

COLLECTION
INTER
AFRICAINNE DE
MATHÉMATIQUES



2^e S

MATHÉMATIQUES

GUIDE PÉDAGOGIQUE

EDICEF

Collection
Inter
Africaine de
Mathématiques

sous la direction
de Saliou Touré
Professeur à l'Université
d'Abidjan

10/12/15
Achet
2

MATHÉMATIQUES



GUIDE PÉDAGOGIQUE

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen,
92178 Vanves Cedex

L'idée d'harmoniser les programmes de mathématiques entre les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien remonte à l'année 1983 où fut organisé par l'IRMA, à Abidjan, la premier séminaire d'harmonisation. Depuis, d'autres séminaires ont suivi : en 1985 à Cotonou, en 1988 à Conakry et en juin 1992 à Abidjan avec la participation de 20 pays.

PARTICIPATION DES DIFFÉRENTS PAYS

BÉNIN	COMORES	GUINÉE	RWANDA
BURKINA FASO	CONGO	MADAGASCAR	SENÉGAL
BURUNDI	COTE D'IVOIRE	MALI	TCHAD
CAMEROUN	DJIBOUTI	MAURITANIE	TOGO
CENTRAFRIQUE	GABON	NIGER	ZAIRE

La suite logique, souhaitée par tous les participants, est l'élaboration d'une Collection Inter-Africaine de manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Des rédacteurs de tous les pays participent à la réalisation de ce projet. Un comité de coordination travaille avec les cellules nationales mises en place dans chaque pays.

COMITÉ DE COORDINATION

Gérard DUBOS	Denis OUEHI
Missa COULIBALY	Soma TRAORÉ

D'autres séminaires de concertation ont réuni les responsables de ces cellules, à Libreville en 1993, à Ndjaména en 1994, à Yaoundé en 1995, à Antananarivo en 1996, à Dakar en 1997, à Niamey en 1998, à Nouakchott en 1999 et à Ouagadougou en 2000.

ISBN 2-84-129217-7
© EDICEF 2000

Droits de reproduction, de traduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

En application de la loi du 11 mars 1957, il est interdit de reproduire intégralement ou partiellement le présent ouvrage sans autorisation de l'éditeur ou du Centre Français de l'Exploitation du Droit de Copie (3, rue Hautefeuille, 75006 Paris). Cette reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

TABLEAU SYNOPTIQUE DES PROGRAMMES DU SECOND CYCLE SCIENTIFIQUE	5
--	---

COMMENTAIRES GÉNÉRAUX POUR LE SECOND CYCLE	15
2.1 Options académiques	15
2.2 Options pédagogiques	15
2.3 Aspects culturels	16
2.4 Utilisation du manuel	16

COMMENTAIRES SPECIFIQUES À LA CLASSE DE SECONDE S	18
3.1 Pourquoi une seconde scientifique ?	18
3.2 Articulation avec le collège	18
3.3 Activités des élèves	18
3.4 Présentation du manuel	18
3.5 Points méthodes	19
3.6 Points logiques	20
3.7 Travaux dirigés	20
3.8 Géométrie	21
3.9 Algèbre et analyse	24

ANALYSE DES CHAPITRES	25
4.1 Angles inscrits	25
4.2 Vecteurs et points du plan	40
4.3 Angles orientés - Trigonométrie	49
4.4 Produit scalaire	59
4.5 Droites et cercles	69
4.6 Homothétie - Rotation	79
4.7 Géométrie de l'espace	91
4.8 Ensemble des nombres réels	99
4.9 Fonctions	108
4.10 Polynômes et fractions rationnelles	116
4.11 Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$	126
4.12 Études de fonctions	136
4.13 Équations et inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	148
4.14 Statistiques	160

ALPHABET GREC

Majuscule	Minuscule	Appellation
A	α	alpha
B	β	bêta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ	epsilon
Z	ζ	dzêta
H	η	êta
Θ	θ	thêta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	ksi
O	$\omicron$	omicron
Π	π	pi
P	ρ	rhô
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	ϕ	phi
X	χ	khi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	oméga

1 TABLEAU SYNOPTIQUE DES PROGRAMMES DU SECOND CYCLE SCIENTIFIQUE

Les programmes du Second Cycle Scientifique ont été établis en juin 1992, lors du quatrième séminaire d'harmonisation des programmes de mathématiques des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien. Constitués d'un tronc commun en classe de seconde (S) et de deux séries à partir de la classe de première (SM et SE), ils sont ici présentés dans un tableau synoptique afin de faire apparaître :

- la cohérence des différents thèmes à un niveau donné ;
- l'évolution d'un thème d'un niveau à l'autre ;
- les différences de contenus entre les deux séries.

Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
Nombres réels Rationnels Irrationnels Opérations Ordre - propriétés - partie entière - encadrement et opérations - majorant, minorant, maximum, minimum d'un ensemble Valeur absolue - définition - propriétés Distance de deux nombres réels Inéquations : $ x - a < r, x - a > r,$ $ x - a \leq r, x - a \geq r$ Valeurs approchées Approximations décimales d'ordre n Encadrement Valeurs approchées Notation scientifique, ordre de grandeur			♦ Corps des nombres complexes • Forme algébrique : égalité, opérations, conjugué et module • Affixe d'un point, d'un vecteur ; point image, vecteur image d'un complexe • Forme trigonométrique : - module, argument, - produit, quotient - notation exponentielle - formules de Moivre et d'Euler • Racines n-ièmes • Équations du 2nd degré • Utilisation en trigonométrie • Utilisation en géométrie : - écriture complexe de transformations - caractérisation complexe de configurations planes - lieux géométriques	♦ Nombres complexes • Forme algébrique : égalité, opérations, conjugué et module • Affixe d'un point, d'un vecteur ; point image, vecteur image d'un complexe • Forme trigonométrique : - module, argument, - produit, quotient - notation exponentielle - formules de Moivre et d'Euler • Racines n-ièmes • Équations du 2nd degré • Utilisation en trigonométrie • Utilisation en géométrie : - écriture complexe de transformations - caractérisation complexe de configurations planes

ARITHMÉTIQUE

Seconde S

Première SM

Première SE

Terminale SM

Terminale SE

- Division euclidienne
- Numération (décimale et binaire)
- Multiples et diviseurs d'un entier relatif ; notation $n\mathbb{Z}$
- Congruence modulo n et utilisation
- PGCD et PPCM
- algorithme d'Euclide
- nombres premiers entre eux
- théorèmes de Bézout et de Gauss
- Nombres premiers

- Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers

- ♦ Polynômes
- Racines
- Factorisation
- Différentes écritures
- Signe

- ♦ Fractions rationnelles
- Différentes écritures
- Signe

- ♦ Équations
- Équations se ramenant au 1^{er} degré
- Équations du 2nd degré (utilisation de la forme canonique)

- Systèmes linéaires d'équations dans $\mathbb{R}^2$ (sans théorie) ; interprétation graphique

- ♦ Équations
- Équations du 2nd degré
 - discriminant
 - somme et produit des solutions
- Équations se ramenant au 2nd degré (bicarrées, irrationnelles)
- Systèmes linéaires d'équations dans $\mathbb{R}^3$ (pivot de Gauss)

- ♦ Inéquations
- Inéquations du 2nd degré ou s'y ramenant (bicarrées, irrationnelles)

- ♦ Problèmes
- se ramenant à la résolution d'équations, d'inéquations ou de systèmes (programmation)

- ♦ Équations
- Équations du 2nd degré
 - discriminant
 - somme et produit des solutions
- Équations se ramenant au 2nd degré (bicarrées, irrationnelles)
- Systèmes linéaires d'équations dans $\mathbb{R}^3$ (pivot de Gauss)

- ♦ Inéquations
- Inéquations du 2nd degré ou s'y ramenant (bicarrées, irrationnelles)

- ♦ Problèmes
- se ramenant à la résolution d'équations, d'inéquations ou de systèmes (programmation)

- ♦ Équations
- Équations faisant intervenir les fonctions $\ln$ ou $\exp$
- Équations du 2nd degré dans $\mathbb{C}$

- ♦ Inéquations
- Inéquations faisant intervenir les fonctions $\ln$ ou $\exp$

- ♦ Équations
- Équations faisant intervenir les fonctions $\ln$ ou $\exp$
- Équations du 2nd degré dans $\mathbb{C}$

- ♦ Inéquations
- Inéquations faisant intervenir les fonctions $\ln$ ou $\exp$

Seconde 5	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
♦ Généralités • Notion de fonction • Ensemble de définition • Coïncidence de deux fonctions sur un ensemble	♦ Généralités • Restriction • Composition • Injection et surjection ; bijection et réciproque ; composée de bijections	♦ Généralités • Restriction • Composition • Injection et surjection ; bijection et réciproque ; composée de bijections		
♦ Fonctions numériques • Représentation graphique • Image directe, image réciproque d'un intervalle (étude graphique) • Maximum, minimum d'une fonction sur un ensemble • Sens de variation	♦ Fonctions numériques • Opérations • Fonctions associées et représentations graphiques • Comparaison de fonctions ; fonctions majorées, minorées, bornées • Représentations graphiques de deux bijections réciproques • Parité, périodicité ; éléments de symétrie d'une courbe ; ensemble d'étude d'une fonction	♦ Fonctions numériques • Opérations • Fonctions associées et représentations graphiques • Comparaison de fonctions ; fonctions majorées, minorées, bornées • Représentations graphiques de deux bijections réciproques • Parité, périodicité ; éléments de symétrie d'une courbe ; ensemble d'étude d'une fonction		
	♦ Limites • Notions • Limite à gauche, à droite • Limites de fonctions élémentaires • Propriétés de comparaison • Opérations	♦ Limites • Limite en a • Limite à gauche, à droite en a • Limites de fonctions élémentaires	♦ Limites	♦ Limites
	• Limites à l'infini de fonctions polynôme ou rationnelle	• Opérations • Limite infinie en a • Limite à l'infini • Opérations • Limites à l'infini de fonctions polynôme ou rationnelle	• Composition • Fonction monotone sur un intervalle ouvert • Formes indéterminées	• Propriétés de comparaison • Composition • Formes indéterminées
	♦ Continuité en un point • Notion • Prolongement par continuité	♦ Continuité en a • Notion • Critère de continuité	♦ Continuité sur un intervalle • Opérations, composition • Image d'un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires • Fonction strictement monotone ; fonctions puissances d'exposant rationnel	♦ Continuité sur un intervalle • Prolongement par continuité • Opérations, composition • Image d'un intervalle, valeurs intermédiaires • Fonction strictement monotone ; fonctions puissances d'exposant rationnel

ÉTUDE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES

SUITES NUMÉRIQUES

Seconde S

Première SM

Première SE

Terminale SM

Terminale SE

♦ Dérivation • Nombre dérivé en a • Interprétations - tangente, vitesse - approximation locale affine • Nombre dérivé à gauche, à droite • Dérivabilité sur un intervalle • Dérivées de fonctions élémentaires • Opérations, composition avec une fonction affine • Signe de la dérivée et sens de variation • Extremum relatif d'une fonction ♦ Étude de fonctions • Fonctions affines par intervalles • Fonctions élémentaires : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto x^3$ • Composées des fonctions précédentes avec une fonction linéaire ♦ Compléments • Résolution graphique d'équations et d'inéquations	♦ Dérivation • Nombre dérivé en a • Interprétation - tangente • Dérivabilité sur un intervalle • Dérivées de fonctions élémentaires • Opérations, composition avec une fonction affine • Signe de la dérivée et sens de variation • Extremum relatif d'une fonction ♦ Étude de fonctions • Fonctions polynômes (degré ≤ 3) • $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ • $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ • Fonctions sinus, cosinus, tangente et fonctions trigonométriques simples ♦ Compléments • Asymptote • Résolution d'équations par dichotomie	♦ Dérivation • Nombre dérivé en a • Interprétation - tangente • Dérivabilité sur un intervalle • Dérivées de fonctions élémentaires • Opérations, composition avec une fonction affine • Signe de la dérivée et sens de variation • Extremum relatif d'une fonction ♦ Étude de fonctions • Fonctions polynômes (degré ≤ 3) • $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ • $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ • Fonction tangente ♦ Compléments • Asymptote • Résolution d'équations par dichotomie ou balayage	♦ Dérivation • Composition ; fonction réciproque • Dérivées successives, position relative d'une courbe et de ses tangentes • Dérivées de : u^r ($r \in \mathbb{Q}$), $\ln \circ u$, $\exp \circ u$ et u^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) • Inégalité des accroissements finis ♦ Étude de fonctions • Fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles et trigonométriques • $x \mapsto \ln x$; $x \mapsto e^x$ • $x \mapsto a^x$; $x \mapsto x^a$ • Fonctions $\ln \circ u$, $\exp \circ u$ et u^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) • Croissances comparées de $\ln x$, e^x et x^α ♦ Compléments • Branches infinies • Résolution d'équations par balayage	♦ Dérivation • Interprétations - vitesse - approximation locale affine • Dérivabilité à gauche, à droite • Composition ; fonction réciproque • Dérivées successives, notion de point d'inflexion • Dérivées de : u^r ($r \in \mathbb{Q}$), $\ln \circ u$, $\exp \circ u$ et u^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) • Inégalité des accroissements finis ♦ Étude de fonctions • Fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles et trigonométriques • $x \mapsto \ln x$; $x \mapsto e^x$ • $x \mapsto a^x$; $x \mapsto x^a$ • Fonctions $\ln \circ u$, $\exp \circ u$ et u^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) • Croissances comparées de $\ln x$, e^x et x^α ♦ Compléments • Branches infinies
• Diverses façons de définir et représenter une suite • Suites définies par une formule de récurrence : détermination graphique des termes • Minoration, majoration ; sens de variation • Notion de convergence • Suites arithmétiques et géométriques	• Diverses façons de définir et représenter une suite • Suites définies par une formule de récurrence : détermination graphique des termes • Minoration, majoration ; sens de variation • Notion de convergence • Suites arithmétiques et géométriques	• Diverses façons de définir et représenter une suite • Suites définies par une formule de récurrence : détermination graphique des termes • Minoration, majoration ; sens de variation • Notion de convergence • Suites arithmétiques et géométriques	• Suites bornées ; suites monotones • Limite, convergence et divergence • Calculs de limites - limite de $u_n = f(n)$, lorsque f a une limite en $+\infty$; - opérations - croissances comparées de (a^n), (n^a) et $\ln n$; - propriétés de comparaison - image d'une suite par une fonction - suite monotone • Suite définie par récurrence ; méthodes du point fixe et de Newton • Suites arithmétiques et géométriques	• Suites bornées ; suites monotones • Limite, convergence et divergence • Calculs de limites - limite de $u_n = f(n)$, lorsque f a une limite en $+\infty$; - opérations - propriétés de comparaison - suite monotone • Suite définie par récurrence ; notion de point fixe • Suites arithmétiques et géométriques

INTÉGRATION

Seconde S

Première SM

Première SE

Terminale SM

Terminale SE

♦ Définitions

- Primitives et intégrale d'une fonction continue sur un intervalle
- Interprétations graphique (aire) et cinématique

♦ Propriétés

- Chasles, linéarité, positivité
- Inégalité de la moyenne, valeur moyenne

♦ Techniques de calcul

- Calculs de primitives
- Intégration par parties
- Changement de variable affine

♦ Intégration de

- fonctions paires, impaires ou périodiques
- « polynômes » trigonométriques
- fonctions rationnelles

♦ Calcul approché d'intégrale

♦ Applications

- Aires et volumes
- Fonction définie par une intégrale

♦ Équations différentielles

- $y' - ay = 0$
- $y'' + ay' + by = 0$

♦ Définitions

- Primitives et intégrale d'une fonction continue sur un intervalle
- Interprétation graphique (aire)

♦ Propriétés

- Chasles, linéarité, positivité
- Inégalité de la moyenne, valeur moyenne

♦ Techniques de calcul

- Calculs de primitives
- Intégration par parties

♦ Intégration de

- fonctions paires, impaires ou périodiques
- « polynômes » trigonométriques
- fonctions rationnelles

♦ Calcul approché d'intégrale

♦ Applications

- Aires et volumes
- Fonction définie par une intégrale

♦ Équations différentielles

- $y' - ay = 0$
- $y'' + ay' + by = 0$

ORGANISATION DES DONNÉES

♦ Statistiques

- Consolidation des acquis du 1^{er} Cycle
- Notation Σ
- Séries non regroupées en classes :
 - effectifs et fréquences cumulées
 - caractéristiques de position (mode, moyenne, médiane) et de dispersion (écart moyen, variance, écart type)
- Séries regroupées en classes :
 - histogramme

♦ Statistiques

- Séries simples regroupées en classes :
 - courbes cumulatives
 - caractéristiques de position et de dispersion
- Séries doubles :
 - nuage de points, point moyen
 - ajustement linéaire (moindres carrés)
 - droites de régression, covariance et coefficient de corrélation

♦ Statistiques

- Séries simples regroupées en classes :
 - polygone des effectifs et courbes cumulatives
 - caractéristiques de position et de dispersion

• Séries doubles :

- nuage de points, point moyen
- ajustement linéaire (Mayer, moindres carrés)
- droites de régression, covariance et coefficient de corrélation

ORGANISATION DES DONNÉES

Seconde S

Première SM

Première SE

Terminale SM

Terminale SE

- ♦ Analyse combinatoire
 - Ensemble
 - cardinal
 - ensemble des parties et partition
 - produit cartésien
 - p -uplets, arrangements (A_n^p), permutations ($n!$), combinaisons (C_n^p)
 - Nombre d'applications, d'injections et de bijections entre deux ensembles finis
 - Formule du binôme

- ♦ Dénombrement
 - Comptage, diagrammes, arbres
 - Tirages successifs (avec ou sans remise), tirages simultanés
 - Principes de la somme et du produit

- ♦ Analyse combinatoire
 - Ensemble
 - cardinal
 - parties
 - produit cartésien
 - p -uplets, arrangements (A_n^p), permutations ($n!$), combinaisons (C_n^p)
 - Nombre d'applications, d'injections et de bijections entre deux ensembles finis

- ♦ Dénombrement
 - Comptage, diagrammes, arbres
 - Tirages successifs (avec ou sans remise), tirages simultanés
 - Principes de la somme et du produit

- ♦ Analyse combinatoire
 - Consolidation des acquis de 1^{re}
 - Formule du binôme et triangle de Pascal
- ♦ Probabilités
 - Vocabulaire
 - Propriétés
 - Équiprobabilité
 - Indépendance
- Épreuve de Bernoulli

- ♦ Variable aléatoire
 - Loi de probabilité
 - Fonction de répartition
 - Espérance mathématique, variance et écart type
- Loi binomiale

- ♦ Analyse combinatoire
 - Consolidation des acquis de 1^{re}
 - Formule du binôme et triangle de Pascal
- ♦ Probabilités
 - Vocabulaire
 - Propriétés
 - Équiprobabilité
 - Probabilité conditionnelle, événements indépendants, probabilités totales

- ♦ Variable aléatoire
 - Loi de probabilité
 - Fonction de répartition
 - Espérance mathématique, variance et écart type
- Épreuve de Bernoulli
- Loi binomiale

ANGLES

- ♦ Angles inscrits non orientés
 - Arcs capables
 - Quadrilatères inscriptibles
 - Relations métriques dans un triangle :
 - $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}$
 - théorème des sinus

- ♦ Polygones réguliers

- ♦ Angles orientés
 - Orientation du plan
 - Angle orienté de deux vecteurs ; mesure principale

- ♦ Angles orientés
 - Mesures
 - Somme
 - Propriétés :
 - Chasles, double d'un angle orienté
 - angles inscrits
 - points cocycliques

- ♦ Angles orientés
 - Mesures
 - Somme et différence
 - Chasles

- ♦ Lignes de niveau
 - $M \mapsto \text{Mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$

TRIGONOMETRIE

- Cercle trigonométrique
- Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

- Définition et propriétés des fonctions circulaires
- Formules : addition, duplication, linéarisation ...
- Équations, inéquations trigonométriques

- Définition et propriétés des fonctions circulaires
- Formules : addition, duplication, linéarisation ...
- Équations trigonométriques

- ♦ Utilisation des complexes
 - Expression de $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$
 - Linéarisation
 - Transformation de produit en somme et de somme en produit

- ♦ Utilisation des complexes
 - Expression de $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$
 - Linéarisation
 - Transformation de produit en somme et de somme en produit

Seconde S

- ♦ Vecteurs
 - Combinaison linéaire
 - Colinéarité
 - Mesure algébrique
 - Bases, repères
 - Déterminant de deux vecteurs
 - Caractérisation vectorielle de :
 - droite ou demi-droite
 - droites parallèles ou perpendiculaires
 - centre de gravité d'un triangle

- ♦ Utilisation des vecteurs
 - Démonstration de propriété

- ♦ Produit scalaire
 - Définition
 - Propriétés
 - Norme d'un vecteur
 - Expression analytique dans une base orthonormée
 - Relations métriques dans un triangle : théorèmes d'Al-Kashi et de la médiane

Première SM

- ♦ Barycentre de 2, 3 ou 4 points pondérés
 - Définition
 - Propriétés
 - homogénéité
 - réduction
 - barycentres partiels
 - conservation par projection
 - Construction
 - Ensemble des barycentres de deux points

- ♦ Utilisation du barycentre
 - Problèmes d'alignement et de concours
 - Lignes de niveau
 - $M \mapsto aMA^2 + bMB^2$
 - $M \mapsto \frac{MA}{MB}$

- ♦ Utilisation du produit scalaire
 - Ligne de niveau
 - $M \mapsto MA^2 - MB^2$

Première SE

- ♦ Barycentre de 2, 3 ou 4 points pondérés
 - Définition
 - Propriétés
 - homogénéité
 - réduction
 - barycentres partiels
 - Construction
 - Ensemble des barycentres de deux points

- ♦ Utilisation du barycentre
 - Problèmes d'alignement et de concours
 - Ligne de niveau
 - $M \mapsto MA^2 + MB^2$

- ♦ Utilisation du produit scalaire
 - Lignes de niveau
 - $M \mapsto MA^2 - MB^2$
 - $M \mapsto \vec{AM} \cdot \vec{AB}$

Terminale SM

- ♦ Barycentre de n points pondérés
 - Définition
 - Propriétés
 - homogénéité
 - réduction
 - barycentres partiels

- Construction
- Ensemble des barycentres de trois points non alignés

- ♦ Utilisation du barycentre
 - Lignes de niveau
 - $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$
 - $M \mapsto \frac{MA}{MB}$

Terminale SE

- ♦ Droites
 - Représentations paramétriques

- ♦ Cercle
 - Équations cartésiennes

- ♦ Orthogonalité
 - Équation normale d'une droite
 - Distance d'un point à une droite

- ♦ Cercle
 - Représentation paramétrique
 - Tangente(s) issue(s) d'un point

- ♦ Expression analytique
 - d'une translation
 - de symétries orthogonales particulières
 - d'une homothétie

- ♦ Cercle
 - Représentation paramétrique

- ♦ Expression analytique
 - d'une translation
 - de symétries orthogonales particulières

- ♦ Expression analytique
 - d'une application affine

Seconde S	Première CM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
♦ Rotations [niveau 1 (*)] • Définition • Propriétés - point invariant - rotation réciproque - décomposition (symétries-droite) - propriété fondamentale - images de figures	♦ Translations et rotations [niveau 2 (*)] • Propriété caractéristique • Composée (deux translations, deux rotations ou deux symétries-droite) • Décomposition (symétries-droite) d'une translation ou d'une rotation	♦ Translations et rotations [niveau 2 (*)] • Composée (deux rotations ou une rotation et une translation) • Décomposition (rotation de centre donné et translation) d'une rotation		
	♦ Isométries [niveaux 1 et 2 (*)] • Définition • Propriétés - images de figures - conservations • Composition • Déplacements et anti-déplacements • Critères d'isométrie de deux triangles • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété)	♦ Isométries [niveaux 1 et 2 (*)] • Définition • Propriété - conservations • Déplacements et retournements • Détermination par deux triangles superposables • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété)	♦ Isométries [niveaux 1 et 2 (*)] • Composition et décomposition ; symétrie glissée • Classifications - points invariants - déplacements et anti-déplacements • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété)	
			♦ Applications affines • Définition • Propriétés - conservation du barycentre - composition - application vectorielle associée - détermination par l'image d'un repère - points invariants - images d'une droite, d'un plan - conservation du parallélisme • Affinités du plan	
♦ Homothéties [niveau 1 (*)] • Définition • Propriétés - point invariant - réciproque - propriété fondamentale - images de figures - conservations - longueurs et aires • Déterminations d'une homothétie - centre, un point et son image - rapport, un point et son image - deux points et leurs images	♦ Homothéties [niveau 2 (*)] • Propriété caractéristique • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété) • Composée d'isométrie et homothétie • Images de figures • Critères de similitude de deux triangles	♦ Homothéties [niveau 2 (*)] • Composition : homothéties de même centre, homothétie et translation • Décomposition (homothétie de centre donné et translation) • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété)	♦ Similitudes directes [niveaux 1 et 2 (*)] • Écriture complexe • Forme réduite • Composition • Propriété caractéristique • Images de figures • Déterminations - centre, un point et son image - rapport, angle, un point et son image - deux points et leurs images • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété)	♦ Similitudes directes [niveaux 1] • Écriture complexe • Forme réduite
		♦ Similitudes • Définition (par les longueurs) • Images de figures • Détermination - deux triangles semblables		

- Définition
 - foyer et directrice
 - bifocale
- Constructions point par point
- Équations réduites et éléments caractéristiques
- Courbes d'équation : $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$
- Étude analytique, équation de la tangente en un point
- Représentation paramétrique de l'ellipse
- Équation de l'hyperbole par rapport à ses asymptotes
- Régionnement du plan par une conique

- ♦ Description de l'espace
 - Positions relatives de droites et plans
 - Parallélisme (étude)

- ♦ Description de l'espace
 - Orthogonalité
 - Distance : point à une droite, à un plan

- ♦ Description de l'espace
 - Orthogonalité
 - Projections orthogonales

- ♦ Orientation de l'espace
 - Repère direct
 - Repère indirect

- ♦ Orientation de l'espace
 - Repère direct
 - Repère indirect

- ♦ Vecteurs de l'espace
 - Définition
 - Calcul vectoriel
 - Base et repère

- ♦ Produit scalaire
 - Définition
 - Propriétés
 - Expression analytique
 - Utilisation :
 - équations d'une sphère
 - surfaces de niveau

- ♦ Géométrie analytique
 - Vecteur normal à un plan
 - Équations et représentations paramétriques (plan, droite)
 - Distance d'un point à un plan
 - Étude analytique du parallélisme et de l'orthogonalité

- ♦ Vecteurs de l'espace
 - Définition
 - Vecteurs colinéaires, coplanaires
 - Base et repère

- ♦ Produit vectoriel
 - Définition
 - Propriétés
 - Expression analytique
 - Utilisation :
 - équation d'un plan
 - positions relatives de deux plans
 - distance (point à une droite, à un plan)
 - aires et volumes

- ♦ Applications de l'espace
 - Projections sur un plan, sur une droite
 - Translations et homothéties
 - Symétries orthogonales : réflexion, demi-tour

- ♦ Produit scalaire
 - Définition
 - Propriétés
 - Expression analytique
 - Utilisation :
 - équation d'un plan, d'une sphère

- ♦ Produit vectoriel
 - Définition
 - Propriétés
 - Expression analytique
 - Utilisation :
 - alignement et aires

(*) Niveaux d'étude des transformations

Niveau 1	Niveau 2
• Se familiariser avec la transformation • Reconnaître la transformation • Construire l'image d'un point, d'une figure usuelle par la transformation définie de diverses façons • Reconnaître deux figures « homologues » par la transformation (« figures clés »)	• Propriété caractéristique • Composer des transformations • Utiliser des transformations (mais pas leurs composées) pour : – trouver un lieu géométrique – résoudre un problème de construction – démontrer une propriété

2 COMMENTAIRES GÉNÉRAUX POUR LE SECOND CYCLE

La Collection Inter-Africaine de Mathématiques (C.I.A.M.) est l'aboutissement d'une volonté, déjà ancienne, des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien de mettre en place un cadre commun pour Harmoniser les Programmes de Mathématiques (H.P.M.) et leur enseignement.

Cette harmonisation vise essentiellement à améliorer la qualité de l'enseignement, à le rendre accessible à un plus grand nombre d'élèves et à prendre en compte les résultats des dernières recherches en didactique des mathématiques. Elle a, dans un premier temps, débouché sur une rénovation des programmes et des méthodes. Elle s'est par la suite accompagnée d'une formation adéquate des professeurs puis concrétisée par la rédaction de manuels-élève, au coût réduit, et de guides pédagogiques, à l'usage exclusif des professeurs.

Les manuels-élève comprennent deux parties (géométrie / algèbre et analyse) mieux équilibrées en série Sciences Mathématiques (SM) qu'en série Sciences Expérimentales (SE), où la géométrie est moins développée. Les contenus de ces manuels peuvent être couverts en **25 semaines**, si les volumes horaires suivants sont retenus :

Classe	2 ^{de} S	1 ^{re} SM	1 ^{re} SE	T SM	T SE
Horaire hebdomadaire	5 h	6 h	5 h	9 h	6 h
Total	125 h	150 h	125 h	225 h	150 h

À noter que tous les livres ont un index et que ceux de terminales se terminent par un chapitre « Problèmes de synthèse », dont la plupart sont extraits des différents baccalauréats africains.

2.1. Options académiques

Les auteurs des manuels CIAM, conscients du mouvement pendulaire des réformes successives des programmes de mathématiques entre :

- le tout conceptuel, tout abstrait, tout rigueur des années 70, à l'instar des programmes français (repris, parfois exagérément, dans les programmes africains),
 - le tout concret, beaucoup (trop ?) de propriétés admises des années 90, toujours selon les programmes français (pas systématiquement repris cette fois en Afrique),
- ont opté pour plus de mesure et sont délibérément restés dans un **juste milieu**, voulant ainsi stabiliser le mouvement.

C'est ainsi que l'on trouve (s'agissant des classes scientifiques du second cycle) des aperçus théoriques et des vraies démonstrations, un chapitre d'arithmétique et quelques structures (à dose homéopathique et en terminale uniquement), mais **aucune théorie des ensembles, aucun chapitre de logique théorique** ... avec tables de vérité !

2.2. Options pédagogiques

Utilisation de la calculatrice

La calculatrice est un outil qui, avec ou sans instructions officielles, connaît une large diffusion. Il est de l'intérêt des enseignants d'en tenir compte. S'il ne peut être encore question, vu les coûts, d'imposer son usage par des mentions dans les programmes officiels, les manuels-élève recensent les points de programmes ou les activités motivant son emploi et favorisant chez l'élève l'habitude d'une utilisation intelligente.

Apprentissage du raisonnement

- Les démonstrations de certaines propriétés et les résolutions d'exercices permettent de dégager de nombreuses **méthodes** qui enrichissent la boîte à outils de l'élève. Ces points méthodes sont repérés par l'avertisseur **M**.
- Les éléments de **logique** (notion de proposition, connecteurs, quantificateurs, méthodes de raisonnement : contraposition, absurde, récurrence) ne font pas l'objet d'un cours, mais sont introduits et réinvestis chaque fois que le besoin s'en fait sentir. La rubrique **L** a été créée à cet effet.

• Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes. Pour répondre à cette nécessité, des **travaux dirigés** sont proposés en fin de leçon. Outre un renforcement de l'apprentissage du raisonnement, ces travaux dirigés constituent soit un inventaire des exercices types de la leçon, soit un prolongement non exigible à certaines notions, soit encore une ouverture interdisciplinaire. Lorsqu'ils semblent un peu difficiles et montrent une propriété intéressante ou un type de raisonnement inédit, les solutions sont intégralement données ; sinon, les solutions sont guidées par un questionnement.

2.3. Aspects culturels

Les notes historiques

Traitant d'événements ou de mathématiciens qui ont marqué l'évolution des mathématiques, les notes historiques doivent convaincre les élèves que les mathématiques se sont construites peu à peu, à travers recherches, tâtonnements et découvertes, et leur permettre de prendre contact avec quelques problèmes célèbres.

Contextualisation des contenus

Autant que faire se peut, les auteurs ont voulu mettre à profit l'environnement socioculturel africain, aussi bien pour lutter contre le désintérêt des élèves pour une discipline réputée importée, que pour les convaincre que cette réputation est fallacieuse (il y a des mathématiques dans la vie de l'africain, comme dans celle de l'indien ou de l'asiatique) et leur donner le goût d'oeuvrer au développement de leur continent.

Les informations scientifiques

Il s'agit cette fois de convaincre les élèves et, si besoin est, leurs professeurs que les mathématiques sont en constante évolution, comme de rester en contact avec quelques récentes découvertes (rôle croissant, en particulier, de l'informatique).

2.4. Utilisation du manuel

Le manuel n'est pas un livre saint, mais un outil pédagogique précieux comme le tableau ou le rétro-projecteur, au service du professeur et de l'élève. En plus de ses fonctions classiques d'aide aux préparations de cours et de recueil d'exercices, il a de nombreuses autres fonctions avant, pendant et après le cours qu'il convient de préciser ici.

Utilisation du manuel	Le professeur	L'élève
<i>avant le cours</i>	• lit le programme • lit les instructions officielles • étudie la traduction des contenus du programme dans le manuel • choisit, en relation avec le manuel : – la présentation d'une notion – des démarches – des motivations – des activités – des traces écrites – des exercices à traiter en classe ou à la maison • repère les points précis d'utilisation du manuel pendant le cours	• apprend la leçon précédente sur son livre et son cahier • prépare sur le cahier de recherche un tableau, une activité du livre, une figure, un organigramme, un exercice • étudie les pages de révisions
<i>pendant le cours</i>	• fait analyser, commenter, identifier des planches, des tableaux, des figures, des textes du manuel • fait reconnaître une démarche, une construction, une démonstration déjà vue par l'élève • fait lire une définition, une propriété • fait critiquer cette lecture par la classe • fait reconnaître, rechercher dans le livre, recopier sur le cahier de cours : – des définitions ou propriétés – des notations de symboles, des figures, des schémas • fait analyser des énoncés d'exercices	• utilise le manuel selon les indications du professeur • exploite oralement ou sur le cahier de recherche des planches, des tableaux, des figures, des textes du manuel • recherche dans le manuel (utilisation de l'index, du sommaire) des définitions, propriétés, symboles, figures, schéma • analyse oralement des énoncés d'exercices • traite les exercices sur le cahier de recherche
<i>après le cours</i>		• relit le cours sur le cahier, le livre • traite les exercices

Il faut apprendre à l'élève à se servir du manuel où il trouvera les résultats essentiels, les méthodes de résolution de certains types de problèmes, des exercices d'entraînement et d'approfondissement qui lui permettront de contrôler ses acquis et de s'initier à la recherche.

Avant de proposer des exercices ou des travaux aux élèves, le professeur devra se poser les questions suivantes :

- font-ils partie des capacités requises dans cette classe ?
- constituent-ils des activités possibles en classe ou faut-il les réserver pour le travail à la maison ?
- leur contexte mathématique est-il compréhensible par un élève de ce niveau ?
- leur résolution relève-t-elle de l'entraînement, de l'approfondissement ? a-t-elle valeur de méthode ?

3 COMMENTAIRES SPÉCIFIQUES À LA CLASSE DE SECONDE S

La classe de seconde Scientifique est la première classe du second cycle scientifique. Elle assure à la fois une continuité avec le premier cycle et une nécessaire rupture ou plutôt évolution, marque d'un premier pas prudent mais déterminé vers des options résolument scientifiques.

3.1. Pourquoi une seconde scientifique ?

Afin d'augmenter le nombre d'élèves dans la filière Sciences Mathématiques (ou C), il a été décidé lors du séminaire de 1992 que la distinction entre les orientations en Sciences Mathématiques (ou C) et Sciences Expérimentales (ou D) ne se fasse qu'à l'issue de cette classe de seconde Scientifique commune. La seconde Scientifique n'est pas une seconde indifférenciée et il y a un manuel CIAM de seconde Littéraire.

3.2. Articulation avec le collège

Ce programme de seconde Scientifique prend appui sur les notions acquises au premier cycle. Il vise à préciser certaines de ces notions et à introduire de nouveaux concepts :

- en géométrie : angles orientés, produit scalaire, homothéties et rotations (pour certains pays) ;
- en algèbre et analyse : partie entière, majorant, minorant, maximum, minimum, caractéristiques de dispersion d'une série statistique.

De plus, ce programme complète et enrichit l'initiation au raisonnement entamé dès la classe de sixième, à travers les points méthodes et les points logiques, les travaux dirigés (extensions des exercices commentés du premier cycle), la démonstration de la plupart des propriétés.

3.3. Activités des élèves

Il n'est nullement besoin de répéter l'importance de la mise en activité de l'élève.

Dans le premier cycle, presque chaque notion ou théorème est précédé par une ou deux activités de motivation. Ceci est bien venu pour la population hétérogène des élèves du premier cycle.

En seconde Scientifique il y a peu de notions réellement nouvelles (cf. le paragraphe précédent). Pour la plupart d'entre elles, on a proposé des activités introductives. Par contre, en continuité avec le premier cycle, on a voulu :

- mettre l'accent sur le raisonnement, la démonstration et sa rédaction ;
- proposer des exercices types ou donner des prolongements intéressants mais non exigibles.

Pour cela, on retrouve des démonstrations complètes ou guidées de propriétés, des solutions complètes ou guidées de travaux dirigés.

3.4. Présentation du manuel

Organisation des chapitres

Chaque chapitre est découpé en leçons, chaque leçon en paragraphes et chaque paragraphe en sous-paragraphes.

Les leçons se terminent par des exercices de **fixation des savoirs** et les chapitres par des exercices d'**entraînement** et d'**approfondissement**, classés par thème.

Notation et vocabulaire

Dans la mesure du possible on a gardé les notations et le vocabulaire utilisés dans les manuels CIAM du premier cycle. Cependant pour les intervalles non bornés, on a repris la notation classique $]-\infty ; a[$ et $[b ; +\infty[$ au lieu de $]-\infty ; a[$ et $[b ; \rightarrow[$ qui sont les notations apparaissant dans le manuel de troisième.

Proposition de progression

Géométrie (3 h / semaine)		Algèbre et analyse (2 h / semaine)	
Angles inscrits	9 h	Ensemble des nombres réels	9 h
Vecteurs et points du plan	9 h	Fonctions	8 h
Angles orientés - Trigonométrie	9 h	Polynômes et fractions rationnelles	6 h
Produit scalaire	9 h	Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$	6 h
Droites et cercles	9 h	Études de fonctions	8 h
Homothéties - Rotations	12 h	Équations et inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	6 h
Géométrie de l'espace	12 h	Statistiques	8 h
Renforcement	3 h	Renforcement	2 h
Total	72 h	Total	53 h

3.5. Points méthodes

On relève dans le manuel de seconde Scientifique les points méthodes suivants :

Géométrie	Page	Algèbre et analyse	Page
Rechercher un lieu géométrique	12	Comparer deux nombres réels	142
Intervertir le rôle de deux objets	18	Encadrer une somme, une différence, un produit, un quotient	142
Démontrer l'unicité d'un objet	34	Démontrer une inclusion	144
Utiliser la relation de Chasles	69, 71	Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction	159
Calculer des longueurs et des angles dans un polygone donné	72	Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation	165
Construire une droite	80, 84	Trouver la forme canonique d'un polynôme du second degré	179
Déterminer une équation de droite	83	Trouver les racines d'un polynôme du second degré	179
Utiliser les représentations paramétriques de droites	88	Étudier le signe d'un polynôme du premier degré	180
Associer une homothétie à une configuration de Thalès	100	Factoriser un polynôme	183
Utiliser une homothétie pour démontrer que trois points sont alignés	102	Résoudre une équation ou une inéquation dans $\mathbb{R}$	192, 194, 197, 199, 200
Utiliser une homothétie pour démontrer que 2 droites sont perpendiculaires ou parallèles	103	Résoudre un problème conduisant à une équation	195

3.6. Points logiques

On relève dans le manuel de seconde Scientifique les points logiques suivants :

Implication, condition suffisante, condition nécessaire Équivalence, condition nécessaire et suffisante	page 14
Notion de proposition, négation d'une proposition	page 31
Démontrer que trois propositions sont équivalentes	page 70
Raisonnement par l'absurde	page 137
Complémentaire d'un ensemble	page 149
Démontrer une équivalence	page 181

3.7. Travaux dirigés

3.7.1 Objectifs généraux

- apprendre à chercher,
- faire fonctionner un outil,
- dégager des méthodes,
- donner un prolongement (non exigible) à certaines notions.

Apprendre à chercher

L'élève suit généralement deux étapes : la lecture de l'énoncé et la recherche d'une démarche.

Lecture de l'énoncé

Faite avec attention, elle permet à l'élève de bien distinguer :

- les données et contraintes (ce que l'on sait),
- les conclusions (ce que l'on cherche).

Recherche d'une démarche

L'élève dispose de connaissances minimales (définitions, propriétés). Il doit faire l'inventaire de celles qui ont un rapport avec les objets mathématiques entrant en jeu et sélectionner les plus opérationnelles. Pour certains types de problèmes, la démarche est plus élaborée et donne lieu à des points méthodes :

- les problèmes de lieux,
- les problèmes de construction,
- les problèmes conduisant à une équation ou une inéquation.

Les problèmes de modélisation et les problèmes ouverts sont des cadres appropriés pour mettre un élève en situation de recherche.

Exemples

- Démontrer (pages 15, 127, 145, 177).
- Comparer des résultats (page 248).

Faire fonctionner un outil

Il s'agit d'outils déjà formalisés dans le cours :

- propriétés ;
- méthodes de résolution de problèmes ;
- principes de démonstration : utilisation d'un contre-exemple, raisonnement par l'absurde, implication, contraposition, équivalence.

Exemples

- Utiliser l'outil vectoriel pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme (page 34, TD1).
- Utiliser l'outil vectoriel pour chercher un lieu (page 34, TD2).
- Utiliser l'outil vectoriel pour démontrer un alignement, un parallélisme (page 42).
- Utiliser des relations métriques (théorèmes d'Al Kashi, des sinus) (page 71).
- Utiliser l'expression analytique du produit scalaire (page 73).
- Utiliser le raisonnement par l'absurde (page 138).

Dégager des méthodes

Certains travaux dirigés donnent l'occasion de rappeler ou de mettre en place des points méthodes.

Exemples

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires (page 68).
- Étudier l'intersection de deux droites définies par leurs représentations paramétriques (page 87).

- Associer une homothétie à une configuration de Thalès (page 100).
- Comparer deux nombres (page 142, TD1).
- Encadrer une somme, une différence (page 142, TD2).
- Encadrer un produit, un quotient (page 143, TD3).
- Démontrer une inclusion (page 144).
- Résoudre graphiquement une équation, une inéquation (page 164).
- Résoudre un problème conduisant à une équation (page 194).

Donner un prolongement à certaines notions

Certains travaux dirigés permettent de démontrer un résultat connu ou de donner un prolongement à une notion.

Exemples

- Établir les relations métriques dans un triangle (pages 19, 68).
- Utiliser un pentagone régulier pour calculer des lignes trigonométriques (page 21).
- Démontrer la propriété de conservation du contact par une homothétie (page 104).
- Construire l'image d'un point par une homothétie (page 107).
- Faire la section plane d'un solide (page 122).
- Établir une inégalité remarquable (page 149, TD1).
- Étudier les rectangles d'or (page 197, TD1).
- Étudier la fonction mantisse (page 209, TD1).

3.7.2. Conduite d'une séance de travaux dirigés

Choix d'un problème

- Le professeur propose le travail dirigé adapté à l'objectif qu'il veut atteindre.
- Il précise alors aux élèves le temps de recherche, qui peut varier d'un travail dirigé à l'autre suivant la longueur ou la difficulté du problème.

Gestion de la classe

Après la phase de recherche, le professeur organise dans la classe un débat :

- les élèves sont invités à communiquer leurs idées, à partir desquelles on essaie de trouver une solution ;
- s'il n'y a aucune piste sérieuse, le professeur donne une, deux ou plusieurs indications suivant la réaction des élèves.

Rédaction d'une solution

Lorsqu'on a trouvé une solution, le professeur demande aux élèves de la rédiger.

Rédiger, en mathématiques, c'est mettre en évidence les grandes lignes et les articulations du raisonnement. Si cela s'est fait souvent à l'aide d'un schéma ou d'un organigramme au premier cycle, l'accent sera mis au second cycle sur une rédaction en français. En effet, c'est d'après ses rapports et ses projets que l'élève, cadre de demain, sera jugé par ses collègues et ses supérieurs hiérarchiques. Le professeur lui apprendra donc à être précis, concis et clair.

3.8. Géométrie

Objectifs	Activités	Outils
- Apprendre à lire, à travailler sur une figure - Développer la capacité à analyser des configurations - Renforcer les méthodes essentielles à travers la résolution de problèmes	- Rechercher des lieux géométriques - Construire des configurations respectant certaines contraintes - Démontrer des propriétés liées à des configurations	- Configurations - Vectoriel - Analytique - Transformations

On doit apprendre à l'élève à effectuer le choix des outils pour résoudre un problème. Aucun outil n'est à privilégier ni à exclure.

L'outil des configurations

L'outil des configurations est présent dans toutes les classes du secondaire et absolument indispensable ; les élèves doivent reconnaître, visualiser et maîtriser un certain nombre de configurations-clés enrichies tout au long de leur cursus scolaire.

Le tableau ci-dessous résume les configurations étudiées depuis la classe de sixième.

	6 ^e	5 ^e	4 ^e	3 ^e	2 ^e S
Droites	• Droites parallèles • Droites perpendiculaires • Droites sécantes • Demi-droites	• Droites parallèles : caractérisations par les angles (alternes-internes, correspondants)	• Distance – d'un point à une droite – de deux droites parallèles • Axe médian de deux droites parallèles : caractérisation par les distances	• Caractérisation de droites parallèles ou perpendiculaires : – par les équations – par les coefficients directeurs	• Caractérisation de droites parallèles ou perpendiculaires par les équations réduites
Segments	• Longueur, mesure • Milieu • Médiatrice	• Caractérisation d'un segment par les distances • Médiatrice : – caractérisation par les distances – régionnement du plan			
Angles	• Angles droit, plat, nul • Angles aigu, obtus • Angles adjacents • Bissectrice d'un angle	• Angles supplémentaires, complémentaires • Angles opposés par le sommet, alternes-internes, correspondants • Angles formés par deux droites et une sécante	• Bissectrice d'un angle : caractérisation par les distances	• Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu • Somme des carrés du cosinus et du sinus d'un angle	• Angle orienté de deux vecteurs : – mesure principale – cosinus, sinus et tangente
Cercle	• Vocabulaire • Disque	• Régionnement du plan	• Corde, arc et angle au centre • Proportionnalité entre mesure d'un arc et mesure de l'angle au centre associé • Cercles et droites – position relative de deux cercles, d'une droite et d'un cercle – tangente à un cercle	• Angle inscrit dans un cercle : – relation avec l'angle au centre associé (mesures) – angles interceptant le même arc	• Extension de la notion d'angle inscrit (corde et demi-tangente) : – relation avec l'angle au centre associé (mesures) – angles interceptant le même arc • Arcs capables
Triangles	• Hauteurs • Triangle rectangle (angle droit) • Triangles isocèle et équilatéral (égalité de mesures de côtés)	• Inégalité triangulaire • Somme des mesures des angles • Médiatrices et cercle circonscrit • Triangle rectangle : caractérisation par angles complémentaires ou cercle circonscrit • Triangles isocèle et équilatéral : caractérisation par égalité de mesures d'angles	• Droite des milieux • Droites particulières : – hauteurs et orthocentre – bissectrices et centre du cercle inscrit – médianes et centre de gravité • Triangle rectangle : – Pythagore et réciproque – propriété métrique (déduite de l'aire) • Triangles isocèle et équilatéral : caractérisations par droites particulières	• Thalès et réciproque • Triangles semblables	• Relations métriques dans un triangle quelconque : – $\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$ – théorème des sinus • Relations métriques caractérisant un triangle rectangle – théorème d'Al Kashi – théorème de la médiane

	6 ^e	5 ^e	4 ^e	3 ^e	2 ^e S
Quadrilatères	• Parallélogramme • Rectangle • Carré • Losange	• Caractérisations du parallélogramme, du rectangle, du losange et du carré • Trapèze quelconque, rectangle ou isocèle		• Angles opposés dans un quadrilatère (convexe) inscrit dans un cercle	• Caractérisation par les angles : – d'un quadrilatère croisé inscriptible – d'un quadrilatère convexe inscriptible
Polygones		• Hexagone régulier • Octogone régulier	• Polygones réguliers partage d'un cercle en angles au centre de même mesure	• Polygone régulier à n côtés : mesure des angles	Construction d'un pentagone régulier
Espace	• Pavé droit, cube • Cylindre droit	• Prisme droit • Pyramide	• Solides de révolution : sphère, boule, cylindre, cône • Droites et plans de l'espace : position relative (observations et définitions)	• Pyramide et cône • Pyramide régulière • Cône de révolution • Sections planes (pyramide régulière, cône de révolution)	• Positions relatives de droites et de plans • Sections planes – d'un pavé droit – d'un tétraèdre • Étude du parallélisme

L'outil vectoriel

Les vecteurs sont connus depuis la classe de quatrième, mais les notations $\vec{u}$, $\vec{v}$, $a\vec{u} + b\vec{v}$ sont nouvelles en classe de Seconde S. Ils ne constituent pas un objet d'étude mais un outil.

- Cet outil permet de caractériser certaines configurations :
 - parallélogramme,
 - milieu et point d'un segment,
 - points alignés (éléments d'une droite ou d'une demi-droite),
 - droites parallèles ou perpendiculaires,
 - centre de gravité d'un triangle,
 - configuration de Thalès.
- Il permet également de faire le lien entre les vecteurs et certaines transformations :
 - translations,
 - symétries centrales,
 - homothéties.

L'outil analytique

Le recours systématique aux méthodes analytiques est exclu. Toutefois, on exercera l'élève à trouver un « bon repère » permettant une solution rapide.

L'outil des transformations

Outre le fait de donner des solutions souvent plus rapides et élégantes, cet outil permet, en relation avec certaines configurations, des raisonnements plus riches.

Les symétries centrales, symétries orthogonales et translations ont été étudiées au premier cycle.

Deux nouvelles transformations sont introduites en seconde S : les homothéties et les rotations.

Après l'étude de ces dernières transformations, le professeur devrait consacrer quelques heures à l'utilisation des transformations pour résoudre des problèmes.

Le tableau ci-dessous résume le niveau d'utilisation (cf. § 1 – tableau synoptique) des différentes transformations rencontrées.

Transformations	6 ^e	5 ^e	4 ^e	3	2 ^{de} S
Symétrie centrale	niveau 1	niveau 1	niveau 2	niveau 2	
Symétrie orthogonale	niveau 1	niveau 1	niveau 2	niveau 2	
Translation			niveau 1	niveau 2	
Rotation				niveau 1	niveau 1
Homothétie				niveau 1	niveau 1

3.9. Algèbre et analyse

Quatre thèmes généraux se dégagent en classe de seconde S :

- *calcul numérique,*
- *calcul littéral,*
- *fonctions,*
- *organisation de données.*

Calcul numérique

Le programme de seconde S offre l'occasion de justifier l'existence des nombres irrationnels (en s'initiant au raisonnement par l'absurde) et de contrôler / développer les aptitudes des élèves aux techniques de calculs, d'encadrement et d'approximations.

Calcul littéral

Cette rubrique vise autant la maîtrise d'une (relative) virtuosité dans certains calculs sur les polynômes (développement, réduction, factorisation) et les fractions rationnelles, que celle des différentes méthodes de résolution des équations et inéquations, des systèmes d'équations ou d'inéquations.

La résolution de problèmes concrets, qui permet de donner du sens à des techniques abstraites, reste (au moment de la mise en équation) un exercice difficile pour l'élève.

Fonctions

Les notions de fonction, d'ensemble de définition et de représentation graphique sont des thèmes nouveaux et délicats, promis à un grand avenir dans les classes ultérieures !

Ici encore, un support concret est privilégié, tant au niveau de la découverte des concepts que de leur exploitation : les représentations graphiques.

Organisation de données

Les statistiques jouent un rôle important comme outil d'aide à la prise de décision dans un contexte donné. Il est cependant important de savoir qu'à chaque étape du traitement allant de données observées à des conclusions statistiques, un gain en signification a pour prix la perte d'une partie des informations. Le meilleur moyen pour les élèves de s'en convaincre est d'avoir eu l'occasion de mener, au moins une fois, une étude statistique complète, c'est-à-dire allant du relevé de données à l'élaboration d'une réponse à une question posée au départ.

4 ANALYSE DES CHAPITRES

1. Angles inscrits

(pages 7 à 26 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- généraliser la notion d'angle inscrit vue en troisième,
- établir le théorème des sinus dans un triangle.

COMMENTAIRES

Comme en troisième, les angles sont géométriques et leurs mesures s'expriment en degré. Les notions d'angles orientés et de mesure d'angle en radian seront introduites au chapitre 3. On attachera de l'importance au soin que l'élève doit apporter aux constructions géométriques à la règle et au compas, notamment dans le tracé d'un pentagone régulier.

On étend la notion d'angle inscrit au cas de l'angle formé par une corde et une demi-tangente ; on détermine la mesure d'un angle inscrit dans divers cas. L'élève retiendra la technique de construction des deux arcs capables d'extrémités A, B et d'angle θ donnés.

Il fera connaissance avec un nouveau type de problème, la recherche de lieux géométriques, et d'un outil performant adapté à ce genre d'activité (cf. point méthode p. 12).

Les propriétés des angles inscrits permettront de dégager quelques critères justifiant qu'un quadrilatère est inscrit.

On étend la définition du sinus au cas des angles obtus. On donne une nouvelle expression de l'aire d'un triangle, puis on en déduit le théorème des sinus.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Angles inscrits

- Vocabulaire : théorème, demi-tangente.
- Relation entre angle inscrit et angle au centre associé.
- Des angles inscrits qui interceptent le même arc ont même mesure.
- Des angles inscrits qui interceptent deux arcs de même longueur ont même mesure.
- La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur.
- Si M est un point de l'arc $\widehat{AB}$ et N un point de l'arc $\widehat{AB}$, alors $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires.

Lieu géométrique des points M tels que $\widehat{AMB} = \theta^\circ$

- Vocabulaire : lieu géométrique, arc capable.
- Propriété.

Quadrilatères inscrits

- Vocabulaire : quadrilatère convexe, quadrilatère croisé, quadrilatère non croisé, non convexe, quadrilatère inscrit, points cocycliques, implique, condition nécessaire, condition suffisante, conditions équivalentes, si et seulement si, condition nécessaire et suffisante.
- Conditions portant sur les mesures de deux angles opposés d'un quadrilatère croisé (resp. convexe) pour qu'il soit inscrit.

savoir-faire

- Déterminer la mesure de l'angle inscrit ou celle de l'angle au centre associé.
- Établir des égalités de mesures d'angles.
- Établir des égalités de mesures de longueurs d'arcs.
- Justifier que deux angles sont supplémentaires.

- Suivre les deux étapes de la méthode de recherche d'un lieu géométrique.
- Construire les deux arcs capables d'angle θ° donné et d'extrémités A et B donnés.
- Justifier que quatre points sont cocycliques.
- Justifier que deux angles ont même mesure.
- Justifier que deux angles sont supplémentaires.

- Utiliser les résultats ci-contre pour :
 - démontrer qu'un quadrilatère est inscrit ;
 - démontrer d'autres résultats géométriques.

Relations métriques dans un triangle

- Soit $\widehat{BAC}$ un angle, H le projeté orthogonal de C sur (AB) , K le projeté orthogonal de B sur (AC) .

$$\text{On pose : } \sin \widehat{BAC} = \frac{HC}{AC} = \frac{KB}{AB}.$$

- Deux angles ayant même sinus ont même mesure ou sont supplémentaires.

- Soit ABC un triangle, $\mathcal{A}$ son aire, $(\mathcal{C})$ son cercle circonscrit, R le rayon de $(\mathcal{C})$.

$$\text{On pose : } a = BC, b = AC, c = AB.$$

$$\text{On a : } \mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C}.$$

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R.$$

(théorème des sinus)

Polygones réguliers

- Vocabulaire : apothème, polygone étoilé.
- On appelle polygone régulier tout polygone inscrit dans un cercle et dont les côtés ont même longueur.

- Calculer de deux façons différentes le sinus d'un angle, afin d'établir une propriété.

- Déterminer les éléments d'un triangle dont on connaît la longueur des deux côtés et la mesure (ou le sinus) de l'angle qu'ils forment.
- Déterminer les éléments d'un triangle dont on connaît la longueur d'un côté et la mesure (ou le sinus) de chacun des angles « adjacents » à ce côté.

- Construire un polygone régulier à n côtés.
- Dans un polygone régulier donné, dont on connaît l'un des trois éléments (côté, apothème ou rayon du cercle circonscrit), déterminer les deux autres.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 11

À l'aide de la propriété 3 du § 1.3, on établit que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont les bissectrices du triangle ABC , donc qu'elles sont concourantes.

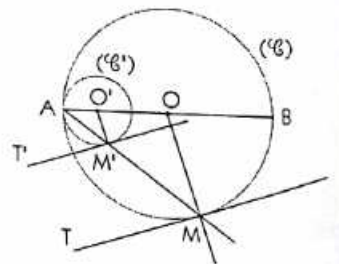
♦ Exercice 1.b p. 11

Les triangles $AO'M'$ et AOM sont isocèles en O . Puisqu'ils ont l'angle $\widehat{BAM}$ en commun, leurs angles au sommet respectifs $\widehat{AO'M'}$ et $\widehat{AOM}$ ont même mesure.

D'après le théorème de la page 8, on a :

$$\text{mes } \widehat{AM'T'} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AO'M'} \text{ et } \text{mes } \widehat{AMT} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOM} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AO'M'}.$$

Il s'ensuit que les droites $(M'T')$ et (MT) sont parallèles, car elles forment, avec la droite (AM) , des angles correspondants de même mesure.



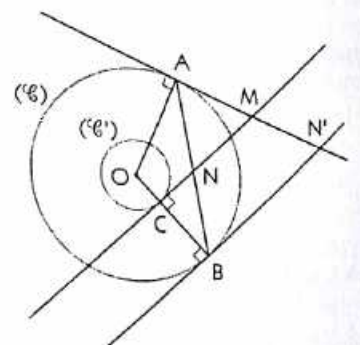
♦ Exercice 1.c p. 11

On notera que si les points A et B sont confondus ou diamétralement opposés, les tangentes en A et C sont parallèles et non confondues : le point M n'existe pas.

Traçons la tangente en B à $(\mathcal{C})$; elle coupe (AM) en N' . $\widehat{MAB}$ et $\widehat{N'BA}$ sont des angles inscrits qui interceptent le même arc ; ils ont donc même mesure.

Les droites (CN) et (BN') sont parallèles, car perpendiculaires à (OB) . Elles forment avec la sécante (AB) des angles correspondants de même mesure : $\widehat{N'BA}$ et $\widehat{MNA}$.

Donc $\widehat{MAB}$ et $\widehat{MNA}$ ont la même mesure et le triangle AMN est isocèle en M .



♦ Exercice 1.d p. 11

$$\text{mes } \widehat{BMA}' = 180^\circ - \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{BOA}' = \text{mes } \widehat{BOA} = \text{mes } \widehat{BAT}.$$

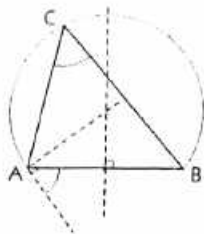
On a donc : $\text{mes } \widehat{BOA} = \text{mes } \widehat{BAT} = \text{mes } \widehat{BAO} + 90^\circ$.

Or, $\text{mes } \widehat{BOA} = 180^\circ - 2 \text{mes } \widehat{BAO}$; donc, $\text{mes } \widehat{BAO} = 30^\circ$ et $\text{mes } \widehat{BAT} = 120^\circ$.

♦ Exercice 2.a p. 13

Il s'agit de l'arc capable :

- d'angle $\widehat{ACB}$,
- d'extrémités A et B,
- contenant le point C.

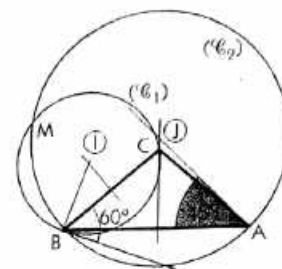


♦ Exercice 2.b p. 13

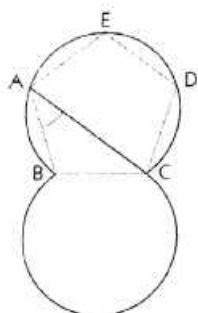
On détermine les intersections des arcs capables :

- $(\mathcal{C}_1)$, d'angle 60° , d'extrémités B et C ;
- $(\mathcal{C}_2)$, d'angle 45° , d'extrémités A et B.

Les autres parties des arcs capables ne donnent pas lieu à intersection.



♦ Exercice 2.c p. 13



L'ensemble des points M tels que $\text{mes } \widehat{BMC} = \text{mes } \widehat{BAC}$ est la réunion de l'arc du cercle circonscrit à ABCDE, contenant A, et du symétrique de cet arc par rapport à (BC).

♦ Exercice 2.d p. 13

1. a) $\text{mes } \widehat{BAN} < \text{mes } \widehat{BAP}$, par construction.

b) $\text{mes } \widehat{ANB} = 180^\circ - \text{mes } \widehat{BAN} - \text{mes } \widehat{ABN}$,

$$\text{mes } \widehat{APB} = 180^\circ - \text{mes } \widehat{BAP} - \text{mes } \widehat{ABP} ;$$

on en déduit que : $\text{mes } \widehat{ANB} > \text{mes } \widehat{APB}$.

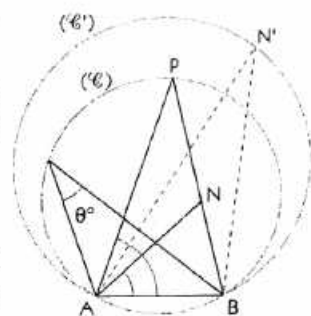
2. Si P est un point de $(\mathcal{C})$, alors P est un point intérieur à $(\mathcal{C}')$ et, d'après ce qui précède, on a :

$$\text{mes } \widehat{AN'B} < \text{mes } \widehat{APB} ;$$

c'est-à-dire : $\text{mes } \widehat{AN'B} < \theta$.

3. a) L'ensemble des points M tels que $\text{mes } \widehat{AMB} > \theta$ est l'intérieur (strict) des deux arcs capables de l'angle θ° .

b) L'ensemble des points M tels que $\text{mes } \widehat{AMB} < \theta$ est l'extérieur (strict) de ces mêmes arcs capables.



♦ Exercice 3.a p. 16

Tout rectangle est un parallélogramme inscriptible.

Réciproquement, pour être inscriptible un parallélogramme doit avoir deux angles opposés supplémentaires ; étant déjà égaux, ces angles sont droits et le parallélogramme est un rectangle.

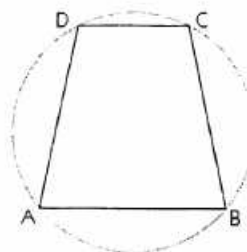
Les seuls losanges inscriptibles sont donc les carrés.

♦ Exercice 3.b p. 16

Dans tout trapèze ABCD, de bases [AB] et [CD], les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{D}$ sont supplémentaires.

Étant par ailleurs un quadrilatère convexe, un tel trapèze est inscriptible si et seulement si les angles opposés $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont supplémentaires.

Donc, un tel trapèze est inscriptible si les angles à la base $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ ont même mesure, c'est-à-dire si et seulement si le trapèze est isocèle.



♦ Exercice 3.c p. 16

Les quatre points A, A', A'' et A''' sont cocycliques ($OA = OA' = OA'' = OA'''$, par propriété des symétries).

Étant inscriptible, le quadrilatère AA'A''A''' a ses angles opposés supplémentaires.

♦ Exercice 3.d p. 16

Le résultat est une conséquence immédiate de la propriété 3 du paragraphe 1.3. (p. 10).

♦ Exercice 3.e p. 16

1. Dans les triangles AGF et KGB, $\widehat{G} = \widehat{G}$ et $\widehat{F} = \widehat{B}$; donc, $\widehat{A} = \widehat{K}$.

2. Dans le quadrilatère convexe inscriptible AFHG, $\widehat{A}$ et $\widehat{H}$ sont supplémentaires.

D'après 1, $\widehat{K}$ et $\widehat{H}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère convexe KLHG, qui est inscriptible.

♦ Exercice 4.a p. 20

De $\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R$ et $a = R = 1$,

on déduit que : $\text{mes } \hat{A} = 30^\circ$.

De $b = c$, on déduit que : $\text{mes } \hat{B} = \text{mes } \hat{C} = 75^\circ$,

$\sin \hat{C} \approx 0,97$ et $b = c \approx 1,93$.

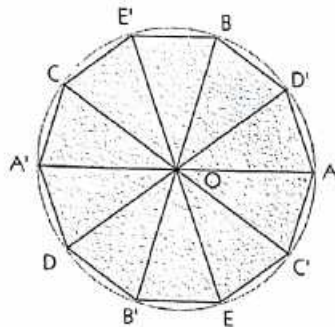
Un seul triangle répond à la question.

♦ Exercice 5.a p. 22

• On reprend la construction du pentagone régulier ABCDE vue page 21.

• Les droites (OA), (OB), (OC), (OD), (OE) recoupent le cercle respectivement en A', B', C', D', E'.

• On obtient un décagone régulier AD'BE'CA'DB'EC'.

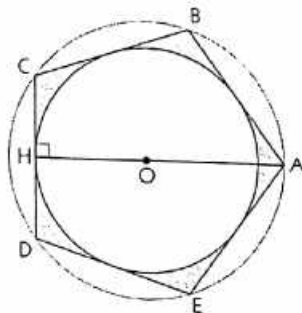


♦ Exercice 5.c p. 22

$\mathcal{A} = \pi(OA^2 - OH^2)$.

On a vu (TD 1, page 21) que : $OH = R \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}$.

