} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Par suite, les deux droites sont sécantes au point I tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

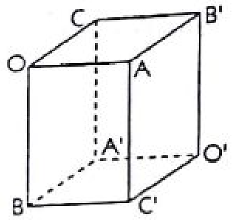
♦ Exercice 9 p. 141

1. $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{AO'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

2. Donc : $\overrightarrow{AO'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$ et O' ∈ (A B' C').

On a : $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{OB}$; donc : (AB'C') // (OBC).

3. $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO}$;
$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}$;
$\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC}$.
Donc, OAB'CBC'O'A' est un pavé.



♦ Exercice 10 p. 141

On muni l'espace du repère (O, A, B, C).

1. On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$; donc : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$; donc : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1/3\\3/4\\0\end{pmatrix}$.

On a : $\dfrac{-\frac{1}{3}}{-1} \neq \dfrac{3}{4}$; donc : (AB) et (IJ) sont sécantes en un point E.

Coordonnées du point E

Soit (x, y, z) les coordonnées de E.

On a : $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$; $\overrightarrow{IE} = \mu\overrightarrow{IJ} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\mu \\ y = \frac{3}{4}\mu \\ z = 0 \end{cases}$.

Des deux systèmes, on déduit : $(\lambda, \mu) = (\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$. Donc : E a pour coordonnées $(-\frac{1}{5}\,;\,\frac{6}{5}\,;\,0)$.

2. On a : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-1/3\\0\\k\end{pmatrix}$. Donc : (IK) et (AC) sécantes $\Leftrightarrow k \neq \frac{1}{3}$.

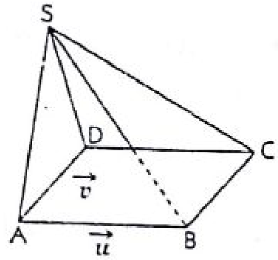
On détermine comme précédemment les coordonnées du point d'intersection F : $(\frac{k-1}{3k-1}\,;\,0\,;\,\frac{2k}{3k-1})$.

3. $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $(\frac{8k-6}{5(3k-1)}\,;\,-\frac{6}{5}\,;\,\frac{2k}{3k-1})$; $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(0\,;\,-1\,;\,1)$.

Donc : (EF) et (BC) sécantes $\Leftrightarrow k \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\,;\,\frac{3}{4}\}$.

Le point d'intersection G de (EF) et (BC) a pour coordonnées : $(0\,;\,\frac{3(k-1)}{4k-3}\,;\,\frac{k}{4k-3})$.

♦ Exercice 11 p. 141



On a : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{SJ} - \overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})$.

De même : $\overrightarrow{IK} = \frac{2}{3}\vec{v}$; $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{3}(-\vec{u} + \vec{v})$; $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{3}\vec{v}$; $\overrightarrow{IN} = \frac{1}{3}\vec{v}$.

On a : $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = 2\,\overrightarrow{IK}$;

donc : les points I, J, K, L M et N sont coplanaires.

♦ Exercice 12 p. 141

On utilise le théorème des brycentres partiels.

1. On a : G = bar {(I, 2), (J, 2)} ⇒ G ∈ (IJ) ; G = bar {(K, 2), (L, 2)} ⇒ G ∈ (KL) ; G = bar {(M, 2), (N, 2)} ⇒ G ∈ (MN)

Donc, les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

2. On a : G = bar {(A, 1), (A', 3)} ⇒ G ∈ (AA') ; G = bar {(B, 1), (B', 3)} ⇒ G ∈ (BB') ;
G = bar {(C, 1), (C', 3)} ⇒ G ∈ (CC') ; G = bar {(D, 1), (D', 3)} ⇒ G ∈ (DD').

Donc, les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes.

♦ Exercice 13 p. 141

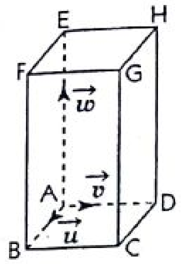
1. On a : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CH}$; donc : (BDE) // (CFH).

2. On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$. $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère de $\mathscr{E}$.

a) On a : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ et $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$.

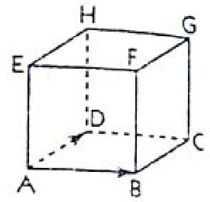
Donc : $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. De même : $\overrightarrow{AG_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$.

b) $G_1 \in (BDE)$ et $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} \Rightarrow G_1 \in (AG) \cap (BDE)$;
de plus : $A \notin (BDE)$. Donc : $\{G_1\} = (AG) \cap (BDE)$.
$G_2 \in (CFH)$ et $\overrightarrow{AG_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} \Rightarrow G_2 \in (CFH) \cap (AG)$.
De plus : $A \notin (CFH)$. Donc : $\{G_2\} = (AG) \cap (CFH)$.



♦ Exercice 14 p. 141

1. *a)* $(\mathscr{P}) = (ADB)$.
b) $\overrightarrow{AE}$ est un vecteur directeur (AE) et $(AE) \perp (\mathscr{P})$.
2. $\mathscr{P}(A, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BG}) = (ABH)$.
a) $\overrightarrow{DE}$ est un vecteur directeur de (DE) et $(DE) \perp (ABH)$.
b) $\mathscr{P}(A, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BD}) = (AHF)$.
$\overrightarrow{BE}$ est un vecteur directeur de (BE) et $(BE) \perp (AHF)$.



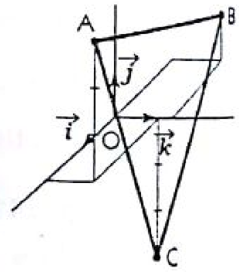
♦ Exercice 15 p. 142

On a : $\overrightarrow{IJ} = (1-k)\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{IL} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD}$.
La droite (BD) est l'intersection des plans (ABD) et (BCD).
Le plan (ABD) coupe le plan $(\mathscr{P})$ suivant la droite $\Delta(K, \overrightarrow{AB})$.
Le plan (BCD) coupe le plan $(\mathscr{P})$ suivant la droite $\Delta'(J, \overrightarrow{CD})$.

♦ Exercice 16 p. 142

On a : $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{u} \perp \vec{w} \end{cases}$; donc : la droite $(\mathscr{D})$ de repère $(A, \vec{u})$ est orthogonale à $(\mathscr{P}')$. Or : $(\mathscr{D}) \subset (\mathscr{P})$; donc : $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{P}')$.

BASES ET REPÈRES



♦ Exercice 17 p. 142

On a : $I\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} ; -1\right)$, $J(1 ; 1 ; 0)$ et $K\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} ; 2\right)$.

♦ Exercice 18 p. 142

1. On utilise le théorème des barycentres partiels.
$O = \text{bar}\{(I, 4), (J, 4)\} \Rightarrow O \in (IJ)$;
$O = \text{bar}\{(K, 4), (L, 4)\} \Rightarrow O \in (KL)$;
$O = \text{bar}\{(M, 4), (N, 4)\} \Rightarrow O \in (MN)$.
Donc les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en O.
2. ABCD étant un parallélogramme, I est le milieu de [AC] ;
EFGH étant un parallélogramme, J est le milieu de [EG].
D'après le théorème des barycentres partiels on a :
$O = \text{bar}\{(I, 4), (J, 4)\} = \text{bar}\{(A, 2), (C, 4), (E, 2), (G, 2)\} = \text{isob}(ACGE)$. De même : $O = \text{isob}(BDHF)$.
3. *a)* Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, le point O a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.
b) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG})$, le point O a pour coordonnées $\left(0 ; 0 ; \frac{1}{2}\right)$.

♦ Exercice 19 p. 142

On a : $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Soit $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} \vec{w} \perp \vec{u} \\ \vec{w} \perp \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 2x \end{cases}$$

. Le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ convient.

2\. *a)* Tout vecteur de coordonnées $(\lambda, 2\lambda, \lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ convient.

b) Tout vecteur de coordonnées $(\lambda, 0, \lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ convient.

♦ Exercice 20 p. 142

a) G a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ *b)* G a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ *c)* G a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

PRODUIT SCALAIRE

♦ Exercice 21 p. 142

1\. *a)* Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a : $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Donc : $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE} = 0$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$.

b) $(AG) \perp (BE)$ et $(AG) \perp (BD) \Rightarrow (AG) \perp (BED)$.

2\. On a : $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Donc : $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{FC} = 0$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{FH} = 0$.

$(AG) \perp (FC)$ et $(AG) \perp (FH) \Rightarrow (AG) \perp (FCH)$.

♦ Exercice 22 p. 142

1\. On a : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = a$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{u} = \frac{a^2}{2}$.

2\. On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \vec{u}\cdot(\vec{w} - \vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{w} - \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$; donc : $(AB) \perp (CD)$.

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(-\vec{u}^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}) = \frac{1}{2}\left(-a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) = 0$; donc : $(AB) \perp (IJ)$.

De même : $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{IJ} = 0$; donc : $(CD) \perp (IJ)$.

3\. $IJ = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

♦ Exercice 23 p. 142

1\. Soit a l'arête du tétraèdre. On a :

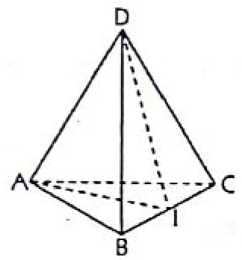
$AD = a$ et $AI = DI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AD^2 = ID^2 + IA^2 - 2\,\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IA} = ID^2 + IA^2 - 2\,ID \times IA \times \cos\widehat{AID}$.

Donc : $\cos\widehat{AID} = \frac{1}{3}$.

De même : $ID^2 = AD^2 + AI^2 - 2AD \times AI \times \cos\widehat{IAD}$; donc : $\cos\widehat{IAD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2\. Mes (°) $\widehat{AID} \approx 71$ et Mes (°) $\widehat{IAD} \approx 55$.



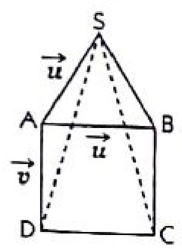
♦ Exercice 24 p. 142

1\. $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$; $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$; $\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{u} = \frac{1}{2}$.

2\. $\overrightarrow{SA} = -\vec{w}$; $\overrightarrow{SB} = \vec{u} - \vec{w}$; $\overrightarrow{SC} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$; $\overrightarrow{SD} = \vec{v} - \vec{w}$.

Donc : $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC} = 0$ et $(SA) \perp (SC)$;

$\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SD} = 0$ et $(SB) \perp (SD)$.



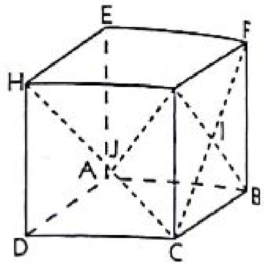
3\. $I \in (ABC) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} = x\vec{u} + y\vec{v}$

On a : $(SI) \perp (SAB) \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{SI}\cdot\overrightarrow{SA} = 0\\ \overrightarrow{SI}\cdot\overrightarrow{AB} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}SA^2 + \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{SA} = 0\\ \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0\\ x + \frac{1}{2} = 0\end{cases}$.

On en déduit : $x = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{5}{2}$. Donc : $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{5}{2}\vec{v}$.

♦ Exercice 25 p. 142

L'ensemble cherché est le plan perpendiculaire à (AB) au point H tel que : $\overline{AH} = -\frac{12}{AB} = -\frac{3}{2}$.



♦ **Exercice 26 p. 142**

Dans $\mathscr{E}$ muni du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a : $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

$I = \text{mil}\,[BG] \Rightarrow I\begin{pmatrix}1\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$; $J = \text{mil}\,[DG] \Rightarrow J\begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}$.

Donc : $\cos\widehat{IAJ} = \dfrac{\overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{AJ}}{AI \times AJ} = \dfrac{5}{6}$ et Mes (°) $\widehat{IAJ} = 34$.

Le triangle AIJ est isocèle en A ; donc : Mes (°) $\widehat{AIJ}$ = Mes (°) $\widehat{AJI} = 73$.

♦ **Exercice 27 p. 142**

Soit O le centre de gravité du tétraèdre ABCD.

O est le milieu des segments [IL] et [JK] ; donc IJLK est un parallélogramme.

De plus : $IK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = IJ$; donc, IJLK est un losange. Par suite, $\overrightarrow{IL}\,.\,\overrightarrow{JK} = 0$.

♦ **Exercice 28 p. 142**

1. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}).(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B}) = \overrightarrow{OO'}^2 + \overrightarrow{O'A}.\overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{O'B}$ et $\overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{OO'}\overrightarrow{O'B} = 0$.

2. $\text{mes}\,\widehat{AO'B} \le 90° \Rightarrow \overrightarrow{O'A}.\overrightarrow{O'B} \ge 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} \ge 0 \Rightarrow \text{mes}\,\widehat{AOB} \le 90°$.

$\text{mes}\,\widehat{AOB} \ge 90° \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} \le 0 \Rightarrow \overrightarrow{O'A}.\overrightarrow{O'B} \le 0 \Rightarrow \text{mes}\,\widehat{AO'B} \ge 90°$.

♦ **Exercice 29 p. 142**

1. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\,.\,(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC}\,.\,(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD}\,.\,(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$.

2. $\begin{cases}(AB) \perp (CD)\\(AC) \perp (BD)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD} = 0\\\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD} = 0\end{cases}$; donc : $\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow (AD) \perp (BC)$.

♦ **Exercice 30 p. 142**

1. *a)* $\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{DA}^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}).\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{AC}.[\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}] = \overrightarrow{AC}.[(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB})] = 2\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.

b) $(AC) \perp (DB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

2. $\begin{cases}(AB) \perp (CD)\\(AC) \perp (BD)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}AC^2 + BD^2 = CB^2 + DA^2\\AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2\end{cases}$; donc : $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 \Rightarrow \overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{BC} = 0$.

♦ **Exercice 31 p. 143**

1. $\begin{cases}(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}) \perp \overrightarrow{IJ}\\(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}) \perp \overrightarrow{IK}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k})\,.\,(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j})\\(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k})\,.\,(-\frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k})\end{cases}$

$\begin{cases}-\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta = 0\\-\frac{1}{3}\beta + \frac{2}{3}\gamma = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta = 2\gamma\\\alpha = \frac{4}{3}\gamma\end{cases}$. Le triplet (4 ; 6 ; 3) convient.

2. Soit $(\mathscr{D})$ la perpendiculaire au plan (I K J) passant par A.

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 4k\\y = 6k\\z = 3k\end{cases}$. $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (CDG) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \alpha\,\overrightarrow{CD} + \gamma\,\overrightarrow{CG} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1 - \alpha\\y = 1\\z = \beta\end{cases}$.

Des deux systèmes, on tire : $\gamma = \dfrac{1}{6}$ et $M(\frac{2}{3} ; 1 ; \frac{1}{2})$.

♦ **Exercice 32 p. 143**

1. *a)* On a : $G = \text{bar}\{(A, 1) ; (A', 3)\} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$. De même : $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BB'}$; $\overrightarrow{CG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CC'}$; $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DD'}$.

Or : $AA' = BB' = CC' = DD' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc : $GA = GB = GC = GD = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

La sphère (Σ), de centre G et de rayon $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, passe par les points A, B, C et D.

b) $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 4GM^2 = 4(\frac{27}{64} + GM^2)$.

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k \Leftrightarrow MG^2 = \frac{k}{4} - \frac{27}{64}$.

$M \in (\Sigma) \Leftrightarrow \frac{16k - 27}{64} = \frac{27}{64} \Leftrightarrow k = \frac{27}{8}$.

2. a) $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{A'G} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AA'} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AA'} \Rightarrow GA' = \frac{1}{4}AA' = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

On montre de même que : $GB' = \frac{1}{4}BB' = \frac{\sqrt{3}}{8}$; $GC' = \frac{1}{4}CC' = \frac{\sqrt{3}}{8}$; $GD' = \frac{1}{4}DD' = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

La sphère (Σ'), de centre G et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{8}$ passe par les points A', B', C' et D'.

b) $(\Sigma') \cap (BCD) = \{A'\}$, $(\Sigma') \cap (ACD) = \{B'\}$, $(\Sigma') \cap (ABD) = \{C'\}$, $(\Sigma') \cap (ABC) = \{D'\}$.

c) $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k' \Leftrightarrow MG^2 = \frac{16k' - 27}{64}$.

$M \in (\Sigma') \Leftrightarrow MG^2 = \frac{3}{64} \Leftrightarrow k' = \frac{15}{8}$.

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 33 p. 143

a) $(\mathcal{D}) = (\mathcal{D}')$ si et seulement si $\begin{cases} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \\ \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires.} \end{cases}$

b) $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes si et seulement si $\begin{cases} \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB} \text{ sont coplanaires} \\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires.} \end{cases}$

c) $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont strictement parallèles si et seulement si $\begin{cases} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \\ \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{u} \text{ sont non colinéaires.} \end{cases}$

d) $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont non coplanaires si et seulement si $\begin{cases} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires} \\ \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont non coplanaires.} \end{cases}$

2. a) $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes.

b) $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont non coplanaires.

c) $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}$ et $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ;

de plus : $\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD})$. Donc : $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes.

♦ Exercice 34 p. 143

$(\mathscr{E})$ est muni du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a) On a : $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

b) $\begin{cases} \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (AG) \perp (BD) \\ (AG) \perp (BE) \end{cases} \Rightarrow (AG) \perp (BDE)$.

c) On a : $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. $BD = BE = DE = \sqrt{2}$; donc : le triangle BDE est équilatéral.

Soit (x, y, z) les coordonnées de Ω.

$\Omega \in (AG) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = k. \\ z = k \end{cases}$ $\Omega \in (BDE) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BD} + \beta\overrightarrow{BE}$; donc : $\begin{cases} x - 1 = -\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$.

Des deux systèmes, on déduit : $k = \frac{1}{3}$; donc, Ω a pour coordonnées $(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$.

On a : $\overrightarrow{A\Omega'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$; donc Ω' a pour coordonnées $(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$. On en déduit : $\Omega = \Omega'$.

d) On a bien : $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

2. *a)* On a : $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$.

b) On a : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}$.

On a : $OI = OJ = IJ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; donc : OIJ est un triangle équilatéral.

$$\begin{cases}\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{OI}=0\\ \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{OJ}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(AG)\perp(OI)\\(AG)\perp(OJ)\end{cases} \Rightarrow (AG)\perp(OIJ).$$

c) On a : $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{LM}\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{NI}\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{ML}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\\ \overrightarrow{IN}=\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\end{cases} \Rightarrow (IJN) /\!/ (MLK) /\!/ (BDE) ; \begin{cases}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{ML}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\\ \overrightarrow{JK}=\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}\end{cases} \Rightarrow (IJK) /\!/ (MNL) /\!/ (BDE).$$

$$\begin{cases}(IJN) /\!/ (MNL)\\ N\in(IJN)\cap(MNL)\end{cases} \Rightarrow (IJN) = (MNL).$$

On montre ainsi que : (IJN) = (MNL) = (IJK) = (MLK) ; donc, les points I, J, K, L, M, N sont coplanaires.

De plus : $IJ = JK = KL = LM = MN = NI = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; donc I J K L M N est un hexagone régulier.

♦ **Exercice 35 p. 143**

$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. $\vec{v}=k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & a'\\ c & c'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}b & b'\\ c & c'\end{vmatrix} = 0.$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\alpha+2\beta\\2\alpha\\-\beta\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\gamma\\-3\gamma\\1-\gamma\end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}2\alpha+2\beta & \gamma\\ 2\alpha & -3\gamma\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2\alpha+2\beta & \gamma\\ -\beta & 1-\gamma\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2\alpha & -3\gamma\\ -\beta & 1-\gamma\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \gamma = -1$ et $\alpha = -\dfrac{3}{4}\beta$.

Donc : $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{(-\frac{3}{4}x ; x ; -1) / x \in \mathbb{R}^*\}$.

♦ **Exercice 36 p. 143**

1. *a)* On a : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} = -\lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{CD}$
$= -\lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \lambda(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = (1-\lambda)\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{BD}$.

b) $\begin{cases}\overrightarrow{PQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{BD}\\ \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IL}\\ \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IK}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = 2(1-\lambda)\overrightarrow{IL} + \lambda\overrightarrow{IK} \Rightarrow (PQ) /\!/ (ILK).$

2. *a)* $\begin{cases}\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{KM}\\ \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{JK}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KM}) = 2\overrightarrow{JM}.$

b) On a : O = mil [PQ] $\Rightarrow \overrightarrow{JO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{JP} + \overrightarrow{JQ})$.

Or : $\begin{cases}\overrightarrow{JP} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{JQ} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{CD}\end{cases}$. Donc : $\overrightarrow{JO} = \lambda\overrightarrow{JM}$.

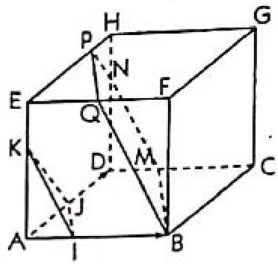
Lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, O décrit la droite (JM).

c) Si O ∈ [JM], alors $\lambda \in [0 ; 1]$.

On a : $\begin{cases}\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{CQ} = \lambda\overrightarrow{CD}\\ \lambda\in[0 ; 1]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}P\in[AB]\\ Q\in[CD]\end{cases}$ et O = mil [PQ].

Les points P et Q ainsi choisis conviennent.

♦ Exercice 37 p. 143



1. Voir figure ci-contre.
2. On trouve : $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\vec{i}$; $\overrightarrow{DN} = \frac{2}{3}\vec{k}$; $\overrightarrow{EP} = \frac{3}{4}\vec{j}$ et $\overrightarrow{ER} = \frac{1}{2}\vec{i}$.

♦ Exercice 38 p. 144

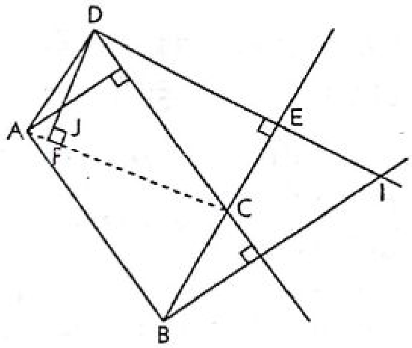
$\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{k}$; $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\vec{i}$; $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\vec{j}$; $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{k}$.

1. $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK})$ est un couple de vecteurs directeurs de (IJK). $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}$ et $\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k}$.
2. On trouve : $\overrightarrow{AE} = 2\vec{j} - \vec{k}$.
3. On trouve : $\overrightarrow{IF} = -\frac{4}{3}\vec{i} + 2\vec{k}$. Donc : $\overrightarrow{IF} = 4\overrightarrow{IK}$ et $F \in (IJK)$.
4. On trouve : $\overrightarrow{BG} = -\frac{4}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}$ et $\overrightarrow{BC} = -\vec{i} + \vec{j}$; donc : $\overrightarrow{BG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$ et $G \in (BC)$.

De même : $\overrightarrow{EG} = -\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \vec{k}$ et $\overrightarrow{EF} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Donc : $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $G \in (EF)$.

On a : $G \in (BC)$ et $G \in (EF)$; donc : $(BC) \cap (EF) = \{G\}$.

♦ Exercice 39 p. 144



1. $(AC) \perp (DF) \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DF} = 0$.

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE}$.

$\begin{cases} (ED) \subset (BDC) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE} = 0 \\ (BC) \perp (DE) \Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE} = 0 \end{cases}$; donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = 0$.

$\begin{cases} \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = 0 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DF} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (AC) \perp (DE) \\ (AC) \perp (DF) \end{cases} \Rightarrow (AC) \perp (DEF)$.

2. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DJ}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{ID}$, car $(AC) \perp (DJ)$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{ID} = 0$, car $\begin{cases} (ID) \subset (DBC) \Rightarrow \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ (ID) \perp (BC) \Rightarrow \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{BC} = 0. \end{cases}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{IC}$ car $(AD) \perp (CJ)$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}).\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{IC} = 0$, car $\begin{cases} (IC) \subset (BCD) \Rightarrow \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ (IC) \perp (BD) \Rightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{IC} = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AD} = 0 \\ \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (IJ) \perp (AD) \\ (IJ) \perp (AC) \end{cases} \Rightarrow (IJ) \perp (ADC)$.

♦ Exercice 40 p. 144

1. $G = \text{bar}\{(A, 3), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$; donc : $G = \text{mil}\,[AH]$.
2. $3AA^2 + AB^2 + AC^2 + AD^2 = 0 + 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow A \in (\Sigma)$.

(Σ) est la sphère de centre G et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

3. $\begin{cases} (GH) \perp (BCD) \\ GH = \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases} \Rightarrow d((\Sigma), (DCB)) = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow (\Sigma) \cap (BCD) = \{H\}$.

4. Soit $I = \text{mil}\,[AB]$, $J = \text{mil}[AC]$ et $K = \text{mil}[AD]$.

$IB^2 + IC^2 + ID^2 - 3AI^2 = (IB^2 - AI^2) + (AB^2 - \frac{1}{4}AB^2) + (AB^2 - \frac{1}{4}AB^2) - 2(\frac{1}{4}AB^2) = 1$. Donc : $I \subset (\Pi)$.

On montre de même que J et K appartiennent à (Π).

Démontrons que (Π) est un plan.

$M \in (\Pi) \Leftrightarrow (MB^2 + MC^2 + MD^2) - 3MA^2 = 1 \Leftrightarrow 3MH^2 + BH^2 + CH^2 + DH^2 - 3MA^2 = 1$

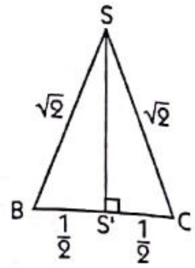
$\Leftrightarrow 3(MH^2 - MA^2) = 1 - 3BH^2 = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow MH^2 - MA^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MA}).(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MA}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.(2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GH}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.2\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{MG} = 0$.

Donc (Π) est le plan perpendiculaire à (AH) passant par G, c'est-à-dire, le plan médiateur de [AH].

5. $M \in (\Pi) \cap (\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} MG^2 = \frac{1}{6} \\ (MG) \perp (GA) \end{cases}$; donc : $(\Sigma) \cap (\Pi)$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

♦ Exercice 41 p. 144



1. Les triangles SAB et SAC étant rectangles en A, $SB = SC = \sqrt{2}$.
Donc, le triangle SBC est isocèle en S.

On a : $\cos \widehat{SBC} = \frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BS}}{BC \times BS} = \frac{BC \times BS'}{BC \times BS} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Donc : Mes (°) $\widehat{SCB}$ = Mes (°) $\widehat{SCB}$ = 69. On en déduit : Mes (°) $\widehat{BSC}$ = 42.

2. (Σ) est muni du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS})$.

a) On a : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SH}$ et $\overrightarrow{SH} = \alpha\overrightarrow{SB} + \beta\overrightarrow{SC}$; or : $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{SC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; donc : $\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha-\beta \end{pmatrix}$.

Soit (x, y, z) les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$. $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow y = x$; donc : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1-2\alpha \end{pmatrix}$.

On en déduit : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AS} + \lambda(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.

b) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AS}.\overrightarrow{SB} + \lambda[SB^2 + \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB}) = -1 + 3\lambda$; donc : $\lambda = \frac{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB} + 1}{3}$.

c) $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{BH} = -1 + 3\lambda = -1 + (\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB} + 1) = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB} = 0$.

$\begin{cases} \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{SC} = 0 \\ \overrightarrow{SH}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$; donc : H est l'orthocentre du triangle SBC.

3. $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 1 - (1 - SH^2) = SH^2$; donc : BH = SH = HC (BH = HC) et H est le centre du cercle circonscrit au triangle SBC.

♦ Exercice 42 p. 144

1. *a)* Soit G le centre de gravité du triangle BCD.

$M \in (\Pi) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{DA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{DA} = 0$. (Π) est le plan perpendiculaire à (DA) passant par G.

b) Soit I le milieu du segment [AD].

$M \in (\Sigma) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MB}.(2\overrightarrow{MI}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MI} = 0$.

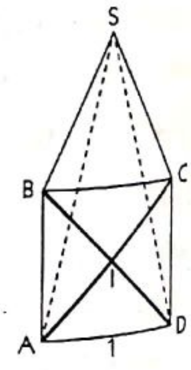
(Σ) est la sphère de diamètre [IG]. Donc (Π) est le plan d'équation : $-y + z + 1 = 0$.

(Σ) est la sphère d'équation : $x^2 - x + y^2 - 3y + z^2 + 2 = 0$.

♦ Exercice 43 p. 144

1. G est le centre d'une sphère passant par S, A, B, C et D, alors on a :

$\begin{cases} \text{G est l'isobarycentre du triangle SAC} \\ \text{G est l'isobarycentre du triangle SDB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} \\ 3\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}. \end{cases}$



De plus : $(\alpha + 4\beta)\overrightarrow{SG} = \beta[(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}) + (\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD})] = \beta(6\overrightarrow{SG})$;

donc : $\alpha + 4\beta = 6\beta \Rightarrow \alpha = 2\beta$.

$\alpha = 2\beta \Rightarrow$ G = bar{(S, 2), (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)}.
= bar{(S, 2) ; (I, 4)}, où I est le centre du carré ABCD.
= bar {(S, 1), (I, 2)}.

On a : $\begin{cases} \text{G est l'isobarycentre du triangle SAC et I = mil [AC]} \\ \text{G est l'isobarycentre du triangle SBD et I = mil [BD]} \end{cases}$.

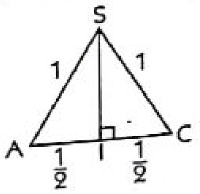
donc, G est le centre de la sphère passant par A, B, C, D et S.

2. Soit (Σ) cette sphère ; on a : G = bar{(S, 2), (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)}.

Donc : $M \in (\Sigma) \Leftrightarrow 2MG^2 + 2GS^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = k$.

$\begin{cases} \overrightarrow{SG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SI} \\ SG = GA = GB = GC = GD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SG^2 = AG^2 = GB^2 = GC^2 = GD^2 = \frac{4}{9} SI^2 \\ SI^2 = \frac{3}{4}. \end{cases}$

$\Rightarrow SG^2 = AG^2 = GB^2 = GC^2 = GD^2 = \frac{1}{3}.$

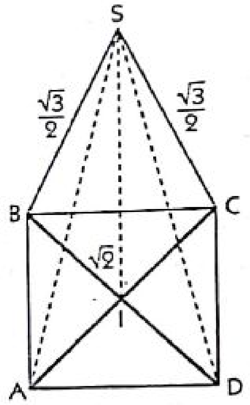


Donc : $M \in (\Sigma) \Leftrightarrow 2MG^2 = k - 2 \Rightarrow MG^2 = \frac{k-2}{2}$; de plus : $MG^2 = \frac{1}{3}$. Donc : $k = \frac{8}{3}$.

Exercice 44 p. 144

1. a) $G = \text{bar}\{(S, \alpha), (I, 4\beta)\} \Rightarrow \overrightarrow{IG} = \frac{\alpha}{\alpha + 4\beta}\overrightarrow{IS}$; donc : $G \in (IS)$.

Or (IS) est l'intersection des plans médiateurs (ASC) et (SBD) des diagonales respectives [BD] et [AC] ; donc tout point de (IS), en particulier G, est équidistant des plans (SAB), (SBC, (SCD) et (SAD).



b) IG est le rayon r du cercle inscrit dans le triangle ASC et $r = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{3}$; pour α et $\alpha + 4\beta$ strictements positifs, on a : $IG = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\alpha + 4\beta}\right)$.

Donc : $\frac{\alpha}{\alpha + 4\beta} = 2r \Rightarrow \beta = \alpha\left(\frac{1-2r}{8r}\right)$; le couple $\left(1 ; \frac{1-2r}{8r}\right)$ convient.

2. $M \in (\Sigma) \Leftrightarrow \alpha MS^2 + \beta(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2) = k$

a) $I \in (\Sigma) \Leftrightarrow \alpha IS^2 + \beta(IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2) = k$ et $\begin{cases} IS^2 = \frac{1}{4} \\ IA^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$;

donc : $\frac{\alpha}{4} + 2\beta = k$.

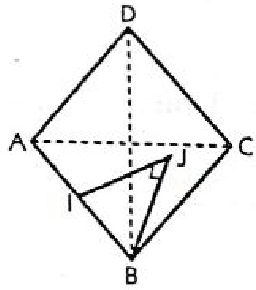
Par suite : $I \in (\Sigma) \Leftrightarrow (\alpha, b, k) \in \{(x ; y ; \frac{x}{4} + 2y)$, tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $x + 4y \neq 0\}$.

b) Les intersections de (Σ) avec les plans (SAB), (SBC), (SCD) et (SDA) sont respectivements les projetés orthogonaux respectifs de G sur chacun de ces plans, car ce sont des plans tangents à (Σ).

Exercice 45 p. 144

1. $MA^2 + MB^2 = 1 \Leftrightarrow 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 1 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{4}$. Soit (Σ) la sphère de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$.

L'ensemble des points M cherchés est $(BCD) \cap (\Sigma)$.



On a : $BI^2 = \frac{1}{4}$ et $B \in (BCD) \Rightarrow B \in (BCD) \cap (\Sigma)$.

Or : $d(I, (BCD)) = IJ < IB = \frac{1}{2}$ (le triangle IJB est rectangle en J).

Donc, $(\Sigma) \cap (BCD)$ est un cercle passant par B ;.

de plus : $J \in (BCD)$ et $(IJ) \perp (JB)$; par suite, $(\Sigma) \cap (BCD)$ est le cercle de centre J passant par B.

2. $M \in (BCD)$ et $MI^2 = \frac{2k-1}{4}$.

- Si $k < \frac{1}{2}$, alors l'ensemble cherché est vide.
- Si $k \geq \frac{1}{2}$, alors l'ensemble cherché est un cercle de centre J.

3. Soit $f : (BCD) \mapsto \mathbb{R}_+$

$M \mapsto MA^2 + MB^2$

$f(M) = 2MI^2 + \frac{1}{2} = 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JI})^2 + \frac{1}{2} = 2(MJ^2 + IJ^2 + \frac{1}{4}])$.

$f(M)$ est minimale si et seulement $MJ^2 = 0$, c'est-à-dire, $M = J$.

8. Géométrie analytique de l'espace

(pages 145 à 164 du livre de l'élève)

Objectifs

- Utiliser les acquis des chapitres précédents pour déterminer des représentations paramétriques et des équations cartésiennes de droites et de plans de l'espace.
- Utiliser les représentations analytiques précédentes pour résoudre des problèmes simples :
  - vérifier un parallélisme ;
  - déterminer des intersections de plans et de droites ;
  - calculer des distances ;
  - démontrer des propriétés.

Commentaires

- Dans ce chapitre, on cherchera surtout à définir des outils et à faire réfléchir l'élève sur la façon dont il peut s'en servir.
- On évitera de passer en revue tous les problèmes d'intersection, de parallélisme ou d'orthogonalité qui peuvent se présenter et de donner des recettes pour les résoudre. On apprendra plutôt à l'élève à trouver lui-même la méthode appropriée à une situation donnée.
- Les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux plans définis par leurs équations cartésiennes soient parallèles ou perpendiculaires ne doivent pas apparaître comme des savoirs, mais des savoir faire.
- Les élèves doivent maîtriser le maniement des équations cartésiennes et des représentations paramétriques de droites et plans, ainsi que le passage des unes aux autres, le but visé étant de :
  - mieux faire comprendre le sens de chacune des deux notions ;
  - savoir que, connaissant l'une, on connaît l'autre.
- Bien que certains résultats soient valables dans un repère quelconque, on supposera que le repère utilisé est orthonormé.
- Le problème réciproque concernant les représentations paramétriques, c'est à dire le fait que tout système du type

$$\begin{cases} x = a\lambda + x_0 \\ y = b\lambda + y_0 \\ z = c\lambda + z_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \lambda a + \lambda' a' + x_0 \\ y = \lambda b + \lambda' b' + y_0 \\ z = \lambda c + \lambda' c' + z_0 \end{cases}$$

est, sous certaines conditions, la représentation paramétrique d'une droite ou d'un plan n'a pas été traité car il nous a semblé évident.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Équations cartésiennes • Représentation paramétrique d'un plan de l'espace. • Vecteur normal à un plan. • Plan défini par un vecteur normal et un point. • Équations cartésiennes d'un plan. • Distance d'un point à un plan. • Systèmes d'équations cartésiennes d'une droite.	Trouver une équation cartésienne ou une représentation paramétrique d'un plan : – défini par un repère cartésien ; – défini par 3 points non alignés ; – défini par un point et un vecteur normal ; – passant par un point et parallèle à un plan donné ; – passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée. • Trouver un système d'équations cartésiennes ou paramétriques d'une droite : – définie par un repère cartésien ;

savoirs	savoir-faire
Représentations paramétriques • Représentations paramétriques d'une droite. • Représentations paramétriques d'un plan. **Positions relatives de droites et plans** • Positions relatives de deux droites. • Positions relatives d'une droite et d'un plan. • Positions relatives de deux plans.	– définie par 2 points distincts ; – passant par un point et parallèle à une droite donnée ; – passant par un point et perpendiculaire à un plan donné. • Passer d'une représentation paramétrique à un système d'équations cartésiennes et vice versa. • Calculer la distance d'un point à un plan. • Déterminer l'intersection de deux plans, de deux droites, d'un plan et d'une droite, les plans et les droites étant définis par des équations cartésiennes ou des représentations paramétriques. • Les plans ou les droites étant définis par des équations cartésiennes ou des représentations paramétriques, reconnaître que : – deux plans sont perpendiculaires ou parallèles ; – deux droites sont perpendiculaires ou parallèles ; – une droite est perpendiculaire ou parallèle à un plan.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 150

1. $\mathcal{P}(O, \vec{i}, \vec{j}) : z = 0$; $\mathcal{P}(O, \vec{i}, \vec{k}) : y = 0$; $\mathcal{P}(O, \vec{j}, \vec{k}) : x = 0$.

2. $\mathcal{P}(A, \vec{i}, \vec{j}) : z - 3 = 0$; $\mathcal{P}(A, \vec{i}, \vec{k}) : y - 2 = 0$; $\mathcal{P}(A, \vec{j}, \vec{k}) : x - 1 = 0$.

♦ Exercice 1.b p. 150

$\mathcal{D}(A, \vec{i}) : \begin{cases} y - 2 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$; $\mathcal{D}(A, \vec{j}) : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$; $\mathcal{D}(A, \vec{k}) : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$.

♦ Exercice 1.c p. 150

Une équation du plan (ABC) est de la forme : $ax + by + cz + d = 0$, avec : $\begin{cases} -2a + d = 0 \\ 3b + d = 0 \\ 4c + d = 0 \end{cases}$.

$(6 ; -4 ; -3 ; 12)$ est solution de ce système ; donc, une équation de (ABC) est : $6x - 4y - 3z + 12 = 0$.

♦ Exercice 1.d p. 150

1. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a : $\begin{cases} \vec{n}.\vec{u} = 0 \\ \vec{n}.\vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 5b + 2c = 0 \\ -3a + 5b + 2c = 0. \end{cases}$

Ce système admet une infinité de solutions, par exemple $(4 ; 2 ; 1)$.
Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(4 ; 2 ; 1)$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est : $4(x + 1) + 2(y - 3) + (z + 5) = 0$; c'est-à-dire : $4x + 2y + z + 3 = 0$.

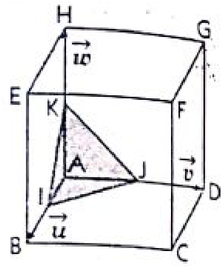
♦ Exercice 1.e p. 150

Les coordonnées du point A vérifient le système d'équations cartésiennes de $(\mathcal{D})$; donc : $A \in (\mathcal{D})$.
Le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ a pour coordonnées $(3, -1, -1)$.
Les coordonnées de B vérifient également le système d'équations de $(\mathcal{D})$. Donc, $B \in (\mathcal{D})$ et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$. Par suite, $(A, \vec{u})$ est un repère de $(\mathcal{D})$.

♦ Exercice 1.f p. 150

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux points de $(\mathcal{D})$; donc : $(A, \overrightarrow{AB})$ est un repère de $(\mathcal{D})$.
On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. $(A, \vec{u})$ est un repère de $(\mathcal{D})$.

♦ **Exercice 1.g p. 150**



1. Dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, on a : $I\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\end{pmatrix}$, $J\begin{pmatrix}0\\1/2\\0\end{pmatrix}$, $K\begin{pmatrix}0\\0\\1/2\end{pmatrix}$.

Donc : $2x + 2y + 2z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (I J K).

2. Système d'équations cartésiennes de (IJ) : $\begin{cases}2x + 2y - 1 = 0\\z = 0\end{cases}$.

Système d'équations cartésiennes de (IK) : $\begin{cases}2x + 2z - 1 = 0\\y = 0\end{cases}$.

Système d'équations cartésiennes de (JK) : $\begin{cases}2y + 2z - 1 = 0\\x = 0\end{cases}$.

♦ **Exercice 2.a p. 155**

1. Les axes du repère admettent les représentations paramétriques suivantes.

$(O, \vec{i}) : \begin{cases}x = \lambda\\y = 0\\z = 0\end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$; $(O, \vec{j}) : \begin{cases}x = 0\\y = \lambda\\z = 0\end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$; $(O, \vec{k}) : \begin{cases}x = 0\\y = 0\\z = \lambda\end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$.

2. Les plans du repère admettent les représentations paramétriques suivantes.

$(O, \vec{i}, \vec{j}) : \begin{cases}x = \lambda\\y = \mu\\z = 0\end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$; $(O, \vec{j}, \vec{k}) : \begin{cases}x = 0\\y = \lambda\\z = \mu\end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$; $(O, \vec{i}, \vec{k}) : \begin{cases}x = \lambda\\y = 0\\z = \mu\end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$.

♦ **Exercice 2.b p. 155**

1. $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ a pour représentations paramétriques : $\begin{cases}x = 1 + \lambda\\y = -3 - \lambda\\z = 2 + 2\lambda\end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$.

2. $\mathcal{P}(A, \vec{v}, \vec{w})$ a pour représentations paramétriques : $\begin{cases}x = 1 + \lambda\\y = -3 - \lambda - \mu.\\z = 2 + 2\lambda\end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$.

♦ **Exercice 2.c p. 155**

1. $(\mathcal{D})$ a pour repère $(A, \vec{u})$, avec : $A\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

2. $(\mathcal{P})$ a pour repère $(B, \vec{v}, \vec{w})$, avec : $B\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

♦ **Exercice 2.d p. 155**

1. *a)* $\begin{cases}x = \lambda\\y = \mu\\z = 2 + \lambda\end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$ *b)* $\begin{cases}x = \lambda\\y = 1 + 2\lambda + 3\mu\\z = \mu\end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$

c) $\begin{cases}x = 2 + 3\lambda - 2\mu\\y = \lambda\\z = \mu\end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$ *d)* $\begin{cases}x = -4 - 3\lambda\\y = 2\lambda\\z = \mu\end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$.

2. Pour déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$, connaissant un système d'équations cartésiennes de cette droite, on peut déterminer deux points de $(\mathcal{D})$ et en déduire un repère.

Par exemple, on a : $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$. On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; donc : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

On en déduit le repère $(A, \vec{u})$ de $(\mathcal{D})$ et une représentation paramétrique : $\begin{cases}x = \lambda\\y = 1 - 3\lambda\\z = 1 + 2\lambda\end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$

♦ **Exercice 2.e p. 155**

Pour déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite $(\mathcal{D})$ connaissant une représentation paramétrique de cette droite, il suffit de trouver deux relations indépendantes de λ entre x, y et z, telles que ces relations soient des équations cartésiennes de deux plans non parallèles.

On a, par exemple : $\begin{cases}x - y - z + 6 = 0.\\2x + z + 1 = 0\end{cases}$

♦ **Exercice 2.f p. 155**

$A\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ sont deux points de $(\mathcal{D})$; donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$

$\vec{v}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs non colinéaires et orthogonaux à $\vec{u}$.

$(A, \vec{u}, \vec{w})$ est un repère de $(\mathcal{P})$. On en déduit une représentation paramétrique de $(\mathcal{P})$:

$$\begin{cases} x = -1 + 3\lambda + \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

♦ **Exercice 3.a p. 160**

Si $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes en un point, les coordonnées de ce point doivent vérifier les deux systèmes d'équations de ces droites. Donc :

$$\begin{cases} (1-2\lambda) + (2+\lambda) - (-1-3\lambda) - 6 = 0 \\ 2(1-2\lambda) - (2+\lambda) - (-1-3\lambda) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1.$$ Donc, $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes en $A\begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix}$.

♦ **Exercice 3.b p. 160**

1. On détermine deux points de $(\mathcal{D})$: $A\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$. Donc : $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$.

On détermine deux points de $(\mathcal{D}')$: $A'\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $B'\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$. Donc : $\vec{u}'\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D}')$.

On en déduit que $(\mathcal{D}) // (\mathcal{D}')$. De plus : $A \in (\mathcal{D}')$; donc : $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont strictement parallèles.

2. Le plan déterminé par les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ passe par les points A, A' et B'.

Donc, une équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est telle que : $\begin{cases} a - 4b + d = 0 \\ a + d = 0 \\ 2b + c + d = 0 \end{cases}$.

On a, par exemple : $(a, b, c, d) = (1 ; 0 ; 1 ; -1)$. Donc : $x + z - 1 = 0$.

♦ **Exercice 3.c p. 160**

Si $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants en un point, les coordonnées de ce point vérifient les deux systèmes d'équations.

Donc : $\begin{cases} (\lambda+\mu) + (2-\lambda) - 2(-1-2\mu) = -1 \\ (\lambda+\mu) - 2(2-\lambda) + (-1-2\mu) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\mu = -5 \\ 3\lambda - \mu = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -1 \end{cases}$.

Donc, $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants au point A de coordonnées $(0 ; 1 ; 1)$.

♦ **Exercice 3.d p. 160**

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de $(\mathcal{P})$. Donc, $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

$\vec{u}'\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}'\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de $(\mathcal{P}')$. Donc, $\vec{n}'\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P}')$.

$(\mathcal{P}) : x + 4y + 3z - 6 = 0$; $(\mathcal{P}') : x - 5y + 3z + 3 = 0$.

2. $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires ; donc, $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants. Leur droite d'intersection $(\mathcal{D})$ a pour vecteur directeur un vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, soit par exemple $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Il suffit de déterminer un point A commun à $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

Le point $A\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ appartient à $(\mathcal{P})$ $(\lambda = \mu = 0)$ et à $(\mathcal{P}')$ $(\lambda = \mu = 1)$.

Donc, $\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$.

♦ **Exercice 3.e p. 160**

1. Le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ a pour équation $z = 0$.

Donc, $(\mathcal{D})$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 6 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

2. $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$. Le plan $(\mathcal{P}')$ a pour vecteur normal $\vec{n}'$ tel que $\vec{n}'$ soit orthogonal à $\vec{n}$ et à $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vecteur directeur de $(\mathcal{D})$. Le vecteur $\vec{n}'\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ convient.

Donc, une équation de $(\mathcal{P}')$ est : $2(x - 6) - 4y - 5z = 0$; c'est-à-dire : $2x - 4y - 5z - 12 = 0$.

Exercices d'apprentissage

ÉQUATIONS CARTÉSIENNES DE DROITES ET PLANS

♦ **Exercice 1 p. 161**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$. Une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est de la forme : $x + 4y + 2z + d = 0$.

$C \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow 2 + 16 - 10 + d = 0 \Leftrightarrow d = -8$. Donc, une équation de $(\mathcal{P})$ est : $x + 4y + 2z - 8 = 0$.

♦ **Exercice 2 p. 161**

1. Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme : $ax + by + cz + d = 0$.

On a : $\begin{cases} A \in (\mathcal{P}) \\ B \in (\mathcal{P}) \\ C \in (\mathcal{P}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b + c + d = 0 \\ a - b + c + d = 0 \\ a + b - c + d = 0. \end{cases}$

Ce système admet une infinité de triplets solutions, par exemple : $(1 ; 1 ; 1 ; -1)$.
Donc une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + y + z - 1 = 0$.

2. Une équation cartésienne du plan parallèle à $(\mathcal{P})$ passant par O est : $x + y + z = 0$.

♦ **Exercice 3 p. 161**

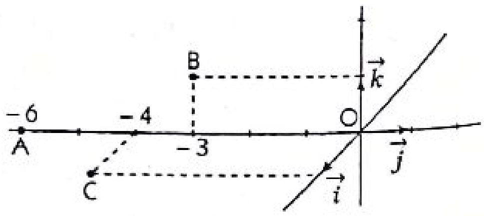
1. On a : $A \in (\mathcal{P}_k) \Leftrightarrow -4 - 4 - k = 0 \Leftrightarrow k = -8$.

2. Lorsque k décrit $\mathbb{R}$, les plans $(\mathcal{P}_k)$ restent parallèles au plan $(\mathcal{P}_0)$ d'équation : $2x - y + z = 0$.

♦ **Exercice 4 p. 161**

$A\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont trois points de $(\mathcal{P})$.

2. *Voir figure ci-contre.*



♦ **Exercice 5 p. 161**

Il faut déterminer deux équations de la forme : $ax + by + cz + d = 0$, avec : $\begin{cases} -2a - b + 2c + d = 0 \\ a + 2b - 3c + d = 0. \end{cases}$

On a un système linéaire de deux équations à quatre inconnues ; on choisit arbitrairement deux inconnues.
(Il ne faut pas choisir des valeurs proportionnelles, sinon on obtient deux équations équivalentes.)

On a, par exemple : $\begin{cases} (a, b, c, d) = (1, -1, 0, 1) \\ (a, b, c, d) = (1, 4, 3, 0) \end{cases}$; donc : $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$.

♦ **Exercice 6 p. 161**

On procède comme dans l'exercice précédent.

1. On obtient, par exemple : $\begin{cases} -2x + y + 1 = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$.

2. Intersection avec le plan $\mathcal{P}$ $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On a : $z = 0$; donc, le point d'intersection a pour coordonnées $(0 ; -1 ; 0)$.

Intersection avec le plan $\mathcal{P}$ $(O, \vec{j}, \vec{k})$

On a : $x = 0$; donc, le point d'intersection a pour coordonnées $(0 ; -1 ; 0)$.

Intersection avec le plan $\mathcal{P}$ $(O, \vec{k}, \vec{i})$

On a : $y = 0$; donc, le point d'intersection a pour coordonnées $(\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{1}{2})$.

REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES

♦ Exercice 7 p. 161

1. On a : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Les droites (OA), (OB) et (AB) ont pour repères respectifs : $(O,\overrightarrow{OA})$, $(O,\overrightarrow{OB})$ et $(A,\overrightarrow{AB})$.

On en déduit une représentation paramétrique de ces droites.

(OA) : $\begin{cases}x=\lambda\\y=\lambda\\z=\lambda\end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$; (OB) : $\begin{cases}x=2\lambda\\y=3\lambda\\z=2\lambda\end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$; (AB) : $\begin{cases}x=1+\lambda\\y=1+2\lambda\\z=1+\lambda\end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.

2. Représentation paramétrique du plan (OAB) : $\begin{cases}x=\lambda+2\mu\\y=\lambda+3\mu\\z=\lambda+2\mu\end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R},\mu\in\mathbb{R})$.

♦ Exercice 8 p. 161

a) Droite de repère $(A,\vec{u})$, avec $A\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

b) Demi-droite de repère $(A,\vec{u})$.

♦ Exercice 9 p. 161

1. Intersection avec $\mathcal{D}(O,\vec{i})$: $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; intersection avec $\mathcal{D}(O,\vec{j})$: $B\begin{pmatrix}0\\-2/3\\0\end{pmatrix}$; intersection avec $\mathcal{D}(O,\vec{k})$: $C\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$.

2. Équation cartésienne de $(\mathcal{P})$: $2x-3y+z-2=0$.

♦ Exercice 10 p. 161

1. A est le point de paramètre $\lambda=1$; B est le point de paramètre $\lambda=2$.

2. Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. $AM=13 \Leftrightarrow (-3+3\lambda)^2+(4-4\lambda)^2+(-12+12\lambda)^2=13^2 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2=1$.

On obtient : $\lambda=0$ ou $\lambda=2$. Donc : $M_1\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix}1\\-3\\9\end{pmatrix}$.

♦ Exercice 11 p. 161

1. A a pour paramètres $\lambda=1$ et $\mu=1$, B : $\lambda=1$ et $\mu=-1$, C : $\lambda=-1$ et $\mu=0$.

2. On a : $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$. Donc, G a pour coordonnées $(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{7}{3})$. D'où $\lambda=\frac{1}{3}$ et $\mu=0$.

DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN

♦ Exercice 12 p. 161

On a : $d(A,\mathcal{P})=\dfrac{|12-8+6|}{\sqrt{9+16}}=2$.

♦ Exercice 13 p. 161

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. On a : $MA=MB \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=(x+2)^2+(z-3)^2 \Leftrightarrow 2x+2y-6z+11=0$.

Cette équation caractérise le plan médiateur de [AB].

♦ Exercice 14 p. 161

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. On a : $d(M,\mathcal{P})=2 \Leftrightarrow |x+4y-z-4|=6\sqrt{2}$ et $M\in(\mathcal{D}) \Leftrightarrow x=y=z$.

Donc : $4x-4=6\sqrt{2}$ ou $4x-4=-6\sqrt{2}$.

Il y a deux points solutions : $M_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(2+3\sqrt{2})\\\frac{1}{2}(2+3\sqrt{2})\\\frac{1}{2}(2+3\sqrt{2})\end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(2-3\sqrt{2})\\\frac{1}{2}(2-3\sqrt{2})\\\frac{1}{2}(2-3\sqrt{2})\end{pmatrix}$.

♦ Exercice 15 p. 162

Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x+2y+2z-2=0$.

Donc, la distance de O à ce plan est : $d=\dfrac{2}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{2}{3}$.

♦ Exercice 16 p. 162

Les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants suivant la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\dfrac{1}{3} + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

♦ Exercice 17 p. 162

1. $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ ont pour vecteurs directeurs respectifs : $\vec{u}_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

$\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont non colinéaires, donc $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ ne sont pas parallèles. Si $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont sécants, on a :

$$\begin{cases} -\lambda = 2 - 2\mu \\ \lambda = 1 - \mu \\ \lambda = -\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda + 2\mu = 2 \\ \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases}.$$

Les deux dernières équations étant incompatibles, le système n'a pas de solution.
Donc, $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont non coplanaires.

2. Une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est : $y - z = 1$.

♦ Exercice 18 p. 162

Un point commun à $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ est tel que : $\begin{cases} -3\lambda - \mu = 0 \\ \lambda + \mu = 4 \\ 2\lambda + \mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \mu = 6. \end{cases}$

Donc, $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécants en $A\begin{pmatrix}8\\7\\-7\end{pmatrix}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$ déterminé par $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

Donc, une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est : $(x - 8) + (y - 7) + 2\,(z + 7) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 1 = 0.$

♦ Exercice 19 p. 162

1. Le plan passant par A et parallèle à $(\mathcal{P})$ a pour équation cartésienne :

$(x - 1) + (y + 1) + (z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 2.$

2. *a)* La droite $(\mathcal{D})$ orthogonale à $(\mathcal{P})$ et passant par A a pour repère $(A, \vec{n})$, avec $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

donc, elle a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

b) Le point d'intersection B de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ est tel que :

$(1 + \lambda) + (-1 + \lambda) + (2 + \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{2}{3}$; donc, B a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3} ; -\dfrac{5}{3} ; \dfrac{4}{3}\right)$.

♦ Exercice 20 p. 162

1. La droite $(\mathcal{D})$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -7 + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$

Donc, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$. On a : $\vec{n}.\vec{u} = 0$; donc, $(\mathcal{D})$ est parallèle à $(\mathcal{P})$. De plus, le point $A\begin{pmatrix}0\\-7\\-2\end{pmatrix}$ appartient à $(\mathcal{D})$ mais n'appartient pas à $(\mathcal{P})$. Donc, $(\mathcal{D})$ est strictement parallèle à $(\mathcal{P})$.

2. Le plan $(\mathcal{P})$ a pour repère $(A, \vec{n}, \vec{u})$.

$\vec{n}'\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$. Donc, une équation cartésienne à $(\mathcal{P})$ est :

$x + (y + 7) - 2\,(z + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 2z + 3 = 0.$

3. Intersection de $(\mathcal{P})$ et (Π) : $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

♦ **Exercice 21 p. 162**

1. La droite $(\mathcal{D}')$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$. Ces vecteurs n'étant pas colinéaires, $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont pas parallèles.

De plus, le système $\begin{cases} -1 + \lambda = \mu \\ 3 - 2\lambda = 3 - 3\mu \\ -1 + 3\lambda = 3 - 2\mu \end{cases}$ est impossible. Donc, $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont non coplanaires.

2. Le plan $(\mathcal{P})$ a pour repère $(A, \vec{u}, \vec{u}')$, avec $A\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$ si : $\begin{cases} a - 2b + 3c = 0 \\ a - 3b - 2c = 0 \end{cases}$. Donc, par exemple, $\vec{n}\begin{pmatrix}-13\\-5\\1\end{pmatrix}$.

Équation cartésienne de $(\mathcal{P})$: $13(x+1) + 5(y-3) - (z+1) = 0 \Leftrightarrow 13x + 5y - z = 3$.

♦ **Exercice 22 p. 162**

1. Un système d'équations cartésiennes de $(\mathcal{D}')$ est : $\begin{cases} (x-1) - (y-2) + (z+3) = 0 \\ (x-1) + (y-2) - (z+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + 4 = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$.

2. On détermine deux points de $(\mathcal{D})$, par exemple : $O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Le plan $(\mathcal{P})$ est le plan (OAB).

Donc, une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est : $ax + by + cz + d = 0$, avec $\begin{cases} d = 0 \\ a + 2b - 3c + d = 0. \\ b + c + d = 0 \end{cases}$

$(5 ; -1 ; 1 ; 0)$ est solution de ce système. On en déduit une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$: $5x - y + z = 0$.

♦ **Exercice 23 p. 162**

Représentation paramétrique de $(\mathcal{P})$: $\begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = -1 - 3\lambda - \mu \\ z = 2\lambda + 3\mu \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$.

Pour déterminer l'intersection de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$, on résoud le système :

$\begin{cases} (2 + \lambda + \mu) - 2(-1 - 3\lambda - \mu) + (2\lambda + 3\mu) + 1 = 0 \\ (2 + \lambda + \mu) + (-1 - 3\lambda - \mu) + (2\lambda + \mu) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\lambda + 6\mu + 5 = 0 \\ 3\mu + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{3} \\ \mu = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ ont pour intersection le point de coordonnées $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$.

♦ **Exercice 24 p. 162**

1. $(\mathcal{D})$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

On en déduit une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$: $(x-1) - 2(y-2) + (z-3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + z = 0$.

2. $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ ont pour intersection le point de coordonnées $(1 ; 1 ; 1)$.

♦ **Exercice 25 p. 162**

La droite $(\mathcal{D})$ admet pour vecteur directeur un vecteur normal à $(\mathcal{P})$, soit : $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

On en déduit $(\mathcal{D})$: $\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et $(\mathcal{D})$: $\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$.

♦ **Exercice 26 p. 162**

$(\mathcal{P})$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$. $(\mathcal{P}')$ a pour vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}$.

On a : $\vec{n}.\vec{u} = \vec{n}.\vec{v} = 0$; donc, les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles.

♦ **Exercice 27 p. 162**

Les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ admettent pour représentations paramétriques :

$(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad$ et $\quad (\mathcal{D}') : \begin{cases} x = 2\mu \\ y = -1 - 2\mu \\ z = \mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R}).$

Les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

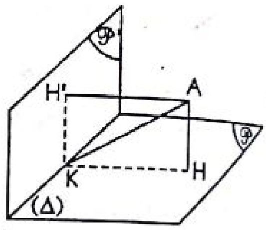
On a : $\vec{u}.\vec{u}' = 0$; donc, les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont orthogonales.

Elles sont sécantes si et seulement si : $\begin{cases} \lambda = 2\mu \\ 2 + 2\lambda = -1 - 2\mu. \\ 2\lambda = \mu \end{cases}$

Ce système n'admet pas de solution ; donc, les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont non coplanaires.

Exercices d'appronfondissement

♦ Exercice 28 p. 162



1. Les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ont pour vecteurs normaux respectifs : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

On a : $\vec{n}.\vec{n}' = 0$; donc, les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont perpendiculaires.

2. $d(A, \mathcal{P}) = d = \dfrac{3}{\sqrt{3}}$ et $d(A, \mathcal{P}') = d' = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$.

3. Soit H, H' et K les projetés orthogonaux respectifs de A sur $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{P}')$ et (Δ).

AHKH' est un rectangle ; donc : $AK = \sqrt{d^2 + d'^2} = \sqrt{3 + \dfrac{3}{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

♦ Exercice 29 p. 162

1. Les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ ont pour vecteurs normaux respectifs : $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont colinéaires ; donc, les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles.

Or $A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ appartient à $(\mathcal{P}')$, mais pas à $(\mathcal{P})$; donc, ces plans sont strictement parallèles.

2. *a)* Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. La droite (MM') est orthogonale aux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$, donc les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires ; il existe un nombre réel k, tel que : $\begin{cases} x' = x + k \\ y' = y - 2k. \\ z' = z + k \end{cases}$

$M \in (\mathcal{P}) \iff 2x - 4y + 2z + 3 = 0$ et $M' \in (\mathcal{P}') \iff x' - 2y' + z' - 3 = 0$. On en déduit : $k = \dfrac{3}{4}$.

b) La distance entre les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ est : $MM' = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} = \dfrac{3\sqrt{6}}{4}$.

♦ Exercice 30 p. 163

1. Le système est un système d'équations cartésiennes d'une droite si $a \neq 1$.

2. • $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont parallèles si $b = -1$.

• $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes si $b \neq -1$ et si elles ont un point commun.

• $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont non coplanaires si : $b \neq -1$ et $a + b \neq 1$.

♦ Exercice 31 p. 163

1. Le plan $(\mathcal{P})$ a pour vecteur normal : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{E}$ et $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ le projeté orthogonal de M sur le plan $(\mathcal{P})$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc il existe un nombre réel k tel que : $x' - x = y' - y = z' - z = k$.

De plus : $M' \in (\mathcal{P}) \iff x' + y' + z' = 0$.

On en déduit : $k = -\dfrac{1}{3}(x + y + z)$ et $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(2x - y - z) \\ y' = \dfrac{1}{3}(-x + 2y - z). \\ z' = \dfrac{1}{3}(-x - y + 2z) \end{cases}$

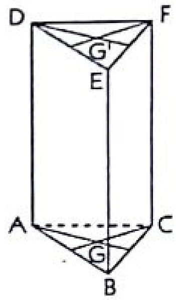
2. a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$. Donc, la droite (AB) est parallèle au plan ($\mathcal{P}$).

b) On a : $A'\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$, $B'\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $C'\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}$; donc : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'C'}\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$.

On en déduit : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ et $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}=0$. Donc, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ sont droits.

On retrouve la propriété suivante : la projection orthogonale d'un angle droit est un angle droit si l'un des côtés de cet angle est parallèle au plan de projection.

♦ Exercice 32 p. 163



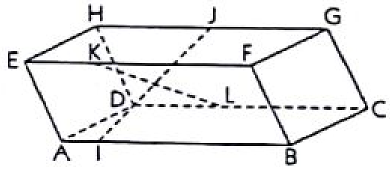
1. Dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$, on a : $D\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG'}\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1\end{pmatrix}$.

On en déduit (AG') : $\begin{cases}x=\lambda\\y=\lambda\\z=3\lambda\end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.

De même, on a (DG) : $\begin{cases}x=\mu\\y=\mu\\z=1-3\mu\end{cases}$ $(\mu\in\mathbb{R})$.

2. Donc, les droites (AG') et (DG) sont sécantes au point K, de coordonnées $(\frac{1}{6};\frac{1}{6};\frac{1}{2})$.

♦ Exercice 33 p. 163



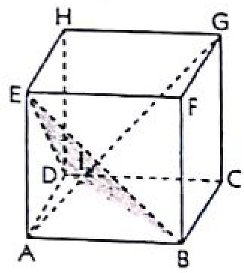
1. Dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on a :

$I\begin{pmatrix}1/6\\0\\0\end{pmatrix}$, $J\begin{pmatrix}1/2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1/3\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a (IJ) : $\begin{cases}x=\frac{1}{6}+\lambda\\y=3\lambda\\z=3\lambda\end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ et (KL) : $\begin{cases}x=\frac{1}{3}+(\alpha-\frac{1}{3})\mu\\y=\mu\\z=1-\mu\end{cases}$ $(\mu\in\mathbb{R})$.

2. Pour $\alpha=\frac{1}{3}$, les droites (IJ) et (KL) sont sécantes au point de coordonnées $(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

♦ Exercice 34 p. 163



1. Dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on a :

$B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Équation cartésienne du plan (BDE) : $x+y+z-1=0$.

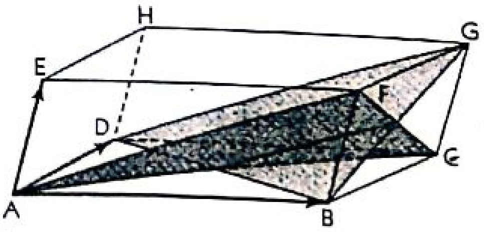
Représentation paramétrique de la droite (AG) : $\begin{cases}x=\lambda\\y=\lambda\\z=\lambda\end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.

2. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BDE) et est un vecteur directeur de la droite (AG) ; donc : (AG)⊥ (BDE).

Le point d'intersection I de (AG) et (BDE) est tel que : $\lambda+\lambda+\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{3}$.

Donc, I a pour coordonnées $(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

♦ Exercice 35 p. 163



1. • $\overrightarrow{GD}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont non colinéires, donc vecteurs directeurs du plan (GDB). On a :

$\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG}=-\vec{u}-\vec{w}$;

$\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AG}=-\vec{v}-\vec{w}$.

• De même, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont des vecteurs directeurs du plan (CFA). On a :

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{u}+\vec{v}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\vec{u}+\vec{w}$.

• On a : $\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{AF}$; on en déduit que $\overrightarrow{GD}$ (ou $\overrightarrow{AF}$) est un vecteur directeur commun aux plans (GDB) et (CFA), donc un vecteur directeur de la droite d'intersection de ces deux plans.

2. On a : (GDB) : $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 - \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$ et (CFA) : $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$.

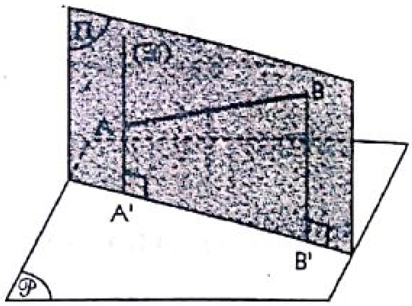
On en déduit une représentation paramétrique de (GDB) $\cap$ (CFA) : $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \lambda \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 36 p. 163

$(\mathcal{P})$ est le plan d'équation cartésienne : $x - 2y - 2z + 3 = 0$. Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$.

1. *(AB) et $(\mathcal{P})$ ne sont pas orthogonaux.*

On désigne par A' et B' les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur $(\mathcal{P})$.



A' et B' sont distincts, sinon la droite (AB) serait orthogonale à $(\mathcal{P})$. Soit $(\mathcal{P})$ le plan défini par (A'B') et la droite $(\mathcal{D})$ orthogonale à $(\mathcal{P})$ passant par A'.

Ce plan contient une droite orthogonale à $(\mathcal{P})$, il est donc perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

Les points A et B appartiennent respectivement à $(\mathcal{D})$ et à la droite parallèle à $(\mathcal{D})$ passant par B' : ces points appartiennent donc à $(\mathcal{P})$.

Donc, il existe un unique plan passant par A et B, et perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

Application

On a : $A\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\-2\\0\end{pmatrix}$, donc : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-6\\-2\end{pmatrix}$. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont non colinéaires ; donc, $(A, \overrightarrow{AB}, \vec{n})$ est un repère du plan $(\mathcal{P})$.

On en déduit une représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P})$: $\begin{cases} x = 4 + \lambda + \mu \\ y = 4 - 6\lambda - 2\mu \\ z = 2 - 2\lambda - 2\mu \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$.

D'où une équation cartésienne : $2x + z - 10 = 0$.

2. *(AB) et $(\mathcal{P})$ sont orthogonaux.*

a) Tout plan $(\mathcal{P})$ passant par A et B contient la droite (AB) orthogonale au plan $(\mathcal{P})$, donc est perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

b) On a : $A\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$, et $B\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}$, donc : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est de la forme : $ax + by + cz + d = 0$.

On a : $\begin{cases} A \in (\mathcal{P}) \\ B \in (\mathcal{P}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 4b + 2c + d = 0 \\ 5a + 2b + d = 0 \end{cases}$.

On pose : $b = \lambda$ et $c = \mu$; on en déduit : $a = 2\lambda + 2\mu$ et $d = -12\lambda - 10\mu$.

Donc, une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est de la forme : $(2x + y - 12)\lambda + (2x + z - 10)\mu = 0$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

L'ensemble des plans $(\mathcal{P})$, contenant une même droite (AB), est appelé faisceau de plans.

♦ Exercice 37 p. 164

$(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont les droites de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$, avec : $A\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$, et $B\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

1. On a $(\mathcal{D})$: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et $(\mathcal{D}')$: $\begin{cases} x = 2 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 4 + 2\mu \end{cases}$ $(\mu \in \mathbb{R})$.

$(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ont des vecteurs directeurs non colinéaires, donc, elles ne sont pas parallèles.

Si elles ont un point commun, les coordonnées de ce point vérifient le système :

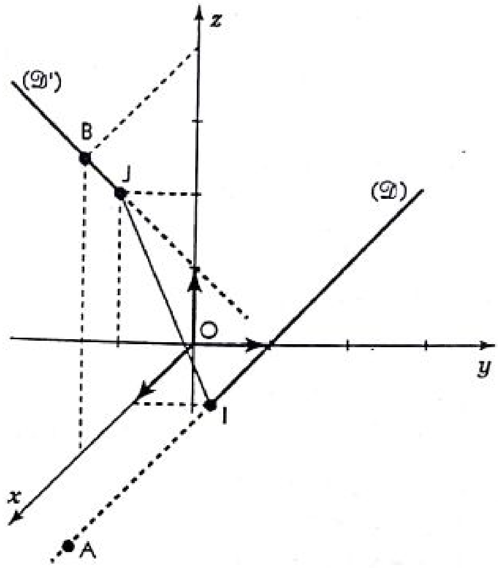
$$\begin{cases} 1 = 2 + 2\mu \\ -1 + \lambda = \mu \\ -2 + \lambda = 4 + 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = 5 \end{cases}.$$

Ce système n'admet pas de solution ; donc, les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont non coplanaires.

2. Soit $I\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $J\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ tels que : $I \in (\mathscr{D})$ et $J \in (\mathscr{D}')$. La droite (IJ) est perpendiculaire aux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ si et seulement si : $\overrightarrow{IJ}.\vec{u} = \overrightarrow{IJ}.\vec{v} = 0$.

Les coordonnées des points I et J vérifient respectivement les représentations paramétriques des droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

De plus, ces coordonnées vérifient le système :



$$\begin{cases} (y' - y) + (z' - z) = 0 \\ 2(x' - x) + (y' - y) + 2(z' - z) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + z = y' + z' \\ 2x + y + 2z = 2x' + y' + 2z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - 3 = 3\mu + 4 \\ 3\lambda - 3 = 9\mu + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -1 \end{cases}.$$

On en déduit : $I\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $J\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

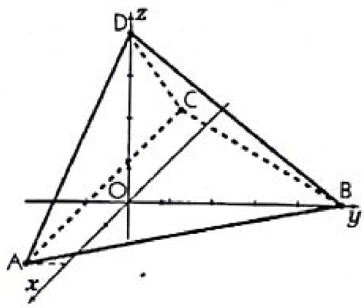
3. *a)* On a : $MN^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IN})^2 = \alpha^2\vec{u}^2 = \beta^2\vec{v}^2 + \overrightarrow{IJ}^2 + 2\overrightarrow{IJ}.(\beta\vec{v} - \alpha\vec{u}) - 2\alpha\beta\,\vec{u}.\vec{v}$

$= 2\alpha^2 + 9\beta^2 + 9 + 0 - 6\alpha\beta = (\alpha - 3\beta)^2 + \alpha^2 + 9.$

b) On en déduit que la valeur minimale de la distance MN est obtenue si $\alpha = \beta = 0$, donc, lorsque M est en I et N en J. Cette valeur minimale est : IJ = 3.

La distance IJ est appelée distance entre les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

♦ Exercice 38 p. 164



1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow$: (AB) ⊥ (CD).

On démontre de même que : (AC) ⊥ (BD) et (AD) ⊥ (BC).

2. On a : $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Soit $\vec{n}_1$ un vecteur de coordonnées (a, b, c).

$\vec{n}_1$ est un vecteur normal au plan (DBC) si : $\vec{n}_1.\overrightarrow{DB} = \vec{n}_1.\overrightarrow{DC} = 0$; c'est-à-dire : $\begin{cases} 5b - 4c = 0 \\ 3a + b + 4c = 0. \end{cases}$

Donc : $\vec{n}_1\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (DBC).

On démontre de même que :

$\vec{n}_2\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (DCA) et $\vec{n}_3\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (DAB).

3. La hauteur (AA') est la droite passant par A et orthogonale au plan (DBC) : elle a pour vecteur directeur $\vec{n}_1$.

Une représentation paramétrique de (AA') est : $\begin{cases} x = 2 + 8\lambda \\ y = -1 - 4\lambda \\ z = -5\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

$x = -3 + 12\lambda$

$x = 0$

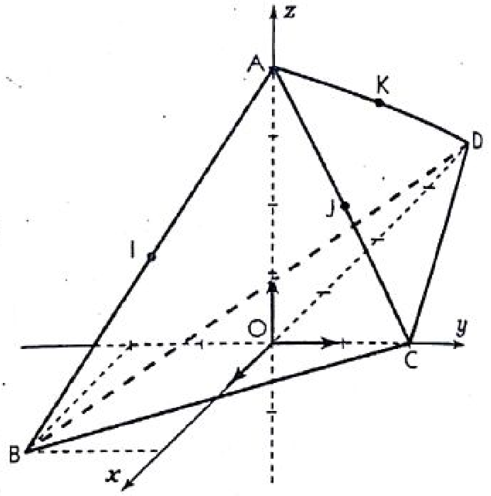
On a de même (BB') : $\begin{cases} y = 5 - 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et (CC') : $\begin{cases} y = -1 + 4\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

4. Démontrons que la droite (AA') et l'axe de repère $(O, \vec{k})$ sont sécants.

Dans la représentation paramétrique de (AA'), on a : $x = y = 0$, pour $\lambda = -\frac{1}{4}$.

Donc, le point $H\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/4 \end{pmatrix}$ appartient à la droite (AA'). On vérifie que ce point appartient également aux droites (BB') et (CC'). De plus, la droite de repère $(O, \vec{k})$, qui passe par H, est la hauteur issue du point D. Donc, les quatre hauteurs du tétraèdre ABCD sont concourantes en H.

♦ Exercice 39 p. 164



1. *a)* On a : $I\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $J\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $K\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Le plan médiateur de [AB] est le plan passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$: $M \in (\mathcal{P}_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$. On en déduit :

$(\mathcal{P}_1) : x - y - 2z + 2 = 0$;

$(\mathcal{P}_2) : y - 2z + 3 = 0$;

$(\mathcal{P}_3) : x + z = 0$.

b) Le système des équations précédentes admet un triplet solution ; donc, les plans ont un point commun : $\Omega\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. On calcule de même les coordonnées des milieux respectifs I', J', K' de [BC], [CD], [DB], puis les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$, vecteurs normaux respectifs des plans médiateurs de ces arêtes.

On trouve : $I'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $J'\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $K'\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les équations des plans médiateurs de [BC], [CD], [DB] sont respectivement :

$(\mathcal{P}'_1) : x - 2y - 1 = 0$; $(\mathcal{P}'_2) : 2x + y + 3 = 0$; $(\mathcal{P}'_3) : 3x - y + 2 = 0$.

Les coordonnées de Ω vérifient les équations de ces équations ; donc Ω appartient à ces trois plans.

On a : $\begin{cases} \Omega \in (\mathcal{P}_1) \Rightarrow \Omega A = \Omega B \\ \Omega \in (\mathcal{P}'_1) \Rightarrow \Omega B = \Omega C \\ \Omega \in (\mathcal{P}'_2) \Rightarrow \Omega C = \Omega D \end{cases}$;

donc, Ω est le centre d'une sphère passant par les sommets A, B, C et D du tétraèdre. Le rayon de cette sphère est : $\Omega A = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{11}$.

♦ Exercice 40 p. 164

$\overrightarrow{AM}.\vec{v} \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 9 = 0$.

L'ensemble ainsi défini est un plan de vecteur normal $\vec{v}$.

♦ Exercice 41 p. 164

$MA^2 - MB^2 = 6 \Leftrightarrow x + 2y - z - 3 = 0$.

L'ensemble ainsi défini est un plan de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

♦ Exercice 42 p. 164

$MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 12 \Leftrightarrow 3x - 4y - z + 6 = 0$.

L'ensemble ainsi défini est un plan de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 43 p. 164

1. D'après la figure, on a : $A\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}bc\\ac\\ab\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Une équation du plan (ABC) est du type : $bcx + acy + abz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Or : $C \in (ABC)$; donc : $d = -abc$;

On a : $bcx + acy + abz - abc = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

2. H est le projeté orthogonal de O sur (ABC) ; donc, $\overrightarrow{OH}$ et $\vec{n}$ ont même direction.

On a : $H\begin{pmatrix}bc\\ac\\ab\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}bc-a\\ac\\ab\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}bc\\ac-b\\ab\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}bc\\ac\\ab-c\end{pmatrix}$.

3. $OH^2 = (bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2$; $OA^2 = a^2$; $OB^2 = b^2$; $OC^2 = c^2$.

Donc : $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{OH^2}$.

9. Fonctions

(pages 165 à 182 du livre de l'élève)

Objectifs

- Consolider la notion de fonction introduite en classe de Seconde : restriction, prolongement, composition de deux fonctions.
- Aborder les propriétés algébriques des applications : injections, surjections, bijections ; bijection réciproque.
- Mettre en place des notions générales sur les fonctions numériques d'une variable réelle : opérations sur les fonctions, comparaison des fonctions, fonctions associées.

Commentaires

- Une application est une fonction définie sur son ensemble de départ.
- Il ne s'agit pas de faire une étude exhaustive des applications et de leurs propriétés. Les notions d'applications injectives, surjectives, bijectives seront introduites par les représentations graphiques d'applications d'une partie de ℝ vers ℝ, ou par des exemples géométriques déjà connus.

Ces notions doivent permettre de formaliser ce qui a été entrevu en seconde, afin de l'exploiter ultérieurement dans des situations précises : dénombrement, géométrie, fonctions.

- Le point précédent implique que ce chapitre soit traité très tôt dans l'année scolaire.
- On pourra à cette occasion introduire des notions de logique, en particulier la contraposée d'une implication (pour démontrer qu'une application est injective).
- On évitera de s'attarder sur des exercices purement algébriques et peu motivants, du genre : démontrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
- On n'introduira pas la notation f^{-1} (A) pour l'image réciproque d'un ensemble par une application.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Généralités • Notion d'application. • Restriction, prolongement. • Composée de deux fonctions. • Associativité de la composition de deux fonctions.	• Démontrer que deux fonctions sont égales. • Déterminer la restriction d'une application à un ensemble. • Déterminer un prolongement d'une application à un ensemble. • Déterminer la composée de deux fonctions.
Applications particulières • Applications injectives, surjectives, bijectives. • Bijection réciproque d'une bijection • $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_F$. • Théorème : la composée de deux bijections est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g$.	• Démontrer qu'une application est injective (par contraposée), surjective, bijective. • Déterminer la bijection réciproque d'une bijection. • Déterminer la bijection réciproque de la composée de deux bijections.
Fonctions numériques • Somme, produit, quotient de deux fonctions. • Représentation graphique des fonctions associées : $x \mapsto -f(x)$; $x \mapsto f(-x)$; $x \mapsto \|f(x)\|$; $x \mapsto f(x-a)$; $x \mapsto f(x)+b$. • Définition de fonction minorée, majorée ou bornée sur un ensemble. • Les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.	• Déterminer l'ensemble de définition de la somme, du produit ou du quotient de deux fonctions. • Construire les courbes représentatives des fonctions associées à f, connaissant celle de f. • Construire les courbes représentatives des fonctions : $x \mapsto ax^2+bx+c$ et $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$. • Construire la courbe représentative de f^{-1}, connaissant celle de f.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

Exercice 1.a p. 168

On a : $f = g = l$.

Exercice 1.b p. 168

Seules f et h sont des applications, car leurs ensembles de définition sont égaux à leurs ensembles de départ respectifs.

Exercice 1.c p. 168

Si $x \in [1 ; 3]$, alors $|x - 1| = x - 1$ et $|3 - x| = -x + 3$. Donc, on a : $g : [1 ; 3] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -x + 5$.

Exercice 1.d p. 168

1. $D_f =]1 ; +\infty[$ et $D_g =]-\infty ; -1] \cup]1 ; +\infty[$.
2. f et g ont la même restriction sur $]1 ; +\infty[$.

Exercice 1.e p. 168

1. $g \circ f(x) = -2ax + 3a + b$ et $f \circ g(x) = -2ax - 2b + 3$.
2. $g \circ f(x) = f \circ g(x) \Leftrightarrow a + b = 1$.

Le couple $(2 ; 1)$ convient.

Exercice 1.f p. 168

$f \circ f((x ; y)) = (10x - 15y ; -15x + 25y)$.

Exercice 2.a p. 172

- 3 a au moins deux antécédents par f qui sont 12 et 30 ; donc, f n'est pas injective.
- Tout naturel est la somme des chiffres d'au moins un nombre naturel ; donc, f est surjective.

Exercice 2.b p. 172

a) $\forall (x ; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(x) = f(y) \Leftrightarrow 2x - 3 = 2y - 3 \Leftrightarrow x = y$; donc, f est injective.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$; donc, f n'est pas injective.

c) $\forall (x ; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f((x ; y)) = f((y ; x))$; donc, f n'est pas injective.

Exercice 2.c p. 172

a) Les nombres impairs n'ont pas d'antécédent par f; donc, f n'est pas surjective.

b) Les nombres strictement inférieurs à 1 n'ont pas d'antécédent par f; donc, f n'est pas surjective.

c) 1 n'a pas d'antécédent par f; donc, f n'est pas surjective.

d) f n'est pas une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; donc f n'est pas surjective.

Exercice 2.d p. 172

Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation $f(x) = y$ admet une solution unique, si et seulement si $a \neq 0$; on a alors : $x = \frac{y - b}{a}$. Donc, f^{-1} est l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$.

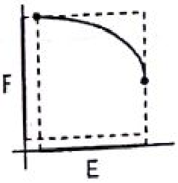
Exercice 2.e p. 172

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a : $f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{5(y - 5)}{2}$; donc, f est une bijection et $f^{-1}(x) = \frac{5(x - 5)}{2}$.

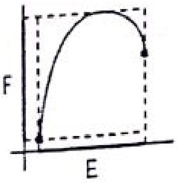
b) Soit $y \in \mathbb{R} - \{-2\}$. On a : $f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y - 1}{y + 2}$.
On a : $y \neq 1$. L'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans $\mathbb{R} - \{-1\}$. Donc, f est une bijection.
f^{-1} est l'application de $\mathbb{R} - \{-2\}$ vers $\mathbb{R} - \{-1\}$ définie par : $f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$.

♦ **Exercice 2.f p. 172**

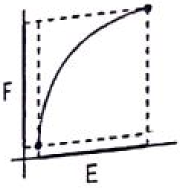
Soit f l'application de E vers F.



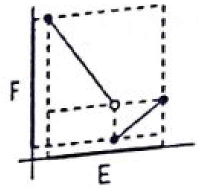
- f est injective.
- f est non surjective.



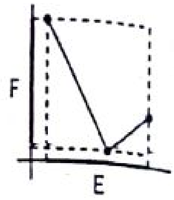
- f est non injective.
- f est surjective.



f est bijective.



f est bijective.



- f est non injective.
- f est surjective.

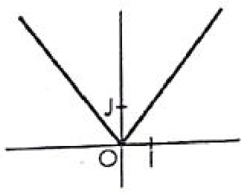
♦ **Exercice 2.g p. 172**

- f est une surjection de K vers f(K).
- Démontrons que f est injective.

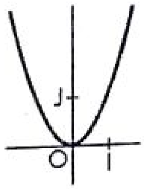
Soit a et b deux éléments distincts de K. On a : $a < b$ ou $a > b$; supposons $a > b$.
f étant strictement croissante sur K, $f(a) > f(b)$; donc : $f(a) \neq f(b)$ et f est injective.
On en déduit que f est une bijection de K vers f(K).

♦ **Exercice 2.h p. 172**

$a)$ f est surjective et non injective.

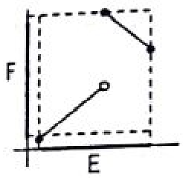


$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$
$x \mapsto |x|$.

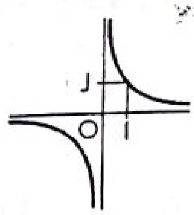


$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$
$x \mapsto x^2$

$b)$ f est injective et non surjective.



$f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

♦ **Exercice 3.a p. 178**

1. On a : $D_f = \mathbb{R}+$ et $D_f = \mathbb{R}$.

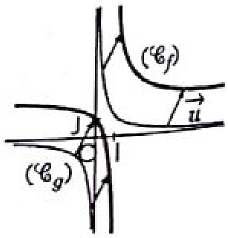
2. On a : $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}+$; $\forall\, x \in \mathbb{R}+$, $(f+g)(x) = 2x$.

♦ **Exercice 3.b p. 178**

1. $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $\dfrac{1}{x-1} + 2 = \dfrac{1 + 2(x-1)}{x-1} = \dfrac{2x-1}{x-1} = f(x)$.

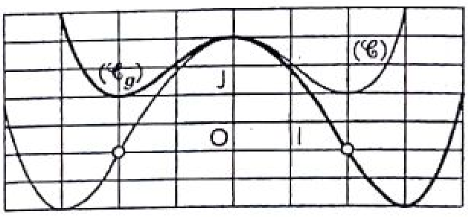
2. Posons : $g(x) = \dfrac{1}{x}$; on a : $f(x) = g(x-1) + 2$.

Donc, $(\mathscr{C}_f)$ est l'image de $(\mathscr{C}_g)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.



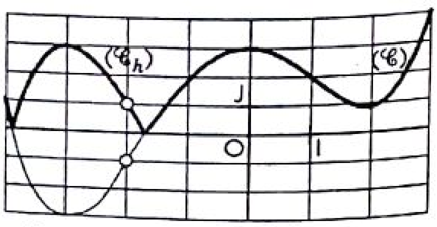
♦ **Exercice 3.c p. 178**

$a)$ Posons : $g(x) = f(-x)$. $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).



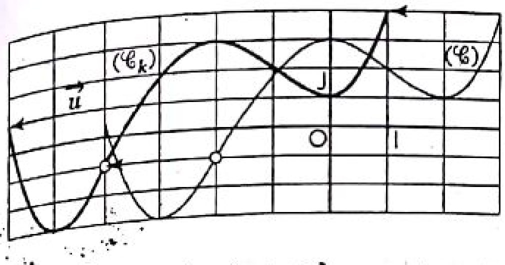
On a : $D_g = [-3 ; 2[\cup]2 ; 4]$.

$b)$ Posons : $h(x) = f(x)$. $(\mathscr{C}_h)$ est la réunion des parties des courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$, situées « au-dessus » de (OI).



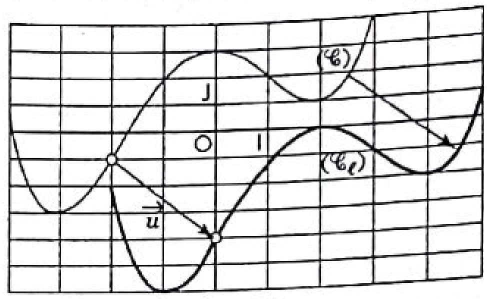
On a : $D_g = [-4 ; -2[\cup]-2 ; 3]$.

c) Posons : $k(x) = f(x+2)$. $(\mathscr{C}_k)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{-2}{0}$.



On a : $D_k = [-6\,;-4[\,\cup\,]-4\,;1]$.

d) Posons : $\ell(x) = f(x-2) - 3$. $(\mathscr{C}_\ell)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{2}{-3}$.



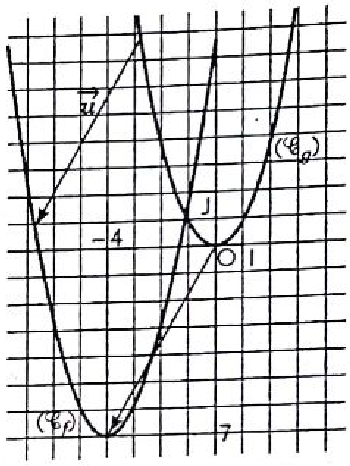
On a : $D_\ell = [-2\,;0[\,\cup\,]0\,;5]$.

♦ **Exercice 3.d p. 178**

1. Posons : $g(x) = x^2$; on a : $f(x) = g(x+4) - 7$.

Donc, $(\mathscr{C}_f)$ est l'image de $(\mathscr{C}_g)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{-4}{-7}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -7$; donc, f est minorée par -7.

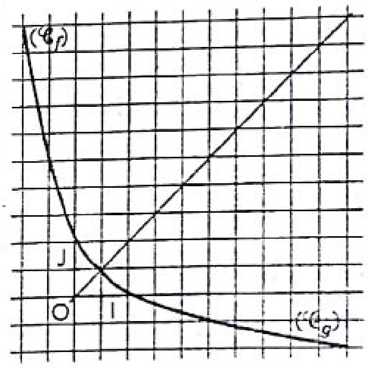


♦ **Exercice 3.e p. 178**

1. Toute parallèle à l'axe des abscisses, passant par un point de $[1\,;10]$, coupe la courbe en un unique point d'abscisse appartenant à $[-2\,;1]$.
Donc f est une bijection de $[-2\,;1]$ vers $[1\,;10]$.

2. $\forall x \in [1\,;10], f \circ g(x) = f(1-\sqrt{x-1}) = x$; donc : $f^{-1}(x) = g(x)$.

3. $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$.



❑ Exercices d'apprentissage

Généralités

♦ **Exercice 1 p. 179**

1. On a : $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}^*$; donc : $g \neq f$.

2. g et f sont égales sur $\mathbb{R}^*$.

♦ **Exercice 2 p. 179**

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |(x-2)(x-3)|$; donc : $\forall x \in [2\,;3]$, $P(x) = -(x-2)(x-3) = -x^2 + 5x - 6$.

♦ **Exercice 3 p. 179**

1. $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

2. L'application affine ayant même restriction que f sur D_f est $g : x \mapsto 3x + 1$.

♦ **Exercice 4 p. 179**

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x) \leq x < E(x) + 1$; donc : $D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

2. *a)* $\forall x \in \left]n\,;n+1\right[$, $x - E(x) > 0$; donc, $D_g = \left]n\,;n+1\right[$ et g est une application.

b) $\forall x \in \left]n\,;n+1\right[$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-n}}$.

♦ Exercice 5 p. 179

Un prolongement de f à $\mathbb{R}$ est la fonction constante : $x \mapsto -1$.

♦ Exercice 6 p. 179

1. $S_O \circ S_O = \mathrm{Id}$. 2. $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

♦ Exercice 7 p. 179

1. Soit M un point du plan. Posons : $S_{O'}(M) = M'$ et $S_O(M') = M''$; on a : $S_O \circ S_{O'}(M) = M''$.
Or : $\overrightarrow{MM''} = 2\,\overrightarrow{O'M'} + 2\,\overrightarrow{M'O} = 2\,\overrightarrow{O'O} \Rightarrow M'' = t_{2\overrightarrow{O'O}}(M)$.

On en déduit : $S_O \circ S_{O'} = t_{2\overrightarrow{O'O}}$.

2. $t_{2\overrightarrow{OO'}} = S_{O'} \circ S_O$.

♦ Exercice 8 p. 179

a) On a : $D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \{-3\,;-2\}$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-3\,;-2\}$, $g \circ f(x) = g(5+2x) = \dfrac{(5+2x)^2+1}{(5+2x)^2-1} = \dfrac{2x^2+10x+13}{2x^2+10x+12}$.

b) On a : $D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \{0\,;1\}$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\,;1\}$, $g \circ f(x) = g\left((2x\,;1-x)\right) = \left(\dfrac{1}{2x}\,;\dfrac{1-2x}{1-x}\right)$.

♦ Exercice 9 p. 179

Soit $g : x \mapsto ax+b$ une application affine. On a : $g \circ f(x) = f \circ g(x) \Leftrightarrow b = 6a-6$.
Donc, $g \circ f = f \circ g$ pour les applications affines g de la forme : $g(x) = ax + 6a - 6$ $(a \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 10 p. 179

1. On a : $D_{h\circ g\circ f} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$. $\forall x \in D_{h\circ g\circ f}$, $h \circ g \circ f(x) = \dfrac{1}{4(x^2-x-1)}$.

2. On a: $D_{g\circ h\circ f} = \mathbb{R} - \{2\}$. $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$, $g \circ h \circ f(x) = \dfrac{1}{4(x-2)^2} - 2$.

♦ Exercice 11 p. 179

Soit $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $v : x \mapsto x^2$ et $w : x \mapsto x-1$. On a : $f = u \circ v \circ w$.

APPLICATIONS PARTICULERES

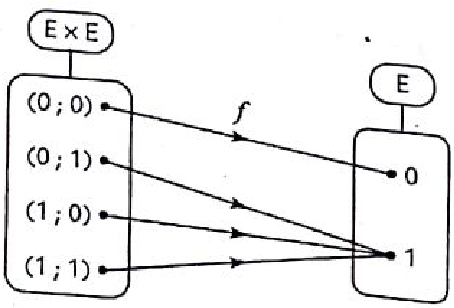
♦ Exercice 12 p. 179

- On a : $f(1) = \dfrac{1+1}{2} = 1$ et $f(2) = \dfrac{2}{2} = 1$; donc, f n'est pas injective.
- $\forall p \in \mathbb{N}$, $f(2p) = \dfrac{2p}{2} = p$, $f(0) = 0$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $f(2p-1) = \dfrac{(2p-1)+1}{2} = p$.

Donc tout entier naturel p a pour antécédents $2p$ et $2p-1$ s'il est non nul ; f est surjective.

♦ Exercice 13 p. 179

1. On a :



Donc, f est une application de E × E vers E.

2. f est surjective et non injective.

♦ **Exercice 14 p. 179**

Soit f^{-1} la réciproque de la bijection f. On a : $f \circ f = f \Rightarrow (f \circ f) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1}$; donc : $f = Id_E$.

♦ **Exercice 15 p. 179**

a) • On a : $f(1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$; donc, f n'est pas injective. On en déduit que f n'est pas bijective.

• Pour tout $z \in \mathbb{Z}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $z \leq x < z + 1$ et $E(x) = z$.

On en déduit que tout entier a au moins un antécédent par f ; donc, f est surjective.

b) • On a : $f(x) = x(2x + 3)$; donc, $f(0) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$ et f n'est pas injective. f n'est pas bijective.

• On a : $f(x) = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right]$; donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -\frac{9}{8}$.

Un nombre réel strictement inférieur à $-\frac{9}{8}$ n'a pas d'antécédent par f ; donc, f n'est pas surjective.

c) L'équation $f((x ; y)) = (a ; b)$ admet la solution unique $(a + b - 3 ; b - 3)$; donc, f est bijective.

d) • Le nombre 1 n'a pas d'antécédent par f ; donc, f n'est pas surjective.

• Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R} - \{2\}$.

On a : $f(a) = f(b) \Leftrightarrow ab - 2a + b - 2 = ab - 2b + a - 2 \Leftrightarrow a = b$. Donc, f est injective.

e) • On a : $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; donc, f n'est pas injective. On en déduit que f n'est pas bijective.

• Soit $y \in [0 ; 1]$. L'équation $\sin x = y$ admet au moins une solution dans $]0 ; \pi]$; donc, f est surjective.

♦ **Exercice 16 p. 179**

a) Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation $f(x) = y$ admet la solution unique : $x = \frac{-y + 5}{3}$.

Donc f est bijective et $f^{-1}(x) = \frac{-x + 5}{3}$.

b) f est bijective et $f^{-1}(x) = \frac{4x - 1}{2x - 4}$.

c) f est bijective et $f^{-1}((x ; y)) = \left(\frac{3x + 2y}{5} ; \frac{-x + y}{5}\right)$.

♦ **Exercice 17 p. 180**

a) Un nombre impair n'a pas d'antécédent par f ; donc, f n'est pas surjective. f n'est pas bijective.

b) f est bijective et $f^{-1}(x) = \frac{1}{x - 1}$.

c) On a : $f(0) = f(-1) = 0$; donc, f n'est pas injective. On en déduit que f n'est pas bijective.

résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = (a ; b)$.

d) Soit $(a ; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On a : $f(x) = (a ; b) \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ et $b = \frac{3}{2}a$.

Donc, un couple qui n'est pas de la forme $\left(a ; \frac{3a}{2}\right)$, n'a pas d'antécédent par f ; on en déuit que f n'es pas surjective. Par suite, f n'est pas bijective.

♦ **Exercice 18 p. 180**

1. f, composée de deux bijections, est une bijection.

2. On a : $(s \circ t) \circ (t^{-1} \circ s^{-1}) = Id_{\mathcal{P}}$ et $(s \circ t) \circ (t^{-1} \circ s^{-1}) \circ (s \circ t) = Id_{\mathcal{P}}$. Donc : $f^{-1} = t^{-1} \circ s^{-1} = t_{-\vec{u}} \circ s$.

♦ **Exercice 19 p. 180**

1. Soit $M \neq O$.

On a : $M' \in (OM)$ et $\overrightarrow{OM} \circ \overrightarrow{OM'} = 2 \Leftrightarrow \overline{OM'} = \frac{2}{\overline{OM}}$.

Donc, M' existe et est unique.

On en déduit que : $\overline{OM'} \neq 0$; c'est-à-dire : $M' \neq O$.

2. D'après la question 1 : $D_f = \mathcal{P} - \{O\}$.

Soit $A \in \mathcal{P} - \{O\}$. On a : $f(M) = A \Leftrightarrow \overline{OM} = \frac{2}{\overline{OA}}$.

L'équation $f(M) = A$ a une solution unique ; donc, f est bijective. On a : $f^{-1} = f$.

♦ Exercice 20 p. 180

a) On a : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$.

• $D_{2f-3g} = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$, $(2f-3g)(x) = \dfrac{-3x^3 + 6x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$.

• $D_{f\times g} = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$, $(f\times g)(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

• $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x+1}{x(x-1)^2}$.

b) On a : $D_f = \mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$.

• $D_{2f-3g} = \mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$, $(2f-3g)(x) = \dfrac{-3x^3 + 12x^2 - 20x}{x^2 - 4}$.

• $D_{f\times g} = \mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$, $(f\times g)(x) = \dfrac{-4x^2}{(x+2)^2}$.

• $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-2 ; 0 ; 2\}$. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2 ; 0 ; 2\}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$.

c) On a : $D_f = \mathbb{R} - \{0 ; 1\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-1 ; 0\}$.

• $D_{2f-3g} = \mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$, $(2f-3g)(x) = \dfrac{2(x+1)}{x-1} - \dfrac{3(x-1)}{x^2 - x + 1}$.

• $D_{f\times g} = \mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$, $(f\times g)(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - x + 1}$.

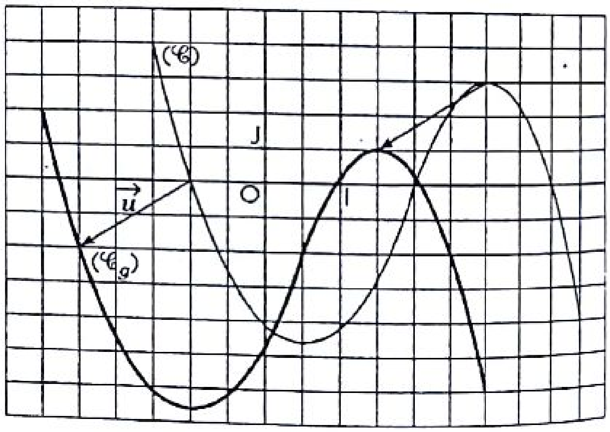
• $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$.

♦ Exercice 21 p. 180

1. On a : $-\dfrac{3}{2} \leq x + \dfrac{3}{2} \leq \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$;

donc : $D_g = [-3 ; 3]$.

$(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ -2\end{pmatrix}$.

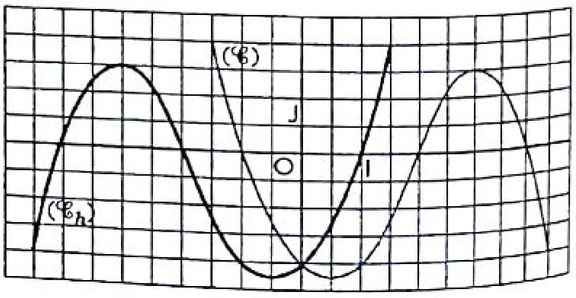


2. *a)* On a : $-\dfrac{3}{2} \leq -x \leq \dfrac{9}{2}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{9}{2} \leq -x \leq \dfrac{3}{2}$;

donc : $D_h = \left[-\dfrac{9}{2} ; \dfrac{3}{2}\right]$.

$(\mathscr{C}_h)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).



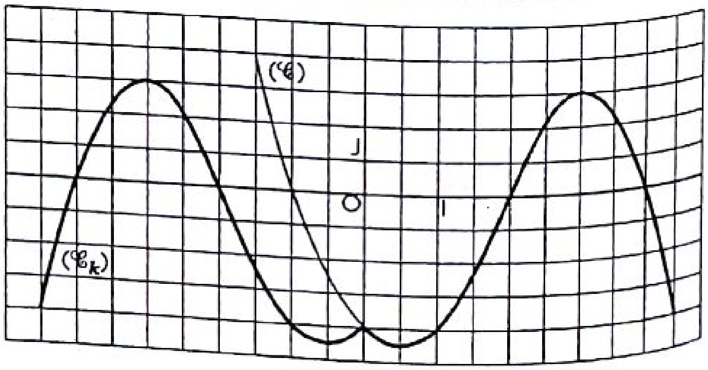
b) Posons : $k(x) = f(|x|)$.

On a : $k(x) = \begin{cases} f(x), \text{ si } x \geq 0 \\ f(-x), \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$.

$-\dfrac{3}{2} \leq |x| \leq \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{9}{2} \leq x \leq \dfrac{9}{2}$;

donc : $D_k = \left[-\dfrac{9}{2} ; \dfrac{9}{2}\right]$.

$(\mathscr{C}_k)$ est la réunion de la partie de $(\mathscr{C})$ d'abscisses positives et de la partie de $(\mathscr{C}_h)$ d'abscisses négatives.

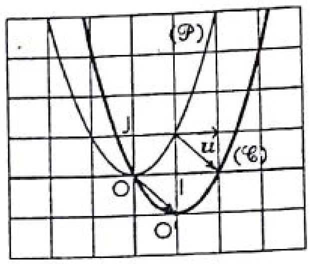


Exercice 22 p. 180

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 2x = f(x)$.

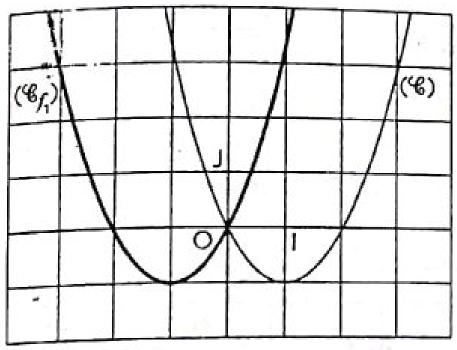
b) Soit $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation : $y = x^2$.

$(\mathscr{C})$ est l'image de $(\mathscr{P})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{1}{-1}$.



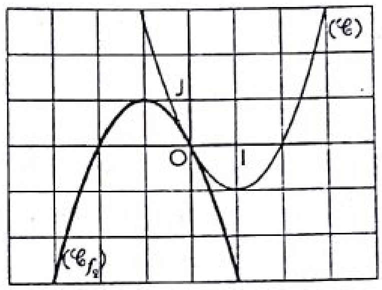
2. • On a : $f_1(x) = f(-x)$.

Donc, $(\mathscr{C}_{f_1})$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).



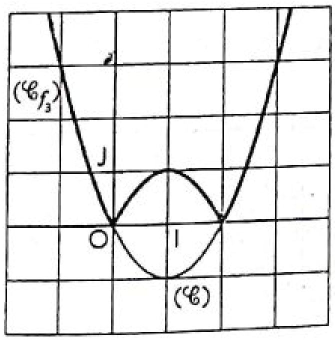
• On a : $f_2(x) = -f(-x) = -f_1(x)$.

Donc, $(\mathscr{C}_{f_2})$ est l'image de $(\mathscr{C}_{f_1})$ par la symétrie orthogonale d'axe (OI). On en déduit que $(\mathscr{C}_{f_2})$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la symétrie de centre O.