Donc : $\mathcal{A} = \pi R^2 \left(1 - \frac{3 + \sqrt{5}}{8} \right) = \pi R^2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8} \right)$.



♦ Exercice 5.e p. 22

Soit R le rayon des 4 cercles. On a : $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

1. Il suffit de démontrer que : $EF = FG$. On a : $BF = a - R = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} a$.

$EF^2 = 2BF^2 = 2 \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} a \right)^2 a^2$; donc : $EF = a(\sqrt{2} - 1)$;

de plus : $FG = a - 2BF = a(\sqrt{2} - 1)$.

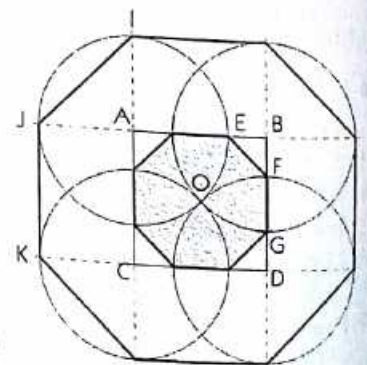
Cet octogone régulier a pour côté $a(\sqrt{2} - 1)$ et pour apothème $\frac{a}{2}$.

2. Il suffit cette fois de démontrer que : $IJ = JK$. Or, $IJ = R\sqrt{2} = a = JK$.

Cet octogone régulier a pour côté a et pour apothème $R + \frac{a}{2} = \frac{a(1 + \sqrt{2})}{2}$.

Commentaire

On pourra faire vérifier que les rapports du côté et de l'apothème sont identiques.



♦ Exercice 4.b p. 20

$\text{mes } \hat{A} = 120^\circ \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = c = \frac{5}{3} \sqrt{3}$.

Donc : $\mathcal{P}$ (périmètre) = $\frac{5}{3} (3 + 2\sqrt{3})$;

$\mathcal{A}$ (aire) = $\frac{25}{12} \sqrt{3}$; R (rayon) = $\frac{5}{3} \sqrt{3}$;

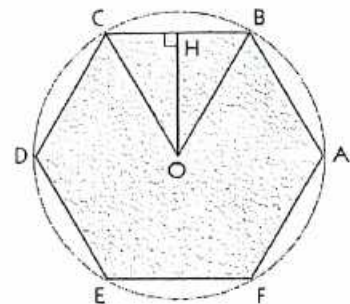
$\text{mes } \hat{BOC} = 180^\circ - \frac{1}{2} \text{mes } \hat{BAC} = 120^\circ$.

♦ Exercice 5.b p. 22

• Dans le triangle OBC, on a : $OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

• Périmètre : $\mathcal{P} = 6R$.

• Aire : $\mathcal{A} = 6 \times \frac{1}{2} R \times R \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

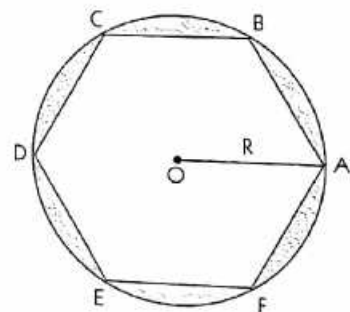


♦ Exercice 5.d p. 22

L'aire de l'hexagone est :

$6 \times \frac{1}{2} R \times \frac{R\sqrt{3}}{2} = 3R^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc : $\mathcal{A} = R^2 \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$.



Exercices d'apprentissage

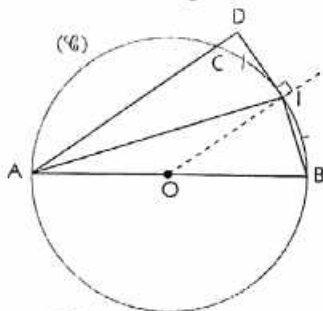
ANGLES INSCRITS

◆ Exercice n° 1 p. 23

On a : $\widehat{\text{TBA}} = 90^\circ - \theta$

ou : $\widehat{\text{TBA}} = 90^\circ + \theta$.

◆ Exercice n° 3 p. 23

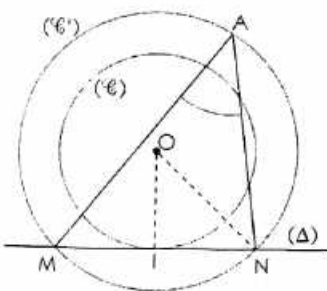


$\widehat{\text{ABI}} = \widehat{\text{AID}}$ (angle inscrit et angle défini par une corde et une tangente) ;

$\widehat{\text{DAI}} = \widehat{\text{BAI}}$ (angles inscrits interceptant des arcs de même longueur) ;

donc les triangles ABI et AID ont leurs angles égaux deux à deux.

◆ Exercice n° 5 p. 23



$$MN = 2IN = 2\sqrt{r'^2 - r^2}.$$

L'angle $\widehat{\text{MAN}}$ qui intercepte, dans le cercle $(\mathcal{C})$, une corde de longueur constante, garde une mesure constante.

◆ Exercice n° 2 p. 23

Les triangles MAB et ABC sont isocèles, respectivement en M et A ;
 $\widehat{\text{MAB}} = \widehat{\text{ACB}}$, comme angle inscrit et angle défini par une corde et une tangente.

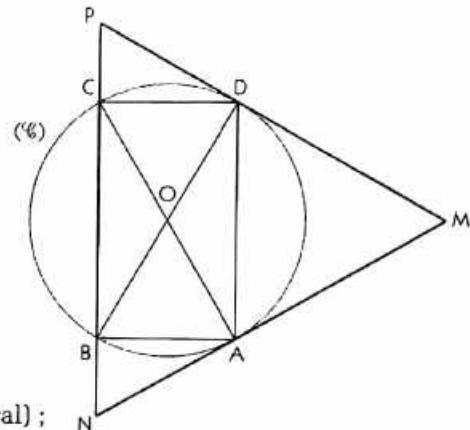
Donc : $\widehat{\text{MBA}} = \widehat{\text{MAB}} = \widehat{\text{ACB}} = \frac{1}{2}(180^\circ - 52^\circ) = 64^\circ$;

$\widehat{\text{ACB}} = \widehat{\text{ABC}} = 64^\circ$;

$\widehat{\text{CAB}} = 52^\circ$.

d'où : $\widehat{\text{CBM}} = 128^\circ$, $\widehat{\text{ACB}} = 64^\circ$, $\widehat{\text{CAM}} = 116^\circ$ et $\widehat{\text{AMB}} = 52^\circ$.

◆ Exercice n° 4 p. 23



On a :
 $OC = OD = OA = OB = AB$.

• $\widehat{\text{ABO}} = \widehat{\text{ABD}} = 60^\circ$

(le triangle AOB est équilatéral) ;

• $\widehat{\text{ABD}} = \widehat{\text{DAM}} = \widehat{\text{ADM}} = 60^\circ$

(angle inscrit et angles formés par la corde [AD] et une tangente) ;

• $\widehat{\text{DAM}} = \widehat{\text{PNM}}$ et $\widehat{\text{ADM}} = \widehat{\text{NPM}}$

(angles correspondants pour les droites parallèles (DA) et (PN)).

Donc MNP, qui a deux angles de mesure égale à 60° , est équilatéral.

◆ Exercice n° 6 p. 23

1. $\triangle A'B'C$ et $\triangle ABC$ ont chacun un angle droit ($\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$) et l'angle $\widehat{A'}$ en commun ; leurs angles ont même mesure deux à deux.

De même $\triangle ABC$ et $\triangle A'BC'$ sont semblables.

2. Dans le triangle rectangle $A'B'C$,

• $\widehat{\text{A'CI}} + \widehat{\text{ICB'}} = 90^\circ$;

• I étant le milieu de l'hypoténuse $[A'B']$, le triangle $IA'C$ est isocèle et

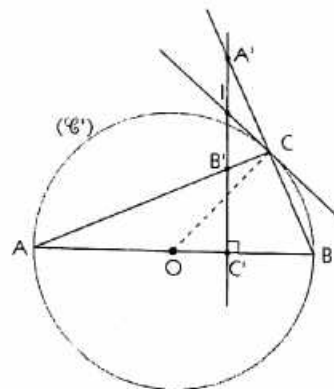
$\widehat{\text{A'CI}} = \widehat{\text{CA'I}}$.

Or :

$\widehat{\text{CA'I}} = \widehat{\text{CAO}}$ (d'après 1)

et $\widehat{\text{CAO}} = \widehat{\text{ACO}} = \widehat{\text{B'CO}}$ (car AOC est isocèle en O).

Donc : $\widehat{\text{ICB'}} + \widehat{\text{B'CO}} = 90^\circ$ et (CI) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$.



♦ Exercice n° 7 p. 23

1. $\widehat{C'AB}$ et $\widehat{CAB}$ interceptent chacun un diamètre ; leur mesure est 90° et les points C, A, C' sont alignés.

2. Dans CBC' , $\text{mes } \widehat{CBC'} = 180^\circ - \text{mes } \widehat{ACB} - \text{mes } \widehat{AC'B}$.

Dans MBM' , $\text{mes } \widehat{MBM'} = 180^\circ - \text{mes } \widehat{AMB} - \text{mes } \widehat{AM'B}$.

$\widehat{ACB}$ et $\widehat{AMB}$ (resp. $\widehat{AC'B}$ et $\widehat{AM'B}$) ont même mesure, puisqu'ils interceptent l'arc $\widehat{AB}$ du cercle ($\mathcal{C}$) (resp. du cercle ($\mathcal{C}'$)) ;

donc : $\text{mes } \widehat{CBC'} = \text{mes } \widehat{MBM'}$.

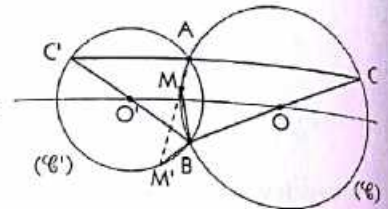
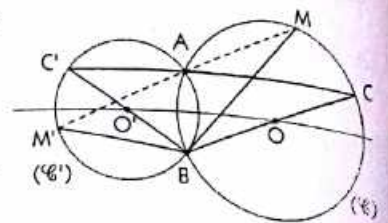
3. Dans MBM' , $\text{mes } \widehat{MBM'} = 180^\circ - \text{mes } \widehat{M'MB} - \text{mes } \widehat{MM'B}$.

$\text{mes } \widehat{M'MB} = \text{mes } \widehat{ACB}$, puisqu'ils ont le même supplémentaire : $\widehat{AMB}$.

$\text{mes } \widehat{MM'B} = \text{mes } \widehat{AM'B} = \text{mes } \widehat{AC'B}$, puisque $\widehat{AM'B}$ et $\widehat{AC'B}$ interceptent le même arc du cercle ($\mathcal{C}'$).

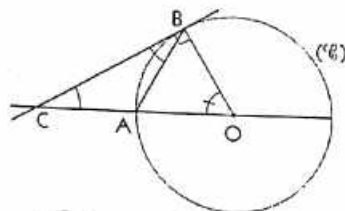
Donc : $\text{mes } \widehat{MBM'} = 180^\circ - \text{mes } \widehat{ACB} - \text{mes } \widehat{AC'B} = \text{mes } \widehat{CBC'}$.

4. Les triangles CBC' et MBM' sont toujours semblables quand M parcourt ($\mathcal{C}$) privé des points A et B.



♦ Exercice n° 8 p. 23

Si $\widehat{AOB}$ est aigu, ABC ne peut être qu'isocèle en A.



On a : $2 \text{ mes } \widehat{ABC} = \text{mes } \widehat{AOB}$ (angle inscrit défini par une demi-tangente et angle au centre associé).

ABC isocèle en A $\Leftrightarrow \text{mes } \widehat{ACB} = \text{mes } \widehat{ABC}$

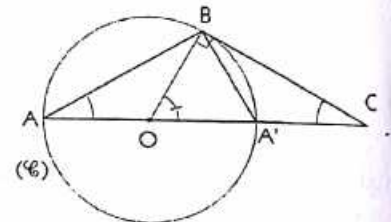
$$\Leftrightarrow 90^\circ - \text{mes } \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOB}$$

$$\Leftrightarrow \text{mes } \widehat{AOB} = 60^\circ$$

$\Leftrightarrow AOB$ est un triangle équilatéral

$\Leftrightarrow AB$ est égal au rayon de ($\mathcal{C}$).

Si $\widehat{AOB}$ est obtus, ABC ne peut être qu'isocèle en B.



A' étant diamétralement opposé à A sur ($\mathcal{C}$), on a :
 $\text{mes } \widehat{OAB} = \text{mes } \widehat{OBA}$ (dans OAB , isocèle en O),
 $\text{mes } \widehat{OBA} = \text{mes } \widehat{A'BC}$ (angles de même complémentaire).

Donc :

ABC isocèle en B $\Leftrightarrow A'BC$ isocèle en A'

$\Leftrightarrow A'B$ est égal au rayon de ($\mathcal{C}$).

(On est ainsi ramené au cas précédent.)

♦ Exercice n° 9 p. 23

1. OMP est un triangle rectangle en M tel que : $OM = R$ et $2MP = OP$
 $\left(\text{mes } \widehat{MOP} = 30^\circ \text{ et } \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{MP}{PO} \right)$.

De la propriété de Pythagore, on déduit que : $OP = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Donc, P appartient au cercle de centre O et de rayon $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

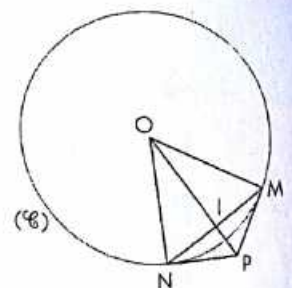
2. Réciproquement, si $OP = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$, alors P est extérieur au cercle ($\mathcal{C}$).
 On peut donc mener par P deux tangentes en M et N à ($\mathcal{C}$).

De la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle MOP, on déduit que :

dire : $\sin \widehat{MOP} = \frac{1}{2}$ et $\text{mes } \widehat{MOP} = 30^\circ$.
 $MP = \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{OP}{2}$; c'est-à-

De même : $\text{mes } \widehat{NOP} = 30^\circ$.

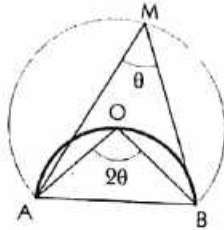
D'où l'on tire que $\text{mes } \widehat{NOM} = 60^\circ$, le triangle OMN est équilatéral et $MN = R$.



ARCS CAPABLES

◆ Exercice n° 10 p. 23

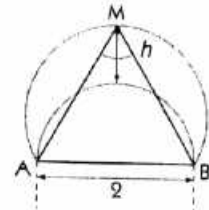
Si O est le centre du cercle circonscrit à ABM , l'arc cherché est la partie du cercle circonscrit au triangle AOB , incluse dans le demi-plan de frontière (AB) contenant M .



◆ Exercice n° 11 p. 23

Si MAB est un triangle équilatéral, alors M appartient à l'arc capable d'extrémités A et B , de mesure 60° .

On a alors : $h = \sqrt{3} - 1$.



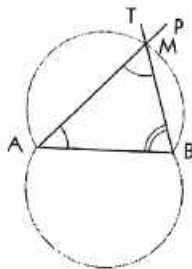
◆ Exercice n° 12 p. 23

1. (BT) existe ssi $\widehat{BAP} < 120^\circ$.

2. Dans ce cas, le point M existe et $\widehat{BAM} + \widehat{ABM} = 120^\circ$.

Donc, $\widehat{AMB} = 60^\circ$ et M décrit les arcs capables d'extrémités A et B , d'angle 60° .

Réciproquement, tout point de ces arcs capables convient.



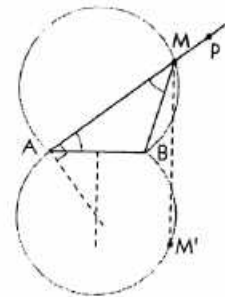
◆ Exercice n° 13 p. 23

• Tracer les arcs capables :

– d'extrémités A et B ,

– d'angle $\widehat{BAP}$.

• M , point d'intersection de la droite (AP) avec ces arcs capables, et M' , symétrique de M par rapport à (AB) , sont les points cherchés.



QUADRILATERES INSCRIPTIBLES

◆ Exercice n° 14 p. 24

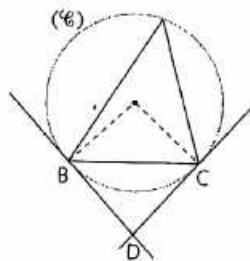
A, B, C et D sont quatre points tels que : $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

• S'ils sont alignés (angle nul ou angle plat), ils n'appartiennent pas à un même cercle.

• S'ils ne sont pas alignés, les points C et D appartiennent à l'un ou l'autre des arcs capables d'extrémités A et B et d'angle $\widehat{ACB}$, c'est-à-dire n'appartiennent pas toujours à un même cercle.

Les points A, B, C et D appartiennent cependant à un même cercle lorsque le quadrilatère $ACBD$ est croisé.

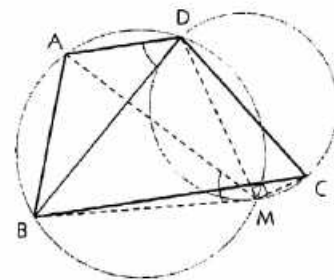
◆ Exercice n° 15 p. 24



$ABCD$ ne peut pas être inscriptible.

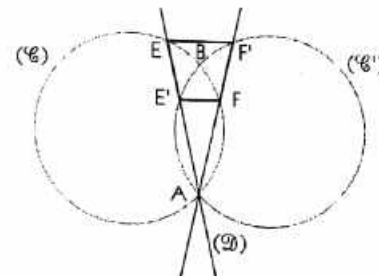
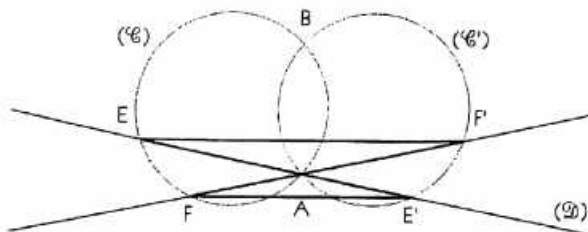
En effet, D ne peut être élément de (C) que si les points B, C et D sont confondus.

◆ Exercice n° 16 p. 24



Le cercle de diamètre $[DC]$ et le cercle circonscrit au triangle ABD se recoupent au point M cherché.

◆ Exercice n° 17 p. 24



Dans les deux cas, (AB) est la médiatrice commune de $[EF']$ et de $[E'F]$. Il s'ensuit que :

– dans le premier cas, $EFE'F'$ est un trapèze isocèle ;

– dans le second cas, $EE'FF'$ est un trapèze isocèle.

Dans les deux cas, le quadrilatère $EE'FF'$ est inscriptible (cf. exercice 3.b).

♦ Exercice n° 18 p. 24

1. $\widehat{BPC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = 45^\circ$.

M appartient à la médiatrice de [BP] ; donc BMP est un triangle isocèle, dont les angles à la base ont pour mesure 45° ;

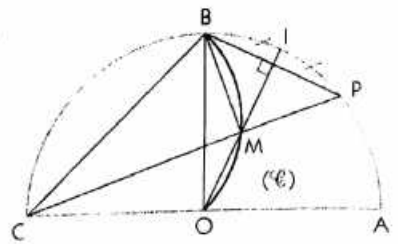
on en déduit que : $\widehat{BMC} = 90^\circ$.

2. OCBM est alors inscriptible dans le cercle ($\mathcal{C}$), de diamètre [BC].

3. Lorsque P parcourt l'arc AB, le lieu du point M est l'arc BO du cercle ($\mathcal{C}$), inclus dans le demi-cercle initial.

Commentaire

$\widehat{BMO} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$: le lieu du point M est aussi l'un des arcs capables d'extrémités O et B, d'angle 135° .



♦ Exercice n° 19 p. 24

$(AA') \parallel (II') \Rightarrow \widehat{AA'I} = \widehat{A'II'}$;

$(BB') \parallel (II') \Rightarrow \widehat{BB'I} = \widehat{I'IB}$.

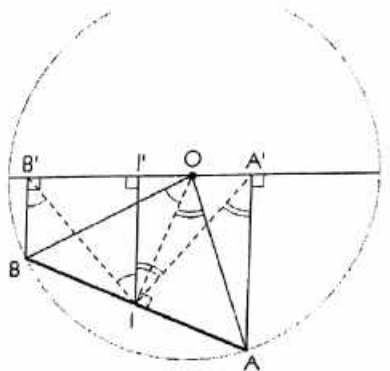
Dans le quadrilatère IAA'O, les angles en I et A' sont droits (en effet, I étant le milieu de la corde [AB], $(OI) \perp (AB)$) ;

donc : IAA'O est inscriptible et $\widehat{AOI} = \widehat{AA'I}$.

Dans le quadrilatère IBB'O, les angles en I et B' sont droits ;

donc : IBB'O est inscriptible et $\widehat{IOB} = \widehat{BB'I}$.

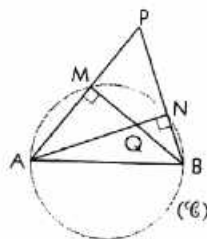
On obtient : $\widehat{AOB} = \widehat{AOI} + \widehat{IOB} = \widehat{AA'I} + \widehat{BB'I}$
 $= \widehat{A'II'} + \widehat{I'IB} = \widehat{A'IB}$.



♦ Exercice n° 20 p. 24

1^{er} cas : M et N sont dans le même demi-plan de frontière (AB).

• Supposons que [AB] soit un diamètre et démontrons que MNPQ est inscriptible.



$\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont droits. Le quadrilatère non croisé MPNQ, qui a deux angles opposés supplémentaires, est inscriptible.

• Supposons que MNPQ soit inscriptible et démontrons que [AB] est un diamètre.

On a : $\widehat{PMQ} = 180^\circ - \widehat{AMB}$;

$\widehat{PNQ} = 180^\circ - \widehat{ANB}$.

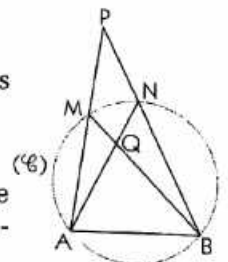
Or, $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ (angles inscrits interceptant le même arc) ;

donc : $\widehat{PMQ} = \widehat{PNQ}$.

Par ailleurs, MNPQ étant un quadrilatère convexe inscriptible, ces angles sont supplémentaires ;

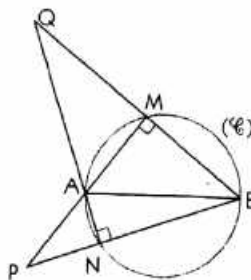
donc : $\widehat{PMQ} = \widehat{PNQ} = 90^\circ$.

Les triangles AMB et ANB sont rectangles en M et N ; [AB] est donc un diamètre.

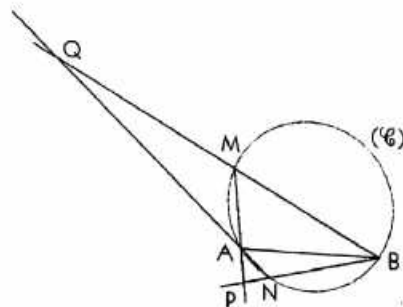


2^e cas : M et N ne sont pas dans le même demi-plan de frontière (AB).

• Supposons que [AB] soit un diamètre et démontrons que MNPQ est inscriptible.



• Supposons que MNPQ soit inscriptible et démontrons que [AB] est un diamètre.



Exercice n° 20 p. 24 (suite)

On démontre comme dans le cas précédent que $\widehat{PMQ}$ et $\widehat{QNP}$ sont droits. Le quadrilatère croisé $MPNQ$, qui a deux angles opposés égaux, est inscriptible.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \widehat{PMQ} &= 180^\circ - \widehat{AMB} ; \\ \widehat{PNQ} &= 180^\circ - \widehat{ANB} . \end{aligned}$$

Or, $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires ;
donc $\widehat{PMQ}$ et $\widehat{PNQ}$ sont aussi supplémentaires.

Par ailleurs, $MPNQ$ étant un quadrilatère croisé inscriptible, ces deux angles sont aussi égaux.

On en déduit, comme dans le cas précédent, que $[AB]$ est un diamètre.

♦ Exercice n° 21 p. 24

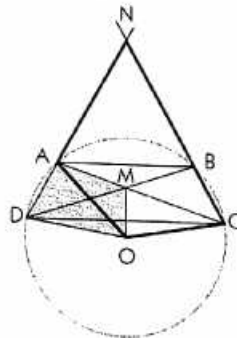
1. cf. exercice 3.b

2. • Pour démontrer que le quadrilatère $AMOD$ est inscriptible, deux cas de figures sont à envisager.

$$\begin{aligned} \widehat{DAM} &= \widehat{DAC} \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{DOC} \end{aligned}$$

(relation entre angle inscrit et angle au centre associé)

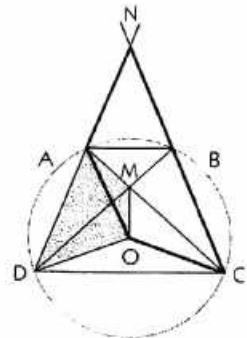
$= 180^\circ - \widehat{DOM}$;
donc, $\widehat{DAM}$ et $\widehat{DOM}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère convexe $AMOD$, qui est inscriptible.



$$\begin{aligned} \widehat{DAM} &= \widehat{DAC} \\ &= \frac{1}{2} \widehat{DOC} \end{aligned}$$

(relation entre angle inscrit et angle au centre associé)

$= 180^\circ - \widehat{DOM}$;
donc, $\widehat{DAM}$ et $\widehat{DOM}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère convexe $AMOD$, qui est inscriptible.



• $\widehat{ANC} = \widehat{DNC} = 180^\circ - 2\widehat{NDC}$ (dans le triangle NDC , isocèle en N) ;

or, $\widehat{NDC} = \widehat{ADC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC}$ (relation entre angle inscrit et angle au centre associé) ;

donc $\widehat{ANC}$ et $\widehat{AOC}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère convexe $AOCN$, qui est inscriptible.

RELATIONS MÉTRIQUES

♦ Exercice n° 22 p. 24

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 75^\circ} = 2R = 2 ;$$

$$\text{donc : } a = \sqrt{2} ,$$

$$b = \sqrt{3} ,$$

$$c = 2 \sin 75^\circ \approx 1,93 .$$

♦ Exercice n° 23 p. 24

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} \Leftrightarrow b^2 = \frac{4}{\sin 80^\circ} \Leftrightarrow b = \frac{2}{\sqrt{\sin 80^\circ}} \approx 2,015 .$$

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} \Leftrightarrow a = \frac{4}{b \sin 50^\circ} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{\sin 80^\circ}}{\sin 50^\circ} \approx 2,59 .$$

♦ Exercice n° 24 p. 24

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{a}{\sin 30^\circ} &= \frac{b}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 75^\circ} \\ &= 2R = 2 = \frac{ab^2}{2\mathcal{A}} . \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } a = 2 \sin 30^\circ = 1 ;$$

$$b = c = 2 \sin 75^\circ \approx 1,93 ;$$

$$\mathcal{A} = 2 \sin 30^\circ \sin^2 75^\circ \approx 0,93 .$$

♦ Exercice n° 25 p. 24

1. Si ABC est rectangle en A , on a : $\sin \widehat{A} = 1$ et $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires ou $\sin \widehat{B} = \cos \widehat{C}$.

$$\text{Donc, } \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} = \cos^2 \widehat{C} + \sin^2 \widehat{C} = 1 = \sin^2 \widehat{A} .$$

2. Si $\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}$, on a :

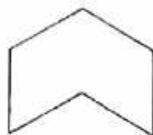
$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin \widehat{A}} &= \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \Rightarrow \frac{a^2}{\sin^2 \widehat{A}} = \frac{b^2}{\sin^2 \widehat{B}} = \frac{c^2}{\sin^2 \widehat{C}} \\ &\Rightarrow \frac{a^2}{\sin^2 \widehat{A}} = \frac{b^2 + c^2}{\sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}} ; \end{aligned}$$

donc $a^2 = b^2 + c^2$ et le triangle ABC est rectangle en A .

POLYGONES RÉGULIERS

♦ Exercice n° 26 p. 24

Non :

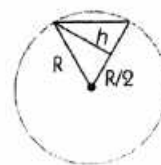


♦ Exercice n° 27 p. 24

$$S = 6S_{\text{tri}} = 3Rh = 1.$$

$$\text{De plus, } h = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Donc : } R = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}.$$



♦ Exercice n° 28 p. 24

Construction : cf. exercice 5.a p. 22.

Soit A, K et B les trois premiers sommets, H le projeté orthogonal de O sur [BK]. (OH) est la médiatrice de [BK].

$$\text{On a : } HK = 5 \sin 18^\circ; \text{ d'où : } BK = 10 \sin 18^\circ$$

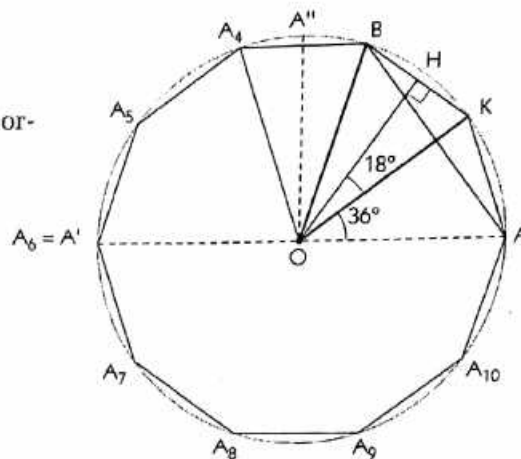
Le périmètre du décagone régulier est donc :

$$100 \sin 18^\circ = 30,90.$$

$$\text{L'aire du triangle OBK est : } \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \sin 36^\circ.$$

Donc l'aire du décagone régulier est :

$$125 \sin 36^\circ = 73,47.$$



♦ Exercice n° 29 p. 24

$$\bullet \text{ L'aire du triangle OBA est : } \frac{1}{2} R^2 \sin 72^\circ.$$

$$\text{L'aire du pentagone régulier est donc : } S = \frac{5}{2} R^2 \sin 72^\circ.$$

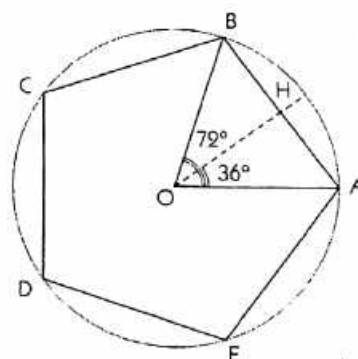
$$\text{On a : } \frac{5}{2} R^2 \sin 72^\circ = 10 \Leftrightarrow R^2 = \frac{4}{\sin 72^\circ}.$$

$$\text{Or } \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ (résultat donné p. 21); donc } \sin 72^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

$$\text{On obtient : } R^2 = \frac{4}{\frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}} \text{ et } R = \frac{4}{\sqrt{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}} = 2,05.$$

• Le rayon du cercle inscrit est l'apothème :

$$OH = R \cos 36^\circ = \frac{4 \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}}{\sqrt{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}} \approx 1,66.$$



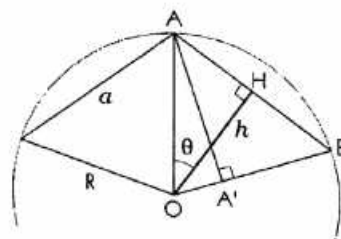
♦ Exercice n° 30 p. 24

$$1. a = 2R \sin \theta \text{ et } h = R \cos \theta;$$

$$2. S = \frac{1}{2} nah = nR^2 \sin \theta \cos \theta.$$

$$AA' = R \sin 2\theta; \text{ donc, } S = \frac{1}{2} nOB.AA' = \frac{1}{2} nR^2 \sin 2\theta.$$

En comparant les deux écritures de S, on obtient : $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$.



♦ Exercice n° 31 p. 24

En utilisant les notations et résultats de l'exercice précédent pour $n = 12$, on a : $\theta = \frac{180}{12} = 15$ ou $2\theta = 30$; donc, pour $R = 1$, on obtient : $S = \frac{1}{2} nR^2 \sin 2\theta = 3$.

Par ailleurs, l'aire de l'un des douze triangles isocèles, d'angle principal 30° , est $\frac{3}{12} = 0,25$. On a : $AA'.OB = 2 \times 0,25 = 0,5$; c'est-à-dire : $AA' = 0,5$.

La propriété de Pythagore permet d'obtenir : $OA' = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BA' = 1 - OA'$ et $AB = \sqrt{AA'^2 + A'B^2}$.

$$\text{Donc : } a = AB = \sqrt{2 - \sqrt{3}}; \sin \widehat{BAH} = \sin 15^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}; \cos \widehat{BAH} = \cos 15^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

$$\text{Enfin : } h = R \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

♦ Exercice n° 32 p. 24

1. La valeur de $\frac{4 + \sqrt{5}}{10}$ donnée par la calculatrice est 0,623 606 797 et celle de $\cos \frac{360^\circ}{7}$ est 0,623 489 801.
 $0,623\ 606\ 797 - 0,623\ 489\ 801 = 0,000\ 117\ 787$. Or : $0,000\ 117\ 787 < 1,2 \times 10^{-4}$.

$\frac{4 + \sqrt{5}}{10}$ est une valeur approchée par excès de $\cos \frac{360^\circ}{7}$ à $1,2 \times 10^{-4}$ près.

2. Les droites (A''M) et (ON) ont même coefficient directeur. I étant le milieu de [OA], le coefficient directeur de (A''M) est 2. Donc : $KN = 2OK$ et $HM = 2IH$.

3. Dans le triangle rectangle OKN, on a : $OK^2 + 4OK^2 = 1 \Leftrightarrow OK = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

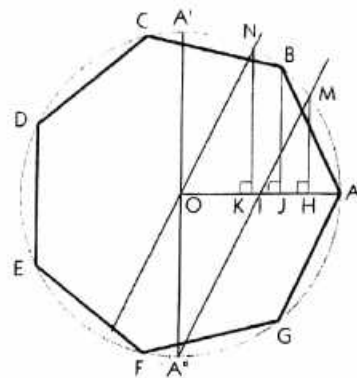
4. Dans le triangle rectangle OHM, on a :

$$\begin{aligned} \text{OH}^2 + \text{HM}^- &= 1 \Leftrightarrow \text{OH}^2 + 4\text{IH}^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \text{OH}^2 + 4(\text{OH} - \text{OI})^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \text{OH}^2 + 4\left(\text{OH} - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 5\text{OH}^2 - 4\text{OH} + 1 = 1. \end{aligned}$$

D'où : $\text{OH} = \frac{4}{5}$.

$$5. OI = \frac{OK + OH}{2} = \frac{4 + \sqrt{5}}{10} \text{ et } \cos \widehat{AOB} = OI \approx \cos \frac{360}{7}.$$

Donc, en reportant sept fois l'arc $\widehat{AB}$ (ou le segment $[AB]$), on obtient (presque) un heptagone régulier.



Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n° 33 p. 25

Si M appartient à un arc capable ($\mathcal{C}$) d'extrémités A et B, d'angle 60° et O est le centre du cercle inscrit dans le triangle AMB (O point d'intersection des bissectrices de MAB), on a :

$$\widehat{\text{mes OAB}} + \widehat{\text{mes OBA}} = \frac{1}{2}(\widehat{\text{mes MAB}} + \widehat{\text{mes MBA}}) = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ.$$

Donc mes $\widehat{AOB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ et O appartient à l'arc capable (C') d'angle 120° , d'extrémités A et B, situé dans le même demi-plan de frontière (AB) que (C).

Réciproquement, soit O un point de $(\mathcal{C})$, $[Ax]$ la demi-droite telle que $\text{mes } OAx = \text{mes } BAO$ et M le point d'intersection de $[Ax]$ avec $(\mathcal{C})$.

(AO) est bissectrice de $\widehat{\text{BAM}}$ par construction. Démontrons que (BO) est bissectrice de $\widehat{\text{ABM}}$.

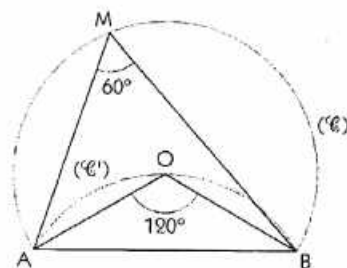
On a : $\widehat{\text{ABO}} = 180^\circ - 120^\circ - \widehat{\text{BAO}} = 60^\circ - \widehat{\text{BAO}}$:

$$\widehat{\text{mes ABM}} = 180^\circ - 60^\circ - 2 \widehat{\text{mes BAO}} = 120^\circ - 2 \widehat{\text{mes BAO}}.$$

Donc, mes $\widehat{ABM} = 2$ mes $\widehat{ABO}$ et (BO) est bien bissectrice de $\widehat{ABM}$.

O, qui appartient à deux bissectrices du triangle AMB, est bien le centre du cercle inscrit dans ABM.

Le lieu des points O est l'arc (C') .



♦ **Exercice n° 34 p. 25**

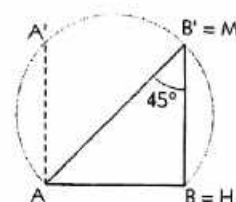
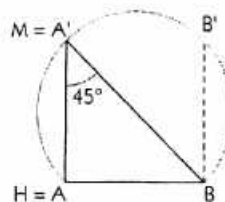
M appartient à un arc capable ($\mathcal{C}$) d'extrémités A et B, d'angle 45° .

Désignons par A' (resp. B') le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et de la droite perpendiculaire en A (resp. B) à (AB) .

- $1^{er} cas : M = A'$ ou $M = B'$

– Si $M = A'$, l'orthocentre H du triangle AMB n'est autre que A .

– Si $M = B'$, l'orthocentre H du triangle AMB n'est autre que B .



2^e cas : $M \in \widehat{A'B'}$, $M \neq A'$ et $M \neq B'$

– Si K et L sont les pieds des hauteurs de AMB, issues de A et B, le quadrilatère MKHL est convexe et inscriptible (deux angles opposés droits) ; donc $\widehat{LMK}$ et $\widehat{KHL}$ sont supplémentaires ;

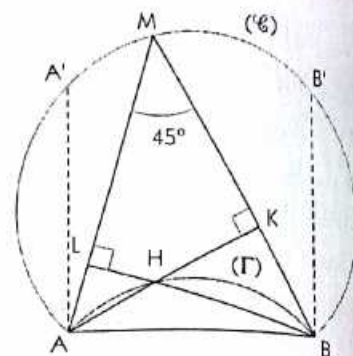
c'est-à-dire : $\text{mes } \widehat{KHL} = \text{mes } \widehat{AHB} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

H est donc sur l'arc capable (Γ) d'angle 135° , d'extrémités A et B, situé dans le même demi-plan de frontière (AB) que $(\mathcal{C})$.

– Réciproquement, soit H un point de (Γ) , M le point d'intersection de la perpendiculaire en A à (HB) et de $(\mathcal{C})$. Désignons par K le point d'intersection de (MB) et (AH), L celui de (MA) et (BH).

On a : $\text{mes } \widehat{MKH} = 360^\circ - 135^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Donc : $(AK) \perp (MB)$ et $(BL) \perp (MA)$. D'où, H est l'orthocentre du triangle AMB.



3^e cas : $M \in \widehat{AA'}$ ou $M \in \widehat{BB'}$

– Si K et L sont les pieds des hauteurs de AMB, issues de A et B, le quadrilatère MKHL est croisé et inscriptible (deux angles opposés droits) ; donc $\widehat{LMK}$ et $\widehat{KHL}$ ont même mesure ;

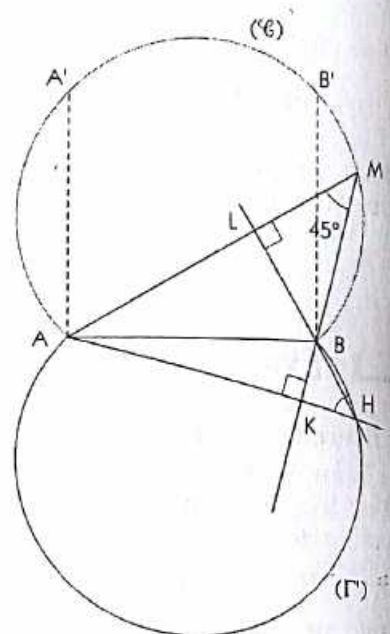
c'est-à-dire : $\text{mes } \widehat{KHL} = \text{mes } \widehat{AHB} = 45^\circ$.

H est donc sur l'arc capable (Γ') d'angle 45° , d'extrémités A et B, situé dans l'autre demi-plan de frontière (AB) que $(\mathcal{C})$.

– Réciproquement, soit H un point de (Γ') , M le point d'intersection de la perpendiculaire en A à (HB) et de $(\mathcal{C})$. Désignons par K le point d'intersection de (MB) et (AH), L celui de (MA) et (BH). MKHL, quadrilatère croisé tel que $\text{mes } \widehat{KHL} = \text{mes } \widehat{KML} = 45^\circ$, est inscriptible.

Les angles $\widehat{HLM}$ et $\widehat{HKM}$, opposés dans ce quadrilatère, sont eux-mêmes égaux ; le premier étant droit, l'autre l'est aussi.

(AK) et (BL) sont donc deux hauteurs de AMB. H est par conséquent l'orthocentre de AMB.



Commentaire

Le lieu géométrique de l'orthocentre H du triangle AMB est finalement un cercle passant par A et B.

♦ Exercice n° 35 p. 25

1. ABC étant isocèle de base [AB], $\text{mes } \widehat{ABC} = \text{mes } \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$.

• (AM) étant bissectrice de $\widehat{ABC}$, $\text{mes } \widehat{ABM} = 36^\circ = \text{mes } \widehat{BAM}$.
Donc AMB est isocèle, de base [AB].

• $\text{mes } \widehat{BMC} = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$. Donc BMC est isocèle, de base [MC].

2. $AB = 2AH = 2a \cos 36^\circ$; $MC = 2ML = 2a \cos 72^\circ$.

$AB = AC \Leftrightarrow 2a \cos 36^\circ = a + 2a \cos 72^\circ \Leftrightarrow \cos 36^\circ = \frac{1}{2} + \cos 72^\circ$.

3. $BK = a \cos 36^\circ$; $KC = MC \cos 72^\circ = 2a \cos^2 72^\circ$.

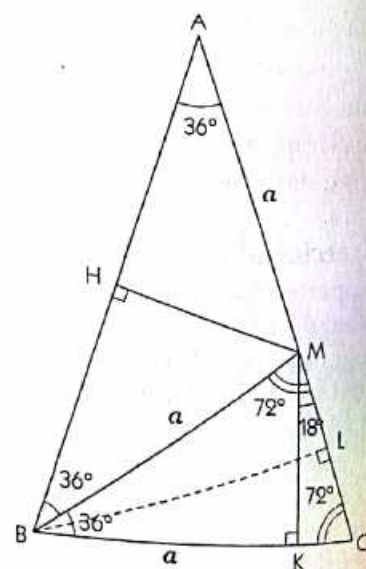
$BK + KC = BC \Leftrightarrow a \cos 36^\circ + 2a \cos^2 72^\circ = a \Leftrightarrow \cos 36^\circ = 1 - 2 \cos^2 72^\circ$.

4. D'après 2 et 3, on a : $\cos 36^\circ = \frac{1}{2} + \cos 72^\circ$ et $\cos 36^\circ = 1 - 2 \cos^2 72^\circ$.

$\frac{1}{2} + \cos 72^\circ = 1 - 2 \cos^2 72^\circ \Leftrightarrow 2 \cos^2 72^\circ + \cos 72^\circ - \frac{1}{2} = 0$.

Donc, $\cos 72^\circ$ est solution de l'équation : $2X^2 + X - \frac{1}{25} = 0$.

5. Comme $\cos 72^\circ > 0$, on obtient : $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.



♦ Exercice n° 36 p. 25

1. $\widehat{CBA} = \widehat{CAT}$ (comme angle inscrit et angle défini par une corde et une tangente). Donc leurs complémentaires respectifs, $\widehat{BAA'}$ et $\widehat{OAC}$, ont aussi même mesure.

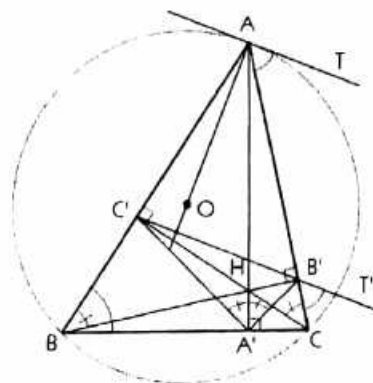
On en déduit que : $\widehat{BAO} = \widehat{A'AC}$;
donc les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{A'AO}$ ont même bissectrice.

2. a) $BCB'C'$ est inscriptible dans le cercle de diamètre $[BC]$.

b) Dans ce quadrilatère, qui est convexe, les angles $\widehat{CBC'}$ et $\widehat{C'B'C}$ sont supplémentaires.

On en déduit que : $\widehat{CB'T'} = \widehat{CBA} = \widehat{CAT}$;
c'est-à-dire : $(B'C') \parallel (AT)$.

c) Les droites (OA) et $(B'C')$ sont donc perpendiculaires.



3. a) $AA'B'B$ est un quadrilatère croisé, inscriptible dans le cercle de diamètre $[AB]$;

donc : $\widehat{ABB'} = \widehat{AA'B'}$.

b) $AA'C'C$ est un quadrilatère croisé, inscriptible dans le cercle de diamètre $[AC]$;

donc : $\widehat{AA'C'} = \widehat{ACC'}$.

On démontre de même que $(BO) \perp (A'C')$ et $(OC) \perp (A'B')$.

c) Or, $\widehat{ABB'} = \widehat{ACC'}$ (angles opposés dans le quadrilatère croisé inscriptible $BCC'B'$).

Donc, $\widehat{AA'B'} = \widehat{AA'C'}$ et $(A'A)$ est bissectrice de $\widehat{B'A'C'}$.

On démontre de même que $(B'B)$ et $(C'C)$ sont respectivement bissectrices de $\widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{A'C'B'}$.

L'orthocentre H du triangle ABC est donc le centre du cercle inscrit dans le triangle $A'B'C'$.

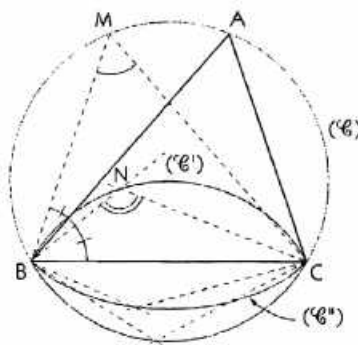
♦ Exercice n° 37 p. 25

On se réfère à l'exercice n° 33.

• Si M appartient au même arc du cercle $(\mathcal{C})$ que A, le centre N du cercle inscrit dans le triangle MBC est tel que :

$$\begin{aligned} \widehat{BNC} &= 180^\circ - \frac{1}{2} (\widehat{MBC} + \widehat{MCB}) = 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \widehat{BMC}) \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{BMC} = 90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{BAC}. \end{aligned}$$

En faisant une réciproque analogue à celle de l'exercice n° 33, on démontre que le lieu géométrique des points N est l'arc capable $(\mathcal{C}')$ d'angle $90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{BAC}$, d'extrémités B et C, situé dans le demi-plan de frontière (BC) contenant A.



• Si M n'appartient pas au même arc du cercle $(\mathcal{C})$ que A, le centre N du cercle inscrit dans le triangle MBC est tel que :

$$\widehat{BNC} = 180^\circ - \frac{1}{2} (\widehat{MBC} + \widehat{MCB}) = 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \widehat{BMC}) = 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{BAC},$$

puisque dans ce cas le quadrilatère ABMC est convexe et inscriptible dans $(\mathcal{C})$.

En faisant encore une réciproque analogue à celle de l'exercice n° 33, on démontre que le lieu géométrique des points N est l'arc capable $(\mathcal{C}'')$ d'angle $180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{BAC}$, d'extrémités B et C, situé dans le demi-plan de frontière (BC) ne contenant pas A.

Commentaire

On pourra faire remarquer que la réunion des arcs $(\mathcal{C}')$ et $(\mathcal{C}'')$ ne constituent pas les arcs capables d'un même angle, sauf si $90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{BAC} = 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{BAC}$, c'est-à-dire $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (ABC rectangle en A).

♦ Exercice n° 38 p. 25

1. $c_0 = \sqrt{2}$. 2. $c_1^2 = \left(\frac{c_0}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{c_0}{2}\right)^2$; donc, $c_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Cette valeur est égale à $\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{c_0^2}{4}}}$.

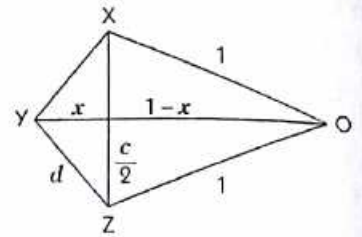
3. On est ramené (cf. figure ci-après) au calcul de d , connaissant c et les points X, Y, Z d'un cercle de centre O et de rayon 1.

La propriété de Pythagore permet d'établir successivement :

$$1 - x = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}; \text{ d'où } x = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}.$$

$$d = \sqrt{x^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}; \text{ d'où } d = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}}$$

Et le résultat demandé est obtenu en remplaçant c par c_1 et d par c_2 .



4. a) Le n -ième polygone a 2^{n+2} cotés. b) $c_n = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{c_{n-1}}{2}\right)^2}}$ et $p_n = \frac{1}{2} 2^{n+2} c_n = 2^{n+1} c_n$.
c) $p_0 = 4\sqrt{2}$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
c_n	0,7653669	0,3901806	0,1960343	0,0981353	0,0490825	0,0245431	0,0122718	0,0061359
p_n	3,0614675	3,1214452	3,1365485	3,1403312	3,1412773	3,1415138	3,1415729	3,1415877

Plus le nombre de côtés est grand, plus le périmètre du polygone s'approche du périmètre du cercle qui est égal à 2π (puisque son rayon est 1). Le demi-périmètre s'approche de π . Donc, p_n est une valeur approchée de π .

Cette méthode était déjà utilisée dans l'antiquité grecque pour trouver une valeur approchée de π .

◆ Exercice n° 39 p. 25

1. Si ABC est équilatéral, alors (AH) est médiane, médiatrice, hauteur et bissectrice.

On a : $r = OH = \frac{1}{3} AH$; $R = OA = \frac{2}{3} AH$.

D'où : $R = 2r$.

2. On suppose ABC isocèle en A.

a) $2\mathcal{A} = br + ar + br = r(a + 2b)$;

d'où : $r = \frac{2\mathcal{A}}{a + 2b}$.

b) D'après le théorème des sinus,

on a : $2R = \frac{abc}{2\mathcal{A}}$; donc : $R = \frac{ab^2}{4\mathcal{A}}$.

c) Dans le triangle AIB, rectangle en I, on a : $\cos \widehat{B} = \frac{BI}{BA} = \frac{a}{2b}$ et $\sin^2 \widehat{B} = 1 - \cos^2 \widehat{B} = \frac{4b^2 - a^2}{4b^2}$.

De plus : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{B}$; donc : $\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4} a^2 b^2 \frac{4b^2 - a^2}{4b^2} = \frac{a^2(4b^2 - a^2)}{16}$.

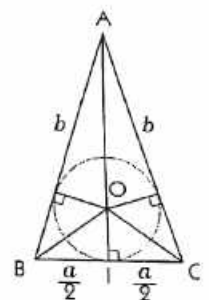
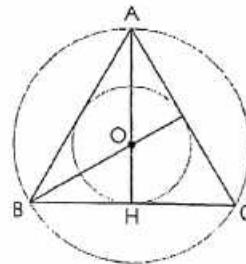
d) Supposons $R = 2r$. D'après a) et b) on a : $\frac{ab^2}{4\mathcal{A}} = 2 \frac{2\mathcal{A}}{a + 2b}$; c'est-à-dire : $16\mathcal{A}^2 = a^2 b^2 + 2ab^3$.

D'après d) on a : $16\mathcal{A}^2 = 16 \frac{a^2}{4} \left(\frac{4b^2 - a^2}{4} \right) = 4a^2 b^2 - a^4$.

On en déduit que : $4a^2 b^2 - a^4 = a^2 b^2 + 2ab^3$; c'est-à-dire : $a^4 + 2ab^3 - 3a^2 b^2 = 0$.

Or : $a^4 + 2ab^3 - 3a^2 b^2 = a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - b^4 + 2ab^3 - a^2 b^2 = (a^2 - b^2)^2 - b^2(a - b)^2 = (a - b)^2(a^2 + 2ab)$.

Donc : $a^4 + 2ab^3 - 3a^2 b^2 = 0$ n'est possible que si $a = b$, c'est-à-dire le triangle ABC est équilatéral.



◆ Exercice n° 40 p. 26

1. OA_0A_1 est un triangle isocèle de sommet O. Donc : $\widehat{A_0A_1O} = \widehat{A_1OA_0}$.

Si θ est la mesure en degré de $\widehat{A_0A_1}$, alors $\alpha = \widehat{PA_1M} = 180^\circ - 2\theta = \widehat{A_0OA_1}$.

2. a) Les triangles $A_0OA_1, A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_iOA_{i+1}$ sont isocèles en O; les angles à la base de chacun d'eux sont égaux à θ et les côtés $OA_0, OA_1, OA_2, \dots, OA_i, OA_{i+1}$ ont pour longueur le rayon du cercle. Donc les triangles $A_0OA_1, A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_iOA_{i+1}$ sont superposables et la ligne brisée $A_0A_1A_2A_3 \dots A_iA_{i+1}$ est constituée de segments de même longueur.

b) si $\theta = 54^\circ$, alors $\alpha = 72^\circ$, $5\alpha = 360^\circ$

et $\widehat{A_0OA_1} + \widehat{A_1OA_2} + \widehat{A_2OA_3} + \widehat{A_3OA_4} + \widehat{A_4OA_5} = 360^\circ$;
donc $A_5 = A_0$ et le rayon de lumière décrit un pentagone régulier.

c) si $\theta = 18^\circ$, alors $\alpha = 144^\circ$, $5\alpha = 720^\circ$ et $\widehat{A_0OA_1} = 144^\circ$;
 $\widehat{A_0OA_1} + \widehat{A_1OA_2} = 288^\circ$; $\widehat{A_0OA_1} + \widehat{A_1OA_2} + \widehat{A_2OA_3} = 432^\circ$;
 $\widehat{A_0OA_1} + \widehat{A_1OA_2} + \widehat{A_2OA_3} + \widehat{A_3OA_4} = 576^\circ$;
 $\widehat{A_0OA_1} + \widehat{A_1OA_2} + \widehat{A_2OA_3} + \widehat{A_3OA_4} + \widehat{A_4OA_5} = 720^\circ$;
donc $A_5 = A_0$ et le rayon de lumière fait deux tours du cercle en décrivant un pentagone régulier étoilé.

3. Le rayon fait une seule fois le tour du cercle en décrivant un polygone régulier à n côtés si et seulement si $n\alpha = 360^\circ$.

$$n\alpha = 360^\circ \Leftrightarrow n(180^\circ - 2\theta) = 360^\circ \Leftrightarrow \theta = \frac{n-2}{n} 90^\circ.$$

4. Le rayon fait deux fois le tour du cercle en décrivant un polygone régulier étoilé à n côtés si et seulement si $n\alpha = 720^\circ$ et 360° n'est pas un multiple de α .

360° n'est pas un multiple de α si et seulement si $\frac{360^\circ}{\alpha}$ n'est pas entier.

Or, $\alpha = \frac{720^\circ}{n}$. Donc $\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{n}{2}$ et 360° n'est pas un multiple de α si et seulement si n est impair.

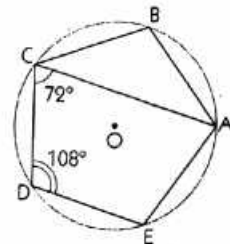
$$n\alpha = 720^\circ \Leftrightarrow n(180^\circ - 2\theta) = 720^\circ \Leftrightarrow \theta = \frac{n-4}{n} 90^\circ.$$

♦ Exercice n° 41 p. 26

1. a) La mesure de chacun des angles du pentagone est 108° .

b) Dans le triangle ABC isocèle en B, $\widehat{BCA} = \widehat{BAC} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$;
d'où $\widehat{ACD} = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ et $(AC) \parallel (ED)$.

c) Toute diagonale d'un pentagone régulier non étoilé est parallèle au côté qui ne rencontre pas cette diagonale.



2. a) $\widehat{A'CD} = \widehat{A'DC} = 72^\circ$; $\widehat{CA'D} = 36^\circ$.

Donc le triangle CA'D est isocèle en A'.

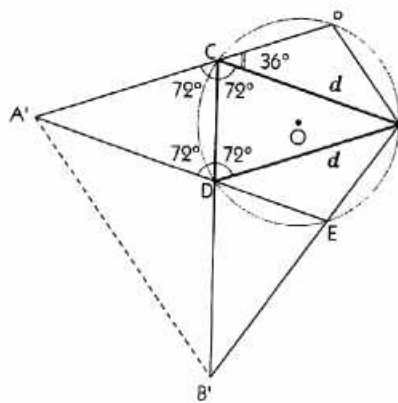
b) D'après 1. c), on a : $(AC) \parallel (DA')$ et $(AD) \parallel (CA')$; ACA'D est un parallélogramme, dont deux côtés consécutifs $([AC])$ et $([AD])$ ont même longueur d . C'est donc aussi un losange et $A'C = A'D = d$.

c) Le triangle A'DB' est isocèle en D et $\widehat{A'DB'} = 108^\circ$;
donc $\widehat{DA'B'} = \widehat{DB'A'} = 36^\circ$.

On en déduit que : $\widehat{B'A'C} = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$; le triangle A'CB' est isocèle en B'.

De plus : $A'B' = CB' = CD + DB' = CD + DA' = d + 1$.

d) En prolongeant tous les côtés du pentagone ABCDE, on obtient un nouveau pentagone régulier, dont la longueur des côtés est $d + 1$ et la longueur des diagonales est x tel que $\frac{x}{d+1} = \frac{d}{1}$, c'est-à-dire $x = d(d+1)$.



3. a) $(CE) \parallel (AB)$ (cf. 1. c)). $(AB) \parallel (A'B')$, puisque $\widehat{A'BA} = 108^\circ$ (cf. 1. a)) et $\widehat{BA'B'} = 72^\circ$ (cf. 2. c)).
Donc A'CEB' est un trapèze.

En appliquant la propriété de Thalès, on obtient : $\frac{A'C}{CB} = \frac{A'B'}{CE}$; c'est-à-dire : $\frac{d}{1} = \frac{d+1}{d}$ ou $d^2 = d + 1$.

b) On suppose que d est égal à la fraction irréductible $\frac{p}{q}$.

$$d^2 = d + 1 \Rightarrow d^2 - 1 = d \Rightarrow (d+1)(d-1) = d \Rightarrow \left(\frac{p}{q} + 1\right)\left(\frac{p}{q} - 1\right) = \frac{p}{q} \Rightarrow (p+q)(p-q) = pq.$$

c) p et q ne sont pas simultanément pair, puisque $\frac{p}{q}$ est irréductible.

• Si p et q sont impairs, alors pq l'est également ;

or $p+q$ et $p-q$, donc leur produit $(p+q)(p-q)$, sont pairs.

• Si p et q ont des parités différentes, alors $p+q$ et $p-q$, donc leur produit $(p+q)(p-q)$, sont impairs ;
or pq est pair.

Dans les deux cas, on arrive à la contradiction suivante : un nombre pair est égal à un nombre impair.

On conclut que d est un nombre irrationnel.

2. Vecteurs et points du plan

(pages 27 à 46 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- compléter la notion de vecteur abordée dans le premier cycle ;
- présenter l'outil vectoriel, aussi bien sous son aspect géométrique que sous son aspect analytique, pour résoudre des problèmes de géométrie.

COMMENTAIRES

Les élèves utilisent les vecteurs depuis la classe de quatrième. Le professeur fera le point sur leurs connaissances et renforcera les acquis, notamment avec la notion de combinaisons linéaires. Il introduira une nouvelle notation d'un vecteur, n'utilisant qu'une lettre minuscule : $\vec{u}$.

L'étude des structures étant hors programme, $\mathcal{V}$ est défini comme l'ensemble des vecteurs du plan et non pas comme un ensemble ayant une structure d'espace vectoriel de dimension 2. Le professeur ne devra donc pas abuser d'exercices de calcul vectoriel formel ; il s'efforcera plutôt d'exercer les élèves à utiliser l'outil vectoriel et l'outil analytique pour résoudre des problèmes de géométrie.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Vecteurs

- Norme d'un vecteur.
- Existence et unicité d'un vecteur de norme, de direction et de sens donnés.
- Inégalité triangulaire.
- Définition d'une combinaison linéaire.
- Condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs soient colinéaires.
- Vecteurs unitaires.
- Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle.

Mesure algébrique

- Définition.
- Propriétés.

Bases et repères

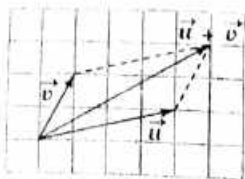
- Coordonnées d'un vecteur, de la somme de deux vecteurs, du produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Base orthonormée.
- Expression de la norme dans une base orthonormée.
- Déterminant de deux vecteurs.
- Calculs dans un repère.
- Caractérisations vectorielles d'un segment, d'une demi-droite.

savoir-faire

- Écrire une combinaison linéaire de vecteurs donnés.
- Justifier qu'un point est le centre de gravité d'un triangle.
- Calculer la mesure algébrique d'un couple de points.
- Décomposer un vecteur donné en la somme de deux vecteurs non colinéaires de directions données.
- Calculer la norme d'un vecteur.
- Calculer le déterminant de deux vecteurs.
- Justifier que deux vecteurs :
 - sont colinéaires ou non colinéaires,
 - sont de même sens ou de sens contraires.

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 35



$$\| \vec{u} \| = \sqrt{17}; \quad \| \vec{v} \| = \sqrt{5}; \\ \| \vec{u} + \vec{v} \| = \sqrt{34}.$$

♦ Exercice 1.b p. 35

Soit G le centre de gravité du triangle ABC ; on a : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \text{De plus : } \vec{GA}' + \vec{GB}' + \vec{GC}' &= (\vec{GB} + \vec{BA}') + (\vec{GC} + \vec{CB}') + (\vec{GA} + \vec{AC}') \\ &= (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) + \lambda(\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Donc, G est le centre de gravité du triangle A'B'C'.

♦ Exercice 1.c p. 35

$$1. A, B \text{ et } M \text{ alignés} \Leftrightarrow \vec{AB} \text{ et } \vec{BM} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{-2} = \frac{\mu}{3} \Leftrightarrow 3\lambda + 2\mu = 0.$$

$$\begin{aligned} 2. ABCM \text{ est un parallélogramme} &\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{MC} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{AC} - (\vec{AB} + \vec{BM}) \\ &\Leftrightarrow -2\vec{u} + 3\vec{v} = (5\vec{u} - 4\vec{v}) - ((\lambda - 2)\vec{u} + (\mu + 3)\vec{v}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - \lambda = -2 \\ -7 - \mu = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 9 \\ \mu = -10. \end{cases} \end{aligned}$$

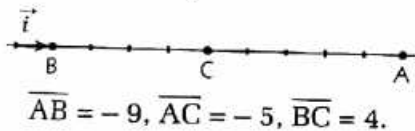
♦ Exercice 1.d p. 35

$$1. \vec{AM} + \vec{BM} = 2\vec{IM} \text{ et } \vec{AM} - \vec{BM} = \vec{AB}.$$

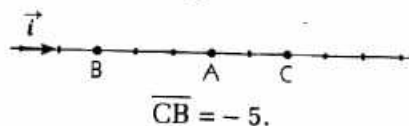
Donc, $\vec{AM} + \vec{BM}$ et $\vec{AM} - \vec{BM}$ sont colinéaires ssi $\vec{IM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $M \in (AB)$.

$$2. \|\vec{AM} + \vec{BM}\| = 1 \Leftrightarrow \|\vec{IM}\| = \frac{1}{2}. \text{ Donc, l'ensemble des points } M \text{ est le cercle de centre } I \text{ et de rayon } \frac{1}{2}.$$

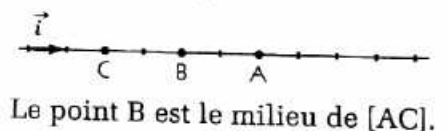
♦ Exercice 2.a p. 37



♦ Exercice 2.b p. 37



♦ Exercice 2.c p. 37



♦ Exercice 2.d p. 37

$$\text{Relativement à } \vec{i}, \quad \overline{AB} = -3, \overline{AC} = 5, \overline{AB} \times \overline{AC} = -15 \text{ et } \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = -\frac{3}{5}.$$

$$\text{Relativement à } -\vec{i}, \quad \overline{AB} = 3, \overline{AC} = -5, \overline{AB} \times \overline{AC} = -15 \text{ et } \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = -\frac{3}{5}.$$



♦ Exercice 3.a p. 42

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= -14; \det(\vec{u}, -\vec{v}) = 14; \det(\vec{v}, \vec{u}) = 14; \det(\vec{u}, \vec{w}) = -7; \\ \det(\vec{u}, \vec{v} - \vec{w}) &= -7; \det(\vec{u} + 3\vec{w}, 2\vec{v} - 4\vec{w}) = -84. \end{aligned}$$

♦ Exercice 3.b p. 42

$$1. \det(\vec{u}, \vec{v}) = 1; \text{ donc } (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est une base de } \mathcal{V}.$$

$$2. \begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = 2\vec{u} - \vec{v} \\ \vec{j} = -3\vec{u} + 2\vec{v} \end{cases}$$

$$\text{donc } \vec{i} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{j} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dans la base } (\vec{u}, \vec{v}).$$

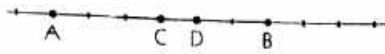
$$3. \begin{aligned} \vec{a} &= 2\vec{i} + 3\vec{j} = -5\vec{u} + 4\vec{v}; \\ \vec{b} &= -2\vec{i} + \vec{j} = -7\vec{u} + 4\vec{v}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \vec{a} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ dans la base } (\vec{u}, \vec{v}).$$

Exercices d'apprentissage

VECTEURS

◆ Exercice n° 1 p. 43

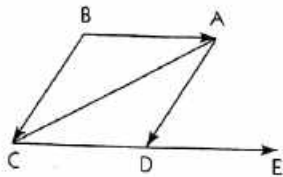


$$\vec{BD} = -\frac{2}{3}\vec{AC} ; \vec{AC} = \frac{3}{4}\vec{AD} ;$$

$$\vec{BD} = -\frac{1}{2}\vec{AD} ; \vec{CD} = -\frac{1}{3}\vec{BC} ;$$

$$\vec{BC} = -\frac{1}{2}\vec{AB} ; \vec{AC} = \frac{3}{2}\vec{DB}.$$

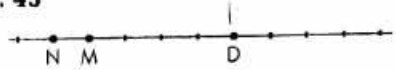
◆ Exercice n° 3 p. 43



On a : $\vec{AD} = \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{BA} = \vec{CD}$;
donc : $\vec{CE} = 2\vec{BA} \Leftrightarrow \vec{CE} = 2\vec{CD}$.