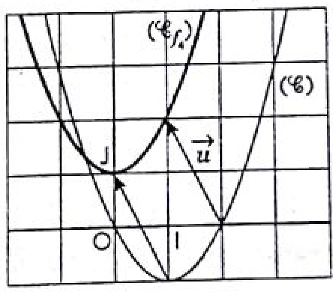
• On a : $f_3(x) = |f(x)|$.

Donc, $(\mathscr{C}_{f_3})$ est la réunion des parties des courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$, situées « au-dessus » de (OI).



• On a : $f_4(x) = f(x+1) + 2$.

Donc, $(\mathscr{C}_{f_4})$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{-1}{2}$.



Exercice 23 p. 180

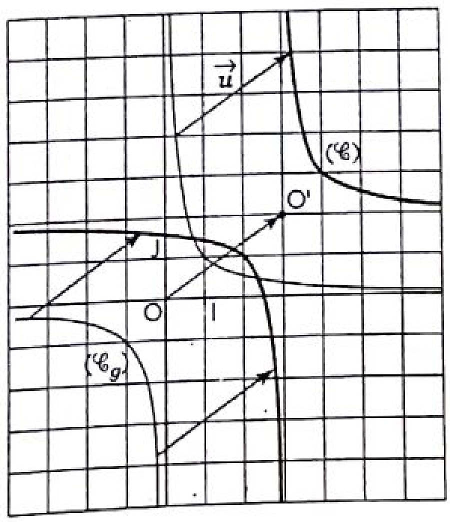
1. a) $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $f(x) = \dfrac{2(x-3)+1}{x-3} = \dfrac{1}{x-3} + 2$.

2. Posons : $g(x) = \dfrac{1}{x}$; on a : $f(x) = g(x-3) + 2$.

Donc, $(\mathscr{C})$ est l'image de $(\mathscr{C}_g)$ par la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}\binom{3}{2}$.

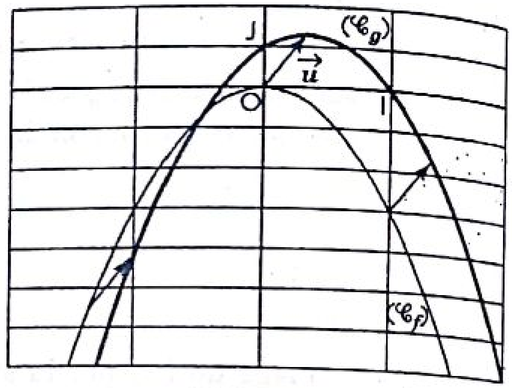
$(\mathscr{C}_g)$ est une hyperbole de centre O ; donc, $(\mathscr{C})$ est une hyperbole de centre O', image de O par $t_{\vec{u}}$.



♦ **Exercice 24 p. 180**

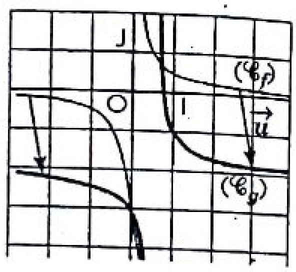
a) $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} = f\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3}$.

Donc, $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.



b) $\forall x \in \mathbb{R}^*; g(x) = \dfrac{1}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} - 2 = f\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2$.

Donc, $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$.

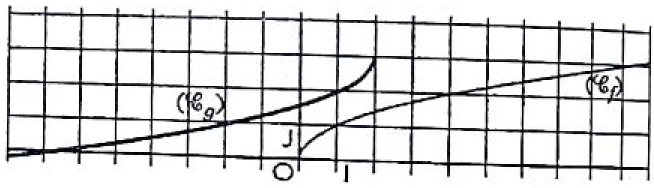


c) $\forall x \in]-\infty\,;2],\ g(x) = -f(2-x) + 3 = -f(-(x-2)) + 3$.

Donc, $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la composée de :

– la symétrie centrale de centre O,

– suivie de la translation de vecteur $\vec{u}\binom{2}{3}$.



d) $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} -f(-(x-2)) + 3, \text{ si } x \leq 2 \\ -f(x-2) + 3, \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$

Donc, $(\mathscr{C}_g)$ est la réunion de deux parties qui se déduisent de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

- Sur $]-\infty\,;2]$, $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la composée de :

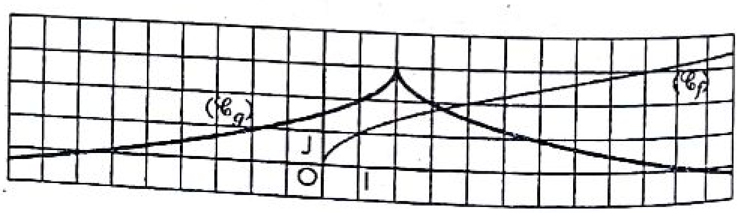
– la symétrie centrale de centre O,

– suivie de la translation de vecteur $\vec{u}\binom{2}{3}$.

- Sur $[2\,;+\infty[$, $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la composée de :

– la symétrie orthogonale d'axe (OI),

– suivie de la translation de vecteur $\vec{u}\binom{2}{3}$.



♦ **Exercice 25 p. 180**

a) $g(x) = -f(x)$.

x	-4	0	1	3	6
$g(x)$	0	2	5	-1	1

b) $g(x) = 3f(x) - 4$.

x	-4	0	1	3	6
$g(x)$	-4	-10	-19	-1	-7

c) $g(x) = f(x-3)$.

x	-1	3	4	6	9
$g(x)$	0	-2	-5	1	-1

d) $g(x) = f(1-3x)$.

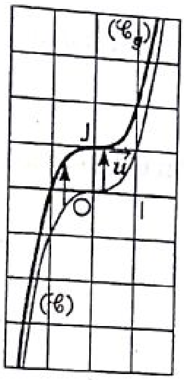
x	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
$g(x)$	-1	1	-5	-2	0

♦ **Exercice 26 p. 180**

1. On représentera $(\mathscr{C})$ à la question 2.

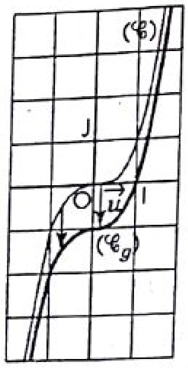
2. a) $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) + 1$.

Donc, $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.



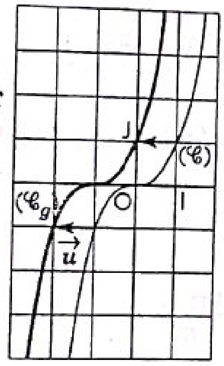
b) $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^3 - 1$
$= f(x) - 1$.

Donc, $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.



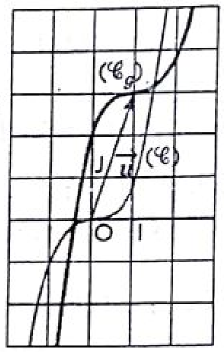
c) $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x+1)^3$
$= f(x+1)$.

Donc, $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.



d) $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x-1)^3 + 3$
$= f(x-1) + 3$.

Donc, $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.



♦ **Exercice 27 p. 180**

1. $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right\}, f(x) - g(x) = \dfrac{-6x+2}{(2x+1)(2x-1)}$.

Le signe de $f(x) - g(x)$ est donné par le tableau ci-contre.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$(2x-1)(2x+1)$		+	0	−	|	−	0	+	
$-6x+2$		+	|	+	0	−	|	−	
$f(x)-g(x)$		+	‖	−	0	+	‖	−	

Donc : $\forall x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[, f(x) > g(x)$;

$\forall x \in \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[, f(x) < g(x)$.

2. $S = \left]-\frac{1}{2} ; 0\right]$.

♦ **Exercice 28 p. 181**

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+3} = \dfrac{(x^2+3)-2}{x^2+3} = 1 - \dfrac{2}{x^2+3}$.

2. On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{3} \leq f(x) < 1$. Donc, f est bornée sur $\mathbb{R}$.

♦ **Exercice 29 p. 181**

1. On a : $\forall x \in]-\infty ; -1[, f(x) > -4$; donc, f est minorée sur $]-\infty ; -1[$ par -4.

$\forall x \in]-1 ; +\infty[, f(x) \leqslant 1$; donc, f est majorée sur $]-1 ; +\infty[$ par 1.

2. On a : $\forall x \in]-1 ; 3[, -4 < f(x) \leqslant 1$; donc, f est bornée sur $]-1 ; 3[$.

♦ **Exercice 30 p. 181**

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 - 4x^2 + 1 \leq \dfrac{\sin x + 3\cos x}{x^2+1} \leq 4x^2 + 1$.

Or : $1 \geq \dfrac{1}{x^2+1} > 0 \Rightarrow -4 \leq -\dfrac{4}{x^2+1}$ et $\dfrac{4}{x^2+1} \leq 4$; donc, $\forall x \in \mathbb{R}, -4 \leq f(x) \leq 4$.

On en déduit que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

♦ Exercice 31 p. 181

1. $f(x) > \mathrm{M} \Leftrightarrow x > \dfrac{\mathrm{M}+1}{2}$.

Donc : $\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \exists x > \dfrac{\mathrm{M}+1}{2} \,/\, f(x) > \mathrm{M}$; c'est-à-dire, f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) < m \Leftrightarrow x < \dfrac{m+1}{2}$.

Donc : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x < \dfrac{m+1}{2} \,/\, f(x) < m$; c'est-à-dire, f n'est pas minorée sur $\mathbb{R}$.

♦ Exercice 32 p. 181

1. *a)* $f(x) = \dfrac{2(x+3)-6}{x+3} = 2 - \dfrac{6}{x+3}$.

b) Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

– Si $\mathrm{M} = 2, f(x) > 2 \Leftrightarrow x < -3$.

– Si $\mathrm{M} \neq 2, f(x) > \mathrm{M} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > \dfrac{3\mathrm{M}}{2-\mathrm{M}} \end{cases} \Leftrightarrow x > \mathrm{Sup}\left(-3 ; \dfrac{3\mathrm{M}}{2-\mathrm{M}}\right)$.

Donc : $\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \exists x > \dfrac{3\mathrm{M}}{2-\mathrm{M}} \,/\, f(x) > \mathrm{M}$; c'est-à-dire, f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $m \in \mathbb{R}$.

– Si $m = 2, f(x) < 2 \Leftrightarrow x > -3$.

– Si $m \neq 2, f(x) < m \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < \dfrac{3m}{2-m} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-3 ; \dfrac{3m}{2-m}\right[$.

Donc : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x < \dfrac{3m}{2-m} \,/\, f(x) < m$; c'est-à-dire, f n'est pas minorée sur $\mathbb{R}$.

d) $\forall x \in [-1 ; 1], -1 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$; donc, f est bornée sur $[-1 ; 1]$.

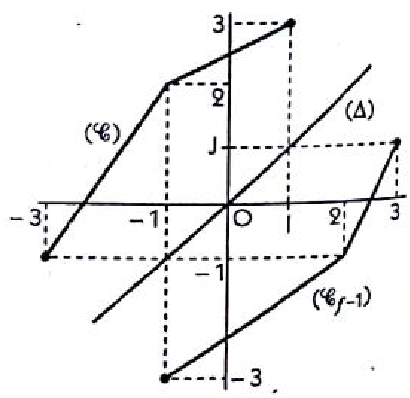
2. *a)* On a : $\forall x \in \mathbb{R}, 2 \leq 3 + \cos x \leq 4$; donc : $\mathrm{D}_g = \mathbb{R}$.

b) Posons : $t = \cos x$.

On a : $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t \in [-1 ; 1]$ et $g(x) = f(\cos x) = f(t)$.

Or : $\forall t \in [-1 ; 1], -1 \leq f(t) \leq \dfrac{1}{2}$; donc : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq g(x) \leq \dfrac{1}{2}$. Par suite, g est bornée sur $\mathbb{R}$.

♦ Exercice 33 p. 181

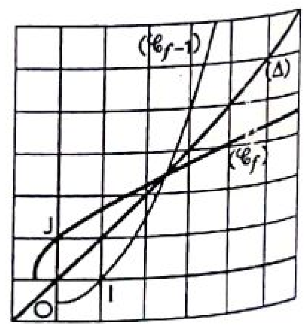


1. On a : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}, \text{ si } x \in [-3 ; -1] \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}, \text{ si } x \in [-1 ; 1] \end{cases}$.

2. Toute parallèle à l'axe des abscisses, passant par un point d'ordonnée appartenant à $[-1 ; 3]$, coupe la courbe en un unique point d'abscisse appartenant à $[-3 ; 1]$. Donc f est une bijection de $[-3 ; 1]$ vers $[-1 ; 3]$.

3. $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) d'équation : $y = x$.

♦ Exercice 34 p. 181



1. Soit $x \in \left[-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$.

On a : $f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2x+1} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y^2-1}{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$.

L'équation $f(x) = y$ a une solution unique dans $\left[-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$; donc, f est bijective et : $\forall x \in [0 ; +\infty[, f^{-1}(x) = \dfrac{x^2-1}{2}$.

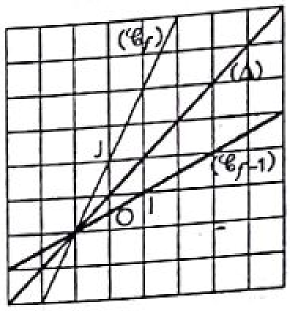
2. $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ est une branche de parabole.

$(\mathscr{C}_f)$ est l'image de $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) d'équation : $y = x$.

♦ Exercice 35 p. 181

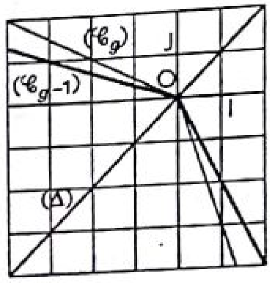
1. a) • f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

$(\mathscr{C}_f)$ est l'image de $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) d'équation : $y = x$.



• g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, g^{-1}(x) = \begin{cases} -2x, \text{ si } x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

$(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) d'équation $y = x$.



2. a) • On a : $g \circ f(x) = g(2x+1)$; donc :

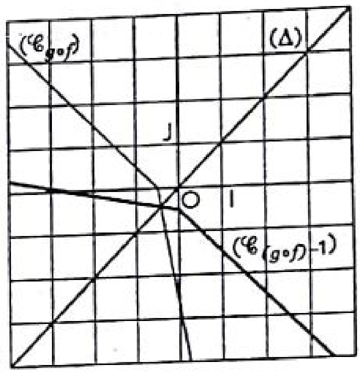
- si $2x + 1 \leq 0$, $g(2x+1) = -\frac{1}{2}(2x+1)$;

- si $2x + 1 > 0$, $g(2x+1) = -3(2x+1)$.

Donc : $g \circ f(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2}, \text{ si } x \leq -\frac{1}{2} \\ -6x - 3, \text{ si } x > -\frac{1}{2} \end{cases}$.

• On a : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Donc : $(g \circ f)^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}, \text{ si } x < 0 \\ -x - \frac{1}{2}, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.



$(\mathscr{C}_{(g \circ f)^{-1}})$ est l'image de $(\mathscr{C}_{g \circ f})$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) d'équation : $y = x$.

Exercices d'appronfondissement

♦ Exercice 36 p. 181

1. • $x \in D_{(f+g) \circ h} \Leftrightarrow x \in D_h$ et $h(x) \in D_{f+g} \Leftrightarrow x \in D_h$ et $h(x) \in D_f \cap D_g$.

• $x \in D_{(f \circ h) + (g \circ h)} \Leftrightarrow x \in D_{f \circ h} \cap D_{g \circ h}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_h \text{ et } h(x) \in D_f \\ x \in D_h \text{ et } h(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow x \in D_h \text{ et } h(x) \in D_f \cap D_g.$$

Donc : $D_{(f+g) \circ h} = D_{(f \circ h) + (g \circ h)}$.

• On a : $\forall x \in D_{(f+g) \circ h}$, $((f+g) \circ h)(x) = (f+g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)) = f \circ h(x) + g \circ h(x)$

$= (f \circ h + g \circ h(x))$.

Donc : $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.

2. On a : $D_{(f+g) \circ h} = D_{(f \circ h) + (g \circ h)} = \mathbb{R} - \{1 ; 2\}$.

• $\forall x \in \mathbb{R} - \{1 ; 2\}$, $h \circ (f+g)(x) = \left(\frac{2x+1}{x-2} + \frac{x-3}{x-1}\right)^2$.

• $\forall x \in \mathbb{R} - \{1 ; 2\}$, $(h \circ f + h \circ g)(x) = \left(\frac{2x+1}{x-2}\right)^2 + \left(\frac{x-3}{x-1}\right)^2$.

Généralement, $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$; donc : $h \circ (f+g) \neq h \circ f + h \circ g$.

♦ Exercice 37 p. 181

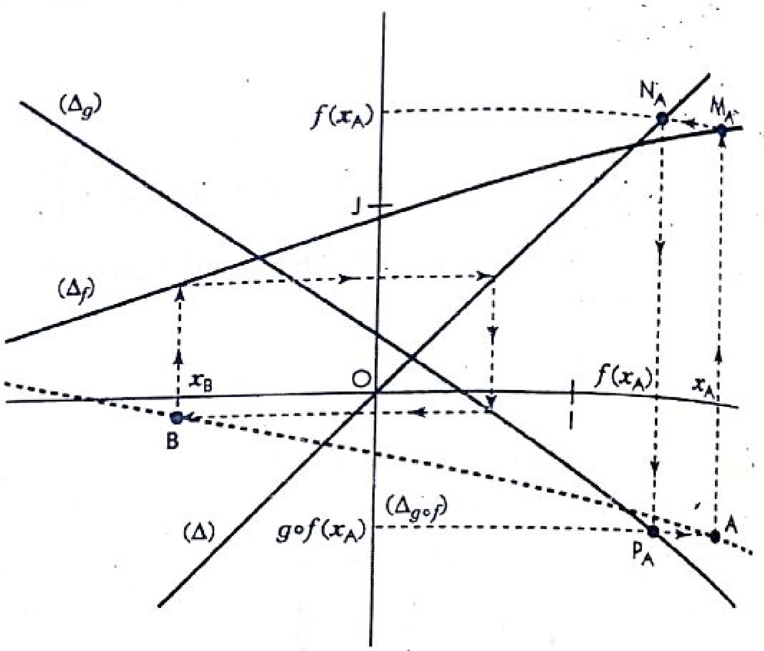
1. Soit a, b, a' et b' des nombres réels tels que : $f(x) = ax + b$ et $g(x) = a'x + b'$.
On a : $g \circ f(x) = g(ax + b) = aa'x + (a'b + b')$; aa' et $(a'b + b')$ sont des nombres réels, donc $g \circ f$ est affine.

2. La représentation graphique de $g \circ f$ est une droite $(\Delta_{g \circ f})$.
Donc, pour construire $(\Delta_{g \circ f})$, il suffit de construire deux points A et B de $(\Delta_{g \circ f})$.

Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$.
Pour construire le point A d'abscisse x_A :

- on détermine le point M_A de (Δ_f) d'abscisse x_A, puis le point N_A de (Δ) ayant même ordonnée $f(x_A)$ que M_A ;
- l'abscisse $f(x_A)$ du point N_A de (Δ) est également celle du point P_A de (Δ_g) ayant même ordonnée $g \circ f(x_A)$ que A ;
- on détermine le point P_A, puis le point A qui est le quatrième sommet du rectangle construit sur les points M_A, N_A et P_A.

De façon analogue, on construit le point B.
On en déduit la droite $(\Delta_{g \circ f})$.



♦ Exercice 38 p. 181

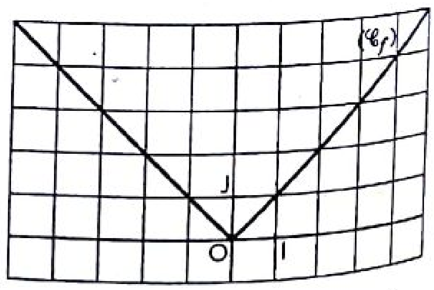
1. Soit $A \subset B$ et $y \in f(A)$.
On a : $y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A, f(x) = y$; or $x \in A \Rightarrow x \in B$; donc $f(x) \in f(B)$, c'est-à-dire $y \in f(B)$.
On en déduit que : $f(A) \subset f(B)$.

2. • On a : $y \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists x \in A \cup B, f(x) = y$
$\Rightarrow \exists x \in A$ ou $x \in B, f(x) = y$
$\Rightarrow y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$.
Donc : $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
• D'après la question 1 : $A \subset A \cup B \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup B)$;
$B \subset A \cup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \cup B)$.
Donc : $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
On en déduit que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

3. *a)* D'après la question 1 : $A \cap B \subset A \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A)$;
$A \cap B \subset B \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(B)$.
Donc : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

b) Soit $y \in f(A) \cap f(B)$; $\exists x \in A$ et $\exists u \in B, f(x) = f(u) = y$.
Or : f injective et $f(x) = f(u) \Rightarrow x = u$; donc : $x \in A \cap B$ et $y \in f(A \cap B)$.
On en déduit : $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ et $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

4. On a : $A \cap B = [0 ; 1]$; $f(A \cap B) = [0 ; 1]$;
$f(A) = [0 ; 3]$; $f(B) = [0 ; 5]$; $f(A) \cap f(B) = [0 ; 3]$.
Donc : $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.



♦ Exercice 39 p. 182

1. Soit a et b deux éléments de E tels que : $a < b$.
On veut comparer $g \circ f(a)$ et $g \circ f(b)$ dans chacun des cas suivants.
a) f est croissante sur E et g est croissante sur F.

On a : $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \Rightarrow g(f(a)) \leq g(f(b))$; c'est-à-dire que : $g \circ f(a) \leq g \circ f(b)$.
Donc, la fonction $g \circ f$ est croissante sur E.

b) ***f* est croissante sur E et *g* est décroissante sur F.**
On a : $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \Rightarrow g(f(a)) \geq g(f(b))$; c'est-à-dire que : $g \circ f(a) \geq g \circ f(b)$.
Donc, la fonction $g \circ f$ est décroissante sur E.

c) ***f* est décroissante sur E et *g* est croissante sur F.**
On a : $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b) \Rightarrow g(f(a)) \geq g(f(b))$; c'est-à-dire que : $g \circ f(a) \geq g \circ f(b)$.
Donc, la fonction $g \circ f$ est décroissante sur E.

d) ***f* est décroissante sur E et *g* est décroissante sur F.**
On a : $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b) \Rightarrow g(f(a)) \leq g(f(b))$; c'est-à-dire que : $g \circ f(a) \leq g \circ f(b)$.
Donc, la fonction $g \circ f$ est croissante sur E.

2. a) ***Sens de variation de f***
Soit a et b deux nombres réels tels que : $a < b$. On veut comparer a^3 et b^3.
On a : $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + a^2 + ab)$.
Or : $b - a > 0$ et $b^2 + a^2 + ab > 0$; donc : $b^3 > a^3$; c'est-à-dire : $f(a) < f(b)$.
La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Sens de variation de g
• Soit a et b deux nombres réels de $]-\infty\,;1]$ tels que : $a < b$.
On veut comparer $-2(a-1)^2 + 3$ et $-2(b-1)^2 + 3$.
On a : $a < b \leq 1 \Rightarrow a - 1 < b - 1 \leq 0$;
la fonction carré étant décroissante sur $]-\infty\,;0]$, $(a-1)^2 > (a-1)^2$;
donc : $-2(a-1)^2 + 3 < -2(b-1)^2 + 3$.
La fonction g est strictement croissante sur $]-\infty\,;1]$.
• On montre de la même façon que la fonction g est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

b) **Sens de variation de $g \circ f$**
On a : $f(]-\infty\,;1]) =]-\infty\,;1]$ et $f([1\,;+\infty[) = [1\,;+\infty[$.
• f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$ et g strictement décroissante sur $f([1;+\infty[)$; donc, $g \circ f$ est décroissante sur $[1;+\infty[$.
• f est strictement croissante sur $]-\infty\,;1]$ et g est strictement croissante sur $f(]-\infty\,;1])$; donc, $g \circ f$ est croissante sur $]-\infty\,;1]$.
On a : $g \circ f(1) = g(1) = 3$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g \circ f(x)$	↗	3	↘

c) **Sens de variation de $f \circ g$**
On a : $g(]-\infty\,;1]) = g([1\,;+\infty[) =]-\infty\,;3]$.
• g est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$ et f est strictement croissante sur $]-\infty\,;3]$; donc, $f \circ g$ est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$.
• g est strictement croissante sur $]-\infty\,;1]$ et f est strictement croissante sur $]-\infty\,;3]$; donc, $f \circ g$ est croissante sur $]-\infty\,;1]$.
On a : $f \circ g(1) = f(3) = 27$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f \circ g(x)$	↗	27	↘

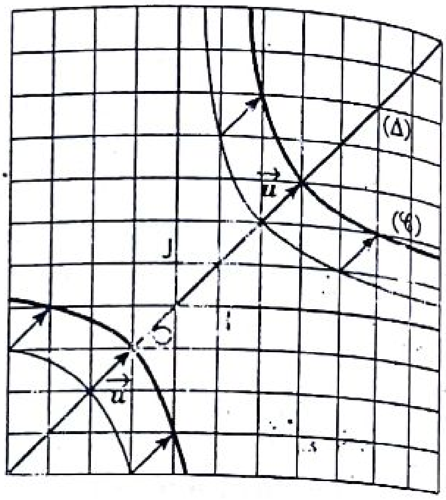
• Exercice 40 p. 182
1. Soit a et b deux éléments de E tels que : $f(a) = f(b)$.
On a : $f(a) = f(b) \Rightarrow f(f(a)) = f(f(b)) \Rightarrow a = b$; donc, f est injective.
Soit $y \in$ E.
On a : $f(x) = y \Rightarrow f(f(x)) = f(y) \Rightarrow x = f(y)$; donc, f est surjective.
On en déduit que f est bijective et $f^{-1} = f$.
2. a) $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $g \circ g(x) = g(g(x)) = \dfrac{g(x) + 3}{g(x) - 1} = x$;
donc : $g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R} - \{1\}}$ et $g^{-1} = g$.
b) On a : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $g(x) = \dfrac{(x-1) + 4}{x - 1} = 1 + \dfrac{4}{x-1}$.

c) Posons : $h(x) = \frac{1}{x}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $g(x) = h(x-1) + 1$.

Donc, $(\mathscr{C})$ est l'image de $(\mathscr{C}_h)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{1}{1}$.

d) Soit $M(x\ ;\ y)$ un point du plan et $M'(x'\ ;\ y')$ son image par la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) d'équation : $y = x$.



On a : $x' = y$ et $y' = x$.

$$\begin{aligned} M \in (\mathscr{C}) &\Leftrightarrow y = g(x) \\ &\Leftrightarrow x = g^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow x = g(y) \ (\text{car } g^{-1} = g) \\ &\Leftrightarrow M' \in (\mathscr{C}). \end{aligned}$$

Donc, (Δ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.

♦ Exercice 41 p. 182

f est une application, donc chacun des n éléments de E, a exactement 1 image dans F par f.

a) Si f est injective, alors les n images dans F par f, sont 2 à 2 distinctes ; donc : $n \leq p$.

b) Si f est surjective, alors chacun des p éléments de F, est l'image d'au moins 1 élément de E par f ; donc : $n \geq p$.

c) Si f est bijective, alors f est injective et surjective ; donc : $n \leq p$ et $n \geq p \Rightarrow n = p$.

d) Si f est injective et $n = p$, alors les n images 2 à 2 distinctes dans F par f, sont les n éléments de F.

On en déduit que f est surjective, donc est bijective.

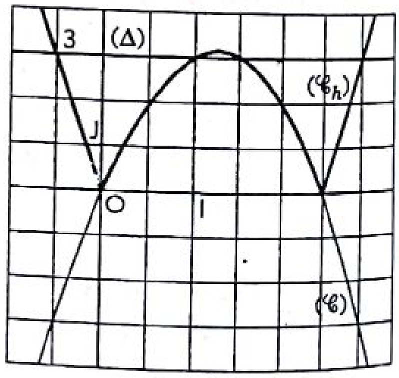
e) Si f est surjective et $n = p$, alors chacun des p éléments de F, a exactement 1 antécédent dans E par f ; donc : f est injective. On en déduit que f est bijective.

♦ Exercice 42 p. 182

1. *a)* On a : $f(x) = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$.

b) Posons : $g(x) = -2x^2$; on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g\left(x - \frac{5}{4}\right) + \frac{25}{8}$.

Donc, $(\mathscr{C})$ est l'image de $(\mathscr{C}_g)$ par la translation de vecteur $\vec{u}$ ayant pour coordonnées $(\frac{5}{4}\ ;\ \frac{25}{8})$.



2. Posons : $h(x) = |-2x^2 + 5x| = |f(x)|$.

$(\mathscr{C}_h)$ est la réunion des parties des courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$, situées « au-dessus » de (OI).

On désigne par (Δ) la droite d'équation : $y = 3$.

a) On a : $|-2x^2 + 5x| = 3 \Leftrightarrow h(x) = 3$.

Les solutions de $h(x) = 3$ sont les abscisses des points où (Δ) coupe $(\mathscr{C}_h)$.

La lecture graphique donne pour ensemble des solutions : $\left\{-\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ 3\right\}$.

b) On a : $|-2x^2 + 5x| > 3 \Leftrightarrow h(x) > 3$.

Les solutions de l'inéquation $h(x) > 3$ sont les abscisses des points de $(\mathscr{C}_h)$ situés au-dessus de (Δ).

La lecture graphique donne pour ensemble des solutions : $\left]-\infty\ ;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]1\ ;\ \frac{3}{2}\right[\cup \left]3\ ;+\infty\right[$.

♦ **Exercice 43 p. 182**

Expressions des fonctions $f+g$, $f\times g$ et $-2f+3g$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		x^2	0	x^2	4	$-2x$	
$g(x)$		x^2+2x	0	$2x$	4	$2x$	
$(f+g)(x)$		$2x^2+2x$	0	x^2+2x	8	0	
$(f\times g)(x)$		x^4+2x^3	0	$2x^3$	16	$-4x^2$	
$(-2f+3g)(x)$		x^2+6x	0	$-2x^2+6x$	4	$10x$	

Expression de la fonction $f\circ g$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		0		1		$+\infty$
$g(x)$		x^2+2x	2	x^2+2x	0	$2x$	2	$2x$	
$g(x)-2$		$+$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	
$f(g(x))$		$-2g(x)$	4	$(g(x))^2$	0	$(g(x))^2$	4	$-2g(x)$	
$f\circ g(x)$		$-2x^2-4x$	0	$x^4+4x^3+4x^2$	0	$4x^2$	4	$-4x$	

$\forall x\in\mathbb{R}, f\circ g(x)=f(g(x))$; donc comparons $g(x)$ à 2.

On a : $\begin{cases}x\leq 0\\ g(x)\leq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 0\\ x^2+2x-2\leq 0\end{cases}. \Leftrightarrow -1-\sqrt{3}\leq x\leq 0$;

On a : $\begin{cases}x> 0\\ g(x)\leq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x> 0\\ 2x\leq 2\end{cases}. \Leftrightarrow 0<x\leq 1$;

On en déduit le tableau ci–dessous.

♦ **Exercice 44 p. 182**

1. Soit $x\in\mathbb{R}-\{0\ ;1\}$.

f_1 est une bijection et $f_1^{-1}=f_1$.

f_2 est une bijection et $f_2^{-1}=f_2$.

f_3 est une bijection et $f_3^{-1}=f_3$.

f_4 est une bijection et $f_4^{-1}=f_4$.

f_5 est une bijection et $f_5^{-1}=f_6$.

f_6 est une bijection et $f_6^{-1}=f_5$.

2.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_6	f_1	f_5	f_4	f_2
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_4	f_2	f_3	f_6	f_1
f_6	f_6	f_3	f_4	f_2	f_1	f_5

♦ **Exercice 45 p. 182**

$\circ$	Id	s_O	$s_{\mathscr{D}}$	s_Δ
Id	Id	s_O	$s_{\mathscr{D}}$	s_Δ
s_O	s_O	Id	s_Δ	$s_{\mathscr{D}}$
$s_{\mathscr{D}}$	$s_{\mathscr{D}}$	s_Δ	Id	s_O
s_Δ	s_Δ	$s_{\mathscr{D}}$	s_O	Id

10. Équations, inéquations, systèmes linéaires

(pages 183 à 202 du livre de l'élève)

Objectifs

- Mettre à la disposition des élèves de nouveaux outils pour la résolution de problèmes du second degré.
- Consolider les procédés de résolution des systèmes linéaires.

Commentaires

• Ce chapitre complète les connaissances acquises par les élèves en classe de seconde en mettant à leur disposition un nouvel instrument pour résoudre les problèmes du second degré : le discriminant. Il permet en outre de réinvestir les acquis sur la représentation graphique des fonctions polynômes du second degré.

• On étendra à $\mathbb{R}^3$ les méthodes acquises dans les classes précédentes pour les systèmes de $\mathbb{R}^2$ (sbstitution et combinaison).

La méthode du pivot de Gauss est un procédé de résolution par combinaison. Elle nécessite une organisation rigoureuse des calculs, mais ne fait pas appel à des connaissances nouvelles.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Problèmes du second degré • Équations du second degré. – Discriminant d'un polynôme, d'une équation du second degré ; – Formules donnant les racines (resp. les solutions) éventuelles d'un polynôme (resp. d'une équation) du second degré ; – Expressions de la somme et du produit des solutions d'une équation du second degré. • Inéquations du second degré. – Règles donnant le signe d'un polynôme du second degré suivant le signe de son discriminant et du coefficient de x^2. **Équations et inéquations se ramenant au second degré** • Équations et inéquations de degré supérieur à 2. – Équations bicarrées ; – Inéquations bicarrées. • Équations et inéquations irrationnelles. **Systèmes linéaires d'équations et d'inéquations**	• Calculer le discriminant d'un polynôme, d'une équation du second degré. • En utilisant le discriminant, dans des situations qui légitiment cette méthode : – étudier l'existence des solutions d'une équation du second degré ; – calculer les solutions éventuelles d'une équation du second degré ; – écrire sous forme d'un produit de polynômes du premier degré un polynôme du seconde degré ; – étudier le signe d'un polynôme du second degré ; – résoudre une inéquation du second degré. • Utiliser la somme et le produit des solutions d'une équation du second degré pour : – calculer l'un connaissant l'autre ; – déterminer deux nombres connaissant leur somme et leur produit. • Résoudre des équations ou inéquatins bicarrées. • Résoudre des équations ou inéquations irrationnelles du type : – $\sqrt{P(x)} = Q(x)$ – $\sqrt{P(x)} > Q(x)$ ou $\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$, – $\sqrt{P(x)} < Q(x)$ ou $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$, où P et Q sont des polynômes tels que $\deg(P) \leq 2$ et $\deg(Q) \leq 1$. • Résoudre des systèmes de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$ ayant une solution unique : – par substitution ; – par la méthode du pivot de Gauss.

Exercices du cours

Exercice 1.a p. 190

a) $S = \emptyset$ b) $S = \{\frac{\sqrt{6}}{3}\}$ c) $S = \{\frac{2}{3} ; \frac{3}{2}\}$ d) $S = \{\sqrt{2} ; -\sqrt{3}\}$.

Exercice 1.b p. 190

a) 1 est solution évidente et $P = -\frac{2}{7}$; donc, $-\frac{2}{7}$ est l'autre solution.

b) -1 est solution évidente et $P = -\frac{1}{3}$; donc, $\frac{1}{3}$ est l'autre solution.

c) 1 est solution évidente et $P = \frac{1}{\sqrt{3}}$; donc, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est l'autre solution.

d) a est solution évidente et $P = 1$; donc, $\frac{1}{a}$ est l'autre solution.

Exercice 1.c p. 190

a) $S =]1 ; \frac{3}{2}[$ b) $S = [-\frac{3}{2} ; 5]$ c) $S = \{\frac{\sqrt{3}}{2}\}$ d) $S = \mathbb{R}$.

Exercice 1.d p. 190

a. $\Delta' = k^2 + 1$. Donc, pour tout nombre réel k, l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.

b. On a : $x_1 \times x_2 = 2k$ et $x_1 + x_2 = -2(k+1)$.

Si $k < 0$, $x_1 < 0 < x_2$; si $k = 0$, $x_1 = -2$ et $x_2 = 0$; si $k > 0$, $x_1 < x_2 < 0$.

Exercice 1.e p. 190

On a : $2\pi Rh + 2\pi R^2 = 600$, où R désigne le rayon du cylindre et h sa hauteur.

On sait que $h = 15$; donc, en prenant $\pi = 3$, on a l'équation : $R^2 + 15R - 100 = 0$; $\Delta = 25^2$ et $R > 0$.

Donc : $R = 5$ et $V = \pi R^2 h = 1\ 125\ \text{cm}^3$.

Exercice 2.a p. 194

a) On pose : $X = x^2$. On a : $S = \{-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\}$.

b) On pose : $X = x^2$. On a : $S = \{-\sqrt{6} ; -1 ; 1 ; \sqrt{6}\}$.

c) -1 est une solution évidente de l'équation. Donc : $x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x^2 - x - 6)$. $S = \{-2 ; -1 ; 3\}$.

d) 2 est une solution évidente de l'équation.

Donc : $x^3 - x - 6 = (x-2)(x^2 + 2x + 3)$. Le polynôme $x^2 + 2x + 3$ n'a pas de racine ; donc : $S = \{2\}$.

Exercice 2.b p. 194

a) $(x+1)^4 \geq (x-1)^2 \Leftrightarrow x(x+3)(x^2 + x + 2) \geq 0$.

Or : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 2 > 0$; donc : $S =]-\infty, -3] \cup [0, +\infty[$.

b) On pose : $X = x - 1$. $(x-1)^4 - 7(x-1)^2 + 12 < 0 \Leftrightarrow (X-2)(X+2)(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3}) < 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+1)(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3}) < 0$.

Un tableau de signe nous donne le résultat suivant : $S =]-1 ; 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3} ; 3[$.

c) 1 et -1 sont racines du polynôme $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$.

Donc : $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - x - 6) > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-3)(x+2) > 0$.

Un tableau de signe nous donne le résultat suivant : $S =]-\infty ; -2[\cup]-1 ; 1[\cup]3 ; +\infty[$.

Exercice 2.c p. 194

a) $\sqrt{x^2 + x + 1} = 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = (3x+1)^2 \\ 3x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(8x-7)^2 = 0 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$. Donc : $S = \{\frac{7}{8}\}$

b) $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2 \geq 0$.

Donc : $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 9x - 5 = 0$.

$\Delta = 141$. Donc : $S = \{\frac{-9-\sqrt{141}}{6} ; \frac{-9+\sqrt{141}}{6}\}$.

c) On élève au carré, on obtient : $4 + 2\sqrt{(-x+1)(x+3)} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(-x+1)(x+3)} = 0$.

Cette équation admet deux solutions : $x = 1$ et $x = -3$.

Ces deux nombres sont également solutions de l'équation initiale. Donc : $S = \{1 ; -3\}$.

♦ **Exercice 2.d p. 194**

a) • Tout nombre x tel que $x - 1 \leq 0$ est solution. Donc : $S_1 =]-\infty ; +1]$.

• Si $x > 1$, on élève au carré : $-x^2 + 3x - 2 \geq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-3) \leq 0$

$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$; donc : $S_2 = [1 ; \frac{3}{2}]$.

Par suite : $S = S_1 \cup S_2 =]-\infty ; \frac{3}{2}]$.

b) • Tout nombre x, tel que $-x + 3 \leq 0$, est solution. Donc : $S_1 = [3 ; +\infty[$.

• Si $x < 3$, on élève au carré : $2x^2 - 4x + 1 \geq x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow (x+4)(x-2) \geq 0$.

Donc : $S_2 =]-\infty ; -4] \cup [2 ; 3[$ et par suite, $S = S_1 \cup S_2 =]-\infty ; -4] \cup [2 ; +\infty[$.

c) L'inéquation est définie si $x \geq 1$. On élève au carré, on obtient : $2x + 2\sqrt{x^2-1} < x \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-1} < -x$.

Pour tout x tel que $x \geq 1$, cette inégalité est impossible. Donc : $S = \emptyset$.

♦ **Exercice 2.e p. 194**

1. $P(x) = x^2\left(x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x^2\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4\right]$.

2. 0 n'est pas racine du polynôme P. Pour $x \neq 0$, on pose : $X = x + \frac{1}{x}$.

• On a : $P(x) = 0 \Leftrightarrow X^2 - 5X + 4 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-4) = 0$

$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{x} - 1)(x + \frac{1}{x} - 4) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x^2 - 4x + 1) = 0$.

$x^2 - x + 1$ n'a pas de racine ; donc : $S = \{2 - \sqrt{3} ; 2 + \sqrt{3}\}$.

• On a : $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 \geq 0$. Donc : $S =]-\infty, 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}, +\infty[$.

♦ **Exercice 2.f p. 194**

On pose : $AB = x$. On en déduit : $BC = x + 1$ et $AC = \sqrt{x^2 + (x+1)^2}$.

On a : $AC = 2\,AB \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (x+1)^2} = 2x \Leftrightarrow x^2 + (x+1)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 = 0$.

Donc, deux solutions : $x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$; on ne retient que la solution positive : $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

♦ **Exercice 3.a p. 199**

a) $S = \{(1 ; 3 ; -1)\}$ *b)* $S = \{(\lambda, \frac{3}{2}\lambda - 2, \frac{5}{2}\lambda - 5), \lambda \in \mathbb{R}\}$ *c)* $S = \emptyset$.

♦ **Exercice 3.b p. 199**

1. *a)* $S = \left\{\left(\lambda, -\frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2}, -2\lambda + 1\right), \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ *b)* $S = \left\{\left(5\mu + 6, -2\mu - 1, \mu\right), \mu \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Les deux systèmes ont une solution commune s'il existe λ et μ tels que :

$\begin{cases} \lambda = 5\mu + 6 \\ -\frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2} = -2\mu - 1 \\ -2\lambda + 1 = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -1 \end{cases}$. La solution commune est donc le triplet : $(1 ; 1 ; -1)$.

♦ **Exercice 3.c p. 199**

a) $S = \{(4 ; -2) ; (-2 ; 4)\}$ *b)* $S = \{(1 - \sqrt{3} ; -1 + \sqrt{3}) ; (1 + \sqrt{3} ; -1 - \sqrt{3})\}$.

♦ **Exercice 3.d p. 199**

Soit x, y, z les pourcentages respectifs de blé dans chacun des sacs. On a :

$$\begin{cases} 5x + 3y = 8 \times 62{,}5 \\ 5x + 2z = 7 \times 60 \\ 3y + 2z = 5 \times 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y = 500 \\ 5x + 2z = 420 \\ 3y + 2z = 280 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 64 \\ y = 60. \\ z = 50 \end{cases}$$

Exercices d'apprentissage

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

♦ Exercice 1 p. 200

$P(1) = 0$; $P(x) = (x-1)(x-2)$.

♦ Exercice 2 p. 200

2 est racine du polynôme P $\Leftrightarrow$ $P(2) = 0$ $\Leftrightarrow$ $a + 2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $a = -2$.

On a : $P(x) = 2x^2 + 2x - 12 = 2(x-2)(x+3)$. Donc, 3 est l'autre racine du polynôme P.

♦ Exercice 3 p. 200

a) $P(x) = 4[(x - \frac{1}{2})^2 - 1] = 4(x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2})$; $\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ sont les deux racines de P.

b) $Q(x) = 2(x-3)^2$; 3 est la racine double de Q.

c) $R(x) = 2[(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{23}{16}]$; R n'a pas de racine.

d) $S(x) = 2[(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{49}{16}] = 2(x-2)(x + \frac{3}{2})$; 2 et $-\frac{3}{2}$ sont les deux racines de S.

♦ Exercice 4 p. 200

On a : $P(x) = a(x+2)(x - \frac{3}{2})$; de plus, $P(0) = -3$ $\Leftrightarrow$ $a = 1$. Donc : $P(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - 3$.

♦ Exercice 5 p. 200

a) $S = \{\sqrt{2} ; -\sqrt{3}\}$ *b)* $S = \{\sqrt{3}\}$.

c) Si $a = -\sqrt{2}$, $S = \{-\sqrt{2}\}$; si $a = \sqrt{2}$, $S = \{\sqrt{2}\}$; si $a \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\}$, $S = \left\{\frac{2 + a^2 - |a^2 - 2|}{2a} ; \frac{2 + a^2 + |a^2 - 2|}{2a}\right\}$.

d) $S = \{\frac{1}{a^2}\}$.

♦ Exercice 6 p. 200

a) $b = 0$ *b)* $(b + 2a)(b - 2a) > 0$ *c)* $c = 0$ *d)* $4a - 2b + c = 0$.

♦ Exercice 7 p. 200

$P(x) = 2x^2 + x + 1$. $\Delta = -7$; donc : pour tout nombre réel x, $P(x) > 0$.

♦ Exercice 8 p. 200

a) $P(x) = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		$+$	

b) $Q(x) = 2[(x + \frac{3}{8})^2 - \frac{169}{64}] = 2(x - \frac{5}{2})(x + 2)$

x	$-\infty$		-2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) $R(x) = -[(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{23}{4}]$

x	$-\infty$		$+\infty$
$R(x)$		$-$	

d) $S(x) = -2[(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{9}{16}] = -2(x-2)(x - \frac{1}{2})$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$S(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

♦ Exercice 9 p. 200

) $S = [-3 ; 1]$

b) $S =]-\infty ; -1[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[$

c) $S =]-1 ; \frac{1}{2}[$

) $S = \mathbb{R}$

e) $S = \emptyset$

f) $S =]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.

♦ **Exercice 10 p. 200**

$P(2) = 0 \iff m^2 - 3m - 4 = 0 \iff m = -1$ ou $m = 4$.

La somme des racines est : $2 + x_2 = 3m$; donc : $x_2 = 3m - 2$.

Si $m = -1$, alors $x_2 = -5$; si $m = 4$, alors $x_2 = 10$.

♦ **Exercice 11 p. 200**

On a : $p = -\frac{4}{7}$ et $q = \frac{15}{7}$.

♦ **Exercice 12 p. 200**

On a : $\Delta' = m(m-2)$.

- Si $m \in]0\,;2[$, alors $\Delta' < 0$ et P n'a pas de racine ;
- si $m \in]-\infty\,;0[\cup]2\,;+\infty[$, alors $\Delta' > 0$ et P a deux racines distinctes ;
- si $m = 0$, alors $\Delta' = 0$ et P a une racine double : -1 ;
- si $m = 2$, alors $P(x) = -2$ et P n'a pas de racine.

♦ **Exercice 13 p. 200**

On a : $\Delta' = 3m^2 - 9m + 6 = 3(m-1)(m-2)$.

1. P a deux racines distinctes si et seulement si $m \in]-\infty\,;1[\cup]2\,;+\infty[$.

2. P a une racine double si et seulement si $m = 1$ ou $m = 2$.

- Si $m = 1$, alors la racine double est -1 ;
- si $m = 2$, alors la racine double est 1.

♦ **Exercice 14 p. 200**

On a : $\frac{AB}{BC} = 1 + \frac{1}{\frac{AB}{BC}} \iff k = 1 + \frac{1}{k}$. Donc : $k^2 - k - 1 = 0$; or $k > 0$; donc : $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Somme et produit des racines

♦ **Exercice 15 p. 200**

Ces nombres, s'ils existent, sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

a) $x^2 + x + 12 = 0$; $S = \emptyset$ *b)* $x^2 + 9x + 20 = 0$; $S = \{(-5, -4)\,;(-4, -5)\}$

c) $x^2 - 3x + 4 = 0$; $S = \emptyset$ *d)* $x^2 - x\sqrt{2} + \frac{1}{2} = 0$; $S = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}\,; \frac{\sqrt{2}}{2})\}$.

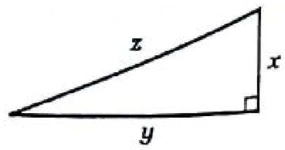
♦ **Exercice 16 p. 200**

Soit x et y ces deux nombres. On a : $\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x+y}{xy} = -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases}$.

x et y sont les solutions de l'équation : $x^2 - x - 6 = 0$; donc : $S = \{(-2, 3)\,;(3, -2)\}$.

♦ **Exercice 17 p. 200**

Soit x, y et z les dimensions du triangle représenté ci-contre.



On a : $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} & (1) \\ x + y + z = 30 & (2) \\ \frac{1}{2}xy = 30 & (3) \end{cases}$

$$\begin{aligned}(1) \text{ et } (2) \;\Rightarrow\;& \sqrt{x^2 + y^2} = 30 - x - y \\ \Rightarrow\;& x^2 + y^2 = 900 + x^2 + y^2 - 60x - 60y + 2xy \\ \Rightarrow\;& 900 - 60x - 60y + 120 = 0 \\ \Rightarrow\;& x + y = 17.\end{aligned}$$

x et y sont solution de l'équation : $x^2 - 17x + 60 = 0$.

On trouve : $x = 5$ et $y = 12$; donc : $z = 13$ ou $x = 12$ et $y = 5$; donc : $z = 13$. $S = \{(5, 12, 13)\,;(12, 5, 13)\}$.

♦ **Exercice 18 p. 200**

Soit x et y les dimensions du jardin. On a : $\begin{cases} (x+6)(y+6) = 630 \\ xy = 360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 39 \\ xy = 360 \end{cases}$.

x et y sont les solutions de l'équation : $x^2 - 39x + 360 = 0$; $\Delta = 1\,521 - 1\,440 = 81$;
donc : $L = \frac{39+9}{2} = 24$ m et $l = \frac{39-9}{2} = 15$ m.

♦ **Exercice 19 p. 200**

On pose : $x' + x'' = S$ et $x'x'' = P$.

a) On a : $\begin{cases} S^2 - 2P = \frac{25}{4} \\ P = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = \frac{1}{4} \\ P = -3 \end{cases}$.

$\begin{cases} S = \frac{1}{2} \\ P = -3 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{(2, -\frac{3}{2}) ; (-\frac{3}{2}, 2)\}$ et $\begin{cases} S = -\frac{1}{2} \\ P = -3 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \{(-2, \frac{3}{2}) ; (\frac{3}{2}, -2)\}$.

L'ensemble des solutions est : $S_1 \cup S_2 = \{(2, -\frac{3}{2}) ; (-\frac{3}{2}, 2) ; (-2, \frac{3}{2}) ; (\frac{3}{2}, -2)\}$.

b) On a : $\begin{cases} \frac{S}{P} = \frac{1}{6} \\ P = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -1 \\ P = -6 \end{cases}$; on en déduit : $S = \{(-3, 2) ; (2, -3)\}$.

c) On a : $\begin{cases} \frac{S^2 - 2P}{P} = -\frac{25}{12} \\ P = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = \frac{1}{36} \\ P = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

$\begin{cases} S = \frac{1}{6} \\ P = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}) ; (-\frac{1}{2}, \frac{2}{3})\}$ et $\begin{cases} S = -\frac{1}{6} \\ P = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \{(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}) ; (\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})\}$.

L'ensemble des solutions est : $S_1 \cup S_2 = \{(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}) ; (-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) ; (-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}) ; (\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})\}$.

♦ **Exercice 20 p. 200**

On a : $\Delta' = m^2 - 3m + 4$; $P = m - 3$; $S = -2(m-1)$.

Le discriminant de Δ' est -7 ; donc, $\Delta' > 0$ pour tout $m \in \mathbb{R}$ et le polynôme a deux racines distinctes.

- Si $m < 3$, alors $P < 0$; les deux racines sont de signes contraires ;
- si $m > 3$, alors $P > 0$ et $S < 0$; les deux racines sont négatives.

Cas particuliers

- si $m = 3$, alors $P = 0$ et $S = -4$, donc : $x' = 0$ et $x'' = -4$;
- si $m = 1$, alors $S = 0$ et $P = -2$, donc : $x' = -\sqrt{2}$ et $x'' = \sqrt{2}$.

♦ **Exercice 21 p. 200**

On a : $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2+1) = 4m - 3$; donc P admet deux racines si et seulement si : $m \in [\frac{3}{4} ; +\infty[$.

On pose : $\alpha + \beta = S$ et $\alpha\beta = P$.

a) On a : $\alpha^2 + \beta^2 = 29 \Leftrightarrow S^2 - 2P = 29 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 2(m^2+1) = 29 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 30 = 0 \Leftrightarrow m = -5$ ou $m = 3$.

Seule la valeur 3 convient.

Alors, on a : $P(x) = x^2 + 7x + 10$; les racines sont : $\alpha = 5$ et $\beta = 2$ ou $\alpha = 2$ et $\beta = 5$.

b) On a : $|\alpha - \beta| = 1 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 1 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 1 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4(m^2+1) = 1 \Leftrightarrow 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

On a : $P(x) = x^2 + 3x + 2$; les racines sont : $\alpha = -1$ et $\beta = -2$ ou $\alpha = -2$ et $\beta = -1$.

ÉQUATIONS BICARRÉES

♦ **Exercice 22 p. 201**

a) $S = \{-3 ; 3 ; -\sqrt{2} ; \sqrt{2}\}$ *b)* $S = \emptyset$ *c)* $S = \left\{-\sqrt{\frac{2}{3}} ; \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$ *d)* $S = \emptyset$.

♦ **Exercice 23 p. 201**

On a : $x^4 + (m-2)x^2 + m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = X \\ X^2 + (m-2)X + m + 1 = 0 \end{cases}$.

a) L'équation admet quatre solutions distinctes si et seulement si :

$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m > 0 \\ m + 1 > 0 \\ -m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in]-1 ; 0[$.

b) L'équation admet deux solutions distinctes si et seulement si :
$\begin{cases}\Delta > 0\\ P < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 8m > 0\\ m + 1 < 0\end{cases} \Leftrightarrow m \in]-\infty\,;-1[.$

c) Si $m = -1$, $P = 0$ et $S = 3$; donc : $X = 0$ ou $X = 3$. L'ensemble des solutions est : $\{0\,;\sqrt{3}\,;-\sqrt{3}\}$.

♦ Exercice 24 p. 201

On pose : $X = x^2$. On a :

$$\begin{aligned} x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0 &\Leftrightarrow X^2 - 2(a^2 + b^2)X + (a^2 - b^2)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow X = (a + b)^2 \text{ ou } X = (a - b)^2\\ &\Leftrightarrow x^2 = (a + b)^2 \text{ ou } x^2 = (a - b)^2\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $\{-a - b, a + b, -a + b, a - b\}$.

Équations et inéquations irrationnelles

♦ Exercice 25 p. 201

a) $S = \{-\sqrt{\frac{3}{2}}\,;\sqrt{\frac{3}{2}}\}$ *b)* $S = \{\frac{1 + \sqrt{7}}{2}\}$ *c)* $S = \{5\}$ *d)* $S = \emptyset$.

♦ Exercice 26 p. 201

a) $S = \emptyset$ *b)* $S = \{1\}$.

♦ Exercice 27 p. 201

a) $S = \{0\}$ *b)* $S = \{-\frac{1}{2}\}$ *c)* $S = \emptyset$ *d)* $S = \{\frac{5}{8}\}$.

♦ Exercice 28 p. 201

Cette équation n'a de sens que si : $\begin{cases}-2x^2 + 3x + 5 \geq 0\\ x^2 - 9 \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \in [-1\,;\frac{5}{2}]\\ x \in]-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty[\end{cases}$

Ces deux conditions sont incompatibles, donc l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

♦ Exercice 29 p. 201

a) $S = [1\,;+\infty[$ *b)* $S = [0\,;1[$ *c)* $S =]1\,;3[$ *d)* $S =]-2\,;-1] \cup [\frac{1}{3}\,;1[$ *e)* $S = [-1\,;\frac{5}{3}]$.

♦ Exercice 30 p. 201

a) $S =]-\infty\,;-1]$ *b)* $S = [4\,;+\infty[$ *c)* $S = \emptyset$ *d)* $S = [5\,;+\infty[$ *e)* $S = [\frac{1}{3}\,;+\infty[$ *f)* $S = [\frac{1}{2}\,;\frac{5}{8}[$.

Systèmes linéaires

♦ Exercice 31 p. 201

a) On a : $D = m - 1$; $D_x = m^2 - 1$; $D_y = (\sqrt{2} - 1)(m - 1)$.
- Si $m \neq 1$, $S = \{(m + 1\,;\sqrt{2} - 1)\}$.
- Si $m = 1$, $S = \{(1 + (\sqrt{2} + 1)\lambda\,;\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

b) On a : $D = 4m^2 - 9$; $D_x = 2m + 3$; $D_y = \frac{2m + 3}{\sqrt{6}}$.
- Si $m \neq \frac{3}{2}$ et $m \neq -\frac{3}{2}$, on a un couple solution : $S = \{\left(\frac{1}{2m - 3}\,;\frac{\sqrt{6}}{6(2m - 3)}\right)\}$.
- Si $m = \frac{3}{2}$, le système est équivalent à : $3x - 3y\sqrt{6} = 1$, donc : $S = \emptyset$.
- Si $m = -\frac{3}{2}$, Le système est équivalent à : $3x + 3y\sqrt{6} = -1$; $S = \{\left(-\frac{1}{3} - \lambda\sqrt{6}\,;\lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

♦ Exercice 32 p. 201

Ce système admet un couple unique de solutions si et seulement si $D \neq 0$.
On a : $D = 9 - m^2$; donc : $D \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} - \{-3\,;3\}$.
On a : $D_x = (m + 1)(-m + 2)$; $D_y = m^2 - 4m - 1$; $S = \{\left(\frac{(m + 1)(-m + 2)}{9 - m^2}\,;\frac{m^2 - 4m - 1}{9 - m^2}\right)\}$.

Exercice 33 p. 201

) On pose : $X = \frac{1}{x}$ et $Y = \frac{1}{y}$. On obtient : $\begin{cases} X = -7 \\ Y = -5 \end{cases}$; donc : $S = \{(-\frac{1}{7} ; -\frac{1}{5})\}$.

) On pose : $X = x + y$ et $Y = x - y$. On obtient : $\begin{cases} X = \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ Y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; donc : $S = \{(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \sqrt{2})\}$.

) On pose : $X = \sqrt{x}$ et $Y = \sqrt{y}$. Conditions nécessaires : $X \geq 0$ et $Y \geq 0$.

n obtient : $\begin{cases} X = -8 \\ Y = 5 \end{cases}$; donc : $S = \emptyset$.

) On pose : $X = x^2$ et $Y = y^2$. Conditions nécessaires : $X \geq 0$ et $Y \geq 0$.

n obtient : $\begin{cases} X = 3 \\ Y = 0 \end{cases}$; donc : $S = \{(\sqrt{3}, 0) ; (-\sqrt{3}, 0)\}$.

Exercice 34 p. 201

) On pose : $S = x + y$ et $P = xy$. On obtient : $P = -2$ et $S = -1$.

'ensemble des solutions du système est : $\{(-2, 1) ; (1, -2)\}$.

) On pose : $S = x + y$ et $P = xy$. On obtient : $P = -1$ et $S = 3$.

'ensemble des solutions du système est : $S = \{(\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}) ; (\frac{3+\sqrt{13}}{2}, \frac{3-\sqrt{13}}{2})\}$.

) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \\ y = -\frac{6}{x} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = -\frac{6}{x}. \\ x \neq 0 \end{cases}$ On en déduit : $S = \{(-3, 2) ; (3, -2)\}$.

) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 3x^2 - 7y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - 2 \\ 5y^2 + 9y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - 2 \\ y = 0 \text{ ou } y = -\frac{9}{5} \end{cases}$. On en déduit : $S = \{(-2, 0) ; (\frac{17}{5}, -\frac{9}{5})\}$.

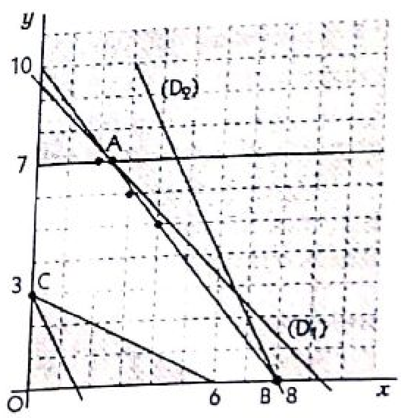
Exercice 35 p. 201

e système de contraintes définit une zone du plan (zone non hachurée) où elles sont réalisées.

. Soit F la fonction définie par : $F(x, y) = x + y$.

(x, y) sera maximal lorsque la droite (D_1) d'équation $x + y = k$ passera par A, le point d'intersection des roites d'équations $5x + 4y = 40$ et $y = 7$.

n a : $A\begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 7 \end{pmatrix}$; donc : $F_{max}(x, y) = 9{,}4$.



. La fonction F sera maximale en nombres entiers en trois points e la zone hachurée : $(2, 7)$; $(3, 6)$; $(4, 5)$.

our chacun de ces points, on a : $F(x, y) = 9$.

. Soit G la fonction définie par : $G(x, y) = 2x + y$.

(x, y) sera maximal lorsque la droite (D_2) d'équation $2x + y = k$ assera par le point $B\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$; donc : $G_{max}(x, y) = 16$.

(x, y) sera minimal lorsque la droite (D_2) d'équation $2x + y = k$ assera par le point $C\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; donc : $G_{min}(x, y) = 3$.

Exercice 36 p. 201

) $S = \{(-1, 2, 3)\}$ *b)* $S = \{(3, 3, -2)\}$ *c)* $S = \{(1, 0, -1)\}$ *d)* $S = \{(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$.

Exercice 37 p. 201

Une équation de la parabole est : $y = -x^2 - 2x + 3$.

Exercice 38 p. 201

On désigne respectivement par x, y et z les nombres de bananes, de mangues et d'ananas.

x, y et z sont des nombres entiers naturels vérifiant le système : $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 25x + 60y + 80z = 640 \end{cases}$.

On a : $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 5x + 12y + 16z = 128 \\ x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 7y + 11z = 68 \\ x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5. \\ z = 3 \end{cases}$

♦ Exercice 39 p. 201

On désigne par a, b et c les dimensions de ce pavé. On a : $\begin{cases} ab = 52 \\ bc = 78. \\ ca = 96 \end{cases}$

On multiplie membre à membre les trois équations de ce système ; on obtient : $(abc)^2 = 2^8 \times 3^2 \times 13^2$.
On en déduit : $abc = 2^4 \times 3 \times 13 = 624$ cm^3.

Exercices d'appronfondissement

♦ Exercice 40 p. 202

On a : S = P = k, avec : $S = x + y$ et $P = xy$.
x et y, s'ils existent, sont solutions de l'équation : $x^2 - kx + k = 0$. On a : $\Delta = k^2 - 4k = k(k - 4)$; donc :

- si $k \in]0 ; 4[$, le problème n'a pas de solution ;
- si $k = 0$, le problème a une solution : $(0, 0)$;
- si $k = 4$, le problème a une solution : $(2, 2)$;
- si $k \in]-\infty ; 0[\cup]4 ; +\infty[$, le problème a deux solutions : $\left(\frac{k - \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{k + \sqrt{\Delta}}{2}\right)$ et $\left(\frac{k + \sqrt{\Delta}}{2}, \frac{k - \sqrt{\Delta}}{2}\right)$.

♦ Exercice 41 p. 202

On a : $\Delta = m^2(m^2 + 2m + 9)$.
Le polynôme $m^2 + 2m + 9$ a pour discriminant $- 8$; donc : $\forall\, m \in \mathbb{R}$, $\Delta \geq 0$ et l'équation a deux solutions α et β, distinctes ou confondues.

On a : $\begin{cases} \alpha + \beta = -m(m + 3) \\ \alpha\beta = m^3 \\ \alpha^2 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + 4m = 0 \\ \alpha = m. \\ \beta = \alpha^2 \end{cases}$ Donc : $m = 0$ ou $m = -2$.

- Si $m = 0$, alors $\alpha = \beta = 0$.
- Si $m = -2$, aors $\alpha = -2$ et $\beta = 4$.

♦ Exercice 42 p. 202

1. Soit P le polynôme défini par : $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, où a, b, c désignent les dimensions du livre.
On a : $P(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$.

On sait que : $\begin{cases} 4(a + b + c) = 180 \\ 2(ab + bc + ca) = 1\,072 \\ abc = 900 \end{cases}$; donc : $P(x) = x^3 - 45x^2 + 536x - 900$.

2. $P(2) = 0$; on en déduit : $P(x) = (x - 2)(x^2 - 43x + 450) = (x - 2)(x - 18)(x - 25)$.
Les dimensions de ce livre sont donc : 2cm, 18 cm et 25 cm.

♦ Exercice 43 p. 202

On a : $(2 - 2x)(1 - 2x) = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0$.
Cette équation a deux solutions : $\frac{3 - \sqrt{5}}{4} \approx 0{,}19$ et $\frac{3 + \sqrt{5}}{4} \approx 1{,}31$.
De plus, il faut : $2x < 1$; donc, $\frac{3 - \sqrt{5}}{4}$ est la largeur de la bande coloriée.

♦ Exercice 44 p. 202

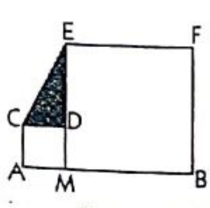


fig. 1

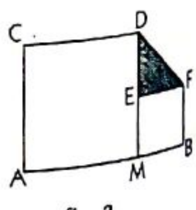


fig. 2

1. *a)* • Si $x \in [0 ; \frac{1}{2}]$, on a :

CD = AM = x et ED = EM − DM = MB − AM = $1 - 2x$;

donc : $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}x(1 - 2x)$.

• Si $x \in]\frac{1}{2} ; 1]$, on a : EF = MB = $1 - x$ et

ED = MD − ME = AM − MB $= x - (1 - x) = 2x - 1$;

donc : $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}(1 - x)(2x - 1)$.

b) • Si $x \in [0 ; \frac{1}{2}]$, on a : $\mathcal{A}(x) = k \Leftrightarrow 2x^2 - x + 2k = 0$.

On a : $\Delta = 1 - 16k$; donc :

– si $k < 0$, pas de solution, car $\mathcal{A}(x) \geq 0$;

– si $k = 0$, deux solutions : 0 et $\frac{1}{2}$;

– si $0 < k < \frac{1}{16}$, deux solutions : $0 < x' < x'' < \frac{1}{2}$;

– si $k = \frac{1}{16}$, une solution : $\frac{1}{4}$;

– si $k > \frac{1}{16}$, pas de solution.

• Si $x \in]\frac{1}{2} ; 1]$, on a : $\mathcal{A}(x) = k \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2k + 1 = 0$.

On a : $\Delta = 9 - 8(2k + 1) = 1 - 16k$; donc :

– si $k < 0$, pas de solution, car $\mathcal{A}(x) \geq 0$;

– si $k = 0$, deux solutions : $\frac{1}{2}$ et 1 ;

– si $0 < k < \frac{1}{16}$, deux solutions : $\frac{1}{2} < x' < x'' < 1$;

– si $k = \frac{1}{16}$, une solution : $\frac{3}{4}$;

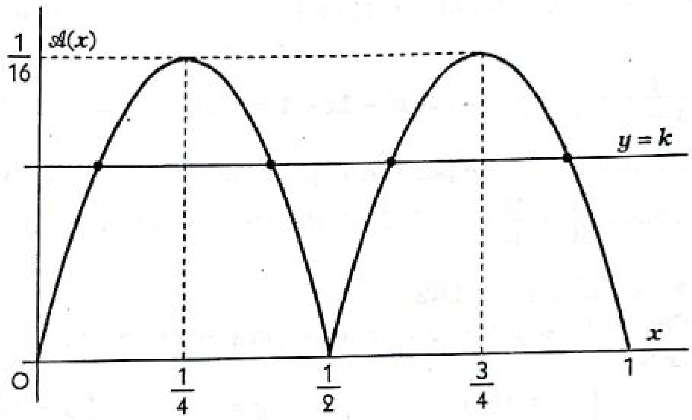
– si $k > \frac{1}{16}$, pas de solution.

2. a) La courbe représentative de la fonction $\mathcal{A}$ est la réunion de deux parties de paraboles :

• la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x(1 - 2x)$, sur l'intervalle $[0 ; \frac{1}{2}]$;

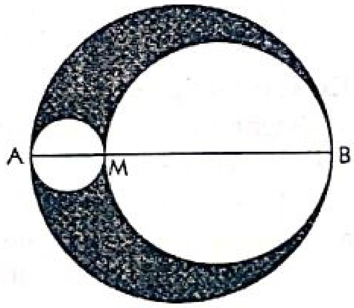
• la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}(1 - x)(2x - 1)$, sur l'intervalle $[\frac{1}{2} ; 1]$.

b) On retrouve les résultats précédents en considérant l'intersection de cette courbe avec la droite variable d'équation : $y = k$.



La fonction $\mathcal{A}$ présente un maximum en $\frac{1}{4}$ et en $\frac{3}{4}$.

• **Exercice 45 p. 202**

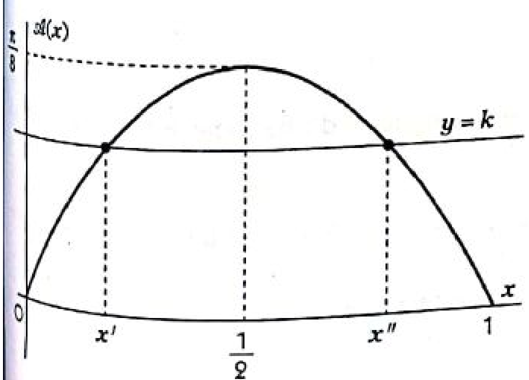


1. On a : $\mathcal{A}(x) = \frac{\pi}{4}[1 - x^2 - (1 - x)^2]$;

d'où : $\mathcal{A}(x) = \frac{\pi}{2}(-x^2 + x)$.

On a : $\mathcal{A}(x) = \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow -x^2 + x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

2. On utilisera une méthode graphique.



• si $k < 0$, pas de solution ;

• si $k = 0$, deux solutions : 0 et 1 ;

• si $0 < k < \frac{\pi}{8}$, deux solutions : $0 < x' < x'' < 1$;

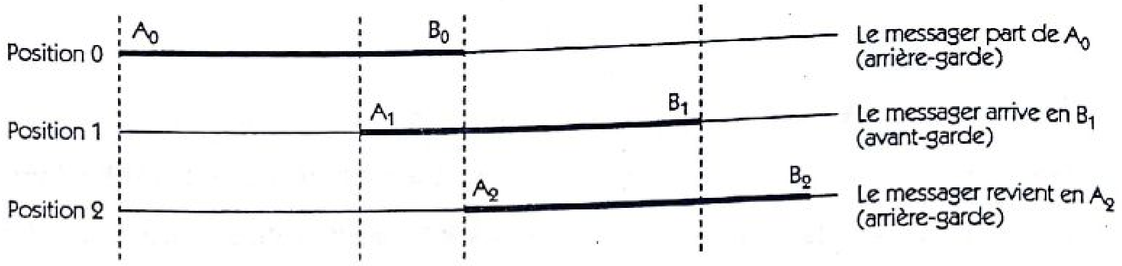
• si $k = \frac{\pi}{8}$, une solution : $\frac{1}{2}$;

• si $k > \frac{\pi}{8}$, pas de solution.

Par le calcul, on résoud l'équation : $\pi x^2 - \pi x + 2k = 0$.

♦ **Exercice 46 p. 202**

On illustre les trois positions successives du messager par les schémas suivants.



On désigne par v et V les vitesses respectives de l'armée et du messager ($V > v$).

Soit t_1 le temps mis par le messager pour arriver à l'avant-garde de l'armée, c'est-à-dire pour parcourir la distance A_0B_1, et t_2 le temps mis pour revenir à l'arrière, c'est-à-dire pour parcourir la distance B_1A_2.

On a : $\begin{cases} A_0B_1 = A_0A_1 + A_1B_1 \\ B_1A_2 = A_2B_2 - B_1B_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Vt_1 = vt_1 + 50 \\ Vt_2 = 50 - vt_2 \end{cases}$ (1) . De plus : $A_0A_2 = 50$; donc : $v(t_1 + t_2) = 50$.

On pose : $x = \dfrac{V}{v}$; on a : (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \dfrac{50}{vt_1} \\ x + 1 = \dfrac{50}{vt_2} \end{cases}$. On en déduit : $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{v(t_1 + t_2)}{50} = 1$.

$\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$. D'où : $x = 1 + \sqrt{2}$.

La distance totale parcourue par le messager est : $d = V(t_1 + t_2)$.

Donc : $\dfrac{d}{50} = \dfrac{V}{v} = 1 + \sqrt{2}$ et $d = 50(1 + \sqrt{2})$; $d \approx 120{,}7$ km.

♦ **Exercice 47 p. 202**

On désigne par x, y et z les quantités respectives de grains produits par une gerbe de chaque récolte ($x > y > z$).

On a : $\begin{cases} 2x = 1 + y \\ 3y = 1 + z \\ 4z = 1 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 12y = 5 \\ z = 3y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{23} \\ y = \dfrac{11}{23} \\ z = \dfrac{10}{23} \end{cases}$.

♦ **Exercice 48 p. 202**

On désigne par x, y, z les chiffres respectifs des centaines, dizaines, unités du nombre n cherché.

On a : $n = 100x + 10y + z$.

On a : $\begin{cases} x + y + z = 17 \\ 100y + 10x + z = 100x + 10y + z + 360 \\ 100z + 10y + x = 100x + 10y + z - 198 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 17 \\ -x + y = 4 \\ -x + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 = 17 \\ y = x + 4 \\ z = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \\ z = 3 \end{cases}$.

On a donc : $n = 593$.

♦ **Exercice 49 p. 202**

On désigne par x, y et z les prix respectifs d'un ananas, d'une mangue et d'une papaye et par P le prix payé par la troisième cliente.

On a : $\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 620 \\ 3x + 5y + z = 530. \\ 2x + 7y + 8z = P \end{cases}$ Il faut démontrer que la 3ᵉ équation de ce système est une combinaison des deux premières, c'est-à-dire déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$2x + 7y + 8z = a(2x + 5y + 4z) + b(3x + 5y + z)$.

Donc : $\begin{cases} 2a + 3b = 2 \\ 5a + 5b = 7 \\ 4a + b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{11}{5} \\ b = -\dfrac{4}{5} \end{cases}$. On en déduit : $P = \dfrac{11}{5} \times 620 - \dfrac{4}{5} \times 530 = 940$.

Exercice 50 p. 202

On désigne par x, y et z les débits respectifs par minute des robinets A, B et C et par V le volume du bassin.

On a : $\begin{cases} x+y=\dfrac{V}{20} \\ y+z=\dfrac{V}{15} \\ x+z=\dfrac{V}{12} \end{cases}$. On en déduit : $x+y+z=\dfrac{V}{10}$; donc : $x=\dfrac{V}{30}$, $y=\dfrac{V}{60}$, $z=\dfrac{V}{20}$.

1. Il faut respectivement 30, 60 et 20 minutes aux robinets A, B et C pour remplir le bassin.
2. Il faut 10 minutes aux trois robinets pour remplir le bassin.

Exercice 51 p. 202

Deux sommets quelconques ont deux faces en communs, donc ils ont deux nombres en communs ; or la somme doit être constante. Ceci n'est possible que lorsque les troisièmes nombres sont identiques.
Il est donc impossible de trouver une telle situation.

Exercice 52 p. 202

On a : $\begin{cases} a+b+c=15 \\ 100b+10c+a=100a+10b+c+432 \\ 100c+10a+b=100a+10b+c-243 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=15 \\ -11a+10b+c=48 \\ -10a-b+11c=-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=9. \\ c=2 \end{cases}$

11. Dénombrement

(pages 203 à 224 du livre de l'élève)

Objectifs

Maîtriser les notions de p-uplets, arrangements et combinaisons pour résoudre des problèmes concrets de dénombrement.

Commentaires

Le langage introduit dans la deuxième leçon (compléments sur les ensembles) n'est certes pas indispensable mais trop répandu et universellement utilisé pour être ignoré. L'objectif essentiel de cette leçon n'est pas l'acquisition de ce vocabulaire mais d'attirer l'attention des élèves sur les deux associations d'idées suivantes :

- partition – somme ;
- produit cartésien – produit.

L'expérience montre en effet que beaucoup d'élèves confondent les situations où il faut additionner les cas et celles où il faut les multiplier. Les outils de dénombrement introduits sont : p-uplets, arrangements, permutations et combinaisons. Il y a traditionnellement deux façons d'introduire ces notions :

– celle partant de la notion de p-uplet ;

– celle partant de la notion d'application d'un ensemble fini dans un autre.

On a préféré la première par rapport à la seconde pour deux raisons :

– elle est plus concrète et donc plus opérationnelle pour les élèves ;

– la notion d'application injective, introduite seulement en classe de première au chapitre 9, est trop récente pour les élèves.

On a cependant mentionné, pour chacun des outils introduits, les deux points de vue.

Les élèves ont été habitués à manipuler les arbres de choix dès le premier cycle. On pourra utiliser ces derniers pour illustrer certaines démonstrations de cours, ou pour résoudre des exercices. On évitera cependant de les utiliser systématiquement, l'objectif de ce chapitre étant de mettre au point des outils plus performants.

La principale difficulté pour un élève confronté à un problème de dénombrement est de choisir le bon outil. On l'habituera à exercer ce choix peu à peu en partant de situations simples et diverses.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Premiers outils pour dénombrer • Utiliser un comptage. • Utiliser un diagramme. • Utiliser un arbre de choix. **Compléments sur les ensembles** • Cardinal d'un ensemble fini. • Partition d'un ensemble : – définition ; – cardinal de la réunion de deux ensembles. • Produit cartésien d'ensembles : – définition ; – cardinal du produit cartésien de deux ensembles. **p-uplets, arrangements, permutations** • Définitions : – p-uplets d'un ensemble ; – arrangements ; – permutations.	• Reconnaître les situations dans lesquelles on doit utiliser une partition et celles dans lesquelles on doit utiliser un produit cartésien.

savoirs

- Lien entre :
  - p-uplets et applications d'un ensemble fini dans un autre ;
  - arrangements et injections d'un ensemble fini dans un autre ;
  - permutations et bijections d'un ensemble fini dans un autre.
- Formules :
  - du nombre de p-uplets d'un ensemble fini ;
  - de A_n^p.

Combinaisons
- définition ;
- propriétés ;
- formule du binôme ;
- triangle de Pascal.

savoir-faire

- Calculer A_n^p pour de faibles valeurs de n et p le plus rapidement possible sans utiliser les factorielles.
- Calculer A_n^p pour de grosses valeurs de n et p avec l'aide de la calculatrice.
- Utiliser la notation factorielle dans les calculs.

- Calculer C_n^p pour de faibles valeurs de n et p le plus rapidement possible sans utiliser les factorielles.
- Calculer C_n^p pour de grosses valeurs de n et p avec l'aide de la calculatrice.

- Bien différencier les trois notions fondamentales : p-uplet, arrangement et combinaison.
- Choisir la notion appropriée pour résoudre un problème de dénombrement.

Exercices du cours

Exercice 1.a p. 207

On procède par comptage. On peut descendre l'escalier des façons suivantes :

$1+1+1+1+1+1$: 1 possibilité
$1+1+1+1+2$: 5 possibilités
$1+1+2+2$: 6 possibilités
$2+2+2$: 1 possibilité
$1+1+1+3$: 4 possibilités ;
$1+2+3$: 6 possibilités ;
$3+3$: 1 possibilité.

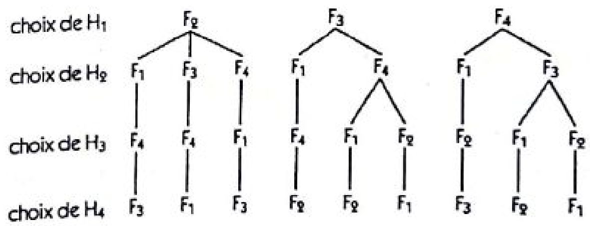
soit, au total, 24 façons de descendre l'escalier.

Exercice 1.b p. 207

On peut utiliser un arbre :
il y a 5 façons de choisir la première couleur,
4 façons de choisir la deuxième couleur,
3 façons de choisir la troisième couleur.
On peut donc constituer 60 drapeaux différents.

Exercice 1.c p. 207

On utilise un comptage ou un arbre de choix.
On obtient 9 façons possibles.



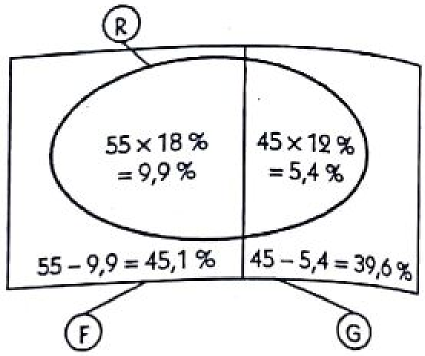
Exercice 1.d p. 207

a) Dans le mot ACCRA, il y a deux A, deux C et un R. Soit 1, 2, 3, 4, 5 les numéros d'ordre des lettres :
- il y a 5 façons de placer le R : 1, 2, 3, 4 ou 5 ;
- le R étant placé (par exemple en 5), il y a 6 façons de placer les deux A dans les quatre places restantes : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 2 et 3, 2 et 4, 3 et 4 ;
- le R et les deux A étant placés, il y a 1 seule façon de placer les deux C.

Il y a donc $5 \times 6 = 30$ anagrammes du mot ACCRA.

b) Il y a donc $6 \times 10 = 60$ anagrammes du mot BAOBAB.
On aurait pu utiliser un arbre de choix.

♦ Exercice 1.e p. 207



Il y a donc : $45 \times \frac{12}{100} = 5{,}4$ % (de l'effectif total) de garçons n'ayant jamais redoublé.

De même, il y a : $55 \times \frac{18}{100} = 9{,}4$ % (de l'effectif total) de filles n'ayant jamais redoublé.

Donc :

1. Il y a : $9{,}9 + 5{,}4 = 15{,}3$ % d'élèves n'ayant jamais redoublé.

2. Il y a : $\frac{9{,}9}{9{,}9 + 5{,}4} \times 100 = 64{,}7$ % de filles parmi les élèves n'ayant jamais redoublé.

♦ Exercice 2.a p. 211

Card ($\mathcal{P}$(E)) = $2^4 = 16$.

♦ Exercice 2.b p. 211

1. On a : $M_2 = \{4 ; 8 ; 10 ; 16\}$ et $M_3 = \{9 ; 15 ; 21\}$.
Donc : $M_2 \cup M_3 = E$ et $M_2 \cap M_3 = \varnothing$. Par suite, M_2 et M_3 forment une partition de E.

2. On a : $M_2 = \{4 ; 8 ; 10 ; 12 ; 16 ; 18\}$ et $M_3 = \{9 ; 12 ; 15 ; 18 ; 21\}$.
$M_2 \cup M_3 = F$, mais $M_2 \cap M_3 = \{12 ; 18\}$. Donc M_2 et M_3 ne forment pas une partition de F.

♦ Exercice 2.c p. 211

1. M_2, M_3 et M_6 ne constituent pas une partition de E car $M_2 \cup M_3 \cup M_6 \neq E$. Il y a en effet dans E des nombres qui ne sont ni des multiples de 2, ni des multiples de 3 ou de 6, par exemple, 5.
De plus, $M_2 \cap M_3 = M_6 \neq \varnothing$.

2. $M_2 = \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ;...; 50\}$, Card ($M_2$) = 26 ;
$M_3 = \{0 ; 3 ; 6 ; 9 ; ... ; 48\}$, Card ($M_3$) = 17 ;
$M_6 = \{0 ; 6 ; 12 ; 18 ; ... ; 48\}$, Card ($M_3$) = 9 ;
$M_2 \cup M_3 = \{0 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; ... ; 45 ; 46 ; 48 ; 50\}$, Card ($M_2 \cup M_3$) = 34.
On a : $34 = 26 + 17 - 9$, donc, Card ($M_2 \cup M_3$) = Card (M_2) + Card (M_3) – Card (M_6).

♦ Exercice 2.d p. 211

Lorsqu'on divise un nombre entier naturel par 5, il y a un reste unique qui est 0, 1, 2, 3 ou 4.
Donc, $E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 = \mathbb{N}$ et les ensembles E_0, E_1, E_2, E_3 et E_4 sont deux à deux disjoints.
E_0, E_1, E_2, E_3 et E_4 forment une partition de l'ensemble $\mathbb{N}$.

♦ Exercice 2.e p. 211

1. E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}. Le nombre de résultats est égal au nombre d'éléments de E × E, c'est à dire : 36.

2. On désigne par le couple (a, b) les résultats du tirage : a pour le dé rouge, b pour le dé vert.
Les résultats pour lesquels la somme des deux nombres est supérieure ou égale à 9 sont :
(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5,4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6,4), (6, 5), (6, 6). Il y a donc 10 cas possibles.

♦ Exercice 3.a p. 215

Chaque rangement peut être représenté par un quintuplet (a_1, a_2, . . . , a_5), où a_i est le numéro du tiroir ayant reçu la ième paire de chaussettes. Le nombre de rangements est donc égal au nombre de quintuplets d'un ensemble à 3 éléments, c'est à dire : $3^5 = 243$.

♦ Exercice 3.b p. 215

Chaque résultat du concours peut être représenté par un triplet (a_1, a_2, a_3) où a_i est le nom de la fille ayant reçu le ième prix. Chaque concurrente ne pouvant recevoir qu'un seul prix, ce triplet est un arrangement. Le nombre de résultats possibles est donc égal au nombre d'arrangements de 3 jeunes filles prises parmi 12, c'est à dire : $A_{12}^3 = 1\,320$.

Exercice 3.c p. 215

Il y a autant d'alignements possibles que de permutations de l'ensemble des 6 athlètes, c'est à dire : $6! = 720$.

Exercice 3.d p. 215

On peut tracer autant de vecteurs que de couples de points distincts. le nombre de vecteurs est donc égal au nombre d'arrangements de deux éléments pris parmi 10, c'est à dire : $A_{10}^2 = 90$.

Exercice 3.e p. 215

Il y a 6! façons, c'est-à-dire 720 façons, de disposer les 6 drapeaux.

Exercice 4.a p. 218

1. Il faut choisir un sous–ensemble de 3 éléments dans l'ensemble des 10 paires de chaussettes ; il y a donc $C_{10}^3 = 120$ choix possibles.
2. De même, on a : $C_{10}^3 \times C_5^2 = 120 \times 10 = 1\,200$ choix possibles.

Exercice 4.b p. 218

1. Il faut choisir 4 élèves parmi 45, donc : $C_{45}^4 = 148\,995$ choix possibles.
2. Il faut choisir 2 filles parmi 25 et 2 garçons parmi 20, donc : $C^2{}_{25} \times C_{20}^2 = 57\,000$ choix possibles.
3. On dénombre les bureaux ne contenant pas de filles : $C_{20}^4 = 4\,845$; le nombre de bureaux contenant au moins 1 fille est donc : $148\,995 - 4\,845 = 144\,150$ choix possibles.

Exercice 4.c p. 218

Il faut choisir 11 garçons parmi 25 et 5 filles parmi 15, donc : $C_{25}^{11} \times C_{15}^5 = 13\,385\,572\,200$ sélections possibles.

Exercice 4.d p. 218

1. Pour tracer une droite, il faut choisir 2 points parmi les 10, donc : $C_{10}^2 = 45$ droites.
2. Il y a autant de triangles que de combinaisons de 3 points pris parmi 10.
Le nombre de triangles est donc : $C_{10}^3 = 120$.
3. Il y a autant de quadrilatères que de combinaisons de 4 points pris parmi 10.
Le nombre de quadrilatères est donc : $C_{10}^4 = 210$.

Exercice 5.a p. 221

a) Il y a 8 hauteurs possibles pour la paire (A, R, D, V, 10, 9, 8, 7) ; pour chacune d'elles, il y a C_4^2 choix des 2 cartes qui composent la paire et C_{28}^3 choix des 3 autres cartes.

Le nombre de tirages contenant 1 paire est : $8 \times C_4^2 \times C_{28}^3 = 157\,248$.

b) Il y a C_8^2 choix possibles des hauteurs des deux paires ; dans chaque cas, il y a $C_4^2 \times C_4^2$ choix des 2 cartes qui composent chacune d'elles et 24 choix pour la 5ème carte.

Le nombre de tirages contenant 2 paires est : $C_8^2 \times C_4^2 \times C_4^2 \times 24 = 24\,192$.

c) Il y a 8 hauteurs possibles pour le brelan ; pour chacune d'elles, il y a C_4^3 choix des 3 cartes qui composent le brelan et C_{28}^2 choix des 2 autres cartes.

Le nombre de tirages contenant 1 brelan est : $8 \times C_4^3 \times C_{28}^2 = 12\,096$.

d) Il y a 8 hauteurs possibles pour le carré ; pour chacune d'elles, il y a 1 choix des 4 cartes qui composent le carré et 28 choix pour la 5ème carte.

Le nombre de tirages contenant 1 carré est : $8 \times 28 = 224$.

e) Il y a A_8^2 choix possibles des hauteurs, dans l'ordre, du brelan et de la paire ; il y a C_4^3 choix des 3 cartes qui composent le brelan et C_4^2 choix des 2 cartes qui composent la paire.

Le nombre de tirages contenant 1 full est : $A_8^2 \times C_4^3 \times C_4^2 = 1\,344$.

Exercice 5.b p. 221

a) Il y a $2^{10} = 1\,024$ résultats distincts ; *b)* $C_{10}^n = \dfrac{10\,!}{n\,!\,(10-n\,!)}$; *c)* $2^{10} - (C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2) = 1\,024 - 56 = 968$.

♦ **Exercice 5.c p. 221**

1. *a)* $C_{20}^3 \times C_6^2 = 17\ 100$

b) $C_{26}^5 - C_{20}^5 = 50\ 276.$

2. *a)* $C_5^3 \times 20^3 \times 6^2 = 2\ 880\ 000$; *b)* $26^5 - 20^5 = 8\ 681\ 376$

c) $26^5 - (26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22) = 3\ 987\ 776.$

♦ **Exercice 5.d p. 221**

1. On a $3^{10} = 59\ 049$ résultats possibles.

2. *a)* Pour arriver à un total de 15 points on peut avoir :

$5 \times 3 + 5 \times 0$ ou $4 \times 3 + 3 \times 1 + 3 \times 0$ ou $3 \times 3 + 6 \times 1 + 1 \times 0$.

Le nombre de possibilités est : $C_{10}^5 \times C_5^5 + C_{10}^4 \times C_6^3 \times C_3^3 + C_{10}^3 \times C_7^6 \times C_1^1 = 5\ 292.$

b) On cherche le nombre de résultats dont le total T est strictement supérieur à 25 ;

- $T = 26 : 8 \times 3 + 2 \times 1$, c'est-à-dire $C_{10}^5 \times C_1^1 = 45$ résultats,
- $T = 27 : 9 \times 3 + 1 \times 0$, c'est-à-dire $C_{10}^9 \times C_2^2 = 10$ résultats,
- $T = 28 : 9 \times 3 + 1 \times 1$, c'est-à-dire $C_{10}^9 \times C_1^1 = 10$ résultats,
- $T = 29$: impossible,
- $T = 30 : 10 \times 3$, c'est-à-dire 1 résultat.

Le nombre de résultats dont le total T est strictement supérieur à 25 est donc : 66.

Le nombre de résultats dont le total T est inférieur ou égal à 25 points est : $59\ 049 - 66 = 58\ 983$.

c) On cherche le nombre de résultats dont le total T est inférieur ou égal à 3 ;

- $T = 0 : 10 \times 0$, c'est-à-dire 1 résultat,
- $T = 1 : 1 \times 1 + 9 \times 0$, c'est-à-dire $C_{10}^9 \times C_1^1 = 10$ résultats,
- $T = 2 : 2 \times 1 + 8 \times 0$, c'est-à-dire $C_{10}^8 \times C_2^2 = 45$ résultats,
- $T = 3 : 1 \times 3 + 9 \times 0$ ou $3 \times 1 + 7 \times 0$, c'est-à-dire $C_{10}^1 \times C_9^9 + C_{10}^3 \times C_7^7 = 10 + 120 = 130$ résultats.

Le nombre de résultats dont le total T est inférieur ou égal à 3 est donc : 186.

Le nombre de résultats dont le total T est strictement supérieur à 3 points est : $59\ 049 - 186 = 58\ 863$.

Exercices d'apprentissage

PARTITION D'UN SENSEMBLE, PRODUIT CARTÉSIEN

♦ **Exercice 1 p. 222**

On a : Card $(A \cup B)$ = Card (A) + Card (B) – Card $(A \cap B)$. Donc : Card $(A \cap B) = 6$.

♦ **Exercice 2 p. 222**

On a : $P \neq R \cup C \cup L$ et $C = R \cap L \neq \varnothing$. Donc R, C et L ne forment pas une partition de P.

♦ **Exercice 3 p. 222**

1. Il y a 0 partition à 1 sous-ensemble, 3 partitions à 2 sous-ensembles et 1 partition à 3 sous-ensembles. Il y a donc au total 4 partitions possibles.

2. Il y a 0 partition à 1 sous-ensemble, 7 partitions à 2 sous-ensembles et 6 partitions à 3 sous-ensembles. Il y a donc au total 13 partitions possibles.

♦ **Exercice 4 p. 222**

On a : $E_0 \cup E_1 \cup ... \cup E_9 = E$; de plus, les ensembles $E_0, E_1, ..., E_9$ sont non vides et deux à deux disjoints. Donc, les ensembles $E_0, E_1, ..., E_9$ forment une partition de E.

♦ **Exercice 5 p. 222**

1. Tout élément de P ne peut être élément de E_2, E_3, E_5 ou E_7 sinon il ne serait pas premier. Réciproquement, tout élément de $E \setminus (E_2 \cup E_3 \cup E_5 \cup E_7)$ est premier car s'il ne l'était pas, il admettrait un diviseur égal à 2, 3, 5 ou 7. Donc : $P = E \setminus (E_2 \cup E_3 \cup E_5 \cup E_7)$.

2. On a : $E = P \cup E_2 \cup E_3 \cup E_5 \cup E_7$; mais, ces ensembles ne sont pas disjoints deux à deux : par exemple $6 \in E_2 \cap E_3$. Donc, les ensembles P, E_2, E_3, E_5, E_7 ne forment pas une partition de E.

Exercice 6 p. 222

On désigne par x, y et z les cardinaux respectifs des ensembles A, B et C.

On a : $xy = 18$ et $xz = 15$; donc x est un entier naturel, distinct de 1, diviseur commun de 18 et 15.

On en déduit : $x = 3$. Donc, $y = 6$ et $z = 5$.

On a : Card (A) = 3 ; Card (B) = 6 ; Card (C) = 5.

Exercice 7 p. 222

On désigne respectivement par S, A et G les ensembles des sexes, âges et groupes sanguins.

Chaque fiche est constituée de 3 renseignements donnés dans l'ordre et peut donc être assimilé à un triplet (a, b, c) tel que : $a \in S$, $b \in A$ et $c \in G$.

Le nombre de fiches est égal au cardinal du produit cartésien $S \times A \times G$, c'est-à-dire : $2 \times 8 \times 8 = 128$.

Exercice 8 p. 222

Il y a 9 999 nombres compris entre 1 et 9 999. Le nombre de couples de lettres, différentes de O et I, est : 24^2.

Un plaque minéralogique peut être assimilée à un couple (a, b) où a est un nombre compris entre 1 et 9 999 et b un couple de lettres. Le nombre de plaques est donc : $9\,999 \times 24^2 = 5\,759\,424$.

Exercice 9 p. 222

1. Pour chacun des modèles A et B, il y a 2×5, c'est-à-dire 10 choix possibles et pour chacun des modèles C et D, il y a 4×5, c'est-à-dire 20 choix possibles.

Le nombre total de choix est donc : $(2 \times 10) + (2 \times 20) = 60$.

2. *a)* Pour une berline, il y a 4 modèles et 5 coloris, soit 20 choix possibles.

b) Par coloris, il y a 2 modèles A, 2 modèles B, 4 modèles C et 4 modèles D, soit 12 choix possibles.

c) Le client a le choix entre : • un coupé A ou B en 5 coloris : 10 possibilités ;
• un coupé ou un cabriolet C ou D en 5 coloris : 20 possibilités.

Le nombre total de choix est donc 30.

P-UPLETS, ARRANGEMENTS, PERMUTATIONS

Exercice 10 p. 222

On désigne par n le cardinal de l'ensemble E.

a) $A_n^2 = 56 \iff n(n-1) = 56 \iff n = 8$ *b)* $A_n^3 = 120 \iff n(n-1)(n-2) = 120 \iff n = 6$.

Exercice 11 p. 222

Chaque répartition est un arrangement des 3 masques parmi les 10 villageois pouvant les porter.

Le nombre de répartitions possibles est donc : A_{10}^3, c'est-à-dire 720.

Exercice 12 p. 222

On désigne par n le nombre de villes desservies. Le nombre de vols de la compagnie est A_n^2.

Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $A_n^2 = 7842 \iff n^2 - n - 7\,482 = 0 \iff n = 87$.

Exercice 13 p. 222

1. Chaque match peut être assimilé à un arrangement de 2 équipes choisies parmi 16, c'est-à-dire un couple d'équipes distinctes où la première composante est l'équipe qui reçoit, la seconde l'équipe qui est reçue. Le nombre de match à organiser est donc $A_{16}^2 = 240$ (120 matchs aller et 120 matchs retour).

2. Dans chacune des 4 poules, ainsi que dans la poule finale, il y a A_4^2, c'est-à-dire 12 matchs.

Au total, il y a donc : $5 \times 12 = 60$ matchs.

Exercice 14 p. 222

On désigne par C l'ensemble des 3 cahiers et par E l'ensemble des 3 enfants.

a) Si chaque enfant reçoit un cahier, toute distribution est une bijection de C vers E.

Le nombre de répartitions est donc : $3! = 6$.

b) Si chaque enfant peut recevoir 0, 1, 2 ou 3 cahiers, toute distribution est une application de C vers E.

Le nombre de répartitions est donc : $3^3 = 27$.

◆ **Exercice 15 p. 222**

Soit C l'ensemble des convives et P = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} l'ensemble des sièges.

1. Chaque disposition des 6 convives est une bijection de C vers P.
Le nombre de dispositions est donc : $6! = 720$.

2. Soit H et F les sous-ensembles hommes et femmes de l'ensemble C.
Toute disposition des 6 convives est :

- soit une bijection de H vers {1 ; 3 ; 5} et une bijection de F vers {2 ; 4 ; 6} ;
- soit une bijection de F vers {1 ; 3 ; 5} et une bijection de H vers {2 ; 4 ; 6} ;

Le nombre de dispositions est donc : $(3! \times 3!) + (3! \times 3!) = 72$.

◆ **Exercice 16 p. 222**

1. Il y a autant de nombres distincts que de permutations de l'ensemble de ces 7 plaquettes c'est-à-dire : $7! = 5\,040$.

2. *a)* Il y a 4 choix possibles pour le chiffre des unités (1, 3, 5 ou 7) et 6! permutations possibles des 6 autres plaquettes. Le nombre de possibilités est donc : $4 \times 6! = 2880$.

b) Le nombre obtenu est divisible par 4 s'il se termine par 12, 32, 52, 72, 24, 44, 64, 16, 36, 56 et 76, soit 11 cas. Dans chacun de ces cas, il y a 5! permutations possibles des 5 autres plaquettes.
Le nombre de possibilités est donc : $11 \times 5! = 1\,320$.

COMBINAISONS

◆ **Exercice 17 p. 223**

Il y a autant de poignées de main que de paires de personnes, c'est-à-dire : $C_{15}^2 = 105$.

◆ **Exercice 18 p. 223**

On peut construire des triangles, quadrilatères, pentagones et hexagones :

- construire un triangle, c'est choisir 3 points parmi 6, donc C_6^3 possibilités ;
- construire un quadrilatère, c'est choisir 4 points parmi 6, donc C_6^4 possibilités ;
- construire un pentagone, c'est choisir 5 points parmi 6, donc C_6^5 possibilités ;
- construire un hexagone, c'est choisir 6 points parmi 6, donc C_6^6 possibilités.

Le nombre total de polygones est donc : $C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 42$.

◆ **Exercice 19 p. 223**

1. Chaque choix de 3 questions est une combinaison de 3 éléments parmi les 10 de l'ensemble des questions ; il y a donc : C_{10}^3, c'est-à-dire 120 choix possibles.

2. Si on choisit la question 1, il reste à choisir 2 questions parmi les 9 autres ; il y a donc : C_9^2, c'est-à-dire 36 choix possibles.

◆ **Exercice 20 p. 223**

On peut assimiler un jury à une combinaison de 6 personnes prises parmi 17.

a) Les six personnes sont à choisir dans l'ensemble des 10 hommes ; le nombre de jurys possibles ne contenant que des hommes est donc : $C_{10}^6 = 210$.

b) On choisit 4 hommes parmi 10 et deux femmes parmi 7 ; le nombre de jurys possibles contenant 4 hommes et 2 femmes est donc : $C_{10}^4 \times C_7^2 = 4\,410$.

c) L'ensemble E des jurys cherchés est la réunion des trois ensembles disjoints suivants :

- l'ensemble A des jurys ne contenant aucune femme : Card (A) = 210 ;
- l'ensemble B des jurys contenant une seule femme : Card (B) = $C_{10}^5 \times C_7^1 = 1\,764$;
- l'ensemble C des jurys contenant deux femmes seulement : Card (C) = 4 410.

On a : Card (E) = Card (A) + Card (B) + Card (C) = 210 + 1 764 + 4 410 = 6 384.

♦ **Exercice 21 p. 223**

1. Chaque choix est une combinaison de 5 cartes choisies parmi 32 ; il y a donc : $C_{32}^5 = 201\ 376$ choix.

2. a) Il y a 8 Coeurs et 8 Piques dans un jeu de 32 cartes.
Le nombre de façons de choisir 3 Coeurs et 2 Piques est donc : $C_8^3 \times C_8^2$, c'est-à-dire, 1 568.

b) Il y a 4 couleurs et 5 cartes, donc il y aura 2 cartes d'une même couleur. Il y 4 choix pour la couleur de 2 cartes ; ce choix étant fait, il y a choix des 2 cartes de la même couleur et 8 choix possibles pour la carte de chacune des autres couleurs.
Le nombre de tirages contenant les quatre couleurs est donc : $4 \times (C_8^2 \times 8 \times 8 \times 8) = 57\ 344$.

c) Soit E l'ensemble des tirages quelconques et A l'ensemble des tirages ne contenant pas de Coeur.
On a : Card (E) = $C_{32}^5 = 201\ 376$ et Card (A) = $C_{24}^5 = 42\ 504$; donc, le nombre de tirages contenant au moins 1 Coeur est : $C_{32}^5 - C_{24}^5 = 158\ 872$.

♦ **Exercice 22 p. 223**

Puisqu'on tire les cartes simultanément, chaque tirage est une combinaison de 8 cartes.

a) On obtient exactement 3 As en choisissant d'abord 3 As parmi les 4, puis 5 cartes parmi les 28 autres.
Le nombre de tirages contenant exactement 3 As est donc : $C_4^3 \times C_{28}^5 = 393\ 120$.

b) Un tirage contient au moins 3 As s'il contient 3 ou 4 As :
- le nombre de tirages contenant exactement 3 As est : $C_4^3 \times C_{28}^5 = 393\ 120$;
- le nombre de tirages contenant exactement 4 As est : $C_4^4 \times C_{28}^4 = 20\ 475$.

Le nombre de tirages contenant au moins 3 As est donc : 393 120 + 20475 = 413 595.

c) Il y a deux cas possibles : le tirage contient l'As de Coeur ou ne le contient pas.
- Si le tirage contient l'As de Coeur, il y a de plus 2 As parmi les 3 restants, 1 Coeur parmi les 7 restants et 3 cartes parmi les 21 qui ne sont ni des As, ni des Coeurs : $C_3^2 \times C_7^4 \times C_{21}^1$ tirages
- Si le tirage ne contient pas l'As de Coeur, il y a les 3 autres As, 2 Coeurs parmi les 7 restants et 3 cartes parmi les 21 qui ne sont ni des As, ni des Coeurs : $C_3^3 \times C_7^2 \times C_{21}^3$ tirages.

Le nombre de tirages contenant exactement 3 As et deux Coeurs est : $C_3^2 \times C_7^1 \times C_{21}^1 + C_3^3 \times C_7^2 \times C_{21}^3 = 4\ 851$.

♦ **Exercice 23 p. 223**

1. Chaque choix est une combinaison de 3 chanteurs parmi les 15.
Le nombre de choix possibles est donc : $C_{15}^3 = 455$.

2. Le chanteur n°1 étant choisi, il reste à choisir 2 chanteurs parmi les 14 autres ; donc : $C^2{}_{14} = 91$ choix possibles.

3. Il faut choisir 3 chanteurs parmi les 7 numéros pairs ; donc : $C_7^3 = 35$ choix possibles.

Exercices d'approfondissement

♦ **Exercice 24 p. 223**

On a : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \dfrac{(n-1)!\,(p+n-p)}{p!\,(n-p)!} = \dfrac{n\,(n-1)!}{p!\,(n-p)!} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^p$.