On en déduit que D est milieu de [BC].

◆ Exercice n° 2 p. 43

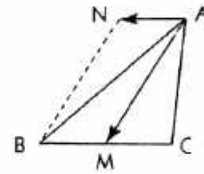


$$\vec{MP} = -4\vec{MN} \Rightarrow \vec{NM} = \frac{1}{5}\vec{NP} \text{ et } \vec{PN} = -\frac{5}{4}\vec{PM}.$$



$$\vec{SU} = \frac{6}{5}\vec{ST} \Rightarrow \vec{TU} = -\frac{1}{5}\vec{TS}, \vec{UT} = \frac{1}{6}\vec{US} \text{ et } \vec{ST} = 5\vec{TU}.$$

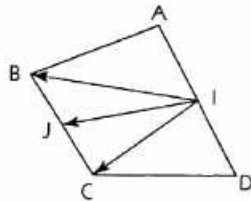
◆ Exercice n° 4 p. 43



$$\text{On a : } \begin{cases} \vec{AM} + \vec{AN} = \vec{AB} \\ \vec{AM} - \vec{AN} = \vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \\ \vec{AN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} - \vec{AC}) = \frac{1}{2}\vec{CB}. \end{cases}$$

Donc, M est le milieu de [BC] et N est le point tel que AMBN est un parallélogramme.

◆ Exercice n° 5 p. 43



$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{DC} &= (\vec{AI} + \vec{IB}) + (\vec{DI} + \vec{IC}) \\ &= (\vec{AI} + \vec{DI}) + (\vec{IB} + \vec{IC}) = 2\vec{IJ}. \end{aligned}$$

◆ Exercice n° 6 p. 43

$$\vec{a} = 10\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}.$$

$$\vec{b} = -\vec{u}.$$

$$\vec{c} = 5\vec{u} - 7\vec{v} + 4\vec{w}.$$

$$\vec{d} = -9\vec{u} - 9\vec{v} + 2\vec{w}.$$

◆ Exercice n° 7 p. 43

$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0} & (1) \\ \vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{w} = 2\vec{u} & (1) + (2) \\ \vec{w} = \frac{2}{3}\vec{v} & (1) - (2). \end{cases}$$

Donc, $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

◆ Exercice n° 8 p. 43

1. Posons $\vec{AI} = \lambda\vec{AB}$ et utilisons la propriété de Thalès.

On a : $\vec{AJ} = \lambda\vec{AC}$ et $\vec{CJ} = \vec{CA} + \vec{AJ} = (1 - \lambda)\vec{CA}$;

$\vec{CK} = (1 - \lambda)\vec{CB}$; $\vec{BK} = \lambda\vec{BC}$; $\vec{BL} = \lambda\vec{BA}$ et $\vec{AL} = (1 - \lambda)\vec{AB}$.

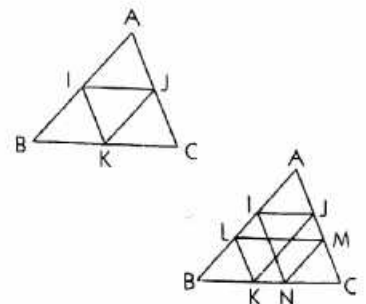
Donc : $I = L \Leftrightarrow \lambda = 1 - \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I$ milieu de [AB].

2. On suppose I différent du milieu de [AB].

De proche en proche, on obtient : $\vec{BN} = (1 - \lambda)\vec{BC}$ (1).

De plus, on a : $\vec{BI} = (1 - \lambda)\vec{BA}$ (2).

Donc : $\vec{IN} = (1 - \lambda)\vec{AC}$ et les droites (IN) et (AC) sont parallèles.

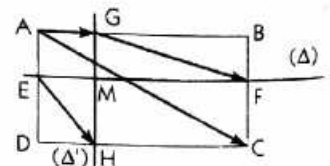


◆ Exercice n° 9 p. 43

$$\vec{EH} + \vec{GF} = (\vec{EM} + \vec{MH}) + \vec{GF} = (\vec{AG} + \vec{FC}) + \vec{GF} = \vec{AG} + \vec{GF} + \vec{FC} = \vec{AC}.$$

Donc, le représentant d'origine A du vecteur $\vec{EH} + \vec{GF}$ est le vecteur $\vec{AC}$.

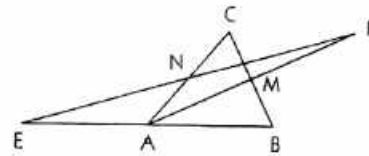
Le raisonnement et le résultat sont les mêmes avec un parallélogramme.



♦ Exercice n° 10 p. 43

$$\vec{AE} + \vec{AF} = -\vec{AB} + 2\vec{AM} = -\vec{AB} + (\vec{AB} + \vec{AC}) = \vec{AC} = 2\vec{AN}.$$

Donc N est milieu de [EF].



♦ Exercice n° 11 p. 43

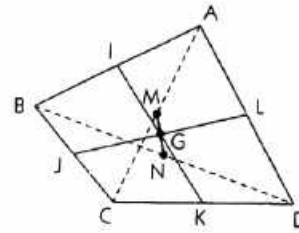
1. Soit G le milieu de [IK].

$$\begin{aligned} \vec{GI} + \vec{GK} = \vec{0} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\vec{GA} + \vec{GB}) + \frac{1}{2}(\vec{GC} + \vec{GD}) = \vec{0} \quad (1) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\vec{GC} + \vec{GB}) + \frac{1}{2}(\vec{GA} + \vec{GD}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{GJ} + \vec{GL} = \vec{0} \Leftrightarrow G \text{ milieu de } [JL]. \end{aligned}$$

De même : (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\vec{GC} + \vec{GA}) + \frac{1}{2}(\vec{GB} + \vec{GD}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GM} + \vec{GN} = \vec{0} \Leftrightarrow G \text{ milieu de } [MN].$

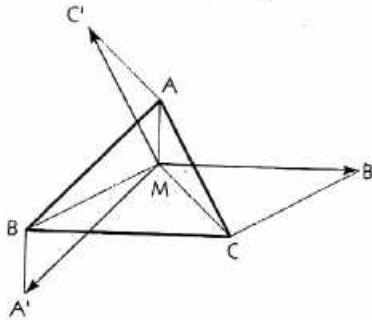
Donc [IK], [JL] et [MN] ont même milieu G.

$$2. \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = (\vec{GA} + \vec{GB}) + (\vec{GC} + \vec{GD}) = 2\vec{GI} + 2\vec{GK} = 2(\vec{GI} + \vec{GK}) = \vec{0}.$$



♦ Exercice n° 12 p. 43

$$\left. \begin{aligned} \vec{MA'} &= \vec{AB} \\ \vec{MB'} &= \vec{BC} \\ \vec{MC'} &= \vec{CA} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{MA'} + \vec{MB'} + \vec{MC'} = \vec{0}.$$

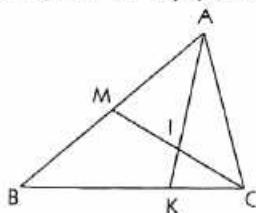


♦ Exercice n° 14 p. 43

$$\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AM} + \vec{AC}) = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC};$$

$$\vec{AK} = \vec{AC} + \vec{CK} = \frac{1}{3}(\vec{AB} - \vec{AC}) = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}.$$

Donc $4\vec{AI} = 3\vec{AK}$ et A, I, K sont alignés.



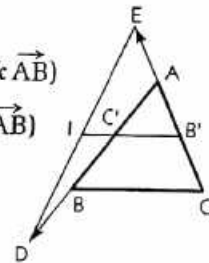
♦ Exercice n° 13 p. 43

$$\vec{AD} = k\vec{AB} \text{ et } \vec{CE} = k\vec{CA}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \vec{B'I} &= \frac{1}{2}(\vec{B'E} + \vec{B'D}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{B'C} + k\vec{CA}) + \frac{1}{2}(\vec{B'A} + k\vec{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{B'C} + \vec{B'A}) + \frac{1}{2}k(\vec{CA} + \vec{AB}) \\ &= \vec{0} + \frac{1}{2}k\vec{B'C'}. \end{aligned}$$

Donc B', C' et I sont alignés.

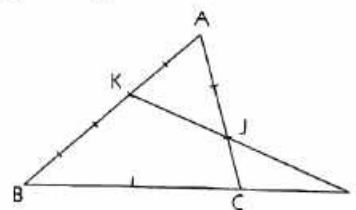


♦ Exercice n° 15 p. 43

$$\vec{JK} = \vec{AK} - \vec{AJ} = \frac{2}{5}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC};$$

$$\begin{aligned} \vec{IK} &= \vec{AK} - \vec{AI} = \frac{2}{5}\vec{AB} - (\vec{AB} + \vec{BI}) \\ &= \frac{2}{5}\vec{AB} - \vec{AB} - \frac{3}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{9}{10}\vec{AB} - \frac{3}{2}\vec{AC}. \end{aligned}$$

Donc $\frac{5}{2}\vec{JK} = \frac{10}{9}\vec{IK}$ et I, J, K sont alignés.



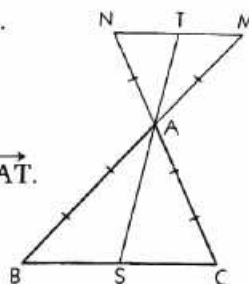
♦ Exercice n° 16 p. 43

$$\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = -\frac{2}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) = -\frac{2}{3}\vec{BC}.$$

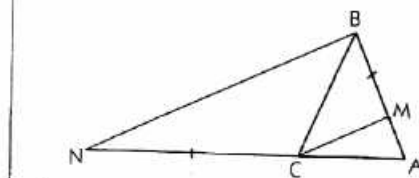
Donc : (MN) // (BC).

$$\vec{AS} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = -\frac{3}{4}(\vec{AM} + \vec{AN}) = -\frac{3}{2}\vec{AT}.$$

Donc : A, S et T sont alignés.



♦ Exercice n° 17 p. 43



$$\begin{aligned} \vec{BN} &= \vec{BA} + \vec{AN} \\ &= 3(\vec{MA} + \vec{AC}) = 3\vec{MC}. \end{aligned}$$

Donc : (BN) // (MC).

♦ Exercice n° 18 p. 43

1. $AMBC''$ parallélogramme $\Leftrightarrow \vec{AC''} = \vec{MB}$;

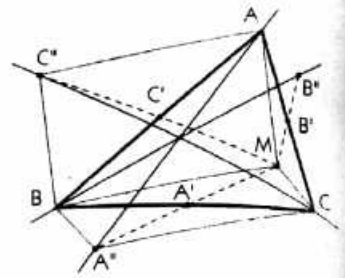
$MBA''C$ parallélogramme $\Leftrightarrow \vec{MB} = \vec{CA''}$.

Donc : $\vec{AC''} = \vec{CA''}$.

2. $AC''A''C$ est un parallélogramme, donc $[AA'']$ et $[CC'']$ ont même milieu.

De même $[AA'']$ et $[BB'']$ ont même milieu.

Donc les droites (AA'') , (BB'') et (CC'') sont concourantes.



♦ Exercice n° 19 p. 44

1. Les trois cercles ayant même rayon, (OD) est médiatrice de [BC], (OE) est médiatrice de [CA] et (OF) est médiatrice de [AB].

Donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

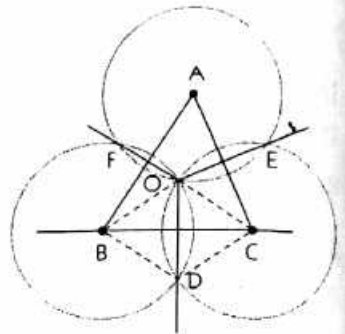
2. Les quadrilatères BOCD, COAE et AOBF ont leurs quatre côtés égaux au rayon commun des trois cercles ; ce sont des losanges.

3. $\vec{DE} = \vec{DC} + \vec{CE} = \vec{BO} + \vec{OA} = \vec{BA}$.

4. $(OF) \perp (AB)$ et $(DE) \parallel (AB)$; donc $(OF) \perp (DE)$ et (OF) est la hauteur issue de F du triangle DEF.

De même (OE) et (OD) sont les deux autres hauteurs de ce triangle.

Donc, O est l'orthocentre du triangle DEF.



♦ Exercice n° 20 p. 44

$$\|x\vec{u}\| = \|y\vec{v}\| \Leftrightarrow |x| \|\vec{u}\| = |y| \|\vec{v}\|$$

$$\Leftrightarrow 2|x| = |y|.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peuvent ne pas être colinéaires ; par exemple $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

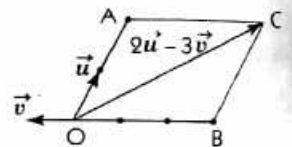
♦ Exercice n° 21 p. 44

$OC \leq OA + AC$; donc :

$$\|2\vec{u} - 3\vec{v}\| \leq \|2\vec{u}\| + 3\|\vec{v}\|.$$

Or : $\|\vec{u}\| \leq 3$ et $\|\vec{v}\| \leq 2$;

$$\text{donc : } \|2\vec{u} - 3\vec{v}\| \leq 12.$$



BASES ET REPERES

♦ Exercice n° 22 p. 44

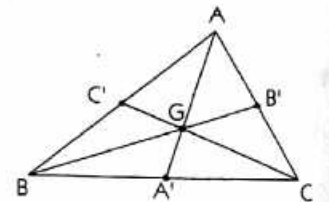
$$1. \vec{BC} = -\vec{AB} + \vec{AC}, \quad \vec{AA'} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}, \quad \vec{CA} = -\vec{AC},$$

$$\vec{GC'} = \vec{AC'} - \vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}.$$

Donc : $\vec{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AA'} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $\vec{CA} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{GC'} \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$.

$$2. \vec{BC} = -\vec{GB} + \vec{GC}, \quad \vec{AA'} = 3\vec{GA'} = \frac{3}{2}\vec{GB} + \frac{3}{2}\vec{GC}, \quad \vec{CA} = \vec{GA} - \vec{GC} = -(\vec{GB} + \vec{GC}) - \vec{GC} = -\vec{GB} - 2\vec{GC},$$

$$\vec{GC'} = -\frac{1}{2}\vec{GC}. \text{ Donc : } \vec{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AA'} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \quad \vec{CA} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{GC'} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \text{ dans la base } (\vec{GB}, \vec{GC}).$$

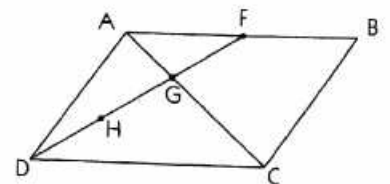


♦ Exercice n° 23 p. 44

1. On peut conjecturer que les points A, G et C sont alignés.

2. $\vec{DF} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{AG} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{AD}, \vec{AF})$.

3. On en déduit que $\vec{AC} = 3\vec{AG}$; donc A, G et C sont alignés.



♦ Exercice n° 24 p. 44

Dans chacun des cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.
Après calcul, on obtient les résultats suivants.

$$\vec{i} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -4\vec{i} + \vec{j} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 3\vec{i} + 2\vec{j} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dans la base $(\vec{j}, \vec{i})$.

$$\vec{i} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad -4\vec{i} + \vec{j} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad 3\vec{i} + 2\vec{j} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

dans la base $(-\vec{i}, -\vec{j})$.

$$\vec{i} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad -4\vec{i} + \vec{j} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad 3\vec{i} + 2\vec{j} \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

dans la base $(2\vec{i}, -\vec{j})$.

$$\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad -4\vec{i} + \vec{j} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad 3\vec{i} + 2\vec{j} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dans la base $(\vec{i}, \vec{i} + \vec{j})$.

♦ Exercice n° 25 p. 44

1. $\det(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j}) = 1 \Rightarrow (\vec{i} + \vec{j}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$; $\det(2\vec{i}, 2\vec{j}) = 4 \Rightarrow (2\vec{i}, 2\vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$.
 $\det(\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + \vec{j}) = 2 \Rightarrow (\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$; $\det(\vec{j} - \vec{i}, \vec{i}) = 1 \Rightarrow (\vec{j} - \vec{i}, \vec{i})$ est une base de $\mathcal{V}$.

2. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Dans la base $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j})$, $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b-a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b'-a' \end{pmatrix}$; donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) = ab' - ba'$.

Dans la base $(2\vec{i}, 2\vec{j})$, $\vec{u} \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a'/2 \\ b'/2 \end{pmatrix}$; donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{4}(ab' - ba')$.

Dans la base $(\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + \vec{j})$, $\vec{u} \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a'-b' \\ a'+b' \end{pmatrix}$; donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2}(ab' - ba')$.

Dans la base $(\vec{j} - \vec{i}, \vec{i})$, $\vec{u} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} b' \\ -a' \end{pmatrix}$; donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) = ab' - ba'$.

3. Dans chacune des bases, on a : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow ab' - ba' = 0$.

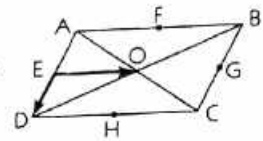
♦ Exercice n° 26 p. 44

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -7/6 \\ -4/3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{i} \begin{pmatrix} -4/3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} \begin{pmatrix} 7/6 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

♦ Exercice n° 27 p. 44

• Les vecteurs $\vec{ED}$ et $\vec{EO}$ ne sont pas colinéaires ; donc $(\vec{ED}, \vec{EO})$ est une base de $\mathcal{V}$.

• Dans cette base, $\vec{EH} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{EB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{EG} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{EA} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{FC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{GD} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.



♦ Exercice n° 28 p. 44

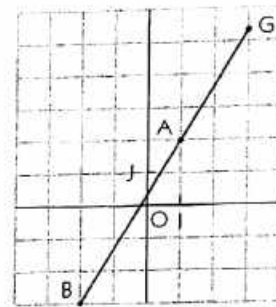
1. $5\vec{GA} - 2\vec{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AG} = -\frac{2}{3}\vec{AB}$.

Donc G, point d'abscisse $-\frac{2}{3}$ dans le repère (A, B), est unique.

2. $5(\vec{OA} - \vec{OG}) - 2(\vec{OB} - \vec{OG}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OG} = \frac{5}{3}\vec{OA} - \frac{2}{3}\vec{OB}$.

Donc $\vec{OG}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$.

Pour $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, on a : $G \begin{pmatrix} 3 \\ 16/3 \end{pmatrix}$.



♦ Exercice n° 29 p. 44

1. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ ne sont pas colinéaires ; donc $(\vec{AB}, \vec{AD})$ est une base de $\mathcal{V}$.

$\vec{u} = \vec{AC} + \vec{BD} + 3(\vec{CB} - \vec{BA}) + 2(\vec{AD} - \vec{DC}) - 2(\vec{ID} - \vec{IA})$
 $= (\vec{AB} + \vec{AD}) + (\vec{AD} - \vec{AB}) + 3(-\vec{AD} + \vec{AB}) + 2(\vec{AD} - \vec{AB}) - 2\vec{AD}$
 $= \vec{AB} - \vec{AD}$. Donc : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AD})$.

2. $\vec{AE} = \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$; donc le point E est tel que ADBE est un parallélogramme.

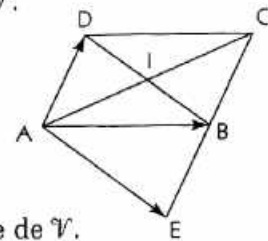
$\vec{CE} = 2\vec{CB}$; donc les vecteurs $\vec{CE}$ et $\vec{CB}$ sont colinéaires et ne forment pas une base de $\mathcal{V}$.

3. Dans (A, B, D), on a :

$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $I \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Dans $(B, \vec{AB}, \vec{AC})$, on a :

$B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $I \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.



♦ Exercice n° 30 p. 45

$A \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$.

1. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -2 \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.

2. $\vec{i} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

3. $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{AM} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$. On a : $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$;

$x'\vec{u} + y'\vec{v} = (x+2)\vec{i} + (y-3)\vec{j} = \frac{1}{2}(x+2)(\vec{u} + \vec{v}) + \frac{1}{2}(y-3)(\vec{u} - \vec{v})$.

Donc : $x' = \frac{1}{2}(x+y-1)$ et $y' = \frac{1}{2}(x-y+5)$.

♦ Exercice n° 31 p. 45

1. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -8 \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même direction.
2. $\vec{v} = 3\vec{u} \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction et sont de même sens.
3. $\vec{v} = -2\vec{u} \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction et sont de sens contraires.
4. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = a^2 - 4$. Donc :
 - si $a \neq 2$ et $a \neq -2$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même direction ;
 - si $a = 2$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction et sont de même sens ;
 - si $a = -2$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction et sont de sens contraires.

♦ Exercice n° 32 p. 45

Dans un triangle ABC, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont non colinéaires ; donc $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est une base du plan. Dans cette base, on a : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 4 - \sqrt{2}$; donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

♦ Exercice n° 33 p. 45

1. $\det(\vec{i}, \vec{j}) = 1$, $\det(-\vec{j}, 2\vec{j}) = 0$ et $\det(\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + \vec{j}) = 2$.
2. a) $\det(\vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{v})$.
b) $\det(k\vec{u}, \vec{v}) = k \det(\vec{u}, \vec{v})$.
c) $\det(\vec{w}, \vec{u} + \vec{v}) = (eb - fa) + (ed - fc)$
 $= \det(\vec{w}, \vec{u}) + \det(\vec{w}, \vec{v})$.

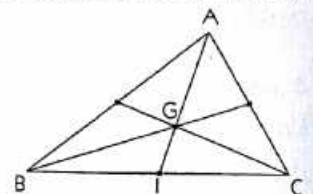
♦ Exercice n° 34 p. 45

1. $\vec{v} = -3\vec{u} \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et de sens contraires.
2. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -7 \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.
3. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;
de plus $\vec{v} = (1 + \sqrt{2})\vec{u} \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens.
4. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1 - a^2$; donc :
 - si $a \neq 1$ et $a \neq -1$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ;
 - si $a = 1$, alors $\vec{v} = \vec{u}$ (colinéaires et de même sens) ;
 - si $a = -1$, alors $\vec{v} = -\vec{u}$ (colinéaires et de sens contraires).

□ Exercices d'approfondissement

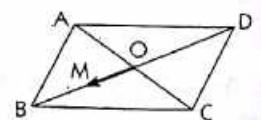
♦ Exercice n° 35 p. 45

1. • $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = (\vec{MG} + \vec{GA}) + (\vec{MG} + \vec{GB}) + (\vec{MG} + \vec{GC})$
 $= 3\vec{MG} + (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) = 3\vec{MG}$.
• $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = (\vec{MA} - \vec{MB}) + (\vec{MA} - \vec{MC}) = \vec{BA} + \vec{CA} = 2\vec{IA}$.
2. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ et $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{MG}$ et $\vec{IA}$ sont colinéaires
 $\Leftrightarrow M \in (IA)$.
3. $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| \Leftrightarrow MG = \frac{2}{3} IA = GA$
 $\Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre G, passant par A.



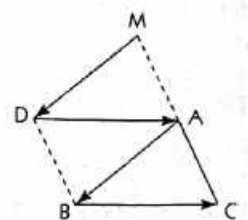
♦ Exercice n° 36 p. 45

1. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = (\vec{OA} + \vec{OC}) + (\vec{OB} + \vec{OD}) = \vec{0}$.
2. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = (\vec{MO} + \vec{OA}) + (\vec{MO} + \vec{OB}) + (\vec{MO} + \vec{OC}) + (\vec{MO} + \vec{OD})$
 $= 4\vec{MO} + (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) = 4\vec{MO}$.
3. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MO} = \vec{0}$; donc O est le seul point répondant à la question.
4. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{BD} \Leftrightarrow 4\vec{MO} = \vec{BD} \Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{1}{4}\vec{DB} = \frac{1}{2}\vec{OB}$;
donc seul le milieu de [OB] répond à la question.



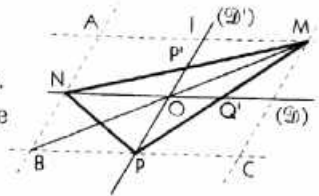
♦ Exercice n° 37 p. 45

1. $\vec{DA} + \vec{DB} - \vec{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{DA} = \vec{BC}$;
donc D est tel que ADBC est un parallélogramme.
2. $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = (\vec{MD} + \vec{DA}) + (\vec{MD} + \vec{DB}) - (\vec{MD} + \vec{DC})$
 $= \vec{MD} + (\vec{DA} + \vec{DB} - \vec{DC}) = \vec{MD}$.
3. $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{MD} = \vec{CB} \Leftrightarrow M = A$.
4. $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{MD} = \vec{AB}$;
donc M est le point tel que MDBA est un parallélogramme.



♦ Exercice n° 38 p. 45

$\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP} = \vec{0}$ ssi O est le centre de gravité du triangle MNP ;
donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont les médianes de ce triangle, issues respectivement de N et P.
Pour construire les points N et P, il suffit de construire le parallélogramme MABC de centre O, dont les côtés sont deux à deux parallèles à $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.
En effet, dans le triangle MAN, on a I milieu de [MA] et $(IP') \parallel (AN)$;
donc P' est milieu de [MN]. On justifie de même que Q' est milieu de [MP].



♦ Exercice n° 39 p. 45

1. $\|\vec{AM}\| = 3 \Leftrightarrow M$ appartient au cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre A et de rayon 3.
Soit B' le symétrique de B par rapport à A ;

$$\|\vec{AB} + \vec{AM}\| = 2 \Leftrightarrow \|\vec{AM} - \vec{AB'}\| = 2$$

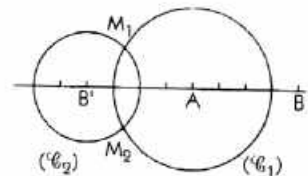
$$\Leftrightarrow \|\vec{B'M}\| = 2$$

$\Leftrightarrow M$ appartient au cercle $(\mathcal{C}_2)$ de centre B' et de rayon 2.

2. $3 - 2 < AB' < 3 + 2$; donc $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sont sécants et il y a deux points répondant à la question.

3. Si $\|\vec{AB} + \vec{AM}\| = 8$, alors $(\mathcal{C}_2)$ est un cercle de rayon 8.

$AB' < 8 - 3$; donc $(\mathcal{C}_1)$ est intérieur à $(\mathcal{C}_2)$ et il n'y a pas de point répondant à la question.

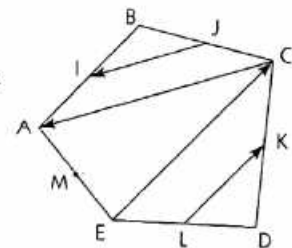


♦ Exercice n° 40 p. 45

$$1. \vec{JI} = \frac{1}{2}\vec{CA} \text{ et } \vec{LK} = \frac{1}{2}\vec{EC} \Rightarrow \vec{JI} + \vec{LK} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{EC}) = \frac{1}{2}\vec{EA} = \vec{MA}.$$

2. Connaissant les points I, J, K, L et M, l'égalité $\vec{JI} + \vec{LK} = \vec{MA}$ permet la construction du point A. Puis, on construit successivement :

- le point B, symétrique de A par rapport à I ;
- le point C, symétrique de B par rapport à J ;
- le point D, symétrique de C par rapport à K ;
- le point E, symétrique de D par rapport à L.



♦ Exercice n° 41 p. 45

$$1. \vec{ID} = \vec{IA} + \vec{AD} = \vec{CJ} + \vec{BC} = \vec{BJ} \Rightarrow (ID) \parallel (BJ).$$

2. Soit M et N les points d'intersection respectifs de (ID) et (BJ) avec (AC).

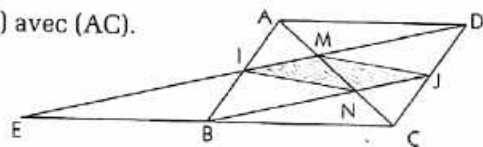
$$\left. \begin{array}{l} IA = IB \Rightarrow AM = MN \\ JC = JD \Rightarrow NC = MN \end{array} \right\} \Rightarrow AM = MN = NC.$$

Donc M et N sont tels que : $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AC}$ et $\vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AC}$.

$$3. (AI) \parallel (DC) \text{ et } \vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AC} \Rightarrow \vec{IM} = \frac{1}{3}\vec{ID}. \text{ On démontre de même que : } \vec{NJ} = \frac{1}{3}\vec{BJ}.$$

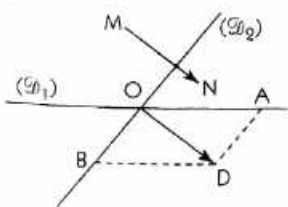
Or : $\vec{BJ} = \vec{ID}$; on en déduit que : $\vec{IM} = \vec{NJ}$, c'est-à-dire que IMJN est un parallélogramme.

4. Dans le triangle CEM, on a $(EM) \parallel (BN)$ et N milieu de [CM] ; donc B est milieu de [CE].



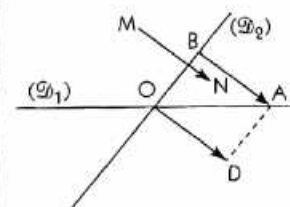
♦ Exercice n° 42 p. 45

$$1. \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{MN}$$



Soit D tel que $\vec{OD} = \vec{MN}$.
A et B sont tels que
OADB soit un parallélogramme.

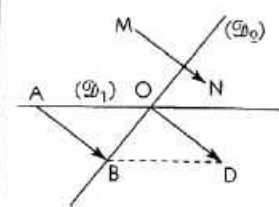
$$2. \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{MN} \quad (2)$$



$$(2) \Leftrightarrow \vec{BA} = \vec{MN}.$$

Soit D tel que $\vec{OD} = \vec{MN}$.
A et B sont tels que
ODAB soit un parallélogramme.

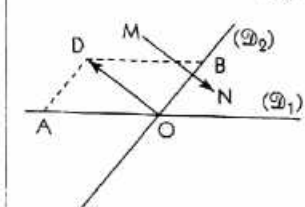
$$3. \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{MN} \quad (3)$$



$$(3) \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{MN}.$$

Soit D tel que $\vec{OD} = \vec{MN}$.
A et B sont tels que
ODBA soit un parallélogramme.

$$4. \vec{AO} + \vec{BO} = \vec{MN} \quad (4)$$



$$(4) \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} = -\vec{MN}.$$

Soit D tel que $\vec{OD} = -\vec{MN}$.
A et B sont tels que
OADB soit un parallélogramme.

♦ Exercice n° 43 p. 46

1. Analyse : $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OM} \Rightarrow OAMB$ est un parallélogramme ;

$A \in (\mathcal{D}) \Rightarrow (MB)$ et $(\mathcal{D})$ sont parallèles.

Synthèse : • Construire la droite (Δ) parallèle à $(\mathcal{D})$ passant par M.

• Si (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en B, construire A tel que OAMB soit un parallélogramme.

Discussion : il y a deux points B, donc deux solutions au problème.

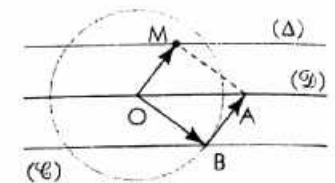
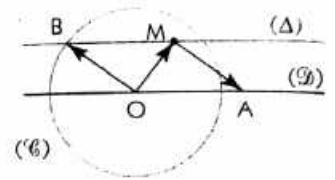
2. Analyse : $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{OM} \Rightarrow OBAM$ est un parallélogramme.

Synthèse : la construction est analogue à la précédente.

• On trace (Δ) , puis la droite (Δ') symétrique de (Δ) par rapport à $(\mathcal{D})$.

• Si (Δ') coupe $(\mathcal{C})$ en B, construire A tel que OBAM soit un parallélogramme.

Discussion : il y a deux points B, donc deux solutions au problème.



♦ Exercice n° 44 p. 46

$$1. \vec{KM} + \vec{KM}' = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (x' - a) + (x - a) = 0 \\ (y' - b) + (y - b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x' = -x + c \\ y' = -y + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x' + x}{2} = \frac{c}{2} \\ \frac{y' + y}{2} = \frac{d}{2} \end{cases} \Leftrightarrow I\left(\frac{c}{2}, \frac{d}{2}\right) \text{ est milieu de } [MM']$$

Donc f est la symétrie de centre $I\left(\frac{c}{2}, \frac{d}{2}\right)$.

♦ Exercice n° 45 p. 46

1. a)



b) $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -2$ et $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = 2$; donc : $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ (1).

c) $IA^2 = \frac{AB^2}{4}$ et $\overline{IC} \times \overline{ID} = \frac{1}{6} \overline{AB} \times \frac{3}{2} \overline{AB} = \frac{AB^2}{4}$; donc : $IA^2 = \overline{IC} \times \overline{ID}$ (2).

d) $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{3}{2}$ et $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$; donc : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = 2$;

c'est-à-dire : $\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{2}{\overline{AB}}$ (3).

2. a) (1) $\Leftrightarrow \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = -\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$ (par inversion des rapports) $\Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = -\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$ (par permutation des extrêmes).

b) (1) $\Leftrightarrow \frac{\overline{IA} - \overline{IC}}{\overline{IB} - \overline{IC}} = -\frac{\overline{IA} - \overline{ID}}{\overline{IB} - \overline{ID}} \Leftrightarrow 2 \overline{IC} \times \overline{ID} + 2 \overline{IA} \times \overline{IB} = (\overline{IC} + \overline{ID}) \times (\overline{IA} + \overline{IB}) \Leftrightarrow 2 \overline{IC} \times \overline{ID} - 2 \overline{IA}^2 = 0$;
c'est-à-dire : (1) $\Leftrightarrow$ (2).

c) (1) $\Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AC} - \overline{AB}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{AD} - \overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} \times \overline{AD} + \overline{AC} \times \overline{AD} = 2 \overline{AC} \times \overline{AD}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{2}{\overline{AB}}$ (en divisant par $\overline{AB} \times \overline{AC} \times \overline{AD}$) ;

c'est-à-dire : (1) $\Leftrightarrow$ (3).

♦ Exercice n° 46 p. 46

1. $\vec{AI}$ et $\vec{BI}$ ne peuvent être colinéaires, sinon $I \in [AB]$.
Il en est de même pour $\vec{AI}$ et $\vec{CI}$, puis $\vec{BI}$ et $\vec{CI}$.

2. $\vec{AB'} = b\vec{AB}$ et $\vec{AC'} = c\vec{AC} \Rightarrow \|\vec{AB'}\| = \|\vec{AC'}\| = bc$.
Donc $AB'DC'$ est un losange.

On en déduit que (AD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ et les points A, I, D sont alignés.

$$\begin{aligned} 3. a) (\alpha - b - c)\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} &= \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\vec{IA} + b(\vec{IB} - \vec{IA}) + c(\vec{IC} - \vec{IA}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \alpha\vec{IA} + b\vec{AB} + c\vec{AC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \alpha\vec{IA} + \vec{AD} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Les points I, A et D étant alignés, le réel α existe et est unique.

b) De même, il existe un réel unique β tel que : $a\vec{IA} + (\beta - a - c)\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$.

c) Les vecteurs $\vec{IA}, \vec{IB}$ et $\vec{IC}$ ne sont pas colinéaires deux à deux.

On déduit des résultats établis en 3. a) et 3. b) que :

$$\begin{cases} \alpha - b - c = a \\ b = \beta - a - c \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = a + b + c = p.$$

d) En remplaçant α par sa valeur, on obtient : $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$.

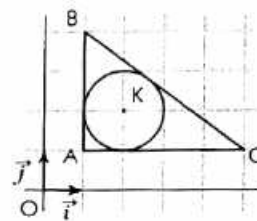
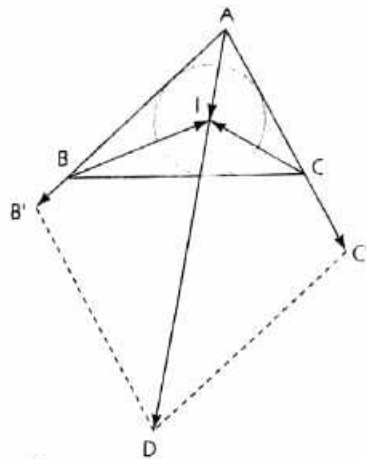
4. a) K est tel que : $a\vec{KA} + b\vec{KB} + c\vec{KC} = \vec{0}$ (1).

Or, ABC étant un triangle rectangle en A où $b = 4$ et $c = 5$, on a : $a = 5$.

Si x et y sont les coordonnées de K , on obtient :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 5(1-x) + 4(1-x) + 3(5-x) = 0 \\ 5(1-y) + 4(4-y) + 3(1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

b) Le rayon du cercle $(\mathcal{C})$ est égal à 1.



3. Angles orientés – Trigonométrie

(pages 47 à 60 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- élargir la notion d'angle avec les vecteurs et l'orientation du plan,
- établir les relations liant les lignes trigonométriques d'angles associés.

COMMENTAIRES

Pour un angle θ donné, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ sont appelés les lignes trigonométriques de l'angle θ .

On s'assurera que les mesures d'angles proposées aux élèves soient compatibles avec la définition, c'est à dire qu'elles ne « sortent » pas de l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

L'orientation du plan est une convention qui permet aux élèves de décider si la mesure géométrique de l'angle formé par les supports de deux vecteurs doit être précédée du signe + ou du signe - pour exprimer la mesure d'un angle orienté de ces vecteurs.

On n'hésitera pas à multiplier les schémas et les exemples pour bien asseoir la notion d'angle orienté de vecteurs et la spécificité de la mesure d'un tel angle.

Compléments sur les angles

- Radian, mesure en radian ; $\ell = R\alpha$.
- Angle orienté de deux vecteurs.
- Orientation du plan : sens direct, sens indirect.
- Repère orthonormé direct.
- Mesure principale d'un angle orienté ; égalité d'angles orientés.
- Angle orienté et applications du plan (translation, symétrie orthogonale et symétrie centrale).

Trigonométrie

- Cercle trigonométrique.
- Bijection de ce cercle avec $]-\pi ; \pi]$.
- Sinus, cosinus d'un angle ; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
- Signe du sinus et du cosinus ; sinus et cosinus d'angles remarquables.
- Lignes trigonométriques d'angles associés.
- Tangente d'un angle orienté.

- Exprimer la mesure d'un angle orienté.
- Convertir des radians en degrés et réciproquement.
- Calculer la longueur d'un arc, intercepté par un angle au centre de mesure en radian donnée.

- Placer sur le cercle trigonométrique l'image d'un nombre réel de $]-\pi ; \pi]$.
- Déterminer les mesures principales d'angles dont on connaît le sinus, le cosinus ou la tangente.
- Déterminer, en utilisant les tables, une formule ou les lignes trigonométriques des angles remarquables :
 - les sinus, cosinus ou tangente (valeurs exactes ou approchées) d'un angle de mesure principale donnée ;
 - les valeurs possibles des sinus, cosinus ou tangente d'un angle, connaissant l'un de ces nombres.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p.52

La mesure, en degré, d'un angle de 1 radian est : $\frac{180}{\pi} = 57,295\dots$

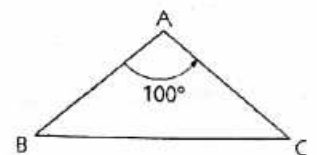
♦ Exercice 1.b p.52

degrés	60	75	36	$\frac{180}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = 45$	$\frac{270}{\pi} = 85,9\dots$	$\frac{360}{\pi} = 114,59\dots$	$\frac{180}{7} = 25,71\dots$
radians	$\frac{\pi \times 60}{180} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi \times 75}{180} = \frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi \times 36}{180} = \frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	1,5	2	$\frac{\pi}{7}$

♦ Exercice 1.c p.52

Si $\text{Mes}^\circ(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 100$, alors $\text{mes}^\circ \widehat{ABC} = \text{mes}^\circ \widehat{ACB} = 40$.

- $\text{Mes}^\circ(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \text{Mes}^\circ(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + \text{Mes}^\circ(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 100 - 40 - 40 = 20$.
- $\text{Mes}^\circ(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \text{Mes}^\circ(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + \text{Mes}^\circ(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 100 + 40 + 40 = 180$.

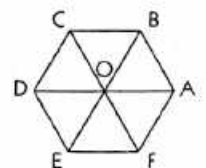


♦ Exercice 1.d p.52

La somme des mesures, en radian, des angles d'un polygone de n côtés est $(n-2)\pi$;

donc la somme des mesures, en radian, des angles d'un hexagone est 4π .

Dans l'hexagone régulier tous les angles aux sommets ont même mesure : $\frac{2\pi}{3}$.



$\bullet \text{mes } \widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}, \text{mes } \widehat{AEC} = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, \text{mes } \widehat{DBA} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{mes } \widehat{BDF} = \frac{\pi}{3}.$
 $\bullet \text{Mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{2\pi}{3}; \text{Mes}(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EA}) = -\frac{\pi}{3}; \text{Mes}(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}; \text{Mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3};$
 $\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = \text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}; \text{Mes}(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{ED}) = \text{Mes}(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FC}) = \frac{\pi}{3}; \text{Mes}(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{BA}) = \text{Mes}(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3};$
 $\text{Mes}(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE}) = \frac{2\pi}{3}; \text{Mes}(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OA}) = \text{Mes}(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) = -\frac{2\pi}{3}; \text{Mes}(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{OF}) = \text{Mes}(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) = -\frac{2\pi}{3}.$

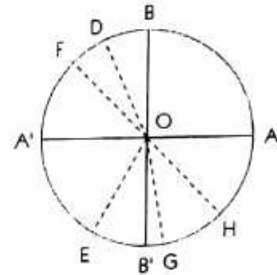
♦ Exercice 2.a p.57

La mesure, en degré, d'un angle de 2 radians est : $2 \times \frac{180}{\pi} = 114,59\dots$;

La mesure, en degré, d'un angle de -1,4 radian est : $-1,4 \times \frac{180}{\pi} = -80,21\dots$;

La mesure, en degré, d'un angle de -0,8 radian est : $-0,8 \times \frac{180}{\pi} = -45,83\dots$

Les points associés sur le cercle trigonométrique aux angles orientés de mesures principales en radians 2, $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, -1,4 et -0,8 sont respectivement D, E, F, G et H.



♦ Exercice 2.b p.57

α	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π		
signe de $\sin \alpha$	0	-	-	0	+	+	0
signe de $\cos \alpha$		-	0	+	+	0	-
signe de $\tan \alpha$		+	-	+	-		

♦ Exercice 2.c p.57

α	-120°	75°	0°	25°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,96...	0	0,42...
$\cos \alpha$	$-\frac{1}{2}$	0,25...	1	0,90...
$\tan \alpha$	$-\sqrt{3}$	3,73...	0	0,46...

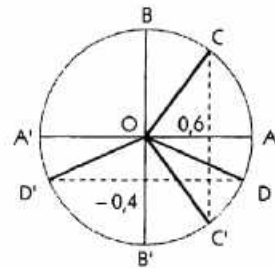
♦ Exercice 2.d p.57

• Il y a deux points C et C' du cercle trigonométrique d'abscisse 0,6 ; il y a donc deux angles dont le cosinus est 0,6. On lit sur le cercle (avec le rapporteur) que leurs mesures en degré sont de l'ordre de 50 et -50.

La calculatrice donne : 53,130 10...

• Il y a deux points D et D' du cercle trigonométrique d'ordonnée -0,4 ; il y a donc deux angles dont le sinus est -0,4. On lit sur le cercle (avec le rapporteur) que leurs mesures, en degré, sont de l'ordre -20 et -160.

La calculatrice donne : -23,578 17...



Exercices d'apprentissage

ANGLES

♦ Exercice n° 1 p. 58

Le périmètre d'un cercle de rayon 3 cm est : 6π cm.

Donc si un arc $\widehat{AB}$ de ce cercle a pour longueur π cm, la mesure en radian de $\widehat{AOB}$ est :

$$2\pi \times \frac{\pi}{6\pi} = \frac{\pi}{3}.$$

♦ Exercice n° 2 p. 58

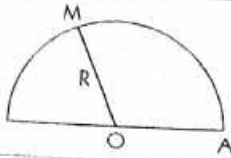
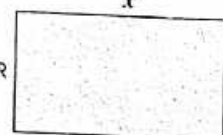
Le périmètre d'un cercle de rayon π cm est :

$$2\pi \times \pi = 2\pi^2 \text{ cm.}$$

Donc si un arc $\widehat{AB}$ de ce cercle a pour longueur 2π cm, la mesure en degré de $\widehat{AOB}$ est :

$$360 \times \frac{2\pi}{2\pi^2} = \frac{360}{\pi} = 114,59\dots$$

♦ Exercice n° 3 p. 58

	long. $\widehat{AM} : R$	long. $\widehat{AM} : 2R$	long. $\widehat{AM} : 3R$
1. mes $\widehat{AOM}$ (en radian)	1	2	3
périmètre du domaine grisé	$3R$	$4R$	$5R$
aire du domaine grisé	$\frac{R^2}{2}$	R^2	$\frac{3R^2}{2}$
2. 	$\begin{cases} 2(R+x) = 3R \\ Rx = \frac{R^2}{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = \frac{R}{2}$	$\begin{cases} 2(R+x) = 4R \\ Rx = R^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = R$	$\begin{cases} 2(R+x) = 5R \\ Rx = \frac{3R^2}{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = \frac{3R}{2}$

♦ Exercice n° 4 p. 58

$$\text{aire}(\text{AOB}) = \text{aire}(\text{COD}) \Leftrightarrow \pi R^2 \times \frac{\alpha}{2\pi} = \pi (2R)^2 \times \frac{\beta}{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 4\beta.$$

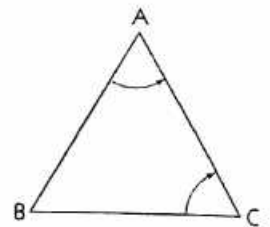
Les domaines ont des aires égales à $\frac{\pi R^2}{2}$ lorsque (AOB) est un demi-cercle et (COD) est un huitième de cercle.

♦ Exercice n° 5 p. 58

Si ABC est un triangle équilatéral direct, alors :

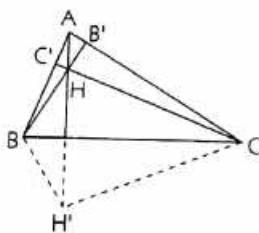
$$\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3}$$



♦ Exercice n° 6 p. 58

Soit B' et C' les pieds des hauteurs issues de B et C.

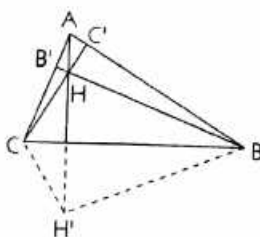


1. $\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha$, tel que : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; donc $\text{mes} \widehat{BAC} = \alpha$.

Le quadrilatère convexe AB'H'C', qui a deux angles opposés droits, est inscriptible ; donc : $\text{mes} \widehat{BHC} = \text{mes} \widehat{B'HC'} = \pi - \alpha$ et $\text{Mes}(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = \pi - \alpha$, avec $\frac{\pi}{2} < \pi - \alpha < \pi$.

2. $\text{Mes}(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}) = \alpha - \pi$, avec $-\pi < \alpha - \pi < -\frac{\pi}{2}$; donc $\text{mes} \widehat{BH'C} = \pi - \alpha$.

Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{H'}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère convexe ABH'C ; donc A, B, H', C sont cocycliques.

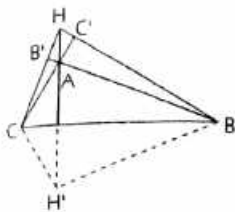


1. $\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha$, tel que : $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$; donc $\text{mes} \widehat{BAC} = -\alpha$.

Le quadrilatère convexe AB'H'C', qui a deux angles opposés droits, est inscriptible ; donc : $\text{mes} \widehat{BHC} = \text{mes} \widehat{B'HC'} = \pi + \alpha$ et $\text{Mes}(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = -\pi - \alpha$, avec $-\pi < -\pi - \alpha < -\frac{\pi}{2}$.

2. $\text{Mes}(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}) = \pi + \alpha$, avec $\frac{\pi}{2} < \pi + \alpha < \pi$; donc $\text{mes} \widehat{BH'C} = \pi + \alpha$.

Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{H'}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère convexe ABH'C ; donc A, B, H', C sont cocycliques.

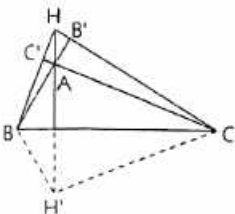


1. $\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha$, tel que : $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$; donc $\text{mes} \widehat{BAC} = -\alpha$.

Le quadrilatère convexe $AB'HC'$, qui a deux angles opposés droits, est inscriptible ; donc : $\text{mes} \widehat{BHC} = \text{mes} \widehat{B'HC'} = \pi + \alpha$ et $\text{Mes}(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = -\pi - \alpha$, avec $-\frac{\pi}{2} < -\pi - \alpha < 0$.

2. $\text{Mes}(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}) = \pi + \alpha$, avec $0 < \pi + \alpha < \frac{\pi}{2}$; donc $\text{mes} \widehat{BH'C} = \pi + \alpha$.

Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{H'}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère convexe $ABH'C$; donc A, B, H', C sont cocycliques.



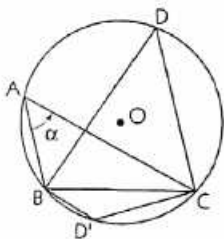
1. $\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha$, tel que : $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; donc $\text{mes} \widehat{BAC} = \alpha$.

Le quadrilatère convexe $AB'HC'$, qui a deux angles opposés droits, est inscriptible ; donc : $\text{mes} \widehat{BHC} = \text{mes} \widehat{B'HC'} = \pi - \alpha$ et $\text{Mes}(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = \pi - \alpha$, avec $0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. $\text{Mes}(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}) = \alpha - \pi$, avec $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \pi < 0$; donc $\text{mes} \widehat{BH'C} = \pi - \alpha$.

Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{H'}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère convexe $ABH'C$; donc A, B, H', C sont cocycliques.

♦ Exercice n° 7 p. 58

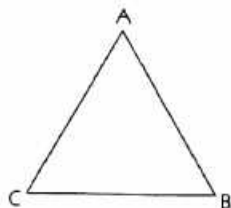


$$\text{Mes}(\overrightarrow{D'B}, \overrightarrow{D'C}) = \pi - \alpha ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = \alpha ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2\alpha.$$

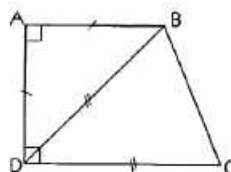
♦ Exercice n° 8 p. 58



$$\text{Mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3} ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{3}.$$

♦ Exercice n° 9 p. 58



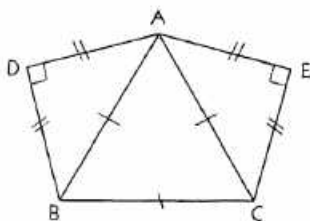
$$\text{Mes}(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{2} ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = -\frac{\pi}{4} ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{8} ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}) = \pi.$$

♦ Exercice n° 10 p. 58



$$\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} ; \text{Mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = -\frac{\pi}{2} ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{7\pi}{12} ; \text{Mes}(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{5\pi}{6} ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{5\pi}{12} ; \text{Mes}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{12}.$$

♦ Exercice n° 11 p. 58

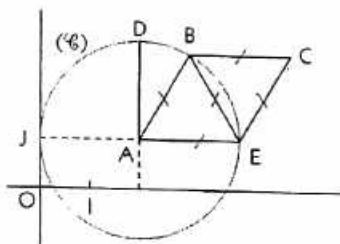
(O, I, J) est un repère orthonormé direct, donc : $\text{Mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2}$.

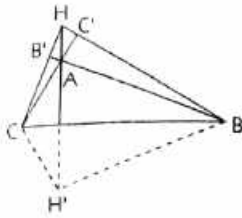
Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 2, E et D les points de (C) tels que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{OI}$ d'une part, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{OJ}$ d'autre part, soient colinéaires et de même sens.

1. B est le point de (C), tel que $\text{Mes}(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$.

2. C est tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$.

3. $\text{Mes}(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{BC}) = \text{Mes}(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{AE}) = \text{Mes}(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OI}) = -\frac{\pi}{2}$.



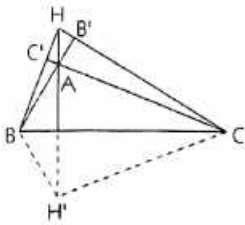


1. $\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha$, tel que : $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$; donc $\text{mes} \widehat{BAC} = -\alpha$.

Le quadrilatère convexe $AB'HC'$, qui a deux angles opposés droits, est inscriptible ; donc : $\text{mes} \widehat{BHC} = \text{mes} \widehat{B'HC'} = \pi + \alpha$ et $\text{Mes}(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = -\pi - \alpha$, avec $-\frac{\pi}{2} < -\pi - \alpha < 0$.

2. $\text{Mes}(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}) = \pi + \alpha$, avec $0 < \pi + \alpha < \frac{\pi}{2}$; donc $\text{mes} \widehat{BH'C} = \pi + \alpha$.

Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{H'}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère convexe $ABH'C$; donc A, B, H', C sont cocycliques.



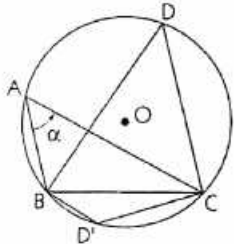
1. $\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha$, tel que : $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; donc $\text{mes} \widehat{BAC} = \alpha$.

Le quadrilatère convexe $AB'HC'$, qui a deux angles opposés droits, est inscriptible ; donc : $\text{mes} \widehat{BHC} = \text{mes} \widehat{B'HC'} = \pi - \alpha$ et $\text{Mes}(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = \pi - \alpha$, avec $0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. $\text{Mes}(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}) = \alpha - \pi$, avec $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \pi < 0$; donc $\text{mes} \widehat{BH'C} = \pi - \alpha$.

Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{H'}$ sont supplémentaires dans le quadrilatère convexe $ABH'C$; donc A, B, H', C sont cocycliques.

◆ Exercice n° 7 p. 58

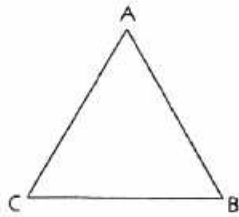


$$\text{Mes}(\overrightarrow{D'B}, \overrightarrow{D'C}) = \pi - \alpha ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = \alpha ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2\alpha.$$

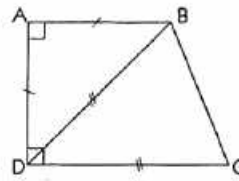
◆ Exercice n° 8 p. 58



$$\text{Mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3} ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{3}.$$

◆ Exercice n° 9 p. 58



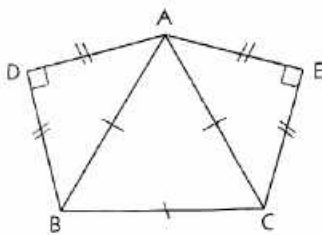
$$\text{Mes}(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{2} ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = -\frac{\pi}{4} ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{8} ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}) = \pi.$$

◆ Exercice n° 10 p. 58



$$\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} ; \text{Mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = -\frac{\pi}{2} ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{7\pi}{12} ; \text{Mes}(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{5\pi}{6} ;$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{5\pi}{12} ; \text{Mes}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{12}.$$

◆ Exercice n° 11 p. 58

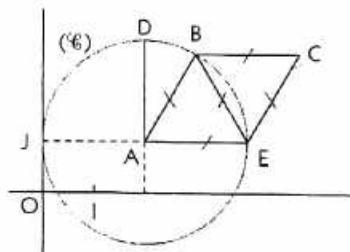
(O, I, J) est un repère orthonormé direct, donc : $\text{Mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2}$.

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon 2, E et D les points de $(\mathcal{C})$ tels que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{OI}$ d'une part, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{OJ}$ d'autre part, soient colinéaires et de même sens.

1. B est le point de $(\mathcal{C})$, tel que $\text{Mes}(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$.

2. C est tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$.

3. $\text{Mes}(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{BC}) = \text{Mes}(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{AE}) = \text{Mes}(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OI}) = -\frac{\pi}{2}$.



♦ Exercice n° 12 p. 59

1. Deux cas de figures sont à envisager :

ABC de sens direct



$$\begin{aligned} \text{Mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) &> 0, \\ \text{Mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) &> 0, \\ \text{mes } \widehat{ABC} &= \text{mes } \widehat{ACB}. \end{aligned}$$

ACB de sens direct



$$\begin{aligned} \text{Mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) &< 0, \\ \text{Mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) &< 0, \\ \text{mes } \widehat{ABC} &= \text{mes } \widehat{ACB}. \end{aligned}$$

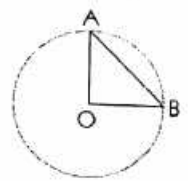
Dans les deux cas $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ ont même mesure.

$$2. ABC \text{ est équilatéral} \Leftrightarrow \begin{cases} ABC \text{ est isocèle en } A \\ BCA \text{ est isocèle en } B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \text{Mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \\ \text{Mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \text{Mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \end{cases}$$

c'est-à-dire $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ont même mesure.

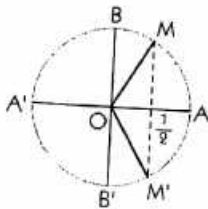
♦ Exercice n° 13 p. 59

Si le cercle a pour rayon 1 et $\text{mes } \widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$, alors la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est $\frac{\pi}{2}$; de plus $AB = \sqrt{2}$; donc le périmètre du segment de cercle limité par la corde $[AB]$ est : $\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}$.



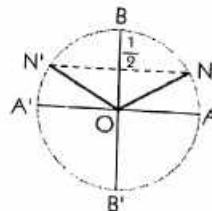
TRIGONOMETRIE

♦ Exercice n° 14 p. 59



A est le seul point du cercle trigonométrique, d'abscisse 1 ; donc un seul angle orienté a son cosinus égal à 1 : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA})$ ou l'angle nul.

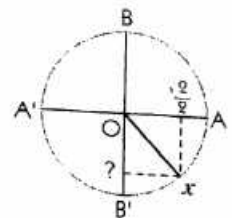
Deux points M et M' du cercle trigonométrique ont pour abscisse $\frac{1}{2}$; donc deux angles orientés ont leur cosinus égal à $\frac{1}{2}$.



B est le seul point du cercle trigonométrique, d'ordonnée 1 ; donc un seul angle orienté a son sinus égal à 1 : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ou l'angle droit direct.

Deux points N et N' du cercle trigonométrique ont pour ordonnée $\frac{1}{2}$; donc deux angles orientés ont leur sinus égal à $\frac{1}{2}$.

♦ Exercice n° 145 p. 59



$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

$$x \in]-\pi ; 0[\Rightarrow \sin x < 0 ;$$

$$\text{de plus } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$= \frac{1}{2} ;$$

$$\text{donc : } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

♦ Exercice n° 16 p. 59

Pour $x \in]-\frac{\pi}{2} ; \pi[$, $A(x) = 0$ et $B(x) = \sin x + \cos x$.

♦ Exercice n° 17 p. 59

$$\frac{9\pi}{10} = \pi - \frac{\pi}{10} ; \quad \frac{6\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} ; \quad \frac{4\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}.$$

$$\text{Donc : } \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{9\pi}{10} + \cos \frac{6\pi}{10} + \cos \frac{4\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} = 0.$$

♦ Exercice n° 18 p. 59

- $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\cos x \sin x$;
- $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\cos x \sin x$;
(immédiat, en développant)
- $(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x$,
 $(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = 1$,
d'où : $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x \sin^2 x$;
- $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$
 $= \cos^2 x - \sin^2 x$;
- $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

♦ Exercice n° 21 p. 59

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}.$$

♦ Exercice n° 22 p. 59

$$\left. \begin{array}{l} \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \\ \sin \frac{\pi}{5} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{5}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ \tan \frac{\pi}{5} = \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} \end{array} \right.$$

♦ Exercice n° 23 p. 59

$$\left. \begin{array}{l} \cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{10} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4} \\ \tan \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5+\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

♦ Exercice n° 24 p. 59

$$\left. \begin{array}{l} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \cos \frac{\pi}{12} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{4} \\ \tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}} \end{array} \right.$$

♦ Exercice n° 25 p. 59

- Avec la calculatrice, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(-0,927...) = -\frac{4}{5} \\ -\frac{\pi}{2} < -0,927... < 0. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \bullet \sin x &= -\frac{4}{5} \text{ et } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow x &= -\pi + 0,927... = -2,214... \end{aligned}$$

♦ Exercice n° 26 p. 59

- Avec la calculatrice, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(2,300...) = -\frac{2}{3} \\ \frac{\pi}{2} < 2,300... < \pi. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \bullet \cos x &= -\frac{2}{3} \text{ et } \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ \Rightarrow x &= 2,300... \end{aligned}$$

♦ Exercice n° 27 p. 59

- Avec la calculatrice, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan(0,321...) = \frac{1}{3} \\ 0 < 0,321... < \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \bullet \tan x &= \frac{1}{3} \text{ et } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow x &= -\pi + 0,321... = -2,819... \end{aligned}$$

♦ Exercice n° 28 p. 59

Le déterminant de ce système est égal à -1 ; il y a donc une unique solution.

En procédant par combinaison linéaire, on obtient :

$$\begin{cases} x \cos^2 t + y \sin t \cos t = \cos t \\ x \sin^2 t - y \sin t \cos t = \sin t \end{cases} \Rightarrow x = \sin t + \cos t ;$$

$$\begin{cases} x \sin t \cos t + y \sin^2 t = \sin t \\ -x \sin t \cos t + y \cos^2 t = -\cos t \end{cases} \Rightarrow y = \sin t - \cos t.$$

♦ Exercice n° 29 p. 59

1. Dans le triangle BHA rectangle en H :

$$BH = a \sin \alpha ; BC = 2a \sin \alpha.$$

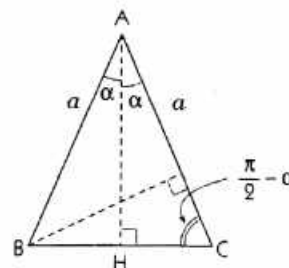
2. Dans le triangle BIC rectangle en I :

$$BI = BC \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = BC \cos \alpha ; BI = 2a \sin \alpha \cos \alpha.$$

3. Dans le triangle BIA rectangle en I :

$$BI = a \sin 2\alpha.$$

4. D'où : $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.



♦ Exercice n° 30 p. 59

Supposons que ABC soit rectangle en A.

On a : $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{B} + \widehat{C} = \frac{\pi}{2}$;
donc : $\cos \widehat{A} = 0$, $\sin \widehat{A} = 1$ et $\cos \widehat{C} = \sin \widehat{B}$.

On en déduit que :

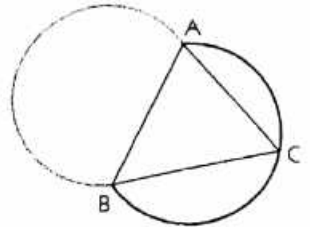
- $\cos^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{C} = \cos^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} = 1$;
- $\sin^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C} = 1 + \cos^2 \widehat{C} + \sin^2 \widehat{C} = 2$.

▢ Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n° 31 p. 59

1. L'ensemble des points M tels que $\widehat{MA, MB} = \widehat{CA, CB}$ est l'arc du cercle circonscrit au triangle ABC, d'extrémités A et B, contenant C.

2. L'ensemble des points M tels que $\widehat{MA, MB} = -\widehat{CA, CB}$ est le symétrique de l'arc précédent, par rapport à (AB).

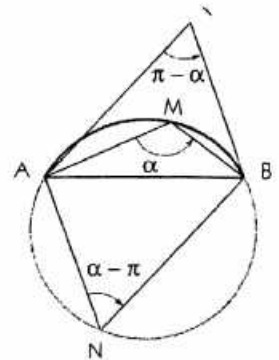


♦ Exercice n° 32 p. 59

1. $\alpha \in]0 ; \pi[$.

a) $\widehat{MA, MB} = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{AMB} = \alpha \\ \widehat{MA, MB} > 0 \end{cases}$; donc le lieu cherché est la partie de l'arc capable d'angle α , d'extrémités A et B, appartenant au demi-plan où $\widehat{MA, MB} > 0$.

b) $\widehat{NA, NB} = \alpha - \pi \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{ANB} = \pi - \alpha \\ \widehat{NA, NB} < 0 \end{cases}$; donc le lieu cherché est la partie de l'arc capable d'angle $\pi - \alpha$, d'extrémités A et B, appartenant au demi-plan où $\widehat{NA, NB} < 0$.



Commentaires

Dans le cas de figure, le premier lieu est dans le demi-plan supérieur de frontière (AB) et le second lieu est dans le demi-plan inférieur de même frontière ; par ailleurs, la réunion de ces deux lieux constitue un cercle, passant par A et B, privé de ces deux points.

2. Pour que quatre points A, B, C et D, distincts non alignés, soient cocycliques il faut et il suffit que :

- $\widehat{CA, CB} = \widehat{DA, DB}$, lorsque ces deux mesures ont le même signe ;
- $|\widehat{CA, CB} - \widehat{DA, DB}| = \pi$, lorsque ces deux mesures ne sont pas de même signe.

♦ Exercice n° 33 p. 60

Si ABC est de sens direct, $\widehat{AB, AC} + \widehat{BC, BA} + \widehat{CA, CB} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.

Si ABC est de sens indirect, $\widehat{AB, AC} + \widehat{BC, BA} + \widehat{CA, CB} = -\pi$.

♦ Exercice n° 34 p. 60

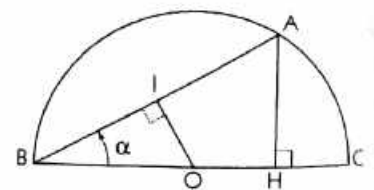
On suppose $\alpha > 0$.

1. Dans le triangle OAB isocèle en O, I est le milieu de [AB].

Dans le triangle OBI, $\widehat{BO, BI} + \widehat{OI, OB} + \widehat{IB, IO} = \pi$,

$$\widehat{IB, IO} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \widehat{BO, BI} = \alpha ;$$

$$\text{donc : } \widehat{OI, OB} = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$



On en déduit que : $\widehat{\text{Mes}(\vec{OA}, \vec{OI})} = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\widehat{\text{Mes}(\vec{OA}, \vec{OB})} = \pi - 2\alpha$ et $\widehat{\text{Mes}(\vec{OH}, \vec{OA})} = 2\alpha$.

Dans le triangle OHA rectangle en H, $\cos 2\alpha = \frac{OH}{OA} = OH$.

2. Dans le triangle BIO rectangle en I, $\cos \alpha = \frac{BI}{BO} = BI$; donc : $AB = 2BI = 2\cos \alpha$.

3. Dans le triangle BHA rectangle en H, $BH = AB \cos \alpha = 2\cos^2 \alpha$ et $OH = BI - BO = 2\cos^2 \alpha - 1$.

4. $OH = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$ et $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

Commentaires

Pour $\alpha < 0$, un raisonnement analogue conduit aux mêmes résultats.

$$5. \bullet \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{\cos \frac{\pi}{4} + 1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2}{4} \quad \text{et} \quad \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} ;$$

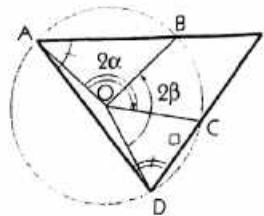
$$\text{donc : } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

$$\bullet \text{ De même : } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

♦ Exercice n° 35 p. 60

$$\widehat{\text{Mes}(\vec{DA}, \vec{DC})} = \frac{1}{2} \widehat{\text{Mes}(\vec{OA}, \vec{OC})} = \alpha ;$$

$$\widehat{\text{Mes}(\vec{AD}, \vec{AB})} = \frac{1}{2} \widehat{\text{Mes}(\vec{OD}, \vec{OB})} = \beta.$$



On a :

$$\widehat{\text{Mes}(\vec{ID}, \vec{IA})} + \widehat{\text{Mes}(\vec{AB}, \vec{AD})} + \widehat{\text{Mes}(\vec{DA}, \vec{DC})} = \widehat{\text{Mes}(\vec{ID}, \vec{IA})} + \widehat{\text{Mes}(\vec{AI}, \vec{AD})} + \widehat{\text{Mes}(\vec{DI}, \vec{DA})} ;$$

$$\text{donc : } \widehat{\text{Mes}(\vec{ID}, \vec{IA})} - \beta + \alpha = -\pi \quad \text{et} \quad \widehat{\text{Mes}(\vec{ID}, \vec{IA})} = -\pi - \alpha + \beta.$$

♦ Exercice n° 36 p. 60

La grande aiguille balaye un angle de 2π radians en 1 heure ; la petite aiguille balaye un angle de $\frac{\pi}{6}$ radians en 1 heure.

Après T heure(s), la grande aiguille balaye un angle de $2\pi T$ et la petite aiguille balaye un angle de $\frac{\pi}{6} T$.

Les deux aiguilles se superposent ssi la différence entre ces deux angles est un multiple entier de 2π , c'est-à-dire il existe un entier naturel k tel que : $2\pi T - \frac{\pi}{6} T = 2k\pi$. On trouve : $T = \frac{12}{11}k$, pour $k \in \mathbb{N}^*$; d'où $T \in \{\frac{12}{11} ; \frac{24}{11} ; \dots\}$.

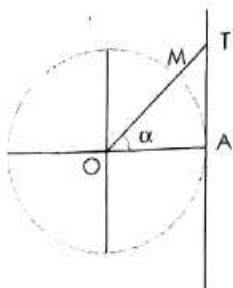
Les deux aiguilles seront à nouveau superposées après $\frac{12}{11} \times 3\,600 = 3\,927,27\dots$ secondes ; c'est-à-dire à 13 h 5 min 27 s.

Entre midi et minuit exclus, les deux aiguilles se trouvent exactement superposées 11 fois (... réponse de bon sens).

D'ailleurs 12 heures valent 43 200 secondes et $\frac{43\,200}{\frac{12}{11} \times 3\,600} = 11$.

♦ Exercice n° 37 p. 60

1.



2. L'aire du triangle OAT est égale à :

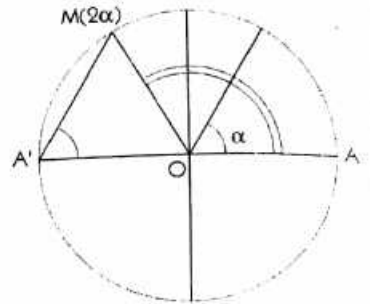
$$\frac{1}{2} \times OA \times AT = \frac{1}{2} |\tan \alpha|.$$

3. L'aire de la région du plan limitée par les segments [OA], [OM] et l'arc $\widehat{AM}$ est égale à $\frac{|\alpha|}{2}$.

4. Cette aire étant inférieure à celle du triangle, on a : $|\alpha| \leq |\tan \alpha|$.

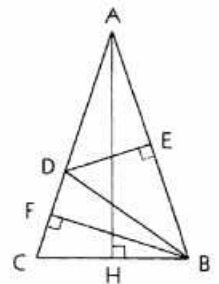
♦ Exercice n° 38 p. 60

1. $\text{Mes}(\widehat{OA, A'M}) = \text{Mes}(\widehat{A'A, A'M}) = \frac{1}{2} \text{Mes}(\widehat{OA, OM}) = \alpha$.
2. Dans le triangle $AA'M$ rectangle en M , $\sin \widehat{A} = \sin |\alpha| = \frac{AM}{AA'} = \frac{AM}{2}$;
donc : $AM = 2 \sin |\alpha|$.
3. La mesure de l'arc $\widehat{AM}$ est égale à $2|\alpha|$.
4. Si $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; 0]$, alors $\sin \alpha \leq 0$ et $\sin |\alpha| = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha = |\sin \alpha|$;
si $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$, alors $\sin \alpha \geq 0$ et $\sin |\alpha| = \sin(\alpha) = \sin \alpha = |\sin \alpha|$;
donc : $\sin |\alpha| = |\sin \alpha|$.
5. La mesure de l'arc $\widehat{AM}$ étant supérieure à AM , on a : $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$.



♦ Exercice n° 39 p. 60

1. Dans le triangle BCD , $\widehat{D} = \pi - \widehat{B} - \widehat{C} = \pi - \frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$.
Ce triangle est donc isocèle en B et $BD = BC = a$.
Dans le triangle ABC isocèle en A , $\widehat{A} = \pi - 2\widehat{B} = \pi - 2 \cdot \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$;
donc, dans le triangle ABD , $\widehat{A} = \widehat{B}$; ce triangle est isocèle en D et $AD = BD = a$.



2. • Soit E le projeté orthogonal de D sur (AB) .
On a $EB = EA = \frac{AB}{2}$, car le triangle ABD est isocèle en D .
Dans le triangle BDE rectangle en E , $\cos \widehat{B} = \cos \frac{\pi}{5} = \frac{EB}{BD} = \frac{AB}{2a}$; d'où : $AB = 2a \cos \frac{\pi}{5}$.
• En introduisant le point F projeté orthogonal de B sur AC , on obtient de même : $CD = 2a \cos \frac{2\pi}{5}$.
Or : $AB - CD = AC - CD = AD = a$; donc : $2a \cos \frac{\pi}{5} - 2a \cos \frac{2\pi}{5} = 2a(\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5}) = a$;
c'est-à-dire : $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$.
3. $BH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.
Dans le triangle ABH rectangle en H , $\cos \widehat{B} = \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{BH}{AB}$ et $BH = AB \cos \frac{2\pi}{5} = 2a \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$.
Donc : $2a \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{a}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$.
4. $(\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5})^2 = (\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5})^2 + 4 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.
D'où : $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
5. Finalement : $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; donc : $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ et $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.
 $\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{5}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

♦ Exercice n° 40 p. 60

1. a) Notons $x(t)$ la distance parcourue par M et $y(t)$ la distance parcourue par N à l'instant t .
 $x(t) = v_1 t$ et $y(t) = v_2 t + 100$ et la longueur algébrique de l'arc $\widehat{MN}$ est $v_1 t - v_2 t - 100$;
d'où : $\text{Mes}(\widehat{OM, ON}) = \frac{v_1 - v_2}{100} t - 1$.
- b) À l'instant 10 s, M passe au point B et a donc parcouru 100 m ; d'où : $10t = 100$ et $v_1 = 10$ m/s.
À l'instant 60 s, les deux cyclistes ont parcouru la même distance ; d'où : $60v_1 = 60v_2 + 100$ et $v_2 = \frac{25}{3}$ m/s.
- c) Les deux cyclistes sont diamétralement opposés sur la piste ssi $\text{Mes}(\widehat{OM, ON}) = \frac{v_1 - v_2}{100} t - 1 = \pi$.
On en déduit que : $t = 60(1 + \pi) \approx 4$ min 8 s.
2. On a : $x(t) = 10t$ et $y(t) = \frac{25}{3} t + 100$. Les deux cyclistes se croisent ssi $x(t) + y(t) = 200\pi$.
D'où : $(\frac{25}{3} + 10)t + 100 = 200\pi$ et $t = \frac{60}{11} (2\pi - 1) \approx 29$ s.

4. Produit scalaire

(pages 61 à 78 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à introduire la notion de produit scalaire et à montrer l'utilisation de ses propriétés.

COMMENTAIRES

La première leçon est un peu longue, mais il est nécessaire de bien comprendre les divers aspects de la définition et les propriétés immédiates avant d'aborder des exercices utilisant véritablement ce nouvel outil. On n'hésitera pas, chaque fois que l'occasion se présente, à faire un schéma facilitant la mémorisation d'une propriété.

Favoriser l'assimilation des aspects géométriques du produit scalaire par la résolution de nombreux exercices n'est pas inutile avant d'aborder les leçons suivantes.

SAVOIRS ET SAVOIR - FAIRE

savoirs

Produit scalaire

- Produit scalaire : définition et propriétés.
- Carré scalaire : définition et propriétés.

Relations métriques

- Relations métriques dans un triangle rectangle.
- Théorème d'Al Kashi.
- Théorème de la médiane.

Forme analytique du produit scalaire

- Expression du produit scalaire dans un repère orthonormé.
- Expression de la norme d'un vecteur.
- Expression de la distance de deux points.
- Conséquence : coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.

savoir-faire

- Utiliser le produit scalaire pour résoudre des problèmes d'orthogonalité ou de parallélisme.
- Calculer des mesures de côtés et d'angles dans un triangle.
- Transformer certaines expressions en utilisant la relation de Chasles et les propriétés du produit scalaire.
- Utiliser le produit scalaire et ses propriétés pour effectuer des calculs.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 66

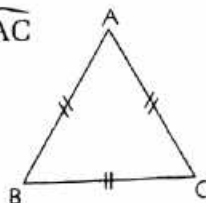
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \frac{2\pi}{3} = -1.$$

♦ Exercice 1.b p. 66

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \widehat{BAC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

♦ Exercice 1.d p. 66

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \cos \widehat{BAC} \\ &= a^2 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$



♦ Exercice 1.c p. 66

Si $\|\vec{u}\| = 1$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

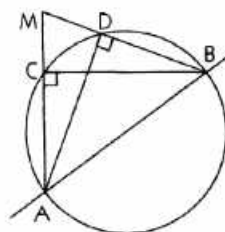
Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ et $\|\vec{v}\| = 1 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ et $\|\vec{v}\| = 1$

$\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ sont colinéaires et de même sens ; $\|\vec{v}\| = 1$

$\Leftrightarrow \vec{v} = \vec{u}$.

♦ Exercice 1.e p. 66

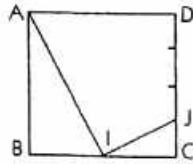
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} \times \overrightarrow{MB} \\ &= MA \times MC = MB \times MC. \end{aligned}$$



◆ Exercice 2.a p. 69

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2, \quad (\vec{u} + \vec{v})^2 = 10, \quad (\vec{u} - \vec{v})^2 = 2, \\ (2\vec{u} - 3\vec{v})^2 = -4, \quad (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = 2.$$

◆ Exercice 2.c p. 69



$$\vec{AI} \cdot \vec{BJ} = (\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}) \cdot (\frac{1}{2}\vec{BC} - \frac{1}{4}\vec{AB}) \\ = \frac{1}{2}(\vec{AB}\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{AB}^2 + \frac{1}{2}\vec{BC}^2 - \frac{1}{4}\vec{BC}\vec{AB}) \\ = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\vec{BC}^2 - \frac{1}{2}\vec{AB}^2) = 0.$$

Donc : $(AI) \perp (BJ)$.

◆ Exercice 2.e p. 69

$$1. (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + AB^2.$$

$$2. \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}, \text{ donc :}$$

$$BC^2 = AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + AB^2 = 25 \text{ et } BC = 5.$$

◆ Exercice 3.a p. 72

D'après le théorème de Pythagore dans $AA'C$, on a : $AA' = \frac{\sqrt{55}}{2}$.

D'après le théorème de la médiane dans ABC , on a : $2BB'^2 = BA^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2}$; d'où : $BB' = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

Enfin, le triangle ABC étant isocèle en A , on a : $CC' = BB'$.

◆ Exercice 3.b p. 72

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \widehat{BAC} = \sqrt{93}.$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \times BC} = \frac{15}{2\sqrt{93}} ; \text{ d'où : } \text{mes } \widehat{B} \approx 38,95^\circ.$$

$$\text{mes } \widehat{C} = 180^\circ - \text{mes } \widehat{A} - \text{mes } \widehat{B} \approx 21,05^\circ.$$

$$AA'^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}) ; \text{ d'où : } AA' = \frac{\sqrt{37}}{2}. \text{ De même : } BB' = \frac{13}{2} \text{ et } CC' = \sqrt{67}.$$

◆ Exercice 3.c p. 72

$$\cos \widehat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} = \frac{7}{8} ;$$

$$\text{d'où : } \text{mes } \widehat{A} \approx 28,96^\circ.$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BC \times BA} = \frac{1}{4} ;$$

$$\text{d'où : } \text{mes } \widehat{B} \approx 75,52^\circ \text{ et } \text{mes } \widehat{C} = \text{mes } \widehat{B} \approx 75,52^\circ.$$



◆ Exercice 4.a p. 74

$$1. \vec{u} = 7\vec{i} + 2\vec{j} \text{ et } \vec{v} = 3\vec{i} + 3\vec{j} ; \text{ donc : } \vec{u} \cdot \vec{v} = 27. \quad 2. \vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} \text{ et } \vec{v} = \vec{i} - 4\vec{j} ; \text{ donc : } \vec{u} \cdot \vec{v} = -5.$$

◆ Exercice 2.b p. 69

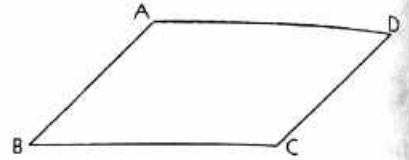
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires et de même sens.}$$

◆ Exercice 2.d p. 69



Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{BC} + \vec{CD})$$

$$= (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{BC} - \vec{AB})$$

$$= BC^2 - AB^2.$$

$$ABCD \text{ est un losange} \Leftrightarrow AB = BC$$

$$\Leftrightarrow \vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$$

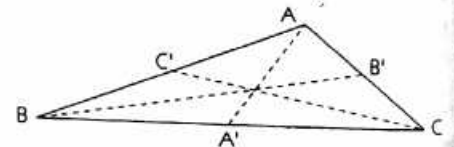
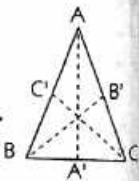
$$\Leftrightarrow (AC) \perp (BD).$$

◆ Exercice 2.f p. 69

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = (4\vec{u} - \vec{v}) \cdot (-3\vec{u} + \vec{v}) = -12\vec{u}^2 + 7\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v}^2 = 0.$$

$$\|\vec{i}\|^2 = (4\vec{u} - \vec{v})^2 = 16\vec{u}^2 - 8\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = 1.$$

$$\|\vec{j}\|^2 = (-3\vec{u} + \vec{v})^2 = 9\vec{u}^2 - 6\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = 1.$$



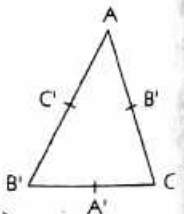
◆ Exercice 3.d p. 72

$$AA'^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}) ;$$

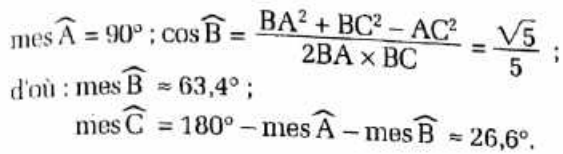
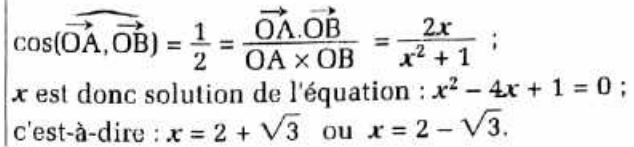
$$BB'^2 = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2}) ;$$

$$CC'^2 = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2}).$$

$$\text{Donc, } AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$



$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$; donc ABC
est rectangle en A.
 $AB = \sqrt{13}$, $AC = \sqrt{52}$
et $BC = \sqrt{65}$.


$$\begin{aligned} \text{OA} &= \text{OB} = \sqrt{1+x^2} ; \\ \text{AB} &= |x-1|\sqrt{2}. \end{aligned}$$


UTILISATION DES DÉFINITIONS

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{a} &= 12 \quad ; \quad \vec{u} \cdot \vec{b} = -12 \quad ; \\ \vec{u} \cdot \vec{c} &= 8.\end{aligned}$$

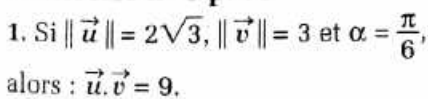
Lorsque $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{3}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$, on a : $\frac{\|\vec{u}\|^2}{2} = 2$;
c'est-à-dire : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overline{AB} \times \overline{AC} = 1, \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} &= -AD^2 = -1; \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= 0; \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} &= \overline{AB} \times \overline{AB} = 1.\end{aligned}$$

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos(\widehat{BAC})$; donc : $3 = 2\sqrt{3} \cos \widehat{BAC}$ et $\text{mes} \widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$.
 2. Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB),
 alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = 3$; c'est-à-dire : $\frac{\overrightarrow{AH}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{3}{2}$.

- placer le point H ;
- construire la perpendiculaire (Δ) à la droite (AB) en H ;
- construire les demi-droites [AX) et [AY) telles que :
 $\text{mes } \widehat{\text{BAX}} = \text{mes } \widehat{\text{BAY}} = \frac{\pi}{6}$;
- (Δ) coupe [AX) et [AY) en C_1 et C_2 ;

donc : $C = C_1$ ou $C = C_2$.



2. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{4\pi}{9}$ et $\|\vec{u}\| = 2$,
alors : $\|\vec{v}\| \approx 1,44$.

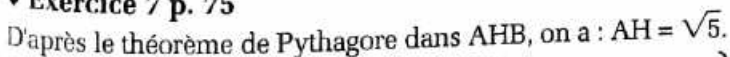
3. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,
alors : $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BA} = \overline{BN} \times \overline{BM};$$
$$\Rightarrow \vec{BN}, \vec{BM} = \overline{BN} \times \overline{BM};$$

donc : $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BA}$.

$$\Rightarrow \vec{BN} \cdot \vec{BA} = \overline{BH} \times \overline{BA};$$

donc : $\vec{BN} \cdot \vec{BM} = \overline{BH} \times \overline{BA}$ et $\vec{BN} \cdot \vec{BM}$ est indépendant de M.

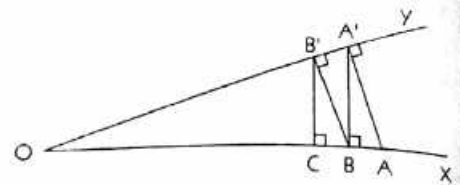


$$\left. \begin{aligned} \vec{AK} \cdot \vec{AC} &= \vec{AK} \times \vec{AC} = AK \times AC \\ \vec{AK} \cdot \vec{AC} &= \vec{AH} \cdot \vec{AC} = AH \times AC \cos \widehat{CAH} = AH \times AC \times \frac{AH}{AC} = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AK = \frac{5}{3}$$



♦ Exercice 8 p. 75

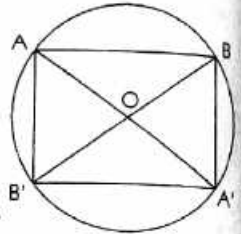
1. $\vec{OB} \cdot \vec{OA}' = \vec{OB}^2$, car B est le projeté orthogonal de A' sur (OB) ;
 $\vec{OB} \cdot \vec{OA}' = \vec{OB}' \times \vec{OA}'$, car B' est le projeté orthogonal de B sur (OA') ;
 $\vec{OB}' \cdot \vec{OA}' = \vec{OB}' \times \vec{OA}'$, car les vecteurs $\vec{OB}'$ et $\vec{OA}'$ sont colinéaires ;
on en déduit que : $\vec{OB}^2 = \vec{OA}' \cdot \vec{OB}'$.



2. $\vec{OB}' \cdot \vec{OA} = \vec{OC} \times \vec{OA} = \vec{OA} \cdot \vec{OC}$ [C est le projeté orthogonal de B' sur (OA)]
 $\vec{OB}' \cdot \vec{OA} = \vec{OB}' \times \vec{OA}' = \vec{OB}' \cdot \vec{OA}'$, car A' est le projeté de A sur (OB')
 $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \vec{OB}' \cdot \vec{OA}'$
3. Des résultats des questions 1 et 2, on déduit que : $\vec{OC} \times \vec{OA} = \vec{OB}^2$; donc : $OB = \sqrt{OA \times OB}$.

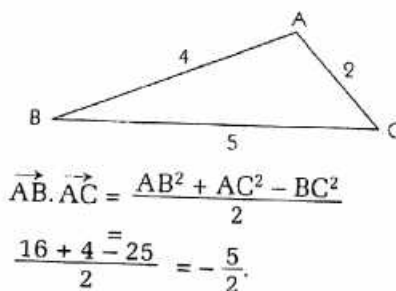
♦ Exercice 9 p. 75

1. • Le triangle AA'B' est rectangle en B' ; donc : $\vec{AA}' \cdot \vec{AB}' = \vec{AB}'^2$.
De même le triangle BB'A' est rectangle en A' ; donc : $\vec{BB}' \cdot \vec{BA}' = \vec{BA}'^2$.
Dans le rectangle ABA'B', $AB' = BA'$; donc : $\vec{AA}' \cdot \vec{AB}' = \vec{BB}' \cdot \vec{BA}'$.
 $\vec{AA}' \cdot \vec{AB} = \vec{AB}^2$, car B est le projeté orthogonal de A' sur la droite (AB)
 $\vec{BB}' \cdot \vec{BA} = \vec{BA}^2$, car A est le projeté orthogonal de B' sur la droite (AB)
 $\vec{AA}' \cdot \vec{AB} = \vec{BB}' \cdot \vec{BA}$
2. $\vec{AA}' \cdot \vec{AB} + \vec{BB}' \cdot \vec{BA} = \vec{AB}^2 + \vec{BA}^2 = AB^2 + AB^2 = BB'^2 = 4r^2$. De même : $\vec{AA}' \cdot \vec{AB} + \vec{BB}' \cdot \vec{BA} = 4r^2$.



UTILISATION DES PROPRIÉTÉS

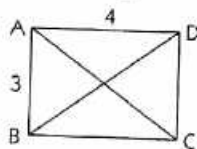
♦ Exercice n° 10 p. 75



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

$$\frac{16 + 4 - 25}{2} = -\frac{5}{2}$$

♦ Exercice n° 12 p. 75



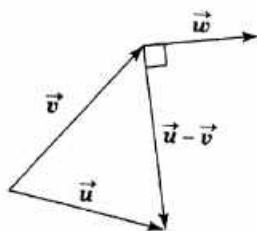
$$\vec{AC} \cdot \vec{DB} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AB} - \vec{BC})$$

$$= AB^2 - BC^2 = -7$$

♦ Exercice n° 15 p. 75

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} \Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$$

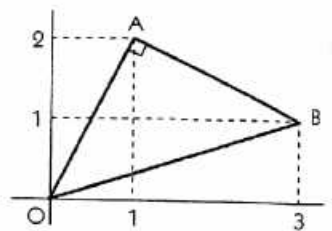
$$\Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \perp \vec{w}$$



♦ Exercice n° 11 p. 75

D'après le théorème de Pythagore, on a :
 $OB = \sqrt{10}$, $OA = \sqrt{5}$, $AB = \sqrt{5}$.
Le triangle OAB est donc isocèle en A.

De plus $OB^2 = OA^2 + AB^2$; d'où OAB est un triangle rectangle isocèle en A ;
mes $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$; mes $\hat{O} = \text{mes } \hat{B} = \frac{\pi}{4}$.



♦ Exercice n° 13 p. 75

$$\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{AB} + \vec{AC})^2 = \|\vec{AB} + \vec{AC}\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ est milieu de } [BC]$$

♦ Exercice n° 14 p. 75

$$4\vec{i} + 2\vec{j} \text{ est vecteur directeur de } (\mathcal{D}),$$

$$-2\vec{i} + 4\vec{j} \text{ est vecteur directeur de } (\mathcal{D}'),$$

$$(4\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (-2\vec{i} + 4\vec{j}) = 0 \Rightarrow (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}')$$

♦ Exercice n° 16 p. 76

Si $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\text{Mes}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$,
alors : $\vec{u} \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = 2$; $(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (3\vec{u} + \vec{v}) = -4$; $(3\vec{u} + \vec{v})^2 = 34$.

♦ Exercice n° 17 p. 76

Si $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\text{Mes}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$,
alors : $(\vec{u} + \vec{v})^2 = 7$; $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = -3$; $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 3\vec{v}) = -15$.

◆ Exercice n° 18 p. 76

Si $\|\vec{u}\| = 2$, $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 2$ et $\text{Mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$,
alors $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 2\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v}$
 $= 2\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2$;
c'est-à-dire : $8 - \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{v}\| = 2$.

On en déduit que $\|\vec{v}\|$ est la solution positive de l'équation du second degré : $x^2 - x - 6 = 0$;
c'est-à-dire : $\|\vec{v}\| = 3$.

◆ Exercice n° 20 p. 76

1. $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$

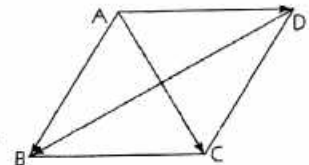
$\Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \perp (\vec{u} + \vec{v})$.

2. ABCD est un parallélogramme.

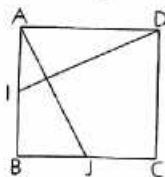
ABCD est un losange $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{AD}$

$\Leftrightarrow (\vec{AB} - \vec{AD}) \perp (\vec{AB} + \vec{AD}) \Leftrightarrow \vec{DB} \perp \vec{AC}$.



DÉMONSTRATION DE PROPRIÉTÉS

◆ Exercice n° 21 p. 76



$\vec{AJ} \cdot \vec{DI} = (\vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC}) \cdot (\vec{DA} + \frac{1}{2} \vec{AB})$

$= (\vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC}) \cdot (-\vec{BC} + \frac{1}{2} \vec{AB})$

$= \frac{1}{2} \vec{AB}^2 - \frac{1}{2} \vec{BC}^2 = 0$.

Donc : $(AJ) \perp (DI)$.

◆ Exercice n° 22 p. 76

1. $\vec{BB'} \cdot \vec{CC'} = (\vec{BC} + \vec{CB'}) \cdot (\vec{CD} + \vec{DC'})$

$= (\vec{BC} + \frac{2}{3} \vec{CD}) \cdot (\vec{CD} - \frac{2}{3} \vec{BC}) = \frac{2}{3} \vec{CD}^2 - \frac{2}{3} \vec{BC}^2 = 0$.

Donc : $(BB') \perp (CC')$.

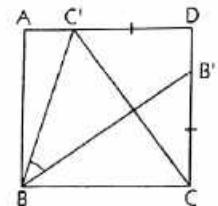
2. $\vec{BB'} \cdot \vec{BC'} = (\vec{BC} + \vec{CB'}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AC'})$

$= (\vec{BC} + \frac{2}{3} \vec{CD}) \cdot (\vec{CD} + \frac{1}{3} \vec{BC}) = \frac{1}{3} \vec{BC}^2 + \frac{2}{3} \vec{CD}^2 = \vec{BC}^2$.

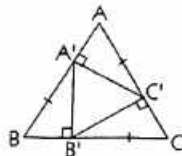
Par ailleurs, $\vec{BB'} \cdot \vec{BC'} = \|\vec{BB'}\| \times \|\vec{BC'}\| \cos \widehat{B'BC'}$,

avec $\vec{BB'}^2 = \vec{BC}^2 + \frac{4}{9} \vec{CD}^2 = \frac{13}{9} \vec{BC}^2$ et $\vec{BC'}^2 = \vec{BA}^2 + \frac{1}{9} \vec{AD}^2 = \frac{10}{9} \vec{BC}^2$.

Donc : $\cos \widehat{B'BC'} = \frac{\vec{BB'} \cdot \vec{BC'}}{\|\vec{BB'}\| \times \|\vec{BC'}\|} = \frac{9}{\sqrt{130}}$ et $\text{mes} \widehat{B'BC'} \approx 37,87^\circ$.



◆ Exercice n° 23 p. 76



1. $\vec{AB} \cdot \vec{A'C'} = \vec{AB} \cdot (\vec{AC'} - \vec{AA'})$

$= \vec{AB} \cdot \vec{AC'} - \vec{AB} \cdot \vec{AA'} = \frac{2}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} = 0$.

De même : $\vec{BC} \cdot \vec{B'A'} = 0$ et $\vec{CA} \cdot \vec{C'B'} = 0$.

2. Les triangles rectangles $AA'C'$, $BB'A'$ et $CC'B'$ étant isométriques, le triangle $A'B'C'$ est équilatéral.

◆ Exercice n° 24 p. 76

1. $\vec{BD} \cdot \vec{B'D'} = (\vec{BA} + \vec{AD}) \cdot (\vec{B'A} + \vec{AD'})$

$= \vec{BA} \cdot \vec{AD'} + \vec{AD} \cdot \vec{B'A}$

[car $(BA) \perp (B'A)$ et $(AD) \perp (AD')$]

$\vec{BD} \cdot \vec{B'D'} = \vec{BA} \times \vec{AD'} - \vec{AD} \times \vec{B'A}$

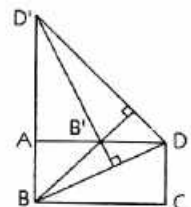
[car $\vec{BA}$ et $\vec{AD'}$ sont colinéaires et de même sens,

$\vec{AD}$ et $\vec{B'A}$ sont colinéaires et de sens contraires]

$\vec{BD} \cdot \vec{B'D'} = \vec{BA} \times \vec{AD} - \vec{AD} \times \vec{BA} = 0$;

donc : $(BD) \perp (B'D')$.

2. D est l'orthocentre du triangle $BB'D'$; donc : $(DD') \perp (BB')$.



◆ Exercice n° 25 p. 76

$\vec{CM} \cdot \vec{HK} = \vec{CM} \cdot (\vec{HA} + \vec{AK})$

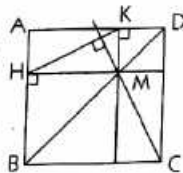
$= \vec{CM} \cdot \vec{HA} + \vec{CM} \cdot \vec{AK}$

$= \vec{BH} \times \vec{HA} + \vec{DK} \times \vec{AK}$

$= \vec{BH} \times \vec{HA} - \vec{DK} \times \vec{AK}$

$= 0$ (car $BH = AK$ et $HA = DK$) ;

donc : $(HK) \perp (CM)$.



◆ Exercice n° 26 p. 76

1. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OB})$

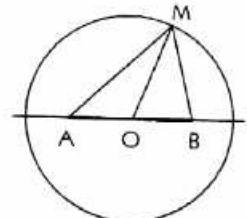
$= (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} - \vec{OA})$

$= \vec{MO}^2 - \vec{OA}^2$

$= \vec{OM}^2 - \frac{9}{4}$.

2. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 4 \Leftrightarrow \vec{OM}^2 - \frac{9}{4} = 4 \Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{5}{2}$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon $\frac{5}{2}$.



♦ Exercice n° 18 p. 76

Si $\|\vec{u}\| = 2$, $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 2$ et $\text{Mes}(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{\pi}{3}$,
alors $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 2\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v}$
 $= 2\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 2$;
c'est-à-dire : $8 - \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{v}\| = 2$.

On en déduit que $\|\vec{v}\|$ est la solution positive de l'équation du second degré : $x^2 - x - 6 = 0$;
c'est-à-dire : $\|\vec{v}\| = 3$.

♦ Exercice n° 20 p. 76

1. $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$

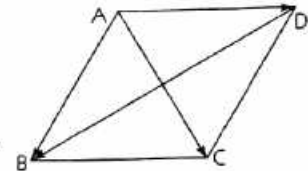
$\Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \perp (\vec{u} + \vec{v})$.

2. ABCD est un parallélogramme.

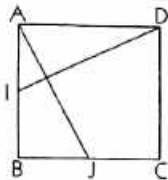
ABCD est un losange $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{AD}$

$\Leftrightarrow (\vec{AB} - \vec{AD}) \perp (\vec{AB} + \vec{AD}) \Leftrightarrow \vec{DB} \perp \vec{AC}$.



DÉMONSTRATION DE PROPRIÉTÉS

♦ Exercice n° 21 p. 76



$$\begin{aligned} \vec{AI} \cdot \vec{DJ} &= (\vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC}) \cdot (\vec{DA} + \frac{1}{2} \vec{AB}) \\ &= (\vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC}) \cdot (-\vec{BC} + \frac{1}{2} \vec{AB}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{AB}^2 - \frac{1}{2} \vec{BC}^2 = 0. \end{aligned}$$

Donc : $(AI) \perp (DJ)$.

♦ Exercice n° 22 p. 76

$$\begin{aligned} 1. \vec{BB'} \cdot \vec{CC'} &= (\vec{BC} + \vec{CB'}) \cdot (\vec{CD} + \vec{DC'}) \\ &= (\vec{BC} + \frac{2}{3} \vec{CD}) \cdot (\vec{CD} - \frac{2}{3} \vec{BC}) = \frac{2}{3} \vec{CD}^2 - \frac{2}{3} \vec{BC}^2 = 0. \end{aligned}$$

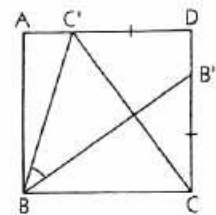
Donc : $(BB') \perp (CC')$.

$$\begin{aligned} 2. \vec{BB'} \cdot \vec{BC'} &= (\vec{BC} + \vec{CB'}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AC'}) \\ &= (\vec{BC} + \frac{2}{3} \vec{CD}) \cdot (\vec{CD} + \frac{1}{3} \vec{BC}) = \frac{1}{3} \vec{BC}^2 + \frac{2}{3} \vec{CD}^2 = \vec{BC}^2. \end{aligned}$$

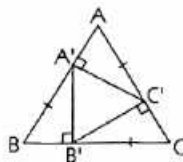
Par ailleurs, $\vec{BB'} \cdot \vec{BC'} = \|\vec{BB'}\| \times \|\vec{BC'}\| \cos \widehat{B'BC'}$,

avec $\vec{BB'}^2 = \vec{BC}^2 + \frac{4}{9} \vec{CD}^2 = \frac{13}{9} \vec{BC}^2$ et $\vec{BC'}^2 = \vec{BA}^2 + \frac{1}{9} \vec{AD}^2 = \frac{10}{9} \vec{BC}^2$.

Donc : $\cos \widehat{B'BC'} = \frac{\vec{BB'} \cdot \vec{BC'}}{\|\vec{BB'}\| \times \|\vec{BC'}\|} = \frac{9}{\sqrt{130}}$ et $\text{mes} \widehat{B'BC'} \approx 37,87^\circ$.



♦ Exercice n° 23 p. 76



$$\begin{aligned} 1. \vec{AB} \cdot \vec{A'C'} &= \vec{AB} \cdot (\vec{AC'} - \vec{AA'}) \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AC'} - \vec{AB} \cdot \vec{AA'} = \frac{2}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} = 0. \end{aligned}$$

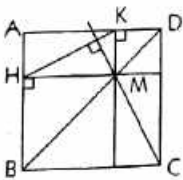
De même : $\vec{BC} \cdot \vec{B'A'} = 0$ et $\vec{CA} \cdot \vec{C'B'} = 0$.

2. Les triangles rectangles $AA'C'$, $BB'A'$ et $CC'B'$ étant isométriques, le triangle $A'B'C'$ est équilatéral.

♦ Exercice n° 25 p. 76

$$\begin{aligned} \vec{CM} \cdot \vec{HK} &= \vec{CM} \cdot (\vec{HA} + \vec{AK}) \\ &= \vec{CM} \cdot \vec{HA} + \vec{CM} \cdot \vec{AK} \\ &= \vec{BH} \times \vec{HA} + \vec{DK} \times \vec{AK} \\ &= \vec{BH} \times \vec{HA} - \vec{DK} \times \vec{AK} \\ &= 0 \text{ (car } \vec{BH} = \vec{AK} \text{ et } \vec{HA} = \vec{DK}) ; \end{aligned}$$

donc : $(HK) \perp (CM)$.



♦ Exercice n° 24 p. 76

$$\begin{aligned} 1. \vec{BD} \cdot \vec{B'D'} &= (\vec{BA} + \vec{AD}) \cdot (\vec{B'A} + \vec{AD'}) \\ &= \vec{BA} \cdot \vec{AD'} + \vec{AD} \cdot \vec{B'A} \end{aligned}$$

[car $(BA) \perp (B'A)$ et $(AD) \perp (AD')$]

$$\vec{BD} \cdot \vec{B'D'} = \vec{BA} \times \vec{AD'} - \vec{AD} \times \vec{B'A}$$

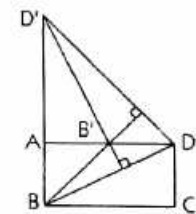
[car $\vec{BA}$ et $\vec{AD'}$ sont colinéaires et de même sens,

$\vec{AD}$ et $\vec{B'A}$ sont colinéaires et de sens contraires]

$$\vec{BD} \cdot \vec{B'D'} = \vec{BA} \times \vec{AD} - \vec{AD} \times \vec{BA} = 0 ;$$

donc : $(BD) \perp (B'D')$.

2. D est l'orthocentre du triangle $BB'D'$; donc : $(DD') \perp (BB')$.

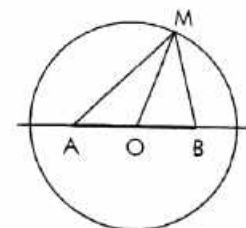


♦ Exercice n° 26 p. 76

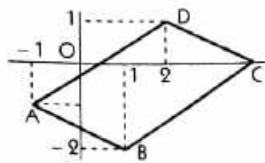
$$\begin{aligned} 1. \vec{MA} \cdot \vec{MB} &= (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OB}) \\ &= (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} - \vec{OA}) \\ &= \vec{MO}^2 - \vec{OA}^2 \\ &= \vec{OM}^2 - \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

$$2. \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 4 \Leftrightarrow \vec{OM}^2 - \frac{9}{4} = 4 \Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{5}{2}.$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon $\frac{5}{2}$.



♦ Exercice n° 27 p. 76



1. $\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow ABCD$ est un parallélogramme.

2. $AB = CD = \sqrt{5}$, $AD = BC = \sqrt{13}$,
 $BD = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{26}$.

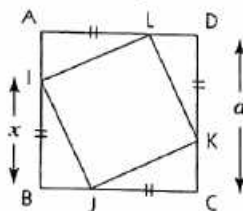
$$\begin{aligned} \cos \widehat{BAD} &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{AB \times AD} \\ &= \frac{\|\vec{AB} + \vec{AD}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AD}\|^2}{2AB \times AD} \\ &= \frac{AC^2 - AB^2 - AD^2}{2AB \times AD} = \frac{4}{\sqrt{65}} \approx 0,496 ; \end{aligned}$$

donc : $\widehat{BAD} \approx 60,26^\circ$;
 $\widehat{ABC} \approx 180^\circ - 60,25^\circ = 119,74^\circ$.

3. $AC^2 + BD^2 = 36 = 2AB^2 + 2BC^2$.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

♦ Exercice n° 29 p. 76



1. $IJ = \sqrt{x^2 + (a-x)^2}$.

Les triangles CJK, DKL, AIL et BIJ sont isométriques ;
 donc $JK = KL = IL = IJ$ et IJKL est un losange.

$$\begin{aligned} 2. \vec{IJ} \cdot \vec{IL} &= (\vec{IB} + \vec{BJ}) \cdot (\vec{IA} + \vec{AL}) \\ &= \vec{IB} \cdot \vec{IA} + \vec{BJ} \cdot \vec{AL} \\ &= -IA \times IB + BJ \times AL \\ &= 0, \text{ car } IA = BJ \text{ et } IB = AL. \end{aligned}$$

Donc IJKL est un carré.

♦ Exercice n° 31 p. 76

1. $x_A = 3 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$ et $y_A = 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2. La droite (Δ) , perpendiculaire en A à la première bissectrice, a pour équation :
 $x + y + \frac{3(1 + \sqrt{3})}{2} = 0$.

Le projeté orthogonal de A sur la première bissectrice est le point d'intersection de (Δ) et de cette première bissectrice ; c'est-à-dire : $H \left(\frac{3 + 3\sqrt{3}}{4} ; \frac{3 + 3\sqrt{3}}{4} \right)$.

Dans le triangle AOH rectangle en H, $\cos \widehat{AOH} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$; donc : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{OH}{OA} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{6}}{4}$.

♦ Exercice n° 28 p. 76

1. $3\|\vec{u}\| + 2\|\vec{v}\| = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$, $\|3\vec{u} + 2\vec{v}\| = \sqrt{149}$,
 $\|3\vec{u} - 2\vec{v}\| = \sqrt{5}$.

À noter : $\|3\vec{u} + 2\vec{v}\| \neq 3\|\vec{u}\| + 2\|\vec{v}\|$,
 $\|3\vec{u} - 2\vec{v}\| \neq 3\|\vec{u}\| + 2\|-\vec{v}\|$.

2. $3\|\vec{u}\| + 2\|\vec{v}\| = 4\sqrt{5}$, $\|3\vec{u} + 2\vec{v}\| = 2\sqrt{5}$,
 $\|3\vec{u} - 2\vec{v}\| = 4\sqrt{5}$.

À noter : $\|3\vec{u} + 2\vec{v}\| \neq 3\|\vec{u}\| + 2\|\vec{v}\|$,
 $\|3\vec{u} - 2\vec{v}\| = 3\|\vec{u}\| + 2\|-\vec{v}\|$.

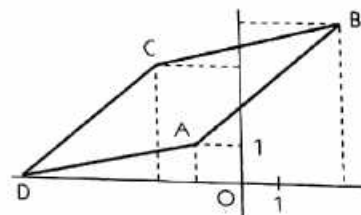
3. Soit a et b deux nombres réels positifs.

• Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, par exemple $\vec{u} = \vec{0}$,
 alors : $a\vec{u} + b\vec{v} = \|b\vec{v}\| = b\|\vec{v}\| = a\|\vec{u}\| + b\|\vec{v}\|$.

• Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$
 alors : $a\vec{u} + b\vec{v} = a\|\vec{u}\| + b\|\vec{v}\| \Leftrightarrow ab\vec{u} \cdot \vec{v} = ab\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
 $\Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$
 $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

(C'est le cas pour les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$ de la question 2.)

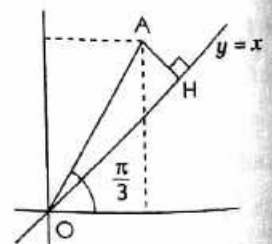
♦ Exercice n° 30 p. 76



Après avoir déterminé les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BD}$, on constate que : $AB = BC = CD = DA = \frac{\sqrt{85}}{2}$;
 donc ABCD est un losange.

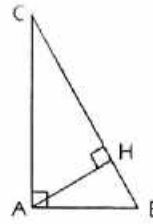
$$\begin{aligned} \text{De plus : } \cos \widehat{ABC} &= \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{BA \times BC} = \frac{\|\vec{BA} + \vec{BC}\|^2 - \|\vec{BA}\|^2 - \|\vec{BC}\|^2}{2BA \times BC} \\ &= \frac{BD^2 - BA^2 - BC^2}{2BA \times BC} = \frac{15}{17} ; \end{aligned}$$

donc : $\widehat{ABC} = 28,07^\circ$ et $\widehat{BAD} = 180^\circ - 28,07^\circ = 151,93^\circ$.



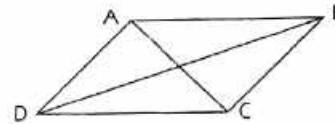
♦ Exercice n° 32 p. 77

$$\begin{aligned} AB^2 &= BH \times BC, AC^2 = CH \times CB, AH^2 = -HC \times HB, \\ \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} &= \frac{1}{BH \times BC} + \frac{1}{CH \times CB} \\ &= \frac{1}{CB} \left(\frac{1}{CH} + \frac{1}{HB} \right) \\ &= -\frac{1}{HC \times HB} = \frac{1}{AH^2}. \end{aligned}$$

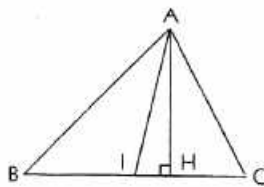


♦ Exercice n° 33 p. 77

- $AC^2 + DB^2 = (\vec{AB} + \vec{AD})^2 + (\vec{AB} - \vec{AD})^2 = 2(AB^2 + AD^2).$
- Si $AB = 4$, $AD = 2$ et $BD = 5$, alors :
 $AC^2 = 2(AB^2 + AD^2) - DB^2 = 15$; $AC = \sqrt{15}.$
 $\cos \widehat{BAD} = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \times AD} = -\frac{5}{16}$ et $\widehat{BAD} = 108,2^\circ$;
 $\cos \widehat{DAC} = \frac{AC^2 + AD^2 - DC^2}{2AC \times AD} = \frac{3}{4\sqrt{15}}$ et $\widehat{DAC} = 78,8^\circ.$

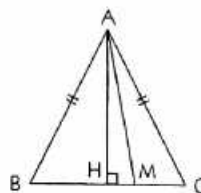


♦ Exercice n° 34 p. 77



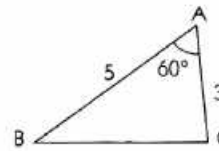
- $AC^2 - AB^2 = (\vec{AC} + \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = 2\vec{AI} \cdot \vec{BC}.$
- $\vec{AI} \cdot \vec{BC} = \vec{HI} \times \vec{BC} = -\vec{BC} \times \vec{IH} ;$
donc : $AC^2 - AB^2 = -2\vec{BC} \times \vec{IH}.$

♦ Exercice n° 35 p. 77



$$\begin{aligned} AM^2 - AB^2 &= (\vec{AM} + \vec{AB}) \cdot (\vec{AM} - \vec{AB}) \\ &= (\vec{AM} + \vec{AB}) \cdot \vec{BM} \\ &= \vec{HM} \times \vec{BM} + \vec{HB} \times \vec{BM} \\ &= (\vec{HM} + \vec{CH}) \cdot \vec{BM} \\ &= \vec{CM} \times \vec{BM} \\ &= \vec{MB} \times \vec{MC}. \end{aligned}$$

♦ Exercice n° 36 p. 77



$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{19}. \end{aligned}$$

$$\frac{CA}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB \times BC \times CA}{2S} = 2R ;$$

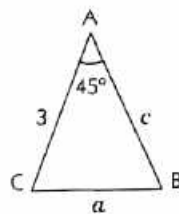
$$\text{donc : } R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{\sqrt{57}}{3} ;$$

$$S = \frac{AB \times BC \times CA}{4R} = \frac{15\sqrt{3}}{4} ;$$

$$\sin \widehat{B} = \frac{CA}{2R} = \frac{3\sqrt{57}}{38} \Rightarrow \widehat{B} = 36,6^\circ ;$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 83,4^\circ.$$

♦ Exercice n° 37 p. 77



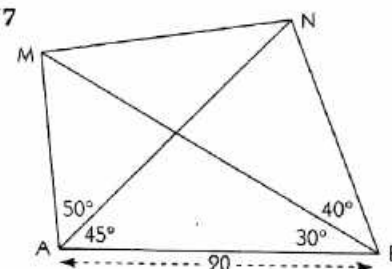
$$A = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A} \Rightarrow c = \frac{2A}{3 \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2} ;$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A} \Rightarrow a = \sqrt{5} ;$$

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin \widehat{B}} &= \frac{a}{\sin \widehat{A}} \Rightarrow \sin \widehat{B} = \frac{b}{a} \sin \widehat{A} = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \\ &\Rightarrow \widehat{B} = 71,6^\circ ; \end{aligned}$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - 45^\circ - 71,6^\circ = 63,4^\circ.$$

♦ Exercice n° 38 p. 77



a) Dans AMB, on a : $\widehat{AMB} = 180^\circ - (50^\circ + 45^\circ + 30^\circ) = 55^\circ ;$

$$AM = AB \frac{\sin \widehat{ABM}}{\sin \widehat{AMB}} = 20 \frac{\sin 30^\circ}{\sin 55^\circ} = 12,2.$$

b) Dans ANB on a : $\widehat{ANB} = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ + 40^\circ) = 65^\circ ;$

$$AN = AB \frac{\sin 70^\circ}{\sin 65^\circ} = 20,7.$$

c) Dans AMN, on a :

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \times AN \cos \widehat{MAN} ; \text{ donc : } MN = 15,9.$$

Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n° 39 p. 77

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires $\Rightarrow (\vec{u}, \vec{v})$ est base du plan.

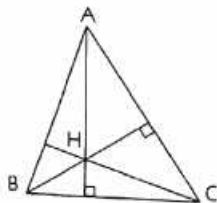
$$1. \vec{w} \text{ colinéaire à } \vec{u} \text{ et à } \vec{v} \Rightarrow \vec{w} = \lambda \vec{u} = \mu \vec{v} \\ \Rightarrow \lambda \vec{u} - \mu \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0 \Rightarrow \vec{w} = \vec{0}.$$

$$2. \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \text{ orthogonal à } \vec{u} \text{ et à } \vec{v} \\ \Rightarrow \vec{w}^2 = \vec{w} \cdot (x\vec{u} + y\vec{v}) = x\vec{w} \cdot \vec{u} + y\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \\ \Rightarrow \vec{w} = \vec{0}.$$

◆ Exercice n° 40 p. 77

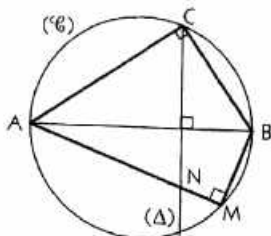
$$1. \vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} = \vec{MA} \cdot \vec{BC} + (\vec{MA} + \vec{AB}) \cdot \vec{CA} + (\vec{MA} + \vec{AC}) \cdot \vec{AB} \\ = \vec{MA} \cdot (\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}) + \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 0.$$

2.



Si H est le point d'intersection des hauteurs issues de A et de B, alors :
 $\vec{HA} \cdot \vec{BC} = \vec{HB} \cdot \vec{CA} = 0$; or (d'après 1) : $\vec{HA} \cdot \vec{BC} + \vec{HB} \cdot \vec{CA} + \vec{HC} \cdot \vec{AB} = 0$;
 donc : $\vec{HC} \cdot \vec{AB} = 0$ et H appartient à la troisième hauteur.

◆ Exercice n° 41 p. 77



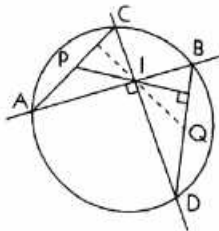
1. $\vec{AM} \times \vec{AN} = \vec{AB} \cdot \vec{AN}$, car M est le projeté orth. de B sur (AM) ;
 $\vec{AB} \cdot \vec{AN} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$, car N et C ont le même projeté orth. sur (AB) ;
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AC^2$, car C est le projeté orthogonal de B sur (AC) ;
 donc : $\vec{AM} \times \vec{AN} = AC^2$.

2. Si M et N sont tels que $\vec{AM} \times \vec{AN} = AC^2$ [N appartenant à (AM) et à la perpendiculaire (Delta) à (AB) en C alors M n'appartient pas à la tangente en A à (C)] [puisque cette tangente est parallèle à (Delta)].

Soit M' le point d'intersection de (AM) et de (C) ; d'après 1, $\vec{AM'} \times \vec{AN} = AC^2$; donc : $\vec{AM'} = \vec{AN}$, M' = M et M ∈ (C).

◆ Exercice n° 43 p. 77

• Soit P le milieu de [AC].



$$\vec{IP} \cdot \vec{BD} = \frac{1}{2}(\vec{IA} + \vec{IC}) \cdot (\vec{BI} + \vec{ID}) ;$$

$$\text{or : } \vec{IC} \cdot \vec{BI} = \vec{IA} \cdot \vec{ID} = 0 \text{ [puisque (AB) } \perp \text{ (CD)] ;}$$

$$\text{donc : } \vec{IP} \cdot \vec{BD} = \frac{1}{2}(\vec{IC} \cdot \vec{ID} - \vec{IA} \cdot \vec{IB}) = 0 \text{ (cf. exercice n°42) ;}$$

La médiane issue de I de AIC est la hauteur issue de I de BID.

• La médiatrice de [BC] est un axe de symétrie de la figure. D'où la médiane issue de I de BID est la hauteur issue de I de AIC.

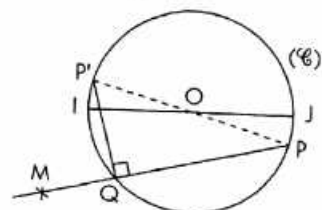
3. Application ABC est un triangle.

Si M est tel que $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$ et $\vec{AM} \cdot \vec{CM} = 0$, alors :

• ou M ∉ (BC), $\vec{BM}$ et $\vec{CM}$ sont non colinéaires, $\vec{AM} = \vec{0}$ (d'après 2) ;

• ou M ∈ (BC), M est le pied de la hauteur issue de A.

◆ Exercice n° 42 p. 77



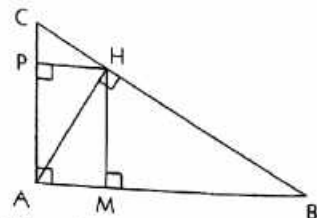
$$1. \vec{MI} \cdot \vec{MJ} = (\vec{MO} + \vec{OI}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OJ}) \\ = (\vec{MO} + \vec{OI}) \cdot (\vec{MO} - \vec{OI}) \\ = MO^2 - r^2 ;$$

$\vec{MI} \cdot \vec{MJ}$ ne dépend pas du diamètre [IJ] choisi.

2. $\vec{MP} \cdot \vec{MQ} = \vec{MP} \cdot \vec{MP'}$, car Q est le projeté orthogonal de P' sur (MP).

3. $\vec{MP} \cdot \vec{MP'}$ ne dépend pas du diamètre [PP'] choisi (d'après 1), $\vec{MP} \cdot \vec{MQ}$ reste constant lorsque P décrit (C).

◆ Exercice n° 44 p. 77

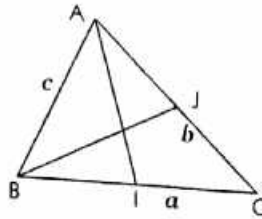


$$BC^2 = (\vec{HC} - \vec{HB})^2 = HC^2 + HB^2 - 2\vec{HB} \cdot \vec{HC} \\ = HC^2 + HB^2 + 2AH^2 ;$$

$$\text{or : } HC^2 = CP^2 + PH^2 \text{ et } HB^2 = BM^2 + HM^2 ;$$

$$\text{d'où : } BC^2 = CP^2 + PH^2 + BM^2 + HM^2 + 2AH^2 \\ = BM^2 + CP^2 + (PH^2 + HM^2) + 2AH^2 \\ = BM^2 + CP^2 + 3AH^2.$$

♦ Exercice n° 45 p. 77



$$\begin{aligned}\vec{AI} \cdot \vec{BJ} &= (\vec{AB} + \vec{BI}) \cdot (\vec{BC} + \vec{CJ}) \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AB} \cdot \vec{CJ} + \vec{BI} \cdot \vec{BC} + \vec{BI} \cdot \vec{CJ} \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \frac{1}{2} \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \frac{1}{2} \vec{BC}^2 + \frac{1}{4} \vec{BC} \cdot \vec{CA} \\ &= -\vec{BA} \cdot \vec{BC} - \frac{1}{2} \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{BC}^2 + \frac{1}{4} \vec{CA} \cdot \vec{CB} \\ &= -\frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) - \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{a^2}{2} + \frac{1}{8}(a^2 + b^2 - c^2) \\ &= \frac{1}{8}(a^2 + b^2 - 5c^2).\end{aligned}$$

Donc : $\vec{AI} \perp \vec{BJ} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5c^2$.

♦ Exercice n° 47 p. 77

$$\begin{aligned}1. \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} &= 3\vec{OG} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} \\ &= 3\vec{OG};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} &= (\vec{OH} + \vec{HA}) + (\vec{OA}' + \vec{A'B}) + (\vec{OA}' + \vec{A'C}) \\ &= \vec{OH} + \vec{HA} + 2\vec{OA}';\end{aligned}$$

donc : $3\vec{OG} - \vec{OH} = \vec{HA} + 2\vec{OA}'$.

Les vecteurs $\vec{HA}$ et $\vec{OA}'$ étant orthogonaux à $\vec{BC}$, leur somme l'est aussi ; c'est-à-dire : $(3\vec{OG} - \vec{OH}) \perp \vec{BC}$.

2. On démontre de même que : $(3\vec{OG} - \vec{OH}) \perp \vec{CA}$.

3. $3\vec{OG} - \vec{OH}$, vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires, est égal au vecteur nul et O, G, H sont alignés.

♦ Exercice n° 48 p. 78

$$1. AB^2 - AC^2 = (\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AB} - \vec{AC}) = 2\vec{AA'} \cdot \vec{CB} \quad (1);$$

$$\begin{aligned}AB^2 - AC^2 &= (\vec{AB} - \vec{AC}) \cdot (\vec{AB} + \vec{AC}) = \vec{CB} \cdot (\vec{AB} + \vec{AC}) \\ &= \vec{BC} \cdot (\vec{BA} + \vec{CA}) = \vec{BC} \cdot \vec{BA} - \vec{CB} \cdot \vec{CA} \quad (2).\end{aligned}$$

2. ABC isocèle en A $\Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = 0$;

d'après (1) : ABC isocèle en A $\Leftrightarrow A'$ est le projeté orthogonal de A sur (BC) ;

d'après (2) : ABC isocèle en A $\Leftrightarrow \vec{BC} \cdot \vec{BA} = \vec{CB} \cdot \vec{CA}$.

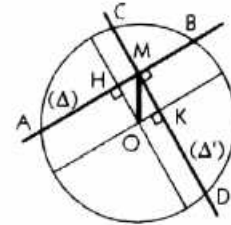
♦ Exercice n° 49 p. 78

$$1. \text{mes } \widehat{CAE} = \frac{\pi}{2} + \text{mes } \widehat{CAB} = \text{mes } \widehat{BAD}.$$

$$2. \vec{AC} \cdot \vec{AE} = AC \times AE \cos \widehat{CAE} = AD \times AB \cos \widehat{BAD} = \vec{AD} \cdot \vec{AB}.$$

$$\begin{aligned}3. \vec{AM} \cdot \vec{ED} &= \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AD} - \vec{AE}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AB} \cdot \vec{AE} + \vec{AC} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AE}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AE}) = 0.\end{aligned}$$

♦ Exercice n° 46 p. 77



1. (OK) et (OH) sont les médiatrices de [CD] et de [AB].
Donc : HOKM est un rectangle et $OK^2 + OH^2 = OM^2 = d^2$.

2. Dans AOB, on a : $OA^2 + OB^2 = 2OH^2 + \frac{1}{2}AB^2$;

dans COD, on a : $OC^2 + OD^2 = 2OK^2 + \frac{1}{2}CD^2$;

en additionnant membre à membre, on obtient :

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2(OH^2 + OK^2) + \frac{1}{2}(AB^2 + CD^2) ;$$

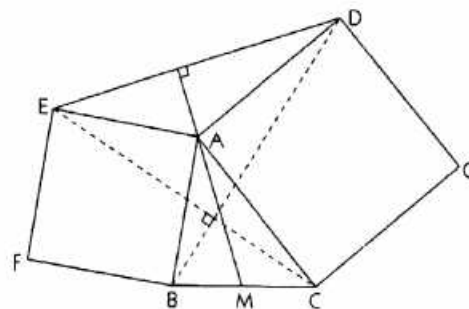
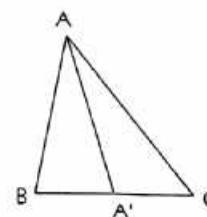
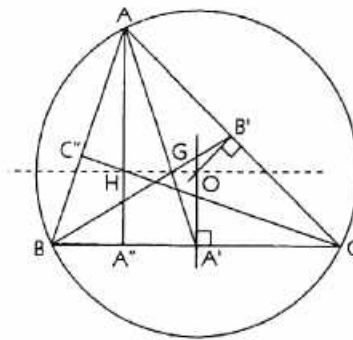
c'est-à-dire : $AB^2 + CD^2 = 8R^2 - 4d^2$.

$$3. MA^2 + MB^2 = (\vec{MH} + \vec{HA})^2 + (\vec{MH} - \vec{HA})^2$$

$$MA^2 + MB^2 = 2MH^2 + 2HA^2 = 2MH^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$

$$\text{De même : } MC^2 + MD^2 = 2MK^2 + 2KC^2 = 2MK^2 + \frac{1}{2}CD^2.$$

$$\text{D'où : } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2d^2 + \frac{1}{2}(8R^2 - 4d^2) = 4R^2.$$



[D'après 2 et puisque $\vec{AB} \perp \vec{AE}$ et $\vec{AC} \perp \vec{AD}$.]

La médiane $[AM]$ du triangle ABC est donc la hauteur issue de A du triangle AED .

4. $\widehat{DAE} + \widehat{BAC} = 2\pi - \widehat{EAB} - \widehat{CAD} = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$; donc $\widehat{DAE}$ et $\widehat{BAC}$ sont supplémentaires.

5. $\cos \widehat{DAE} = -\cos \widehat{BAC} \Rightarrow \vec{AD} \cdot \vec{AE} = AD \times AE \cos \widehat{DAE} = -AC \times AB \cos \widehat{BAC} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

6. $\vec{CE} \cdot \vec{BD} = (\vec{CA} + \vec{AE}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AD}) = (\vec{AB} \cdot \vec{AC} - \vec{AC} \cdot \vec{AD} - \vec{AE} \cdot \vec{AB} + \vec{AE} \cdot \vec{AD}) = 0$.

[D'après 5 et puisque $\vec{AC} \perp \vec{AD}$ et $\vec{AE} \perp \vec{AB}$.]

♦ Exercice n° 50 p. 78

1. $(\vec{AB} + \vec{CD}) \cdot (\vec{AD} + \vec{CB}) = (\vec{AB} + \vec{BE}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DE}) = \vec{AE} \cdot \vec{AE} = AE^2$.

$$\begin{aligned} 2. AC^2 + BD^2 &= (\vec{AB} + \vec{BC})^2 + (\vec{BA} + \vec{AD})^2 \\ &= AB^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + BC^2 + BA^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AD} + AD^2 \\ &= 2AB^2 + AD^2 + BC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} - 2\vec{BC} \cdot \vec{BA} \quad (1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même : } AC^2 + BD^2 &= (\vec{AD} + \vec{DC})^2 + (\vec{BC} + \vec{CD})^2 \\ &= 2CD^2 + CB^2 + AD^2 - 2\vec{CB} \cdot \vec{CD} - 2\vec{DC} \cdot \vec{DA} \quad (2). \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre (1) et (2), on obtient :

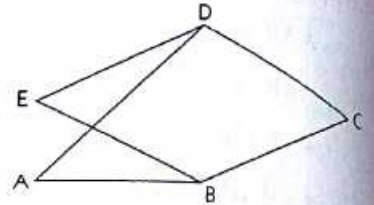
$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{BC} \cdot \vec{BA} - \vec{CB} \cdot \vec{CD} - \vec{DC} \cdot \vec{DA}.$$

3. La relation précédente peut s'écrire : $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 - (\vec{AB} + \vec{CD}) \cdot (\vec{AD} + \vec{CB})$;
c'est-à-dire (d'après 1) : $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 - AE^2$

$$\text{donc : } AC^2 + BD^2 \leq AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

4. $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 \Leftrightarrow AE^2 = 0 \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme.

Théorème : La somme des carrés des longueurs des quatre côtés d'un quadrilatère est supérieure ou égale à la somme des carrés des longueurs des deux diagonales ; il y a égalité lorsque ce quadrilatère est un parallélogramme.



♦ Exercice n° 51 p. 78

1. $\vec{AB} \cdot \vec{AI} = \vec{AB} \cdot \vec{AC''}$, car C'' est le projeté orthogonal de I sur (AB)
 $= \vec{AB} \cdot \vec{AC'}$, car C' est le projeté orthogonal de C' sur (AB)
 $= \vec{AB'} \cdot \vec{AC'}$, car B' est le projeté orthogonal de B sur (AC') .