♦ **Exercice 25 p. 223**

Soit E l'ensemble des élèves (Card (E) = 50) et A l'ensemble des notes de 0 à 20.

a) Chaque notation est une application de E vers $A_1 = [10\ ;\ 20]$, sous-ensemble de A, avec Card $(A_1) = 11$.
Le nombre de notations possibles est : $11^{50} \approx 1{,}17 \times 10^{52}$.

b) Si 20 élèves ont la moyenne, il y a C_{50}^{20} répartitions possibles de ces élèves, puis $11^{20} \times 10^{30}$ notations possibles pour chacune de ces répartitions.
Le nombre de notations possibles est : $C_{50}^{20} \times 11^{20} \times 10^{30}$.

c) Si 8 élèves ont une note comprise entre 0 et 5, le nombre de notations possibles est : $C_{50}^8 \times 6^8 \times 15^{42}$.

♦ **Exercice 26 p. 223**

a) Un mot de 5 lettres est une application de l'ensemble {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} dans l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet. Le nombre de mots distincts de 5 lettres est : $26^5 = 11\ 881\ 376$.

b) Si les lettres sont deux à deux distinctes, l'application précédente est injective.
Le nombre de mots de 5 lettres deux à deux distinctes est : $A_{26}^5 = 7\,893\,600$.

c) Il faut choisir 2 voyelles parmi 6, puis 3 consonnes parmi 20 et dénombrer les permutations de ces 5 lettres. Le nombre de mots distincts obtenus est : $C_6^2 \times C_{20}^3 \times 5! = 20\,522\,000$.

d) Le nombre de mots ne contenant aucune voyelle est 20^5, donc le nombre de mots distincts contenant au moins une voyelle est : $26^5 - 20^5 = 8\,681\,376$.

♦ Exercice 27 p. 223

1. Chaque façon de garer les 20 voitures dans les 20 places du parking est une permutation de ces 20 places. Le nombre de façons est : $20! \approx 2{,}433 \times 10^{18}$.

2. *a)* Les 10 voitures occupent les 10 places de la rangée A, soit 10! possibilités, ou de la rangée B, soit également 10! possibilités.

Le nombre total de façons de garer les 10 voitures est donc : $2 \times 10! = 7\,257\,600$.

b) Il y a choix possibles des 6 voitures garées dans la rangée A, puis A_{10}^6 façons de les garer et A_{10}^4 façons de garer les 4 autres dans la rangée B.

Le nombre total de façons de garer les 10 voitures est donc : $C_{10}^6 \times A_{10}^6 \times A_{10}^4 \times \approx 1{,}6 \times 10^{11}$.

c) Le nombre de façons de ne garer aucune voiture dans la rangée A est 10! ; donc le nombre total de façons de garer au moins une voiture dans la rangée A est : $A_{20}^{10} - 10! \approx 6{,}7 \times 10^{11}$.

♦ Exercice 28 p. 223

1. Chaque classement est un arrangement de 5 chanteurs parmi 20.
Le nombre de classements possibles est : $A_{20}^5 = 1\,860\,480$.

2. *a)* Chaque classement est un quintuplet (a, b, c, d, e) tel que :
- (a, b) est un arrangement de 2 femmes choisies parmi 8 ;
- (c, d, e) un arrangement de 3 chanteurs pris parmi les 12 chanteurs restants.

Le nombre de classements ainsi obtenus est : $A_8^2 \times A_{12}^3 = 73\,920$.

b) Il faut choisir 2 femmes parmi 8, puis 3 hommes parmi 12 et faire une permutation de ces 5 éléments. Le nombre de classements ainsi obtenus est : $C_8^2 \times C_{12}^3 \times 5! = 739\,200$.

c) Les classements ne comportant pas au moins 2 femmes sont les classements comportant 0 ou 1 femme :
- le nombre de classements comportant 0 femme est : A_{12}^5 ;
- le nombre de classements comportant 1 femme est : $C_8^1 \times C_{12}^4 \times 5!$.

Le nombre de classements comportant au moins 2 femmes est donc : $A_{20}^5 - (A_{12}^5 + C_8^1 \times C_{12}^4 \times 5!) = 1\,290\,240$.

3. Le nombre de classements ne contenant pas d'étranger est : A_{14}^5 ; donc lenombre de classements contenant au moins un étranger est : $A_{20}^5 - A_{14}^5 = 1\,620\,240$.

4. Il y a deux cas : le chanteur étranger est une femme ou un homme.
- Si le chanteur étranger est une femme, on a choisi : 1 femme parmi 2 étrangères, 1 femme parmi 6 non étrangères et 3 hommes parmi 8 non étrangers ; on fait ensuite une permutation de ces 5 élus.

On a : $2 \times 6 \times C_8^3 \times 5! = 80\,640$ choix possibles.
- Si le chanteur étranger est un homme, on a choisi : 1 homme parmi 4 étrangers, 2 hommes parmi 8 non étrangers et 2 femmes parmi 6 non étrangères ; on fait ensuite une permutation de ces 5 élus.

On a : $4 \times C_8^2 \times C_6^2 \times 5! = 201\,600$ choix possibles.
Le nombre de classements contenant exactement un étranger et deux femmes est donc : 282 240.

♦ Exercice 29 p. 223

1. Le numéro de la première boule tirée doit être compris entre 1 et 9 : il y a 9 choix possibles.

a) Tirages sans remise : il y a ensuite 9 choix pour la 2ème boule, 8 pour la 3ème et 7 pour la 4ème, soit : $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4\,536$ nombres distincts.

b) Tirages avec remise : il y a ensuite 10 choix pour la 2ème boule, pour la 3ème et pour la 4ème, soit : $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9\,000$.

2. *a)* Chaque tirage est une combinaison de 4 boules prises parmi 10 puisque les boules sont tirées simultanément. On peut donc obtenir : $C_{10}^4 = 210$ tirages différents.

b) Parmi les 210 tirages précédents, il y a C_9^3, c'est-à-dire 84 tirages contenant le chiffre 0 et C_9^4, c'est-à-dire 126 tirages ne contenant pas le chiffre 0.
Pour former un nombre de 4 chiffres ne commençant par 0 avec ces tirages, on a :
$84 \times (3 \times 3 \times 2) + 126 \times 4! = 1\,512 + 3\,024 = 4\,536$ possibilités.
C'est bien le résultat trouvé à la question 1.a.

♦ Exercice 30 p. 223

1. On désigne par C l'ensemble des 10 cadeaux et par E l'ensemble des 3 enfants. Toute distribution des 10 cadeaux est une application de C vers E : il y a 3^{10}, c'est-à-dire 59 049 distributions possibles.

2. Les répartitions possibles des 10 cadeaux sont : (4, 3, 3) ou (4, 4, 2).
• Pour la répartition (4, 3, 3), il y a 3! choix possibles de l'ordre de distribution des 3 lots de cadeaux, puis C_{10}^4 façons de choisir les 4 cadeaux du 1er lot et C_6^3 façons de choisir les 3 cadeaux du 2ème lot ; les 3 cadeaux restants constituent le 3ème lot.
Le nombre de distributions du type (4, 3, 3) est donc : $3! \times C_{10}^4 \times C_6^3 = 25\,200$.
• De même, le nombre de distributions du type (4, 4, 2) est : $3! \times C_{10}^4 \times C_6^4 = 18\,900$.
Le nombre total de distributions est donc : 44 100.

♦ Exercice 31 p. 224

1. Soit A = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}. Chaque tirage est un triplet (a, b, c) d'élément de A où a, b, c représentent les nombres apparus respectivement sur les 3 dés. Le nombre de résultats possibles est donc : $6^3 = 216$.

2. *a)* Il y a 3 choix possibles du dé où apparaît le chiffre 6, puis 5×5 résultats possibles pour les deux autres dés. Le nombre de résultats comportant un seul six est donc : $3 \times 5 \times 5 = 75$.
b) Le nombre de résultats ne comportant pas de 6 est 5^3. Donc, le nombre de résultats comportant au moins un 6 est $6^3 - 5^3 = 91$.
c) L'ensemble des résultats cherchés est la réunion des trois ensembles disjoints suivants :
• l'ensemble E des résultats comportant 2 as et 1 six ;
• l'ensemble F des résultats comportant 1 as et 2 six ;
• l'ensemble G des résultats comportant 1 as, 1 six et un autre chiffre différent de 1 et 6 ;
Le nombre de résultats comportant au moins un as et un six est :
Card (E) + Card (F) + Card (G) = $3 + 3 + (3 \times 2 \times 4) = 30$.

3. Cherchons toutes les décomposition de 13 en une somme de trois nombres entiers compris entre 1 et 6.
Cherchons toutes les décomposition de 13 en une somme de trois nombres compris entre 1 et 6 dont la somme est 13 :
On trouve 5 combinaisons de trois nombres compris entre 1 et 6 dont la somme est 13 : (6 ; 4 ; 3) : 3! = 6 tirages possibles ;
(6 ; 6 ; 1) : 3 tirages possibles ; (6 ; 5 ; 2) : 3! = 6 tirages possibles ; (5 ; 4 ; 4) : 3 tirages possibles.
(5 ; 5 ; 3) : 3 tirages possibles ; (5 ; 4 ; 4) : 3 tirages possibles.
Le nombre de résultats, dont la somme des nombres est 13, est : $(3 \times 3) + (2 \times 3!) = 21$.

♦ Exercice 32 p. 224

1. Chaque application de E vers F est définie par le triplet des images respectives des éléments de E.
Les applications surjectives de E vers F sont définies par les triplets :
(a', a', b') ; (a', b', a') ; (a', b', b') ; (b', b', a') ; (b', a', b') ; (b', a', a') ; il y a 6 surjections de E vers F.

2. *a)* f est surjectif, donc tous les éléments de F ont au moins un antécédent par f.
• Si tous les éléments de F avaient un seul antécédent, l'ensemble de ces antécédents aurait pour cardinal $(n-1)$.
Il y aurait donc un élément de E qui n'aurait pas d'image et f ne serait pas une application de E vers F.
Donc il existe au moins un élément a' de F ayant deux antécédents distincts a et b dans E.
• Soit E' = E – {a}. On a : Card (E') = Card (F) = $n - 1$;
donc, la restriction de f à E' est une bijection de E' vers F.
Par suite, a' est le seul élément de F ayant deux antécédents distincts dans E.
b) On procède en deux étapes :
• il y a $n - 1$ choix possibles pour l'élément a' de F ayant deux antécédents dans E ;
• a' étant choisi, il y a C_n^2 choix pour les antécédents de a' et $(n-2)!$ choix pour les antécédents des autres éléments de F.
Le nombre de surjections de E vers F est donc : $(n-1) \times C_n^2 \times (n-2)! = \dfrac{(n-1)\,n\,!}{2}$.

♦ **Exercice 33 p. 224**

1. Les pions noirs sont indiscernables, de même que les pions blancs.
Chaque configuration est une combinaison de 5 cases parmi 64 et une combinaison de 5 cases parmi les 59 restantes. Le nombre de configurations est donc : $C_{64}^5 \times C_{59}^5 = 38\,171\,250\,133\,632$.

2. *a)* Il y a 8 choix possibles de la ligne où sont les pions noirs, puis placements des pions sur cette ligne et C_{59}^5 placements des pions blancs sur les cases restantes.
Le nombre de configurations est donc : $8 \times C_8^5 \times C_{59}^5 = 2\,242\,860\,928$.

b) Il y a choix possibles des deux lignes où sont respectivement les pions noirs et les pions blancs, puis, sur chacune de ces lignes, placements des pions.
Le nombre de configurations est donc : $A_8^2 \times C_8^5 \times C_8^5 = 175\,616$.

c) Il y a 8 choix possibles de la ligne où sont les pions noirs, 8 choix de la colonne où sont les blancs, puis 3 cas :

- il n'y a pas de pion sur la case intersection de cette ligne et cette colonne : $C_7^5 \times C_7^5$ possibilités ;
- il y a un pion noir sur cette case : $C_7^4 \times C_7^5$ possibilités ;
- il y a un pion blanc sur cette case : $C_7^5 \times C_7^4$ possibilités.

Le nombre de configurations est donc : $64 \times (C_7^5 \times C_7^5 + 2 \times C_7^4 \times C_7^5) = 122\,304$.

♦ **Exercice 34 p. 224**

1. *a)* Il y a 2^{10} 10-uplet de l'ensemble {P ; F} ; le nombre de résultats distincts à l'issue de 10 lancers est 1 024.

b) • $n_P = n_F$ si on tire 5 fois P et 5 fois F ; chacun de ces résultat est une combinaison de 5 lancers « pile » parmi les 10 lancers.
Donc,le nombre de résultats tels que $n_P = n_F$ est : $C_{10}^5 = 252$.

• Il y a autant de résultats tels que $n_P > n_F$ que de résultats tels que $n_P < n_F$.
Donc, le nombre de résultats tels que $n_P > n_F$ est : $\frac{1}{2}(2^{10} - C_{10}^5) = 384$.

2. *a)* Le nombre de résultats distincts à l'issue de n lancers est 2^n.

b) On distingue deux cas : n pair et n impair.

• Si n est pair, par analogie avec la question 1.b, on a :

– le nombre de résultats tels que : $n_P = n_F$ est $C_n^{n/2}$;

– le nombre de résultats tels que : $n_P > n_F$ est $\frac{1}{2}(2^n - C_n^{n/2})$.

Donc, le nombre de résultats tels que : $n_P \geq n_F$ est : $\frac{1}{2}(2^n - C_n^{n/2})$.

• Si n est impair, il n'y a pas de résultats tels que $n_P = n_F$; donc, il y a autant de résultats tels que $n_P > n_F$ que de résultats tels que $n_P < n_F$, c'est-à-dire : $\frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}$.

♦ **Exercice 35 p. 224**

1. *a)* Chaque configuration est un quadruplet de l'ensemble {+ ; –} : il y a $2^4 = 16$ configurations.

b) Il y a 1 configuration du type ++++, 1 configuration du type – – – –
et $C_4^2 = 6$ configurations du type + + – –.

Le nombre de configurations gagnantes est donc 8 (sur un total de 16).

2. Si on répète 3 fois l'opération précédente, il y a : 16^3, c'est-à-dire 4 096 résultats possibles.

3. A chaque lancer de 4 cauris, il y a 8 configurations gagnantes. Donc, pour trois lancers, il y aura 8^3, c'est-à-dire 512 résultats gagnants (soit, 1 chance sur 8).

♦ **Exercice 36 p. 224**

1. On désigne par A, B, C les trois joueurs. Il y a 3 joueurs, donc 3 résultats possibles pour chaque coup.
Tout résultat d'une partie de n coups est un n-uplet de l'ensemble {A ; B ; C}.
Donc, le nombre de résultats distincts à l'issue d'une partie de n coups est : 3^n.

2\. a) Le nombre de résultats distincts à l'issue d'une partie de 3 coups est 3^3, c'est-à-dire 27.

b) Tout résultat de cette partie est un triplet de l'ensemble $E = \{A ; B ; C\}$.

- La partie est nulle pour tous les joueurs si chacun d'eux gagne une partie.

Toute permutation de E correspond à une telle partie : il y a 3!, c'est-à-dire 6 résultats nuls pour les 3 joueurs.

- La partie est nulle pour un joueur donné, par exemple A, s'il gagne 1 coup (+ 6 graines) et en perd 2 (- 6 graines).

Tout triplet du type (A, B, C) ou (A, B, B) ou (A, C, C) correspond à une telle partie : il y a 6 + 3 + 3, c'est-à-dire 12 résultats nuls pour un joueur donné.

- Il ne peut y avoir de partie gagnante pour deux joueurs;
- La partie est gagnante pour un joueur donné, par exemple A, s'il gagne au moins 2 coups.

Tout triplet du type (A, A, A) ou (A, A, B) ou (A, A, C) correspond à une telle partie : il y a 1 + 3 + 3, c'est-à-dire 7 résultats gagnants pour un joueur donné.

Exercice 37 p. 224

Pour aller de A à B, le pion doit se déplacer 7 fois vers l'Est (E) et 7 fois vers le Nord (N).

Chaque déplacement est un 14-uplet contenant 7 fois E et 7 fois N. Le nombre de déplacements sera le nombre de façons de placer les 7 éléments E dans le 14-uplet : C_{14}^7, c'est-à-dire 3 432.

Exercice 38 p. 224

a) Chaque sommet peut être joint à tous les autres, sauf lui-même est les deux sommets voisins : $n\,(n-3)$; il faut ensuite diviser ce nombre par 2, car chaque diagonale est comptée deux fois, donc : $\frac{n\,(n-3)}{2}$;

b) Chaque point d'intersection est une combinaison de deux diagonales ; le nombre maximum de points d'intersection est donc le nombre de combinaisons de 2 éléments pris parmi $\frac{n\,(n-3)}{2}$, c'est-à-dire : $\frac{n(n-3)(n^2-3n-2)}{8}$; on exclut de ce nombre le nombre de paires de diagonales qui se coupent en un sommet, soit : $n\,C_{n-3}^2 = \frac{n\,(n-3)(n-4)}{2}$.

On obtient : $\frac{n\,(n-3)(n^2-3n-2)}{8} - \frac{n\,(n-3)(n-4)}{2} = \frac{n\,(n-3)(n^2-7n+14)}{8}$.

Exercice 39 p. 224

1\. On a : $(a+b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1} b^1 + C_n^2\, a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^p\, a^{n-p} b^p + \dots + C_n^{n-1}\, a^1 b^{n-1} + C_n^n\, b^n$.

En remplaçant a et b par 1 dans la relation précédente, on obtient : $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n$.

2\. On peut construire des triangles, des quadrilatères, ..., des polygones à n côtés.

- Construire un triangle, c'est choisir 3 points parmi n : C_n^3 possibilités ;
- Construire un quadrilatère, c'est choisir 4 points parmi n : C_n^4 possibilités ;
- Construire un polygone à n côtés, c'est choisir n points parmi n : C_n^n possibilités.

Le nombre total de polygones ainsi construits est :

$$C_n^3 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n = 2^n - (C_n^0 + C_n^1 + C_n^2) = 2^n - \frac{n^2+n+2}{2}.$$

12. Limites et continuité

(pages 225 à 242 du livre de l'élève)

Objectifs

- Dégager, de façon intuitive la notion de limite, en plus ou en moins l'infini, en un point et à gauche ou à droite d'un point.
- Calculer algébriquement des limites : limite en l'infini de fonctions polynômes et rationnelles, levée d'indéterminations, ...
- Utiliser des techniques usuelles (théorèmes des gendarmes, ...) pour déterminer des limites.
- Introduire la notion de continuité en un point.

Commentaires

- Ce chapitre est l'occasion pour l'élève de découvrir l'analyse mathématique. La notion de limite est introduite de façon intuitive, à l'aide d'exemples. Les définitions des limites et leur usage pour démontrer les théorèmes habituels du chapitre sont hors programme.
- Plusieurs définitions de limite finie en un point existent, elles ne sont pas équivalentes. Celle que nous avons retenue pour les classes scientifiques est compatible avec celle qui est généralement en usage dans l'enseignement supérieur. Nous la donnons à titre indicatif.

Soit f une fonction numérique à variable réelle, x_0 un point adhérent à son ensemble de définition D_f et l un nombre réel.

On dit que f admet pour limite l en x_0 lorsque : $\forall \varepsilon, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f \cap]x_0 - \alpha \,;\, x_0 + \alpha[, \ |f(x) - l| < \varepsilon$.

Il est bien sûr hors de question de demander à l'élève de connaître une telle définition.

- Les théorèmes admis de majoration, minoration, comparaison et ceux relatifs aux opérations sur les limites permettront alors de :

– faire des calculs de limites ;

– résoudre des problèmes où interviennent ces notions.

- En pratique, la notion de limite sera ultérieurement utilisée pour :
  – introduire la notion de dérivée ;
  – compléter le tableau de variation dans les études de fonctions.

Notations

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Approche intuitive de la notion de limite • Limite d'une fonction en l'infini : – limite infinie ; – limite finie ; – limite en l'infini des fonctions : $x \mapsto k\,;\, x \mapsto x^n\,;\, x \mapsto \frac{1}{x^n}\,;\, x \mapsto \sqrt{x}$. • Limite d'une fonction en x_0 : – limite infinie ; – limite finie ; – limite à gauche, limite à droite ; – limite en 0 des fonctions : $x \mapsto k\,;\, x \mapsto x^n\,;\, x \mapsto \frac{1}{x^n}\,;\, x \mapsto \sqrt{x}$. **Calculs de limites** • Propriétés de comparaison. • Limites et opérations sur les fonctions.	• Lire ou conjecturer une limite en observant une courbe. • Conjecturer une limite en utilisant une calculatrice. • Calculer les limites en x_0, en l'infini d'une fonction :

savoirs	savoir-faire
• Exemples de recherche de limite : - limite en l'infini d'un polynôme ; - limite en l'infini d'une fraction rationnelle. Continuité • Définition et propriétés. • Prolongement d'une fonction par continuité.	– en utilisant les propriétés de comparaison ; – en utilisant les opérations sur les fonctions. • Lever une indétermination dans des cas simples. • Démontrer qu'une fonction est continue en un point. • Déterminer le prolongement par continuité d'une fonction en un point.

Exercices du cours

Exercice 1.a p. 230

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 1.b p. 230

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}} f(x) = -\infty$.

Exercice 1.c p. 230

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Exercice 1.d p. 230

a) f n'a pas de limite en x_0 mais f possède une limite à gauche et à droite en x_0.

b) c) f possède une limite en x_0. d) e) f) f n'a pas de limite en x_0.

g) f possède une limite à gauche en x_0. h) f possède une limite à droite en x_0.

Exercice 1.e p. 230

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 2.a p. 238

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^5) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^5) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-x+1}{x^2+x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-x+1}{x^2+x-1} = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = 0$.

Exercice 2.b p. 238

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}} \dfrac{2-x}{x-3} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\>}} \dfrac{2-x}{x-3} = -\infty$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}} \dfrac{2-x}{9-x^2} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\>}} \dfrac{2-x}{9-x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x-2}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{3}$.

c) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{4}$

Exercice 2.c p. 238

1. $\forall x \in]1\,;+\infty[$, $\dfrac{x-\cos x}{\cos x+2} \geq \dfrac{x-1}{3}$. Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{3} = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\cos x}{\cos x+2} = +\infty$.

2. $\forall x \in]-\infty\,;-1[$, $\dfrac{x-\cos x}{\cos x+2} \leq x+1$. Or : $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-\cos x}{\cos x+2} = -\infty$.

♦ **Exercice 2.d p. 238**

$\forall x \in \mathbb{R}, -\dfrac{x^2}{1+x^4} \leq f(x) \leq \dfrac{x^2}{1+x^4}$. Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

♦ **Exercice 3.a p. 240**

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x = 1 = f(1)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} x^2 = 1 = f(1)$; donc f est continue en 1.

♦ **Exercice 3.b p. 240**

$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \dfrac{1}{x} \end{array}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et non prolongeable par continuité en 0.

Exercices d'entraînement – Apprentissage

APPROCHE INTUITIVE DE LA NOTION DE LIMITE

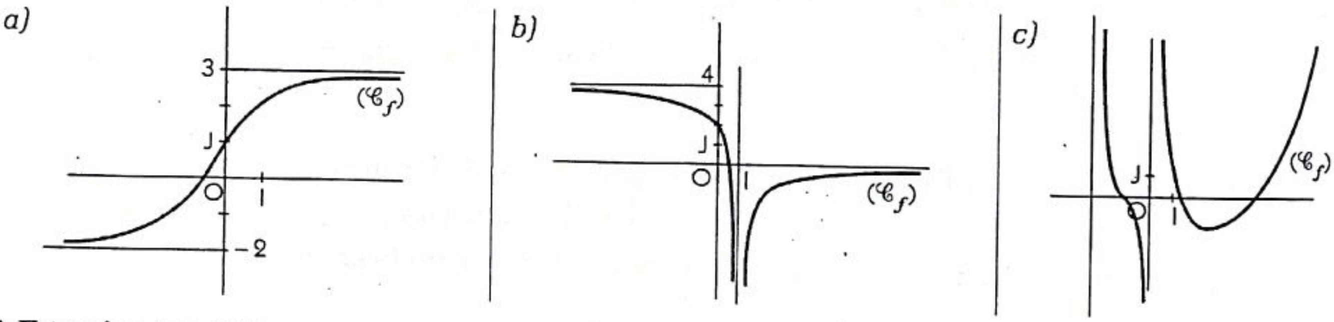
♦ **Exercice 1 p. 241**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

♦ **Exercice 2 p. 241**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = +\infty$.

♦ **Exercice 3 p. 241**



♦ **Exercice 4 p. 241**

1. $\forall x \in]4 ; +\infty[$, $f(x) - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)$; donc : $f(x) > \sqrt{x}$.

2. *a)* Si $x > 10^8$, alors $f(x) > \sqrt{x} > 10^4$; $A = 10^8$.

b) Soit $B > 0$. Si $x > B^2$, alors $f(x) > \sqrt{x} > B$; donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists A = B^2 / x > A \Rightarrow f(x) > B$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

♦ **Exercice 5 p. 241**

1. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $|f(x) - 1| = \left|\dfrac{1}{x+1}\right| = \dfrac{1}{x+1}$; donc : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $|f(x) - 1| < \dfrac{1}{x}$.

a) Si $x > 10^4$, alors $|f(x) - 1| < 10^{-4}$; $A = 10^4$.

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. $\exists A = \dfrac{1}{\varepsilon} / x > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

♦ **Exercice 6 p. 241**

1. $\forall x \in]1 ; +\infty[$, $f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x(x-1)}{2(x+1)}$; donc : $f(x) > \dfrac{x}{2}$.

2. *a)* Si $x > 2 \times 10^6$, alors $|f(x)| > 10^6$.

b) Soit $B \in \mathbb{R}^{+*}$. $x > 2B$, alors $f(x) > B$. On peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

♦ **Exercice 7 p. 241**

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x^2 + \cos^2 x \leq x^2 + 1$. Donc : $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $x \leq f(x) \leq \sqrt{x^2+1}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

♦ **Exercice 8 p. 241**

$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{1+\sin^2 x} \leq \sqrt{2}.$

$\forall x \in [0\,;+\infty[, x \leq f(x) \leq x\sqrt{2}$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. $\forall x \in]-\infty\,;0], x\sqrt{2} \leq f(x) \leq x$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

♦ **Exercice 9 p. 241**

$\forall x \in]1\,;+\infty[, f(x) - \sqrt{x} + 1 = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)$; donc : $f(x) > \sqrt{x} + 1$. Par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

♦ **Exercice 10 p. 241**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 4x^3 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^6) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^6) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x}{2x} = 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x}{2x} = 2$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{5x}{x}\right) = -5$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{5x}{x}\right) = -5$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{-2x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{-2x} = -\infty$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-3x^2} = -\frac{1}{3}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-3x^2} = -\frac{1}{3}$.

♦ **Exercice 11 p. 241**

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x-2)^2 = 0$ et $(x-2)^2 > 0$; donc : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} (x-2) = -4$

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{5}{2}$

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.

♦ **Exercice 12 p. 241**

a) $f(x) = \sqrt{x+2}$; donc : $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 4$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$; donc : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{4}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$;
donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

d) $f(x) = -\frac{x^2+4x+16}{x\sqrt{x}+8}$; donc : $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -3$.

♦ **Exercice 13 p. 241**

a) $f(x) = \frac{|x|\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{x(3-\frac{1}{x})}$; donc : si $x > 0$, $f(x) = \frac{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{1}{x}}$ et si $x < 0$, $f(x) = -\frac{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{1}{x}}$.

Par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Si $x < 0$, $f(x) = \frac{7x+3}{x+2-\sqrt{x^2-3x-1}} = \frac{7+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{7}{2}$.

c) Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{3 + \frac{1}{x^2}} + 5}{3 - \frac{1}{x}}$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{5 + \sqrt{3}}{3}$.

Si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{5 - \sqrt{3 + \frac{1}{x^2}}}{3 - \frac{1}{x}}$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{5 - \sqrt{3}}{3}$.

d) Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}}$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Si $x < 0$, $f(x) = -\dfrac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}}$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x^2}}}$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

f) Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{2 - \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

♦ Exercice 14 p. 242

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} + \tan x\right) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{1}{\cos x} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} \times \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{2x} \times \dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} \times \dfrac{5x}{\sin 5x} \times \dfrac{3x}{5x} = \dfrac{3}{5}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\tan 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{2x} \times \dfrac{5x}{\tan 5x} \times \dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} 2\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right) \times \left(\dfrac{1}{\cos x}\right) = 2$.

♦ Exercice 15 p. 242

a) $f(x) = \dfrac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \times \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On peut aussi utiliser : $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\cos x - 1}{x}$.

b) $f(x) = -\dfrac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \times \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On peut aussi utiliser : $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \dfrac{\cos x - 1}{x} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \dfrac{\sin x}{x}$.

♦ Exercice 16 p. 242

1. $\forall\, x \in]0\,;1[$; $\sqrt{x} \in]0\,;1[$; donc : $E(\sqrt{x}) = 0$ et $f(x) = 0$; par suite, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
2. Si $x \in]0\,;1[$, alors $f(x) = 0$; donc : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Si $x \in [1 ; +\infty[$, alors $\sqrt{x} \in [1 ; +\infty[$ et $1 \le E(\sqrt{x}) \le \sqrt{x}$; donc : $0 \le \frac{1}{x} \le \frac{E(\sqrt{x})}{x} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Donc : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $0 \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}}$. Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 17 p. 242

1. $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $x \le E(x) \le x + 1 \quad \Rightarrow \quad 2x \le x + E(x) \le 2x + 1$; donc : $2 \le f(x) \le \frac{2x+1}{x}$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Exercice 18 p. 242

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -5$ et $f(2) = -5$; f est continue en 2

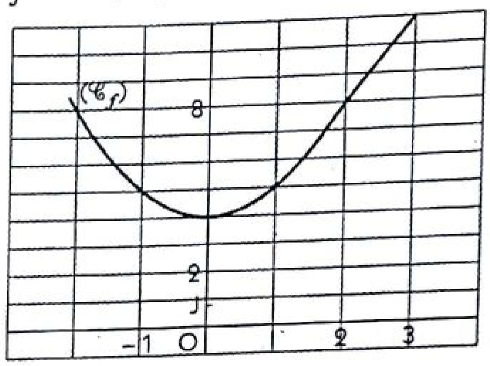
b) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 0$ et $f(4) = 0$; f est continue en 0

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\frac{3}{2}$ et $f(1) = -\frac{3}{2}$; f est continue en 1

d) $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$; f n'est pas continue en -2.

Exercice 19 p. 242

$\begin{cases} f(x) = x^2 + 4, & \text{si } x \le 2 \\ f(x) = 3x + 2, & \text{si } x > 2. \end{cases}$



2. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 8$ et $f(2) = 8$;
donc : f est continue en 2.

Exercice 20 p. 242

$f(0) = \frac{1}{3}$; $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = a$. f est continue en 0 et si et seulement si $a = \frac{1}{3}$.

Exercice 21 p. 242

a) $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}, 2\}$. $\forall x \in D_f$, $f(x) = \frac{x-1}{3x-1}$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{5}$.

f admet un prolongement par continuité g en 2 défini par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 7x + 2}, \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}, 2\} \\ g(2) = \frac{1}{5} \end{cases}$

b) $D_f = \mathbb{R}^*$; $\begin{cases} f(x) = -1, \text{ si } x \le 0 \\ f(x) = 1, \text{ si } x > 0 \end{cases}$; donc : $\begin{cases} \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = 1 \end{cases}$.

f n'admet pas de prolongement par continuité en 0.

c) $D_f =]0 ; +\infty[$; $\forall x \in D_f$, $f(x) = \sqrt{x} - 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$.

f admet un prolongement par continuité g en 0 défini par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \text{ si } x \in]0 ; +\infty[\\ g(0) = -1 \end{cases}$

d) $D_f = \cup]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[- \{0\}$, avec $k \in \mathbb{Z}$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

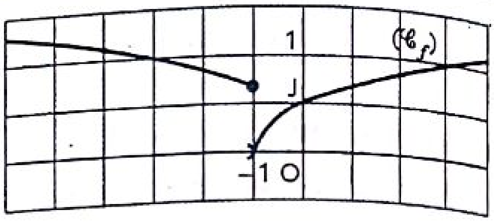
f admet un prolongement par continuité g en 0 défini par : $\begin{cases} g(x) = \frac{\tan x}{x}, \text{ si } x \in D_f \\ g(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 22 p. 242

$D_f = [-1 ; +\infty[- \{0\}$ et $D_g = [-1 ; +\infty[$.

$\forall x \in D_f$, $f(x) = g(x)$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2} = g(0)$. Donc g est le prolongement par continuité de f en 0.

Exercices d'approfondissement



♦ **Exercice 23 p. 242**

$f(-1) = \sqrt{2}$; $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1} f(x) = \sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(x) = 0$.

f n'est pas continue en -1, car f n'a pas de limite en -1.

♦ **Exercice 24 p. 242**

a) $\begin{cases} f(x) = -\sin x, \text{ si } x \in [-1\,;0[\\ f(x) = 0, \text{ si } x \in [0\,;1[\end{cases}$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-\sin x) = 0$ et $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = 0$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

b) $\forall x \in [-1\,;1[$, $f(x) = 0$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

c) $\begin{cases} f(x) = -1, \text{ si } x \in [-1\,;0[\\ f(x) = 0, \text{ si } x \in [0\,;1[\end{cases}$; donc : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = 0$.

Par suite : f n'a pas de limite en 0.

d) $\begin{cases} f(x) = -1, \text{ si } x \in [-\frac{\pi}{6}\,;0[\\ f(x) = 0, \text{ si } x \in [0\,;\frac{\pi}{6}[\end{cases}$; donc : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = 0$.

Par suite : f n'a pas de limite en 0.

e) $\forall x \in]-1; 0[\cup]0\,;1[$, $\frac{1}{x} - 1 < E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$.

$\forall x \in]-1; 0[$, $1 \leq f(x) < 1 - x$; donc : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = 1$.

$\forall x \in]0\,;1[$, $1 - x < f(x) \leq 1$; donc : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = 1$.

Par suite : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

f) Si $x \in]-1; 0[$, $f(x) = 2$; donc : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = 2$.

Si $x \in]0\,;1[$, $f(x) = E(x) - 1 = -1$; donc : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = -1$.

Donc, f n'a pas de limite en 0.

♦ **Exercice 25 p. 242**

Soit f une fonction continue en x_0. Démontrons que : $\lim\limits_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = 0$.

Posons : $x = x_0 - h$; dire que h tend vers 0 revient à dire que x tend vers x_0.

Or : f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 - h) = f(x_0)$;

de même on a : $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$

Donc : $\lim\limits_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = f(x_0) - f(x_0) = 0$.

2. La réciproque est fausse ; en effet, soit $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

On a : $\lim\limits_{h \to 0} [f(1 + h) - f(1 - h)] = \lim\limits_{h \to 0} (\sqrt{1 + h} - \sqrt{1 - h}) = 0$, mais f n'est pas continue en 1.

♦ **Exercice 26 p. 242**

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x} - 1 \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$. Donc : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = -\infty$.

♦ **Exercice 27 p. 242**

$\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \dfrac{1}{\sin^2 x + 2} \leq \frac{1}{2}$.

Si $x > 1$, alors $\frac{x-1}{3} \leq f(x) \leq \frac{x-1}{2}$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Si $x < 1$, alors $\frac{x-1}{2} \leq f(x) \leq \frac{x-1}{3}$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

♦ Exercice 28 p. 242

$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $-1 \leq -\sin(\frac{1}{x}) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\sin(\frac{1}{x})} \leq 1$; donc : $\frac{x}{3} \leq f(x) \leq x$.

$\forall x \in]-\infty\,;0[$, $-1 \leq -\sin(\frac{1}{x}) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\sin(\frac{1}{x})} \leq 1$; donc : $x \leq f(x) \leq \frac{x}{3}$.

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

♦ Exercice 29 p. 242

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{\frac{\cos x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}}$; donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$.

Par suite : f n'a pas de limite en 0.

2. $\forall x \in]1\,;+\infty[$, $\frac{x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{x-1}$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

3. $\forall x \in]-\infty\,;1[$, $\frac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{x-1}{x+1}$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

13. Dérivation

(pages 243 à 264 du livre de l'élève)

Objectifs

Présenter un nouvel outil et l'utiliser pour :
– préciser l'allure de la courbe représentative d'une fonction « au voisinage » d'un de ses points (tangente) ;
– déterminer le sens de variation d'une fonction numérique sur un intervalle ;
– donner une approximation affine locale d'une fonction numérique.

Commentaires

• On introduit le nombre dérivé comme limite du rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0, l'interprétation graphique conduisant à la notion de tangente.

• La notion de droite tangente à une courbe pourra être rapprochée de celle de tangente à un cercle (un exercice sur ce thème est proposé en fin de chapitre).

• Il serait fastidieux de vouloir démontrer tous les résultats concernant le calculs des dérivées. Le professeur décidera, en fonction du niveau des élèves et du temps disponible, de ceux qui doivent être démontrés en classe, admis ou posés en T.D.

• Par contre, la démonstration de la formule donnant la dérivée de nu^n, qui introduit le raisonnement par récurrence, doit être présentée avec le plus grand soin. En effet, ce type de raisonnement sera réutilisé plus loin, en particulier au chapitre 15 (suites numériques).

• Tous les résultats repris dans les tableaux récapitulatifs (§ 2.3.) sont évidemment à savoir « par cœur ». Il est important d'habituer les élèves, dès les premiers exercices de calcul de dérivées, à préciser l'ensemble de dérivabilité.

• Le théorème sur le signe de f' et le sens de variation est une équivalence : on n'oubliera pas de le faire fonctionner dans les deux sens. On n'a pas jugé utile de donner le théorème : si $f' > 0$, alors f est strictement croissante ; en effet, sa réciproque, fausse, devient parfois un théorème-élève.

• Les études de problèmes d'optimisation sont un excellent exercice : l'élève y apprend à modéliser une situation concrète avant de mobiliser l'outil dérivation pour la recherche d'un extremum.

• Le problème de la majoration de l'erreur commise lors d'une approximation par une fonction affine n'a pas été abordé. Par contre, il est souhaitable que l'on vérifie systématiquement la validité de cette approximation à l'aide de la calculatrice.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Dérivation en x_0 • Nombre dérivé en x_0. • Équation de la tangente à la courbe représentative en un point.	• Calculer le nombre dérivé en x_0.
• Une fonction dérivable en x_0 est continue en x_0. • Fonction dérivable à gauche ou à droite en x_0. Interprétation graphique ; extension à la notion de demi-tangentes ou tangentes verticales. • Une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux.	• Calculer le nombre dérivé à droite ou à gauche en x_0. • Déterminer une (des) équation(s) de la (des demi-) tangente(s) à la courbe représentative d'une fonction en un point et la (les) construire. • Reconnaître et prouver l'existence d'une demi-tangente verticale en un point.

savoirs	savoir-faire
Calculs de dérivées • Fonction dérivée. • Dérivées des fonctions élémentaires. • Théorèmes relatifs aux dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient de deux fonctions dérivables. • Théorèmes relatifs à l'inverse, la racine carrée, la puissance n-ième et la composée avec une fonction affine d'une fonction dérivable.	• Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer les dérivées de fonctions qui sont la somme, le produit, le quotient, la racine carrée ou la puissance n-ième de polynômes, de fractions rationnelles ou de fonctions trigonométriques. • Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer les dérivées de composées des fonctions précédentes avec une fonction affine.
Applications de la dérivation • Théorèmes liant le sens de variation d'une fonction au signe de sa dérivée. • Application à la recherche d'extremums relatifs. • Approximation d'une fonction par une fonction affine.	• Étudier le sens de variation de fonctions numériques et dresser leur tableau de variation. • Rechercher et donner la nature des extremums relatifs d'une fonction numérique. • Déterminer l'approximation affine locale d'une fonction numérique en x_0. • Utiliser une approximation affine pour déterminer une valeur approchée d'un nombre réel.

Exercices du cours

Exercice 1.a p. 249

a) $f'(1) = 1$; b) $f'(2) = -2$; c) $f'(3) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 1.b p. 249

a) $y = x - 1$; b) $y = -2x + 7$; c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3} - 1$.

Exercice 1.c p. 249

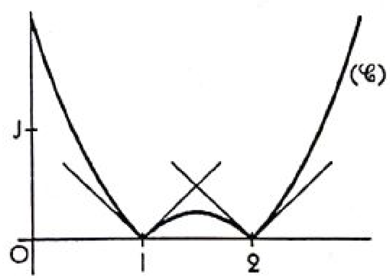
1. $\forall x \in \mathbb{R}^*_-$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$; $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$. $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.

La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes de coefficients directeurs respectifs 2 et 0.

2. Les nombres dérivés de f à gauche et à droite en 0 étant distincts, f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 1.d p. 249

1. La courbe $(\mathscr{C})$ se déduit de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 2$, qui se déduit elle-même de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ par la translation de vecteur $\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OI} - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{OJ}$.



2. • On a : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{|x-1|}{x-1}|x-2|$.

Donc : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1$ et $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1$.

Les nombres dérivés de f à gauche et à droite en 1 étant distincts, f n'est pas dérivable en 1.

• On a : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{|x-2|}{x-2}|x-1|$.

Donc : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = -1$ et $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1$.

Les nombres dérivés de f à gauche et à droite en 2 étant distincts, f n'est pas dérivable en 2.

3. Les demi-tangentes à $(\mathscr{C})$ à gauche aux points d'abscisses 1 et 2 ont pour coefficient directeur -1.
Les demi-tangentes à $(\mathscr{C})$ à droite aux points d'abscisses 1 et 2 ont pour coefficient directeur 1.

♦ **Exercice 1.e p. 249**

On a : $D_f =]-\infty\,;1] \cup [2\,;+\infty[$.

• On a : $\forall x \in]-\infty\,;1[$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$; donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$.

La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente parallèle à la droite (OJ).

• On a : $\forall x \in]2\,;+\infty[$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$; donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$.

La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 2 une demi-tangente parallèle à la droite (OJ).

♦ **Exercice 2.a p. 256**

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2\sin x \cos x$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0$.

♦ **Exercice 2.b p. 256**

a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = 1 + \cos x$.

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = \cos x - x\sin x$.

c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

d) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par :
$f'(x) = 2\tan x + 2\tan^3 x$.

♦ **Exercice 2.c p. 256**

a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = 12x^2 - 10x$.

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = 7x^6 + 15x^4 - 9x^2 - 9$.

c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 3}{(x^2-1)^2}$.

d) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = \sin^3 x + 3x\sin^2 x \cos x$.

♦ **Exercice 2.d p. 256**

a) L'ensemble de définition de la fonction f est $]-\infty\,;2]$;
f est dérivable sur $]-\infty\,;2[$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = 3x^2\sqrt{2-x} - \dfrac{x^3+2}{2\sqrt{2-x}}$.

b) L'ensemble de définition de la fonction f est $[0\,;3]$;
la fonction f est dérivable sur $]0\,;3[$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = \dfrac{3-2x}{2\sqrt{x(3-x)}}$.

c) L'ensemble de définition de la fonction f est D_f tel que : $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$;
la fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = 2[1 + \tan^2(2x + \frac{\pi}{3})]$.

d) $D_f = \mathbb{R}$; la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = 2\cos 2x$.

♦ **Exercice 3.a p. 261**

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = -2x + 3$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-12	$\nearrow$	

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 2x\,(4x^2 - 1)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	

d) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2 + 4$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	

♦ Exercice 3.b p. 261

a) f est dérivable sur $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$.

$f'(x) = -\dfrac{7}{(x-2)^2}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$		↘	‖	↘	

b) f est dérivable sur $]-\infty\,;-3[$ et $]-3\,;+\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{2x^2+12x+17}{(x+3)^2}$.

x	$-\infty$		$-3-\frac{\sqrt{2}}{2}$		-3		$-3+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$-5-2\sqrt{2}$	↘	‖	↘	$-5+2\sqrt{2}$	↗	

c) f est dérivable sur $]-\infty\,;-4[$ et $]0\,;+\infty[$.

$f'(x) = -\dfrac{x+2}{(x^2+4x)\sqrt{x^2+4x}}$.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$				$-$	
$f(x)$		↗				↘	

d) f est dérivable sur $]-\infty\,;-1[$ et $]1\,;+\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$		↘				↗	

♦ Exercice 3.c p. 261

1. *a)* On a : $\mathcal{A}(x) = x(\frac{p}{2} - x)$.

b) La fonction $\mathcal{A}$ est définie et dérivable sur $]0\,;\frac{p}{2}[$.

On a : $\mathcal{A}'(x) = -2x + \frac{p}{2}$.

2. La fonction $\mathcal{A}$ admet un maximum pour $x = \frac{p}{2}$, c'est-à-dire lorsque le rectangle est un carré.

x	0		$\frac{p}{4}$		$\frac{p}{2}$
$\mathcal{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}(x)$	0	↗	$\frac{p^2}{16}$	↘	0

♦ Exercice 3.d p. 261

La fonction f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction f' définie par : $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

La meilleure approximation affine de la fonction f, pour x « proche de 0 », est la fonction $x \mapsto f(0) + f'(0)x$, c'est-à-dire la fonction $x \mapsto 1 - x$.

On a : $\dfrac{1}{0{,}992} = \dfrac{1}{1+(-0{,}008)}$. Donc : $\dfrac{1}{0{,}992} \approx 1 - (-0{,}008) \approx 1{,}008$.

Une calculatrice donne : $\dfrac{1}{0{,}992} \approx 1{,}008\,064\,516\ldots$

♦ Exercice 3.e p. 261

a) La meilleure approximation affine de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, pour x « proche de 25 », est la fonction $x \mapsto f(25) + f'(25)(x-25)$, c'est-à-dire la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{10}x + 2{,}5$.

Donc : $\sqrt{25{,}0002} \approx \dfrac{1}{10}(25{,}0002) + 2{,}5 \approx 5{,}000\,02$. Une calculatrice donne : $\sqrt{25{,}0002} \approx 5{,}000\,020\,000\ldots$

b) La meilleure approximation affine de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^8$, pour x « proche de 0 », est la fonction $x \mapsto f(0) + f'(0)x$, c'est-à-dire la fonction : $x \mapsto 8x + 1$.

Donc : $(0{,}999\,97)^8 \approx 8 \times (-0{,}000\,03) + 1 \approx 0{,}999\,76$. Une calculatrice donne : $(0{,}99997)^2 \approx 0{,}999\,760\,025\ldots$

Exercices d'entraînement

Dérivation en x_0

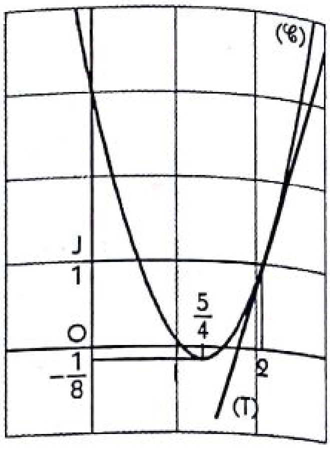
♦ Exercice 1 p. 262

a) $f'(2) = -8$ *b)* $f'(-\frac{1}{2}) = \frac{16}{25}$ *c)* $f'(1) = -3$ *d)* $f'(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

♦ **Exercice 2 p. 262**

a) $y = -7x - 5$ *b)* $y = -\frac{25}{3}x + \frac{53}{9}$ *c)* $y = x - 1$ *d)* $y = x - 1$.

♦ **Exercice 3 p. 262**



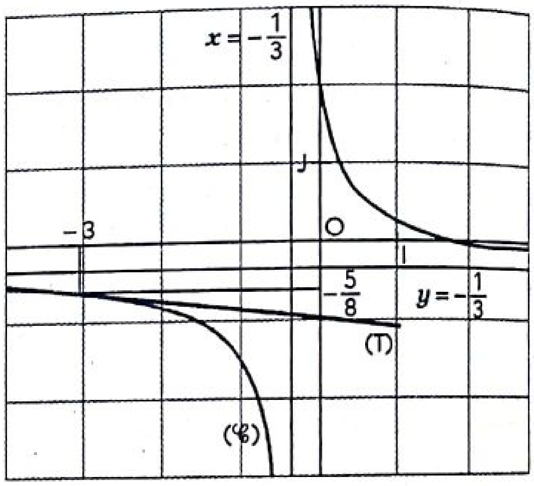
1. On a : $\forall h \in \mathbb{R}$, $f(2 + h) = (1 + h)(1 + 2h) = 1 + 3h + 2h^2$.
2. On a : $\forall h \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 3 + 2h$; donc : $\lim_{x \to 2} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 3$.

On en déduit que f est dérivable en 2 et $f'(2) = 3$.

3. Une équation de la tangente (T) est : $y = 3x - 5$.
4. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{1}{8}$; donc la courbe (𝒞) se déduit de la courbe (G) représentative de la fonction $x \mapsto 2x^2$ par la translation de vecteur $\frac{5}{4}\overrightarrow{OJ} - \frac{1}{8}\overrightarrow{OJ}$.

♦ **Exercice 4 p. 262**

1. On a : $\forall h \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{8}{3}\}$, $-3 + h \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$ et $f(-3 + h) - f(-3) = \frac{5 - h}{3h - 8} + \frac{5}{8} = \frac{7h}{24h - 64}$.
2. On a : $\forall h \in \mathbb{R}^* \setminus \{\frac{8}{3}\}$, $\frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \frac{7}{24h - 64}$;



donc : $\lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = -\frac{7}{64}$.

On en déduit que f est dérivable en -3 et $f'(-3) = -\frac{7}{64}$.

3. Une équation de T est : $y = -\frac{7}{64}x - \frac{61}{64}$.
4. On a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$, $f(x) = -\frac{1}{3} + \frac{\frac{7}{9}}{x + \frac{1}{3}}$; donc la courbe (𝒞) se déduit de la courbe (G) représentative de la fonction $x \mapsto \frac{\frac{7}{9}}{x}$ par la translation de vecteur $-\frac{1}{3}\overrightarrow{OI} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OJ}$.

♦ **Exercice 5 p. 262**

1. On a : $f(1) = 0$; donc : $\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(x)}{x - 1} = \frac{\pi f(x)}{\pi(x - 1)} = \pi(x + \frac{1}{x}) \frac{\sin(\pi x)}{\pi(x - 1)}$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi x) = -\sin(\pi x - \pi)$; donc : $\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\pi(x + \frac{1}{x}) \frac{\sin \pi(x-1)}{\pi(x - 1)}$.

2. On pose : $u = \pi(x - 1)$; on a : $\lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi(x-1)}{\pi(x-1)} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$.

On en déduit : $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2\pi$; donc, f est dérivable en 1 et $f'(1) = -2\pi$.

♦ **Exercice 6 p. 262**

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$.
2. On a : $f'(2) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

La tangente à (𝒞) au point d'abscisse 2 admet pour équation : $y = \frac{3\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2}$.

3. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sqrt{x}$; donc, le nombre dérivé de f à droite en 0 est : $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

La demi-tangente à (𝒞) au point d'abscisse 0 admet pour équation : $y = 0$.

♦ **Exercice 7 p. 262**

1. *a)* Au point d'abscisse $\frac{1}{2}$, la courbe admet deux demi-tangentes de coefficients directeurs distincts ; donc, f n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$.

b) La courbe n'admet pas de demi-tangente à gauche au point d'abscisse 1 ; donc, f n'est pas dérivable à gauche en 1.

c) La courbe admet une demi-tangente à gauche au point d'abscisse 2, mais cette demi-tangente est parallèle à l'axe des ordonnées ; donc, f n'est pas dérivable à gauche en 2.

2. a) On a : $f'(-1) = f'(0) = 0$. Le nombre dérivé de f à droite en 1 est nul.

b) On a : $f'(-\frac{3}{2}) < 0$.

Exercice 8 p. 262

1. a) La fonction f est continue en 3 (propriété 1 p. 239).

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}, \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \dfrac{x|x-3|}{x-3}$.

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = 3$; f est dérivable à droite en 3 et son nombre dérivé est 3.

De plus : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = -3$; f est dérivable à gauche en 3 et son nombre dérivé est -3.

Les nombres dérivés de f à droite et à gauche en 3 sont distincts ; donc, f n'est pas dérivable en 3.

2. a) On déduit de la propriété 1 p.187 que f est continue en 0.

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = |x-3|$. Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 3$.

Les nombres dérivés de f à droite et à gauche en 0 sont égaux ; donc, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 3$.

Exercice 9 p. 262

1. On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x^2-1) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{x-1}{x+1} = 0 = f(1)$.

Donc : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$; on en déduit que f est continue en 1.

2. Le nombre dérivé de f à droite en 1 est $\frac{1}{2}$. Le nombre dérivé de f à gauche en 1 est 2.

Les nombres dérivés de f à droite et à gauche en 1 sont distincts, donc f n'est pas dérivable en 1.

3. La demi-tangente à droite à la courbe au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

La demi-tangente à gauche à la courbe au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = 2x - 2$.

Exercice 10 p. 262

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -2$; le nombre dérivé de f à gauche en 0 est donc -2.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} = \left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$; f n'est pas dérivable à droite en 0.

La demi-tangente à gauche à la courbe au point d'abscisse 0 d'équation : $y = -2x + 3$;

La demi-tangente à droite à la courbe au point d'abscisse 0 a pour équation : $x = 0$.