2. $\vec{AC} \cdot \vec{AI} = \vec{AC} \cdot \vec{AB''}$, car B'' est le projeté orthogonal de I sur (AC)
 $= \vec{AC} \cdot \vec{AB'}$, car B' est le projeté orthogonal de B' sur (AB)
 $= \vec{AC'} \cdot \vec{AB'}$, car C' est le projeté orthogonal de C sur (AB') .

On en déduit que : $\vec{AB} \cdot \vec{AI} = \vec{AC} \cdot \vec{AI} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AI} - \vec{AC} \cdot \vec{AI} = 0 \Rightarrow \vec{CB} \cdot \vec{AI} = 0$. C'est-à-dire : $(AI) \perp (BC)$.

♦ Exercice n° 52 p. 78

1. Soit $\vec{i} = \frac{1}{c}\vec{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{b}\vec{AC}$.

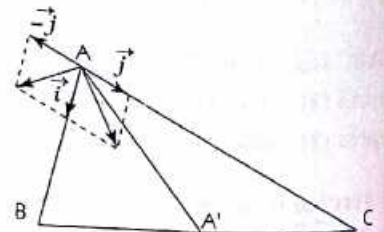
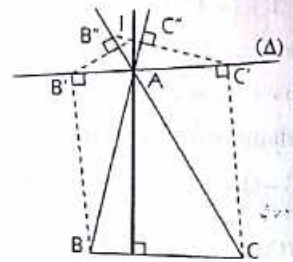
• $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs directeurs unitaires de (AB) et (AC) ;
donc $\vec{i} + \vec{j}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de $\widehat{A}$.

• $(\vec{i} - \vec{j}) \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i}^2 - \vec{j}^2 = 0 \Rightarrow (\vec{i} - \vec{j}) \perp (\vec{i} + \vec{j})$.

Donc, M appartient à la bissectrice de $\widehat{A} \Leftrightarrow \vec{AM} \perp (\vec{i} - \vec{j})$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \left(\frac{1}{c}\vec{AB} - \frac{1}{b}\vec{AC} \right) = 0.$$

$$\begin{aligned} 2. A' \text{ est sur la bissectrice de } \widehat{A} &\Leftrightarrow \vec{AA'} \cdot \left(\frac{1}{c}\vec{AB} - \frac{1}{b}\vec{AC} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \left(\frac{1}{c}\vec{AB} - \frac{1}{b}\vec{AC} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{AB^2}{c} - \frac{AC^2}{b} + \frac{b-c}{bc} \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow c - b + (b-c) \cos \widehat{A} = 0 \\ &\Leftrightarrow (c-b)(1 - \cos \widehat{A}) = 0 \Leftrightarrow b = c \text{ (car } \cos \widehat{A} \neq 1). \end{aligned}$$



♦ Exercice n°53 p.78

$$1. \cos \widehat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sin^2 \widehat{A} &= 1 - \cos^2 \widehat{A} = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} \\ &= \frac{(2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2)}{4b^2c^2} \\ &= \frac{[a^2 - (b-c)^2][(b+c)^2 - a^2]}{4b^2c^2} \\ &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4b^2c^2} \end{aligned}$$

Or : $a - b + c = 2(p - b)$; $a + b - c = 2(p - c)$; $b + c - a = 2(p - a)$; $b + c + a = 2p$;

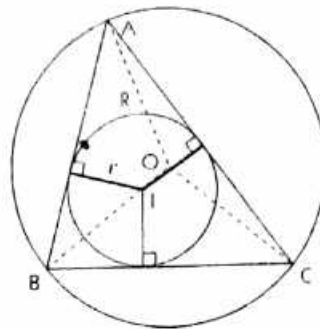
donc : $\sin^2 \widehat{A} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)p}{b^2c^2}$

$$2. \sin \widehat{A} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc} \text{ et } S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A} \Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\begin{aligned} 3. a) S &= \mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(IAB) + \mathcal{A}(IBC) + \mathcal{A}(IAC) \\ &= \frac{1}{2} \times r \times AB + \frac{1}{2} \times r \times BC + \frac{1}{2} \times r \times AC = \frac{1}{2} r (a + b + c) = pr. \end{aligned}$$

$$b) r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$c) R = \frac{a}{2\sin \widehat{A}} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$



5. Droites et cercles dans le plan

(pages 79 à 96 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- introduire la notion de représentation paramétrique d'une droite ;
- introduire la notion d'équation cartésienne d'un cercle.

COMMENTAIRES

Les équations cartésiennes de droites sont connues depuis le premier cycle. Elles sont mentionnées ici comme un procédé qui permet de lier les coordonnées des points d'une droite.

Les représentations paramétriques de droites seront un second procédé de lier les coordonnées des points d'une droite.

On ne perdra pas de vue que l'aspect géométrique d'une situation peut quelquefois permettre de simplifier la tâche en réduisant l'ampleur des calculs à effectuer.

Droites

- Vecteur normal à une droite.
- Représentations paramétriques d'une droite.

Cercles

- Équation cartésienne d'un cercle.

- Utiliser des vecteurs normaux de deux droites pour justifier leur parallélisme ou leur perpendicularité.
- Écrire une représentation paramétrique d'une droite définie par :
 - deux points,
 - un point et un vecteur directeur,
 - un point et un vecteur normal,
 - un point et son coefficient directeur,
 - une équation cartésienne.
- Une droite étant définie par une représentation paramétrique :
 - trouver une équation cartésienne de la droite,
 - justifier qu'un point appartient ou non à la droite,
 - calculer les coordonnées du point d'intersection avec une autre droite.
- Écrire une équation cartésienne d'un cercle défini par son centre et son rayon.
- Écrire une équation cartésienne d'un cercle défini par un diamètre.
- Déterminer si une équation caractérise un cercle et, dans ce cas, déterminer son centre et son rayon.
- S'il en existe, déterminer les coordonnées des points d'intersection d'une droite et d'un cercle.

EXERCICES DU MANUEL

 Exercices du cours

♦ **Exercice n° 1.a p. 88**

Équations cartésiennes

1. $-4x + 3y - 7 = 0$

2. $2x - y + 4 = 0$

3. $y = 4$

4. $x = -3$

5. $3x + 2y - 1 = 0$

Représentations paramétriques

$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 5 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 4 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

$\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

$\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

♦ **Exercice n° 1.b p. 88**

$A_1 \notin (\mathcal{D}), A_2 \in (\mathcal{D}),$
 $A_3 \in (\mathcal{D}), A_4 \notin (\mathcal{D}),$
 $A_5 \in (\mathcal{D}), A_6 \in (\mathcal{D}),$
 $A_7 \in (\mathcal{D}), A_8 \notin (\mathcal{D}).$

♦ **Exercice n° 1.c p.88**

Les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes en $A\left(\frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right).$

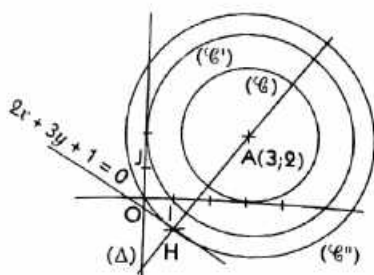
♦ **Exercice n° 2.a p. 91**

1. Équation du cercle de centre A et de rayon 3 : $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0.$
2. Équation du cercle de centre B passant par A : le rayon de ce cercle est $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$; donc, $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0.$
3. Équation du cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$: $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 7x - 2y + 7 = 0.$

♦ **Exercice n° 2.b p. 91**

1. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16.$ Cet ensemble est le cercle de centre $A\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ et de rayon 4.
2. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 15 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = -2.$ Cet ensemble est l'ensemble vide.
3. $x^2 + y^2 - 2x\sqrt{2} + 2y\sqrt{3} + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 0.$ Cet ensemble est réduit au point $M\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \end{smallmatrix}\right).$

♦ Exercice n° 2.c p. 91



- a) Le cercle, de centre A et tangent à l'axe des abscisses, est le cercle de centre A et de rayon 2 ; son équation est : $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$.
 b) Le cercle, de centre A et tangent à l'axe des ordonnées, est le cercle de centre A et de rayon 3 ; son équation est : $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$.
 c) Le cercle, de centre A et tangent à la droite (D) d'équation $2x + 3y + 1 = 0$, coupe (D) en H, point d'intersection de (D) et de la droite (Δ) qui passe par A et est perpendiculaire à (D).

Or $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, vecteur directeur de (D), est un vecteur normal à (Δ) ; une équation de (Δ) est : $-3(x - 3) + 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow -3x + 2y + 5 = 0$.

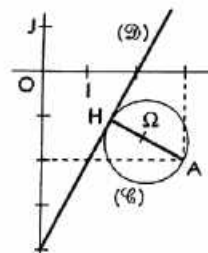
Le système $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ -3x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$

a pour solution $(1; -1)$. Donc $H\left(\frac{1}{-1}\right)$ et le rayon du cercle cherché est $AH = \sqrt{13}$; son équation est : $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$.

♦ Exercice n° 2.d p. 91

1. La droite (Δ), qui passe par A et est perpendiculaire à (D), a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = t - 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$; leur point d'intersection est $H\left(\frac{7}{5}; -\frac{6}{5}\right)$.

Le rayon du cercle cherché est $\frac{1}{2}AH = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; son centre est $\Omega\left(\frac{11}{5}; -\frac{8}{5}\right)$, milieu du segment [AH] ; son équation est : $x^2 + y^2 - \frac{22}{5}x + \frac{16}{5}y + \frac{33}{5} = 0$.



♦ Exercice n° 2.e p. 91

$$\begin{aligned} \vec{MA} \cdot \vec{MB} = -1 &\Leftrightarrow (-1 - x)(4 - x) + (1 - y)(3 - y) = -1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x + y^2 - 4y = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{25}{4} \end{aligned}$$

L'ensemble des points M, tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -1$, est le cercle de centre $I\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ de rayon $\frac{5}{2}$.

♦ Exercice n° 2.f p. 91

$$\begin{aligned} 1. MA^2 + MB^2 = 76 &\Leftrightarrow (-2 - x)^2 + (2 - y)^2 + (4 - x)^2 + (6 - y)^2 = 76 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25. \end{aligned}$$

L'ensemble des points M, tels que $MA^2 + MB^2 = 76$, est le cercle de centre $I(1; 4)$ et de rayon 5.

2. I est le milieu de [AB] ;

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 \\ &= 2MI^2 + 2MI(\vec{IA} + \vec{IB}) + IA^2 + IB^2 \\ &= 2MI^2 + 2IA^2. \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } 2MI^2 + 2IA^2 = 76 \Leftrightarrow MI^2 + IA^2 = 38 \Leftrightarrow MI = 5$$

(car $IA^2 = \frac{AB^2}{4} = 13$) ; on retrouve le résultat obtenu en 1.

Exercices d'apprentissage

ÉQUATIONS CARTÉSIENNES DE DROITES

♦ Exercice n° 1 p. 92

	(D ₁) : $2x - 3y + 5 = 0$	(D ₂) : $3x - 2y + 4 = 0$	(D ₃) : $4x + 3y + 1 = 0$	(D ₄) : $-x - 2y + 8 = 0$
A(0 ; 4)	n'appartient pas	n'appartient pas	n'appartient pas	appartient
B(-4 ; 5)	n'appartient pas	n'appartient pas	appartient	n'appartient pas
C(-1 ; 1)	appartient	n'appartient pas	appartient	n'appartient pas
D(2 ; 5)	n'appartient pas	appartient	n'appartient pas	n'appartient pas
E(-3 ; 7)	n'appartient pas	n'appartient pas	n'appartient pas	n'appartient pas
F(2 ; 3)	appartient	n'appartient pas	n'appartient pas	appartient
G(-4 ; 6)	n'appartient pas	n'appartient pas	n'appartient pas	appartient
H(6 ; 2)	n'appartient pas	n'appartient pas	n'appartient pas	n'appartient pas

♦ Exercice n° 2 p. 92

1. $x - y + 3 = 0$.
2. $x - y - 7 = 0$.
3. $7x - 4y - 25 = 0$.

♦ Exercice n° 3 p. 92

1. $2x - 7y + \frac{11}{3} = 0$.
2. $-5x + 3y + 17 = 0$.
3. $4x - y - 3 = 0$.

♦ Exercice n° 4 p. 92

1. Les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$ ont la même norme : $AC = AB$.
Le vecteur $\vec{AC} + \vec{AB}$ dirige la diagonale issue de A du losange ABDC, c'est-à-dire la bissectrice de $\widehat{BAC}$.
2. • Si $A\left(\begin{smallmatrix} -5 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $B\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $C\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, alors : $\vec{AC}\left(\begin{smallmatrix} 12 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{AB}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, $AC = 13$, $AB = 5$ et $\vec{AC} + \vec{AB} = \vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 99 \\ 77 \end{smallmatrix}\right)$.

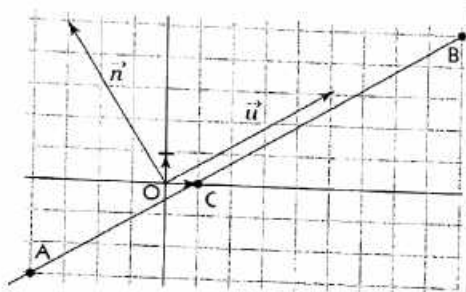
D'après 1 la bissectrice de $\widehat{BAC}$, qui passe par $A\left(\begin{smallmatrix} -5 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et est dirigée par $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} 9 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$, a pour équation : $7x - 9y + 26 = 0$.

- Si $A\left(\begin{smallmatrix} 10 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $B\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$, $C\left(\begin{smallmatrix} -14 \\ 10 \end{smallmatrix}\right)$, alors : $\vec{AC}\left(\begin{smallmatrix} -24 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{AB}\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $AC = 25$, $AB = 5$ et $\vec{AC} + \vec{AB} = \vec{u}\left(\begin{smallmatrix} -220 \\ 110 \end{smallmatrix}\right)$.

La bissectrice de $\widehat{BAC}$, qui passe par $A\left(\begin{smallmatrix} 10 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et est dirigée par $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, a pour équation : $x + 2y - 16 = 0$.

- Si $A\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $C\left(\begin{smallmatrix} -9 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$, la bissectrice de $\widehat{BAC}$ a pour équation : $(26 + 5\sqrt{5})x + (13 + 12\sqrt{5})y - 91 - 27\sqrt{5} = 0$.

♦ Exercice n° 5 p. 92



La figure suggère que : $C \in [AB]$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont respectivement directeur et normal à (AB) .

2. Une équation de (AB) est : $8x - 13y - 7 = 0$.
3. Les coordonnées de C ne vérifiant pas l'équation précédente, le point C n'appartient pas à (AB) ;
de plus, $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} 13 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$, vecteur directeur de (AB) , n'est ni colinéaire à $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$
ni orthogonal à $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$.

Les conjectures faites à la première question ne sont pas vérifiées.

♦ Exercice n° 6 p. 92

$(\mathcal{D})$ est la droite d'équation : $-2x + 3y - 6 = 0$. Cette droite passe par $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

1. L'image de $(\mathcal{D})$ par la translation t de vecteur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ est la droite $(\mathcal{D}')$, parallèle à $(\mathcal{D})$, passant par $t(A) = A'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
L'équation de $(\mathcal{D}')$ est de la forme $-2x + 3y + c = 0$, avec $-2 \times 1 + 3 \times 0 + c = 0$; on obtient : $-2x + 3y + 2 = 0$.
2. L'image de $(\mathcal{D})$ par S_Ω , symétrie de centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$, est la droite $(\mathcal{D}'')$, parallèle à $(\mathcal{D})$, passant par $S_\Omega(A) = A''\left(\begin{smallmatrix} -6 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$.
L'équation de $(\mathcal{D}'')$ est de la forme $-2x + 3y + c = 0$, avec $-2 \times (-6) + 3 \times 8 + c = 0$; on obtient : $-2x + 3y - 36 = 0$.
3. L'image de $(\mathcal{D})$ par la symétrie orthogonale S , d'axe $(O, \vec{t})$, est la droite $(\mathcal{D}''')$, qui passe par $S(A) = A'''\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}'\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$. L'équation de $(\mathcal{D}''')$ est : $2x + 3y + 6 = 0$.

♦ Exercice n° 7 p. 92

Les vecteurs directeurs de $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$, $(\mathcal{D}_3)$, $(\mathcal{D}_4)$, $(\mathcal{D}_5)$ et $(\mathcal{D}_6)$ sont respectivement : $\vec{u}_1\left(\begin{smallmatrix} -6 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{u}_2\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{u}_3\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{u}_4\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{u}_5\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{u}_6\left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$. L'étude de la colinéarité des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$, $\vec{u}_5$ et $\vec{u}_6$ permet de démontrer que :
d'une part $(\mathcal{D}_1) \parallel (\mathcal{D}_3)$ et $(\mathcal{D}_2) \parallel (\mathcal{D}_6)$; d'autre part les droites $(\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{D}_2)$, $(\mathcal{D}_4)$ et $(\mathcal{D}_5)$ sont sécantes deux à deux.

♦ Exercice n° 8 p. 92

1. $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont perpendiculaires.
2. $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont pas perpendiculaires.
3. $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont pas perpendiculaires.
4. $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont pas perpendiculaires.

♦ Exercice n° 9 p. 92

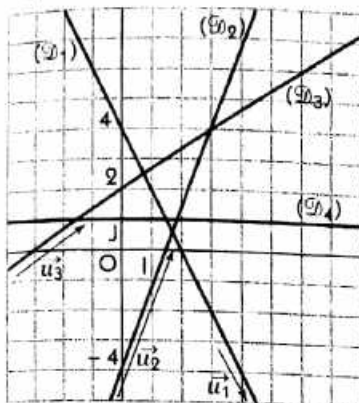
1. $y = 6x + 9$.
2. $x - \sqrt{3}y - 5\sqrt{3} = 0$.

♦ Exercice n° 10 p. 92

1. $(y - y_A) = m(x - x_A)$.
2. Pour $m = 2$ et $A(1 ; 3)$, $y = 2x + 1$; pour $m = -1$ et $A(-2 ; 3)$, $y = -x + 1$.

♦ Exercice n° 11 p. 92

1. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ dirige $(\mathcal{D}) : y = ax + b$, alors $a = \frac{\beta}{\alpha}$ puisque $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ sont colinéaires.



2. $(\mathcal{D}_1)$ passe par le point $A_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; son équation réduite est donc : $y = -2x + 4$.

$(\mathcal{D}_2)$ passe par le point $A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; son équation réduite est donc : $y = \frac{5}{2}x - 4$.

$(\mathcal{D}_3)$ passe par le point $A_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; son équation réduite est donc : $y = \frac{2}{3}x + 2$.

L'équation réduite de $(\mathcal{D}_4)$ est : $y = 1$.

♦ Exercice n° 12 p. 93

1. Les vecteurs directeurs unitaires de la première bissectrice sont $\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{u} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{u}$ étant tel que : $\vec{i} \cdot \vec{u} > 0$.
2. Comme dans l'exercice 4, on démontre que $\vec{u}' = \vec{i} + \vec{u}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de $\widehat{IOA}$.
3. Or, $\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et $\text{Mes}(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \frac{\pi}{4}$. Donc : $\text{Mes}(\widehat{\vec{i}, \vec{u}'}) = \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$.

♦ Exercice n° 13 p. 93

1. $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes en $A \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
2. $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes en $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes en $A \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes en $A \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES DE DROITES

♦ Exercice n° 14 p. 93

1. $(\mathcal{D})$ a pour vecteur directeur $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = 3 + 2k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.
2. $(\mathcal{D})$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 + 4k \\ y = -1 + k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.
3. $(\mathcal{D})$ a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 5 + k \\ y = -2 + 2k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice n° 15 p. 93

1. $(\mathcal{D})$ a pour vecteur directeur $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 4 - k \\ y = 1 + 5k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.
2. $(\mathcal{D})$, qui passe par $I \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ milieu de $[BC]$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ($\vec{BC} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ étant normal à $(\mathcal{D})$), a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 3k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice n° 16 p. 93

1. $(\mathcal{D})$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = 1 - 4k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.
2. $(\mathcal{D})$ a pour vecteur directeur $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = 1 - 2k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.
3. $(\mathcal{D})$, qui passe par $A \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -5 + 2k \\ y = k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice n° 17 p. 93

1. $(\mathcal{D})$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -1 + k \\ y = 3 - k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$
2. $(\mathcal{D})$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 - k \\ y = 4 - k\sqrt{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$

♦ Exercice n° 18 p. 93

1. $A \in (\mathcal{D})$; $C \in (\mathcal{D})$; $B \notin (\mathcal{D})$. 2. $x = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$; donc $E\begin{pmatrix} 0 \\ -5/3 \end{pmatrix} \in (\mathcal{D})$. $y = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$; donc $F\begin{pmatrix} -5/4 \\ 0 \end{pmatrix} \in (\mathcal{D})$.
3. Une équation cartésienne de $(\mathcal{D})$ est : $4x + 3y + 5 = 0$.

♦ Exercice n° 19 p. 93

$(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ont pour vecteurs directeurs respectifs : $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ m \end{pmatrix}$.

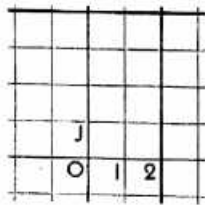
1. $(\mathcal{D}) // (\mathcal{D}') \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$.
2. On suppose $m = \frac{4}{3}$; $A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in (\mathcal{D})$.

$$(\mathcal{D}) = (\mathcal{D}') \Leftrightarrow A \in (\mathcal{D}') \Leftrightarrow b = -3.$$

♦ Exercice n° 20 p. 93

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\text{Mes}(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = -\frac{\pi}{4}$. 2. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\text{Mes}(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \frac{\pi}{4}$.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ et $\text{Mes}(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = -\frac{\pi}{6}$. 4. $\vec{u}\begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$ et $\text{Mes}(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) \approx -0,92$.

♦ Exercice n° 21 p. 94



1. $(\mathcal{D})$ a un vecteur directeur d'ordonnée nulle ; donc $(\mathcal{D})$ est la droite parallèle à (OI) passant par le point de coordonnées $(0 ; 4)$.
2. $(\mathcal{D}')$ est l'ensemble des points d'abscisse 2 ; donc $(\mathcal{D}')$ est la droite parallèle à (OI) passant par le point de coordonnées $(2 ; 0)$.

♦ Exercice n° 23 p. 94

On désigne par $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des vecteurs directeurs respectifs des droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux ; donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes et perpendiculaires.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ; donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont parallèles et disjointes.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont ni colinéaires, ni orthogonaux ; donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes et non perpendiculaires.
4. $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux ; donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes et perpendiculaires.

♦ Exercice n° 24 p. 94

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, vecteurs directeurs de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$, sont non colinéaires ; donc $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes.

$$\begin{cases} 2 + 3\lambda = 1 - \mu \\ 1 - 4\lambda = 3 + 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = -1 \end{cases} ;$$

donc, $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes en $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

♦ Exercice n° 22 p. 94

Soit (Δ) la bissectrice de $\widehat{BAC}$; $\vec{u} = AC \vec{AB} + AB \vec{AC}$ est un vecteur directeur de (Δ) (cf. ex n°4 p. 92).

1. $\vec{AB}\begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = 13, AC = 5, \vec{u}\begin{pmatrix} -21 \\ 77 \end{pmatrix}$;
 (Δ) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 - 3k \\ y = -1 + 7k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$
2. $\vec{AB}\begin{pmatrix} -24 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = 25, AC = 5, \vec{u}\begin{pmatrix} -220 \\ 110 \end{pmatrix}$;
 (Δ) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 17 - 2k \\ y = 3 + k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$
3. $\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = AC = \sqrt{5}, \vec{u}\begin{pmatrix} 3\sqrt{5} \\ 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$;
 (Δ) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 + k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$

♦ Exercice n° 25 p. 94

1. Soit $M \in (\mathcal{D}')$;
 $M = O \Leftrightarrow M \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \vec{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires.
2. $A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un point de $(\mathcal{D})$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$.

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} 1-t \\ 3+2t \end{pmatrix} \in (\mathcal{D}) &\Leftrightarrow \det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0 \\ &\Leftrightarrow -4(3-t) - 3(2+2t) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = -9. \end{aligned}$$

Le point d'intersection de $(\mathcal{D})$ et de $(\mathcal{D}')$ est $M_0\begin{pmatrix} 10 \\ -15 \end{pmatrix}$.

♦ Exercice n° 26 p. 94

1. 2 est solution de $\begin{cases} 2 - 3t = -4 \\ 3 + 2t = 7 \end{cases} \Rightarrow A \in (\mathcal{D}_1) ;$
 $-3 \times (-4) + 2 \times 7 \neq 0 \Rightarrow A \notin (\mathcal{D}_2).$
2. $\vec{u}_1\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, vecteurs directeurs de $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$, sont orthogonaux ; donc : $(\mathcal{D}_1) \perp (\mathcal{D}_2)$.
3. $-3(2 - 3t) + 2(3 + 2t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$;
donc $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont sécantes en $I\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

ÉQUATIONS CARTÉSIENNES DE CERCLES

◆ Exercice n° 27 p. 94

$$\vec{AB}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \vec{BC}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \vec{CD}\left(0, -1\right), \vec{DE}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \vec{EF}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ et } \vec{FA}\left(0, 1\right).$$

Donc : $AB = BC = CD = DE = EF = FA = 1$.

De plus, les côtés opposés sont parallèles deux à deux ; donc ABCDEF est un hexagone régulier convexe.

◆ Exercice n° 28 p. 94

$$1. M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow OM^2 = 25 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

$$2. M \in (\mathcal{C}') \Leftrightarrow AM^2 = 9 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0.$$

◆ Exercice n° 29 p. 94

$$1. AB = 5 ; \text{ donc } M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow AM^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0.$$

$$2. A \text{ milieu de } [BC] \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_C + 1}{2} = -2 \\ \frac{y_C + 5}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow C\left(-5, -3\right).$$

◆ Exercice n° 30 p. 94

$$\bullet M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \vec{MB} \cdot \vec{MC} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 3y - 15 = 0.$$

$$\bullet \text{ Le centre de } (\mathcal{C}) \text{ est } I\left(-2 ; \frac{3}{2}\right), \text{ le rayon de } (\mathcal{C}) \text{ est } \frac{\sqrt{85}}{2}.$$

◆ Exercice n° 31 p. 94

$$1. M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 7x - y = 0.$$

$$2. O \in (\mathcal{C}), C \in (\mathcal{C}), D \notin (\mathcal{C}).$$

◆ Exercice n° 32 p. 94

$$1. (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16 ; \\ \text{donc } (\mathcal{C}) \text{ est le cercle de centre } I(2 ; -3) \text{ et de rayon } 4.$$

$$2. (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0 ; \text{ donc } (\mathcal{C}) = \{I\left(\frac{2}{-3}\right)\} ;$$

$$3. (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{2} ; \\ \text{donc } (\mathcal{C}) \text{ est le cercle de centre } I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ et de rayon } \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

$$4. (x - 1)^2 + y^2 = \frac{2}{3} ; \\ \text{donc } (\mathcal{C}) \text{ est le cercle de centre } I\left(1, 0\right) \text{ et de rayon } \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$5. (x + \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = 16 ; \text{ donc } \\ (\mathcal{C}) \text{ est le cercle de centre } I\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \text{ et de rayon } \sqrt{\frac{13}{2}}.$$

$$6. (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2} ; \\ \text{donc } (\mathcal{C}) \text{ est le cercle de centre } I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ et de rayon } \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$7. (x + k)^2 + (y + k)^2 = k^2 ; \\ \text{donc } (\mathcal{C}) \text{ est le cercle de centre } I\left(\frac{k}{k}, \frac{k}{k}\right) \text{ et de rayon } |k|.$$

$$8. (x - k)^2 + (y - 2k)^2 = k^2 - 1 ; \text{ donc } \\ \bullet \text{ si } k < -1 \text{ ou } k > 1, \text{ alors } (\mathcal{C}) \text{ est le cercle de centre } I\left(\frac{k}{2k}, \frac{k}{2k}\right) \\ \text{et de rayon } \sqrt{k^2 - 1} ;$$

$$\bullet \text{ si } k = -1 \text{ ou } k = 1, \text{ alors } (\mathcal{C}) \text{ est réduit au point } I\left(\frac{k}{2k}, \frac{k}{2k}\right) ;$$

$$\bullet \text{ si } -1 < k < 1, (\mathcal{C}) \text{ est l'ensemble vide.}$$

◆ Exercice n° 33 p. 95

$$1. \Omega M^2 = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25.$$

$$2. x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25 ; \\ \text{donc } (\mathcal{C}) \text{ est le cercle de centre } I\left(\frac{3}{4}\right) \text{ et de rayon } 5.$$

◆ Exercice n° 34 p. 95

1. Soit G le centre de gravité du triangle ABC ;

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \text{ et } G\left(-1, 1\right) ; \vec{GA}\left(-1, 2\right), \vec{GB}\left(5, 0\right) \text{ et } \vec{GC}\left(-4, -2\right) ;$$

$$GA^2 = 5, GB^2 = 25 \text{ et } GC^2 = 20.$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 \\ = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3MG^2 + 50 ;$$

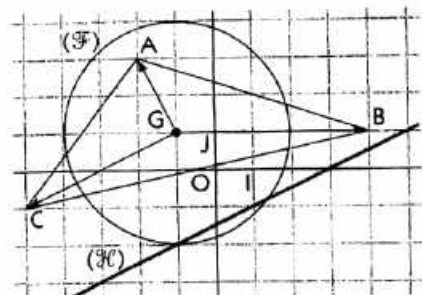
$$\text{donc : } MA^2 + MB^2 + MC^2 = 50 \Leftrightarrow 3MG^2 = 0 \Leftrightarrow M = G.$$

$$2. MA^2 + MB^2 + MC^2 = 77 \Leftrightarrow 3MG^2 = 27 \\ \Leftrightarrow MG = 3.$$

$$(\mathcal{F}) \text{ est le cercle de centre } G \text{ et de rayon } 3.$$

$$3. MA^2 + MB^2 + MC^2 = 47 \Leftrightarrow 3MG^2 = -3. \\ \text{L'ensemble cherché est l'ensemble vide.}$$

$$4. \bullet 2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2(\vec{MG} + \vec{GA})^2 - (\vec{MG} + \vec{GB})^2 - (\vec{MG} + \vec{GC})^2 \\ = 2\vec{MG} \cdot (2\vec{GA} - \vec{GB} - \vec{GC}) + 2GA^2 - GB^2 - GC^2 = 6\vec{MG} \cdot \vec{GA} - 35 ; \\ \text{donc } 2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 1 \Leftrightarrow \vec{MG} \cdot \vec{GA} = 6 \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0. \\ (\mathcal{H}) \text{ est une droite, dont } \vec{GA} \text{ est un vecteur normal.} \\ \bullet 2\vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC} = 2\vec{GA} - \vec{GB} - \vec{GC} = 3\vec{GA} \text{ est aussi normal à } (\mathcal{H}).$$



INTERSECTION DE DROITES ET CERCLES

◆ Exercice n° 35 p. 95

Une équation de $(\mathcal{C})$ est : $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$.

$$M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in (\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0 \\ 5x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(13x-9) = 0 \\ y = -5x + 6 \end{cases}$$

Donc $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$ ont deux points d'intersection : $A\left(\frac{1}{13}\right)$ et $B\left(\frac{9}{13}, \frac{49}{13}\right)$.

◆ Exercice n° 36 p. 95

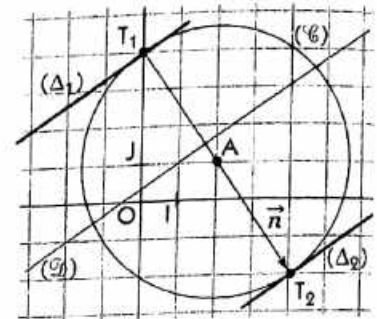
1. $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $A\left(\frac{2}{1}\right)$ et de rayon $\sqrt{13}$.

On désigne par (Δ_1) et (Δ_2) les tangentes à $(\mathcal{C})$ parallèles à $(\mathcal{D})$.

2. $\vec{n}\left(\frac{2}{3}\right)$ est un vecteur normal à $(\mathcal{D})$, donc à (Δ_1) et (Δ_2) .

La perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ en A coupe $(\mathcal{C})$ en $T_1\left(\frac{0}{4}\right)$ et $T_2\left(\frac{4}{0}\right)$.

On obtient $(\Delta_1) : 2x - 3y + 12 = 0$; $(\Delta_2) : 2x - 3y - 14 = 0$.



◆ Exercice n° 37 p.95

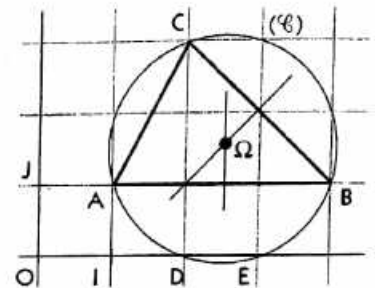
1. $\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = 4 \neq 0 \Rightarrow A, B, C$ sont non alignés.

2. Le centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au triangle ABC est Ω , point d'intersection des médiatrices de $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$. La médiatrice de $[AB]$ a pour équation : $x = \frac{5}{2}$;

la médiatrice de $[BC]$ a pour équation : $x - y - 1 = 0$.

Donc, $(\mathcal{C})$ a pour centre $\Omega\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et pour rayon $\Omega A = \frac{\sqrt{10}}{2}$;
une équation de $(\mathcal{C})$ est : $x^2 + y^2 - 5x - 3y + 6 = 0$.

3. Les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec (OI) sont D et E, d'abscisses respectives 2 et 3.



Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n° 38 p. 95

1. $\vec{AB} = \vec{n} \Leftrightarrow B\left(\frac{5}{1}\right)$ et $\vec{AB}' = -\vec{n} \Leftrightarrow B'\left(\frac{-1}{3}\right)$. 2. $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 3x + 4y - 10$.

3. $(\mathcal{D})$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ (ou la médiatrice de $[BB']$).

4. a) $O \notin (\mathcal{C})$, $A \in (\mathcal{C})$, $B \in (\mathcal{C})$, $B' \notin (\mathcal{C})$.

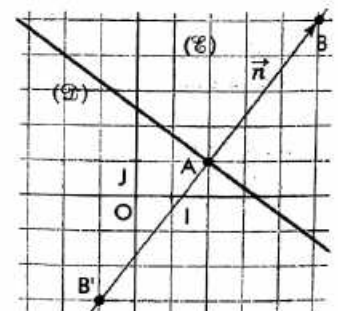
b) $\vec{AM} \cdot \vec{n} = \overline{AH} \times \overline{AB}$. Or : $M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} \geq 0$; donc : $H \in [AB]$.

c) On en déduit que $(\mathcal{C})$ est le demi-plan limité par $(\mathcal{D})$ et contenant B.

5. a) $O \in (\mathcal{C}')$, $A \in (\mathcal{C}')$, $B \notin (\mathcal{C}')$, $B' \in (\mathcal{C}')$.

b) On démontre, comme en 4. b) que : $M \in (\mathcal{C}') \Leftrightarrow H \in [AB']$.

c) $(\mathcal{C}')$ est le demi-plan limité par $(\mathcal{D})$ et contenant B'.



◆ Exercice n° 39 p. 95

1. $(\mathcal{D})$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1 + k \\ y = 3 - k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.

2. Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ et $N\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$; on a : $H\left(\begin{smallmatrix} x' \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $K\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y' \end{smallmatrix}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \vec{AN} &= 2\vec{AH} - 3\vec{AK} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + 1 = 2(x + 1) - 3 \\ y' - 3 = -6 - 3(y - 3) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x - 2 \\ y' = -3y + 6 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \begin{cases} x' = 2x - 2 \\ y' = -3y + 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + 1 \\ y = -\frac{1}{3}y' + 2 \end{cases} ; \\ \text{donc : } M \in (\mathcal{D}) &\Leftrightarrow x + y - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x' - 2y' + 6 = 0. \end{aligned}$$

Lorsque M décrit $(\mathcal{D})$, N décrit la droite $(\mathcal{D}')$ d'équation : $3x - 2y + 6 = 0$.

♦ Exercice n° 40 p. 95

$$1. \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} ; \text{ donc le point d'intersection de } (\mathcal{D}) \text{ et } (\mathcal{D}_0) \text{ est } A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

2. Les coordonnées de A vérifient ces deux équations, qui sont donc des équations de droites passant par A.

3. Pour tout nombre réel λ , $(2 + \lambda)$ et $(3 - \lambda)$ ne peuvent être nuls en même temps et les coordonnées de A vérifient l'équation $(2x + 3y - 7) + \lambda(x - y - 1) = 0$ (1); donc (1) est l'équation d'une droite passant par A.

4. Soit (Δ) une droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$;

une équation de (Δ) est de la forme : $k[ax + by - (2a + b)] = 0$, $k \in \mathbb{R}^* (2)$.

$$(2) \text{ et } (1) \text{ sont équivalentes } \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \lambda = ka \\ 3 - \lambda = kb \\ 7 + \lambda = k(2a + b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(a + b) = 5 \\ \lambda = k(2a + b) - 7 \end{cases} ;$$

si $a + b = 0$, on retrouve $(\Delta) = (\mathcal{D})$; si $a + b \neq 0$, on obtient $k = \frac{5}{a + b}$ et $\lambda = \frac{3a - 2b}{a + b}$.

Finalement toute droite distincte de $(\mathcal{D})$ passant par A a une équation de la forme (1).

[Par exemple, la droite (OA) a pour équation : $x - 2y = 0 \Leftrightarrow (2x + 3y - 7) - 7(x - y - 1) = 0$.]

5. D'après ce qui précède, les droites distinctes de (Δ_2) passant par le point d'intersection des droites (Δ_1) et (Δ_2) ont pour équations : $(x - 4y + 1) + \lambda(3x + 5y - 13) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

♦ Exercice n° 41 p. 96

1. $A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ appartient au cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$, car les coordonnées de A vérifient cette équation.

2. $(\mathcal{C})$ a pour centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et pour rayon 5. La tangente à $(\mathcal{C})$ en A, qui est la droite (Δ) passant par A et de vecteur normal $\vec{\Omega A}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$, a pour équation :

$$3(x - 2) - 4(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 10 = 0$$

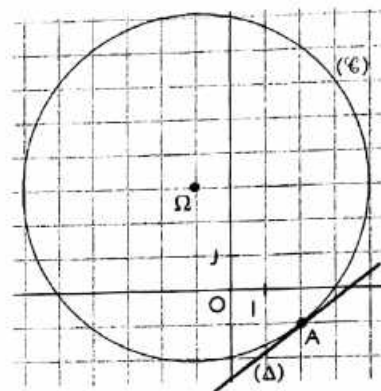
$$\Leftrightarrow x(2) + y(-1) + (x + 2) - 3(y - 1) - 15 = 0.$$

3. $(\mathcal{C})$ a pour centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ et l'équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ en $A\left(\begin{smallmatrix} x_A \\ y_A \end{smallmatrix}\right)$ est :

$$(a - x_A)(x - x_A) + (b - y_A)(y - y_A) = 0 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (x_A^2 + y_A^2 - 2ax_A - 2by_A + c) - (xx_A + yy_A - a(x + x_A) - b(y + y_A) + c) = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow xx_A + yy_A - a(x + x_A) - b(y + y_A) + c = 0 \quad [\text{car } A \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 - 2ax_A - 2by_A + c = 0].$$



♦ Exercice n° 42 p. 96

1. $(\mathcal{C})$ a pour équation : $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

2. (AB) a pour équation : $x - 2y + 5 = 0$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 5 \\ (y - 3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Donc la droite (AB) est tangente à $(\mathcal{C})$ en $K\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

3. $(\mathcal{D}_1)$, tangente à $(\mathcal{C})$ en I, est la droite passant par I, de vecteur normal $\vec{OI}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Une équation de $(\mathcal{D}_1)$ est : $x + 2y + 1 = 0$.

Les coordonnées de B vérifiant cette équation, $B \in (\mathcal{D}_1)$.

4. a) Soit J le point de contact de $(\mathcal{D}_2)$ avec $(\mathcal{C})$.

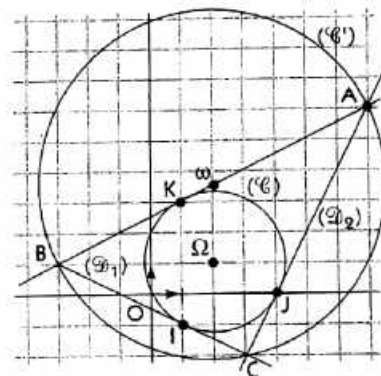
$$\vec{OJ} \cdot \vec{AJ} = 0 \text{ et } J \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)(x - 7) + (y - 1)(y - 6) = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 4 \\ y(y - 3) = 0 \end{cases}$$

Outre le point K, on trouve le point $J\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Une équation de $(\mathcal{D}_2)$ est : $2x - y - 8 = 0$.

b) Le point d'intersection de $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ est $C\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ (solution de $\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 2x - y - 8 = 0 \end{cases}$).

On vérifie que : $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$; donc le triangle ABC est rectangle en C. Le cercle $(\mathcal{C}')$, circonscrit à ABC, a

pour centre $\omega\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 7/2 \end{smallmatrix}\right)$, pour rayon $\omega A = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ et pour équation : $x^2 + y^2 - 4x - 7y - 15 = 0$.



♦ Exercice n° 43 p. 96

1. $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $\Omega(2; -3)$ et de rayon $r = 2$;

$(\mathcal{C}')$ est le cercle de centre $\Omega'(5; 1)$ et de rayon $r' = 3$.

$\Omega\Omega' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = r + r' \Rightarrow (\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ tangents extérieurement en un point A.

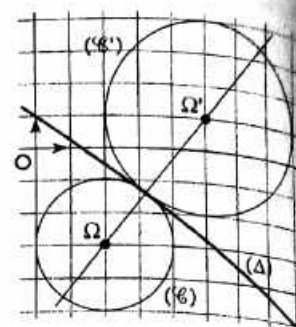
De plus : $\vec{\Omega A} = \frac{2}{5} \vec{\Omega\Omega'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 2 = \frac{2}{5} \times 3 \\ y_A + 3 = \frac{2}{5} \times 4 \end{cases}$; on en déduit : $A(\frac{16}{5}; -\frac{7}{5})$.

2. $(x-2)^2 + (y+3)^2 - 4 - [(x-5)^2 + (y-1)^2 - 9] = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 4 = 0$.

Cette équation est celle d'une droite (Δ) qui passe par A.

3. $\vec{u}(\frac{-4}{3})$ est un vecteur directeur de (Δ) , tel que : $\vec{u} \cdot \vec{\Omega\Omega'} = 0$.

Donc $(\Delta) \perp (\Omega\Omega')$ et (Δ) est la tangente commune à $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.



♦ Exercice n° 44 p. 96

1. $\|\vec{OM}\| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow$ il existe un nombre réel t de l'intervalle $]-\pi; \pi]$ tel que : $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

2. D'après ce qui précède, $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O et de rayon r .

3. $\begin{cases} x = r \cos t + a \\ y = r \sin t + b \end{cases} \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow \|\vec{IM}\| = r$. $(\mathcal{C}')$ est le cercle de centre $I(\frac{a}{b})$ et de rayon r .

4. Application $M(\frac{x}{y}) \in (\mathcal{C})$ de centre O $\Leftrightarrow \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$, où r est un nombre réel strictement positif.

Donc : $\vec{AN} = 2\vec{OM} + 5\vec{OA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 2x + 6x_A \\ y_N = 2y + 6y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 2r \cos t + 6x_A \\ y_N = 2r \sin t + 6y_A \end{cases}$.

Lorsque M parcourt $(\mathcal{C})$, le lieu géométrique des points N est le cercle de centre A' , tel que $\vec{OA'} = 6\vec{OA}$ et de rayon $2r$.

♦ Exercice n° 45 p. 96

1. $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $I(2; -1)$ et de rayon 5.

2. $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$ sont sécants en $A(-1; 3)$ et $B(-2; 2)$.

3. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 - \lambda(x - y + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{\lambda+4}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\lambda+2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lambda+4}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda+2}{2}\right)^2 + 20 + 4\lambda$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{\lambda+4}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\lambda+2}{2}\right)^2 = \frac{(\lambda+7)^2 + 1}{2} \quad (1).$$

Donc $(\mathcal{C}_\lambda)$ est le cercle de centre $\Omega(\frac{\lambda+4}{2}; -\frac{\lambda+2}{2})$

et de rayon $\rho = \sqrt{\frac{(\lambda+7)^2 + 1}{2}}$.

De plus les coordonnées des points A et B vérifient l'équation de $(\mathcal{C}_\lambda)$; donc $A \in (\mathcal{C}_\lambda)$ et $B \in (\mathcal{C}_\lambda)$.

4. Soit E un point du plan.

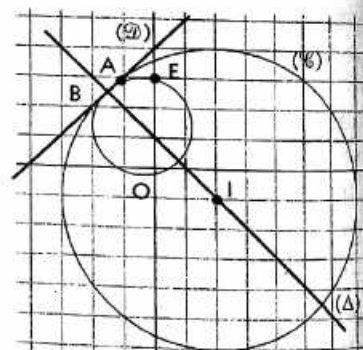
- Si E est confondu avec A ou B, alors tous les cercles passant par A et B passent par A, B et E.
- Si A, B et E sont alignés et distincts, alors il n'existe pas de cercle qui passe par A, B et E.
- Si A, B et E sont non alignés, alors il existe un cercle et un seul passant par A, B et E.

5. Tout cercle $(\mathcal{C}_\lambda)$, passant par A et B, a son centre ω sur la droite (Δ) , médiatrice de $[AB]$; de plus une équation de (Δ) est : $x + y - 1 = 0$.

Donc : $(\mathcal{C}_\lambda)$ a pour centre $\omega(a; 1-a)$ (avec $a \in \mathbb{R}$) et pour rayon $\omega A = \sqrt{2a^2 + 6a + 5}$;

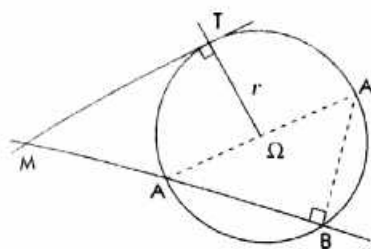
$(\mathcal{C}_\lambda)$ a pour équation : $(x-a)^2 + (y+a-1)^2 = 2a^2 + 6a + 5 \quad (2).$

$$(2) \text{ et } (1) \text{ sont équivalentes } \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\lambda+4}{2} \\ 1-a = -\frac{\lambda+2}{2} \\ 2a^2 + 6a + 5 = \frac{(\lambda+7)^2 + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 2a - 4.$$



Donc tout cercle ($\mathcal{C}_\lambda$) passant par A et B a une équation du type : $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 - \lambda(x - y + 4) = 0$.
 6. Les coordonnées de E vérifient l'équation ci-dessus ssi $\lambda = -5$.
 Une équation du cercle circonscrit au triangle ABE est donc : $x^2 + y^2 + x - 3y = 0$.

♦ Exercice n° 46 p. 96



Puissance d'un point par rapport à un cercle.

1. Dans $MT\Omega$ rectangle en T, $MT^2 = M\Omega^2 - \Omega T^2 = M\Omega^2 - r^2$.

2. a) B projeté orthogonal de A' sur la droite (AB) $\Rightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MA} \cdot \vec{MA'}$.

b) M extérieur à ($\mathcal{C}$)
 M, A et B alignés } $\Rightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = MA \times MB$;

$$\begin{aligned} \text{par ailleurs, } \vec{MA} \cdot \vec{MA'} &= (\vec{M\Omega} + \vec{\Omega A}) \cdot (\vec{M\Omega} + \vec{\Omega A'}) \\ &= (\vec{M\Omega} + \vec{\Omega A}) \cdot (\vec{M\Omega} - \vec{\Omega A}) = \vec{M\Omega}^2 - \vec{\Omega A}^2. \end{aligned}$$

Finalement, $MA \times MB = M\Omega^2 - r^2$.

6. Homothétie – Rotation

(pages 97 à 116 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- introduire deux nouvelles transformations du plan, l'une d'entre elles n'étant pas une isométrie.
- établir les propriétés essentielles de ces applications et les faire fonctionner au niveau 1 (cf. tableau synoptique).

COMMENTAIRES

Il est important de familiariser les élèves avec les « configurations clefs » de l'homothétie et de leur apprendre à les repérer dans une figure. Le lien avec le théorème de Thalès permet une continuité avec la classe de troisième. Puisque l'on traite l'homothétie au niveau 1, on ne doit l'utiliser, en principe, que dans des problèmes de construction d'images de points ou de configurations. Cependant, un exemple simple d'utilisation de l'homothétie pour démontrer des propriétés a été donné au paragraphe 2.3. Quelques autres exercices de ce type sont proposés en fin de chapitre.

On se limitera à établir les principales propriétés de la rotation et à les utiliser pour déterminer l'image de figures simples.

SAVOIRS ET SAVOIR – FAIRE

savoirs

savoir-faire

Homothéties

- Définition (centre et rapport) et conséquences :
 - alignement du centre, d'un point et de son image ;
 - centre = seul point invariant (si rapport $\neq 1$) ;
 - homothéties réciproques ; notion de transformation.
- Propriétés :
 - propriété fondamentale : $\vec{M'N'} = \lambda \vec{MN}$;
 - images de figures simples ; conservations ; longueurs et aires.
- Caractérisations. Homothétie définie par :
 - son centre, un point et son image ;
 - son rapport, un point et son image ;
 - deux points et leurs images respectives.

- Reconnaître deux figures homothétiques.
- Construire l'image d'un point ou d'une figure simple par une homothétie définie par :
 - son centre et son rapport ;
 - son centre, un point et son image ;
 - son rapport, un point et son image ;
 - deux points et leurs images respectives.
- Reconnaître une homothétie.
- Déterminer, lorsqu'elle existe, l'homothétie transformant un couple de points en un couple de points donnés.

Rotations

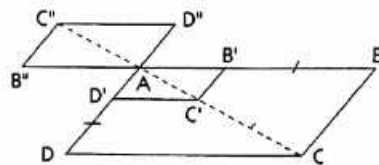
- Définition (centre et angle) et conséquences :
 - centre = seul point invariant (si angle non nul) ;
 - rotations réciproques ;
- Exemple de décomposition d'une rotation, selon deux symétries orthogonales.
- Propriétés : images de figures simples ; conservations.

- Construire l'image d'un point ou d'une figure simple par une rotation.
- Déterminer, lorsqu'elle existe, la rotation transformant un couple de points en un couple de points donnés.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice n° 1.a p. 100

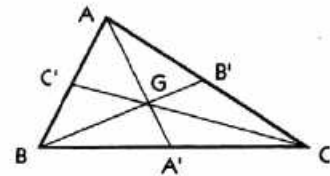


$AB'C'D'$ et $AB''C''D''$, images respectives de $ABCD$ par $h(A, \frac{1}{3})$ et $h(A, -\frac{1}{2})$, sont deux parallélogrammes dont les côtés sont parallèles à ceux de $ABCD$.

♦ Exercice n° 1.c p. 100

$h(A) = B$ et $h(A') = B'$;
 $h_2(A) = C$ et $h_2(A') = C'$;
 $h_3(A) = D$ et $h_3(A') = D'$;
 $h_4(A) = E$ et $h_4(A') = E'$.

♦ Exercice n° 1.b p. 100



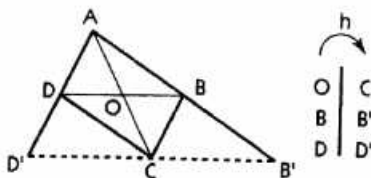
$$\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AA'} \Leftrightarrow \vec{GA'} = -\frac{1}{2} \vec{GA} \Leftrightarrow h(A) = A'.$$

Les images de B et C par h sont B' et C' milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$.

$$\vec{AA'} = \frac{3}{2} \vec{AG} \Leftrightarrow h'(G) = A'.$$

L'homothétie réciproque de h est celle de centre G et de rapport -2 ; l'homothétie réciproque de h' est celle de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.

♦ Exercice n° 2.a p. 104



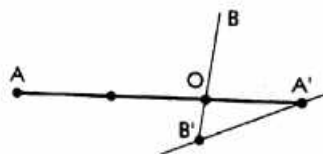
Si h est l'homothétie de centre A et de rapport 2, alors :

$h(O) = C$, $h(B) = B'$ et $h(D) = D'$.
 Or les points B, O, D sont alignés et l'homothétie conserve l'alignement ; donc les points B', C, D' sont alignés.

Commentaire

C est le milieu du segment $[B'D']$.

♦ Exercice n° 2.b p. 104
Premier cas

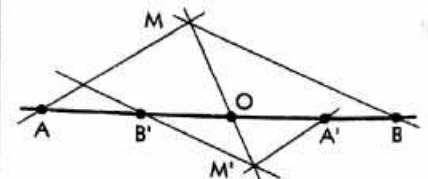


- B' est sur la parallèle à (AB) passant par A' et tel que :

$$\vec{A'B'} = -\frac{1}{2} \vec{AB}.$$

- O est le point d'intersection de (AA') et (BB').

Deuxième cas

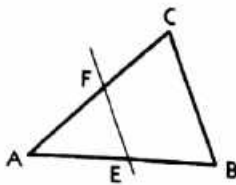


- Le point B' est sur la droite (AB) et tel que : $\vec{A'B'} = -\frac{1}{2} \vec{AB}$.

- Pour construire O :

- tracer deux droites passant par A et B, sécantes en M, n'appartenant pas à (AA') ;
- tracer les parallèles à ces droites passant par A' et B', qui se coupent en M' ;
- O est le point d'intersection de (AB) et (MM').

♦ Exercice n° 2.c p. 104

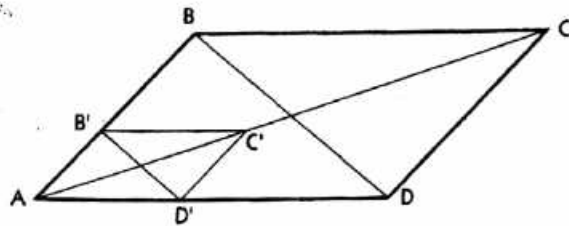


Soit h l'homothétie de centre A telle que $h(B) = E$ et k son rapport.

Si $h(C) = F$, alors $\mathcal{A}(AEF) = k^2 \mathcal{A}(ABC)$.

Donc : $k^2 = \frac{1}{4}$ et $k > 0$; c'est-à-dire : $k = \frac{1}{2}$ et E est le milieu du segment $[AB]$.

♦ Exercice n° 2.d p. 104



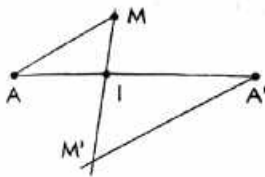
Puisque A, C et C' sont alignés, il existe une homothétie h de centre A qui transforme C en C' .

$B' \in (AB)$ et $(BC) \parallel (B'C') \Rightarrow h(B) = B'$;

de même, $h(D) = D'$.

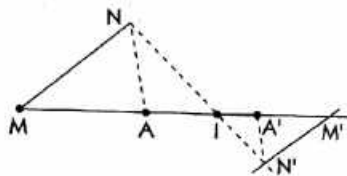
Donc : $(BD) \parallel (B'D')$.

♦ Exercice n° 3.a p. 108
Premier cas



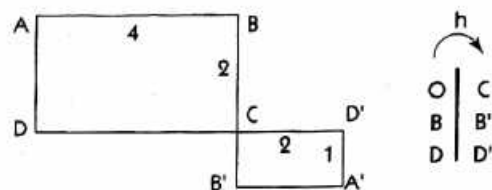
M' est le point d'intersection de (MI) et de la parallèle à (AM) passant par A' .

Deuxième cas



Après avoir déterminé l'image N' d'un point N , extérieur à (AA') [premier cas], M' est le point d'intersection de (MI) et de la parallèle à (MN) passant par N' .

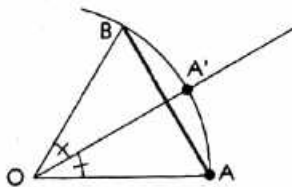
♦ Exercice n° 3.b p. 108



L'homothétie $h(C, \frac{1}{2})$ transforme B en B' et D en D' .

Une homothétie transformant une droite en une droite parallèle, $h(A)$ appartient aux droites $(D'A')$ et $(B'A')$. Donc $h(A) = A'$ et h transforme $ABCD$ en $AB'C'D'$.

♦ Exercice n° 4.a p. 112



- Tracer un arc de cercle de centre O et de rayon OA .
- Construire B tel que OAB soit équilatéral de sens direct.
- Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.
- L'image de A par $r(O, 30^\circ)$ est A' , point d'intersection de l'arc $\widehat{AB}$ et de cette bissectrice.

♦ Exercice n° 4.b p. 112

Une rotation conserve les distances et les angles ; cela suffit pour affirmer que l'image d'un rectangle est un rectangle (de mêmes dimensions) et que celle d'un carré est un carré (de même côté).

♦ Exercice n° 4.c p. 112

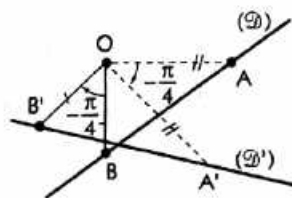


Figure 1

Deux constructions sont possibles.

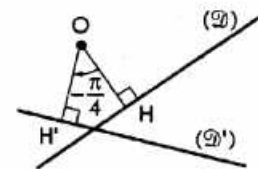
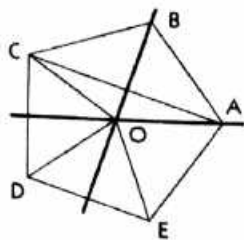


Figure 2

Figure 1 : choisir deux points A et B de $(\mathcal{D})$; construire leurs images A' et B' par $r(O, \frac{\pi}{4})$; l'image de $(\mathcal{D})$ est la droite $(A'B')$.

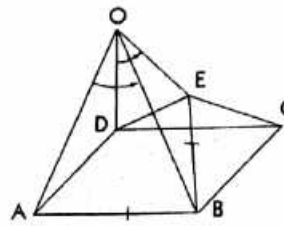
Figure 2 : soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur $(\mathcal{D})$ et H' son image par $r(O, \frac{\pi}{4})$; l'image de $(\mathcal{D})$ est la perpendiculaire en H' à OH' .

♦ Exercice n° 4.d p. 112



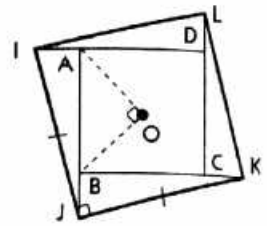
1. $f(A) = C, f(B) = D, f(C) = E, f(D) = A$ et $f(E) = B$.
2. D'après les propriétés de la rotation, f est la rotation :
 - de centre O ,
 - d'angle $\text{Mes}(\vec{OA}, \vec{OC}) = \frac{4\pi}{5}$.

♦ Exercice n° 4.e p. 112



Soit r la rotation considérée. On a : $r(A) = B$ et $r(D) = E$. La rotation conserve les distances ; donc : $AD = BE$. $ABCD$ est un parallélogramme ; donc : $AD = BC$. Finalement : $BE = BC$; donc : BEC est isocèle en B .

♦ Exercice n° 4.f p. 112



$ABCD$ est de sens direct.

1. Soit r la rotation de centre O , d'angle $\frac{\pi}{2}$. On a : $r(A) = B ; r(I) = J ; r(J) = K$.
2. D'après la propriété fondamentale de la rotation, $JK = IJ$ et $\text{Mes}(\vec{IJ}, \vec{JK}) = \frac{\pi}{2}$. De même : $JK = KL = LI$. Donc $IJKL$ est un carré.

▢ Exercices d'apprentissage

HOMOTHÉTIES

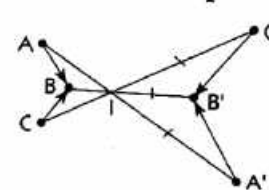
♦ Exercice n° 1 p. 113

1. $\vec{OM}' = 5\vec{OM}$.
2. $\vec{SD} = 12\vec{SC}$.
3. $\vec{IB} = -3\vec{IA}$.

♦ Exercice n° 2 p. 113

- $\vec{BC} = 4\vec{BA} \Leftrightarrow h(B, 4)(A) = C$;
- $2\vec{MN} = -5\vec{MP} \Leftrightarrow h(M, -\frac{5}{2})(P) = N$;
- $\frac{3}{2}\vec{RS} = \vec{RG} \Leftrightarrow h(R, \frac{3}{2})(S) = G$.

♦ Exercice n° 3 p. 113

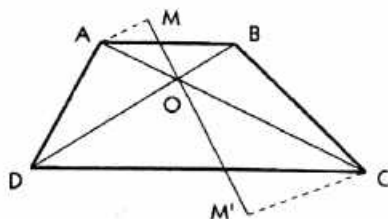


$$\begin{aligned}\vec{IB}' &= -2\vec{IB} ; \\ \vec{C'B}' &= -2\vec{CB} ; \\ \vec{A'B}' &= -2\vec{AB} .\end{aligned}$$

♦ Exercice n° 4 p. 113

1. $\vec{AC} + 3\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AC} = -3\vec{AB}$; le rapport de l'homothétie est donc -3 .
2. $\vec{BC} - 4\vec{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AC} = -3\vec{AB}$; le rapport de l'homothétie est donc -3 .
3. $\vec{BC} = 2\vec{BA} \Leftrightarrow \vec{AC} = -\vec{AB}$; le rapport de l'homothétie est donc -1 .

♦ Exercice n° 6 p. 113



L'homothétie qui transforme A en C et B en D a pour centre O , le point d'intersection de (AC) et (BD) .

L'image de M par cette homothétie est M' , point d'intersection avec (OM) de la parallèle à (AM) passant par C .

♦ Exercice n° 5 p. 113



1. Si $\vec{AB} = \frac{4}{5}\vec{AC}$ et $h(A, k)(C) = B$, alors $k = \frac{4}{5}$;
2. Si $\vec{BC} = -\frac{1}{4}\vec{BA}$ et $h(B, k)(A) = C$, alors $k = -\frac{1}{4}$;
3. Si $\vec{CB} = \frac{1}{5}\vec{CA}$ et $h(C, k)(A) = B$, alors $k = \frac{1}{5}$.

♦ Exercice n° 7 p. 113



1. $\vec{AC} = 3\vec{AB} \Rightarrow$ l'homothétie de rapport 3 qui transforme B en C a pour centre A .
2. $\vec{BC} = -2\vec{BA} \Rightarrow$ l'homothétie de rapport -2 qui transforme A en C a pour centre B .
3. $\vec{CB} = \frac{2}{3}\vec{CA} \Rightarrow$ l'homothétie de rapport $\frac{2}{3}$ qui transforme A en B a pour centre C .

♦ Exercice n° 8 p. 113

D'après les propriétés de conservation de l'homothétie, les images de H, O, L par h sont respectivement l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle inscrit du triangle A'B'C'.

♦ Exercice n° 9 p. 113

$$\vec{OM}' = 3\vec{OM} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}$$

♦ Exercice n° 10 p. 113

$\vec{OM}' = -5\vec{OM}$; donc M est l'image de M' par l'homothétie de centre O et de rapport -5.

♦ Exercice n° 11 p. 113

1. Le système $\begin{cases} x = 2x - 1 \\ y = 2y + 3 \end{cases}$ a une seule solution (1 ; -3) ;

donc I(1 ; -3) est le seul point tel que h(I) = I.

2. Si M' $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est l'image par h de M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - 1 = 2(x - 1) \\ y' + 3 = 2(y + 3) \end{cases} \Rightarrow \vec{IM}' = 2\vec{IM} ;$$

donc h est l'homothétie de centre I et de rapport 2.

♦ Exercice n° 12 p. 113

1. Par un raisonnement analogue à celui de l'exercice précédent, on démontre que f est l'homothétie de centre I(1 ; -2) et de rapport -2.

2. Soit g la transformation réciproque de f.

$$M'' = g(M) \Leftrightarrow M = f(M'')$$

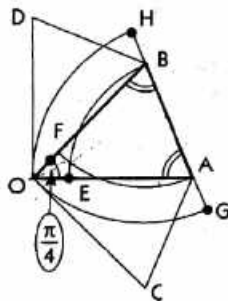
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2x'' + 3 \\ y = -2y'' - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{-x+3}{2} \\ y'' = \frac{-y-6}{2} \end{cases}$$

ROTATIONS

♦ Exercice n° 13 p. 113

$$1. r(O, \frac{\pi}{4})(A) = B,$$

$$r(O, -\frac{\pi}{4})(B) = A.$$



2. OAB est isocèle en O et

$$\text{Mes}(\widehat{OA, OB}) = \frac{\pi}{4}, \text{ donc :}$$

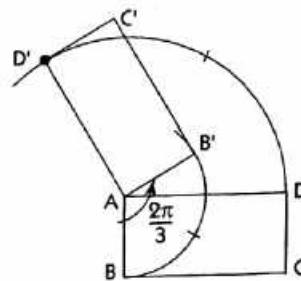
$$\text{Mes}(\widehat{AB, AO}) = \text{Mes}(\widehat{BO, BA}) = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{8}.$$

$$\text{Soit } C = r(O, -\frac{\pi}{4})(A), D = r(O, \frac{\pi}{4})(B), E = r(A, \frac{3\pi}{8})(B),$$

$$F = r(B, -\frac{3\pi}{8})(A), G = r(B, \frac{3\pi}{8})(O) \text{ et } H = r(A, -\frac{3\pi}{8})(O).$$

C est le symétrique de B par rapport à (OA) ; D est le symétrique de A par rapport à (OB) ; E est le point de (AO) tel que : AE = AB ; F est le point de (BO) tel que : BF = BA ; G est le point de (BA) tel que : BG = BO ; H est le point de (AB) tel que : AH = AO.

♦ Exercice n° 14 p. 113



L'image du rectangle ABCD est le rectangle AB'C'D', de mêmes dimensions et sens (direct) que ABCD ;

- pour placer le point B', on trace un arc de cercle de centre A, de rayon AB et on reporte deux fois, à partir de B, le rayon sur cet arc ;
- pour placer les points C' et D', on peut procéder de la même façon ou faire une construction, qui tient compte des dimensions et du sens (direct) de AB'C'D'.