CALCULS DE DÉRIVÉES

Exercice 11 p. 263

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est définie par : $f'(x) = -2x + 3$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est définie par : $f'(x) = x^2 + 4x + 3$

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est définie par : $f'(x) = 12x(2x^2+5)^2$

d) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est définie par : $f'(x) = (3x-1)(24x^2 - 4x + 6)$.

Exercice 12 p. 263

a) f est dérivable sur $]-\infty ; -1[$ et $]-1 ; +\infty[$, et sa fonction dérivée est définie par : $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$

b) f est dérivable sur $]-\infty ; -\frac{4}{3}[$ et $]-\frac{4}{3} ; +\infty[$, et sa fonction dérivée est définie par : $f'(x) = -\dfrac{14}{(3x+4)^2}$

c) f est dérivable sur $]-\infty ; -3[$ et $]-3 ; +\infty[$, et sa fonction dérivée est définie par : $f'(x) = \dfrac{x^2+6x-1}{(x+3)^2}$.

♦ **Exercice 13 p. 263**

a) f est dérivable sur $]\frac{3}{2} ; +\infty[$ et sa fonction dérivée est définie par : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = \frac{2(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+1}}$

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) f est dérivable sur $]-\infty ; 2[$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = \frac{1}{2(2-x)\sqrt{2-x}}$.

♦ **Exercice 14 p. 263**

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = \frac{1}{2}\cos(2x+\frac{\pi}{3}) - x\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = \sin^3 x(4+\tan^2 x)$.

♦ **Exercice 15 p. 263**

f est dérivable sur $]-1 ; \frac{3}{2}[$ et $]\frac{3}{2} ; +\infty[$, et sa dérivée est définie par : $f'(x) = \frac{2x^2-9x-6}{2(2x-3)^2\sqrt{x+1}}$.

♦ **Exercice 16 p. 263**

$f(x) = -4x^2 + 3x + 4$.

♦ **Exercice 17 p. 263**

1. On a : $f(x) = -x + 3 + \frac{1}{3-x}$.

2. La tangente à la courbe au point d'abscisse 2 a pour équation : $y = 2$.

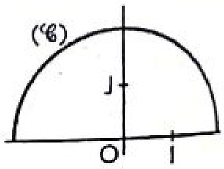
♦ **Exercice 18 p. 263**

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = \frac{-3x^2+4x+1}{(x^2+1)^3}$.

2. On a : $f'(-1) = -\frac{3}{4}$; $f'(0) = 1$; $f'(1) = \frac{1}{4}$; $f'(2) = -\frac{3}{125}$.

3. Les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses respectives -1, 0, 1 et 2 admettent pour équations respectives : $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$; $y = x - 1$; $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$; $y = -\frac{3}{125}x + \frac{11}{125}$.

♦ **Exercice 19 p. 263**



1. L'ensemble de définition de f est $[-2 ; 2]$. Soit x un élément de $[-2 ; 2]$.

On a : $M(x,y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow y = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4$ et $y \geq 0 \Leftrightarrow OM = 2$ et $y \geq 0$.

$(\mathscr{C})$ est le demi-cercle de centre O et de rayon 2 situé « au-dessus » de (OI).

2. f est dérivable sur $]-2 ; 2[$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

3. *a)* La tangente à $(\mathscr{C})$ au point M_0 admet pour équation : $y = -\frac{x_0}{\sqrt{4-{x_0}^2}}x + \frac{4}{\sqrt{4-{x_0}^2}}$.

b) Cette équation peut s'écrire : $x x_0 + \sqrt{4-{x_0}^2}\, y = 4$; donc, $\overrightarrow{OM_0}\begin{pmatrix} x_0 \\ \sqrt{4-{x_0}^2} \end{pmatrix}$ est normal à la tangente.

On en déduit que la tangente à $(\mathscr{C})$ au point M_0 est perpendiculaire à la droite (OM_0).

♦ **Exercice 20 p. 263**

1. f est dérivable sur $]-\infty ; -3[$ et sur $]-3 ; +\infty[$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = -\frac{7}{(x+3)^2}$.

2. *a)* La tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse -1 a pour équation : $y = -\frac{7}{4}x - \frac{1}{4}$.

b) Soit x_0 un nombre réel. La tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse x_0 a pour coefficient directeur $-\frac{7}{(x_0+3)^2}$; cette tangente est parallèle à la tangente au point d'abscisse -1 si et seulement si $-\frac{7}{(x_0+3)^2} = -\frac{7}{4}$.

Donc, les tangentes à $(\mathscr{C})$ aux points $M_1\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix} -5 \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$ sont parallèles.

3. Pour tout nombre réel strictement négatif m, l'équation $f'(x) = m$ a deux solutions : $x_1 = -3 - \sqrt{-\frac{7}{m}}$ et $x_2 = -3 + \sqrt{-\frac{7}{m}}$; donc, il existe deux points de $(\mathscr{C})$ où la tangente a pour coefficient directeur m.

APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

♦ Exercice 21 p. 263

1. $\forall x \in]-5\,;-3[\cup]3\,;4[,\ f'(x) > 0$;

$\forall x \in]-3\,;-1[\cup]1\,;3[,\ f'(x) < 0$;

$\forall x \in]-1\,;1[,\ f'(x) = 0$.

2. On en déduit le tableau de variation de f.

x	-5		-3		-1		1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	0	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	↗	$\frac{1}{2}$	↘	-1	→	-1	↘	-5	↗	-1

♦ Exercice 22 p. 263

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = 2x$.

On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	1	↗	

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = 3x(x + 2)$.

On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	5	↘	1	↗	

c) f est dérivable sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = \frac{9}{(2-x)^2}$.

On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	‖	↗	

d) f est dérivable sur $]-\infty\,;3[$ et sur $]3\,;+\infty[$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = \frac{(2x-5)(2x-7)}{(x-3)^2}$.

On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		3		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	9	↘	‖	↘	17	↗	

e) f est dérivable sur $]-\infty\,;\frac{2}{3}[$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{2-3x}}$.

On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$
$f'(x)$		$-$	‖
$f(x)$		↘	0

f) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$.

On en déduit le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{4}$	↗	

♦ Exercice 23 p. 263

a) f est dérivable sur $]0\,;\pi[$ et sa dérivée est définie par : $f'(x) = 2\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)$.

On en déduit le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	1	↘	-1	↗	$\frac{1}{2}$

b) f est dérivable sur $]-\pi\,;\pi[$, et sa dérivée est définie par : $f'(x) = \sin x(2\cos x - 1)$.

On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	-1

c) f est dérivable sur $]-\pi\,;\pi[$, et sa dérivée est définie par : $f'(x) = \dfrac{-15 \sin 3x}{(\cos 3x - 2)^2}$.

On en déduit le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	$-\frac{4}{3}$	↗	2	↘	$-\frac{4}{3}$

♦ **Exercice 24 p. 263**

a) Soit $f(x) = x^5$; on a : $f'(x) = 5x^4$ et $A = f(2 + 0{,}0002)$.
On a : $A \approx f(2) + f'(2) \times 0{,}0002 \approx 2^5 + 5 \times 2^4 \times 0{,}0002 \approx 32{,}016$. La calculatrice donne : $A \approx 32{,}01600$.

b) Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; on a : $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$ et $A = f(10 + 0{,}005)$.
On a : $A \approx f(10) + f'(10) \times 0{,}005 \approx \dfrac{1}{100} - \dfrac{2}{1000} \times 0{,}005 \approx 0{,}00999$. La calculatrice donne : $A \approx 0{,}00999$.

c) Soit $f(x) = \dfrac{1+x}{x^2}$; on a : $f'(x) = -\dfrac{x+2}{x^3}$ et $A = f(1 + 0{,}0001)$.
On a : $A \approx f(1) + f'(1) \times 0{,}0001 \approx 2 - 3 \times 0{,}0001 \approx 1{,}9997$. La calculatrice donne : $A \approx 1{,}9997$.

d) Soit $f(x) = \sin x$; on a : $f'(x) = \cos x$ et $A = f(0 + 0{,}002)$.
On a : $A \approx f(0) + f'(0) \times 0{,}002 \approx 0{,}002$. La calculatrice donne : $A \approx 0{,}00199 \approx 0{,}002$.

♦ **Exercice 25 p. 263**

1. *a)* Ensemble des valeurs possibles de x : $]0\,;50[$.

b) La hauteur est x et la base est $100 - 2x$; $v(x) = x(100 - 2x)^2$.

2. $v'(x) = (100 - 2x)(100 - 6x)$.

3. Le volume de la boîte est maximal pour $x = \dfrac{50}{3}$;
le volume maximal est $\dfrac{2 \times 10^6}{27}$ cm^3.

x	0		$\frac{50}{3}$		50
$v'(x)$		$+$	0	$-$	
$v(x)$	0	↗	$\frac{2 \times 10^6}{27}$	↘	0

Exercices d'approfondissement

♦ **Exercice 26 p. 264**

On a : $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$.

♦ **Exercice 27 p. 264**

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. **2.** $f'(x) = 6x(x - 1)$.
f admet un maximum relatif en 0 qui est 3.
f admet un minimum relatif en 1 qui est 2.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

♦ **Exercice 28 p. 264**

$f(x) = \dfrac{2x^2 + 4}{x^2 + 2}$.

♦ **Exercice 29 p. 264**

$f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 10}{x - 2}$.

♦ **Exercice 30 p. 264**

1. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ $(a_n \neq 0)$; on a : $P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1$ et $\deg(P') = n - 1$.

2. $P(x) = (x - \alpha)^2\, Q(x)$, avec $Q(x) \neq 0$.
On a : $P'(x) = 2(x - \alpha)Q(x) + (x - \alpha)^2\, Q'(x)$; donc : $P'(\alpha) = 0$ et α est une racine de P'.

3. Soit : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$, avec $Q(x) \neq 0$; on a : $P'(x) = Q(x) + (x - \alpha)Q'(x)$.
$P'(\alpha) = 0 \iff Q(\alpha) = 0 \iff \alpha$ est une racine de Q.
Donc : $Q(x) = (x - \alpha)\, R(x)$, avec $R(x) \neq 0$; par suite : $P(x) = (x - \alpha)^2\, R(x)$, avec $R(x) \neq 0$.

♦ **Exercice 31 p. 264**

1. *a)* $f'_1(x) = 1 - \cos x$; donc, f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $f_1(0) = 0$; donc : $\forall\, x \geq 0$, $x - \sin x \geq 0$, c'est-à-dire : $\sin x \leq x$.

2\. a) $f'_2(x) = -x + \sin x$; donc : f_2 est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) $f_2(0) = 0$; donc : $\forall x \geq 0,\ 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \leq 0$, c'est-à-dire : $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$.

3\. a) f_3 est une fonction impaire. $f'_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$; donc : f_3 est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) $f_3(0) = 0$; donc : $\forall x \geq 0,\ x - \frac{x^3}{6} - \sin x \leq 0$, c'est-à-dire : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$.

4\. a) f_4 est impaire. $f'_4(x) = -\ x + \frac{x^3}{6} + \sin x \geq 0$; donc : f_4 est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) $f_4(0) = 0$; donc : $\forall x \geq 0,\ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x \geq 0$, c'est-à-dire : $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

On en déduit : $\frac{23}{48} \leq \sin(\frac{1}{2}) \leq \frac{24}{48}$ et $\frac{336}{384} \leq \cos(\frac{1}{2}) \leq \frac{337}{384}$.

♦ Exercice 32 p. 264

1\. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} [a + \varphi(h)] = a$; donc : u est dérivable en x_0 et $u'(x_0) = a$.

2\. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} [b + \chi(h)] = b$; donc v est dérivable en x_0 et $v'(x_0) = b$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(uv)(x) - (uv)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{v(x)[u(x) - u(x_0)] + u(x_0)[v(x) - v(x_0)]}{x - x_0} = v(x_0)u'(x_0) + u(x_0)v'(x_0).$$

Donc, uv est dérivable en x_0 et $(uv)'(x_0) = v(x_0)u'(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$.

♦ Exercice 33 p. 264

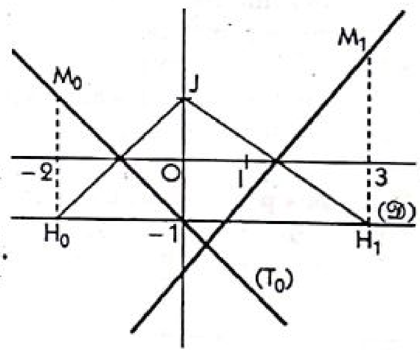
1\. Une équation de (T_0) est : $y = \frac{1}{2} x_0 x - \frac{1}{4} x_0^2$.

2\. a) $M_0J = M_0H_0 = 1 + \frac{1}{4} x_0^2$.

$\overrightarrow{JH_0}\begin{pmatrix} x_0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} x_0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de (JH_0) et (T_0).

$\overrightarrow{JH_0} \cdot \vec{V} = 0$; donc : $(JH_0) \perp (T_0)$; or : M_0 appartient à la médiatrice de $[JH_0]$.

Par suite, (T_0) est la médiatrice de $[JH_0]$.



b) ***Programme de construction***

Connaissant J et H_0 on construit la médiatrice (T_0) de $[JH_0]$.

Pour construire M_0 on construit la perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ passant par H_0 ; elle coupe (T_0) en M_0.

♦ Exercice 34 p. 264

1\. Une équation de (T_0) est : $y = -3x_0^2 + 3)x + 2x_0^2 + 1$.

2\. a) $(-3x_0^2 + 3)x + 2x_0^2 + 1 = -x^3 + 3x + 1$.

b) Cette équation est équivalente à : $(x - x_0)^2(x + 2x_0) = 0$.

c) (T_0) et $(\mathscr{C})$ ont qu'un point commun ssi $-2x_0 = x_0$, c'est-à-dire : $x_0 = 0$.

14. Étude de fonctions

(pages 265 à 282 du livre de l'élève)

Objectifs

Maîtriser les représentations graphiques des fonctions numériques.
Étudier une fonction numérique.

Commentaires

Le plan proposé pour l'étude de fonctions est purement indicatif.
Il est commode d'utiliser un repère non orthogonal pour représenter les fonctions.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Généralités sur les fonctions • Parité, périodicité : – fonction paire ; – fonction impaire ; – fonction périodique. • Éléments de symétrie : – axe de symétrie ; – centre de symétrie. • Notion d'asymptote : – asymptotes parallèles aux axes du repère ; – asymptotes obliques. **Fonctions polynômes, fonctions rationnelles** • Étude de fonctions polynômes. • Étude de fonctions rationnelles.	• Étudier la parité d'une fonction. • Construire la courbe représentative d'une fonction paire ou impaire • Étudier la périodicité d'une fonction • Construire la courbe représentative d'une fonction périodique. • Démontrer qu'un point est centre de symétrie d'une courbe représentative. • Démontrer qu'une droite est axe de symétrie d'une courbe représentative. • Trouver une asymptote parallèle à un axe du repère en observant le tableau de variation. • Démontrer qu'une droite donnée est asymptote oblique d'une courbe. • Réduire l'ensemble d'étude d'une fonction. • Conduire l'étude d'une fonction.

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 271

a) f a la même parité que n *b)* f est paire *c)* f est impaire *d)* f n'est ni paire ni impaire ($-1 \in D_f$ et $1 \notin D_f$).

♦ Exercice 1.b p. 271

a) $D_f = \mathbb{R}$; $f(x + \pi) = (-\sin x)^2 = f(x)$.

b) $D_f = \mathbb{R}$; $f(x + 2\pi) = (-\cos \frac{x}{2})^2 = f(x)$.

♦ Exercice 1.c p. 271

Dans les quatre cas, l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

a) $f(x + 6\pi) = \cos(\frac{x}{3} + 2\pi) = f(x)$.

f est périodique de période 6π, -6π, 12π.

b) $f(x + \frac{14\pi}{5}) = \sin(\frac{5x}{7} + 2\pi) = f(x)$.

f est périodique de période $\frac{14\pi}{5}$, $-\frac{14\pi}{5}$, 14π.

c) $f(x + \frac{\pi}{5}) = \sin(5x + \pi + \frac{\pi}{4}) = f(x)$.

f est périodique de période $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, π.

d) $f(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(-4x - 2\pi - \frac{\pi}{6}) = f(x)$.

f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, π.

♦ Exercice 1.d p. 271

On a : $f(x - 1) = x^4 + 2$. La fonction $x \mapsto x^4 + 2$ est une fonction paire ; donc, la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative de f.

♦ Exercice 1.e p. 271

On a : $f(x+1)-2 = x + \frac{1}{x}$. La fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ est une fonction impaire ; donc, le point $\Omega\binom{1}{2}$ est un centre de symétrie pour la courbe représentative de f.

♦ Exercice 1.f p. 271

Les droites d'équations $y = 2x + 3$ et $x = -2$ sont asymptotes à la courbe représentative de f.

♦ Exercice 1.g p. 271

On a : $f(x) - (2x+5) = \frac{4}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x-1} = 0$; donc, la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 5$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$.

♦ Exercice 2.a p. 276

1. On a : $f'(x) = -3x(x-2)$.

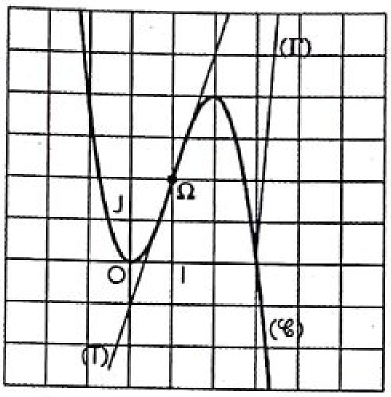
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) - 2 = -x^3 + 3x$.

La fonction $x \mapsto -x^3 + 3x$ est impaire ; donc, Ω est centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

La tangente à $(\mathscr{C})$ en Ω a pour équation : $y = 3x - 1$.

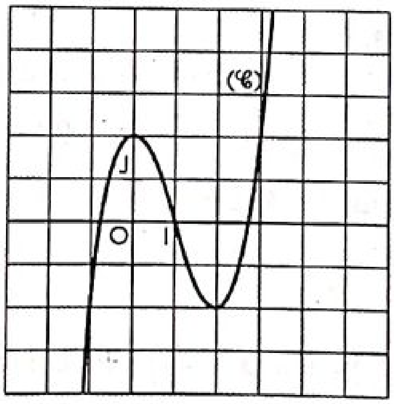
On a : $g(x) = |f(x)|$.



♦ Exercice 2.b p. 276

1. On a : $f'(x) = 3x(x-2)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$



2. Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de la droite d'équation $y = m$.
- Si : $m < -2$ ou $m > 2$, l'équation a 1 solution ;
- si : $m = -2$ ou $m = 2$, l'équation a 2 solutions ;
- si : $-2 < m < 2$, l'équation a 3 solutions.

♦ Exercice 2.c p. 276

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $\forall x \in D_f, f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$.

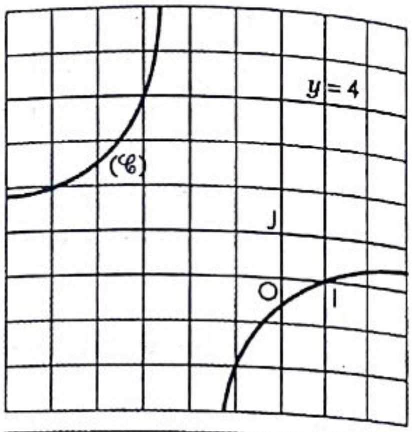
f est continue et dérivable en tout point de D_f.

$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

x	-5	-4	-3	-1	0	1
$f(x)$	2	$\frac{5}{2}$	4	-2	$-\frac{1}{2}$	0

2. • Par lecture graphique, on trouve :
$S =]-\infty\,;-3[\cup]1,+\infty[$.



• On retrouve ce résultat par le calcul.

$0 < \dfrac{x-1}{x+2} < 4 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{x-1}{x+2}$ et $\dfrac{x-1}{x+2} < 4$.

♦ Exercice 2.d p. 276

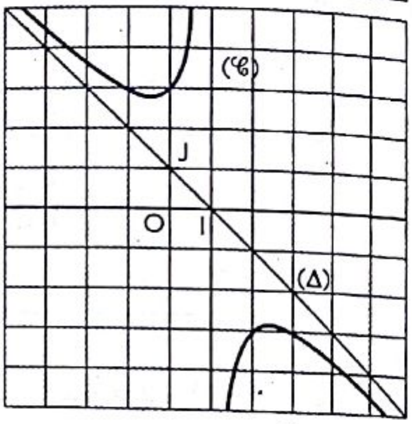
1. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

On a : $f(x) - (-x+1) = -\dfrac{2}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -\dfrac{2}{x-1} = 0$.

La droite (Δ) d'équation $y = -x+1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

f est continue et dérivable en tout point de D_f.

$f'(x) = -\dfrac{(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})}{(x-1)^2}$.



x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-2\sqrt{2}$	↘	$-\infty$

x	-2	-1	0	2	3	4
$f(x)$	$\dfrac{11}{3}$	3	3	-3	-3	$-\dfrac{11}{3}$

2. On a : $f(x+1) - 0 = -x + \dfrac{1}{-x}$.

La fonction $x \mapsto -x + \dfrac{1}{-x}$ est impaire ; donc, le point $\Omega\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

♦ Exercice 3.a p. 279

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction sinus et (Γ) celle de la fonction considérée.

a) $\sin\left(x + \dfrac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; donc (Γ) se déduit de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{3}\\0\end{pmatrix}$.

b) (Γ) se déduit de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{pmatrix}$.

c) $\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3} - x\right) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; donc (Γ) se déduit de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{3}\\0\end{pmatrix}$.

d) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \dfrac{5\pi}{6}\right)$; donc (Γ) se déduit de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{-5\pi}{6}\\0\end{pmatrix}$.

e) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6} - x\right) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; donc (Γ) se déduit de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{3}\\0\end{pmatrix}$.

f) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)$; donc (Γ) se déduit de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3\pi}{4}\\0\end{pmatrix}$.

♦ Exercice 3.b p. 279

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction sinus et (Γ) celle de la fonction considérée.

a) (Γ) se déduit de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{-\pi}{3}\\0\end{pmatrix}$.

b) (Γ) se déduit de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{pmatrix}$.

c) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$; donc (Γ) se déduit de $(\mathscr{C})$ par la composée de :

- la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{pmatrix}$,
- suivie de la symétrie orthogonale d'axe (OI).

d) (Γ) se déduit de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{4}\\1\end{pmatrix}$.

♦ Exercice 3.c p. 279

On a : $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}}$ est l'image de la fonction sinus par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{4}\\0\end{pmatrix}$.

Exercices d'apprentissage

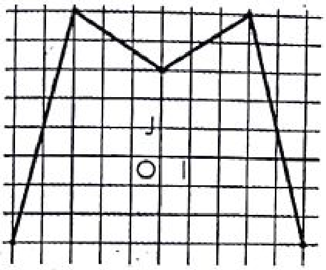
GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

♦ Exercice 1 p. 280

a) f est paire *b)* f n'est ni paire, ni impaire *c)* f est impaire *d)* f n'est ni paire, ni impaire.

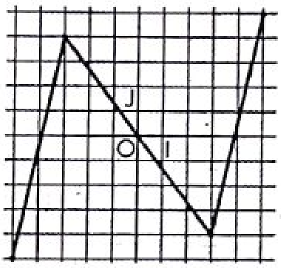
♦ Exercice 2 p. 280

1.



x	-5		-3		0		3		5
$f(x)$	-3	↗	5	↘	3	↗	5	↘	-3

2.



x	-5		-3		0		3		5
$g(x)$	-5	↗	4	↘	0	↘	-4	↗	5

♦ Exercice 3 p. 280

a) c) f) : f est impaire *b) d) e)* : f est paire.

♦ Exercice 4 p. 280

a) f est paire. *b)* f est impaire. *c)* f est impaire. *d)* f est paire.
e) f est paire. *f)* f n'est ni paire, ni impaire. *g)* f est paire.
h) f est impaire. *i)* f est paire. *j)* f n'est ni paire, ni impaire.

♦ Exercice 5 p. 280

a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; donc, la fonction est périodique de période π

b) La fonction n'est pas périodique

c) La fonction n'est pas périodique

d) La fonction est périodique de période 2π

e) La fonction est périodique de période 2π

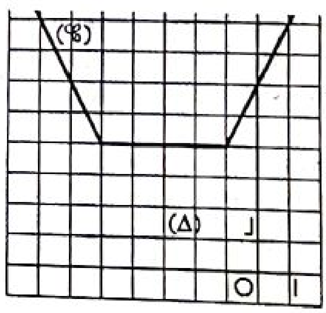
f) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}$; donc, la fonction est périodique de période 2π.

♦ Exercice 6 p. 280

Si $x \in]-\infty ; -5]$, $f(x) = -2x - 6$;
si $x \in]-5 ; -1]$, $f(x) = 4$;
si $x \in]-1 ; +\infty[$, $f(x) = 2x + 6$.

a) La représentation graphique de f est $(\mathscr{C})$.

b) On a : $\forall h \in \mathbb{R}$, $f(-3-h) = f(-3+h)$; donc, la droite (Δ) d'équation $x = -3$ est un axe de symétrie pour la courbe $(\mathscr{C})$.



♦ **Exercice 7 p. 280**

On a : $\forall h \in \mathbb{R}, g\left(\frac{1}{2}-h\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}-h} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}+h} = g\left(\frac{1}{2}+h\right)$;

donc, la droite (Δ) d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative de g.

♦ **Exercice 8 p. 280**

a) Désignons par $(\mathscr{C})$ la courbe considérée et f la fonction associée. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}, f(x+2)-3 = \frac{1}{x}$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est impaire ; donc, Ω est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

b) et *c)* Ω n'est pas un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$

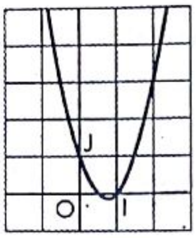
d) Ω est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

Fonctions polynômes

♦ **Exercice 9 p. 280**

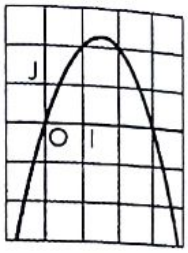
a) On a : $f'(x) = 4x - 3$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	$+\infty$



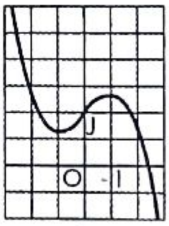
b) On a : $f'(x) = -2x + 3$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{9}{4}$	↘	$-\infty$



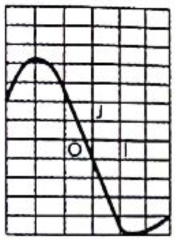
c) On a : $f'(x) = (1-x)(1+x)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{4}{3}$	↗	$\frac{8}{3}$	↘	$-\infty$



d) On a : $f'(x) = (x-2)(x+2)$.

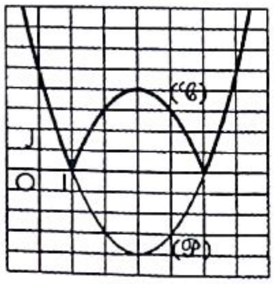
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{13}{3}$	↘	$-\frac{19}{3}$	↗	$+\infty$



♦ **Exercice 10 p. 280**

a) On pose : $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$



La représentation graphique de f est la parabole $(\mathscr{P})$ ci-contre.

b) On a : $g(x) = |f(x)|$. Soit $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de g.

$(\mathscr{C})$ est la réunion des parties des courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = -f(x)$ situées « au-dessus » de (OI).

♦ **Exercice 11 p. 281**

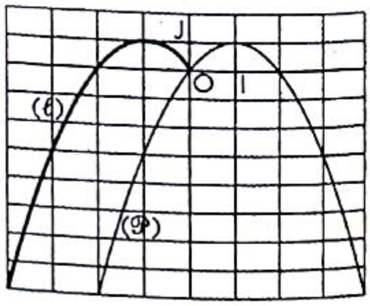
a) On pose : $f(x) = -x^2 + 2x$.

La représentation graphique de f est la parabole $(\mathscr{P})$.

b) On a : $g(x) = f(|x|)$.

Soit (ℓ) la représentation graphique de g.

(ℓ) est la réunion de la partie de $(\mathscr{P})$ telle que $x \in [0 ; +\infty[$ et son symétrique par rapport à (OJ).

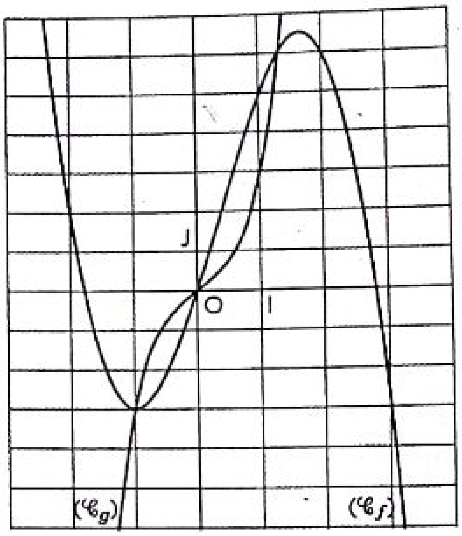


♦ **Exercice 12 p. 281**

a) On pose : $f(x) = -x^3 + x^2 + 5x$; on désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f.

$f'(x) = (3x-5)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{175}{27}$	$\searrow$	$-\infty$



b) On pose : $g(x) = 2x^3 + x$. Soit $(\mathscr{C}_g)$ la représentation graphique de g.
$g'(x) = 6x^2 + 1$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c) On a : $h(x) = \max\,(f(x)\,;\,g(x))$ et on désigne par $(\mathscr{C}_h)$ la représentation graphique de h.
$(\mathscr{C}_h)$ est la réunion des parties des courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ telle que :
- si $(\mathscr{C}_f)$ est au dessus de $(\mathscr{C}_g)$, alors $(\mathscr{C}_h) = (\mathscr{C}_f)$
- si $(\mathscr{C}_g)$ est au dessus de $(\mathscr{C}_f)$, alors $(\mathscr{C}_h) = (\mathscr{C}_g)$

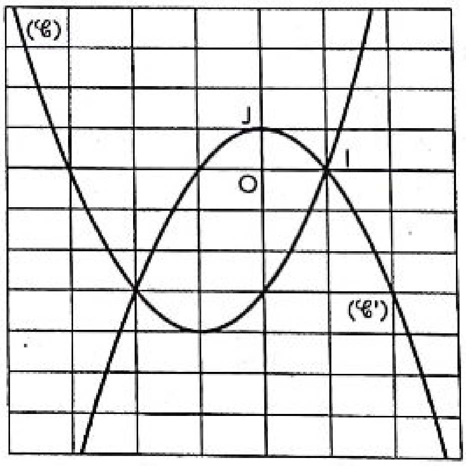
♦ Exercice 13 p. 281

1. On pose : $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On doit avoir : $f(0) = -3$, $f'(-1) = 0$ et $f'(1) = 4$;
donc : $a = 1$, $b = 2$ et $c = -3$.

2. Les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ ci-jointes sont les représentations graphiques des fonctions f et g.
$(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent aux points $B\binom{1}{0} = I$ et $D\binom{-2}{-3}$.

3. La droite (BD) a pour équation : $y = x - 1$.

4. $P(x) = f(x) - g(x)$; d'après le graphique :
- si $x \in\ ]-\infty\,;-2[\ \cup\ ]1\,;+\infty[$, $P(x) > 0$;
- si $x \in\ ]-2\,;1[$, $P(x) < 0$;
- si $x \in \{-2\,;1\}$, $P(x) = 0$.

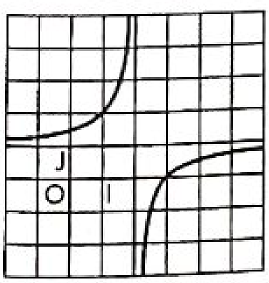


ÉTUDE DE FONCTIONS RATIONNELLES

♦ Exercice 14 p. 281

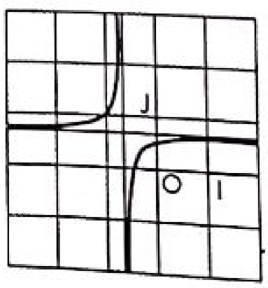
a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.
f est continue et dérivable en tout point de D_f.
$f'(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1



b) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{2}{3}\}$.
f est continue et dérivable en tout point de D_f.
$f'(x) = \dfrac{1}{(3x+2)^2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$



c) $D_f = \mathbb{R}^*$.

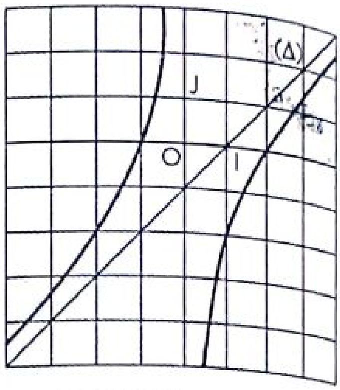
On a : $f(x) - (x-1) = -\frac{2}{x}$ et $\lim\limits_{|x| \to +\infty} -\frac{2}{x} = 0$.

La droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de f.

f est continue et dérivable en tout point de D_f.

$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



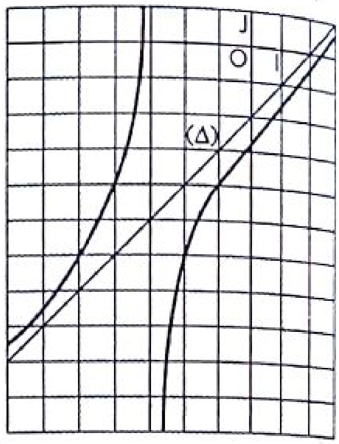
d) $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-3\}$.

On a : $f(x) - (x-2) = -2x + 3$ et $\lim\limits_{|x| \to +\infty} (-2x+3) = 0$.

La droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe représentative de f.

f est continue et dérivable en tout point de D_f. $f'(x) = 1 + \frac{2}{(x+3)^2}$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

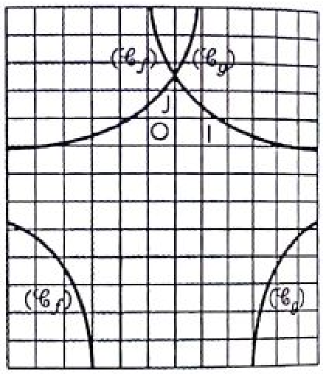


♦ Exercice 15 p. 281

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

a) On pose : $f(x) = -\frac{2x+3}{x+2}$ et on désigne par $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f. $\mathscr{A}'(x) = \frac{-7}{(x+2)^2}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2



b) On pose : $g(x) = \frac{2x+3}{-x+2}$ et on désigne par $(\mathscr{C}_g)$ la représentation graphique de g.

On a : $g(x) = f(-x)$. $(\mathscr{C}_g)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

♦ Exercice 16 p. 281

a) On a : $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{2\}$, $g(x) = 4x + 8 - \frac{15}{2-x}$.

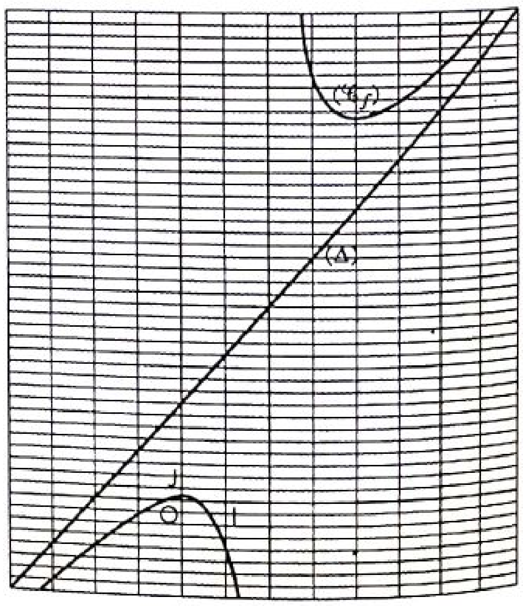
b) On a : $f(x) - (4x+8) = -\frac{15}{2-x}$ et $\lim\limits_{|x| \to +\infty} -\frac{15}{2-x} = 0$.

La droite (Δ) d'équation $y = 4x + 8$ est asymptote à la courbe représentative de f.

f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{2\}$.

$f'(x) = \frac{(2x - 4 - \sqrt{15})(2x - 4 + \sqrt{15})}{(x-2)^2}$.

x	$-\infty$		$\frac{4-\sqrt{15}}{2}$		2		$\frac{4+\sqrt{15}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$16 - 4\sqrt{15}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$16 + 4\sqrt{15}$	↗	$+\infty$



Exercice 17 p. 281

a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$, $g(x) = x + \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1}$.

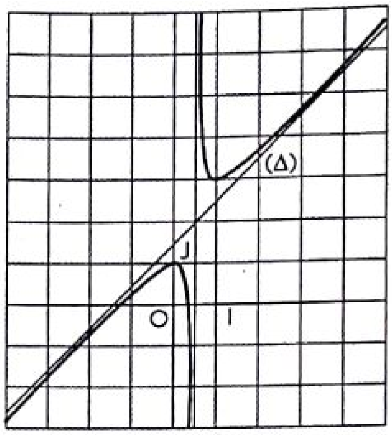
b) On a : $g(x) - (x + \frac{3}{2}) = \frac{1}{2(2x-1)}$ et $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{1}{2(2x-1)} = 0$.

La droite (Δ) d'équation $y = x + \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de g.

g est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$.

$g'(x) = \frac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}$.

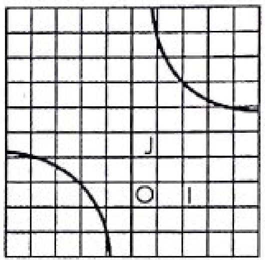
x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$



Exercice 18 p. 281

1. On a : $h(x) = \frac{2x+6}{x+1}$.

2. $(\mathscr{H})$ est la courbe ci-contre.



ÉTUDE DE FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

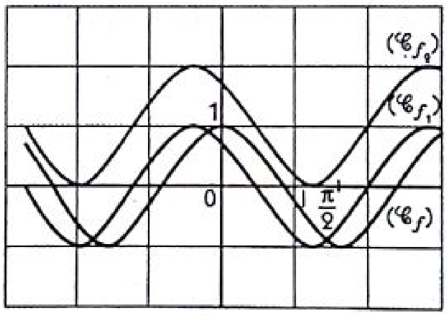
Exercice 19 p. 281

a) $D_f = \mathbb{R}$. f est de période π et est paire.

Donc, on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

$f'(x) = -2\sin 2x$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	−	0
$f(x)$	1	↘	−1



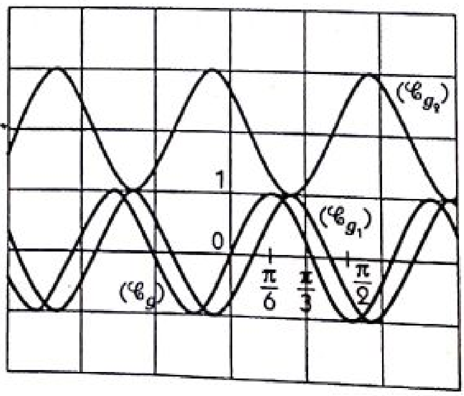
b) • $(\mathscr{C}_{f_1})$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{4}\\0\end{pmatrix}$.

• $(\mathscr{C}_{f_2})$ est l'image de $(\mathscr{C}_{f_1})$ par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 20 p. 281

a) $D_g = \mathbb{R}$. g est de période $\frac{2\pi}{3}$ et est impaire. Donc, on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0 ; \frac{\pi}{3}]$. $g'(x) = 3\cos 3x$.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
$g'(x)$	3	+	0	−	−3
$g(x)$	0	↗	1	↘	0



b) • $(\mathscr{C}_{g_1})$ est l'image de $(\mathscr{C}_g)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{pmatrix}$.

• $(\mathscr{C}_{g_2})$ est l'image de $(\mathscr{C}_{g_1})$ par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = 1$.

♦ Exercice 21 p. 281

1. *a)* $D_f = \mathbb{R}$. f est de période π et est paire. Donc on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

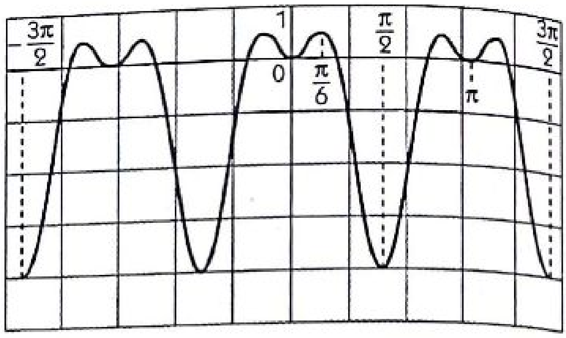
b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2} - x) = -2(1 + \cos 2x)\cos 2x$.

2. *a)* $f'(x) = 4\sin 2x\,(1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x)$.

b)

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	-4

3. Courbe ($\mathscr{C}$).



♦ Exercice 22 p. 281

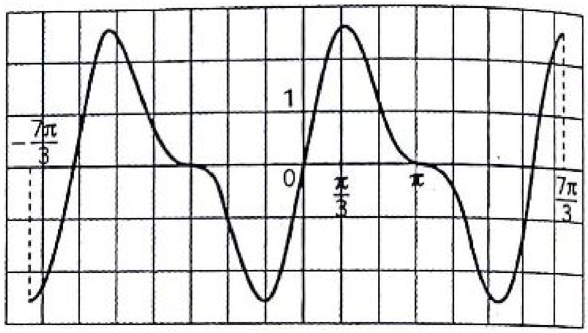
1. *a)* $D_f = \mathbb{R}$. f est impaire de période 2π. Donc, on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0 ; \pi]$.

2. $f'(x) = 2(1 + \cos x)(2\cos x - 1)$.

3.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

3. Courbe ($\mathscr{C}$).



♦ Exercice 23 p. 281

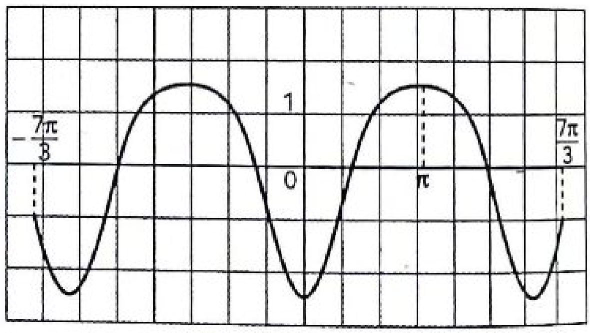
1. *a)* $D_f = \mathbb{R}$. f est impaire de période 2π. Donc, on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0 ; \pi]$.

2. $f'(x) = 2\sin x\,(1 + \cos x)$.

3.

x	0		π
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	$-\frac{5}{2}$	↗	$\frac{3}{2}$

3. Courbe ($\mathscr{C}$).



Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 24 p. 281

a) Le produit $f\,g$ est une fonction paire.

b) Le produit $f\,g$ est une fonction paire.

c) Le produit $f\,g$ est une fonction impaire.

♦ Exercice 25 p. 281

1. Les fonctions f et $x \mapsto f(-x)$ sont égales, elles ont donc même dérivée.
On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = -f'(x)$; donc la fonction f' est impaire.

2. Les fonctions f et $x \mapsto -f(-x)$ sont égales, elles ont donc même dérivée.
On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = f'(x)$; donc la fonction f' est paire.

3. Les fonctions f et $x \mapsto f(x + p)$ sont égales, elles ont donc même dérivée.
On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x + p) = f'(x)$; donc la fonction f' est périodique de période p.

♦ Exercice 26 p. 282

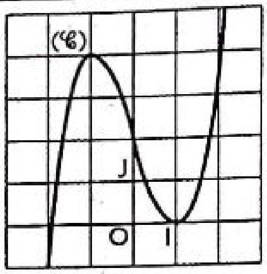
1. La fonction $x \mapsto f(x + a) - b$ est impaire ; donc sa dérivée $x \mapsto f'(x + a)$ est paire et la droite (Δ d'équation $x = a$ est axe de symétrie de ($\mathscr{C}'$).

2. La fonction $x \mapsto f(x+a)$ est paire ; donc sa dérivée $x \mapsto f'(x+a)$ est impaire et le point $\Omega\binom{a}{0}$ est centre de symétrie de $(\mathscr{C}')$.

♦ **Exercice 27 p. 282**

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - 2 = x^3 + px$.
La fonction $x \mapsto x^3 + px$ est impaire ; donc le point $\Omega\binom{0}{2}$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathscr{C})$.



2. La dérivée de f est la fonction $f' : x \mapsto 3x^2 + p$.
Résolvons le système d'équations d'inconnue $(x\,;p)$: $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$.

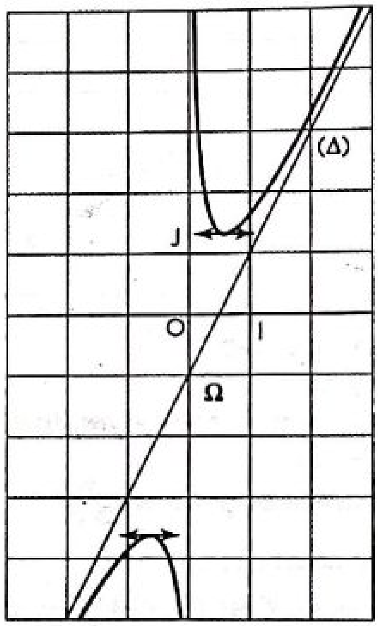
On a : $\begin{cases} x^3 + px + 2 = 0 \\ 3x^2 + p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ p = -3 \end{cases}$.

La fonction f est donc définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

♦ **Exercice 28 p. 282**

1. $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x}$.
2. $D_f = \mathbb{R}^*$. On a : $f(x) + 1 = 2x + \dfrac{1}{x}$.
La fonction $x \mapsto 2x + \dfrac{1}{x}$ est impaire, donc $\Omega\binom{0}{-1}$ est centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.
3. On a : $f(x) - (2x-1) = \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
La droite (Δ) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
f est continue et dérivable en tout point de D_f.

$f'(x) = \dfrac{(x\sqrt{2}-1)(x\sqrt{2}+1)}{x^2}$.



x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1-2\sqrt{2}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$2\sqrt{2}-1$	↗	$+\infty$

♦ **Exercice 29 p. 282**

1. Soit a un nombre réel et t_a la translation de vecteur $\vec{u}\binom{-2a}{-2a}$.
Soit $M\binom{x}{y}$ un point et M' son image par t_a.
Le point M' a pour coordonnées $(x - 2a\,; y - 2a)$.

$M' \in (\mathscr{P}_a) \Leftrightarrow \quad y - 2a = \dfrac{1}{2}(x-2a)^2 + 2a(x-2a) - 2a(1-a)$

$\Leftrightarrow \quad y = \dfrac{1}{2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad M \in (\mathscr{P}_0)$.

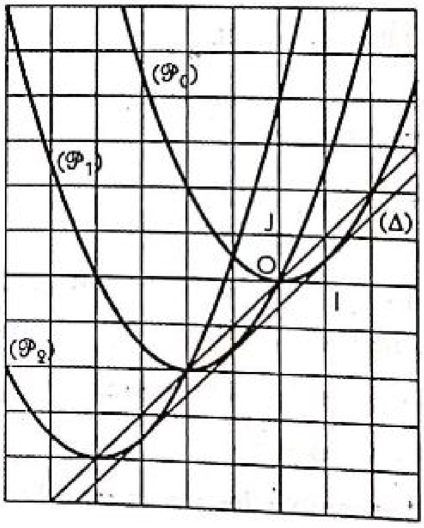
Donc, $(\mathscr{P}_a)$ est l'image de $(\mathscr{P}_0)$ par la translation t_a.

2. $(\mathscr{P}_0) : y = \dfrac{1}{2}x^2$;

$(\mathscr{P}_1) = t_{\vec{v}}(\mathscr{P}_0)$, avec $\vec{v}\binom{-2}{-2}$;

$(\mathscr{P}_2) = t_{\vec{w}}(\mathscr{P}_0)$, avec $\vec{w}\binom{-4}{-4}$.

3. Pour tout nombre réel a, le sommet de $(\mathscr{P}_a)$ est le point $S_a\binom{-2a}{-2a}$. S_a décrit la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x$.



4. Les translations conservent le contact ; (Δ) est donc globalement invariante par les translations t_a. (Δ) admet donc pour vecteur directeur $\vec{v}\binom{1}{1}$, son coefficient directeur est 1.

Le point de $(\mathcal{P}_0)$ où la tangente a pour coefficient directeur 1 est le point $A\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $(\Delta) : y = x - \frac{1}{2}$.

♦ Exercice 30 p. 282

1. f_0 est la fonction affine $x \mapsto -3x + 1$.

$f_{\frac{1}{2}}$ est le polynôme $x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 3x + 1$.

$f_{\frac{1}{2}}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'_{\frac{1}{2}} : x \mapsto \frac{3}{2}x^2 - 3$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'_{\frac{1}{2}}(x)$		+	0	−	0	+	
$f_{\frac{1}{2}}(x)$	$-\infty$	↗	$1 + 2\sqrt{2}$	↘	$1 - 2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

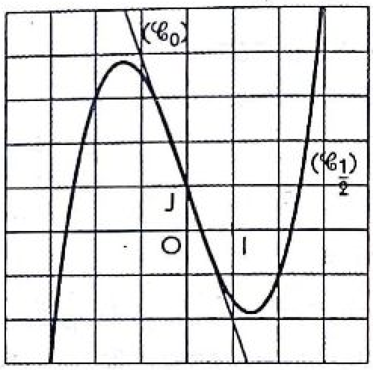
2. Les courbes $(\mathcal{C}_a)$ passent toutes par le point $\Omega = J$.

3. La fonction $x \mapsto ax^3 - 3x$ est impaire ; donc, le point Ω est centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_a)$.

4. La fonction f_a est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est définie par : $f'_a : x \mapsto 3ax^2 - 3$.

- Si $a \leq 0$, alors f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a > 0$, on a le tableau suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{a}}{a}$		$\frac{\sqrt{a}}{a}$		$+\infty$
$f_a'(x)$		+	0	−	0	+	
$f_a(x)$	$-\infty$	↗	$2\frac{\sqrt{a}}{a} + 1$	↘	$-2\frac{\sqrt{a}}{a} + 1$	↗	$+\infty$



♦ Exercice 31 p. 282

1. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

La courbe $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes, les droites d'équation $y = 2$ et $x = -2$.

Elles se coupent au point $\Omega\binom{-2}{2}$.

2. $(\mathcal{C})$ est la courbe ci-contre.

3. La dérivée de f est $f' : x \mapsto \frac{7}{(x+2)^2}$.

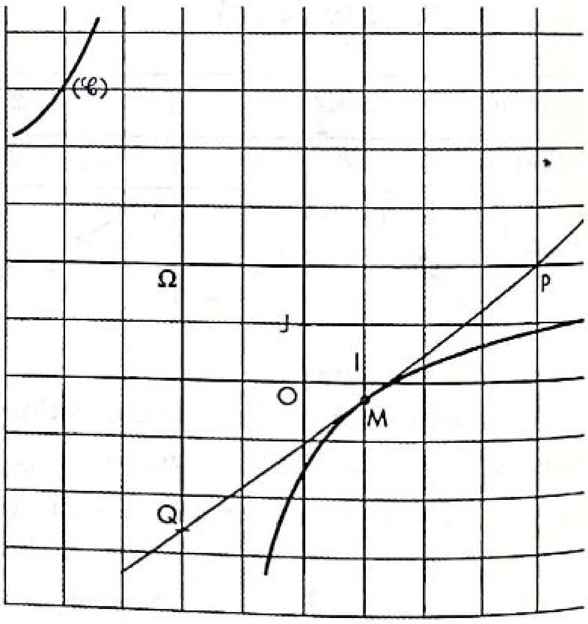
Soit m l'abscisse de M ; (Δ_M) a pour équation :

$$y - \frac{2m-3}{m+2} = \frac{7}{(m+2)^2}(x - m) .$$

On a : $P\left(-2 ; \frac{2m-10}{m+2}\right)$ et $Q(2m + 2 ; 2)$.

Donc : $\overline{\Omega P} \times \overline{\Omega P} = -28$.

Les points M, P, Q sont alignés et $x_M = \frac{x_P + x_Q}{2}$; donc, M est le milieu du segment [PQ].



♦ Exercice 32 p. 282

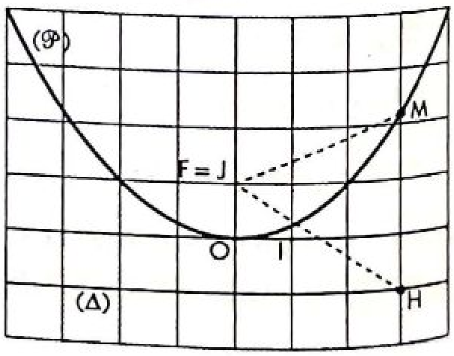
1. $(\mathcal{P})$ est la courbe ci-contre.