♦ Exercice n° 15 p. 113

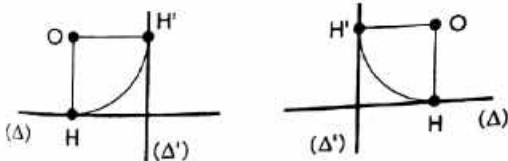


figure 1

figure 2

1. (figure 1)

a) Soit H le projeté orthogonal de O sur (Δ) et H' son image par le quart de tour direct de centre O.

OHH' est rectangle isocèle en O, de sens direct.

(Δ') est la perpendiculaire à (OH') passant par H'.

b) $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux ; on a :

$$\text{Mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2}.$$

2. (figure 2)

a) S'agissant du quart de tour indirect de centre O, OHH' est cette fois rectangle isocèle en O, de sens indirect.

b) Les résultats restent analogues à ceux obtenus en 1.b).

♦ Exercice n° 16 p. 113

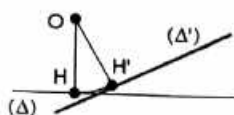


figure 1

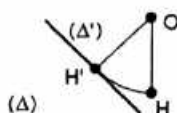


figure 2

1. (figure 1)

a) Soit H le projeté orthogonal de O sur (Δ), H' son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

OHH' est isocèle en O, de sens direct et $\text{mesHOH}' = \frac{\pi}{6}$. (Δ') est la perpendiculaire en H' à (OH').

♦ Exercice n° 17 p. 114

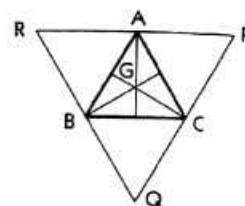
1. $r(B, \frac{\pi}{3})(C) = A$, $r(A, \frac{\pi}{3})(B) = C$, $r(C, \frac{\pi}{3})(A) = B$.

2. $GA = GB = GC$; $\text{Mes}(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = \text{Mes}(\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}) = \text{Mes}(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GA}) = \frac{2\pi}{3}$.

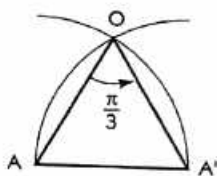
On en déduit que la rotation r' de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est telle que $r'(A) = B$, $r'(B) = C$ et $r'(C) = A$.

3. Les triangles ACP, CBQ, BAR sont équilatéraux, de sens direct et superposables au triangle ABC. Donc les angles PCQ, QBR et RAP sont plats et $PQ = QR = RP = 2AB$. On en déduit que le triangle PQR est équilatéral.

Commentaires Le triangle PQR est l'image du triangle BAC par l'homothétie de centre G et de rapport -2.



♦ Exercice n° 18 p. 114



Le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ transformant A en A' est le point O tel que le triangle OAA' est équilatéral et de sens direct.

♦ Exercice n° 19 p. 114

1. Soit r le quart de tour indirect de centre O. r transforme A en D et B en A.

2. Soit r' le quart de tour direct de centre A. r' transforme A en A et B en D.

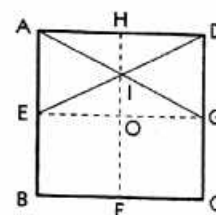
3. r transforme aussi A en D et G en F.

4. a) ADGE est un rectangle. Soit I son centre et α la mesure de l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID})$. I est équidistant des points A, D, G, E et $\text{Mes}(\overrightarrow{IG}, \overrightarrow{IE}) = \alpha$.

Si r'' est la rotation de centre I et d'angle α , alors r'' transforme A en D et G en E.

b) On a : $-\frac{\alpha}{2} = \text{Mes}(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IA})$; donc : $\tan(-\frac{\alpha}{2}) = \frac{AH}{HI}$.

$HI = \frac{AE}{2}$ et $AH = AE \Rightarrow \tan(-\frac{\alpha}{2}) = 2$. On en déduit que : $\alpha = -2,214$ radians.



♦ Exercice n° 20 p. 114

1. Soit O le point d'intersection des droites (Δ) et (Δ'), (Δ) et (Δ') les images respectives de (Δ) et (Δ') par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

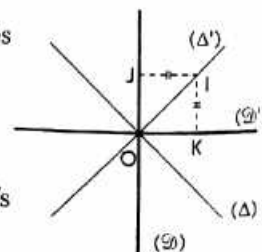
(Δ) ∪ (Δ') est l'ensemble des points équidistants de (Δ) et (Δ').

• Les quarts de tour direct et indirect de centre O transforment (Δ) en (Δ').

• Soit I un point de (Δ) ∪ (Δ'), distinct de O, J et K les projetés orthogonaux respectifs de I sur (Δ) et (Δ'). D'une part : $IJ = IK$; d'autre part : $\text{Mes}(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

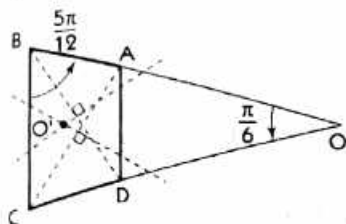
- Lorsque $\text{Mes}(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{2}$, le quart de tour direct de centre I transforme la perpendiculaire à (IJ) passant par J, c'est-à-dire (Δ), en la perpendiculaire à (IK) passant par K, c'est-à-dire (Δ').

- De même lorsque $\text{Mes}(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}) = -\frac{\pi}{2}$, le quart de tour indirect de centre I transforme (Δ) en (Δ').



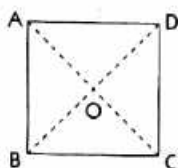
2. Tout point I de l'ensemble $(\Delta) \cup (\Delta')$ est le centre d'un quart de tour transformant $(\mathcal{D})$ en $(\mathcal{D}')$.
 Soit I' un point extérieur à cet ensemble, J' et K' les projetés orthogonaux respectifs de I' sur $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.
 On a : $I'J' \neq I'K'$; donc I' ne peut être le centre d'une rotation transformant $(\mathcal{D})$ en $(\mathcal{D}')$.
 Finalement l'ensemble des centres des rotations transformant $(\mathcal{D})$ en $(\mathcal{D}')$ est $(\Delta) \cup (\Delta')$.

◆ Exercice n° 21 p. 114



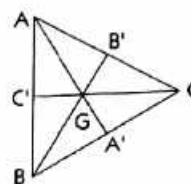
1. Si $\{O\} = (AB) \cap (CD)$, alors la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ transforme A en D et B en C .
2. Si O' est le point d'intersection des médiatrices de $[AC]$ et $[BD]$, alors O' est le centre de la rotation qui transforme A en C et B en D .
 (Avec les données, une mesure de l'angle ne peut être déterminée.)

◆ Exercice n° 22 p. 114



- « $S(AB)$ suivie de $S(AC)$ » est la rotation de centre A et d'angle π .
- « $S(AD)$ suivie de $S(AC)$ » est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
- « $S(AC)$ suivie de $S(BD)$ » est la rotation de centre O et d'angle π .

◆ Exercice n° 23 p. 114



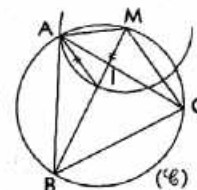
Deux droites (Δ) et (Δ') , telles que « $S_{(\Delta)}$ suivie de $S_{(\Delta')}$ » soit la rotation $r(G, \frac{2\pi}{3})$, doivent être sécantes en G et admettre des vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ tels que :

$$\text{Mes}(\vec{u}, \vec{u}') = \frac{\pi}{3}.$$

Ainsi en est-il des trois couples : $((GC)$ et $(GB'))$, $((GB')$ et $(GA))$, $((GB)$ et $(GA'))$.

◆ Exercice n° 24 p. 114

1. $\text{Mes}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \text{Mes}(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{3}$ et $MI = MA$; donc AIM est équilatéral de sens direct.
2. La rotation de centre A qui transforme B en C a pour angle $\frac{\pi}{3}$; elle transforme donc I en M .
3. On en déduit que : $IB = MC$. Or, $MB = MI + IB$; donc : $MA + MC = MB$.



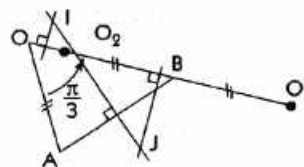
◆ Exercice n° 25 p. 114

1. Soit C le centre d'une telle rotation (si elle existe).
 a) $CA = CB \Rightarrow C$ appartient à la médiatrice de $[AB]$.
 b) Soit O' l'image de O par la rotation.
 $O \in (OA) \Rightarrow O' \in (OB)$; de plus : $AO = BO'$. Donc l'image de O est O_1 ou O_2 .
 c) Soit α l'angle de la rotation.

On a : $\alpha = \text{Mes}(\vec{AO}, \vec{BO_1})$ ou $\alpha = \text{Mes}(\vec{AO}, \vec{BO_2})$; c'est-à-dire : $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ou $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$.

2. Il existe donc deux rotations et deux seulement répondant à la question :

- la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre I , point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et de $[OO_1]$;
- la rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et de centre J , point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et de $[OO_1]$.



◆ Exercice n° 26 p. 114

1. Une rotation conserve les distances et les angles ; cela suffit pour affirmer que (O, I', J') , image d'un repère orthonormé direct, est un repère orthonormé direct.

2. Soit P le point tel que $\vec{OP} = x\vec{OI}$ et P' son image par r . On a :

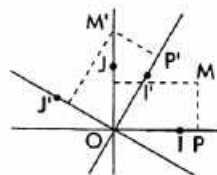
$$\bullet OP' = OP = |x| \text{ et } \text{Mes}(\vec{OI'}, \vec{OP'}) = \text{Mes}(\vec{OI}, \vec{OP}) ; \text{ d'où : } \vec{OP'} = x\vec{OI'}.$$

$$\bullet \vec{PM} = \vec{OM} - \vec{OP} = |y|\vec{OJ} ; \text{ donc : } P'M' = PM = |y| \text{ et } \text{Mes}(\vec{OJ'}, \vec{P'M'}) = \text{Mes}(\vec{OJ}, \vec{PM}) ; \text{ d'où : } \vec{P'M'} = y\vec{OJ'}.$$

On en déduit que : $\vec{OM'} = \vec{OP'} + \vec{P'M'} = x\vec{OI'} + y\vec{OJ'}$; c'est-à-dire : M' a pour coordonnées $(x ; y)$ dans (O, I', J') .

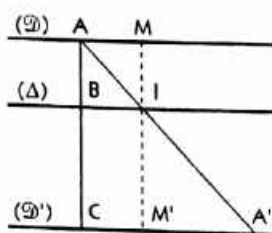
3. OII' est équilatéral direct, donc : $\vec{OI'} = \frac{1}{2}\vec{OI} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{OJ}$; OJJ' est équilatéral direct, donc : $\vec{OJ'} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{OI} + \frac{1}{2}\vec{OJ}$.

On en déduit que : $\vec{OM'} = (\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y)\vec{OI} + (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)\vec{OJ}$.



Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n° 27 p. 114



1. $\vec{AC} = 3\vec{AB} \Rightarrow \vec{BC} = -2\vec{BA}$. On en déduit que :

- C est l'image de A par l'homothétie de centre B et de rapport -2 ;
- l'image de (D), qui passe par A, est la droite (D') parallèle à (D) passant par C.

2. Soit (Δ) la parallèle à (D) passant par B et h' l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$.

Pour toute homothétie, de centre I et de rapport -2, transformant (D) en (D') et A en A', on a : $\vec{IA'} = -2\vec{IA} \Rightarrow \vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AA'}$. Donc : $I = h'(A')$ et $I \in (\Delta)$.

Réciproquement, soit $I \in (\Delta)$; si la perpendiculaire à (D) en I coupe (D) en M et (D') en M', alors $\vec{IM'} = -2\vec{IM}$. Donc (D') est l'image de (D) par l'homothétie de centre I et de rapport -2.

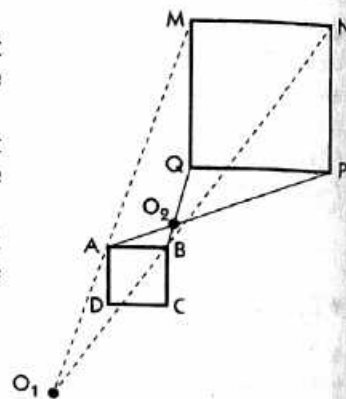
Le lieu recherché est donc la droite (Δ).

♦ Exercice n° 28 p. 114

1. Toute homothétie transformant un segment en un segment parallèle et conservant l'orientation, si h transforme ABCD en MNPQ, carrés de même orientation tels que $(AB) \parallel (MN)$ et $AB \neq MN$, alors on a :

- ou bien $h(A) = M$ et $h(B) = N$, auquel cas le centre de cette homothétie est O_1 , point d'intersection de (AM) et (BN) ; on vérifie dans ces conditions que $h(C) = P$ et $h(D) = Q$;
- ou bien $h(A) = P$ et $h(B) = Q$, auquel cas le centre de cette homothétie est O_2 , point d'intersection de (AP) et (BQ) ; on vérifie dans ces conditions que $h(C) = M$ et $h(D) = N$.

2. Si ABCD et MNPQ sont des rectangles, il faut que $\frac{AB}{AD} = \frac{MN}{MQ}$ pour qu'il existe également deux homothéties transformant ABCD en MNPQ.



♦ Exercice n° 29 p. 115

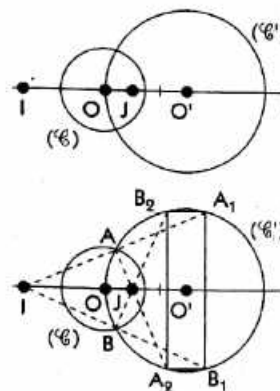
1. Une homothétie, qui transforme (C) en (C'), a pour rapport 2 ou -2 et transforme O en O' ;

- si le rapport est 2, le centre I vérifie $\vec{IO'} = 2\vec{IO}$ et on a : $\vec{OI} = -\vec{OO'}$;
- si le rapport est -2, le centre J vérifie $\vec{JO'} = -2\vec{JO}$ et on a : $\vec{OJ} = \frac{1}{3}\vec{OO'}$.

2. Soit $h_1 = h(I, 2)$ et $h_2 = h(J, -2)$.

- $h_1(A) = A_1, h_1(B) = B_1 \Rightarrow \vec{A_1B_1} = 2\vec{AB}$;
- de même : $\vec{A_2B_2} = -2\vec{AB}$ ou $\vec{B_2A_2} = 2\vec{AB}$.

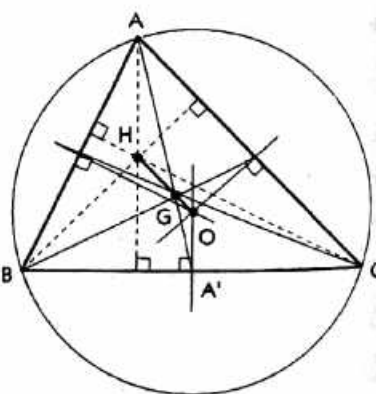
On en déduit que $A_1B_1A_2B_2$ est un rectangle, de centre O' puisque inscrit dans (C').



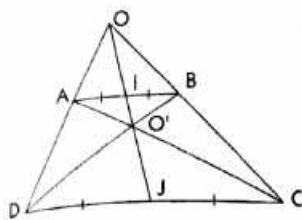
♦ Exercice n° 30 p. 115

1. Soit A' le milieu de [BC]. $\vec{GA'} = -\frac{1}{2}\vec{GA} \Rightarrow A' = h(A)$; par ailleurs, l'image par h de la hauteur issue de A est une droite qui passe par A et lui est parallèle ; donc l'image de (AH) par h est la médiatrice de [BC]. De même, les images respectives de (BH) et (CH) sont les médiatrices de [AC] et [AB].

2. D'après 1, l'image par h de l'orthocentre du triangle ABC est le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Donc O, G, H sont alignés et $\vec{GO} = -\frac{1}{2}\vec{GH}$.



♦ Exercice n°31 p. 115

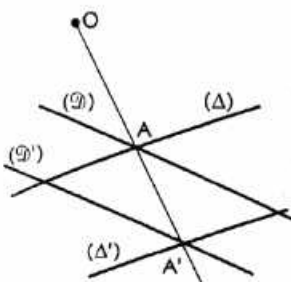


• Les points O, A, D sont alignés, ainsi que les points O, B, C ; de plus, $(AB) \parallel (DC)$. Donc, l'homothétie h de centre O qui transforme A en D, transforme B en C. Le milieu I de $[AB]$ a pour image par h le milieu J de $[CD]$; donc les points O, I et J sont alignés.

• De même, l'homothétie h' de centre O' qui transforme A en C, transforme B en D et le milieu I de $[AB]$ en le milieu J de $[CD]$; donc les points O', I et J sont alignés.

On en déduit que les points O, O', I et J sont alignés.

♦ Exercice n°32 p. 115



1. L'homothétie cherchée transforme A en A' ; réciproquement, toute homothétie transformant A en A', transforme $(\mathcal{D})$ en $(\mathcal{D}')$ et (Δ) en (Δ') .

Il suffit donc de trouver le centre de l'homothétie de rapport 2 qui transforme A en A'. Ce point O, qui vérifie $\vec{OA'} = 2\vec{OA}$ ou $AO = A'A$, est le symétrique de A' par rapport à A.

2. On a vu que toute homothétie transformant A en A', transforme $(\mathcal{D})$ en $(\mathcal{D}')$ et (Δ) en (Δ') . Il suffit donc de trouver l'ensemble des centres de ces homothéties. Cet ensemble est la droite (AA') privée des points A et A', car tout point I de cet ensemble est centre d'une homothétie transformant A en A' ; son rapport est $\frac{IA'}{IA}$.

♦ Exercice n°33 p. 115

Existence

Soit N et N' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' sur $(\mathcal{D})$, I le point d'intersection de (MM') et (NN') . Considérons l'homothétie h de centre I, telle que $h(M) = M'$;

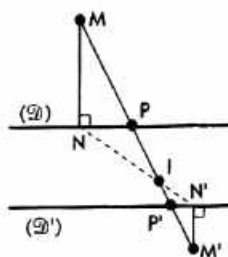
h transforme (MN) en $(M'N')$, donc $h(N) = N'$;

h transforme donc $(\mathcal{D})$ en la parallèle à $(\mathcal{D})$ passant par N', c'est-à-dire $(\mathcal{D}')$.

Unicité

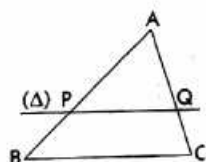
Soit h' une homothétie transformant M en M' et $(\mathcal{D})$ en $(\mathcal{D}')$.

Considérons les points d'intersection respectifs P et P' de la droite (MM') avec les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$. h' est l'homothétie transformant M en M' et P en P' ; donc : $h' = h$.



♦ Exercice n° 34 p. 115

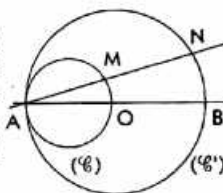
Le triangle APQ est l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{AP}{AB}$.



$$\begin{aligned} \mathcal{A}(APQ) = \mathcal{A}(PQCB) &\Leftrightarrow \mathcal{A}(APQ) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(ABC) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{AP}{AB}\right)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

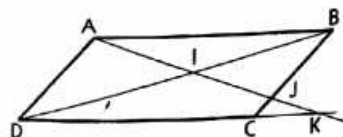
♦ Exercice n° 35 p. 115

L'homothétie de centre A et de rapport 2 transforme O en B ; elle transforme donc le cercle de diamètre $[AO]$ en le cercle de diamètre $[AB]$ et le point M en N.



M est donc le milieu du segment $[AN]$.

♦ Exercice n° 36 p. 115



L'homothétie h de centre I, telle que $h(A) = J$, transforme (AD) en (JB) ; donc $h(D) = B$.

L'homothétie h' de centre I, telle que $h'(A) = K$, transforme (AB) en (KD) ; donc $h'(B) = D$.

Le rapport de h est : $\frac{IJ}{IA} = \frac{JB}{AB}$; le rapport de h' est : $\frac{IK}{IA} = \frac{KD}{AB}$.

Donc : $\frac{IJ}{IA} \times \frac{IK}{IA} = 1$ et $IA^2 = IJ \times IK$.

♦ Exercice n° 37 p. 115

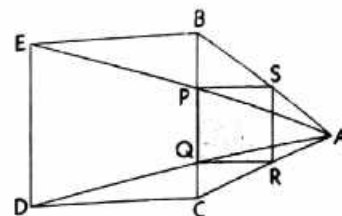
Soit h l'homothétie de centre A , qui transforme E en P .

h transforme (ED) en $(PC) \Rightarrow h(D) = Q$;

h transforme (EB) en $(PS) \Rightarrow h(B) = S$;

h transforme (DC) en $(QR) \Rightarrow h(C) = R$.

Donc le carré $BCDE$ est transformé par h en $SRPQ$, qui est un carré.



♦ Exercice n° 38 p. 115

1. $\vec{AM}' = \frac{1}{3}(\vec{BC} + 2\vec{AM})$, donc à tout point M correspond un point unique M' .

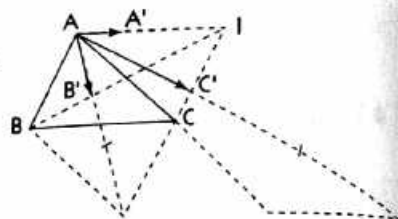
On a : $f(A) = A'$ tel que : $3\vec{AA}' - 2\vec{AA} = \vec{BC}$; c'est-à-dire : $\vec{AA}' = \frac{1}{3}\vec{BC}$;

$f(B) = B'$ tel que : $3\vec{AB}' - 2\vec{AB} = \vec{BC}$; c'est-à-dire : $\vec{AB}' = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$;

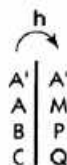
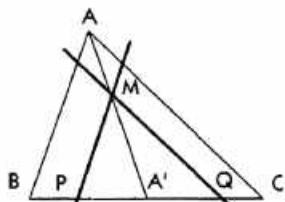
$f(C) = C'$ tel que : $3\vec{AC}' - 2\vec{AC} = \vec{BC}$; c'est-à-dire : $\vec{AC}' = \frac{1}{3}(2\vec{AC} + \vec{BC})$.

2. I invariant par $f \Leftrightarrow 3\vec{AI} - 2\vec{AI} = \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AI} = \vec{BC}$; donc f admet un seul point invariant.

3. $\begin{cases} 3\vec{AM}' - 2\vec{AM} = \vec{BC} \\ 3\vec{AI} - 2\vec{AI} = \vec{BC} \end{cases} \Rightarrow 3\vec{IM}' - 2\vec{IM} = \vec{0} \Rightarrow \vec{IM}' = \frac{2}{3}\vec{IM}$; donc f est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$.



♦ Exercice n° 39 p. 115



L'homothétie h de centre A' , qui transforme A en M , transforme (AB) en (MP) , (AC) en (MQ) , donc B en P , C en Q . Le milieu de $[BC]$ a pour image le milieu de $[PQ]$.

A' milieu de $[BC] \Rightarrow A'$ milieu de $[PQ]$.

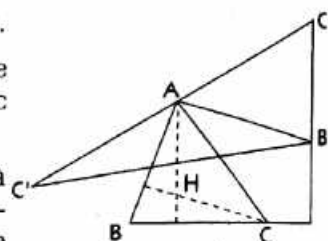
♦ Exercice n° 40 p. 115

1. Voir construction ci-contre.

2. $(B'C'')$ est l'image par r de (BC) ; ces droites sont donc perpendiculaires.

3. (AH) est perpendiculaire à (BC) ; or, A, C', C'' sont alignés et A est le milieu de $[C'C'']$; donc $h(AH) = (B'C'')$.

4. Dans le triangle $C'B'C''$, A milieu de $[C'C'']$ et $(AH) \parallel (B'C')$; donc : (AH) coupe $[C'B']$ en son milieu ;
(AH) est la médiane issue de A du triangle $AB'C'$.



♦ Exercice n° 41 p. 115

1. La rotation r , de centre O transformant A en C , a pour angle $(\vec{OA}, \vec{OC})$;

$r(B) = A$ car $OA = OB = OC$ et $(\vec{OA}, \vec{OC}) = (\vec{OB}, \vec{OA})$.

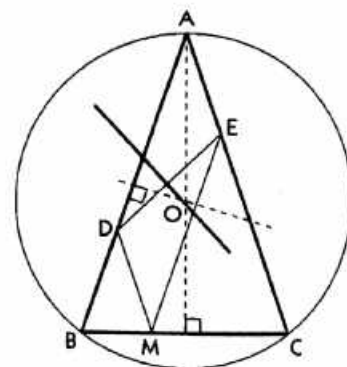
Donc, (BA) a pour image (AC) par r .

2. D appartient au segment $[BA]$, donc son image D' par r est le point du segment $[AC]$ tel que : $AD' = BD$. Or $MDAE$ est un parallélogramme ; donc $AE = MD = BD$ (puisque BMD est isocèle).

On en déduit que : $D' = E$ et $r(D) = E$.

La médiatrice de $[DE]$ passe par le centre de la rotation, c'est à dire O .

Lorsque M varie sur $[BC]$, la médiatrice de $[DE]$ passe par le point fixe O .



♦ Exercice n° 42 p. 115

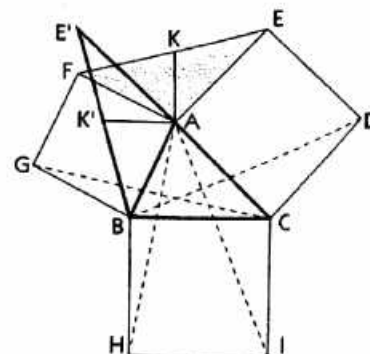
1. La rotation r transformant ACI en DCB est le quart de tour indirect de centre C . (AI) a pour image (BD) par r ; donc : $(AI) \perp (BD)$.

2. De même le quart de tour indirect de centre B transforme GBC en ABH ; donc : $(CG) \perp (AH)$.

3. L'image du triangle AFE par le quart de tour direct de centre A est le triangle ABE' tel que E' est le symétrique de C par rapport à A (ou A est le milieu de $[CE']$).

4. L'image par ce quart de tour du milieu K de $[EF]$ est le milieu K' de $[E'B]$.

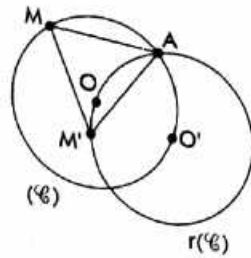
• Dans le triangle $BE'C$, K' et A sont les milieux respectifs des côtés $[E'B]$ et $[E'C]$; donc $(K'A) \parallel (BC)$.



• On en déduit que l'antécédent (AK) de (AK') par le quart de tour direct, de centre A, est perpendiculaire à (BC).
Donc (AK) est une hauteur du triangle ABC.

♦ Exercice n° 43 p. 116

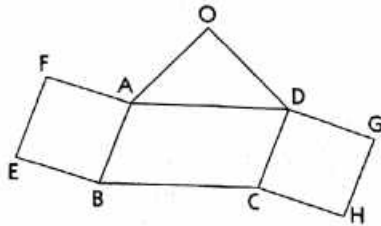
1. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



Mes $(\vec{AM}, \vec{AM'}) = \frac{\pi}{3}$ et $AM = AM' \Rightarrow r(M) = M'$.

2. Le lieu de M' est l'image de (C) par r , c'est-à-dire le cercle de centre $O' = r(O)$ et de même rayon que (C).

♦ Exercice n° 45 p. 116

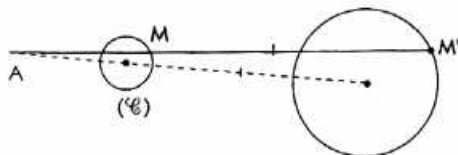


1. Soit r le quart de tour direct de centre O.
Le triangle OAD est de sens direct ; donc $r(A) = D$.
Mes $(\vec{AB}, \vec{DG}) = \frac{\pi}{2}$; donc $r([AB]) = [DG]$.

De plus : $AB = DG$; donc : $r(B) = G$.
On démontre de même que : $r(F) = C$ et $r(E) = H$.

2. On en déduit que l'image par r du carré ABEF est le carré DGHG ; donc : $(OE) \perp (OH)$.

♦ Exercice n° 46 p. 116



Soit M' l'image de A par $h(M, -2)$.

$\vec{MM'} = -2\vec{MA} \Leftrightarrow \vec{AM'} = 3\vec{AM}$.

L'ensemble cherché est l'image de (C) par $h(A, 3)$.

♦ Exercice n° 48 p. 116

1. On suppose que toute droite ($\mathcal{D}$) est sa propre image par f .

Soit M un point du plan, ($\mathcal{D}_1$) et ($\mathcal{D}_2$) deux droites sécantes en M. L'image de M par f appartient à l'intersection des images par f des droites ($\mathcal{D}_1$) et ($\mathcal{D}_2$), qui sont invariantes. Donc M est invariant par f , qui est l'application identique.

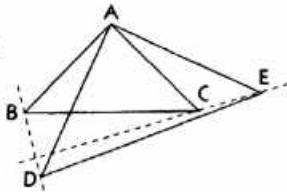
On suppose dans la suite qu'il existe une droite ($\mathcal{D}$) dont l'image ($\mathcal{D}'$) lui est strictement parallèle (1).

2. Si A et B sont deux points de ($\mathcal{D}$), qui ont pour images par f deux points A' et B' distincts de ($\mathcal{D}'$), alors A et B sont eux-mêmes distincts.

♦ Exercice n° 44 p. 116

On suppose que ABC et ADE sont de sens direct.

Soit r le quart de tour direct de centre A.



On a $r(B) = D$ et $r(C) = E$; donc : $r([BD]) = [CE]$.

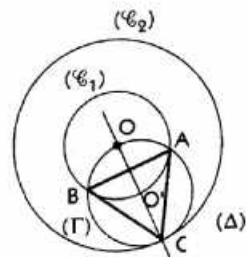
On en déduit que : $BD = CE$ et $(BD) \perp (CE)$.

La démonstration est analogue si les triangles ABC et ADE sont de sens indirect.

♦ Exercice n° 47 p. 116

1. Soit O' l'image de O par r . (Γ) est le cercle de centre O' et de rayon R.

Le triangle OAO' est isocèle en A et $\text{mes} \widehat{OAO'} = \frac{\pi}{3}$;
OAO' est donc un triangle équilatéral.



Soit C le point de (Γ) diamétralement opposé à O.

On a : $OC = 2R$; donc $C \in (C_2)$.

Soit (Δ) la tangente à (C_2) en C. (Δ), qui est la perpendiculaire à (OC) issue de C, est aussi la tangente à (Γ) en C.

2. On a : $O'B = OO' = OB = R$.

Les triangles $O'OA$ et $O'OB$ sont équilatéraux ;

donc : $\text{mes} \widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3}$.

Le quadrilatère convexe BOAC est inscrit dans le cercle (Γ) ;

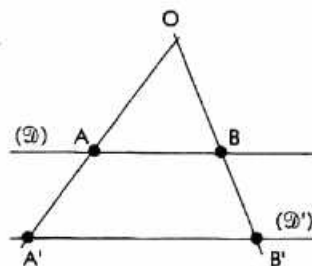
donc : $\text{mes} \widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$.

De plus C appartient à la droite (OO'), médiatrice de [AB] ;

donc le triangle ABC est isocèle en C.

Or, $\text{mes} \widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$; donc le triangle ABC est équilatéral.

AB est le double de la hauteur issue de A dans le triangle équilatéral AOO' ; donc : $AB = \sqrt{3}R$.



3. On suppose que (AA') et (BB') sont sécantes en un point O .

a) On a $f(A) = A'$. L'image par f de la droite (AA') est la parallèle à (AA') passant par A' .

Donc $f[(AA')] = (AA')$ et, de même, $f[(BB')] = (BB')$.

b) $O \in (AA') \cap (BB') \Rightarrow f(O) \in f[(AA')] \cap f[(BB')]$.

Or $f[(AA')] = (AA')$, $f[(BB')] = (BB')$ et $\{O\} = (AA') \cap (BB')$;

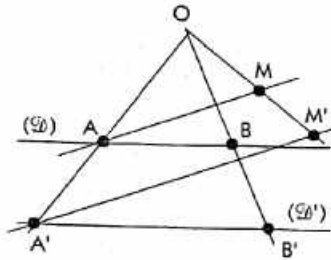
donc $f(O) = O$ et O est invariant par f .

• $O \in (\mathcal{D}) \Rightarrow f(O) \in f[(\mathcal{D})]$

$\Rightarrow O \in (\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}) = (\mathcal{D}')$, en contradiction avec (1).

Donc $O \notin (\mathcal{D})$ et O est distinct de A et B .

c) Soit $M \in (AA')$ et $M' = f(M)$.

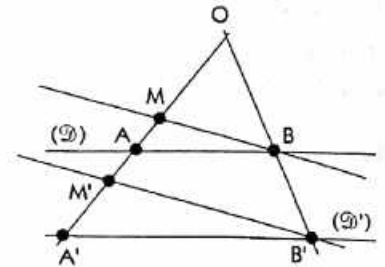


La droite (OM) a pour image par f la droite (OM') , qui lui est parallèle ; donc $M' \in (OM)$.

La droite (AM) a pour image par f la droite $(A'M')$, qui lui est parallèle ; M' est donc un point de la parallèle à (AM) passant par A' .

Donc (OM) et la parallèle à (AM) passant par A' sont sécantes en M' .

d) Soit $M \in (AA') \setminus \{O\}$ et $M' = f(M)$.



$M \notin (BB')$; par un raisonnement analogue à celui du c), on démontre que (OM) et la parallèle à (BM) passant par B' sont sécantes en M' .

e) Soit h l'homothétie de centre O qui transforme A en A' .

• On a : $h(A) = A' = f(A)$ et $h(O) = O = f(O)$.

Par ailleurs, $h(B)$ est le point d'intersection de (OB) avec la parallèle à (AB) issue de A' ; donc $h(B) = B'$.

• Soit M un point du plan.

1^{er} cas : $M = O$. $h(O) = O = f(O)$; donc $h(M) = f(M)$.

2^e cas : $M \in (AA') \setminus \{O\}$. $h(M)$ est le point d'intersection de la droite (AA') avec la parallèle à (BM) issue de B' . D'après d), on a donc $h(M) = f(M)$.

3^e cas : $M \notin (AA')$. $h(M)$ est le point d'intersection de la droite (OM) avec la parallèle à (AM) issue de A' . D'après c), on a donc $h(M) = f(M)$.

• f est donc l'homothétie de centre O qui transforme A en A' .

4. On suppose que (AA') et (BB') sont parallèles.

a) Les côtés opposés du quadrilatère $AA'B'B$ sont parallèles, donc $\vec{AA'} = \vec{BB'}$.

b) Soit $M \notin (AB)$ et $M' = f(M)$. Désignons par t la translation de vecteur $\vec{AA'}$.

L'image par t de la droite (AM) est la parallèle à (AM) passant par A' ; donc : $t(AM) = (A'M')$.

L'image par t de la droite (BM) est la parallèle à (BM) passant par B' ; donc : $t(BM) = (B'M')$.

Les droites (AM) et (BM) sont sécantes en M ; on en déduit que : $t(M) = M'$ et $\vec{MM'} = \vec{AA'}$.

c) Soit $C \notin (AB)$ et $C' = f(C)$. D'après b) $C' = t(C)$ et $\vec{CC'} = \vec{AA'}$.

Soit $M \in (AB) \setminus \{A\}$. On a : $M \notin (AC)$.

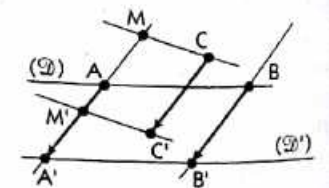
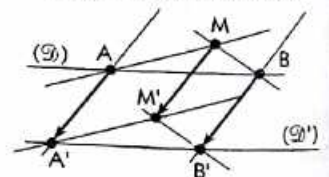
L'image par t de (AM) est la parallèle à (AM) passant par A' ; donc : $t(AM) = (A'M')$.

L'image par t de (CM) est la parallèle à (CM) passant par C' ; donc : $t(CM) = (C'M')$.

$\{M\} = (AM) \cap (BM)$; on en déduit que : $t(M) = M'$ et $\vec{MM'} = \vec{AA'}$.

d) f est donc la translation de vecteur $\vec{AA'}$.

5. Les seules applications du plan dans lui-même, qui transforment une droite en une droite qui lui est parallèle, sont les homothéties et les translations.



1. Géométrie de l'espace

(pages 117 à 132 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- Découvrir les propriétés d'incidence dans l'espace (positions relatives de droites et/ou de plans, déterminations d'un plan).
- Introduire le parallélisme dans l'espace et étudier ses propriétés.

COMMENTAIRES

On dégagera les propriétés essentielles qui, associées aux théorèmes de la géométrie plane, permettent de résoudre des problèmes de géométrie dans l'espace. Les solides étudiés au premier cycle fournissent un excellent support à la géométrie dans l'espace.

La représentation en perspective, abordée en classe de quatrième, permet une visualisation de toutes les propriétés et en facilite la compréhension et la mémorisation ; aussi est-il recommandé de traiter les exercices d'apprentissage sur la perspective cavalière (page 130) avant de commencer ce chapitre.

De certaines de ces propriétés (admisses et posées en axiomes) sont déduites, souvent à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, toutes les autres. Devant leur nombre important et selon les difficultés rencontrées par les élèves, le professeur garde toute latitude pour limiter ses ambitions ... au niveau du nombre de démonstrations (on peut toujours admettre un résultat, même s'il est démontré dans le manuel). Dans le même ordre d'idée, il est souhaitable de ne pas reléguer la géométrie de l'espace en fin d'année.

Les problèmes de section d'un solide (même aussi simple que le cube) par un plan constituent un excellent, mais difficile, réinvestissement des propriétés d'incidence et de parallélisme ; on se limitera à des exercices simples.

SAVOIRS ET SAVOIR – FAIRE

savoirs

Positions relatives de droites et de plans

- Propriétés de base (axiomes).
- Positions relatives de droites et/ou de plans.
- Déterminations d'un plan.

Étude du parallélisme de droites et/ou de plans

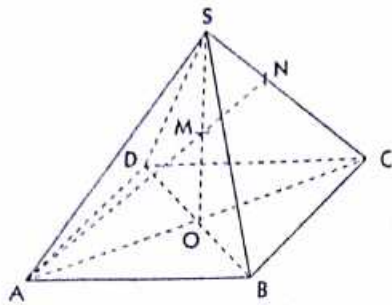
- Propriétés de parallélisme de droites.
- Propriétés de parallélisme d'une droite et d'un plan.
- Propriétés de parallélisme de deux plans.

savoir-faire

- Représenter des solides en perspective cavalière.
- « Voir » un solide dans l'espace à partir de sa représentation en perspective cavalière.
- Représenter en vraie grandeur certaines faces d'un solide représentées en perspective cavalière.
- Reconnaître la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- Reconnaître un plan défini par :
 - trois points ;
 - deux droites strictement parallèles ou sécantes ;
 - une droite et un point.
- Démontrer que des points sont ou ne sont pas alignés (resp. coplanaires ou non coplanaires).
- Démontrer que deux droites sont parallèles, sécantes ou non coplanaires ; lorsqu'elles sont sécantes, déterminer et construire leur point d'intersection.
- Démontrer qu'une droite et un plan sont parallèles ou sécants ; lorsqu'ils sont sécants, déterminer et construire leur point d'intersection.
- Démontrer que deux plans sont parallèles ou sécants ; lorsqu'ils sont sécants, déterminer et construire leur droite d'intersection.
- Déterminer, construire et étudier la nature de sections planes de certains solides.

Exercices du cours

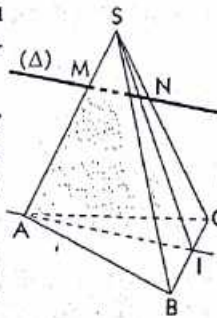
♦ Exercice n° 1.a p. 123



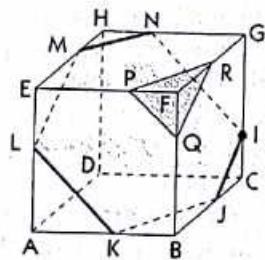
Les droites (AM) et (SC), incluses dans le plan (SAC), sont sécantes en un point N, qui est le point d'intersection de la droite (AM) avec le plan (SBC).

♦ Exercice n° 2.a p. 129

1. La droite (AI) est sécante en I au plan (SBC), donc la droite (Δ), parallèle à (AI), est sécante à (SBC).
2. (Δ) est une droite passant par M, point du plan (SAI), parallèle à (AI), droite du même plan ; (Δ) est donc incluse dans ce plan.
3. Le point d'intersection N de (Δ) avec la face SBC est le point d'intersection de (Δ) avec la droite (SI).



♦ Exercice n° 2.c p. 129

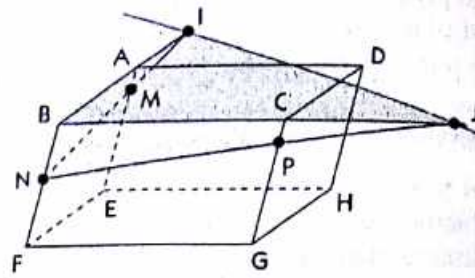


La section du cube par le plan passant par I et parallèle au plan (PQR) est l'hexagone IJKLMN tel que :

- $J \in (CB)$ et $(IJ) \parallel (RQ)$,
- $K \in (BA)$ et $(JK) \parallel (RP)$,
- $L \in (AE)$ et $(KL) \parallel (QP)$,
- $M \in (EH)$ et $(LM) \parallel (QR)$,
- $N \in (HG)$ et $(MN) \parallel (PR)$.

(À noter que : $(NI) \parallel (PQ)$.)

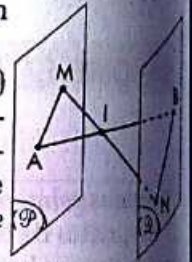
♦ Exercice n° 1.b p. 123



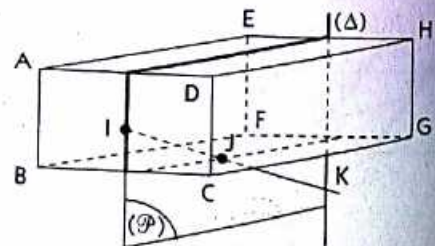
Si les plans (MNP) et (ABC) étaient parallèles, leurs intersections avec le plan (ABE) seraient deux droites parallèles, en contradiction avec l'une des hypothèses [(MN) non parallèle avec l'arête (AB)]. L'intersection de ces deux plans est donc une droite, dont il suffit de connaître 2 points pour qu'elle soit déterminée. C'est le cas de I, point d'intersection de (AB) et (MN), et de J, point d'intersection de (BC) et (NP).

♦ Exercice n° 2.b p. 129

- ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{Q}$) sont strictement parallèles ; la droite (IM), sécante en M à ($\mathcal{P}$), est donc sécante à ($\mathcal{Q}$). Le point d'intersection N de (IM) avec ($\mathcal{Q}$) est le point d'intersection de (IM) avec la droite passant par B et parallèle à la droite (MA) (à noter que cette dernière droite est incluse dans ($\mathcal{Q}$)).

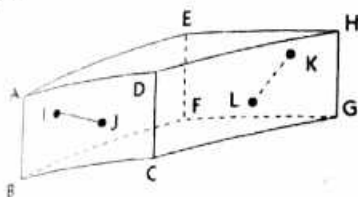


♦ Exercice n° 2.d p. 129



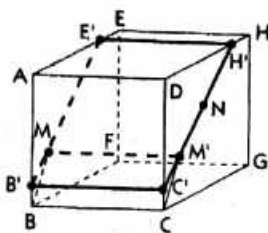
1. I appartient au plan (ABC) et J n'appartient pas à ce plan ; donc la droite (IJ) est sécante à (ABC) et au plan (EFG), qui lui est parallèle.
2. Soit ($\mathcal{P}$) le plan passant par I et J, parallèle au plan (ABF). Les plans ($\mathcal{P}$) et (EFG) sont sécants suivant la droite (Δ), qui passe par les milieux de [FG] et [EH]. L'intersection des droites (IJ) et (Δ) est le point K, qui est aussi l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (EFG).

♦ Exercice n° 2.e p. 129



Si les points I, J, K et L étaient coplanaires, les droites (IJ) et (KL) seraient parallèles, comme intersections du plan contenant ces points avec deux plans parallèles (ABC) et (EFG).

♦ Exercice n° 2.f p. 129



Soit (2) le plan parallèle à (BC), contenant M et N.

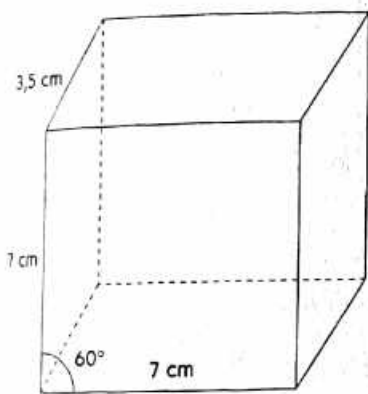
La droite, passant par M et parallèle à (BC), est incluse dans (2) ; elle coupe le plan (DCG) en M', tel que MBCM' soit un rectangle (un parallélogramme en perspective).

(M'N) est alors l'intersection de (2) avec la face (DCG) ; si (M'N) coupe [DC] en C' et [DH] en H', alors l'intersection cherchée est le rectangle B'C'H'E' (un parallélogramme en perspective) tel que : B' ∈ (AB) et E' ∈ (AE).

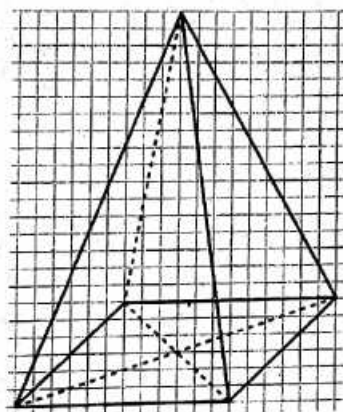
□ Exercices d'apprentissage

PERSPECTIVE CAVALIERE

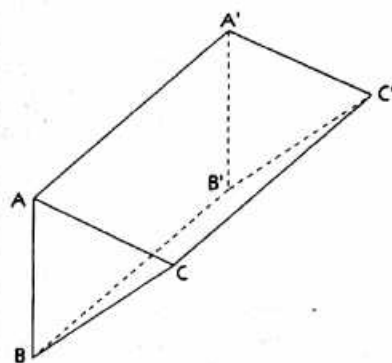
♦ Exercice n° 1 p. 130



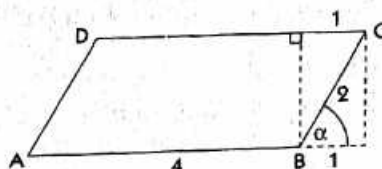
♦ Exercice n° 2 p. 130



♦ Exercice n° 3 p. 130



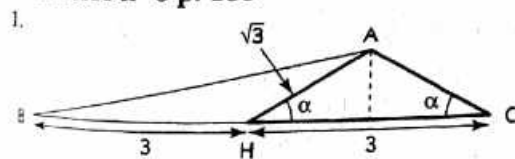
♦ Exercice n° 4 p. 130



$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \text{ donc : } \alpha = 60^\circ.$$

$$k = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

♦ Exercice n° 5 p. 130



• Angle des fuyantes : $\cos \alpha = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
donc : $\alpha = 30^\circ$.

• Coefficient de réduction :

AH est hauteur du triangle équilatéral de côté 6 cm, donc : $AH = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}$;

$$k = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

2. Avec :

• $\alpha = 45^\circ$, $k = \frac{1}{3}$,

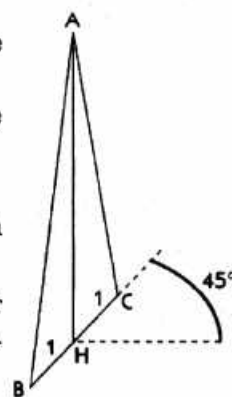
• la hauteur [AH] verticale et vue de face,

• le support de [BC] perpendiculaire au plan vertical de face,

on a :

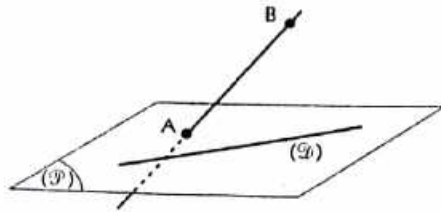
– la hauteur [AH] est représentée en vraie grandeur ($3\sqrt{3}$),

– le côté [BC] est représenté, sur une fuyante, par un segment de longueur : $\frac{6}{3} = 2$.



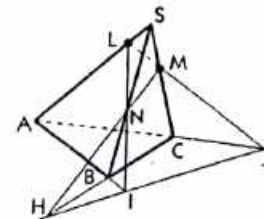
DÉMONSTRATION DE PROPRIÉTÉS

♦ Exercice n° 6 p. 130



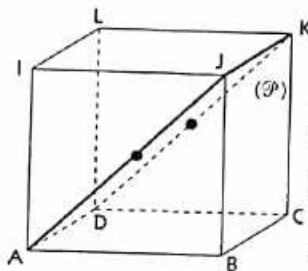
Si (AB) et (D) étaient coplanaires, (AB) serait incluse dans (P) , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse : « B n'appartient pas à (P) ». Donc (AB) et (D) ne sont pas coplanaires.

♦ Exercice n° 7 p. 130



I , J et H appartiennent aux plans (LMN) et (ABC) ; ces plans, qui ne sont pas parallèles, se coupent suivant une droite qui contient les points I , J et H .

♦ Exercice n° 8 p. 130

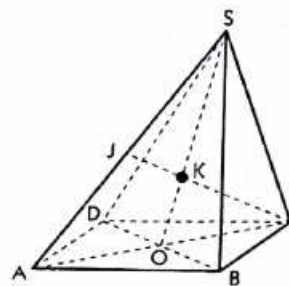


1. $(P) = (ADK)$.

La droite (JK) passe par le point K de (P) et est parallèle à la droite (AD) de ce plan ; elle est donc incluse dans ce plan et J appartient à (P) .

2. Les centres de $ABJI$ et $DCKL$, milieux de $[AJ]$ et $[DK]$, appartiennent aussi à ce plan.

♦ Exercice n° 9 p. 130



1. Les droites (CJ) et (SO) , non parallèles dans le plan (SAC) , sont sécantes en un point K .

2. (SO) est médiane issue de S dans les triangles SAC et SBD . K est, par construction, le centre de gravité de SAC ; donc, $SK = \frac{2}{3} SO$ et K est aussi centre de gravité de SBD .

♦ Exercice n° 10 p. 130

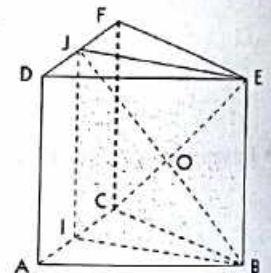
1. Dans le prisme droit $ABCDEF$, les segments $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ sont parallèles et de même longueur.

Dans le rectangle $ACFD$, les segments $[AD]$, $[CF]$, $[IJ]$ sont parallèles et de même longueur.

Donc $[BE]$ et $[IJ]$ sont parallèles et de même longueur et $IBEJ$ est un parallélogramme.

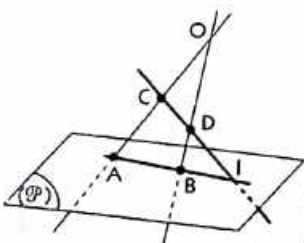
Comme le prisme est droit, $IBEJ$ est un rectangle.

2. Les droites (AO) et (FC) ne sont pas coplanaires, sinon elles le seraient dans le plan (ACF) et le point O serait dans ce plan, ce qui est faux.



DÉTERMINATION D'INTERSECTIONS

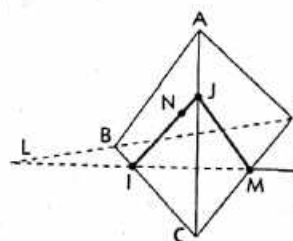
♦ Exercice n° 11 p. 130



A , B , C , D , O appartiennent à un plan (Q) , sécant selon la droite (AB) avec le plan (P) .

Si (CD) et (AB) , droites de (Q) , sont sécantes en un point I , ce point est aussi le point d'intersection de (CD) et de (P) .

♦ Exercice n° 12 p. 131



La section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (LMN) est le triangle MIJ tel que :

- I est le point d'intersection de la droite (LM) et de l'arête $[BC]$.
- J est le point d'intersection de la droite (IN) et de l'arête $[AC]$.

La section est autre si (LM) coupe l'arête $[BD]$ ou si (IN) coupe l'arête $[AB]$.

♦ Exercice n° 13 p. 130

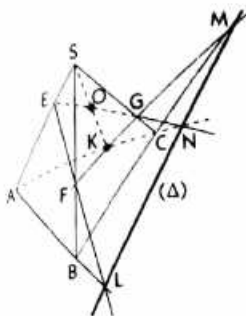


Figure d'illustration pour les questions 1. et 2.

1. La droite (EF) est sécante au plan (ABC) en L, qui est le point d'intersection des droites (EF) et (AB). La droite (FG) [resp. (GE)] est sécante au plan (ABC) en M [resp. N], qui est le point d'intersection des droites (FG) et (BC) [resp. (GE) et (CA)].

Les plans (EFG) et (ABC) sont alors sécants selon la droite (Δ), qui passe par les points L, M et N.

2. Si O est le milieu de [EG], O est intérieur au triangle SAC ; (SO) et (AC) sont alors sécantes au point K, qui est aussi le point d'intersection de (SO) et (ABC).

3. Le centre de gravité P du triangle EFG appartient au plan (SOF), qui est aussi le plan (SKB). Dans ce plan, les droites (SP) et (BK) sont sécantes en I, point d'intersection de (SP) et de (ABC).

À noter que si O' est le milieu de [EF], les droites (SO') et (CI) sont sécantes en un point K' de (AB), qui est aussi le point d'intersection de (SO') et (ABC).

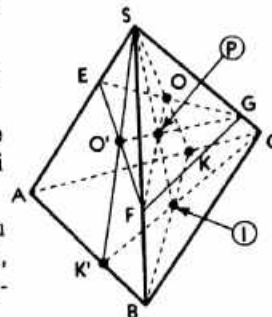
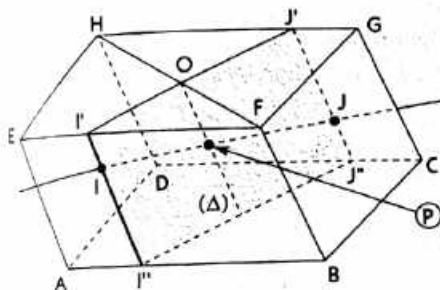


Figure d'illustration pour la question 3.

♦ Exercice n° 14 p. 130



1. Dans le parallélogramme ABFE, $I'I' = EA$ et $(I'I') \parallel (EA)$; dans le parallélogramme DCGH, $J'J' = GC$ et $(J'J') \parallel (GC)$.

Or : $EA = GC$ et $(EA) \parallel (GC)$;

donc, $I'I' = J'J'$, $(I'I') \parallel (J'J')$ et $I'I'J'J'$ est un parallélogramme.

2. Dans le parallélogramme EFGH, le point I', situé sur le côté [EF], et le point J', situé sur le côté [GH], sont de part et d'autre de [FH] ; donc les segments [HF] et [I'J'] se coupent en un point O.

3. La droite (IJ) appartient au plan (P), qui contient I'I'J'J'. Les plans (BFH) et (P), parallèles à la droite (AE), sont sécants suivant une droite (Δ), parallèle à (AE) en O, qui coupe (IJ) au point P cherché.

♦ Exercice n° 15 p. 130

(2) = (MNP).

1. - (2) $\cap$ (SAC) = (MP), par construction.

- $M \in (2) \cap (SAB)$; $P \in (2)$ et $P \notin (SAB)$;
donc (2) et (SAB) sont sécants suivant une droite qui passe par M.

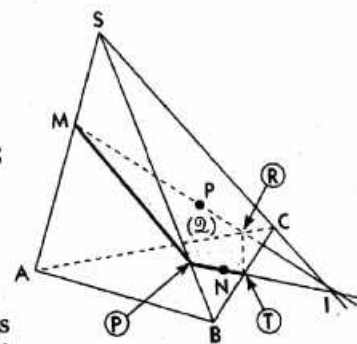
- $M \in (2)$ et $M \notin (SBC)$; $N \in (2)$ et $N \in (SBC)$;
donc (2) et (SBC) sont sécants suivant une droite qui passe par N.

- M et I sont deux points de (2), situés de part et d'autre du plan (ABC) ;
donc (2) et (ABC) sont sécants suivant une droite.

2. [MR] est l'intersection de (2) avec la face SAC.

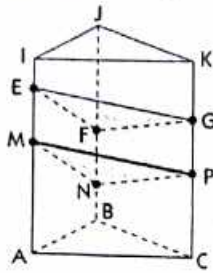
I et N sont deux points de (2) et de (SBC).

Soit T et U les points d'intersection respectifs de (IN) avec [BC] et [SB].
[TU], [MU] et [TR] sont les intersections respectives de (2) avec les faces SBC, SAB et ABC. La section plane recherchée est la région de (2) délimitée par le quadrilatère MRTU.



Exercices d'approfondissement

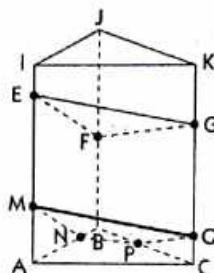
◆ Exercice n° 16 p. 130



Lorsque $IM = 3$ cm, l'intersection du prisme avec $(\mathcal{P})$ est la région délimitée par le triangle MNP, tel que :

- $(MN) \parallel (EF)$ et $N \in [BI]$,
- $(MP) \parallel (EG)$ et $P \in [CK]$.

On a alors $(NP) \parallel (FG)$.



Lorsque $IM = 5$ cm, l'intersection du prisme avec $(\mathcal{P})$ est la région délimitée par le quadrilatère MNPQ, tel que :

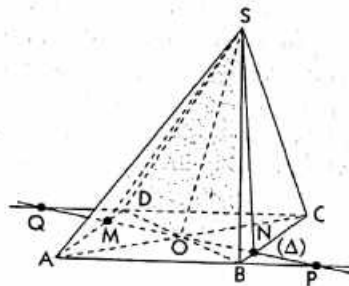
- $(MN) \parallel (EF)$ et $N \in [AB]$,
- $(MQ) \parallel (EG)$ et $Q \in [CK]$,
- $(QP) \parallel (GF)$ et $P \in [BC]$.

◆ Exercice n° 18 p. 130

La droite (Δ) du plan (ABC) , qui passe par le centre O du parallélogramme $ABCD$, coupe respectivement (AD) et (BC) en M et N , (AB) et (CD) en P et Q . Soit $(\mathcal{Q})$ le plan défini par les droites sécantes (Δ) et (SO) .

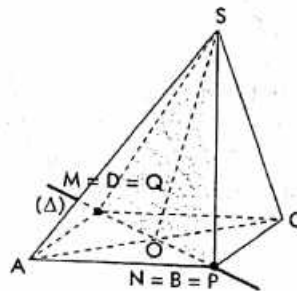
Si $M \in [AD]$, alors $N \in [BC]$ et M et N sont symétriques par rapport à O .

La section plane de la pyramide par $(\mathcal{Q})$ est délimitée par le triangle SMN .



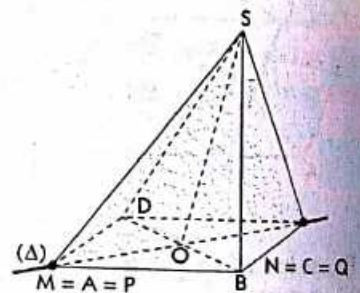
Si $M = D$, alors $N = B$ (de plus $P = N$ et $Q = M$).

La section plane de la pyramide par $(\mathcal{Q})$ est délimitée par le triangle SBD .



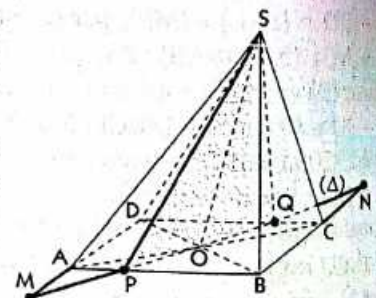
Si $M = A$, alors $N = C$ (de plus $P = M$ et $Q = N$).

La section plane de la pyramide par $(\mathcal{Q})$ est délimitée par le triangle SAC .



Si $M \notin [AD]$, alors $N \notin [BC]$; par contre $P \in [AB]$ et $Q \in [CD]$.

La section plane de la pyramide par $(\mathcal{Q})$ est délimitée par le triangle SPQ .



◆ Exercice n° 19 p. 130

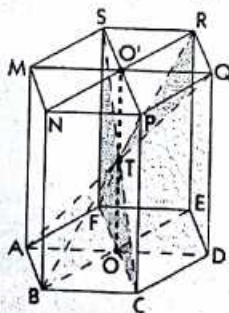


Figure d'illustration pour 1.

1. $ABCDEFMNPQRS$ est un prisme droit, dont les bases $ABCDEF$ et $MNPQRS$ sont des hexagones réguliers de centres respectifs O et O' , tels que :

- $(OO') \parallel (FS) \parallel (DQ) \parallel (ER)$,
- $OO' = FS = DQ = ER$.

Les plans (SFC) , (DQA) et (REB) , qui contiennent chacun la droite (OO') , sont sécants deux à deux, suivant cette droite. De plus, dans le triangle SFC , (OO') est une droite des milieux, qui coupe $[SC]$ en un point T tel que :

$$OT = \frac{1}{2} FS = \frac{1}{2} OO'.$$

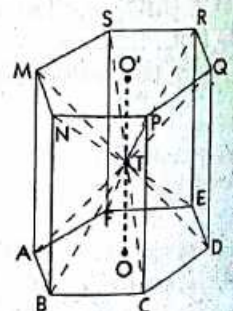
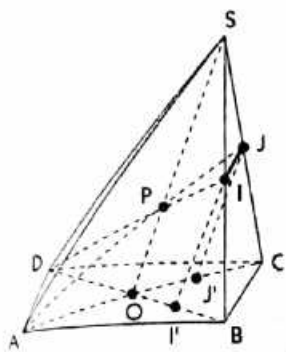


Figure d'illustration pour 2.

De même, dans les triangles DQA et REB, (OO') coupe $[QA]$ et $[RB]$ en T .
 Donc les portions de plans définies par les triangles SFC, DQA et REB ont pour intersection $[OT]$, où T est le milieu de $[OO']$.
 2. Le même raisonnement peut être reproduit pour les portions de plans définies par les triangles MAD, NBE et PCF.
 On en déduit que les droites (QA) , (RB) , (SC) , (MD) , (NE) et (PF) sont concourantes en T .

♦ Exercice n° 20 p. 132



1. Dans le plan (SBC) , I et J sont les milieux respectifs de $[SB]$ et $[SC]$; donc : $(IJ) \parallel (BC)$.
 Or, $(AD) \parallel (BC)$; donc : $(AD) \parallel (IJ)$ et $AIJD$ est un trapèze.
2. I étant un point du plan (SOB) , la parallèle en I à (SO) est une droite de ce plan. Dans le triangle SOB , la parallèle en I à (SO) est une droite des milieux ; elle coupe donc le segment $[OB]$ en son milieu, qui n'est autre que I' .
 De façon analogue, J' est le milieu de $[OC]$.
3. $P \in (DI)$ et (DI) est une droite du plan (SDB) ; donc $P \in (SDB)$.
 $P \in (AJ)$ et (AJ) est une droite du plan (SAC) ; donc $P \in (SAC)$.
 Or, (SO) est l'intersection de (SDB) et (SAC) ; donc $P \in (SO)$.
4. P , point appartenant au plan (AIJ) et à la droite (SO) , est leur point d'intersection.

♦ Exercice n° 21 p.132

1. a) Dans le rectangle $OPQR$, $(NE) \parallel (OP)$; donc, $(NE) \parallel (AB)$ et A, B, N, E sont dans un même plan $(\mathcal{P})$.

Dans $(\mathcal{P})$ les droites (BE) et (AN) , qui ne sont pas parallèles, sont sécantes en un point F . Comme $(AN) \subset (ADR)$, F est aussi le point d'intersection de la droite (BE) avec le plan (ADR) .

- b) On démontre de même que le point d'intersection J de la droite (BI) avec le plan (ADR) est le point d'intersection des droites (BI) et (AM) .

- c) Les points F, R et D appartiennent au plan (ADR) .

Le plan (BPR) contient les points R et D , car $(RD) \parallel (PB)$; or la droite (BE) , qui contient le point F , est incluse dans le même plan, car $E \in (PR)$; donc, les points F, R et D appartiennent au plan (BPR) .

On en déduit que F, R et D appartiennent à deux plans sécants ; ils sont donc alignés.

2. a) Ci-contre le dessin de la face $AORD$, ainsi que les points M, N, F et J .

$$b) AN^2 = AO^2 + ON^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

$$NM^2 = NR^2 + RM^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

$$AM^2 = AD^2 + DM^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4}.$$

$$\text{Or, } \frac{3a^2}{2} + \frac{3a^2}{4} = \frac{9a^2}{4} ; \text{ donc } AMN \text{ est un triangle rectangle en } N.$$

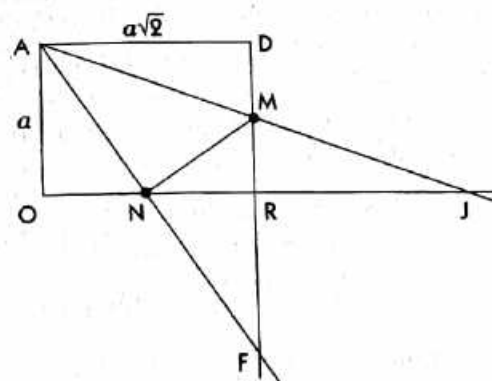
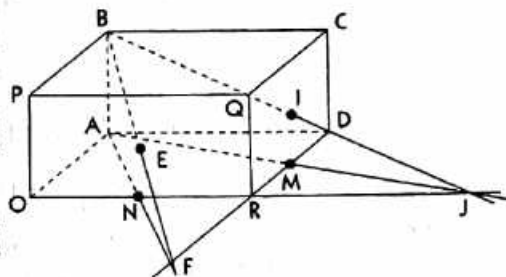
$$3. a) V = a \times a\sqrt{2} \times h = h a^2 \sqrt{2} ; v = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h,$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire du triangle AFI , rectangle en F tel que :

$$AF = 2AN = a\sqrt{6} \text{ et } FJ = 2NM = a\sqrt{3}.$$

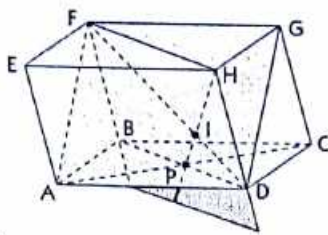
$$\text{Donc, } v = \frac{1}{3} \times \frac{a\sqrt{6} \times a\sqrt{3}}{2} \times h = h a^2 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$b) \text{ On en déduit que : } \frac{V}{v} = 2.$$



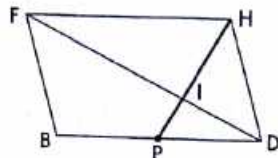
♦ Exercice n° 22 p. 132

1.