2. Soit $\left(x, \frac{x^2}{4}\right)$ les coordonnées du point M.

On a donc : $MF = MH = 1 + \frac{x^2}{4}$.

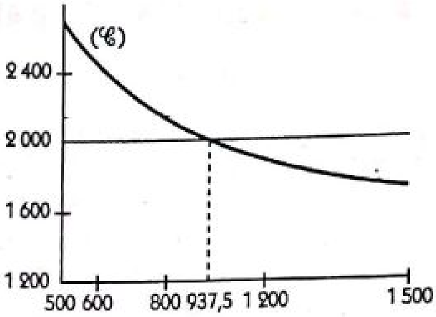
Réciproquement, les coordonnées d'un point équidistant de F et de (Δ) vérifient : $y = \frac{x^2}{4}$.

$(\mathcal{P})$ est l'ensemble des points équidistants de F et de (Δ).



Exercice 33 p. 282

1. Le prix de revient de n articles est $750\,000 + 1\,200n$.
On a donc : $r = 1\,200 + \dfrac{750\,000}{n}$.



2. *a)* L'ensemble de définition de la fonction r est $\mathbb{R}^*$; r est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
On a : $r' : x \mapsto -\dfrac{750\,000}{x^2}$.

b) (𝒞) est la représentation graphique de r sur [500 ; 1 500].

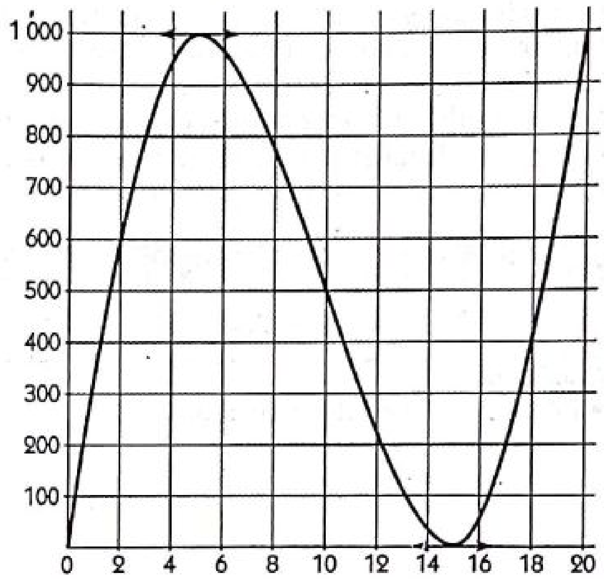
3. On doit avoir : $r \leq 2\,000$. Donc : $n \geq 937{,}5$.
Le nombre minimum d'articles à produire, pour que l'entreprise soit rentable est de 938 articles.

4. L'entreprise est rentable lorsque la droite d'équation $y = 2\,000$ est au-dessus de la courbe (𝒞).

Exercice 34 p. 282

1. *a)* La fonction f est un polynôme, son ensemble de dérivabilité est $\mathbb{R}$.
On a : $f'(x) = 6(x - 5)(x - 15)$.

x	$-\infty$		5		15		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1 000	↘	0	↗	$+\infty$



b) $(\Delta) : y = 450\,x$.

c)

x	5	10	15	20
$f(x)$	1 000	500	0	1 000

d) L'équation admet trois solutions : $10 - 5\sqrt{3}$; 10 et $10 + 5\sqrt{3}$.

2. *a)* et *b)* L'unité de longueur étant le cm, la boîte a pour dimensions x, $15 - x$, $30 - 2x$ et pour volume $v(x) = x(15 - x)(30 - 2x) = v(x) = 2x^3 - 60\,x^2 + 450\,x$.
Pour $x = 10$, on obtient un volume de : $v = 10 \times 5 \times 10 = 500$ cm³.

c) D'après l'étude précédente, V est maximal pour $x = 5$, la boîte a alors un volume de 1 *l*.

d) Pour réaliser des boîtes de 500 cm³, le fabriquant peut attribuer à x la valeur $10 - 5\sqrt{3}$ ou 10.
Il préférera sans doute prendre $x = 10$ et se faciliter ainsi la construction.

15. Suites numériques

(pages 283 à 300 du livre de l'élève)

Objectifs

• Définir une suite numérique ; déterminer une suite numérique à l'aide d'une formule explicite ou d'une formule de récurrence et représenter graphiquement une telle suite.

• Étudier les propriétés fonctionnelles des suites numériques : minoration/majoration, sens de variation, convergence.

• Définir et étudier les suites arithmétiques et les suites géométriques ; utiliser de telles suites pour résoudre des problèmes concrets.

Commentaires

• Le raisonnement par récurrence, introduit dans le chapitre « Dérivation », sera très souvent utilisé dans ce chapitre pour la résolution d'exercices, ainsi que pour la démonstration de certaines propriétés.

• L'étude de la convergence des suites utilise les résultats du chapitre « Limites et continuité » qu'il est donc conseillé de traiter avant d'aborder le chapitre « Suites numériques ».

• De même, l'étude du sens de variation et la représentation graphique des suites numériques fait appel aux résultats acquis dans les chapitres « Fonctions » et « Étude de fonctions ».

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Généralités • Définition d'une suite numérique.	• Calculer des termes d'une suite numérique définie par : – une formule explicite – une formule de récurrence. • Représenter graphiquement une suite numérique définie par une formule explicite : – sur un axe ; – dans le plan. • Représenter graphiquement une suite numérique définie par une formule de récurrence : – sur un axe ; – sur l'axe (OI) d'un repère (O, I, J) en utilisant la première bissectrice.
Étude d'une suite numérique • Suite minorée, majorée ; suite positive, négative. • Suite convergente, suite divergente.	• Déterminer le signe d'une suite numérique, son sens de variation : – par le calcul ; – graphiquement. • Étudier la convergence d'une suite numérique et calculer sa limite éventuelle.
Suites arithmétiques, suites géométriques • Suites arithmétiques : – définition ; – expression du terme général ; – expression de la somme de n termes consécutifs. • Suites géométriques : – définition ; – expression du terme général ; – expression de la somme de n termes consécutifs ; – condition de convergence.	• Démontrer qu'une suite est arithmétique, géométrique. • Calculer le terme de rang n d'une suite arithmétique ou géométrique. • Calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique. • Déterminer le premier terme et la raison d'une suite arithmétique ou géométrique connaissant deux de ses termes. • Calculer la limite d'une suite géométrique convergente et la limite de la somme de ses termes. • Utiliser les suites arithmétiques et géométriques pour la résolution de problèmes concrets.

Exercices du cours

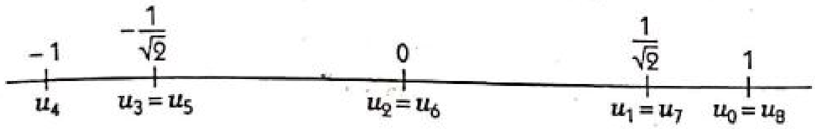
Exercice 1.a p. 286

1. Les deux termes suivants sont : $\frac{13}{243}$ et $\frac{16}{729}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{3n+1}{3^{n+1}}$.

Exercice 1.b p. 286

1. Les 8 premiers termes de cette suite sont : 1 ; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 0 ; $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; -1 ; $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; 0 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.



2. Pour tout entier naturel n, $u_{n+8} = \cos\left(\frac{(n+8)\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = u_n$.

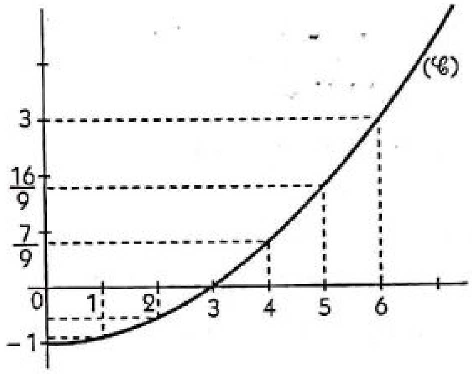
Exercice 1.c p. 286

1. $u_1 = \frac{1}{3}$; $u_2 = \frac{4}{3}$; $u_3 = \frac{10}{3}$; $u_4 = \frac{19}{3}$; $u_5 = \frac{31}{3}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{3}$.

Exercice 1.d p. 286

1. La courbe représentative de la fonction f est la demi-parabole $(\mathscr{C})$ ci-contre.



2. On a : $f(0) = -1$, donc : $u_0 = -1$;
de même, les ordonnées des points de $(\mathscr{C})$ d'abscisses respectives 1, 2, 3, 4, 5 et 6 sont les termes u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6 de la suite (u_n).

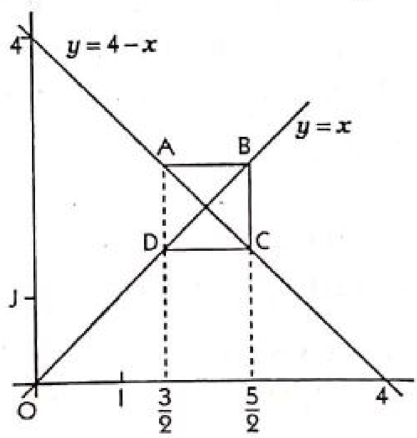
On a : $u_1 = -\frac{8}{9}$; $u_2 = -\frac{5}{9}$; $u_3 = 0$;
$u_4 = \frac{7}{9}$; $u_5 = \frac{16}{9}$; $u_6 = 3$.

Exercice 1.e p. 286

1. On a : $u_0 = \frac{3}{2}$; $u_1 = \frac{5}{2}$; $u_2 = \frac{3}{2}$; $u_3 = \frac{5}{2}$; $u_4 = \frac{3}{2}$.

On peut conjecturer que : si n est pair, $u_n = \frac{3}{2}$;

si n est impair, $u_n = \frac{5}{2}$.



2. Sur le graphique ci-contre, ABCD est un carré.
On a : $y_A = y_B = x_C$. Donc :

si $u_n = \frac{3}{2}$, $u_{n+1} = \frac{5}{2}$;

si $u_n = \frac{5}{2}$, $u_{n+1} = \frac{3}{2}$.

Exercice 2.a p. 290

a) La suite (u_n) admet 0 pour majorant ; elle n'admet pas de minorant.

b) La suite (v_n) admet 2 pour majorant et $\frac{3}{2}$ pour minorant.

c) La suite (w_n) admet 1 pour minorant ; elle n'admet pas de majorant.

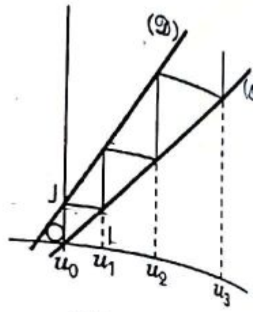
Exercice 2.b p. 290

a) (u_n) est décroissante b) (v_n) est croissante c) (w_n) est décroissante.

Exercice 2.c p. 290

a) $\lim u_n = \frac{3}{5}$ b) $\lim v_n = 0$ c) $\lim w_n = 1$.

♦ **Exercice 2.d p. 290**

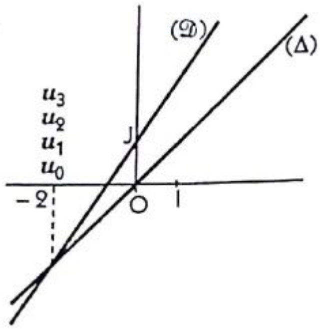


1. *a)* On trace les droites (𝒟) et (Δ) d'équations respectives $y = \frac{3}{2}x + 1$ et $y = x$.

Sur la figure, on construit u_1, u_2, u_3, connaissant $u_0 = 0$.

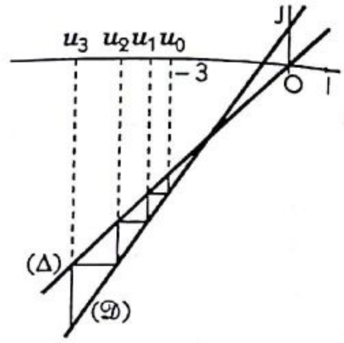
b) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. $u_0 = -2$



$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -2$.

$u_0 = -3$.



$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

♦ **Exercice 3.a p. 296**

a) (u_n) est une suite arithmétique de 1$^{\text{er}}$ terme $u_0 = 0$ et de raison $r = \frac{1}{5}$

b) (u_n) est une suite géométrique de 1$^{\text{er}}$ terme $u_0 = 4$ et de raison $q = -2$

c) (u_n) est une suite géométrique de 1$^{\text{er}}$ terme $u_0 = 9$ et de raison $q = 3$

d) (u_n) est une suite arithmétique de 1$^{\text{er}}$ terme $u_0 = -1$ et de raison $r = 5$

♦ **Exercice 3.b p. 296**

1. (v_n) est une suite arithmétique de 1$^{\text{er}}$ terme $v_1 = 2$ et de raison $r = 0{,}5$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 + (n-1)r = \frac{n+3}{2}$.

2. $S = \frac{20}{2} \times (v_1 + v_{20}) = 135$.

3. $s_n = \frac{n}{2}(v_1 + v_n) = \frac{n\,(n+7)}{4}$. Donc : $s_n = 1\,422 \iff n^2 + 7n - 5\,688 = 0$. $\Delta = 151^2$; donc : $n = 72$.

♦ **Exercice 3.c p. 296**

On a : $S_n = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]$. Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -2$.

♦ **Exercice 3.d p. 296**

Le 1$^{\text{er}}$ terme de cette suite est $u_0 = 6\,561$ et sa raison est $q = \frac{1}{3}$. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

♦ **Exercice 3.e p. 296**

1. On vérifie que : $u_1 = \frac{13}{3}$; $u_2 = \frac{40}{9}$; $u_3 = \frac{121}{27}$; $u_4 = \frac{364}{81}$.

2. On a : $u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3^{n+2} - 1}{3^n}\right) = \frac{1}{2}\left(9 - \frac{1}{3n}\right)$.

3. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{9}{2}$.

Exercices d'apprentissage

GÉNÉRALITÉS

♦ **Exercice 1 p. 297**

$u_0 = 3$; $u_1 = 3{,}1$; $u_2 = 3{,}14$; $u_3 = 3{,}141$; $u_4 = 3{,}1416$; $u_5 = 3{,}14159$; $u_6 = 3{,}141593$; $u_7 = 3{,}1415926$; $u_8 = 3{,}14159265$; $u_9 = 3{,}141592654$.

Exercice 2 p. 297

a) 0,1010010001 ; 0,101001000100001 ; 0,1010010001000010000001 b) $\frac{31}{32}$; $\frac{63}{64}$; $\frac{127}{128}$ c) 34 ; 55 ; 89.

Exercice 3 p. 297

1. $u_2 = 1$; $u_3 = 3$; $u_4 = 6$.
2. $\forall n \geq 2$, $u_{n+1} = n + u_n$. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$; donc : $u_9 = 36$; $u_{10} = 45$.

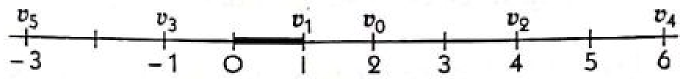
Exercice 4 p. 297

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = (2n)^2 = 4n^2 = 4u_n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} + u_{n-1} = (n+1)^2 + (n-1)^2 = 2n^2 + 2 = 2u_n + 2$.

Exercice 5 p. 297

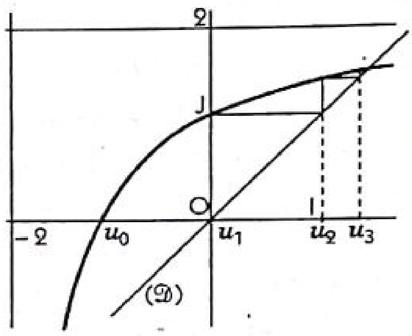
$v_0 = 2$; $v_1 = 1$; $v_2 = 4$; $v_3 = -1$; $v_4 = 6$.



Exercice 6 p. 297

1. $(\mathscr{C})$ est la branche d'hyperbole ci-contre.
Cette courbe coupe l'axe (OI) au point d'abscisse − 1 et l'axe (OJ) au point d'abscisse 1.

2. On a : $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On en déduit :
$u_1 = f(-1) = 0$; $u_2 = f(0) = 1$; $u_3 = f(1) = \frac{4}{3}$; $u_4 = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{7}{5}$.



Exercice 7 p. 297

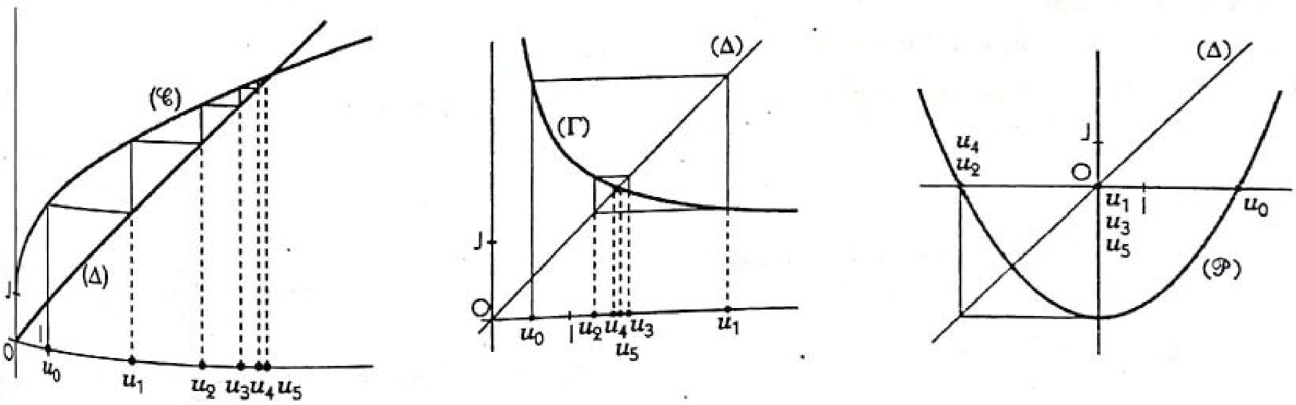
$(\mathscr{C})$: la représentation graphique de la fonction $x \mapsto 1 + 2\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$;

(Γ) : la repésentation graphique de la fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$;

$(\mathscr{P})$: la repésentation graphique de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{3} - 3$ sur $\mathbb{R}$;

(Δ) : la droite d'équation $y = x$.

On obtient les constructions suivantes.



ÉTUDE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

Exercice 8 p. 297

1. $u_1 = 2$; $u_2 = 2$; $u_3 = \frac{8}{3}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2^n\,(n-1)}{n\,(n+1)}$. Donc, la suite (u_n) est croissante.

Exercice 9 p. 297

a) $u_1 = 1$; $u_2 = \sqrt{2}$; $u_3 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

b) On peut conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$.

c) On démontre par réccurence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > u_{n-1}$; donc, la suite (u_n) est croissante.

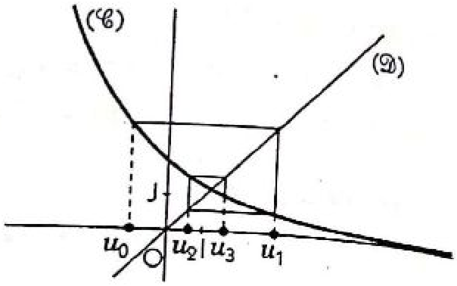
♦ Exercice 10 p. 297

a) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$; (u_n) croissante ; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ *b)* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$; (u_n) croissante ; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

c) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u_n) < 0$; (u_n) croissante ; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ *d)* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u_n) \geq 0$; (u_n) croissante ; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

e) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$; (u_n) croissante ; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ *f)* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$; (u_n) croissante ; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1.$

♦ Exercice 11 p. 297



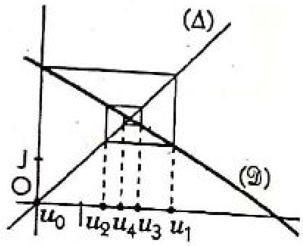
1. Voir construction ci-contre.

2. D'après cette construction, on peut conjecturer que la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

3. D'après le graphique cette suite admet une limite u telle que : $1 < u < 2$.

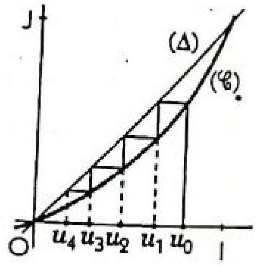
(Ce nombre est l'abscisse du point d'intersection de la courbe (𝒞) et de la droite (𝒟).)

♦ Exercice 12 p. 297



a) Soit (𝒟) et (Δ) les droites d'équations respectives $y = -\frac{1}{2}x + 3$ et $y = x$.
D'après la construction ci-contre, on peut conjecturer que la suite n'est ni croissante, ni décroissante.
On peut également conjecturer que cette suite a pour limite 2.

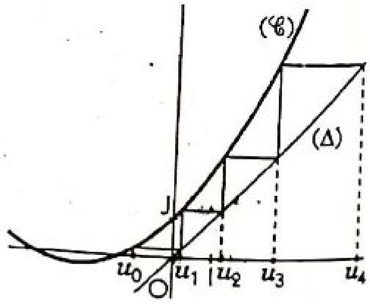
b) Soit (𝒞) et (Δ) les courbes d'équations respectives :
$y = \frac{x}{2-x}$ et $y = x$. On limitera les tracés à l'intervalle $[0\,;\,1]$.



On en déduit une construction des termes de la suite u_n.
On peut conjecturer que la suite est décroissante.
On peut également conjecturer que cette suite a pour limite l'abscisse du point d'intersection de (𝒞) et (Δ), c'est-à-dire 0.

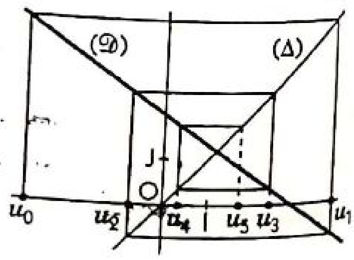
♦ Exercice 13 p. 298

a) $u_0 = -1$; $u_1 = 0{,}2$; $u_2 = 1{,}208$; $u_3 \approx 2{,}499$; $u_4 \approx 4{,}748$.



Soit (𝒞) et (Δ) les courbes d'équations respectives : $y = 0{,}2x^2 + x + 1$ et $y = x$. On en déduit une construction des termes de la suite.
On peut conjecturer que :
– la suite est croissante ;
– la suite n'admet pas de limite finie, elle est divergente.

b) $u_0 = -3$; $u_1 = 4$; $u_2 = -\frac{2}{3}$; $u_3 = \frac{22}{9}$; $u_4 = \frac{10}{27}$.
Soit (𝒟) et (Δ) les droites d'équations respectives : $y = -\frac{2}{3}x + 2$ et $y = x$.
On en déduit une construction des termes de la suite.
On peut conjecturer que :
– la suite n'est ni croissante, ni décroissante ;
– la suite a pour limite l'abscisse du point d'intersection des deux droites, c'est-à-dire $\frac{6}{5}$.



♦ Exercice 14 p. 298

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. **2.** $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. **3.** $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = 1$.

♦ Exercice 15 p. 298

a) (u_n) est une suite géométrique de raison -1 et de 1er terme 1.
b) La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
c) (u_n) est une suite arithmétique de raison -3 et de 1er terme -6.
d) (u_n) est une suite géométrique de raison -3 et de 1er terme 9.
e) La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
f) (u_n) est une suite géométrique de raison 10^{-2} et de 1er terme 1.

♦ Exercice 16 p. 298

a) (u_n) est une suite arithmétique de raison -3 et de 1er terme 7.
b) (u_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{2}{5}$ et de 1er terme 1.

♦ Exercice 17 p. 298

a) (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de 1er terme 8.
b) (u_n) est une suite géométrique de raison 4 et de 1er terme $\frac{1}{4}$.
c) (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{8}$ et de 1er terme 1.
d) (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de 1er terme 4.

♦ Exercice 18 p. 298

1. Soit $u_n = u_0 + nr$.

$$\begin{aligned} u_p + u_q &= (u_0 + pr) + (u_0 + qr) = 2u_0 + (p+q)r \\ &= 2\,u_0 + (p' + q')\,r \\ &= (u_0 + p'r) + (u_0 + q'r) = u_{p'} + u_{q'}. \end{aligned}$$

2. Soit $v_n = v_0\, a^n$.

$$\begin{aligned} v_p \times v_q &= v_0^2\, a^{p+q} = v_0^2\, a^{p'+q'} \\ &= v_0\, a^{p'} \times v_0\, a^{q'} = v_{p'} \times v_{q'}. \end{aligned}$$

♦ Exercice 19 p. 298

On désigne par r la raison de la suite cherchée.
On a : $x = y - r$ et $z = y + r$, donc y et r sont les solutions du système :

$$\begin{cases} (y-r) + y + (y+r) = 9 \\ (y-r)^2 + y^2 + (y+r)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 9 \\ 3y^2 + 2r^2 = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ r^2 = 16 \end{cases}.$$

Si $r = 4$, on a : $(x, y, z) = (-1\,;\,3\,;\,7)$. Si $r = -4$, on a : $(x, y, z) = (7\,;\,3\,;\,-1)$.

♦ Exercice 20 p. 298

On désigne par q la raison de la suite cherchée.
On a : $y = qx$ et $z = q^2x$, donc x et q sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x + qx + q^2x = 63 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{qx} + \dfrac{1}{q^2x} = \dfrac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + q + q^2) = 63 \\ \dfrac{1 + q + q^2}{q^2x} = \dfrac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 + q + q^2) = 63 \\ q^2x^2 = 16 \times 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} qx = 12 \\ 4q^2 - 17q + 4 = 0 \end{cases}$$

Si $q = 4$, on a : $(x, y, z) = (3\,;\,12\,;\,48)$. Si $q = \frac{1}{4}$, on a : $(x, y, z) = (48\,;\,12\,;\,3)$.

♦ Exercice 21 p. 298

a) $s_1 = 5n^2 + 5n + 1$ *b)* $s_2 = \dfrac{10^{n+1} - 1}{9}$ *c)* $s_3 = \dfrac{1 - (-10)^{n+1}}{11}$.

♦ Exercice 22 p. 298

Chaque année, l'effectif de la population est multiplié par 1,02.

- Après 1 an, la population est : $P_1 = 50 \times 10^6 \times 1{,}02 = 51\,000\,000$.
- Après 2 ans, la population est : $P_2 = 50 \times 10^6 \times (1{,}02)^2 = 52\,020\,000$.
- Après 10 ans, la population est : $P_{10} = 50 \times 10^6 \times (1{,}02)^{10} \approx 60\,950\,000$.

(a_n) est une suite géométrique de premier terme 100 et de raison $\frac{1}{2}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = 10 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ et $a_n = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

♦ **Exercice 34 p. 299**

1. *a)* $u_0 = 16$; $u_1 = 16 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$; $u_2 = 8\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 8$; $u_3 = 8 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_{n-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$; donc, (u_n) est une suite géométrique de premier terme 16 et de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 16 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2. *a)* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n-1}A_n = u_n$; donc : $s_n = u_1 + u_1 + ... + u_n = 16 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\sqrt{2} - 1}$.

On en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = 16(\sqrt{2} + 1)$.

3. *a)* $a_0 = \frac{1}{2} \times (u_1)^2 = 64$; $a_1 = \frac{1}{2} \times (u_2)^2 = 32$; $a_2 = \frac{1}{2} \times (u_3)^2 = 16$; $a_3 = \frac{1}{2} \times (u_4)^2 = 8$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{2} \times a_{n-1}$; donc, (a_n) est une suite géométrique de premier terme 64 et de raison $\frac{1}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_n = 128 \times [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n]$; donnc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sigma_n = 128$.

♦ **Exercice 35 p. 300**

1. Chaque étape consiste à découper un ou plusieurs carrés non hachurés en 9 carrés égaux et à en hachurer 1 sur les 9. Donc, après chaque découpage, le côté du carré est divisé par 3. On en déduit :

- après 1 découpage, il reste 8 carrés de côtés $\frac{1}{3}$ non hachurés ;
- après 2 découpages, il reste 8×8, c'est-à-dire 8^2 carrés de côtés $\frac{1}{3^2}$ non hachurés ;
- après 3 découpages, il reste $8^2 \times 8$, c'est-à-dire 8^3 carrés de côtés $\frac{1}{3^3}$ non hachurés...

Donc, si après $n - 1$ découpages, il reste 8^{n-1} carrés de côtés $\frac{1}{3^{n-1}}$ non hachurés, alors après n découpages, il reste $8^{n-1} \times 8$, c'est-à-dire 8^n carrés carrés de côtés $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3^{n-1}}$, c'est-à-dire $\frac{1}{3^n}$, non hachurés.

On en déduit que pour tout entier naturel n non nul, après n découpages, il reste 8^n carrés de côtés $\frac{1}{3^n}$ non hachurés

2. *a)* $a_1 = 1 - 8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$; $a_2 = 1 - 8^2 \times \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 = 1 - 8^2 \times \frac{1}{3^4} = \frac{17}{81}$; $a_2 = 1 - 8^3 \times \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 = 1 - 8^3 \times \frac{1}{3^6} = \frac{217}{729}$;

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 1 - 8^n \times \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = 1 - 8^n \times \frac{1}{3^{2n}} = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1$.

♦ **Exercice 36 p. 300**

1. $u_1 = 1$; $u_2 = 1{,}1$; $u_3 = 1{,}11$; $u_4 = 1{,}111$; $u_5 = 1{,}1111$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{10^{n-1}}$.

u_n est la somme de n termes consécutifs de la suite $\left(\frac{1}{10^n}\right)$ qui est une suite géométrique de raison 0,1 et de premier terme 1.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{10}{9} \times [1 - (0{,}1)^n]$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{10}{9}$.

4. $s_n = \frac{10n}{9} - \frac{10}{9} [\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} ...+ \frac{1}{10^n}] = \frac{10n}{9} - \frac{10}{9} \left[\frac{1}{10} \left(\dfrac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}}\right)\right] = \frac{10n}{9} - \frac{10}{9^2} \left(\frac{1}{10^n} - 1\right)$.

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

♦ Exercice 37 p. 300

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{9}{10^{n+1}}$.

2. On a : $u_1 = 0{,}1 + \dfrac{9}{10^2}$; $u_2 = u_1 + \dfrac{9}{10^3}$; $u_3 = u_2 + \dfrac{9}{10^4}$; … ; $u_n = u_{n-1} + \dfrac{9}{10^{n+1}}$.

En additionnant membre à membre les n égalités, on obtient : $u_n = 0{,}1 + 9\left(\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \dots + \dfrac{1}{10^{n+1}}\right)$.

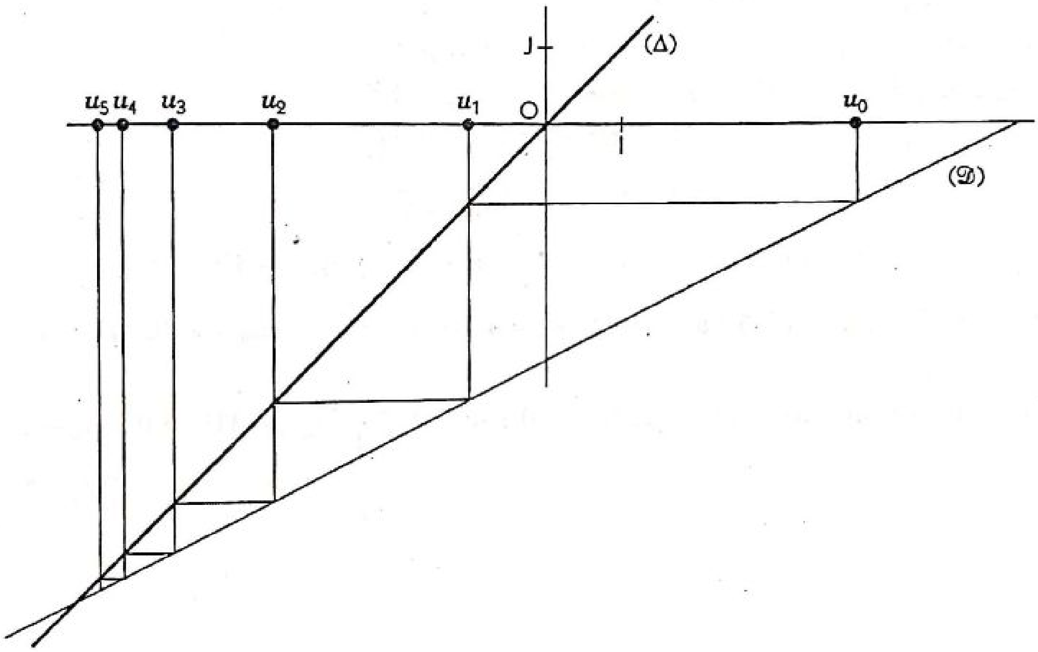
Entre parenthèses, on a la somme de n termes de la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ et de premier terme $\dfrac{1}{10^2}$.

Donc : $u_n = 0{,}1 + \dfrac{9}{10^2} \times \dfrac{1 - \dfrac{1}{10^n}}{1 - \dfrac{1}{10}} = 0{,}1 + 0{,}1\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right) = 0{,}2 - \dfrac{1}{10^{n+1}}$.

3. On en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0{,}2$.

♦ Exercice 38 p. 300

1. Dans le repère (O, I, J), on trace les droites (Δ) et $(\mathscr{D})$ d'équations respectives $y = x$ et $y = \dfrac{1}{2}x - 3$.
On construit u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 comme indiqué sur la figure.



2. a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{1}{2}u_n - 3\right) - \left(\dfrac{1}{2}u_{n-1} - 3\right) = \dfrac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$.

b) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $v_n = u_n - u_{n-1}$.
(v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - u_0 = -5$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} = -5\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$; donc, la suite (u_n) est décroissante.

3. a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + 6 = \left(\dfrac{1}{2}u_{n-1} - 3\right) + 6 = \dfrac{1}{2}u_{n-1} + 3 = \dfrac{1}{2}(u_{n-1} + 6)$.

b) Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $w_n = u_n + 6$.
La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = u_0 + 6 = 10$.
On en déduit que pour tout entier naturel n, on a : $u_n + 6 = (u_0 + 6)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -6$.

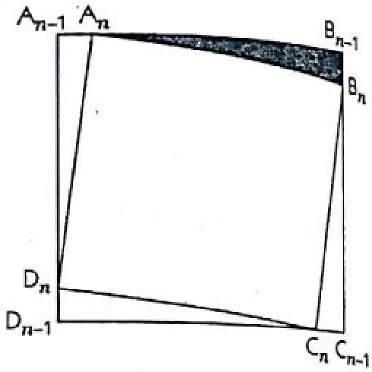
♦ Exercice 39 p. 300

Les distances successives, exprimées en mètres, séparant Achille de la tortue sont : 100 ; 10 ; 1 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; …

Ces distances forment une suite géométrique de raison 0,1 et de premier terme $u_0 = 100$.
Le terme général de cette suite est : $u_n = 100 \times (0{,}1)^n$.
La somme des n premiers termes de cette suite est : $s_n = 100 \times \frac{1-(0{,}1)^n}{1-0{,}1} = \frac{1\,000}{9} \times [1-(0{,}1)^n]$.
On en déduit :

- la limite de cette suite est 0, donc Achille rattrapera la tortue ;
- la limite de s_n est $\frac{1\,000}{9}$, donc il aura alors parcouru 111,111... m.

♦ **Exercice 40 p. 300**



1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère les carrés de côtés respectifs a_{n-1} et a_n.
Dans le triangle rectangle $A_nB_{n-1}B_n$, on a :
$A_nB_n^{\,2} = A_nB_{n-1}^{\,2} + B_{n-1}B_n^{\,2} \iff a_n^{\,2} = (a_{n-1}-1)^2 + 1$.
On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sqrt{1+(a_{n-1}-1)^2}$.

2. Dans le triangle rectangle $A_nB_{n-1}B_n$, on a :
$1 \leq A_nB_n \leq A_nB_{n-1} + B_{n-1}B_n \Rightarrow 1 \leq a_n \leq a_{n-1}$.
Donc, la suite (a_n) est décroissante et minorée strictement par 1.

3. *a)* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sqrt{1+(a_{n-1}-1)^2} \iff a_n^{\,2} = 1 + (a_{n-1}-1)^2$
$\iff a_n^{\,2} - 1 = (a_{n-1}-1)^2$
$\iff a_n - 1 = \frac{(a_{n-1}-1)^2}{a_n+1}$.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 1 \Rightarrow a_n + 1 \geq 2$; donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq a_n - 1 \leq \frac{1}{2}(a_{n-1}-1)^2$.

c) On a : $u_0 = 8$; $u_1 = 7{,}07$; $u_2 = 6{,}15$; $u_3 = 5{,}24$; $u_4 = 4{,}36$; $u_5 = 3{,}51$; $u_6 = 2{,}70$; $u_7 = 1{,}97$; ...
Donc : si $n \geq 7$, alors $a_n \leq 2$.
On en déduit que : pour tout entier n tel que $n \geq 8$, $0 \leq a_n - 1 \leq \frac{1}{2}(a_{n-1}-1)^2 \Rightarrow 0 \leq a_n - 1 \leq \frac{1}{2^n}(a_0-1)^2$
$\Rightarrow 0 \leq a_n - 1 \leq \frac{7}{2^n}$.

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1$.

16. Statistiques

(pages 301 à 318 du livre de l'élève)

Objectifs

- Étendre aux séries statistiques à modalités regroupées en classes les notions de caractéristiques de position et de dispersion.
- Représenter les séries à deux caractères quantitatifs et aborder l'ajustement linéaire.

Commentaires

- Comme souvent en statistiques, le cours comportera essentiellement des exercices bien choisis et peu nombreux.
- Les notions relatives aux séries à modalités regroupées en classes sont analogues à celles qui ont été présentées en seconde pour les séries à modalités non regroupées en classes. En particulier, la moyenne, la variance et l'écart type se calculent de la même manière, en remplaçant chaque classe par son centre.

La seule nouveauté est l'interpolation linéaire, qui est ici très souvent utilisée. Il faudra veiller à chaque fois que les calculs soient correctement posés et effectués ; il ne s'agit en fait que de la recherche d'une coordonnée d'un point dont on connaît l'autre coordonnée, ce point appartenant à une droite définie par deux points.

- Pour déterminer la droite de régression par la méthode des moindres carrés, l'élève devra apprendre à dresser un tableau de calculs, à représenter la droite obtenue et à juger de la fiabilité de son résultat ; pour ce faire, il pourra s'entraîner à faire un « ajustement manuel ».

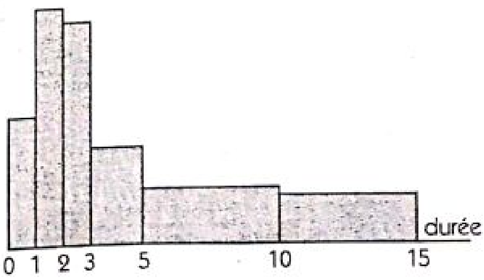
Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Séries statistiques présentant un regroupement en classes • Effectifs cumulés, fréquences cumulées. • Caractéristiques de position. • Caractéristiques de dispersion.	• Déterminer les effectifs (fréquences) cumulé(e)s croissant(e)s ou décroissant(e)s, construire les polygones correspondants. • Déterminer la classe modale ; déterminer la médiane graphiquement ou par interpolation linéaire. • Calculer la moyenne, l'écart moyen, la variance et l'écart type. • Savoir interpréter l'écart type d'une série statistique.
Séries statistiques à deux caractères • Organisation des données. - séries marginales ; - nuage de points ; - point moyen d'un nuage ; • Ajustement linéaire. - covariance ; - droites de régression de y en x et de x en y ; - coefficient de corrélation.	• Construire le nuage de points. • Déterminer le point moyen du nuage. • Calculer la covariance, le coefficient de corrélation. • Déterminer et construire les droites de régression. • Savoir apprécier la fiabilité d'une estimation en fonction du coefficient de corrélation.

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 306

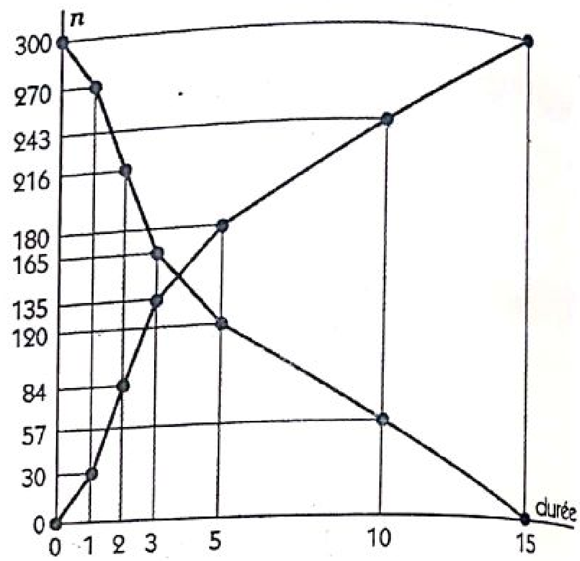
1. Le graphique ci-contre est un histogramme représentant cette série.



2. On a :

Classe	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[
Eff. cum. croissant	30	84	135	180	243	300
Eff. cum. décroissant	300	270	216	165	120	57

Les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants sont représentés ci-contre.



3. *a)* L'ordonnée n_1 du point d'abscisse 4 du polygone des effectifs cumulés décroissants vérifie :

$$\frac{n_1 - 165}{4 - 3} = \frac{120 - 165}{5 - 3}.$$

D'où : $n_1 = 142{,}5$.

Il y a 142 communications de durée supérieure à 4 min.

b) L'ordonnée n_2 du point d'abscisse 7 du polygone des effectifs cumulés croissants vérifie :

$$\frac{n_2 - 180}{7 - 5} = \frac{243 - 180}{10 - 5}.$$

D'où : $n_2 = 205.2$

Il y a 205 communications de durée inférieure à 7 min.

c) Il y a dont 300 – 142 = 158 communications de durée inférieure à 4 min et 300 – 205 = 95 communications de durée supérieure à 7 min.

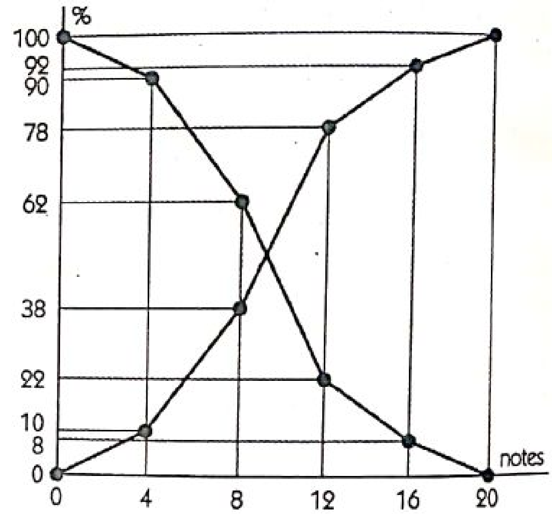
Donc il y a 300 – (158 + 95) = 47 communications de durée comprise entre 4 et 7 min.

◆ Exercice 1.b p. 306

1. On a :

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Eff. cum. croissant	10 %	38 %	78 %	92 %	100 %
Eff. cum. décroissant	100 %	90 %	62 %	22 %	8 %

Les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes sont représentées ci-contre.



2. *a)* La classe modale est [8 ; 12].

La médiane m est l'abscisse du point du polygone des fréquences cumulées croissantes dont l'ordonnée est 50%.

Elle vérifie : $\frac{50 - 38}{m - 8} = \frac{78 - 38}{12 - 8}$; d'où $m = 9{,}2$.

b) La moyenne x des notes obtenues par l'élève qui s'est classé quinzième au concours est l'abscisse du point du polygone des fréquences cumulées décroissantes dont l'ordonnée est 30%.

Elle vérifie : $\frac{30 - 62}{x - 8} = \frac{22 - 62}{12 - 8}$; d'où : $x = 11{,}2$.

◆ Exercice 1.c p. 306

1. La médiane m appartient à l'intervalle [165 ; 170].

Elle vérifie : $\frac{20 - 11}{m - 165} = \frac{21 - 11}{170 - 165}$;

D'où : $m = 169{,}5$.

D'après le tableau ci-contre, on a :

$\overline{x} = \frac{6\,780}{40} = 169{,}5$.

Centre de la classe (x_i)	157,5	162,5	167,5	172,5	177,5	182,5	Total
n_i	3	8	10	10	7	2	40
$n_i x_i$	472,5	1 300	1 675	1 725	1 242,5	365	6 780

2. Le tableau de calculs est dressé ci-contre.

Centre de la classe (x_i)	Effectif (n_i)	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$n_i\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$n_i x_i^2$
157,5	3	12	36	74 418,75
162,5	8	7	56	211 250
167,5	10	2	20	280 562,5
172,5	10	3	30	297 562,5
177,5	7	8	56	220 543,75
182,5	2	13	26	66 612,5
	40		**224**	**1 150 950**

3. On en déduit :

l'écart moyen : $e_m = \frac{224}{40} = 5{,}6$;

l'écart type : $\sigma = \sqrt{\frac{1\,150\,950}{40} - 169{,}5^2}$;

d'où : $\sigma \approx 6{,}595$.

♦ Exercice 1.d p. 306

Centre de la classe (x_i)	Effectif (n_i)	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
2	5	10	20
6	14	84	504
10	20	200	2 000
14	7	98	1 372
18	4	72	1 296
Total	**50**	**464**	**5 192**

1. Du tableau de calculs ci-contre, on déduit :

$\overline{x} = \dfrac{464}{50} = 9{,}28$.

2. *a)* On a : $V = \dfrac{5\,192}{50} - 9{,}28^2 \approx 17{,}722$; $\sigma \approx 4{,}210$.

b) On a : $\overline{x} - \sigma = 5{,}070$ et $\overline{x} + \sigma = 13{,}490$.

Soit y_1 et y_2 les ordonnées respectives des points d'abscisses 4,21 et 13,49 du polygone des fréquences cumulées croissantes.

On a : $\dfrac{y_1 - 10}{4{,}21 - 4} = \dfrac{38 - 10}{8 - 4}$ et $\dfrac{y_2 - 78}{13{,}49 - 12} = \dfrac{92 - 78}{16 - 12}$. D'où : $y_1 = 11{,}47$ et $y_2 = 83{,}215$.

On a : $y_1 - y_2 = 71{,}745$. Donc, 71,745 % des élèves ont une moyenne dans l'intervalle $]\overline{x} - \sigma\,;\overline{x} + \sigma[$.

♦ Exercice 2.a p. 314

1. On obtient le tableau à double entrée ci-dessous.

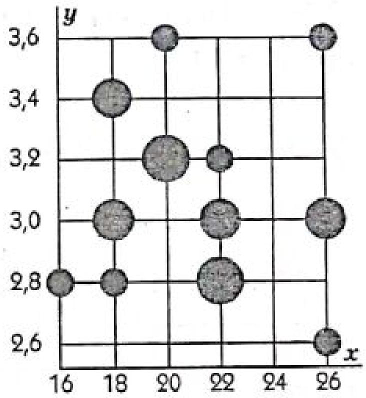
y_j \ x_i	16	18	20	22	26
2,6	0	0	0	0	1
2,8	1	1	0	3	0
3	0	2	0	2	2
3,2	0	0	3	1	0
3,4	0	2	0	0	0
3,6	0	0	1	0	1

2. Les séries marginales sont présentées dans les tableaux ci-dessous.

Age (x_i)	16	18	20	22	26
Effectif	1	5	4	6	4

Poids (y_j)	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6
Effectif	1	5	6	4	2	2

3. Le nuage de points est représenté ci-dessous.



♦ Exercice 2.b p. 314

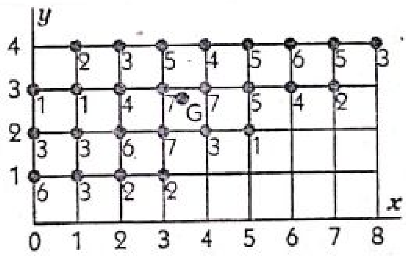
1. *a)* Les séries marginales sont représentées dans les tableaux ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	10	9	15	21	14	11	10	7	3

y_l	1	2	3	4
n_l'	13	23	31	33

b) Les moyennes respectives des séries marginales sont : $\overline{x} = 3{,}46$ et $\overline{y} = 2{,}84$.

2. Le nuage et son point sont représentés ci-contre.



♦ Exercice 2.c p. 314

1. Le nuage est représenté ci-contre.

2. On a le tableau de calculs ci-contre.

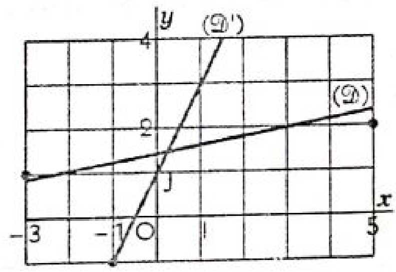
	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
	− 3	1	9	1	− 3
	− 1	− 1	1	1	1
	0	4	0	16	0
	5	2	25	4	10
Total :	1	6	35	22	8

On en déduit : $\overline{x} = 0{,}25$; $\overline{y} = 1{,}5$.

3. D'où $V(x) = \dfrac{35}{4} - 0{,}25^2 = 8{,}6875$;

$V(y) = \dfrac{22}{4} - 1{,}5^2 = 3{,}25$;

$\mathrm{Cov}(x, y) = \dfrac{8}{4} - 0{,}25 \times 1{,}5 = 1{,}625$.

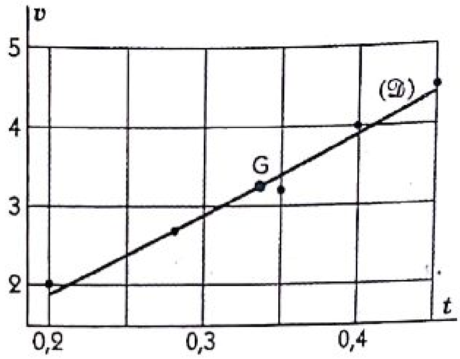


La droite $(\mathscr{D})$ de régression de y en x a pour équation : $y - \overline{y} = \dfrac{1{,}625}{8{,}6875}(x - \overline{x})$; ou : $y = 0{,}187x + 1{,}453$.

La droite $(\mathscr{D}')$ de régression de x en y a pour équation : $x - \overline{x} = \dfrac{1{,}625}{3{,}25}(y - \overline{y})$; ou : $y = 2x + 1$.

4. Le coefficient de corrélation linéaire est : $r = \dfrac{1{,}625}{\sqrt{8{,}6875}\,\sqrt{3{,}25}}$; donc : $r = 0{,}306$.

♦ **Exercice 2.d p. 314**



t_i	v_i	t_i^2	v_i^2	t_iv_i
0,20	2	0,04	4	0,40
0,28	2,7	0,0784	7,29	0,756
0,35	3,2	0,1225	10,24	1,12
0,40	4	0,16	16	1,6
0,45	4,5	0,2025	20,25	2,025
1,68	**16,4**	**0,6034**	**57,78**	**5,901**

Total : (last row)

1. Le nuage est représenté ci-dessus.

2. On déduit du tableau de calculs ci-dessus : $\overline{t} = 0{,}336$; $\overline{v} = 3{,}28$.

D'où le point moyen du nuage : G(0,336 ; 3,28).

3. *a)* On a : $V(t) = 0{,}00778$; $V(v) = 0{,}7976$; $Cov(t, v) = 0{,}07812$. Soit r le coefficient de corrélation linéaire. On a : $r \approx 0{,}9917$. Donc il y a une bonne corrélation linéaire entre v et t et un ajustement linéaire est justifié.

b) La droite (𝒟) de régression de v en t a pour équation :

$v - 3{,}28 = 10{,}04(t - 0{,}336)$; ou : $v = 10{,}04\,t - 0{,}0934$.

4. On a : $g \approx 10$.

Exercices d'entraînement

♦ **Exercice 1 p. 315**

1. On obtient le tableau statistique suivant.

Classe	[0 ; 300[	[300 ; 600[	[600 ; 900[	[900 ; 1 200[	[1 200 ; 1 500[
Effectif	21	14	6	6	2
Fréquence (%)	42,86	28,57	12,245	12,245	4,08
Fréquence cum. croissante	42,86	71,43	83,675	95,92	100

2. La classe modale de cette série est : [0 ; 300].

3. *a)* La moyenne de la série avant regroupement en classes est : $\overline{x} = \frac{22\,140}{49}$; d'où $\overline{x} \approx 451{,}84$.