La droite (HP) est incluse dans le plan (DBF) ; les plans (DBF) et (ADF) sont sécants suivant la droite (DF). Dans le plan (DBF), les droites (HP) et (DF) ne sont pas parallèles ; elles sont donc sécantes en un point I, qui est aussi le point d'intersection de la droite (HP) avec le plan (ADF).

2. a)

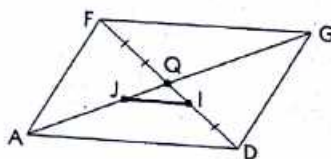
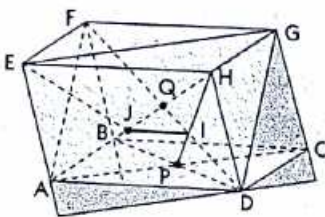


(figure 1)

b) Dans le plan (DBF) et d'après le théorème de Thalès, on a (figure 1) :

$$\frac{ID}{IF} = \frac{DP}{FH} = \frac{1}{2}.$$

3.



(figure 2)

a) La droite (EP) est incluse dans le plan (ACE) ; les plans (ACE) et (ADF) sont sécants suivant la droite (AG). Dans le plan (ACE), les droites (EP) et (AG) sont sécantes en un point J, qui est aussi le point d'intersection de la droite (EP) avec le plan (ADF).

b) Comme à la question 2, dans le plan (ACG), on a :

$$\frac{JA}{JG} = \frac{AP}{GE} = \frac{1}{2}.$$

Soit Q le centre du parallélogramme ADGF (figure 2).

D'une part, Q est le milieu de [FD] et $\frac{ID}{IF} = \frac{1}{2}$; donc : $\frac{QI}{QD} = \frac{1}{3}$.

D'autre part, Q est le milieu de [AG] et $\frac{JA}{JB} = \frac{1}{2}$; donc : $\frac{QJ}{QA} = \frac{1}{3}$.

D'après le théorème de Thalès dans le triangle QAD, on a :

$$(IJ) \parallel (AD) \text{ et } \frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}.$$

♦ Exercice n° 23 p. 132

1. a) Le plan ($\mathcal{P}$), qui est parallèle au plan (SAD), coupe la face SAB suivant un segment [IL], qui est parallèle au segment [AS] ; donc L est le milieu de l'arête [SB].

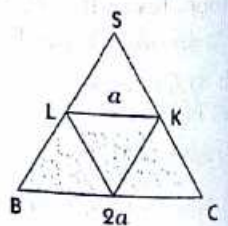
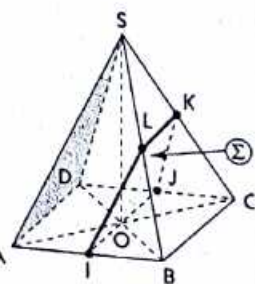
De même, ($\mathcal{P}$) coupe la face SCD suivant un segment [JK], qui est parallèle au segment [DS] ; donc K est le milieu de [SC].

La section Σ de la pyramide par ($\mathcal{P}$) est le quadrilatère IJKL, tel que K et L sont les milieux respectifs de [SC] et [SB].

b) IJKL est donc un trapèze de base [IJ] et [KL] ; ce trapèze est même isocèle.

2. Si $AB = 2a$ et $OS = a\sqrt{2}$, alors $OA = OS = a\sqrt{2}$ et $AS = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a$; donc, la face SAD (comme les 4 faces latérales) est un triangle équilatéral de côté $2a$.

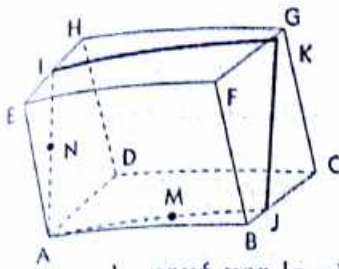
De plus, le trapèze IJKL est superposable au trapèze BCKL ; donc, $\frac{\text{aire}(\Sigma)}{\text{aire}(\text{SAD})} = \frac{3}{4}$.



♦ Exercice n° 24 p.132

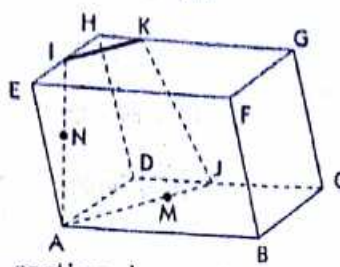
1. A, M et N ne sont pas alignés ; ces points définissent donc un plan, distinct de chacun des plans des faces du pavé. Les plans distincts (AMN) et (ABC) contiennent le point A ; ils sont donc sécants suivant une droite. De plus (ABC) $\parallel$ (EFG) ; donc (AMN) et (EFG) sont aussi sécants suivant une droite. On démontre de même que (AMN) est sécant suivant une droite avec chacun des plans des autres faces du pavé.

2. Les segments [AI] et [AJ] sont les intersections des faces ADHE et ABCD avec le plan (AMN) ; les intersections de (AMN) avec les faces BCGF et EFGH, lorsqu'elles existent, sont des segments respectivement parallèles à [AI] et [AJ].

1^{er} cas

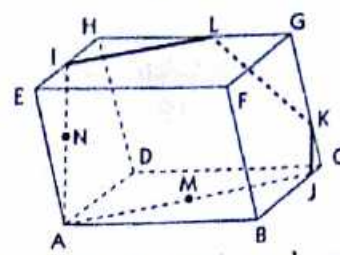
La section du pavé par le plan (AMN) est le parallélogramme AIJK tel que :

- $K \in [FG]$,
- $(JK) \parallel (AI)$ et $(IK) \parallel (AJ)$.

2^e cas

La section du pavé par le plan (AMN) est le trapèze AJKI tel que :

- $K \in [GH]$,
- $(IK) \parallel (AJ)$.

3^e cas

La section du pavé par le plan (AMN) est le polygone AJKLI tel que :

- $K \in [CG]$ et $L \in [GH]$,
- $(JK) \parallel (AI)$ et $(IL) \parallel (AJ)$.

♦ Exercice n° 25 p.132

1. Les points A, M et N ne sont pas alignés et définissent un plan sécant au plan (ADG), dans la mesure où :

- A est commun à ces deux plans,
- M et N, points du premier plan, ne sont pas dans le second plan.

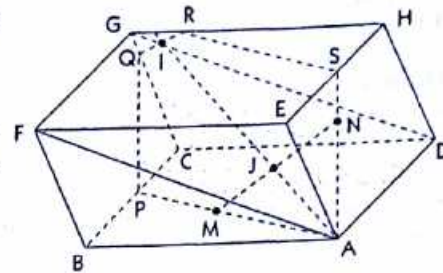
La section du pavé ABCDEFGH par le plan (AMN) est le polygone APQRS tel que :

- P est le point d'intersection de la droite (AM) avec l'arête [BC] ;
- S est le point d'intersection de la droite (AN) avec l'arête [EH] ;
- $Q \in [CG]$ et $(PQ) \parallel (AN)$; $R \in [GH]$ et $(SR) \parallel (AM)$.

Les points D, G, Q et R appartiennent à la face DCGH ; les droites (DG) et (QR) sont donc coplanaires et, sur la figure, sécantes en I.

Ce point I étant à la fois dans (AMN) (comme élément de la droite (QR) de ce plan) et dans (ADG) (comme élément de la droite (GD) de ce plan), les plans (AMN) et (ADG) sont sécants suivant la droite (AI).

2. Les droites (MN) et (AI) sont coplanaires et non parallèles dans (AMN) ; elles sont donc sécantes en un point J, qui est aussi le point d'intersection de la droite (MN) et du plan (ADG).



8. Ensemble des nombres réels

(pages 135 à 154 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- faire le point et approfondir les acquis du collège sur l'ensemble $\mathbb{R}$ et ses règles de calculs ;
- faire le point et approfondir les acquis du collège sur les encadrements ;
- acquérir des procédés concernant le calcul sur les encadrements (valeur absolue, valeurs approchées et approximations décimales, arrondi, notation scientifique, ordre de grandeur) fondamentales en Sciences Expérimentales.

COMMENTAIRES

On étudiera ce chapitre à partir d'exemples variés, l'existence de nombres irrationnels offrant l'occasion de s'initier au raisonnement par l'absurde.

On évitera toutefois tout développement théorique comme tout excès dans les calculs relatifs aux encadrements.

On attirera l'attention de l'élève sur certaines difficultés liées à l'utilisation de la calculatrice (erreur machine, arrondi machine, ...) et on lui inculquera le réflexe de contrôler ses propres calculs.

La résolution de l'inéquation $|x - a| \leq r$ figure ici comme une application des propriétés de la valeur absolue. La résolution générale des inéquations sera traitée au chapitre 11.

SAVOIRS ET SAVOIR - FAIRE

savoirs

Nombres rationnels et irrationnels

- Raisonnement par l'absurde.
- Calculs dans $\mathbb{R}$.

Ordre dans $\mathbb{R}$

- Ordre et opérations.
- Partie entière d'un nombre réel.
- Majorant, minorant, maximum, minimum d'un ensemble.

Valeur absolue

- Définition et propriétés.
- Distance de deux nombres réels :
 - définition ;
 - valeurs approchées à ε près d'un nombre réel, incertitude d'une valeur approchée ;
 - approximations décimales par excès, par défaut d'ordre n d'un nombre réel ;
 - $|x - a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$;
 - complémentaire de A dans E ; notation : $E \setminus A$
- Notation scientifique, ordre de grandeur.

savoir-faire

- Calculer (somme, produit, quotient, puissance).
- Comparer deux nombres réels.
- Encadrer une somme, une différence, un produit, un inverse, un quotient.
- Déterminer la partie entière d'un nombre réel.
- Pour un sous-ensemble simple de $\mathbb{R}$:
 - reconnaître s'il est majoré ou minoré ; si oui, déterminer un majorant ou un minorant ;
 - déterminer, s'il existe, le maximum ou le minimum.
- Écrire une expression sans le symbole valeur absolue.
- Déterminer un encadrement connaissant une valeur approchée à ε près et vice versa.
- Déterminer un encadrement connaissant l'approximation décimale d'ordre n par défaut ou par excès.
- Déterminer un arrondi, une approximation décimale, une valeur approchée.
- Décoder les « erreurs machine ».
- Adapter la précision d'une approximation au contexte.
- Passer d'un encadrement décimal d'ordre n à un encadrement décimal d'ordre inférieur.
- Résoudre une inéquation du type : $|x - a| \leq r$.
- Écrire un nombre en notation scientifique.
- Donner un ordre de grandeur d'un nombre ou d'un résultat.

EXERCICES DU MANUEL

□ Exercices du cours

♦ Exercice n° 1.a p. 140

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{8}{5} - \frac{4}{\sqrt{80}} = \frac{8 - \sqrt{5}}{5} \quad ;$$

$$-\frac{7}{11} + \frac{7}{132} = -\frac{7}{12} \quad ; \quad -\frac{400}{0,5} \times \frac{175}{18\,000} = -\frac{70}{9} \quad ; \quad \frac{10^{-3}}{\frac{4}{10^{-7}}} = 60\,000.$$

♦ Exercice n° 1.b p. 140

Par calculs (réduction au même dénominateur) on démontre que :

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0 ; \quad \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a + b + c.$$

♦ Exercice n° 1.c p. 140

$$2^5 \times 14^3 = 2^8 \times 7^3 ;$$

$$\frac{35^5}{21^4} = 3^{-4} \times 5^5 \times 7 ;$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^8 \times \left(\frac{3}{4}\right)^7 = 2^2 \times 3^{-1}.$$

♦ Exercice n° 1.d p. 140

$$\frac{1}{1-\sqrt{5}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} ;$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} ;$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\sqrt{5}}} = 1 - \frac{1}{5}\sqrt{5}.$$

♦ Exercice n° 1.e p. 140

$$1. 4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2 ;$$

$$9 - 4\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5})^2.$$

$$2. \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} ;$$

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2.$$

♦ Exercice n° 2.a p. 146

$$\bullet (10\sqrt{7})^2 = 700 \text{ et } (8\sqrt{11})^2 = 704 ;$$

$$\text{donc : } 10\sqrt{7} < 8\sqrt{11} \text{ et } 4 - 10\sqrt{7} > 4 - 8\sqrt{11}.$$

$$\bullet \sqrt{5} - \sqrt{2} = 0,8... \text{ et } 2 - \sqrt{3} = 0,3... ;$$

$$\text{donc : } \sqrt{5} - \sqrt{2} > 2 - \sqrt{3} > 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} < \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \text{ et } \frac{-7}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} > \frac{-7}{2 - \sqrt{3}}.$$

♦ Exercice n° 2.b p. 146

$$(4,1)^2 = 16,81 \text{ et } (4,2)^2 = 17,64 ; \text{ donc : } 4,1 < \sqrt{17} < 4,2.$$

♦ Exercice n° 2.c p. 146

$$1. (3 - \sqrt{2})^2 = 11 - 6\sqrt{2} ; \text{ donc : } \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}.$$

$$2. 1 - \sqrt{5} = -\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \text{ et } \sqrt{(\pi - \sqrt{10})^2} = -(\pi - \sqrt{10}).$$

♦ Exercice n° 2.d p. 146

$$1. -4,712\,027 < a\sqrt{3} < -4,707\,576.$$

$$2. 7,387\,524 < a^2 < 7,392\,961.$$

♦ Exercice n° 2.f p. 146

$$1. n \geq 0 \text{ et } n+1 > 0 \Rightarrow \frac{n}{n+1} \geq 0 ;$$

donc B est minoré par 0.

$$\text{De plus, lorsque } n=0, \frac{n}{n+1} = 0 ;$$

donc 0 est un minimum de l'ensemble B.

$$2. 0 \leq n < n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1 ;$$

donc B est majoré par 1.

Supposons qu'il existe un maximum M en $n=k$;

$$\frac{k+1}{k+2} - \frac{k}{k+1} = \frac{1}{(k+2)(k+1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{k+1}{k+2} > \frac{k}{k+1} ;$$

donc B n'a pas de maximum.

♦ Exercice n° 2.e p. 146

$$1. \bullet 2,449\,048 < \sqrt{6} < 2,452\,195 ;$$

$$\bullet \sqrt{\frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}}{2} ;$$

$$\text{donc : } 2,738\,035\,664 < \frac{15}{2} < 2,742\,780\,108 ;$$

$$\bullet \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} ;$$

$$\text{donc : } 0,355\,621 < \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} < 0,357\,287\,5 ;$$

$$\bullet \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{5} ;$$

$$\text{donc : } 1,406\,891\,2 < \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{5}} < 1,408\,415\,2.$$

2. La calculatrice donne :

$$\bullet \sqrt{6} \approx 2,449\,489\,743$$

$$\bullet \sqrt{\frac{15}{2}} \approx 2,738\,612\,788$$

$$\bullet \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 0,356\,393\,958$$

$$\bullet \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{5}} \approx 1,407\,052\,201.$$

♦ Exercice n° 3.a p. 151

$$|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1 ;$$

$$\left| \frac{\sqrt{7} - 2}{3 - \sqrt{10}} \right| = \frac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{10} - 3}.$$

♦ Exercice n° 3.c p. 151

2,165 est une valeur approchée de x à 15×10^{-3} près ;

3,1415 est une valeur approchée de y à 15×10^{-4} près.

♦ Exercice n° 3.b p. 151

Équations
ou inéquations

Ensemble
des solutions

$$|x - 3| = 2$$

$$\{1 ; 5\}$$

$$|2x - 1| = 3$$

$$\{-1 ; 2\}$$

$$|x - 1| \leq 2$$

$$[-1 ; 3]$$

$$|x - 3| > \frac{1}{2}$$

$$]-\infty ; \frac{5}{2}[\cup]\frac{7}{2} ; +\infty[$$

$$|x + 4| > 5$$

$$]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$$

$$|x + 2| \geq 3$$

$$]-\infty ; -5] \cup [1 ; +\infty[$$

♦ Exercice n° 3.d p. 151

$$0,817 \leq \frac{9}{11} \leq 0,819 ; 2,3509 \leq A \leq 2,3511$$

♦ Exercice n° 3.e p. 151

$$16\,000 \times 350 = 5,6 \times 10^6 ; 6 \times 10^{-3} \times 0,02 = 1,2 \times 10^{-4} ;$$

$$\frac{360 \times 10^5}{0,004} = 9 \times 10^9 ;$$

$$31,2 \times 10^{-15} - 17,3 \times 10^{-14} = -1,418 \times 10^{-13} ;$$

$$20^5 = 3,2 \times 10^6 ;$$

$$(27,3 \times 10^{-7}) \times (-31 \times 10^{48}) = -8,463 \times 10^{43} ;$$

$$\frac{(0,025)^3 \times (0,02)^5}{(4\,000)^3} = 7,8125 \times 10^{-25}.$$

♦ Exercice n° 3.h p. 151

$$1. \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}.$$

$$2. \text{ Pour } x = 10^{-9}, \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = 0,499 \text{ et } \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \approx 4,999\,999 \dots$$

Exercices d'apprentissage

CALCULS DANS $\mathbb{R}$

♦ Exercice n° 1 p. 152

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} ; \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} ; \frac{2}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} = -6 ; \frac{3-\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}} = \frac{14}{25} ; \frac{4-\frac{2}{3}}{4} = \frac{5}{6} ; \frac{3-\frac{2}{5}}{4+\frac{2}{5}} \div \frac{4-\frac{6}{7}}{\frac{5}{7}+\frac{3}{7}} = -8 ; \frac{3+\frac{2}{3}}{\frac{5}{5}-\frac{2}{3}} \times \frac{4-\frac{3}{4}}{\frac{5}{5}+\frac{3}{4}} \div \frac{2+\frac{5}{6}}{2-\frac{5}{6}} = -\frac{133}{527}$$

♦ Exercice n° 2 p. 152

$$\frac{8^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^5 \times 2^6} = 2^3 \times 5 \times 7^{-2} ; \frac{(3^4 \times 2^{-3})^3}{(9^{-1} \times 2^2)^4} = 2^{-17} \times 3^{20} ;$$

$$\frac{0,081 \times 0,36 \times 2\,560}{0,144 \times 2,16 \times 64} = 2^{-2} \times 3 \times 5 ;$$

$$\frac{(0,6)^2 \times 12^5 \times 54^3}{9^2 \times 5^3 \times (0,8)^3 \times (0,4)^4} = 2^3 \times 3^{12} \times 5^2 ;$$

$$\frac{10^2 \times 3^2}{8 \times 5^2} \div \sqrt{\frac{2^5 \times 3^9}{6}} = 2^{-3} \times 3^{-2}.$$

♦ Exercice n° 4 p. 152

$$\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \sqrt{4,5} ;$$

$$\sqrt{\sqrt{2}+1} \times \sqrt{\sqrt{2}-1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} \\ = \sqrt{2-1} = 1.$$

♦ Exercice n° 6 p. 152

$$a) \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a-b}) \times (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \times (\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \times (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} ;$$

$$b) (\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}})^2 = a + \sqrt{a^2-b^2} + a - \sqrt{a^2-b^2} + 2\sqrt{(a+\sqrt{a^2-b^2})(a-\sqrt{a^2-b^2})} \\ = 2a + 2\sqrt{a^2-(a^2-b^2)} = 2(a+b) \quad (\text{car } b \geq 0).$$

♦ Exercice n° 3.f p. 151

$$9,054 \times 10^{-6} \times 7,525 \times 10^{-7} \approx 9 \times 10^{-6} \times 8 \times 10^{-7} \\ \approx 7 \times 10^{-12} ;$$

$$2,975 \times 10^{-4} \div 6,5241 \times 10^{-5} \approx 3 \times 10^{-4} \div 7 \times 10^{-5} \\ \approx 4 ;$$

$$\sqrt{9,3425 \times 10^{18}} \approx \sqrt{9 \times 10^{18}} = 3 \times 10^9.$$

♦ Exercice n° 3.g p. 151

$$1. \frac{265}{153} > 1,732\,026 ; \frac{1\,351}{780} < 1,732\,052 ;$$

$$\sqrt{3} \approx 1,732\,050\,808. \text{ Donc : } \frac{265}{153} \leq \sqrt{3} \leq \frac{1\,351}{780}.$$

$$2. \frac{1\,351}{780} - \frac{265}{153} \approx 0,000\,025 \dots ; \text{ donc } \frac{265}{153} \text{ et } \frac{1\,351}{780} \\ \text{ sont des valeurs approchées de } \sqrt{3} \text{ à } 3 \times 10^{-5} \text{ près.}$$

♦ Exercice n° 3 p. 152

$$\sqrt{72} = 6\sqrt{2} ; \sqrt{635} = 15\sqrt{3} ; \sqrt{1\,080} = 6\sqrt{30} ;$$

$$\sqrt{54} - \sqrt{24} + \sqrt{150} = 6\sqrt{6} ;$$

$$\sqrt{20} - 2\sqrt{125} + \sqrt{180} = -2\sqrt{5} ;$$

$$-\frac{14}{\sqrt{7}} = -2\sqrt{7} ; \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{15}}{7} ;$$

$$\frac{\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

♦ Exercice n° 5 p. 152

$$a) 2 + \sqrt{5} = \sqrt{9+4\sqrt{5}} ;$$

$$b) \sqrt{2} - \sqrt{7} = -\sqrt{9-2\sqrt{14}}.$$

♦ Exercice n° 7 p. 152

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$; donc, sous réserve d'existence des différents quotients :

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}, \text{ car } a(b+d) = b(a+c) ; \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d} \text{ car } (a+c)(b-d) = ab - ad + cb - cd$$

$$= ab - bc + ad - cd = (a-c)(b+d) ;$$

un raisonnement analogue permet de démontrer les quatre autres égalités.

ORDRE DANS $\mathbb{R}$

♦ Exercice n° 8 p. 152

a) $\frac{23}{99} = \frac{230}{990} \Rightarrow \frac{23}{99} < \frac{231}{990}$; b) $\frac{99}{23} = \frac{990}{230} \Rightarrow \frac{99}{23} > \frac{990}{231}$; c) $23 \times 999 = 21\,978$ et $99 \times 239 = 23\,661 \Rightarrow \frac{23}{99} < \frac{239}{999}$;

d) $9^5 = 3^{10} \Rightarrow 3^{11} > 9^5$;

e) $(2\sqrt{3})^2 = 12$ et $(3\sqrt{2})^2 = 18 \Rightarrow 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$;

f) $((\sqrt{5})^7)^2 = 5^7$ et $(5^4)^2 = 5^8 \Rightarrow (\sqrt{5})^7 < 5^4$; g) $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$ et $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0 \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} < \sqrt{3} - \sqrt{2}$;

h) $(\sqrt{13} + \sqrt{8})^2 = 21 + 2\sqrt{104}$ et $(\sqrt{14} + \sqrt{7})^2 = 21 + 2\sqrt{98} \Rightarrow \sqrt{13} + \sqrt{8} > \sqrt{14} + \sqrt{7}$;

i) $\sqrt{5} - \sqrt{2} > 0$, $2 - \sqrt{3} > 0$, $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 7 - 2\sqrt{10} = 7 - \sqrt{40}$ et $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3} = 7 - \sqrt{48} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} > \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$;

j) $7 - 3\sqrt{5} = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})^2$ et $3 - \sqrt{5} < 1 \Rightarrow 7 - 3\sqrt{5} < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

♦ Exercice n° 9 p. 152

a) $\frac{25}{28} < \frac{26}{28} < \frac{27}{28} < \frac{28}{27} < \frac{28}{26} < \frac{28}{25}$;

b) $(\sqrt{17} + 3\sqrt{2})^2 = 35 + 6\sqrt{34} = 35 + 2\sqrt{306}$,

$(4 + \sqrt{19})^2 = 35 + 8\sqrt{19} = 35 + 2\sqrt{304}$,

$(\sqrt{5}(\sqrt{3} + 2))^2 = 35 + 2\sqrt{300}$;

donc : $\sqrt{5}(\sqrt{3} + 2) < 4 + \sqrt{19} < \sqrt{17} + 3\sqrt{2}$.

♦ Exercice n° 11 p. 152

a, b et c sont des nombres réels strictement positifs.

1. $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{c(a-b)}{b(b+c)}$; donc :

• si $a < b$, alors : $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$;

• si $a > b$, alors : $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$;

• si $a = b$, alors : $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+c}$.

2. $3 < 7 \Rightarrow \frac{3}{7} < \frac{3+\sqrt{2}}{7+\sqrt{2}}$;

$\sqrt{7} > \sqrt{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} > \frac{\sqrt{7}+\sqrt{11}}{\sqrt{5}+\sqrt{11}}$.

♦ Exercice n° 13 p. 152

x et y sont des nombres réels strictement positifs.

a) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{(x-y)^2}{xy} \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$;

b) $x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$, $x < \sqrt{xy}$ et $\sqrt{xy} < y$;
 $\Rightarrow x < \sqrt{xy} < y$;

c) $\frac{1}{x+y} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{xy - (x+y)^2}{xy(x+y)} = \frac{-x^2 - y^2 - xy}{xy(x+y)}$;

donc : $\frac{1}{x+y} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;

♦ Exercice n° 10 p. 152

1. $1 - a > 0$ et $1 - b > 0 \Rightarrow (1-a)(1-b) > 0$.

2. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ et $1 + \frac{1}{ab} = \frac{ab+1}{ab}$;

or $(1-a)(1-b) > 0 \Rightarrow ab+1 > a+b$;

par ailleurs : $ab > 0$;

donc : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 + \frac{1}{ab}$.

♦ Exercice n° 12 p. 152

Lorsque a, b, c et d sont strictement positifs,

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$.

1. a) $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{ad-bc}{b(b+d)} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$;

b) $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} \Rightarrow \frac{c}{d} > \frac{a+c}{b+d}$.

2. a) $\frac{3}{7} < \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{3}{7} < \frac{8}{11} < \frac{5}{4}$;

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} < \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{13}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} < \frac{\sqrt{3}+\sqrt{17}}{\sqrt{11}+\sqrt{13}} < \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{13}}$.

d) $x + y < x + 2\sqrt{xy} + y$

$x + 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$;

donc : $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

♦ Exercice n° 14 p. 152

1. $(y-x)(y^2+xy+x^2) = y^3-x^3$,

2. $y^2+xy+x^2 = (y^2+xy+\frac{x^2}{4}) + \frac{3}{4}x^2$
 $= (y+\frac{x}{2})^2 + \frac{3}{4}x^2$.

3. D'après 2, $y^2+xy+x^2 \geq 0$;
 de plus d'après 1, si $x \leq y$ alors $x^3 \leq y^3$.

♦ Exercice n° 16 p. 152

1. Immédiat.

2. On suppose a et b positifs.

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 - \frac{a^3+b^3}{2} &= \frac{1}{8}(-3a^3+3a^2b+3ab^2-3b^3) \\ &= -\frac{3}{8}(a^2(a-b)) + \frac{3}{8}(b^2(a-b)) \\ &= -\frac{3}{8}(a-b)^2(a+b) \\ &\leq 0; \end{aligned}$$

donc : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$.

VALEUR ABSOLUE

♦ Exercice n° 19 p. 153

1. $(|a+b|)^2 = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(|a|+|b|)^2 = |a|^2+2|a||b|+|b|^2 = a^2+2|ab|+b^2$;
 donc si $|a+b| = |a|+|b|$, alors : $|ab| = ab$; c'est-à-dire : a et b sont de même signe.

2. • Si a et b sont positifs, alors : $|a| = a$, $|b| = b$ et $|a+b| = a+b$; donc : $|a+b| = |a|+|b|$.

• Si a et b sont négatifs, alors : $|a| = -a$, $|b| = -b$ et $|a+b| = -a-b$; donc : $|a+b| = |a|+|b|$.

3. $|x^2-3x+1| = |x^2|+|-3x+1| \Leftrightarrow x^2$ et $-3x+1$ sont de même signe (d'après ce qui précède).
 Donc, l'ensemble des solutions de cette équation est : $]-\infty; \frac{1}{3}]$.

♦ Exercice n° 20 p. 153

a) L'ensemble des solutions de l'équation $|4x+3| = 2$ est : $\{-\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}\}$;

b) L'ensemble des solutions de l'équation $|-x+1| = -2$ est : $\emptyset$.

♦ Exercice n° 21 p. 153

a) $x \in [2; 3]$ $2 \leq x \leq 3$ $ x - \frac{5}{2} \leq \frac{1}{2}$ 	b) $x \in]1; 5[$ $1 < x < 5$ $ x - 3 < 2$ 	c) $-6 \leq x \leq -2$ $x \in [-6; -2]$ $ x + 4 \leq 2$ 	d) $-5 < 2x < 5$ $x \in]-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}[$ $ x < \frac{5}{2}$
e) $ x+2 \leq 2$ $x \in [-4; 0]$ $-4 \leq x \leq 0$ 	f) $ 3-x < 4$ $x \in]-1; 7[$ $-1 < x < 7$ 	g) $4 \leq x \leq 6$ $x \in [4; 6]$ $ x-5 \leq 1$ 	h) $-3 < x < 1$ $x \in]-3; 1[$ $ x+1 < 2$

♦ Exercice n° 22 p. 153

A $ x-1 \leq 2$	B $ x-1 \geq 2$	C $ x+3.5 < 1.5$	D $ x+3.5 > 1.5$
---------------------	---------------------	----------------------	----------------------

♦ Exercice n° 15 p. 152

1. si $0 < a < 1$, alors :

• $a^2 < a$, $a < \sqrt{a}$, $a < \frac{1}{a}$;

• $a^2 < a < \sqrt{a} < 1 < \frac{1}{a}$.

2. si $a > 1$, alors : $\frac{1}{a} < 1 < \sqrt{a} < a < a^2$.

♦ Exercice n° 17 p. 153

1. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$; donc : $2xy \leq x^2 + y^2$ (1).

2. De même : $2yz \leq y^2 + z^2$ (2) et $2xz \leq x^2 + z^2$ (3).

En additionnant les inégalités (1), (2) et (3),
 on obtient : $xy + xz + yz \leq x^2 + y^2 + z^2$.

♦ Exercice n° 18 p. 153

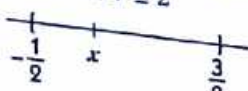
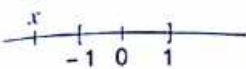
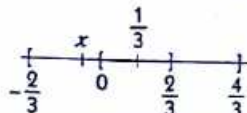
$(ac+bd)^2 = a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2$;

$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$.

or, d'après l'exercice 17, $2(ad)(bc) \leq a^2d^2 + b^2c^2$;

donc : $(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

♦ Exercice n° 23 p. 153

a) $x-1 \leq 3$  $x \in [-2; 4]$	b) $2x-1 \leq 2$  $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$	c) $x+2 < -2$ Cette inégalité n'est jamais vérifiée car une valeur absolue est toujours positive.
d) $x > 1$  $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$	e) $x-2 \geq -\frac{1}{2}$ Cette inégalité est toujours vérifiée. $x \in \mathbb{R}$	f) $1 < 3x-1 \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-\frac{2}{3}; 0[\cup]\frac{2}{3}; \frac{4}{3}]$ 

CALCULS APPROCHÉS

♦ Exercice n° 24 p. 153

Si $A(x) = 2x^3 - 5$ et $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, alors : $0,606\,442 < A(\sqrt{2}) < 0,726\,576$.

♦ Exercice n° 25 p. 153

- a) $5,4 < x+y < 5,6$; $-1,3 < x-y < -1,1$; $6,93 < xy < 7,48$; $4,41 < x^2 < 4,84$;
 $0,45 < \frac{1}{x} < 0,48$; $0,61 < \frac{x}{y} < 0,67$.
- b) $3,5 < x+y < 3,7$; $-6,6 < x-y < -6,4$; $-7,65 < xy < -7$; $1,96 < x^2 < 2,25$;
 $-0,71 < \frac{1}{x} < -0,67$; $-0,3 < \frac{x}{y} < -0,27$.
- c) $-5 < x+y < -4,8$; $-3,3 < x-y < -3,1$; $3,2 < xy < 3,69$; $16 < x^2 < 16,81$;
 $-0,25 < \frac{1}{x} < -0,24$; $4,444 < \frac{x}{y} < 5,125$.

♦ Exercice n° 26 p. 153

1. $5,7 < \sqrt{5} + 2\sqrt{3} < 5,703$; $-0,363\,5 < \frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2} < -0,361$.

2. $\sqrt{5} - \sqrt{3} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

$0,503 < \sqrt{5} - \sqrt{3} < 0,505$; $0,503\,7 < \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} < 0,504\,1$.

Les encadrements de $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ et $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ sont très voisins mais ne permettent pas de conclure à l'égalité de ces deux nombres.

3. a) $387 \times 10^{-2} < \sqrt{15} < 388 \times 10^{-2}$; b) $129 \times 10^{-2} < \sqrt{\frac{5}{3}} < 130 \times 10^{-2}$.

♦ Exercice n° 27 p. 153

1^{er} cas

$59,62 < \mathcal{A} < 63,52$;

$29,946 < \mathcal{V} < 33,024$.

2^e cas

$213,18 < \mathcal{A} < 220,76$;

$182,952 < \mathcal{V} < 193,8$.

♦ Exercice n° 28 p. 153

1^{er} cas

$133,492\,5 < \mathcal{A} < 142,144\,08$;

$117,787\,5 < \mathcal{V} < 129,563\,512$.

2^e cas

$297,028\,036\,8 < \mathcal{A} < 306,171\,561\,6$;

$393,062\,101\,6 < \mathcal{V} < 411,285\,412\,1$.

♦ Exercice n° 29 p. 153

1^{er} cas

$615,636 < \mathcal{A} < 669,748\,72$;

$1\,436,484 < \mathcal{V} < 1\,629,721\,885$.

2^e cas

$449,293\,665\,6 < \mathcal{A} < 455,469\,347\,2$;

$895,592\,040\,1 < \mathcal{V} < 913,975\,156\,7$.

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n° 30 p. 153

$$0 < x < y; a = \frac{x+y}{2}, g = \sqrt{xy} \text{ et } h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

$$1. h - x = \frac{2xy - x(x+y)}{x+y} = \frac{x(x-y)}{x+y}; \text{ donc : } h - x > 0 \text{ et } x < h.$$

$$\bullet a = \frac{x+y}{2} \text{ et } x+y < 2y; \text{ donc : } a < y.$$

$$2. a^2 - g^2 = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} - xy = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4} = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2; \text{ donc : } a^2 > g^2 \text{ et } g < a.$$

$$3. ah = \frac{x+y}{2} \times \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = xy = g^2. g < a < y \text{ et } x < h \Rightarrow g^2 < ag \text{ et } ah < ag \Rightarrow h < g.$$

$$4. \text{ On en déduit que : } x < h < g < a < y.$$

♦ Exercice n° 31 p. 154

$$1. 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}.$$

$$2. \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{19^2}\right)\left(1 - \frac{1}{20^2}\right) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}\right) \dots \left(\frac{18}{19} \times \frac{20}{19}\right)\left(\frac{19}{20} \times \frac{21}{20}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{21}{20} = \frac{21}{40}.$$

♦ Exercice n° 32 p. 154

$$1. S - \frac{1}{2}S = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

$$2. \text{ On en déduit que : } S = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} \text{ et } S < 2.$$

♦ Exercice n° 33 p. 154

$$1. \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

$$2. \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}} = 1 + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) = 10.$$

♦ Exercice n° 34 p. 154

$$1. a_1 - A = \frac{3a_1 - a_2 - a_3 - a_4}{4}; a_2 - A = \frac{3a_2 - a_1 - a_3 - a_4}{4}; a_3 - A = \frac{3a_3 - a_1 - a_2 - a_4}{4}; a_4 - A = \frac{3a_4 - a_1 - a_2 - a_3}{4};$$

$$\text{donc : } R = (a_1 - A) + (a_2 - A) + (a_3 - A) + (a_4 - A) = 0.$$

$$2. S = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 4A^2 - 2A(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 4Q^2 + 4A^2 - 8A^2 = 4(Q^2 - A^2).$$

Or : $S \geq 0$; donc : $Q^2 \geq A^2$ et $Q \geq A$, puisque Q et A sont positifs.

♦ Exercice n° 35 p. 154

$$|x| < 1 \text{ et } |y| < 1.$$

$$1. |xy| = |x| |y|; \text{ donc : } |xy| < 1, -1 < xy < 1 \text{ et } 1 + xy > 0.$$

$$2. (1-x)(1-y) = 1 - x - y + xy \quad (1) \text{ et } (1+x)(1+y) = 1 + x + y + xy \quad (2).$$

$$3. \left. \begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x+y = 1+xy - (1+x)(1+y) \Leftrightarrow \frac{x+y}{1+xy} = 1 - \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} \Leftrightarrow \frac{x+y}{1+xy} < 1. \\ (2) &\Leftrightarrow x+y = (1+x)(1+y) - 1 - xy \Leftrightarrow \frac{x+y}{1+xy} = \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} - 1 \Leftrightarrow \frac{x+y}{1+xy} > -1. \end{aligned} \right\} \text{ Donc : } \left| \frac{x+y}{1+xy} \right| < 1.$$

♦ Exercice n° 36 p. 154

$$1. 4 > 2 \Rightarrow 2 > \sqrt{2}.$$

$$2. \text{ Soit } b > \sqrt{2}. \text{ On a : } \frac{1}{b} < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2}{b} < \sqrt{2};$$

$$\frac{1}{2}\left(b + \frac{2}{b}\right) - \sqrt{2} = \frac{b^2 - 2\sqrt{2}b + 2}{2b} = \frac{(b - \sqrt{2})^2}{2b} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(b + \frac{2}{b}\right) > \sqrt{2}.$$

3. De la double inégalité $\frac{2}{b} < \sqrt{2} < \frac{1}{2}(b + \frac{2}{b})$, on déduit le tableau suivant :

b	$\frac{2}{b}$	$\frac{1}{2}(b + \frac{2}{b})$	Encadrements	b	$\frac{2}{b}$	$\frac{1}{2}(b + \frac{2}{b})$	Encadrements
2	1	$\frac{3}{2}$	$1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{24}{17}$	$\frac{577}{408}$	$\frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{577}{408}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$	$\frac{816}{577}$	$\frac{665\ 857}{470\ 832}$	$\frac{816}{577} < \sqrt{2} < \frac{665\ 857}{470\ 832}$

À l'aide du dernier encadrement, on obtient : $1,414\ 211 < \sqrt{2} < 1,414\ 214$.

♦ Exercice n° 37 p. 154

y est un nombre réel strictement positif.

$$1. (1 + \frac{4}{y+1}) - \sqrt{5} = \frac{y+5}{y+1} - \sqrt{5} = \frac{(1-\sqrt{5})y + (5-\sqrt{5})}{y+1} = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-y)}{y+1}.$$

Donc : si $y < \sqrt{5}$, alors $1 + \frac{4}{y+1} > \sqrt{5}$; si $y > \sqrt{5}$, alors $1 + \frac{4}{y+1} < \sqrt{5}$.

2. et 3. On a finalement : si $y < \sqrt{5}$, alors $y < \sqrt{5} < 1 + \frac{4}{y+1}$; si $y > \sqrt{5}$, alors $1 + \frac{4}{y+1} < \sqrt{5} < y$.

Ces résultats justifient les quatre premières colonnes du tableau et permet de compléter les trois colonnes suivantes.

y	$1 + \frac{4}{y+1}$	Encadrements	y	$1 + \frac{4}{y+1}$	Encadrements
1	3	$1 < \sqrt{5} < 3$	$\frac{11}{5}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{5} < \sqrt{5} < \frac{9}{4}$
3	2	$2 < \sqrt{5} < 3$	$\frac{9}{4}$	$\frac{29}{13}$	$\frac{29}{13} < \sqrt{5} < \frac{9}{4}$
2	$\frac{7}{3}$	$2 < \sqrt{5} < \frac{7}{3}$	$\frac{29}{13}$	$\frac{47}{21}$	$\frac{29}{13} < \sqrt{5} < \frac{47}{21}$
$\frac{7}{3}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{11}{5} < \sqrt{5} < \frac{7}{3}$			

À l'aide du dernier encadrement, on obtient : $2,230 < \sqrt{5} < 2,239$.

♦ Exercice n° 38 p. 154

$L \times l = 121$ et $0 < l \leq L$;

donc : $l^2 \leq 121 \leq L^2$ et $l \leq 11 \leq L$.

♦ Exercice n° 39 p. 154

1. $1,725 \leq \sqrt{3} < 1,735$ et $2,235 \leq \sqrt{5} < 2,245$.

2. $9,705 \leq 3\sqrt{5} + 3 \leq 9,735$

et $9,625 \leq 5\sqrt{3} + 1 \leq 9,675$;

on en déduit que : $5\sqrt{3} + 1 \leq 3\sqrt{5} + 3$.

♦ Exercice n° 40 p. 154

1. $3,05 \leq \pi < 3,15$ et $1,35 \leq \sqrt{2} < 1,45$.

Donc : $4,117\ 5 \leq \pi\sqrt{2} < 4,567\ 5$.

Tout nombre réel de l'intervalle $[4,1 ; 4,6]$ (en particulier le centre de cet intervalle : 4,35) est une valeur approchée de $\pi\sqrt{2}$ à 5×10^{-1} près.

2. $6,75 \leq 5\sqrt{2} < 7,25$ et $7,625 \leq \frac{5}{2}\pi < 7,875$;

on en déduit que : $5\sqrt{2} < \frac{5}{2}\pi$.

♦ Exercice n° 41 p. 154

Soit V et P le volume en cm^3 et le poids en grammes du solide. La masse volumique μ est telle que : $\mu = \frac{P}{V}$.

1. $21,4 \leq V \leq 21,6$ et $299,8 \leq P \leq 300,2$;

donc : $13,87 \leq \mu \leq 14,03$.

2. On en déduit que $13,95 \text{ g/cm}^3$ est une valeur approchée de μ avec une incertitude de 8×10^{-2} .

♦ Exercice n° 42 p. 154

1. L'aire de la couronne est $\mathcal{A}$ telle que : $\mathcal{A} = \pi(R^2 - r^2)$.

2. $2,555 \leq R < 2,565$; $1,205 \leq r < 1,215$;

$3,135 \leq \pi < 3,145$.

On en déduit que : $20,465 \leq \pi R^2 < 20,692$;

$4,552 \leq \pi r^2 < 4,643$; $15,822 < \mathcal{A} < 16,140$.

Tout nombre réel de l'intervalle $[15,822 ; 16,140]$ (en particulier le centre de cet intervalle : 15,981) est une valeur approchée de l'aire de la couronne, avec une incertitude de 0,159.

9. Fonctions

(pages 155 à 172 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à présenter la notion de fonction, dans ses principaux aspects numériques et graphiques.

COMMENTAIRES

Ce chapitre est consacré aux notions de fonction, d'ensemble de définition et de représentation graphique d'une fonction. Ces thèmes, nouveaux et délicats, doivent être traités avec beaucoup d'attention.

L'utilisation d'une représentation graphique permettra de déterminer l'image et les antécédents d'un nombre, l'image directe et l'image réciproque d'un ensemble.

Lorsque la fonction est définie par une formule, les calculs permettront de déterminer, dans certains cas, les variations d'une fonction et un éventuel maximum (ou minimum).

On veillera à ce que les études de fonctions, visant à déterminer l'ensemble de définition, une image ou des antécédents, ou établir un sens de variation, se ramènent à des équations ou inéquations du premier degré.

SAVOIRS ET SAVOIR – FAIRE

savoirs

Généralités sur les fonctions

- Notion de fonction. Vocabulaire : ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image ou antécédent d'un nombre.
- Exemples.
- Ensemble de définition.
- Représentation graphique.
- Fonctions égales sur un ensemble.

Étude graphique

- Image directe d'un ensemble.
- Image réciproque d'un ensemble.

Variations d'une fonction

- Maximum, minimum d'une fonction.
- Sens de variation d'une fonction :
 - fonction croissante sur un intervalle,
 - fonction décroissante sur un intervalle,
 - fonction monotone sur un intervalle.

savoir-faire

- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.
- Reconnaître une représentation graphique de fonction.
- Reconnaître une fonction déterminée par une expression numérique.
- Déterminer l'image d'un nombre réel par une fonction.
- Déterminer l'antécédent d'un nombre réel par une fonction.
- Vérifier par le calcul ou graphiquement que des fonctions sont égales sur un ensemble.

- Déterminer graphiquement l'image d'un nombre, le ou les antécédents d'un nombre, l'image directe, l'image réciproque d'un ensemble.

- Déterminer, par calcul ou graphiquement, le maximum ou le minimum d'une fonction sur un ensemble.
- Le graphique d'une fonction étant donné, étudier ses variations et établir un tableau de variation.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice n° 1.a p. 161

$$f(1) = \frac{1}{22}, f(0) = \frac{1}{3}, f(-3,5) = -\frac{8}{67} \text{ et } f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{27}{865}.$$

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)^3 - 5}.$$

♦ Exercice n° 1.b p. 161

$$f(x) = (2x+3) - \sqrt{x+8}.$$

♦ Exercice n° 1.c p. 161

Si $f(x) = \frac{65x}{93x + 458}$ alors :

• $f(527) = \frac{34\,255}{49\,469}$, $f(-316) = \frac{20\,540}{28\,930} = \frac{2\,054}{2\,893}$, $f(1\,092) = \frac{70\,980}{102\,014}$ et $f(-16,358) = \frac{1\,063\,270}{1\,063\,294}$;

• 1 997, -22 et 4 ont pour antécédents respectifs par f : $-\frac{914\,626}{185\,656} = -\frac{457\,313}{92\,828}$, $-\frac{10\,076}{2\,111}$ et $-\frac{1\,832}{307}$.

♦ Exercice n° 1.d p. 161

$D_f = \mathbb{R}$; $D_g =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

$D_i =]-\infty ; -\sqrt{17}[\cup]-\sqrt{17} ; \sqrt{17}[\cup]\sqrt{17} ; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{17} ; \sqrt{17}\}$;

$D_m =]1 ; +\infty[$; $D_n = [-3 ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[= [-3 ; +\infty[\setminus \{-1 ; 1\}$.

$D_h = \mathbb{R}_-$;

$D_l = \mathbb{R}$;

♦ Exercice n° 2.a p. 165

- Les deux nombres qui ont le nombre 1 pour image sont : 0 et 2.
- -1 a pour antécédent -1 ; 0 a pour antécédent 1.

♦ Exercice n° 2.b p. 165

• L'image directe par f de $[-2 ; 1]$ est $[-2 ; 2]$; celle de $[-2 ; 3]$ est $[-2 ; 2]$; celle de $[-2 ; 5]$ est $[-2 ; 4]$.

• L'image réciproque par f de $[0 ; 2]$ est $[-5 ; -4] \cup [0 ; 2] \cup [\frac{7}{2} ; 4]$;

l'image réciproque par f de $[-3 ; 2]$ est $[-5 ; 4]$; l'image réciproque par f de $[-2 ; 0]$ est $[-4 ; 0] \cup [2 ; \frac{7}{2}]$.

♦ Exercice n° 3.a p. 166

Si $f(x) = -3(x+7)^2$, alors f a pour maximum 5 en -7.

♦ Exercice n° 3.b p. 168

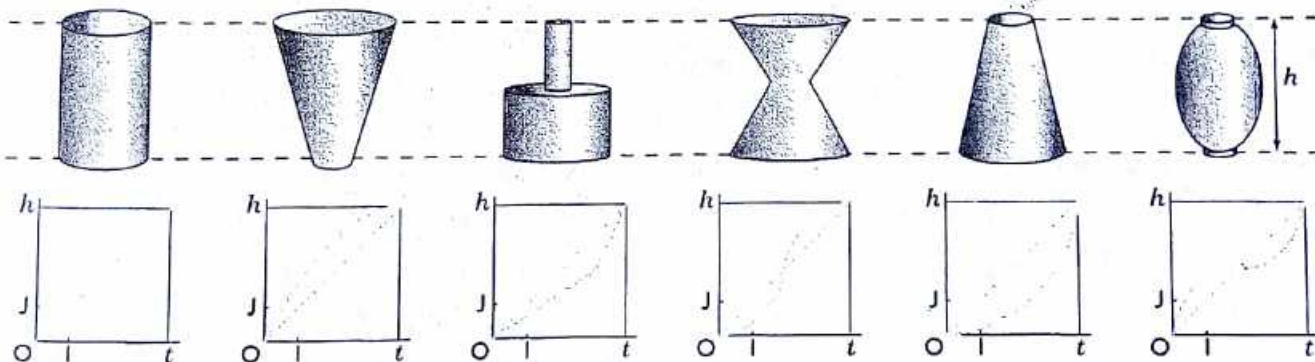
Si $f(x) = -5x + 2$, alors sur tout intervalle $[a ; b]$ f admet pour minimum $-5b + 2$ et pour maximum $-5a + 2$.

Si $g(x) = 6x + 1$, alors sur tout intervalle $[a ; b]$ g admet pour minimum $6a + 1$ et pour maximum $6b + 1$.

♦ Exercice n° 3.c p. 168

x	-6	-2	1	3	5
$f(x)$	3	-1	1	-1	2

♦ Exercice n° 3.d p. 168



Exercices d'apprentissage

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

♦ Exercice n° 1 p. 169

x	-1	0	2	3	11
$f(x) = x^2 - 7x + 2$	10	2	-8	-10	46
$f(x) = \frac{3x-5}{x-1}$	4	5	1	2	2,8
$f(x) = \sqrt{x+6}$	2,2	2,4	2,8	3	4,1
$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$	2	1	11	34	1 442

♦ Exercice n° 2 p. 169

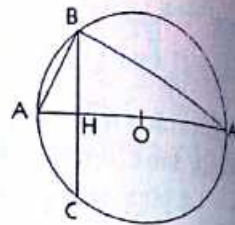
x	18,5	19	-19	$\sqrt{5}$	$\sqrt{346}$
$f(x) = 9x^2 + 3x - 17$	3 118,75	3 289	3 175	34,71	3 152,8
$f'(x) = \frac{21x+5}{3x-56}$	-781	401	3,51	-0,99	-1 995,29
$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 8$	23 718,25	25 737	-29 363	25,14	24 117,49
$f'(x) = \sqrt{x+35}$	7,31	7,35	4	6,1	7,32

♦ Exercice n° 3 p. 169

1. Les triangles HAB et HBA' sont rectangles (en H) et ont les angles en A et B égaux (puisque inscrits dans le cercle (C), ils y interceptent des arcs BA et CA de même mesure) ; ce sont donc des triangles semblables.

2. $\mathcal{A}(ABC) = AH \times BH$. Si $AH = x$, alors $BH^2 = AH \times HA' = x(2-x)$

$$\mathcal{A}(ABC) = x \sqrt{2x-x^2}.$$



♦ Exercice n° 4 p. 169

1. $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}^*$.

2.

x	$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x$	$f(x) = \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x}$
10^{-1}	-0,462 8	17 350
10^2	197 039 500	-0,049 602 98
10^{-3}	-0,004 996 002 998	1 997 003 995 000
-10^{-1}	0,543 2	23 450
-10^{-2}	0,050 403 02	203 040 500
-10^3	2 003 004 005 000	0,005 004 003 002

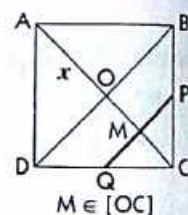
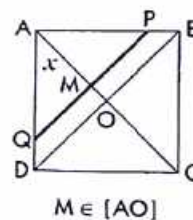
♦ Exercice n° 5 p. 169

Lorsque $M \in [AO]$, c'est-à-dire $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$, on a :

$$PQ = 2AM = 2x.$$

Lorsque $M \in [OC]$, c'est-à-dire $2\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2}$, on a :

$$PQ = 2(AC - x) = 2(4\sqrt{2} - x).$$

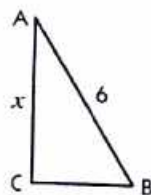


♦ Exercice n° 6 p. 169

1. $BC = \sqrt{36 - x^2}$.

2. a) $\mathcal{A}(x) = \frac{x\sqrt{36-x^2}}{2}$.

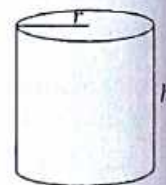
b) $D_{\mathcal{A}} = [0; 6]$.



♦ Exercice n° 7 p. 169

1. $V = \pi r^2 \times h = 850$; donc : $h = \frac{850}{\pi r^2}$.

2. $\mathcal{A} = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{850}{\pi r^2}$
 $= \frac{2(\pi r^3 + 850)}{r}$.



♦ Exercice n° 8 p. 169

1. $D_f = \{-5; -2; 0; \frac{1}{2}; \sqrt{3}; 2,5\}$.

2. $f(x) = -4 \Leftrightarrow \frac{2}{|x|-1} = -4$ et $x \in A$
 $\Leftrightarrow |x| = \frac{1}{2}$ et $x \in D_f$;

donc, -4 a pour antécédent $\frac{1}{2}$.

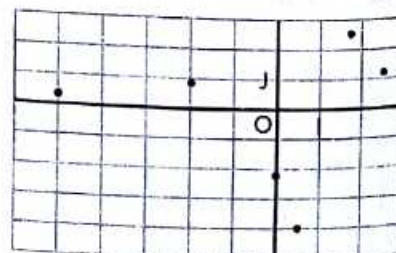
$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{|x|-1} = \frac{1}{2} \text{ et } x \in A$$

$$\Leftrightarrow |x| = 5 \text{ et } x \in D_f;$$

donc, $\frac{1}{2}$ a pour antécédent -5.

3.

x	-5	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{3}$	2,5
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	2	$\times$	-2	-4	$\times$	$\sqrt{3}+1$	$\frac{4}{3}$



♦ Exercice n° 9 p. 169

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$$

1. $A\left(\frac{2}{1}\right) \in (\mathcal{C})$ car $f(2) = 2$; $B\left(\frac{3}{1}\right) \notin (\mathcal{C})$ car $f(3) = \frac{9}{8}$;
 $C\left(\frac{0}{-1}\right) \in (\mathcal{C})$ car $f(0) = 0$; $D\left(\frac{-2}{2}\right) \notin (\mathcal{C})$ car $f(-2) = -2$.

2. Le point de $(\mathcal{C})$, d'abscisse $\frac{1}{2}$, a pour ordonnée :
 $-2 = f\left(\frac{1}{2}\right)$;

le point de $(\mathcal{C})$, d'abscisse $-\frac{3}{4}$, a pour ordonnée :
 $-\frac{12}{7} = f\left(-\frac{3}{4}\right)$.

♦ Exercice n° 12 p. 169

a) et b) :

les fonctions f et g ne sont pas égales sur $\mathbb{R}$;

c) et d) :

les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}$.

♦ Exercice n° 10 p. 169

a) $D_f = \mathbb{R}$;

b) $D_f = \mathbb{R}$;

c) $D_f = \mathbb{R}_+$;

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 3\}$;

e) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 3\}$;

f) $D_f = \mathbb{R}_-$;

g) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$;

h) $D_f = \mathbb{R}^*$;

i) $D_f =]-\infty ; 1]$;

j) $D_f =]-\frac{7}{3} ; +\infty[$.

♦ Exercice n° 11 p. 169

Les courbes b), d) et e) sont des représentations graphiques de fonctions.

♦ Exercice n° 13 p. 170

a) $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$; f et g coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$.

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et $D_g = \mathbb{R}$; f et g coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

c) $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}_+$; f et g coïncident sur $\mathbb{R}_+$.

d) $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}^*$; f et g coïncident sur $\mathbb{R}^*$.

ÉTUDE GRAPHIQUE

♦ Exercice n° 14 p. 170

$$f(x) = -2x + 3$$

$$1. f([-1 ; 6]) = [-9 ; 5].$$

$$2. f([-4 ; 5]) = [-1 ; \frac{7}{2}].$$

♦ Exercice n° 15 p. 170

$$1. f(-3) = 4 ; f(-2) = 0 ; f(3) = 4 ; f(4) = -2.$$

2. Les antécédents de -2 sont : -1 et 4 ;
 les antécédents de 0 sont : -2 , 1 et $\frac{11}{3}$;
 les antécédents de 4 sont : -3 , 2 et 3 .

♦ Exercice n° 16 p. 170

$$a) D_f = [-4 ; 0] \cup [1 ; \frac{5}{2}] ;$$

$$b) D_f = [-2 ; 1] ;$$

$$c) D_f = [-5 ; -1] \cup [0 ; 3].$$

♦ Exercice n° 17 p. 170

La courbe B) est la représentation graphique partielle de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{|x|}.$$

♦ Exercice n° 18 p. 170

Le graphique E) traduit le mouvement du randonneur.

♦ Exercice n° 19 p. 170

1. Les quatre antécédents de 0 par f sont x_1, x_2, x_3 et x_4 tels que :

$$-1 < x_1 < -0,9 ; -0,4 < x_2 < -0,3 ;$$

$$0,3 < x_3 < 0,4 ; 0,9 < x_4 < 1.$$

2. $f(-0,896) < 0$; $f(-0,412) < 0$; $f(0,612) < 0$;
 $f(0,299) > 0$; $f(-0,554) < 0$; $f(0,681) < 0$.

♦ Exercice n° 20 p. 171

$$1. f([1 ; 5]) = [1 ; 4] ; f([3,5 ; 6]) = [1 ; 4] ; f([3 ; 5]) = [1 ; 4] ; f([1 ; 7]) = [1 ; 6].$$

2. 1 a pour antécédent par f : 5 ;

4 a pour antécédents par f : 3 et 6 ;

2 a pour antécédents par f : 1, 4,3 et 5,6 ;

6 a pour antécédent par f : 7.

3. L'image réciproque par f de $[1 ; 4]$ est $[1 ; 6]$;

l'image réciproque par f de $[4 ; 6]$ est $[3] \cup [6 ; 7]$;

l'image réciproque par f de $[2 ; 4]$ est $[1 ; 4,3] \cup [5,6 ; 6]$.

♦ Exercice n° 21 p. 171

$$1. f([1,5 ; 3,5]) = \{4\} ; f([-1 ; 1,5]) = [1 ; 2[\cup \{4\} ; f([-1 ; 5]) = [1 ; 2[\cup \{4\} \cup [3 ; 6[.$$

2. 4 a pour antécédents par f : 4,5 et tous les nombres réels de l'intervalle $[1,5 ; 3,5]$;

3 a pour antécédent par f : 5 ; 2 n'a pas d'antécédent par f ; 1,5 a pour antécédent par f : 0.

3. L'image réciproque par f de $[1 ; 2]$ est $[-1 ; 1,5[$; l'image réciproque par f de $[3 ; 6]$ est $[1,5 ; 5]$;
 l'image réciproque par f de $[1 ; 4]$ est $[-1 ; 3,5] \cup [4,5 ; 5]$.

♦ Exercice n° 22 p. 171

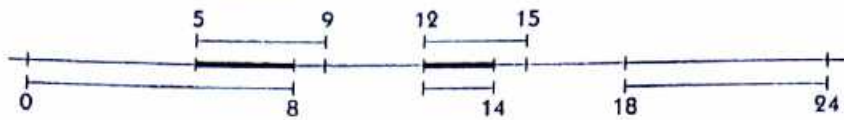
$$1. D_f = [0 ; 24].$$

heure de Dakar	7 h	21 h	24 h
heure d'Antananarivo	10 h	24 h	3 h

heure d'Antananarivo	1 h	13 h	0 h
heure de Dakar	22 h	10 h	21 h

4. M. Andrialala arrivera à Dakar à 10 h.

5. Heure G.M.T. (Dakar)



→ Madame est au bureau

→ Monsieur n'est pas au séminaire

Donc les plages horaires au cours desquelles M. Andrialala pourra appeler son épouse sont : 5h-8h et 12h-14h.

VARIATION D'UNE FONCTION

♦ Exercice n° 23 p. 171

x	-8	0
$f(x)$	-0,3	6

x	-4	-3	-1	3
$f(x)$	-2	-2	3	3

x	-1,5	-0,5	1	2
$f(x)$	3	-3	-3	3

x	-1	3
$f(x)$	4	1

x	-1	0	1
$f(x)$	2	-1	2

x	-3	-1	0,75
$f(x)$	-3	1	-2

♦ Exercice n° 24 p. 171

Si f est une fonction numérique définie et décroissante sur $[a; b]$, alors, quel que soit x élément de $[a; b]$, on a : $a \leq x \leq b$, $f(a)$, $f(x)$ et $f(b)$ définies, $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$.

Donc $f(b)$ et $f(a)$ sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a; b]$.

♦ Exercice n° 25 p. 171

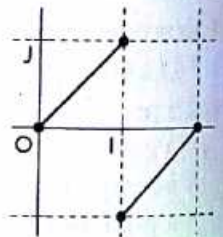
1. a) Soit u et v deux éléments de $[a; c]$;
 - lorsque u et v sont éléments de $[a; b]$, comme f est croissante sur $[a; b]$ on a : $f(u) \leq f(v)$;
 - lorsque u et v sont éléments de $[b; c]$, comme f est croissante sur $[b; c]$ on a : $f(u) \leq f(v)$;
 - lorsque u est élément de $[a; b]$ et v est élément de $[b; c]$, on a $f(u) \leq f(b)$ et $f(b) \leq f(v)$; donc : $f(u) \leq f(v)$.
- Dans les trois cas, on a : $f(u) \leq f(v)$. On en déduit que f est croissante sur $[a; c]$.

b) La fonction f , définie par : $\begin{cases} f(x) = x, & \text{si } x \in [0; 1[\\ f(x) = x - 2, & \text{si } x \in [1; 2] \end{cases}$ et représentée ci-contre,

est croissante sur chacun des intervalles $[0; 1[$ et $[1; 2]$, sans être croissante sur $[0; 2]$.

2. Lorsque f est croissante sur $[a; b]$, quel que soit u élément de $[a; b]$ on a : $f(u) \leq f(b)$; lorsque f est décroissante sur $[b; c]$, quel que soit u élément de $[b; c]$ on a : $f(u) \leq f(b)$; donc $f(b)$ est le maximum de f sur $[a; c]$.

3. Démonstration analogue à celle de la question précédente.



♦ Exercice n° 26 p. 172

1. $g(x) = x^3 + 9x^2 + 15x - 9$.

a) $g(-5) = 16$; $g(-3) = 0$; $g(0) = -9$ et $g(1) = 16$.

b) $-5 < -3$ et $g(-5) > g(-3)$; $0 < 1$ et $g(0) < g(1)$;

on en déduit que f n'est ni croissante ni décroissante sur $[-5; 1]$.

2. Pour $f(x) = \frac{1}{x^2}$, on a : $f(1) = 1$ et $f(2) = \frac{1}{4}$; donc f n'est pas croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n° 27 p. 172

$$f(x) = (3x - 6)^2 + 1.$$

1. f est (strictement) croissante sur $[2 ; +\infty[$ car pour tous nombres réels u et v , on a :

$$\begin{aligned} 2 \leq u < v &\Rightarrow 6 \leq 3u < 3v \\ &\Rightarrow (3u - 6)^2 + 1 < (3v - 6)^2 + 1 \\ &\Rightarrow f(u) < f(v). \end{aligned}$$

2. f est (strictement) décroissante sur $]-\infty ; 2]$ car pour tous nombres réels u et v , on a :

$$\begin{aligned} u < v \leq 2 &\Rightarrow 3u < 3v \leq 6 \\ &\Rightarrow (3u - 6)^2 + 1 > (3v - 6)^2 + 1 \\ &\Rightarrow f(u) > f(v). \end{aligned}$$

3. f est décroissante sur $[1 ; 2]$ et est croissante sur $[2 ; 5]$, donc f n'est pas croissante sur $[1 ; 5]$.

♦ Exercice n° 28 p. 172

1.

$$a) f(x) = -(x - 1)^2 + 4.$$

- $D_f = \mathbb{R} ; f(1) = 4 ;$
- pour tout x élément de D_f , on a : $-(x - 1)^2 \leq 0 ;$
donc : $-(x - 1)^2 + 4 \leq 4.$

Donc, f présente un maximum égal à 4 en 1.