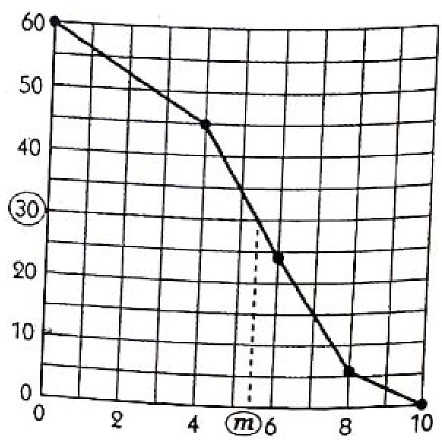
b) Du tableau de calculs ci-contre, on déduit la moyenne de la série après regroupement en classes :

$\overline{x'} = \frac{22\,950}{49}$; d'où $\overline{x'} \approx 468{,}37$.

Centre de la classe (x_i)	350	450	750	1 050	1 350	Total
Effectif (n_i)	21	14	6	6	2	49
n_ix_i	3 150	6 300	4 500	6 300	2 700	22 950

♦ **Exercice 2 p. 315**

1. Le polynôme des effectifs cumulés décroissants est représenté ci-contre.



2. D'après le graphique, on a : $m \approx 4{,}3$.

Par interpolation linéaire, on obtient : $\frac{30-45}{m-4} = \frac{24-45}{6-4}$;

On en déduit : $m \approx 5{,}4285$.

3. On a le tableau suivant :

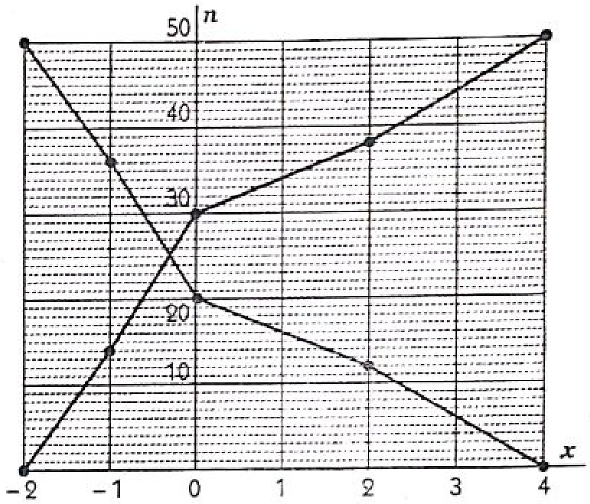
Centre de la classe (x_i)	2	5	7	9	Total
Effectif (n_i)	15	21	18	6	60
n_ix_i	30	105	126	54	315

On en déduit la moyenne : $\overline{x} = \frac{315}{60}$; d'où $\overline{x} = 5{,}25$.

♦ **Exercice 3 p. 315**

1. On obtient le tableau suivant.

Classe	[– 2 ; – 1[	[– 1 ; 0[	[0 ; 2[	[2 ; 4[
Eff. cum. croissant	14	30	38	50
Eff. cum. décroissant	50	36	20	12



2. Les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants sont représentés ci-contre.

3. *a)* Le point d'abscisse 1 du polygone des effectifs cumulés croissants a pour ordonnée 34 ; il y a donc 34 individus dont la modalité est inférieure à 1.

b) Le point d'abscisse – 0,4 du polygone des effectifs cumulés décroissants a pour ordonnée 26,5 ; il y a donc 26 individus dont la modalité est supérieure à – 0,4.

4. *a)* Le point d'ordonnée 9 du polygone des effectifs cumulés décroissants a pour abscisse 2,5 ; les 9 individus de modalité la plus grande appartiennent à l'intervalle [2,5 ; 4].

b) Le point d'ordonnée 20 du polygone des effectifs cumulés croissants a pour abscisse – 0,63 ; les 20 individus de modalité la plus petite appartiennent à l'intervalle [– 0,63 ; 2].

♦ **Exercice 4 p. 315**

On obtient le tableau ci-contre.

Centre des classes (x_i)	1,5	4	6	8,5	**Total**
Fréquence (f_i)	10 %	25 %	35 %	30 %	**1**
$f_i x_i$	0,15	1	2,1	2,55	**5,8**
$f_i x_i^2$	0,225	4	12,6	21,675	**38,5**

On en déduit :

- la moyenne $\bar{x} = 5{,}8$;
- la variance $V = 38{,}5 - 5{,}8^2 = 4{,}86$;
- l'écart type $\sigma = \sqrt{4{,}86} \approx 2{,}205$.

♦ **Exercice 5 p. 315**

1. On a le tableau de calcul suivant :

Centre des classes (x_i)	55	65	75	85	95	105	115	125	**Total**
Effectif (n_i)	10	15	35	40	30	20	15	5	**170**
$n_i x_i$	550	975	2 625	3 400	2 850	2 100	1 725	625	**14 850**
$n_i x_i^2$	30 250	63 375	196 875	289 000	270 750	220 500	198 375	78 125	**1 347 250**

On en déduit : $\bar{x} = \dfrac{14\,850}{170} \approx 87{,}35$; $V = \dfrac{1\,347\,250}{170} - 87{,}35^2 \approx 294{,}98$; $\sigma \approx 17{,}17$.

2. La médiane m de la série appartient à l'intervalle [80 ; 90[.

On a : $\dfrac{85 - 60}{m - 80} = \dfrac{100 - 60}{90 - 80}$; donc : $m = 86{,}25$.

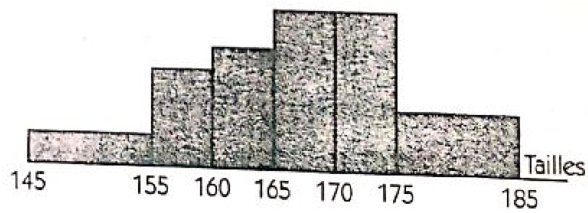
♦ **Exercice 6 p. 315**

1. L'histogramme des effectifs est représenté ci-contre.

2. Les classes modales sont [165 ; 170] et [170 ; 175].

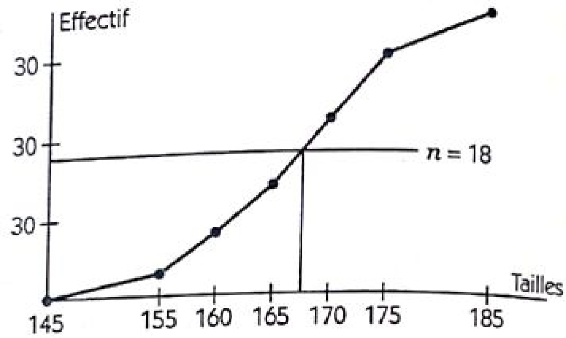
On a le tableau suivant :

Centre des classes (x_i)	150	157,5	162,5	167,5	172,5	180	**Total**
Effectif (n_i)	3	5	6	8	8	6	**36**
$n_i x_i$	450	787,5	975	1 340	1 380	1 080	**6 012,5**



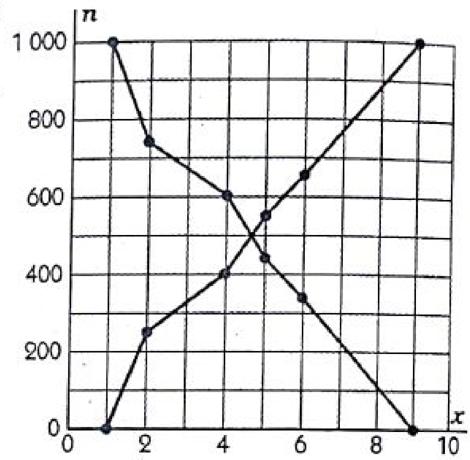
On en déduit la moyenne : $\overline{x} = \frac{612{,}5}{36} \approx 167$.

3. Le polygone des effectifs cumulés croissants est représenté ci-contre. La médiane de la série est le milieu de l'intervalle [165 ; 170], c'est à dire 167,5.



♦ Exercice 7 p. 315

1. Les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants sont représentés ci-contre.



2. *a)* Soit n_1 l'ordonnée du point d'abscisse 3 du polygone des effectifs cumulés croissants.

On a : $n_1 = 258 + \frac{133}{2} = 324{,}5$.

Il y a donc 324 individus dont la modalité est inférieure à 3.

b) Soit n_2 l'ordonnée du point d'abscisse 5,3 du polygone des effectifs cumulés décroissants.

On a : $n_2 = 445 + 0{,}3 \times (337 - 445) = 412{,}6$.

Il y a donc 412 individus dont la modalité est supérieure à 5,3.

c) Il y a 1 000 – (324 + 412) = 264 individus dont la modalité est comprise entre 3 et 5,3.

3. On a le tableau ci-contre. On en déduit :

la moyenne : $\overline{x} = 4{,}6455$;

la variance : $V = 27{,}32175 - 4{,}6455^2$;

d'où $V = 5{,}741$;

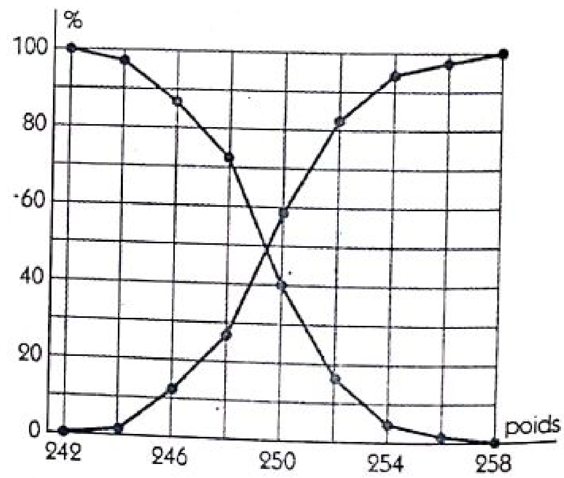
l'écart type : $\sigma \approx 2{,}396$.

Centre des classes (x_i)	1,5	3	4,5	5,5	7,5	**Total**
Effectif (n_i)	258	133	164	108	337	**1 000**
$n_i x_i$	387	399	738	594	2 527,5	**4 645,5**
$n_i x_i^2$	580,5	1 197	3 321	3 267	18 956,25	**27 321,75**

♦ Exercice 8 p. 315

1. *a)* On a le tableau des fréquences cumulées suivant.

Classe	Fréquence (%)	Fréq. cum. croissante (%)	Fréq. cum. décroissante (%)
[242 ; 244[	1,6	1,6	100
[244 ; 246[	11,2	12,8	98,4
[246 ; 248[	14,4	27,2	87,2
[248 ; 250[	32	59,2	72,8
[250 ; 252[	24	83,2	40,8
[252 ; 254[	12	95,2	16,8
[254 ; 256[	3,2	98,4	4,8
[256 ; 258[	1,6	100	1,6



On en déduit les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes représentées ci-contre.

b) La médiane m de la série appartient à l'intervalle [248 ; 250].

On a : $m = 248 + 2 \times \frac{50 - 27{,}2}{59{,}2 - 27{,}2} = 249{,}425$.

2. *a)* On a le tableau de calculs ci-après. On en déduit : $\overline{x} = \frac{31\,181}{125} = 249{,}448$;

$\sigma = \sqrt{\frac{7\,779\,013}{125} - 249{,}448^2}$; d'où $\sigma \approx 2{,}793$.

• On a : $\overline{x} - \sigma = 246{,}655$; $\overline{x} + \sigma = 252{,}241$.

Soit f_1 et f_2 les ordonnées respectives des points d'abscisses 246,655 et 252,241 du polygone des fréquences cumulées croissantes.

On a : $\frac{f_1 - 12{,}8}{246{,}655 - 246} = \frac{27{,}2 - 12{,}8}{248 - 246}$;

$\frac{f_2 - 83{,}2}{252{,}241 - 252} = \frac{95{,}2 - 83{,}2}{254 - 252}$.

Donc : $f_1 \approx 17{,}5$ et $f_2 \approx 84{,}6$.

On a : $84{,}6 - 17{,}5 = 67{,}1$; donc 67,1% des sacs ont un poids compris entre $\overline{x} - \sigma$ et $\overline{x} + \sigma$.

Centre de la classe (x_i)	Effectif (n_i)	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
243	2	486	118 098
245	14	3 430	840 350
247	18	4 446	1 098 162
249	40	9 960	2 480 040
251	30	7 530	1 890 030
253	15	3 795	960 135
255	4	1 020	260 100
257	2	514	132 098
Total	**125**	**31 181**	**7 779 013**

• On a : $\overline{x} - 2\sigma = 243{,}862$; $\overline{x} + 2\sigma = 255{,}034$. Soit f_1' et f_2' les ordonnées respectives des points d'abscisses 243,862 et 255,034. Par interprétation linéaire, on obtient : $f_1' \approx 1{,}5$ et $f_2' \approx 96{,}9$.

On a : $96{,}9 - 1{,}5 = 95{,}4$; donc 95,4 % des sacs ont un poids compris entre $\overline{x} - 2\sigma$ et $\overline{x} + 2\sigma$.

♦ Exercice 9 p. 316

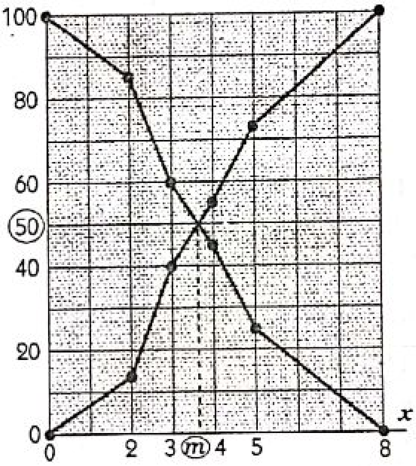
1. Les aires des rectangles sont proportionnelles aux fréquences donc si on désigne par f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 les fréquences respectives des classes [0 ; 2[, [2 ; 3[, [3 ; 4[, [4 ; 5[et [5 ; 8[, on a :

$$\frac{f_1}{8} = \frac{f_2}{15}\ \frac{f_3}{9} = \frac{f_4}{11} + \frac{f_5}{15} = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5}{8 + 15 + 9 + 11 + 15} = \frac{1}{58}.$$

On en déduit le tableau des fréquences de la série.

Classes	[0 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[	[5 ; 8[
Fréquences (%)	13,79	25,86	15,52	18,97	25,86

Les classes modales de la série sont [2 ; 3[et [5 ; 8[.



2.

Classes	[0 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[	[5 ; 8[
Fréquences (%)	13,79	25,86	15,52	18,97	25,86
Fréq. cum croissante (%)	13,79	39,65	55,17	74,14	100
Fréq. cum décroissante (%)	100	86,21	60,35	44,83	25,86

Les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes sont représentés ci-contre. La médiane m appartient à l'intervalle [3 ; 4].

On a : $\frac{50 - 39{,}65}{m - 3} = \frac{55{,}17 - 39{,}65}{4 - 3}$; d'où : $m \approx 3{,}68$.

3. On a le tableau de calculs ci-contre. On en déduit :

$\overline{x} = 3{,}86215$;

$\sigma = \sqrt{18{,}354 - 3{,}86215^2}$

$\approx 1{,}8725$.

Centre des classes (x_i)	1	2,5	3,5	4,5	6,5	Total
Fréquences (f_i)	0,1333	0,25	0,1667	0,2	0,25	1
$f_i x_i$	0,1333	0,625	0,5834	0,9	1,625	3,8668
$f_i x_i^2$	0,1333	1,5625	2,0421	4,05	10,5625	18,3504

4. Le tableau des effectifs est dressé ci-contre.

Classes	[0 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[	[5 ; 8[
Effectifs	99	186	112	137	186

♦ Exercice 10 p. 316

1. Le tableau des effectifs est dressé ci-contre.

Classes	[60 ; 80[	[80 ; 90[	[90 ; 110[	[110 ; 130[	[130 ; 180[
Effectifs	32	74	346	48	30

2. *a)* Le pourcentage de véhicules en infraction est la fréquence de la classe [130 ; 180], c'est à dire $\frac{30}{530} = 5{,}66$ %.

b) Soit n l'ordonnée du point d'abscisse 140 du polygone des effectifs cumulés croissants.

On a : $\frac{n - 500}{140 - 130} = \frac{530 - 500}{180 - 130}$; donc $n = 506$. Il y a 506 voitures roulant à une vitesse inférieure ou égale à 140 km/h, donc 24 amendes seront distribuées.

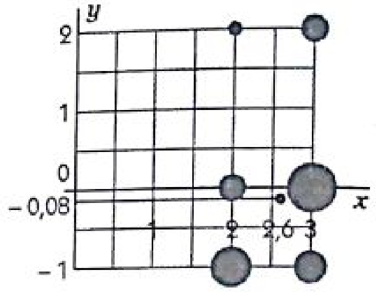
3. La classe modale est : [90 ; 110[.

Du tableau de calculs ci-contre, on déduit : $\overline{x} = \dfrac{53\,540}{530} \approx 101{,}02$ km/h.

Centre des classes (x_i)	70	85	100	120	155	Total
Effectifs (n_i)	32	74	346	48	30	530
$n_i x_i$	2 240	6 290	34 600	5 760	4 650	53 540

♦ Exercice 11 p. 316

1. Le nuage de points est représenté ci-contre.



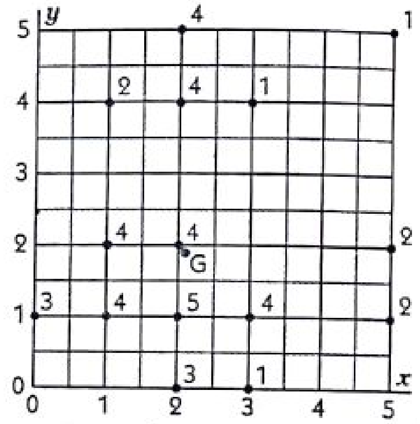
2. on a : $\overline{y} = \dfrac{10 \times (-1) + 11 \times 0 + 4 \times 2}{25} = -0{,}08$;

$\overline{x} = \dfrac{10 \times 2 + 15 \times 3}{25} = 2{,}6$.

Les coordonnées de G sont : (– 0,08 ; 2,6).

♦ Exercice 12 p. 316

1. Le nuage de point est représenté ci-contre.



2. Les coordonnées du point moyen sont $(\overline{x} ; \overline{y})$ tel que :

$\overline{x} = \dfrac{3 \times 0 + 8 \times 1 + 18 \times 2 + 6 \times 3 + 5 \times 5}{40} = 2{,}175$;

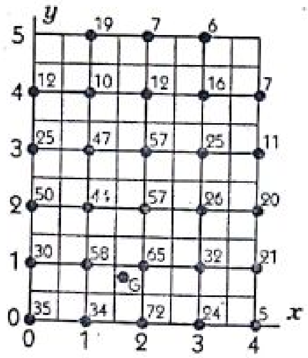
$\overline{y} = \dfrac{4 \times 0 + 18 \times 1 + 8 \times 2 + 7 \times 4 + 3 \times 5}{40} = 1{,}925$.

♦ Exercice 13 p. 316

1. Les tableaux des effectifs et des fréquences des séries marginales sont dressés ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4
Effectif	152	212	243	129	64
Fréquence (%)	19	26,5	30,375	16,125	8

y_i	0	1	2	3	4	5
Effectif	170	206	197	138	57	32
Fréquence (%)	21,25	25,75	24,625	17,25	7,125	4



2. Le nuage de points est représenté ci-contre. Les coordonnées de G sont $(\overline{x} ; \overline{y})$ tel que :

3. $\overline{x} = \dfrac{152 \times 0 + 212 \times 1 + 243 \times 2 + 129 \times 3 + 64 \times 4}{800} = 1{,}67625$;

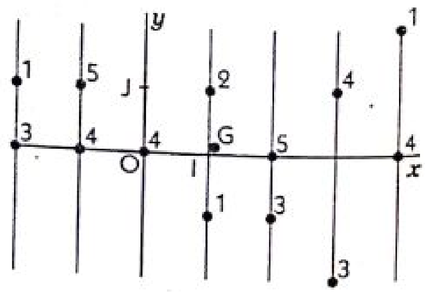
$\overline{y} = \dfrac{170 \times 0 + 206 \times 1 + 197 \times 2 + 138 \times 3 + 57 \times 4 + 32 \times 5}{800} = 1{,}7525$.

♦ Exercice 14 p. 316

1. Les tableaux des effectifs des séries marginales sont dressés ci-dessous.

x_i	– 2	– 1	0	1	2	3	4
Effectif	4	9	4	3	8	7	5

y_i	– 2	– 1	0	1	2
Effectif	3	4	20	12	1



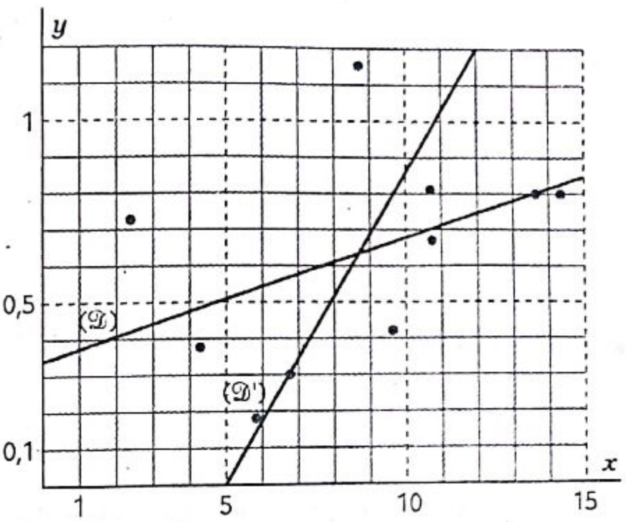
2. Les coordonnées de G sont $(\overline{x} ; \overline{y})$ tel que :

$\overline{x} = \dfrac{4 \times (-2) + 9 \times (-1) + 4 \times 0 + 3 \times 1 + 8 \times 2 + 7 \times 3 + 5 \times 4}{40} = 1{,}075$;

$\overline{y} = \dfrac{3 \times (-2) + 4 \times (-1) + 20 \times 0 + 12 \times 1 + 1 \times 2}{40} = 0{,}1$.

♦ **Exercice 15 p. 317**

1. Le nuage de points est représenté ci-contre.



2. On a le tableau de calculs suivant.

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
	5,6	0,18	31,36	0,0324	1,008
	10,6	0,69	112,36	0,4761	7,314
	6,6	0,3	43,56	0,09	1,98
	13,6	0,8	184,96	0,64	10,88
	10,6	0,81	112,36	0,6561	8,586
	14,3	0,8	204,49	0,64	11,44
	2,3	0,73	5,29	0,5329	1,679
	9,5	0,42	90,25	0,1764	3,99
	8,6	1,15	73,96	1,3225	9,89
	4,3	0,38	18,49	0,1444	1,634
Total :	**86**	**6,26**	**877,08**	**4,7108**	**58,401**

On en déduit : $\overline{x} = 8{,}6$; $\overline{y} = 0{,}626$; $V(x) = 13{,}748$; $V(y) = 0{,}079204$; $Cov(x, y) = 0{,}4565$.

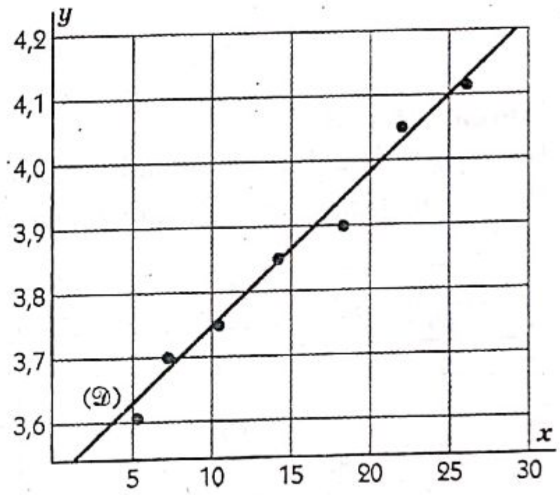
Équation de la droite (𝒟) de régression de y en x : $y = 0{,}033\,x + 0{,}34$.

Équation de la droite (𝒟') de régression de x en y : $y = 0{,}174\,x - 0{,}866$.

3. Le coefficient de corrélation linéaire r tel que : $r \approx 0{,}437$.

♦ **Exercice 16 p. 317**

1. Le nuage de points est représenté ci-contre.



2. On a le tableau de calculs suivants.

								Total :
x_i	5	7	10	14	18	22	26	**102**
y_i	3,61	3,7	3,75	3,85	3,9	4,05	4,12	**26,98**
x_i^2	25	49	100	196	324	484	676	**1 854**
x_iy_i	18,05	25,9	37,5	53,9	70,2	89,1	107,12	**401,77**

On en déduit : $\overline{x} = 14{,}571$; $\overline{y} = 3{,}854$; $V(x) = 52{,}31$; $Cov(x, y) = 1{,}239$.

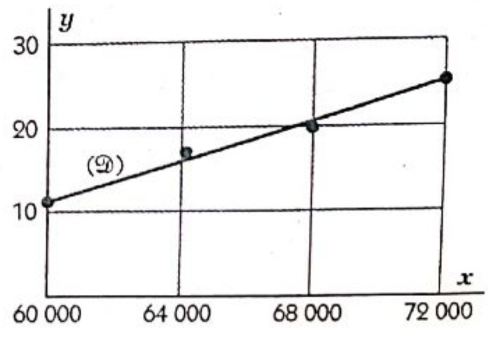
Équation de la droite (𝒟) de régression de y en x :

$y = 0{,}02358\,x + 3{,}510$.

3. On a : $0{,}02358 \times 30 + 3{,}510 = 4{,}2174$; on peut donc estimer à 4,22 kg le poids du nourrisson 30 jours après sa naissance.

♦ **Exercice 17 p. 317**

1. Le nuage de points est représenté ci-contre.



3. On a le tableau de calculs suivant.

	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
	60 000	11	3 600 000 000	660 000
	64 000	17	4 096 000 000	1 088 000
	68 000	20	4 624 000 000	1 360 000
	72 000	25	5 184 000 000	1 800 000
Total :	**264 000**	**73**	**17 504 000 000**	**4 908 000**

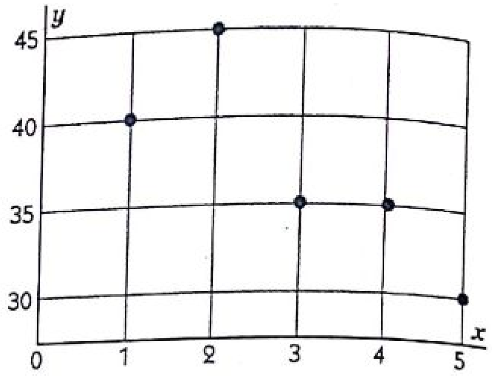
On en déduit : $\overline{x} = 66\,000$; $\overline{y} = 18{,}25$; $V(x) = 20\,000\,000$; $Cov(x, y) = 22\,500$.

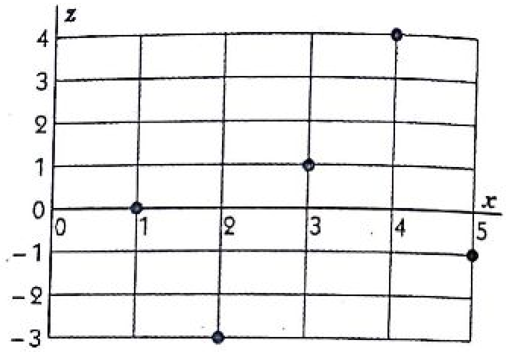
Équation de la droite (𝒟) de régression de y en x : $y = 0{,}001125\,x - 56$.

4. On a : $0{,}00125\,x - 56 = 30 \Rightarrow x \approx 76\,444$; on peut donc estimer à 76 500 francs le salaire que doit proposer le directeur s'il veut recruter 30 ouvriers.

♦ Exercice 18 p. 317

1. Les nuages de points sont représentés ci-contre.





2. On a le tableau de calculs suivant.

	x_i	y_i	z_i	x_i^2	y_i^2	z_i^2	$x_i y_i$	$x_i z_i$
	1	40	0	1	1 600	0	40	0
	2	45	− 3	4	2 025	9	90	− 6
	3	35	1	9	1 225	1	105	3
	4	35	4	16	1 225	16	140	16
	5	30	− 1	25	900	1	150	− 5
Total :	**15**	**185**	**1**	**55**	**6 975**	**27**	**525**	**8**

On en déduit : $\bar{x} = 3$; $\bar{y} = 37$; $\bar{z} = 0{,}2$; $V(x) = 2$; $\text{Cov}(x, y) = -6$; $\text{Cov}(x, z) = 1$.

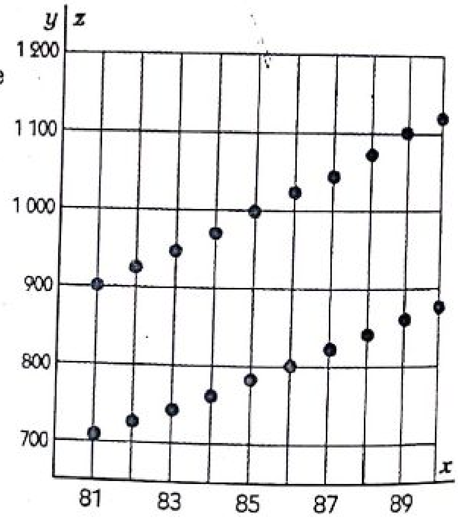
D'où : une équation de la droite de régression de y en x est $y = -3x + 46$; une équation de la droite de régression de z en x est $z = 0{,}5x - 1{,}3$.

3. On a : $V(y) = 26$; $V(z) = 5{,}36$.

Les coefficients de corrélation linéaire respectifs des séries (x_i, y_i) et (x_i, z_i) sont r_1 et r_2 tels que $r_1 = -0{,}832$ et $r_2 = 0{,}305$. C'est donc la série (x_i, y_i) qui se prête le mieux à un ajustement linéaire.

♦ Exercice 19 p. 317

1. Les nuages de points sont représentés ci-contre.



2. On a le tableau de calculs suivant, où la dernière ligne est celle des totaux.

x_i	y_i	z_i	x_i^2	y_i^2	z_i^2	$x_i y_i$	$x_i z_i$
81	905	710	6 561	819 025	504 100	73 305	57 510
82	927	727	6 724	859 329	528 529	76 014	59 614
83	949	745	6 889	900 601	555 025	78 767	61 835
84	973	763	7 056	946 729	582 169	81 732	64 092
85	997	782	7 225	994 009	611 524	84 745	66 470
86	1 025	805	7 396	1 050 625	648 025	88 150	69 230
87	1 051	825	7 569	1 104 601	680 625	91 437	71 775
88	1 077	845	7 744	1 159 929	714 025	94 776	74 360
89	1 102	865	7 921	1 214 404	748 225	98 078	76 985
90	1 121	878	8 100	1 256 641	770 884	100 890	79 020
855	**10 127**	**7 945**	**73 185**	**10 305 893**	**6 343 131**	**867 894**	**680 891**

On en déduit : $\bar{x} = 85{,}5$; $\bar{y} = 1\,012{,}7$; $\bar{z} = 794{,}5$; $V(x) = 8{,}25$; $\text{Cov}(x, y) = 203{,}55$; $\text{Cov}(x, z) = 159{,}35$.

D'où une équation de la droite de régression de y en x est $y = 24{,}673x - 1\,096{,}8$; une équation de la droite de régression de z en x est $z = 19{,}315x - 856{,}9$.

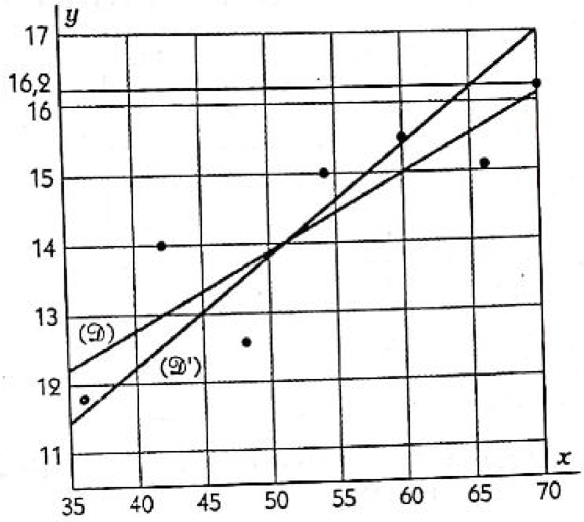
3. On a : $24{,}673 \times 95 - 1\,096{,}8 = 1\,247{,}1$ et $19{,}315 \times 95 - 856{,}9 = 978$. On peut donc estimer le cheptel ovin et caprin en Côte d'Ivoire en 1995 à respectivement 1 247 000 et 978 000 têtes.

♦ Exercice 20 p. 317

1. Le nuage de points est représenté ci-contre.

2. On a le tableau de calculs suivant.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
36	11,8	1 296	139,24	424,8
42	14	1 764	196	588
48	12,6	2 304	158,76	604,8
54	15	2 916	225	810
60	15,5	3 600	240,25	930
66	15,1	4 356	228,01	996,6
Total : 306	**84**	**16 236**	**1 187,26**	**4 354,2**



On en déduit : $\overline{x} = 51$; $\overline{y} = 14$; $V(x) = 105$; $V(y) = 1,877$; $Cov(x, y) = 11,7$. Équation de la droite (𝒟) de régression de y en x : $y = 0,111x + 8,33$.

Équation de la droite (𝒟') de régression de x en y : $y = 0,160x + 5,82$.

3. Le coefficient de corrélation linéaire est r tel que $r \approx 0,833$.

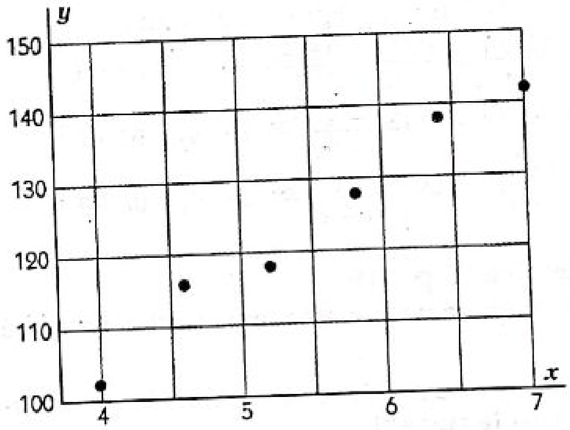
4. Le point de coordonnée (70 ; 16,2) est situé entre les deux droites de régression ; d'autre part, on a une assez bonne corrélation linéaire entre les deux caractères. On peut donc considérer que 16,2 est une tension « normale » à 70 ans.

♦ Exercice 21 p. 317

1. Le nuage de points est représenté ci-contre.

2. On a le tableau de calculs suivant.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
5.8	128	33,64	16 384	742,4
4	102	16	10 404	408
6.4	138	40,96	19 044	883,2
4.6	116	21,16	13 456	533,6
5.2	118	27,04	13 924	613,6
7	142	49	20 164	994
Total : 33	**744**	**187,8**	**93 376**	**4 174.8**



On en déduit : $\overline{x} = 5,5$; $\overline{y} = 124$; $V(x) = 1,05$; $V(y) = 186,67$; $Cov(x, y) = 13,8$.

Le coefficient de corrélation linéaire est r tel que : $r \approx 0,986$.

Ce coefficient est très près de 1, ce qui justifie un ajustement linéaire.

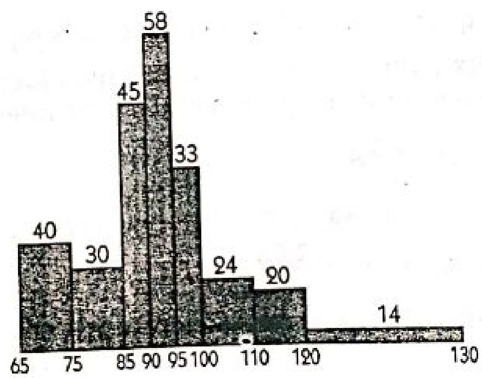
3. Équation de la droite (𝒟) de régression de y en x : $y = 13,143x + 51,71$.

4. *a)* On a : $13,143 \times 9 + 51,71 = 169,997$; si l'on engage 9 millions de francs de publicité, on peut donc espérer un chiffre d'affaires de 170 millions de francs.

b) On a : $13,143x + 51,71 = 200 \Rightarrow x = 11,28$; il faut donc prévoir un budget de 11 300 000 francs pour espérer réaliser un chiffre d'affaires de 200 millions de francs.

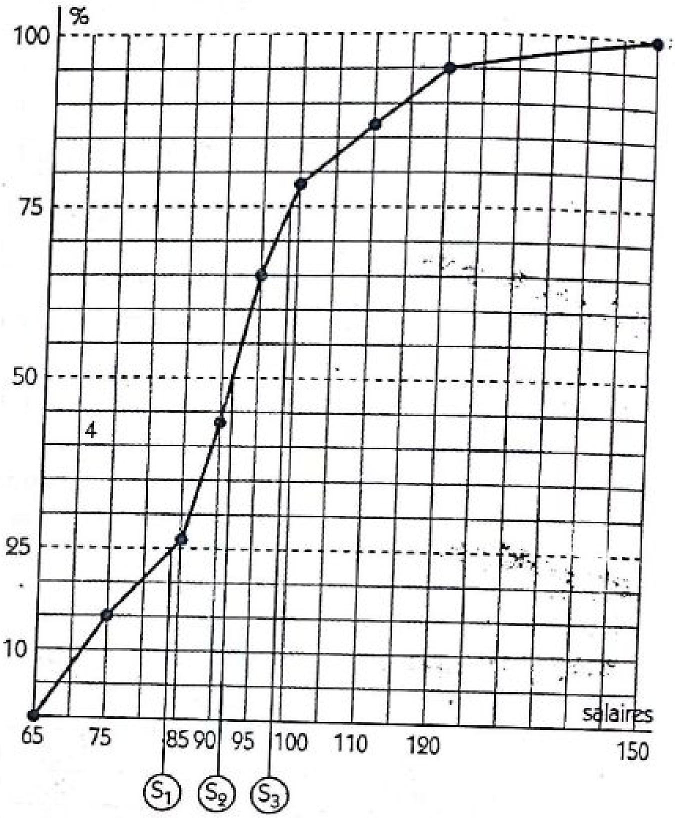
♦ Exercice 22 p. 317

1. L'histogramme représentant la série est représenté ci-dessous.



2. *a)* On obtient le tableau des effectifs et des fréquences cumulés croissants suivant.

Classe	Eff. cum. croissant	Fréq. cum. croissant (%)
[65 ; 75[	40	15,15
[75 ; 85[	70	26,52
[85 ; 90[	115	43,56
[90 ; 95[	173	65,53
[95 ; 100[	206	78,03
[100 ; 110[	230	87,12
[110 ; 120[	250	94,70
[120 ; 150[	264	100



b) Le polygone des fréquences cumulées croissantes est représenté ci-contre.

3. S_1, S_2 et S_3 sont les abscisses respectives des points du polygone des fréquences cumulées croissantes d'ordonnées 25,50 et 75%.

Une détermination graphique donne :
$S_1 = 83{,}6$; $S_2 = 91{,}4$; $S_3 = 98{,}8$.

Par interpolation linéaire, on obtient :

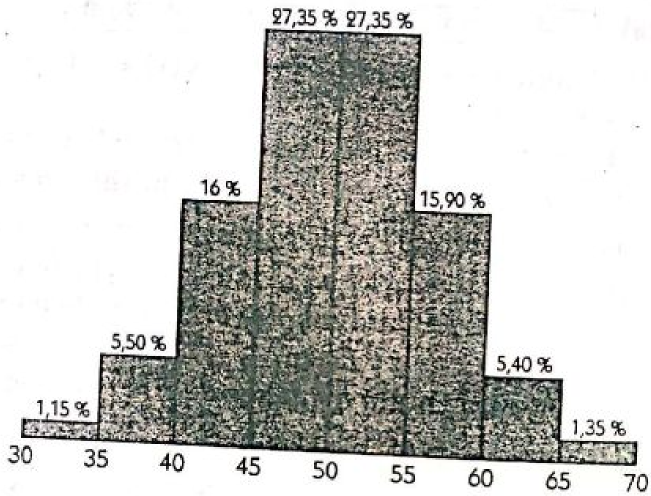
$$\frac{25 - 15{,}15}{S_1 - 75} = \frac{26{,}52 - 15{,}15}{85 - 75} \Rightarrow S_1 \approx 83{,}66 \text{ ;}$$

$$\frac{50 - 43{,}56}{S_2 - 90} = \frac{65{,}53 - 43{,}56}{95 - 90} \Rightarrow S_2 \approx 91{,}47 \text{ ;}$$

$$\frac{75 - 65{,}53}{S_3 - 95} = \frac{78{,}03 - 65{,}53}{100 - 95} \Rightarrow S_3 \approx 98{,}79.$$

♦ Exercice 23 p. 318

1. L'histogramme des fréquences est représenté ci-contre.



2. Le tableau des fréquences cumulées décroissantes est le suivant.

Classe	Fréq. cum. décroissante (%)
[30 ; 35[	100
[35 ; 40[	98,85
[40 ; 45[	93,35
[45 ; 50[	77,35
[50 ; 55[	50
[55 ; 60[	22,65
[60 ; 65[	6,75
[65 ; 70[	1,35

On en déduit le polygone des fréquences cumulées décroissantes représenté ci-après.

3. *a)* Le poids minimum x des dix pour cent des élèves les plus lourds est l'abscisse du point d'ordonnée 10 du polygone. On peut le déterminer graphiquement ; une interpolation linéaire donne :

$$\frac{102 - 2{,}65}{x - 55} = \frac{6{,}75 - 22{,}65}{60 - 55} \Rightarrow x \approx 58{,}98 \text{ kg.}$$

b) Soit y_1 et y_2 les ordonnées respectives des points du polygone d'abscisses 42,5 et 52,5.

On a : $y_1 = \frac{93{,}35 + 77{,}35}{2} = 87{,}35$; $y_2 = \frac{50 + 22{,}65}{2} = 36{,}32.$

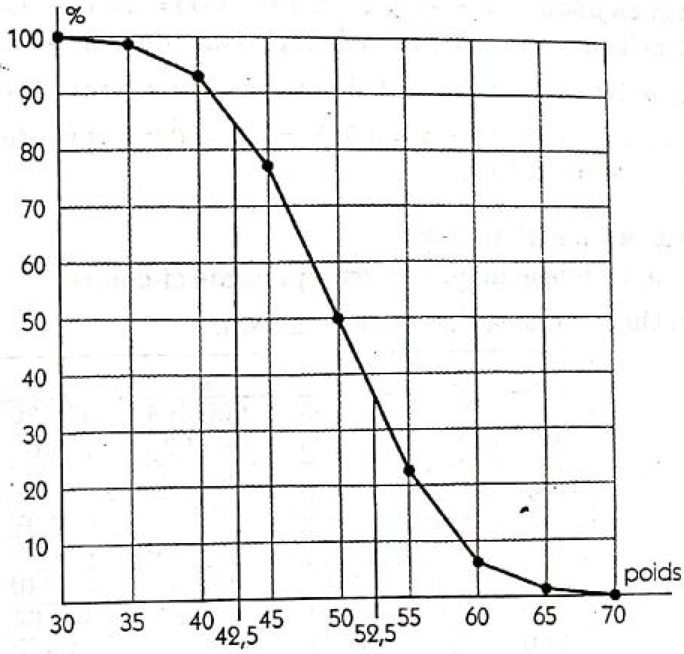
D'où : $y_1 - y_2 = 51{,}03$; donc 51% des élèves ont un poids compris entre 42,5 et 52,5 kg.

4. On a le tableau de calcul suivant.

Centre de la classe (x_i)	Fréq. (f_i)	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
32,5	0,0115	0,37375	12,146875
37,5	0,055	2,0625	77,34375
42,5	0,16	6,8	289
47,5	0,2735	12,99125	617,084375
52,5	0,2735	14,35875	753,834375
57,5	0,159	9,1425	525,69375
62,5	0,054	3,375	210,9375
67,5	0,0135	0,91125	61,509375
	Total	50,015	2547,55

On en déduit :

- la moyenne $\overline{x} = 50,015$;
- l'écart type $\sigma \approx 6,786$.



♦ **Exercice 24 p. 318**

1. On a le tableau de calculs ci-contre.
On en déduit, pour la machine A :

- la moyenne 49,7975 kg ;
- la variance 0,1550 ;
- l'écart type 0,3937 kg.

On a de même, pour la machine B :

- la moyenne 49,89 kg ;
- la variance 0,1379 ;
- l'écart type 0,3713 kg.

Centre de la classe (x_i)	Eff. A (n_iA)	n_iAx_i	n_iAx_i^2	Eff. B (n_iB)	n_iBx_i	n_iBx_i^2
49,1	7	343,7	16 875,67	4	196,4	9 643,24
49,3	6	295,8	14 582,94	6	295,8	14 582,94
49,5	14	693	34 303,5	9	445,5	22 052,25
49,7	14	695,8	34 581,26	11	546,7	27 170,99
49,9	11	548,9	27 390,11	14	698,6	34 860,14
50,1	14	701,4	35 140,14	16	801,6	40 160,16
50,3	9	452,7	22 770,81	17	855,1	43 011,53
50,5	5	252,5	12 751,25	3	151,5	7 650,75
Total	80	3 983,8	198 395,68	80	3 991,2	199 132

2. Les deux machines vérifient donc les deux premières conditions exigées. Par contre, pour la machine A, 84,375 % seulement des sacs ont un poids compris entre 49,3 kg et 50,5 kg. Ce pourcentage devient 89,375 % pour la machine B ; c'est donc celle-ci qu'il faut acheter.

3. Pour la machine B, on a : $\overline{x} - \sigma \approx 49,519$ et $\overline{x} + \sigma \approx 50,261$. Par interpolation linéaire, on a :

l'effectif cumulé croissant correspondant à 49,519 kg : $10 + 9\,\dfrac{49,519 - 49,4}{49,6 - 49,4} = 15,355$;

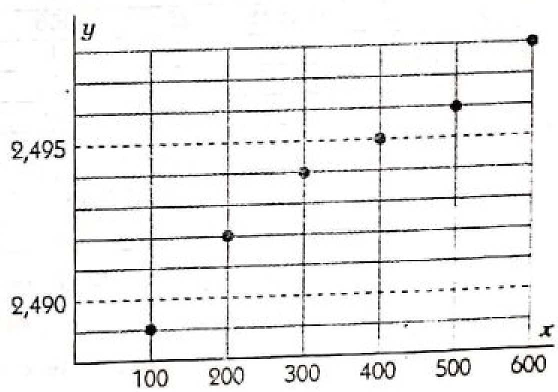
L'effectif cumulé croissant correspondant à 50,261 kg : $60 + 17\,\dfrac{50,261 - 50,2}{50,4 - 50,2} = 65,185$.

On a : $\dfrac{65,185 - 15,355}{80} \approx 0,623$; il y a donc 62,3% des sacs dont le poids est compris entre $\overline{x} - \sigma$ et $\overline{x} + \sigma$.

♦ **Exercice 25 p. 318**

1. Le nuage de points est représenté ci-contre.

2. On a le tableau de calculs suivant.



	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
	100	2.489	10 000	248,9
	200	2.492	40 000	498,4
	300	2.494	90 000	748,2
	400	2,495	160 000	998
	500	2,496	250 000	1 248
	600	2,498	360 000	1 498,8
Total :	2 100	14,964	910 000	5 240.3

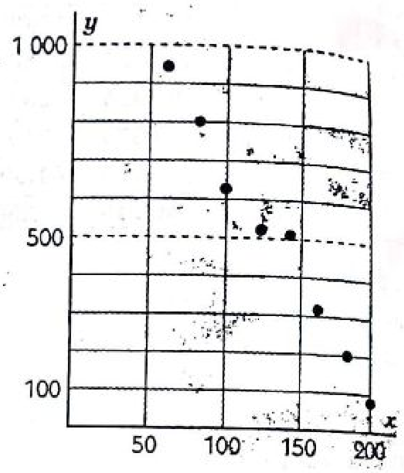
On en déduit : $\overline{x} = 350$; $\overline{y} = 2{,}494$; $V(x) = 29\ 167$; $Cov(x, y) = 0{,}4833$.
Une équation de la droite de régression de y en x est donc : $y = 0{,}0000166\ x + 2{,}488$.

3. *a)* L'usure moyenne de l'outil pour une pièce produite est 0,0000166 cm, c'est à dire 166×10^{-9} m.

b) On a : $0{,}0000166\ x = 0{,}015 \Rightarrow x = 903$; l'usure de l'outil atteint-elle la valeur de 15 centièmes de mm vers la 900^e pièce.

♦ Exercice 26 p. 318

1. *a)* Le nuage de points est représenté ci-contre.



b) On a le tableau de calculs suivant.

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	60	952	3 600	906 304	57 120
	80	805	6 400	648 025	64 400
	100	630	10 000	396 900	63 000
	120	522	14 400	272 484	62 640
	140	510	19 600	260 100	71 400
	160	324	25 600	104 976	51 840
	180	205	32 400	42 025	36 900
	200	84	40 000	7 056	16 800
Total :	**1 040**	**4 032**	**152 000**	**2 637 870**	**424 100**

On en déduit : $\overline{x} = 130$; $\overline{y} = 504$; $V(x) = 2\ 100$; $V(y) = 75\ 717{,}75$; $Cov(x, y) = -\ 12\ 507{,}5$.

Le coefficient de corrélation linéaire est donc r tel que : $r \approx -\ 0{,}992$; cette valeur justifie la recherche d'un ajustement linéaire.

2. Une équation de la droite de régression de y en x est donc : $y = -\ 5{,}956\ x + 1\ 278{,}28$.

3. *a)* Pour y exemplaires vendus à x milliers de francs, le bénéfice réalisé est : $z = y(x - 25) - 28\ 000$;
on a donc : $z = (-\ 5{,}956\ x + 1\ 278{,}28)(x - 25) - 28\ 000 = -\ 5{,}956\ x^2 + 1\ 427{,}18\ x - 59\ 957$.

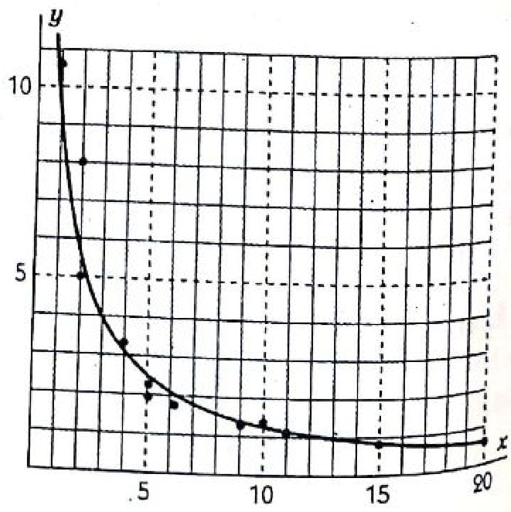
b) La fonction $x \mapsto z(x)$ atteint son maximum en $x = \dfrac{1\ 427{,}18}{2 \times 5{,}956}$; le bénéfice réalisé est donc maximum pour un prix de vente d'environ 119 810 francs.
Ce bénéfice, exprimé en milliers de francs, est égal à $z(119{,}81)$, c'est à dire : environ 25 538 415 francs

♦ Exercice 27 p. 318

1. Le nuage de points est représenté ci-dessous. Le nuage a une forme évoquant une hyperbole plutôt qu'une droite ; elle ne suggère pas un ajustement linéaire.

2. *a)* On a le tableau de calculs suivant.

	x_i	y_i	z_i	x_i^2	z_i^2	$x_i z_i$
	4	3.3	0.3030	16	0.0918	1.2121
	20	0.6	1.6667	400	2.7778	33.3333
	1	10.5	0.0952	1	0.0091	0.0952
	10	1.3	0.7692	100	0.5917	7.6923
	9	1.3	0.7692	81	0.5917	6.9231
	5	2.2	0.4545	25	0.2066	2.2727
	2	5	0.2	4	0.04	0.4
	2	8	0.125	4	0.0156	0.25
	6	1.8	0.5556	36	0.3086	3.3333
	5	2	0.5	25	0.25	2.5
	11	1.2	0.8333	121	0.6944	9.1667
	15	0.9	1.1111	225	1.2346	16.6667
Total :	**90**	**38.1**	**7.3828**	**1038**	**6.8119**	**83.8454**



On en déduit : $\overline{x} = 7{,}5$; $\overline{z} \approx 0{,}6152$; $V(x) = 30{,}25$; $V(z) = 0{,}1892$; $Cov(x, z) = 2{,}3731$. Le coefficient de corrélation linéaire est donc r tel que : $r \approx 0{,}992$; cette valeur justifie la recherche d'un ajustement linéaire.

b) Une équation de la droite de régression de z en x est donc : $z = 0{,}0784\ x + 0{,}027$.

3. *a)* On a : $y = \dfrac{1}{z}$. La fonction cherchée est donc la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{0{,}0784\ x + 0{,}027}$.

Imprimé en Italie par Rotolito
Dépôt légal Editeur: 14064-05/2002 - Collection 61 - Édition 01 - 59/6159/4

9 782841 292172

DIFFUSION
R.C.I : NOUVELLES ÉDITIONS IVOIRIENNES
AUTRES PAYS : EDICEF

59.6159.4