2. a) Pour tous nombres réels u et v , on a :

$$\begin{aligned} u < v < 1 &\Rightarrow u - 1 < v - 1 < 0 \\ &\Rightarrow (u - 1)^2 > (v - 1)^2 \\ &\Rightarrow -(u - 1)^2 + 4 < -(v - 1)^2 + 4 \\ &\Rightarrow f(u) < f(v) ; \end{aligned}$$

donc, f est strictement croissante sur $]-\infty ; 1[;$

$$\begin{aligned} 1 < u < v &\Rightarrow 0 < u - 1 < v - 1 \\ &\Rightarrow (u - 1)^2 < (v - 1)^2 \\ &\Rightarrow -(u - 1)^2 + 4 > -(v - 1)^2 + 4 \\ &\Rightarrow f(u) > f(v) ; \end{aligned}$$

donc, f est strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[.$

$$b) g(x) = \frac{6}{x^2 + 3}.$$

- $D_g = \mathbb{R} ; g(0) = 2 ;$
- pour tout x élément de D_g , on a : $x^2 + 3 \geq 3 ;$
donc : $\frac{6}{x^2 + 3} \leq 2.$

Donc, g présente un maximum égal à 2 en 0.

b) Pour tous nombres réels u et v , on a :

$$\begin{aligned} u < v < 0 &\Rightarrow u^2 + 3 > v^2 + 3 > 0 \\ &\Rightarrow \frac{6}{u^2 + 3} < \frac{6}{v^2 + 3} \\ &\Rightarrow g(u) < g(v) ; \end{aligned}$$

donc, g est strictement croissante sur $]-\infty ; 0[;$

$$\begin{aligned} 0 < u < v &\Rightarrow 0 < u^2 + 3 < v^2 + 3 \\ &\Rightarrow \frac{6}{u^2 + 3} > \frac{6}{v^2 + 3} \\ &\Rightarrow g(u) > g(v) ; \end{aligned}$$

donc, g est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[.$

♦ Exercice n° 29 p. 172

$$1. a) f(x) = |x - 3| + 1.$$

- $D_f = \mathbb{R} ; f(3) = 1 ;$
- pour tout x élément de D_f , on a :
 $|x - 3| + 1 \geq 1.$

Donc, f admet un minimum égal à 1 en 3.

$$b) g(x) = (x - 1)^2 + 3.$$

- $D_g = \mathbb{R} ; g(1) = 3 ;$
- pour tout x élément de D_g , on a :
 $(x - 1)^2 + 3 \geq 3.$

Donc, g admet un minimum égal à 3 en 1.

$$c) h(x) = \sqrt{2x - 1} - 4.$$

- $D_h = [\frac{1}{2} ; +\infty[; f(\frac{1}{2}) = -4 ;$
- pour tout x élément de D_h , on a :
 $\sqrt{2x - 1} - 4 \geq -4.$

Donc, h admet un minimum égal à -4 en $\frac{1}{2}.$

2. a) Pour tous nombres réels u et v , on a :

$$u < v \leq 3 \Rightarrow u - 3 < v - 3 \leq 0 \Rightarrow |u - 3| + 1 > |v - 3| + 1 ;$$

donc, f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 3] ;$

$$3 \leq u < v \Rightarrow 0 \leq u - 3 < v - 3 \Rightarrow |u - 3| + 1 < |v - 3| + 1 ;$$

donc, f est strictement croissante sur $[3 ; +\infty[.$

b) g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 1]$ et est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[.$

c) h est strictement croissante sur $[\frac{1}{2} ; +\infty[.$

♦ Exercice n° 30 p. 172

Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé (O, I, J) et $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$

$$M \mapsto OM.$$

$$1. f(O) = OO = 0 ; f(I) = OI = 1 ; f(A) = OA = \sqrt{2} ; f(B) = OB = 5 ; f(C) = OC = \sqrt{5} ; f(E) = OE = \sqrt{5}.$$

2. Pour tout point M de $\mathcal{P}$, on a $OM \geq 0$; pour tout nombre réel positif y , il existe un point M de $\mathcal{P}$ tel que $OM = y$.

Donc l'image directe par f du plan $\mathcal{P}$ est $\mathbb{R}_+$.

3. -2 n'a pas d'antécédent par f ; O est le seul antécédent de 0 par f ;

tous les points du cercle $(\mathcal{C})$, de centre O et de rayon 2 , sont les antécédents de 2 par f .

4. $(\mathcal{D})$ est la droite d'équation : $y = 1$.

a) Lorsque M est le point de $(\mathcal{D})$ d'abscisse x , $f(M) = \sqrt{x^2 + 1}$.

b) Les points de $(\mathcal{D})$, dont l'image par f est 2 , ont pour abscisses : $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

◆ Exercice n° 31 p. 172

$$f(x) = x^3 - x + 2.$$

$$1. f(u) - f(v) = (u^3 - u + 2) - (v^3 - v + 2) = u^3 - v^3 - u + v ;$$

$$(u - v)(u^2 + v^2 + uv - 1) = u^3 + uv^2 + u^2v - u - vu^2 - v^3 - uv^2 + v = u^3 - v^3 - u + v.$$

$$2. \text{ Lorsque } 0 \leq u < v < \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ on a : } 0 \leq u^2 < \frac{1}{3}, 0 \leq v^2 < \frac{1}{3} \text{ et } 0 \leq uv < \frac{1}{3} ;$$

on en déduit que : $u - v < 0$ et $u^2 + v^2 + uv - 1 < 0$;

c'est-à-dire : $f(u) - f(v) > 0$ et f est strictement décroissante sur $[0 ; \frac{1}{\sqrt{3}}[$.

Lorsque $\frac{1}{\sqrt{3}} < u < v$, on obtient : $f(u) - f(v) > 0$ et f est strictement croissante sur $] \frac{1}{\sqrt{3}} ; +\infty[$.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f(x)$	2	$f(\frac{1}{\sqrt{3}})$	

Or : $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}$. On en déduit que f admet,

sur $\mathbb{R}_+$, un minimum égal à $2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ en $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

◆ Exercice n° 32 p. 172

$$1. f(x) = \frac{x+1}{x-1}. \text{ a) } D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$b) \text{ Lorsque } u \neq 1 \text{ et } v \neq 1, \text{ on a : } f(u) - f(v) = \frac{u+1}{u-1} - \frac{v+1}{v-1} = \frac{(u+1)(v-1) - (v+1)(u-1)}{(u-1)(v-1)}$$

$$= \frac{uv - u + v - 1 - vu + v - u + 1}{(u-1)(v-1)} = \frac{-2(u-v)}{(u-1)(v-1)}.$$

c) • Lorsque $u < v < 1$, on a : $u - v < 0$, $u - 1 < 0$ et $v - 1 < 0$; donc : $f(u) - f(v) > 0$.

• Lorsque $1 < u < v$, on a : $u - v < 0$, $u - 1 > 0$ et $v - 1 > 0$; donc : $f(u) - f(v) > 0$.
 f est donc strictement décroissante sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

$$2. g(x) = \frac{2x-5}{3x+2}. \text{ a) } D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}.$$

$$b) \text{ Lorsque } u \neq -\frac{2}{3} \text{ et } v \neq -\frac{2}{3}, \text{ on démontre que : } g(u) - g(v) = \frac{19(u-v)}{(3u+2)(3v+2)}.$$

c) • Lorsque $u < v < -\frac{2}{3}$, on a : $u - v < 0$, $3u + 2 < 0$ et $3v + 2 < 0$; donc : $g(u) - g(v) < 0$.

• Lorsque $-\frac{2}{3} < u < v$, on a : $u - v < 0$, $3u + 2 > 0$ et $3v + 2 > 0$; donc : $g(u) - g(v) < 0$.
 g est donc strictement croissante sur $]-\infty ; -\frac{2}{3}[$ et sur $]-\frac{2}{3} ; +\infty[$.

◆ Exercice n° 33 p. 172

1. Lorsque $0 \leq u < v$, on a : a) $2u^2 < 2v^2$; b) $\frac{1}{u+1} > \frac{1}{v+1}$. On en déduit que : $2u^2 - \frac{1}{u+1} < 2v^2 - \frac{1}{v+1}$;
 donc la fonction f , définie par $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x+1}$, est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$2. g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Lorsque $0 \leq u < v$, on a : $1 + u^2 < 1 + v^2$ et $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} > \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$; donc g est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

Lorsque $u < v \leq 0$, on a : $1 + u^2 > 1 + v^2$ et $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} < \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$; donc g est strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$.

♦ Exercice n° 34 p. 172

$$f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$$

1. a) Lorsque $1 \leq x \leq 4$, en utilisant les propriétés des inégalités on obtient :

$$1 \leq 3x-2 \leq 10 \text{ et } 2 \leq x+1 \leq 5; \text{ donc : } \frac{1}{5} \leq \frac{3x-2}{x+1} \leq 5.$$

b) Lorsque $1 \leq x \leq 4$, en admettant que f est croissante sur $] -1; +\infty[$ on obtient :

$$f(1) \leq f(x) \leq f(4); \text{ c'est-à-dire : } \frac{1}{2} \leq \frac{3x-2}{x+1} \leq 2.$$

c) L'encadrement obtenu en b) est donc meilleur que celui obtenu en a).

2. a) Lorsque $-5 \leq x \leq -2$, en utilisant les propriétés des inégalités on obtient successivement :

$$-17 \leq 3x-2 \leq -8,$$

$$-4 \leq x+1 \leq -1;$$

$$8 \leq -(3x-2) \leq 17,$$

$$1 \leq -(x+1) \leq 4 \text{ et } \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{x+1} \leq 1;$$

$$\text{donc : } 2 \leq \frac{3x-2}{x+1} \leq 17.$$

b) Lorsque $-5 \leq x \leq -2$, en admettant encore que f est croissante sur $] -\infty; -1[$ on obtient :

$$f(-5) \leq f(x) \leq f(-2); \text{ c'est-à-dire : } \frac{17}{4} \leq \frac{3x-2}{x+1} \leq 8.$$

c) L'encadrement obtenu en b) reste donc meilleur que celui obtenu en a).

Commentaire

Cet exercice est à la fois un réinvestissement des méthodes d'encadrement, mises en place au chapitre 9, et un aperçu de la puissance de l'outil « variations d'une fonction ».

♦ Exercice n° 35 p. 172

$AB = BC = CA = 2$; $BM = x$; $f(x) = AM$, pour : $0 \leq x \leq 2$.

1. À partir de considérations géométriques, on conjecture que :

- la fonction f est décroissante sur $[0; 1]$ et croissante sur $[1; 2]$;
- présente en 1 un minimum égal à $\sqrt{3}$.

$$2. a) f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 4}.$$

b)

x	0	0,2	0,5	0,8	1	1,2	1,5	1,8	2
$f(x)$	2	1,9	1,8	1,74	1,73	1,74	1,8	1,9	2

3. a) Pour tous nombres réels distincts u et v de $[0; 2]$, on a :

$$f(u) - f(v) = \sqrt{(u-1)^2 + 3} - \sqrt{(v-1)^2 + 3},$$

$$(u-v)(u+v-2) = u^2 - 2u - v^2 + 2v = (u-1)^2 - (v-1)^2.$$

- Si $(u-v)(u+v-2) > 0$, alors $(u-1)^2 > (v-1)^2$
 $\sqrt{(u-1)^2 + 3} > \sqrt{(v-1)^2 + 3}$
 $f(u) - f(v) > 0.$

- Si $(u-v)(u+v-2) < 0$, alors $(u-1)^2 < (v-1)^2$
 $\sqrt{(u-1)^2 + 3} < \sqrt{(v-1)^2 + 3}$
 $f(u) - f(v) < 0.$

Donc, $f(u) - f(v)$ et $(u-v)(u+v-2)$ ont le même signe.

b) • Lorsque $0 \leq u < v \leq 1$, on a : $u-v < 0$ et $u+v-2 < 0$;

donc : $(u-v)(u+v-2) > 0$ et f est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

• Lorsque $1 \leq u < v \leq 2$, on a : $u-v < 0$ et $u+v-2 > 0$;

donc : $(u-v)(u+v-2) < 0$ et f est strictement croissante sur $[1; 2]$.

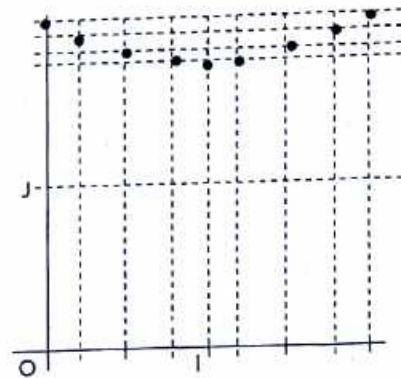
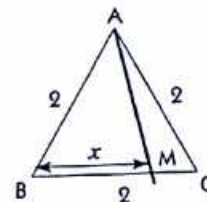
c) Le tableau de variation de f est immédiat et les résultats conjecturés en 1. sont démontrés.

♦ Exercice n° 36 p. 172

$$a) f(x) = -3x^2 + 2x + 8.$$

Pour tous nombres réels a et b distincts, on a : $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{-3(a^2-b^2)+2(a-b)}{a-b} = -3(a+b)+2.$

Si, de plus, $a \geq \frac{1}{3}$ et $b \geq \frac{1}{3}$, alors : $a+b \geq \frac{2}{3}$; c'est-à-dire : $-3(a+b) < -2.$



On en déduit que $f(a) - f(b)$ et $a - b$ sont de signes contraires ; f est strictement décroissante sur $[\frac{1}{3} ; +\infty[$.

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 7}$.

Pour tous nombres réels a et b distincts, on a :
$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{\sqrt{a^2 + 4a + 7} - \sqrt{b^2 + 4b + 7}}{a - b}$$
$$= \frac{a^2 + 4a + 7 - b^2 - 4b - 7}{(a - b)(\sqrt{a^2 + 4a + 7} + \sqrt{b^2 + 4b + 7})}$$
$$= \frac{a + b + 4}{\sqrt{a^2 + 4a + 7} + \sqrt{b^2 + 4b + 7}}.$$

Si, de plus, $a \leq -2$ et $b \leq -2$, alors : $a + b < -4$.

On en déduit que $f(a) - f(b)$ et $a - b$ sont de signes contraires ; f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -2]$.

c) $f(x) = x + \frac{5}{x}$.

Pour tous nombres réels a et b distincts, on a :
$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{a + \frac{5}{a} - b - \frac{5}{b}}{a - b} = 1 - \frac{5}{ab}.$$

Si, de plus, $0 < a \leq \sqrt{5}$ et $0 < b \leq \sqrt{5}$, alors on a : $0 < ab \leq 5$; c'est-à-dire : $1 \leq \frac{5}{ab}$.

On en déduit que $f(a) - f(b)$ et $a - b$ sont de signes contraires ; f est strictement décroissante sur $]0 ; \sqrt{5}]$.

10. Polynômes et Fractions rationnelles

(pages 173 à 188 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- consolider le calcul littéral, les notions de polynôme et de fraction rationnelle ;
- établir un lien entre l'existence des racines d'un polynôme et sa factorisation.

COMMENTAIRES

Ce chapitre permet d'enrichir les techniques de calculs sur les polynômes (développement, réduction, factorisation, ...) et de les appliquer aux fractions rationnelles. On veillera à ne pas multiplier les exercices répétitifs sur ce thème.

Il donne en particulier l'occasion de découvrir deux nouvelles méthodes de factorisation : identification des coefficients et division euclidienne.

Il est indispensable de bien entraîner les élèves à l'étude du signe d'un polynôme, car il devra réinvestir souvent ce savoir-faire dans les problèmes d'analyse de première et terminale.

Par quelques exercices, le professeur pourra initier l'élève à la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

SAVOIRS ET SAVOIR - FAIRE

savoirs

Généralités sur les polynômes

- Monôme, polynôme, coefficient, degré ; polynôme réduit, ordonné ; égalité de deux polynômes.
- Racines d'un polynôme.
- Produit, somme de polynômes.
- Factorisation ; produits remarquables.

Polynômes du second degré

- Forme canonique.
- Factorisation.
- Signe.

savoir-faire

- Reconnaître un polynôme.
- Vérifier qu'un nombre donné est racine d'un polynôme.
- Utiliser les produits remarquables pour développer ou factoriser un polynôme.
- Déterminer la forme canonique d'un polynôme du second degré.
- Factoriser un polynôme du second degré qui admet une ou deux racines.
- Étudier le signe d'un polynôme du second degré.

Factorisation par $x - \alpha$

- α racine de P ssi $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$; conséquences.
- Déterminations du quotient de $P(x)$ par $x - \alpha$:
 - méthode des coefficients indéterminés ;
 - division euclidienne.

Fractions rationnelles

- Définition ; ensemble de définition.
- Simplification.

- α étant racine d'un polynôme, utiliser la méthode des coefficients indéterminés ou la division euclidienne pour factoriser ce polynôme par $(x - \alpha)$.
- Étudier le signe d'un polynôme factorisé.

- Reconnaître une fraction rationnelle et déterminer son ensemble de définition.
- Simplifier une fraction rationnelle.

- Étudier le signe d'une fraction rationnelle.

EXERCICES DU MANUEL**Exercices du cours****♦ Exercice n° 1.a p. 178**

$$P(x) = x^4 + 8x^3 - 26x^2 + 54x - 2 ;$$

$$Q(x) = x^{12} + x^9 - 3x^6 + 3x^3 + 3x^4 + 3x^3 ;$$

$$R(x) = x^3 + 4x^2 + x + 2.$$

♦ Exercice n° 1.b p. 178

$$d^0(P) = 10 ; d^0(Q) = 10 ;$$

$$d^0(P + Q) = 10 ;$$

$$d^0(R) = 5n.$$

♦ Exercice n° 1.c p. 178

$$P(x) = (x - 1)(4 - x) ;$$

$$Q(x) = (x - 2)^3 ;$$

$$R(x) = (x^2 + x + 1)(2x + 1)^2.$$

♦ Exercice n° 2.a p. 180

$$P(x) = x^2 - 5x + 4 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4} = (x - 1)(x - 4) ; \text{ donc P a deux racines : 1 et 4.}$$

$$Q(x) = x^2 + 3x + 4 = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} ; \text{ donc Q n'a pas de racine.}$$

$$R(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = (x + \sqrt{2})^2 ; \text{ donc R a une racine : } -\sqrt{2}.$$

$$S(x) = x^2 - x - 1 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = (x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) ; \text{ donc S a deux racines : } \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

♦ Exercice n° 2.b p. 180

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

x	$-\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$R(x)$	+	0	+

x	$-\infty$	$+\infty$
$Q(x)$	+	+

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$	
$S(x)$	+	0	-	0	+

♦ Exercice n° 3.a p. 183

$$1. -5x^2 + 2x + 7 = (x + 1)(-5x + 7) ;$$

$$2. 3x^3 - 2x - 1 = (x - 1)(3x^2 + 3x + 1) ;$$

$$3. -2x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x + 2)(-2x^2 + 3x - 2).$$

♦ Exercice n° 1.d p. 178

$$1. P \text{ a deux racines : 1 et 4 ; } Q \text{ a une racine : 2.}$$

$$2. a) x^2 + x + 1 = (x^2 + x + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}.$$

$$\text{Donc pour tout nombre réel } x, x^2 + x + 1 > 0.$$

$$b) R \text{ a une racine : } -\frac{1}{2}.$$

♦ Exercice n° 1.e p. 178

$$2\,000^2 - 1\,999^2 = (2\,000 + 1\,999)(2\,000 - 1\,999) = 3\,999.$$

♦ Exercice n° 1.f p. 178

Le polynôme cherché est de la forme : $a(x + 2)(x - 1)$, où $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{De plus, } p(0) = 6 \Leftrightarrow -2a = 6 \Leftrightarrow a = -3.$$

$$\text{Donc : } P(x) = -3(x + 2)(x - 1).$$

♦ Exercice n° 3.b p. 183

$$P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x + 1)(x + 2)(x - 2) ;$$

$$Q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x + 2)(x^2 + 1) ;$$

$$R(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 3)(x - 1)(x + 1).$$

♦ Exercice n° 3.c p.183

• $P(x) = -x^3 + 3x + 2$.

En remarquant que -1 est racine évidente de P ,
on obtient :

$$P(x) = (-x + 2)(x + 1)^2,$$

puis le signe du polynôme P (cf. tableau ci-contre).

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$P(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

• $Q(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$.

En remarquant que -1 et 1 sont racines évidentes de Q ,
on obtient :

$$Q(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 3),$$

puis le signe du polynôme Q (cf. tableau ci-contre).

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$Q(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	$+$

♦ Exercice n° 4.a p.185

1. $f(x) = \frac{-3x}{x^2 - x + 1}$.

$x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$; donc, pour tout nombre réel x , $x^2 - x + 1 > 0$ et $D_f = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = 4x + \frac{x-1}{9-x^2}$ et $9 - x^2 = (3+x)(3-x)$; donc : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3 ; 3\}$.

♦ Exercice n° 4.b p.185

1. $P(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$; $x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x - 1) + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$;

donc, pour tout nombre réel x distinct de 1 , $P(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$.

2. $Q(x) = 1 - \frac{5x - 10}{x^2 - 4}$; $5x - 10 = 5(x - 2)$ et $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$;

donc, pour tout nombre réel x distinct de -2 et 2 , $Q(x) = 1 - \frac{5}{x + 2} = \frac{x - 3}{x + 2}$.

♦ Exercice n° 4.c p.185

1. $R(x) = 1 - \frac{3}{x + 1} + \frac{1}{x^2 + x} = \frac{(x - 1)^2}{x(x + 1)}$;

on en déduit le signe de la fraction rationnelle R
(cf. tableau ci-contre).

2. $T(x) = x^2 - 3x + 7 - \frac{15}{x + 2} = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x + 2} = \frac{(x - 1)(x^2 + 1)}{x + 2}$;

on en déduit le signe de la fraction rationnelle T
(cf. tableau ci-contre).

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x - 1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$R(x)$	$+$	$-$	$+$	0	$+$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$
$T(x)$	$+$	$-$	0	$+$

Exercices d'apprentissage

♦ Exercice n° 1 p.186

• $x \mapsto (x\sqrt{3} - 1)(x^2 + \pi)$ est un polynôme de degré 3 ;

• $x \mapsto \frac{3x^3 - 5x^2 + 7x\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ est un polynôme de degré 3 ;

• $x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 + \frac{7}{x} + x^2$ n'est pas un polynôme, car $\frac{7}{x}$ n'est pas un monôme ;

• $x \mapsto \sqrt{x^4 - 5x^2 + 7}$ n'est pas un polynôme P ;

(sinon, on aurait : $x^4 - 5x^2 + 7 = [P(x)]^2 = (x^2 + ax + \sqrt{7})^2 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2\sqrt{7})x^2 + 2\sqrt{7}ax + 7$;
c'est-à-dire : $a = 0$ et $2\sqrt{7} = -5$, ce qui est impossible)

• $x \mapsto \frac{x^4 - 81}{x^2 + 9}$ est un polynôme de degré 2, car $\frac{x^4 - 81}{x^2 + 9} = \frac{(x^2 + 9)(x^2 - 9)}{x^2 + 9} = x^2 - 9$;

• $x \mapsto 3x^6 - |x| + 5$ n'est pas un polynôme, car $|x|$ n'est pas un monôme.

♦ Exercice n° 2 p. 186

- $P(x) = (x^2 + 1)(3 - x^4)$; le terme de plus haut degré de P est : $-x^6$;
- $Q(x) = (x^3 - 2x^2)(x^5 - 3x) - x^8$; le terme de plus haut degré de Q est : $-2x^7$;
- $R(x) = (x - 2)(1 - x^2) - x(1 - x^2) + (x - 5)(3 - 2x)$; le terme de plus haut degré de R est : $13x$.

♦ Exercice n° 3 p. 186

- $P(x) = 10x^3 - 5x^2 + 7x - 3$, $Q(x) = x^5 - 5x^2 + 3$ et $R(x) = 7x^3 - 3x^2 + 2x$.
- $P(x) + Q(x) + R(x) = x^5 + 17x^3 - 13x^2 + 9x$;
 - $P(x) + Q(x) - R(x) = x^5 + 3x^3 - 7x^2 + 5x$;
 - $P(x) - Q(x) - R(x) = -x^5 + 3x^3 + 3x^2 + 5x - 6$;
 - $Q(x) - (P(x) - R(x)) = x^5 - 3x^3 - 3x^2 - 5x + 6$.

♦ Exercice n° 4 p. 186

- $P(x) = (2x + 1)(x - 3) - (4x + 5)(3 - x) = 6(x - 3)(x + 1)$;
- $Q(x) = 2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1)$;
- $R(x) = (x^2 - 4)^2 - (x + 2)^2 = (x + 2)^2(x - 3)(x - 1)$;
- $S(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$;
- $T(x) = x^4 + x^3 - 4x - 16 = x^4 - 16 + x(x^2 - 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + x + 4)$.

♦ Exercice n° 5 p. 186

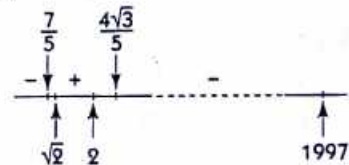
- $P(x) = -4(x + 3)(2x - 5)$; pour x appartenant à $]-\infty ; -3[\cup]\frac{5}{2} ; +\infty[$, $P(x) < 0$;
pour x appartenant à $]-3 ; \frac{5}{2}[$, $P(x) > 0$; pour x appartenant à $\{-3 ; \frac{5}{2}\}$, $P(x) = 0$.
- $Q(x) = x^2 + 1$; pour tout nombre réel x , $Q(x) > 0$.
- $R(x) = 9 - 16x^4$; pour x appartenant à $]-\infty ; -\frac{\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{2} ; +\infty[$, $R(x) < 0$;
pour x appartenant à $]-\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}[$, $R(x) > 0$; pour x appartenant à $\{-\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\}$, $R(x) = 0$.
- $S(x) = (3x - 4)(x + 3) - 36x^2 + 64$; pour x appartenant à $]-\infty ; -\frac{13}{11}[\cup]\frac{4}{3} ; +\infty[$, $S(x) < 0$;
pour x appartenant à $]-\frac{13}{11} ; \frac{4}{3}[$, $S(x) > 0$; pour x appartenant à $\{-\frac{13}{11} ; \frac{4}{3}\}$, $S(x) = 0$.

♦ Exercice n° 6 p. 186

$P(x) = -4(5x - 7)(x\sqrt{3} - 4)$.

Le schéma ci-contre visualise le signe de $P(x)$ selon les valeurs de x .

On en déduit que : $P(\frac{7}{5}) = 0$, $P(\sqrt{2}) > 0$, $P(2) > 0$ et $P(1997) < 0$.



♦ Exercice n° 7 p. 186

- $P(x) = (x + 2)(x - 3)P'(x)$.
- $Q(x) = x(x + 1)(x - 5)Q'(x)$.
- $R(x) = (x + 1)(x - 5)x^8$.
- $S(x) = (x + 1)(x - 5)(x^2 + 1)x^6$.

♦ Exercice n° 8 p. 186

Les polynômes cherchés sont de la forme :

$P(x) = a(x + 2)(x - 1)$, où $a \in \mathbb{R}$.

$P(0) = 6 \Leftrightarrow -2a = -6$.

Le polynôme cherché est $P(x) = -3(x + 2)(x - 1) = -3x^2 - 3x + 6$.

♦ Exercice n° 9 p. 186

En développant $(x - 1)((x^2 + 3x + 1)^2 - 5x(x + 1)^2)$, on trouve $x^5 - 1$.

Application En posant $x = 5^5$, on obtient $5^{25} - 1 = (5^5 - 1)[(5^5)^2 + 3(5^5) + 1]^2 - 5(5^5)(5^5 + 1)^2$
 $= (5^5 - 1)(5^{10} - 5^6 + 3(5^5) - 5^3 + 1)(5^{10} + 5^8 + 3(5^5) + 5^3 + 1)$.

♦ Exercice n° 10 p. 186

1. $P(x) = x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2$
 $= (x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})$.

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$P(x)$		+	0	-

Pour tout nombre réel x , on a : $P(x) < 0$.

2. $P(x) = -x^2 + x - 1 = -((x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})$.

3. $P(x) = x^2 - 7x + 6 = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{25}{4}$
 $= (x - 1)(x - 6)$.

x	$-\infty$	1	6	$+\infty$
$P(x)$		+	0	-

$$4. P(x) = -5x^2 + x + 1 = -5\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{21}{100}$$

$$= -5\left(x - \frac{1 - \sqrt{21}}{10}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{21}}{10}\right).$$

x	$-\infty$	$\frac{1 - \sqrt{21}}{10}$	$\frac{1 + \sqrt{21}}{10}$	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	0	$-$

$$5. P(x) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1.$$

Pour tout nombre réel x , on a : $P(x) > 0$.

$$6. P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1 = \frac{1}{2}((x + 5)^2 - 27)$$

$$= \frac{1}{2}(x + 5 + 3\sqrt{3})(x + 5 - 3\sqrt{3}).$$

x	$-\infty$	$-5 - 3\sqrt{3}$	$-5 + 3\sqrt{3}$	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	0	$+$

$$7. P(x) = 3x^2 + 5x - 1 = 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{37}{36}$$

$$= 3\left(x + \frac{5 + \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{5 - \sqrt{37}}{6}\right).$$

x	$-\infty$	$-\frac{5 + \sqrt{37}}{6}$	$-\frac{5 - \sqrt{37}}{6}$	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	0	$+$

$$8. P(x) = 169x^2 + 13x - 1 = 169\left(x + \frac{1}{26}\right)^2 - \frac{5}{676}$$

$$= 169\left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{26}\right)\left(x + \frac{1 - \sqrt{5}}{26}\right).$$

x	$-\infty$	$-\frac{1 + \sqrt{5}}{26}$	$-\frac{1 - \sqrt{5}}{26}$	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	0	$+$

♦ Exercice n° 11 p. 186

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(x^2 + 2xy + y^2) - \frac{1}{4}(x^2 - 2xy + y^2) = xy.$$

Application

$$(2p)(2q) = 4pq = 4\left[\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2\right]$$

$$= (p+q)^2 - (p-q)^2.$$

$$(2m-1)(2n-1) = 4mn - 2m - 2n + 1$$

$$= (m+n)^2 - (m-n)^2 - 2m - 2n + 1$$

$$= ((m+n)^2 - 2(m+n) + 1) - (m-n)^2$$

$$= (m+n-1)^2 - (m-n)^2.$$

♦ Exercice n° 12 p. 186

Utiliser la méthode des coefficients indéterminés ou la division euclidienne pour factoriser $P(x)$, un tableau de signes pour étudier le signe de $P(x)$.

$$1. P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

$$= (x-2)(x^2 - 2x + 1)$$

$$= (x-2)(x-1)^2.$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	0	$+$

$$2. P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$$

$$= (x - \frac{3}{2})(-2x^2 + 4x - 6)$$

$$= -2(x - \frac{3}{2})((x-1)^2 + 2).$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	$-$

$$3. P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 9 = (x+3)(2x^2 - 3x - 3)$$

$$= 2(x+3)\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{33}{16}\right]$$

$$= 2(x+3)\left(x - \frac{3 - \sqrt{33}}{4}\right)\left(x - \frac{3 + \sqrt{33}}{4}\right).$$

x	$-\infty$	-3	$\frac{3 - \sqrt{33}}{4}$	$\frac{3 + \sqrt{33}}{4}$	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	0	0	$+$

$$4. P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6$$

$$= (x - \sqrt{3})(-3x^2 + (2 - 3\sqrt{3})x + 2\sqrt{3})$$

$$= -3(x - \sqrt{3})\left[\left(x - \frac{2 - 3\sqrt{3}}{6}\right)^2 - \left(\frac{2 + 3\sqrt{3}}{6}\right)^2\right]$$

$$= -3(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \frac{2}{3}).$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	0	0	$-$

♦ Exercice n° 13 p. 186

$$1. f(x) = ax^3 - 4x^2 + 7x - 6 \text{ et } g(x) = x - 2.$$

f est factorisable par g si et seulement si : $f(2) = 0$;

c'est-à-dire : $a = 1$.

$f(x)$ est du signe de $x - 2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

On a alors : $f(x) = (x-2)(x^2 - 2x + 3)$
 $= (x-2)((x-1)^2 + 2).$

2. $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax - 2$ et $g(x) = x + 2$.

f est factorisable par g si et seulement si : $f(-2) = 0$;
 c'est-à-dire : $a = -1$.

On a alors : $f(x) = (x+2)(x^3 - 1)$
 $= (x+2)(x-1)(x^2 + x + 1)$
 $= (x+2)(x-1)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right).$

$f(x)$ est du signe de $(x+2)(x-1)$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	+

3. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + a$ et $g(x) = x^2 - 4$.

f est factorisable par g si et seulement si : $\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases}$;

c'est-à-dire : $\begin{cases} 8 - 12 - 8 + a = 0 \\ -8 - 12 + 8 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 12.$

On a alors : $f(x) = (x-2)(x+2)(x-3).$

x	$-\infty$	-2	2	3	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	+

♦ Exercice n° 14 p. 186

$P(x) = x^4 + 2x^2 + 9 = (x^4 + 6x^2 + 9) - 4x^2 = (x^2 + 3)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3).$

Or, $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$ n'a pas de racine et n'est pas factorisable.

Même chose pour : $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2.$

♦ Exercice n° 15 p. 186

$P(x) = (x^2 - 1)^2 + (2x)^2.$

1. $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1.$

2. $P(x) = (x^2 + 1)^2.$

3. $101^2 = 10^2 + 1$; d'après ce qui précède, on obtient :
 • en prenant $x = 10$, $101^2 = 99^2 + 20^2$;
 • en prenant $x = -10$, $101^2 = 99^2 + (-20)^2.$

Le problème admet deux solutions : $(99 ; 20)$ et $(99 ; -20).$

FRACTIONS RATIONNELLES

♦ Exercice n° 16 p. 187

1. $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2+1}$; 2. $g(x) = \frac{x(x+5)(2x-3)}{(x+4)(x-6)}.$

♦ Exercice n° 17 p. 187

1. $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 4x - 3}.$

• $-x^2 + 4x - 3 = -((x-2)^2 - 1) = -(x-3)(x-1) ;$

donc : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1 ; 3\}.$

• En remarquant que 1 est une racine du numérateur, on obtient :

$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) ;$

donc, pour tout x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{1 ; 3\}$, on a : $f(x) = \frac{x+2}{3-x}.$

• Signe de $f(x)$:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+
$3-x$	+	+	0	-
$f(x)$	-	0	+	-

2. $f(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{3x^2 - 6x + 3}.$

• $3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$; donc : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$

• En remarquant que 1 est une racine du numérateur, on obtient :

$3x^3 - 4x^2 - x + 2 = (x-1)(3x^2 - x - 2)$
 $= 3(x-1)\left(x - \frac{1}{6} - \frac{25}{36}\right) = 3(x-1)^2\left(x + \frac{2}{3}\right) ;$

donc, pour tout x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a : $f(x) = x + \frac{2}{3}.$

• Signe de $f(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$P(x)$	-	0	+	+

♦ Exercice n° 18 p. 187

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 4}{-x + 2}, \text{ Posons : } N(x) = 3x^2 - x + 4, D(x) = -x + 2 \text{ et } N'(x) = N(x) - N(2).$$

On a : $N(2) = 14$ et $N'(x) = 3x^2 - x - 10$. En effectuant la division euclidienne de N' par D , on obtient : $N'(x) = (-3x - 5)D(x)$; c'est-à-dire : $N(x) - 14 = (-3x - 5)D(x)$.

$$\text{On en déduit que : } \frac{N(x)}{D(x)} = -3x - 5 + \frac{14}{D(x)} \text{ ou } \frac{3x^2 - x + 4}{-x + 2} = -3x - 5 + \frac{14}{-x + 2}.$$

♦ Exercice n° 19 p. 187

$$\text{En procédant comme dans l'exercice précédent, on trouve : } g(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 10}{x - 4} = x^2 - x - 4 - \frac{6}{x - 4}.$$

♦ Exercice n° 20 p. 187

$$\text{On a : } \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{(a+b)x + 2a - 2b}{x^2 - 4}.$$

Donc :	pour tout x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$	équivalent à	pour tout x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ $1 = (a+b)x + 2a - 2b.$
--------	---	--------------	---

$$\text{On en déduit que : } \begin{cases} a+b=0 \\ 2a-2b=1 \end{cases} ; \text{ donc : } a = \frac{1}{4} \text{ et } b = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{D'où, pour tout } x \text{ appartenant à } \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}.$$

♦ Exercice n° 21 p. 187

$$1. \text{ Pour tout nombre réel } x, a(x^2 + 9) + b(x^2 - 9) = 6^3 \text{ équivaut à } \begin{cases} a+b=0 \\ 9a-9b=63. \end{cases} \text{ Donc : } a=12, b=-12.$$

$$2. \text{ Pour tout nombre réel } x, c(x+3) + d(x-3) = 12 \text{ équivaut à } \begin{cases} c+d=0 \\ 3c-3d=12 \end{cases} \text{ Donc : } c=2, d=-2.$$

$$3. f(x) = \frac{6^3}{x^4 - 81}.$$

$$a) D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

$$b) \frac{\alpha'}{x^2 + 9} + \frac{\beta'}{x^2 - 9} = \frac{\alpha'(x^2 - 9) + \beta'(x^2 + 9)}{x^4 - 81}.$$

Donc :	pour tout x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ $\frac{6^3}{x^4 - 81} = \frac{\alpha'}{x^2 + 9} + \frac{\beta'}{x^2 - 9}$	équivalent à	pour tout x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ $6^3 = \beta'(x^2 + 9) + \alpha'(x^2 - 9).$
--------	---	--------------	---

D'après la question 1, $\beta' = 12$ et $\alpha' = -12$.

$$c) \frac{\alpha}{x+3} + \frac{\beta}{x-3} = \frac{\alpha(x-3) + \beta(x+3)}{x^2 - 9}.$$

Donc :	pour tout x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ $\frac{12}{x^2 - 9} = \frac{\alpha}{x+3} + \frac{\beta}{x-3}$	équivalent à	pour tout x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ $12 = \beta(x+3) + \alpha(x-3).$
--------	---	--------------	--

D'après la question 2, $\beta = 2$ et $\alpha = -2$.

$$\text{Finalement, pour tout } x \text{ appartenant à } \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}, \text{ on a : } f(x) = -\frac{2}{x+3} + \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2 + 9}.$$

♦ Exercice n° 22 p. 187

$$1. \text{ Pour tout } x \text{ appartenant à } \mathbb{R} \setminus \{1\}, \frac{x}{1-x} = \frac{x-1}{1-x} + \frac{1}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}.$$

$$2. \text{ Si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}, \text{ alors : } -\frac{2}{3} \leq -x \leq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} \leq 1-x \leq \frac{1}{2}$$

$$2 \leq \frac{1}{1-x} \leq 3$$

$$1 \leq -1 + \frac{1}{1-x} \leq 2.$$

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n° 23 p. 187

1. Si n est impair, -1 est racine évidente de P_n . Donc, P_n est factorisable par $x + 1$.

2. On a vu dans le deuxième travail dirigé du § 1.3 que :

$$P_3(x) = x^3 + 1 = (x^2 - x\sqrt{2} + 2)(x^2 + x\sqrt{2} + 2). P_4 \text{ est donc factorisable.}$$

Ainsi, P_n factorisable n'implique pas que n est impair. La réciproque est par conséquent fausse.

♦ Exercice n° 24 p. 187

On doit avoir, pour tout nombre réel x , $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b)x^2 + 2abx + b^2$.

$$\text{On en déduit que : } \begin{cases} 2a = 6 \\ a^2 + 2b = 11 \\ 2ab = 6 \\ b^2 = 1 \end{cases} \text{ ; donc : } a = 3 \text{ et } b = 1.$$

Donc, le produit de 4 nombres entiers consécutifs, augmenté de 1, est un carré parfait.

$$\text{Vérification : } 1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 5^2 \quad ; \quad 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 11^2 ; \\ (-5) \times (-4) \times (-3) \times (-2) + 1 = 11^2 \quad ; \quad (-2) \times (-1) \times 0 \times 1 + 1 = 1^2.$$

♦ Exercice n° 25 p. 187

1. Immédiat.

2. On conjecture que pour tout entier naturel n , on a :

$$n \times \frac{n}{n+1} = n - \frac{n}{n+1}.$$

$$3. \text{ Or, } n - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + n - n}{n+1} = \frac{n^2}{n+1}.$$

♦ Exercice n° 26 p. 187

Les vérifications sont immédiates.

On conjecture que pour tout entier naturel n , on a :

$$n + \frac{n}{n-1} = n \times \frac{n}{n-1}.$$

$$\text{Or, } n + \frac{n}{n-1} = \frac{n^2 - n + n}{n-1} = \frac{n^2}{n-1}.$$

♦ Exercice n° 27 p. 187

$$P(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}, \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont trois nombres réels distincts.}$$

$$1. P(a) = P(b) = P(c) = 1.$$

2. P est un polynôme de degré 2, qui est égal à 1 pour 3 valeurs distinctes ; donc : $P(x) = 1$ (cf. conséquences p. 181).

♦ Exercice n° 28 p. 187

$$P(x) = a^2(b-x) + b^2(x-a) + x^2(a-b), \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels distincts.}$$

$$1. P(a) = P(b) = 0 ; \text{ donc il existe un polynôme } P_1 \text{ tel que, pour tout nombre réel } x : P(x) = (x-a)(x-b)P_1(x).$$

$$2. \text{ Le degré de } P \text{ est égal à } 2, \text{ car } a \neq b ; \text{ le degré de } (x-a)(x-b) \text{ est aussi égal à } 2 ; \text{ donc : } d^\circ P_1 = 0.$$

$$P(0) = a^2b - ab^2 = abP_1(0). \text{ Donc : } P_1(x) = a - b \text{ et } P(x) = (a-b)(x-a)(x-b).$$

♦ Exercice n° 29 p. 187

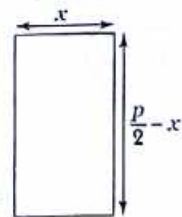
$$1. p = 4. a) \mathcal{A}(x) = x(2-x), \text{ pour } 0 < x < 2.$$

$$b) x(2-x) = -(x-1)^2 + 1 ; \text{ l'aire est maximale pour } x = 1 \text{ (et vaut 1).}$$

$$2. p = 10. a) \mathcal{A}(x) = x(5-x) = -(x-2,5)^2 + 6,25, \text{ pour } 0 < x < 5.$$

$$b) \text{ L'aire maximale est égale à } 6,25 \text{ (pour } x = 2,5).$$

$$3. \text{ Cas général : } \mathcal{A}(x) = x\left(\frac{p}{2} - x\right) = -\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + \frac{p^2}{16}. \text{ L'aire maximale est égale à } \frac{p^2}{16} \text{ (pour } x = \frac{p}{4}).$$



♦ Exercice n° 30 p. 188

$$\text{Posons } P(x) = MA^2 \cdot \overline{BC} + MB^2 \cdot \overline{CA} + MC^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB}.$$

$$1. P(x) = (c-b)(x-a)^2 + (a-c)(x-b)^2 + (b-a)(x-c)^2 + (c-b)(a-c)(b-a).$$

$$2. D^\circ P \leq 2, \text{ car c'est une somme de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à } 2.$$

$$3. P(a) = (a-c)(a-b)^2 + (b-a)(a-c)^2 + (c-b)(a-c)(b-a) \\ = (a-c)(a-b)[(a-b) - (a-c) - (c-b)] = 0.$$

On démontre de même que : $P(b) = P(c) = 0$.

P étant un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 ayant 3 racines, P est le polynôme nul. On a donc pour tous points A, B, C et M d'une droite munie d'un repère : $MA^2 \cdot BC + MB^2 \cdot CA + MC^2 \cdot AB + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$.

♦ Exercice n° 31 p. 188

$$Q_a(x) = (b-c)(x-a)((x+a)^2 + (b+c)^2);$$

$$Q_b(x) = (c-a)(x-b)((x+b)^2 + (c+a)^2);$$

$$Q_c(x) = (a-b)(x-c)((x+c)^2 + (a+b)^2);$$

$$P(x) = Q_a(x) + Q_b(x) + Q_c(x).$$

1. Termes de plus haut degré de Q_a : $(b-c)x^3$; de Q_b : $(c-a)x^3$; de Q_c : $(a-b)x^3$.

Or : $(b-c) + (c-a) + (a-b) = 0$. Donc, P est nul ou de degré inférieur ou égal à 2.

2. $P(a) = P(b) = P(c) = 0$. On en déduit que P est le polynôme nul (polynôme de degré inférieur ou égal à 2, qui s'annule en trois valeurs distinctes).

♦ Exercice n° 32 p. 188

1. $P(m) = 0 \Leftrightarrow (a_3m^2 + a_2m + a_1)m = a_0$, avec $a_3m^2 + a_2m + a_1$, m et a_0 appartenant à $\mathbb{Z}$.
Donc : m divise a_0 .

$$2. Q(x) = x^3 + 6x^2 + 6x + 5.$$

a) Les éventuelles racines entières de Q sont des diviseurs de 5 (le coefficient du monôme constant).
Or 5 n'admet aucun diviseur pair ; il n'existe donc aucun entier pair qui soit racine de Q .

b) Q est un polynôme à coefficients positifs, donc une éventuelle racine de Q ne peut être que négative.
De plus et d'après 1, une racine entière de Q est un diviseur de 5.

On en déduit qu'une racine entière de Q ne peut être que -1 ou -5 .
Or : $Q(-1) = 4$ et $Q(-5) = 0$. Donc : $Q(x) = (x+5)(x^2+x+1)$.

3. Les éventuelles racines de R sont les diviseurs négatifs de 9, à savoir : $-1, -3$ et -9 .
Or : $P(-3) = 0$. Donc : $R(x) = (x+3)(x^2+3x+3)$.

Les éventuelles racines de S sont les diviseurs négatifs de 14, à savoir : $-1, -2, -7$ et -14 .
Or : $P(-7) = 0$. Donc : $S(x) = (x+7)(x^2+2x+2)$.

♦ Exercice n° 33 p. 188

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, où $a \neq 0$. (p) est la propriété : pour tout nombre réel x non nul, $f(\frac{1}{x}) = \frac{f(x)}{x^4}$.

1. a) Si f vérifie (p) et α est une racine non nulle de f , alors $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{f(\alpha)}{\alpha^4} = 0$; c'est-à-dire $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de f .

b) Pour tout nombre réel x non nul, $f(\frac{1}{x}) = \frac{a}{x^4} + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x} + e = \frac{ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a}{x^4}$,

$$\frac{f(x)}{x^4} = \frac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{x^4}.$$

Donc, f vérifie (p) si et seulement si : $a = e$ et $b = d$.

On en déduit que 0 n'est pas racine de f (sinon : $f(0) = 0$; c'est-à-dire : $e = 0 = a$, en contradiction avec l'hypothèse).

c) Application

Si $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2$, f vérifie (p) et $f(2) = 0$; donc $f(\frac{1}{2}) = 0$.

On en déduit que : $f(x) = (x-2)(x-\frac{1}{2})(2x^2-8x+2) = (x-2)(x-\frac{1}{2}) \times 2((x-2)^2-3)$
 $= (x-2)(2x-1)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$.

2. a) Si f vérifie (p), alors : $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$;

donc, pour tout nombre réel x non nul, on a : $\frac{f(x)}{x^2} = ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c$.

b) Si f vérifie toujours (p), pour tout nombre réel x non nul on a :

$$\frac{f(x)}{x^2} = a\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = a\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c - 2a;$$

$$\frac{f(x)}{x^2} = g\left(x + \frac{1}{x}\right), \text{ avec } g(x) = ax^2 + bx + c - 2a.$$

On en déduit que : $f(\alpha) = 0$ et $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow g\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = 0$.

c) Application

$$\bullet g(x) = 6x^2 - 35x + 50 = 6\left(\left(x - \frac{35}{12}\right)^2 - \left(\frac{5}{12}\right)^2\right) = 6\left(x - \frac{10}{3}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right). \text{ Donc, } \frac{10}{3} \text{ et } \frac{5}{2} \text{ sont les racines de } g.$$

$$\bullet \text{ Si } f(x) = 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6, \text{ alors } f \text{ vérifie (p).}$$

Donc, α est racine de $f \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha}$ est racine de $6x^2 - 35x + 62 - 12 = g(x)$

$$\Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{10}{3}$$

$$\text{ou } \alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \frac{10}{3}\alpha + 1 = 0$$

$$\text{ou } \alpha^2 - \frac{5}{2}\alpha + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{10}{6}\right)^2 - \frac{64}{36} = 0$$

$$\text{ou } \left(\alpha - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 3)(\alpha - \frac{1}{3}) = 0$$

$$\text{ou } (\alpha - 2)(\alpha - \frac{1}{2}) = 0.$$

Donc $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2$ et 3 sont les racines de f ; on a : $f(x) = (3x - 1)(2x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

♦ Exercice n° 34 p. 188

$$1. \text{ Soit } P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

$$\bullet P(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0 \text{ et } P(x) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

$$\bullet P(x+1) - P(x) = x^2 \Leftrightarrow 3ax^2 + (3a+2b)x + a+b+c = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 3a+2b = 0 \\ a+b+c = 0. \end{cases}$$

$$\text{Donc : } P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x.$$

$$2. a) \text{ On a : } P(2) - P(1) = 1^2$$

$$P(3) - P(2) = 2^2$$

$$P(n+1) - P(n) = n^2.$$

En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient : $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = P(n+1) - P(1)$.

$$b) \text{ On en déduit que : } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = P(n) + n^2 = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$c) \text{ Pour } n = 2, \text{ on a : } 1^2 + 2^2 = 5 = \frac{2 \times 3 \times 5}{6}. \text{ Pour } n = 4, \text{ on a : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 = \frac{4 \times 5 \times 9}{6}.$$

♦ Exercice n° 35 p. 188

$$1. \text{ On a : } \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2+x+x^2-x}{2}\right)\left(\frac{x^2+x-x^2+x}{2}\right) = x^3.$$

$$2. \text{ Si } f(x) = \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2, \text{ alors } f(x+1) - f(x) = \left(\frac{(x+1)^2 - (x+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x^2+2x+1-x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^2 = x^3.$$

Par une méthode analogue à celle de l'exercice précédent, on obtient :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = f(n+1) - f(1) = f(n) + n^3 - f(1)$$

$$= \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2 + n^3 - 0 = n^2\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + n\right)$$

$$= n^2\left(\frac{n^2-2n+1+4n}{4}\right)$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

11. Équations – Inéquations dans $\mathbb{R}$

(pages 189 à 204 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- élargir la notion d'équation et d'inéquation ;
- introduire des techniques de résolution pour des équations et inéquations à une inconnue liant deux polynômes ou deux fractions rationnelles, contenant des valeurs absolues ou nécessitant l'utilisation d'une inconnue auxiliaire ;
- renforcer la capacité des élèves à résoudre des problèmes nécessitant une mise en équation.

COMMENTAIRES

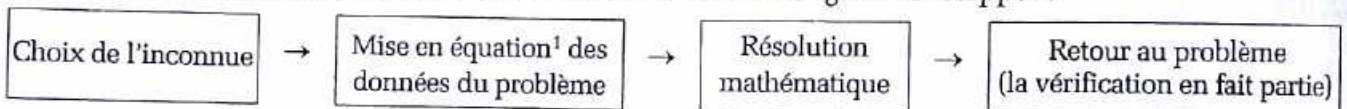
Ce chapitre est d'abord un chapitre de révision. En dehors des définitions et propriétés, que l'on a volontairement voulues générales pour tenir compte du caractère scientifique de la série, tout développement théorique doit être proscrit.

Le professeur attirera l'attention des élèves sur les deux types d'activités :

- mise en place des techniques de résolutions,
- mise en équation (ou inéquation) et résolution de problèmes.

Concernant la résolution d'équations ou d'inéquations, il a été jugé avantageux de montrer différentes méthodes de résolution sur des exemples, plutôt que d'énoncer des types de transformations.

La mise en équation (ou inéquation) de problèmes reste un exercice difficile pour l'élève, bien qu'il y ait été initié dès la quatrième. On insistera encore sur la méthodologie à développer :



SAVOIRS ET SAVOIR – FAIRE

savoirs

Généralités

- Équations et inéquations à une inconnue : définitions, contraintes sur l'inconnue, solution et résolution.

- Résolution d'équations :
 - équations équivalentes ;
 - raisonnement par équivalences ou par implications puis vérification.
- Résolution d'inéquations

Équations et inéquations liant deux polynômes ou deux fractions rationnelles, contenant des valeurs absolues

Méthodes de résolution (dégagées sur des exemples).

savoir-faire

- Donner des exemples d'équations ou d'inéquations à une inconnue.
- Pour une équation ou une inéquation à une inconnue donnée :
 - déterminer les contraintes sur cette inconnue ;
 - vérifier si un nombre réel est ou n'est pas solution.

- Résoudre une équation ou une inéquation à une inconnue, par mise en oeuvre des points méthodes énoncés et adaptés à chaque type d'équation ou d'inéquation.

- Résoudre un problème concret.

¹ désigne également la recherche d'inéquations ou de systèmes d'inéquations traduisant les données

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice n° 1.a p. 193

$$S_9 = S_0 = \{-3; 2; \frac{23}{7}; \frac{7}{2}\}; S_2 = \{-3; 2\}.$$

♦ Exercice n° 1.b p.193

$$1. (E_1) : \frac{x}{2} - 3 = \frac{x}{3} - 4 \text{ et } (E_2) : 3x - 18 = 2x - 24$$

sont équivalentes dans $\mathbb{R}$, puisque l'on passe de (E_1) à (E_2) en multipliant ses deux membres par 6.

2. $(E_1) : |x - 2| = 5$ et $(E_2) : (x - 2)^2 = 25$ sont équivalentes dans $\mathbb{R}$, puisque l'on passe de (E_1) à (E_2) en élevant au carré ses deux membres, positifs sur $\mathbb{R}$.

$$3. (E_1) : x + x^3 = 4x \text{ et } (E_2) : 1 + x^2 = 4$$

sont équivalentes dans $\mathbb{R}^*$, puisque l'on passe de (E_1) à (E_2) en divisant ses deux membres par x , nombre réel non nul sur $\mathbb{R}^*$.

$$4. (E_1) : \frac{2x+1}{x-1} = \frac{x-1}{2x+1} \text{ et } (E_2) : (2x+1)^2 = (x-1)^2$$

sont équivalentes dans $\mathbb{R} \setminus \{1; -\frac{1}{2}\}$, puisque l'on passe de (E_1) à (E_2) en multipliant ses deux membres par $(x-1)(2x+1)$, nombre réel non nul sur $\mathbb{R} \setminus \{1; -\frac{1}{2}\}$.

♦ Exercice n° 1.c p.193

$$1. (I_1) : \frac{x}{2} - 3 \leq \frac{x}{3} - 4 \text{ et } (I_2) : 3x - 18 \leq 2x - 24$$

sont équivalentes dans $\mathbb{R}$, puisque l'on passe de (I_1) à (I_2) en multipliant ses deux membres par 6.

2. $(I_1) : |x - 2| \leq 5$ et $(I_2) : (x - 2)^2 \leq 25$ sont équivalentes dans $\mathbb{R}$, puisque l'on passe de (I_1) à (I_2) en élevant au carré ses deux membres, positifs sur $\mathbb{R}$.

$$3. (I_1) : x + x^3 \leq 4x \text{ et } (I_2) : 1 + x^2 \leq 4$$

ne sont pas équivalentes dans $\mathbb{R}^*$, puisque l'on passe de (I_1) à (I_2) en divisant ses deux membres par x , pas toujours positif sur $\mathbb{R}^*$.

$$4. (I_1) : \frac{2x+1}{x-1} \leq \frac{x-1}{2x+1} \text{ et } (I_2) : (2x+1)^2 \leq (x-1)^2$$

ne sont pas équivalentes dans $\mathbb{R} \setminus \{1; -\frac{1}{2}\}$, puisque l'on passe de (I_1) à (I_2) en multipliant ses deux membres par $(x-1)(2x+1)$, pas toujours positif sur $\mathbb{R} \setminus \{1; -\frac{1}{2}\}$.

Commentaire

La résolution effective de ces équations ou inéquations offre l'occasion de vérifier les réponses données.

♦ Exercice n° 1.d p.193

$$(I) : \frac{x+1}{x-1} \leq \frac{1}{(x-1)^2}. \quad 1. \text{ Contraintes sur l'inconnue : } x \neq 1.$$

$$2. (I) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)-1}{(x-1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \leq 0, \text{ pour } x \neq 1.$$

$$3. \text{ L'ensemble des solutions de (I) est : } [-\sqrt{2}; 1[\cup]1; \sqrt{2}].$$

♦ Exercice n° 2.a p.196

$$1. S = (0; \frac{1}{3}); 2. S = [-3; -1; 0].$$

♦ Exercice n° 2.b p.196

$$S = \{1\}.$$

♦ Exercice n° 2.c p.196

$$1. S =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[; 2. S = [-1] \cup [1; +\infty[.$$

♦ Exercice n° 2.d p.196

$$S = [1; +\infty[.$$

♦ Exercice n° 3.a p.199

$$a) S = \{24\}; b) S = \emptyset; c) S = \{\frac{1}{2}; 2\}.$$

♦ Exercice n° 3.b p.199

$$a) \frac{3}{x+3} \leq \frac{2}{x+2} \Leftrightarrow \frac{3(x+2)-2(x+3)}{(x+3)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x+3)(x+2)} \leq 0;$$

♦ Exercice n° 2.e p.196

$$1. a) S_a =]-\infty; -1] \cup \{2\};$$

$$b) S_b =]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [-\frac{1}{2}; 1] \cup [\sqrt{2}; +\infty[.$$

$$2. S = S_a \cap S_b =]-\infty; -\sqrt{2}] \cup \{2\}.$$

♦ Exercice n° 2.f p.196

$$n^2 \geq (n+1)^2 + (n+2)^2 \Leftrightarrow n^2 + 6n + 2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow (n+3)^2 \leq 7.$$

Donc l'ensemble des entiers relatifs n tels que le carré de n soit supérieur à la somme des carrés de $n+1$ et $n+2$ est : $\{-5; -4; -3; -2; -1\}$.

donc : $S =]-\infty ; -3[\cup]-2 ; 0[$;
 b) $\frac{x+1}{x} \leq \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2 - x^2}{x(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x(x+1)} \leq 0$;

donc : $S =]-\infty ; -1[\cup]-\frac{1}{2} ; 0[$;

c) $1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} \leq \frac{x^2 + 2x - 2}{(x-2)(x+1)} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^2 + 2x - 2}{(x-2)(x+1)} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(x^2 + 3x)(x-2) - (x^2 + 2x - 2)(x-1)}{(x-2)(x+1)(x-1)} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{(x-2)(x+1)(x-1)} \geq 0$;

donc : $S =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]2 ; +\infty[$.

♦ Exercice n° 3.c p.199

$\frac{x^2 - 7}{x - 3} \leq 2x \frac{5 - x}{x^2 - 9} \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 7)(x + 3) - 2x(5 - x)}{(x - 3)(x + 3)} \leq 0$
 $\frac{(x+1)(x-3)(x+7)}{(x-3)(x+3)} \leq 0$;

donc : $S =]-\infty ; -7[\cup]-3 ; -1[$.

♦ Exercice n° 4.a p.200

a) $S = \{-1 ; 3\}$; b) $S = \{5 ; 9\}$;

c) $S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} ; \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} ; 1 ; 2 \right\}$;

d) $S = \left\{ \frac{-11 - \sqrt{129}}{2} ; \frac{-11 + \sqrt{129}}{2} ; 2 ; 3 \right\}$.

♦ Exercice n° 5.a p.201

$f(x) = |2x + 1| - |x - 3| + 3x + 1$.

1. $f(x) = 2x - 3$, pour $x \leq -\frac{1}{2}$;
 $f(x) = 6x - 1$, pour $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$;
 $f(x) = 4x + 5$, pour $3 \leq x$.

2. L'équation $f(x) = 0$ a pour solution : $\frac{1}{6}$.

♦ Exercice n° 4.b p.200

a) $S =]-\infty ; -4[\cup]-\frac{2}{3} ; +\infty[$;

b) $S = [-1 ; 1]$;

c) $S =]-\infty ; 1[\cup]3 ; 4[$.

♦ Exercice n° 4.c p.200

a) $S = [2 ; +\infty[$; b) $S = \{\frac{2}{3} ; 8\}$.

♦ Exercice n° 4.d p.200

a) $S =]-\frac{2}{3} ; +\infty[$; b) $S =]-\infty ; 3]$.

♦ Exercice n° 5.b p.201

a) En utilisant l'inconnue auxiliaire $X = \frac{x}{x+2}$, on obtient
 $X = -\frac{3}{28}$; donc : $x = \frac{-6}{31}$ (qui satisfait la contrainte $x \neq -2$).

b) En utilisant l'inconnue auxiliaire $X = \sqrt{x-2}$, on obtient :
 $X^2 + X - 6 = 0$ et $X \geq 0$; donc $X = 2$, puis $x = 6$.

□ Exercices d'apprentissage

GÉNÉRALITÉS

♦ Exercice n°1 p.202

1. Les équations $(E_1) : x^3 = x$ et $(E_2) : x^2 = 1$ sont équivalentes dans $\mathbb{R}^*$, mais ne le sont pas dans $\mathbb{R}$.
2. Non en général (oui si l'expression ne s'annule pas sur l'ensemble de résolution).
3. Non en général (oui si les deux membres sont positifs sur l'ensemble de résolution).
4. Non en général (oui si les deux nombres sont de signes contraires).
5. Non, une équation du premier degré a au plus une solution.
6. Non, une équation du second degré n'a pas toujours deux solutions distinctes.

♦ Exercice n° 2 p.202

En élevant les deux membres d'une équation au carré, on obtient une équation équivalente que si les termes initiaux sont de même signe ; ce qui n'est pas le cas pour l'équation « $x\sqrt{x} = -x^2$ ».

♦ Exercice n° 3 p.202

a) $x \neq -2$ et $x \neq 1$; b) $x \in [-3 ; 0[\cup]0 ; 3]$; c) $x \leq 1$; d) $x \in]2 ; 3]$.

MISE EN ÉQUATIONS

♦ Exercice n° 4 p.202

Soit x le nombre d'années pour que l'âge de Fofana soit le double de l'âge de son fils.

On a : $38 + x = 2(13 + x)$; d'où : $x = 12$.

♦ Exercice n° 5 p.202

Soit l la largeur du champ.

On a : $l \geq 0$, $L = l + 10$ et $(l + 10)l = 1\,200$.

Donc : $l \geq 0$ et $l^2 + 10l - 1\,200 = 0$; c'est-à-dire : $l = 30$.

♦ Exercice n° 6 p.202

1. On a : $45\,000 \times \frac{100+t}{100} \times \frac{t+2}{100} = 4\,860$; c'est-à-dire : $(100+t)(t+2) = 1\,080 \Leftrightarrow t^2 + 102t - 880 = 0$.

2. $t^2 + 102t - 880 = (t+51)^2 - 3\,481 = (t-8)(t-110)$; on en déduit que : $t = 8$.

♦ Exercice n° 7 p.202

Soit S la somme dont disposait la personne avant ses achats.

Les sommes dépensées sont : $\frac{S}{4}$ (dans le premier magasin), $\frac{3S}{8}$ (dans le second magasin) et 500 (pour l'objet final).

On obtient : $S = \frac{S}{4} + \frac{3S}{8} + 500 + 400$; c'est-à-dire : $3S = 7\,200$. La somme au départ était donc de : 2 400 F.

♦ Exercice n° 8 p.202

Soit v le montant des ventes.

En mode 1, la rémunération est : $100\,000 + \frac{5}{100}v$; en mode 2, la rémunération est : $120\,000 + \frac{2}{100}v$.

Le mode 1 est plus avantageux lorsque : $100\,000 + \frac{5}{100}v \geq 120\,000 + \frac{2}{100}v$; c'est-à-dire : $v \geq 666\,667$ F.

♦ Exercice n° 9 p.202

Soit n le nombre de spectateurs. Le producteur aura un bénéfice dès que : $200n \geq 53\,170$; c'est-à-dire : $n \geq 266$.

♦ Exercice n° 10 p.202

Soit v la vitesse moyenne de l'automobiliste, exprimée en km/h, et t la durée du trajet effectué, exprimée en h.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \begin{cases} vt = 250 \\ (v+10)(t-1,25) = 250 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} vt = 250 \\ 10t - 1,25v - 12,5 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{250}{v} \\ \frac{2\,500}{v} - 1,25v - 12,5 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{250}{v} \\ 5v^2 + 50v - 10\,000 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{250}{v} \\ 5(v-40)(v+50) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la vitesse moyenne de l'automobiliste sur ce trajet est de 40 km/h.

♦ Exercice n° 11 p.202

Soit v la vitesse de l'automobiliste, exprimée en km/h, et t la durée, exprimée en h, séparant son départ de l'instant où il rattrape le cycliste.

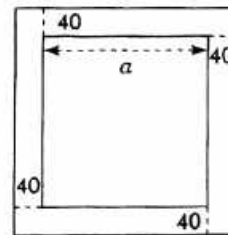
Lorsque l'automobiliste rejoint le cycliste, ils ont parcouru la même distance et la durée du trajet du cycliste est $t + 2$, puisque celui-ci est parti 2h avant l'automobiliste.

$$\text{On a : } vt = 20(t+2) \Rightarrow t = \frac{40}{v-20}.$$

$$\text{De plus : } 30 \leq v-20 \leq 40 \Rightarrow \frac{1}{40} \leq \frac{1}{v-20} \leq \frac{1}{30}.$$

Donc $1 \leq t \leq \frac{4}{3}$. L'automobiliste rattrapera le cycliste entre 9h et 9h 20min.

♦ Exercice n° 12 p.202



Soit a la longueur, en cm, du côté du carré restant à l'intérieur du mur.

On a : $4 \times 40a + 4 \times 40^2 = 840\,000$;
donc : $a = 5\,210$ cm.

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS LIANT DEUX POLYNÔMES

◆ Exercice n° 13 p.202

a) $S = \{3\}$; b) $S = \{0\}$; c) $S = \emptyset$; d) $S = \{16\}$.

◆ Exercice n° 14 p.202

a) $S = \{-3 ; -1 ; 2\}$;

b) $S = \{0 ; \frac{3}{4}\}$; c) $S = \{-\frac{21}{10} ; 1\}$.

◆ Exercice n° 16 p.202

$$\begin{aligned} a) x^3 - x &= 2 - 2x^3 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 3x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x-1)\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{12}\right) = 0 ; \\ \text{donc : } S &= \left\{-\frac{3 - \sqrt{33}}{6} ; -\frac{3 + \sqrt{33}}{6} ; 1\right\} ; \end{aligned}$$

◆ Exercice n° 17 p.203

a) $S =]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$;

b) $S = [\frac{2}{3} ; 1]$; c) $S =]-\infty ; -1]$;

d) $S = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$; e) $S = \{\frac{1}{3}\}$;

f) $S =]-\infty ; \frac{3}{2}[\cup]2 ; +\infty[$.

◆ Exercice n° 18 p.203

$$\begin{aligned} a) 5x^3 - 3x^2 - x + 6 &\leq x^3 + 2x^2 - 5x - 7 \\ &\Leftrightarrow 4x^3 - 5x^2 + 4x + 13 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(4x^2 - 9x + 13) \leq 0 ; \end{aligned}$$

donc : $S =]-\infty ; -1]$;

$$\begin{aligned} b) x^4 + 2x^3 + x - 1 &\leq x^3 + x^2 + 1 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2+1) \leq 0 ; \end{aligned}$$

donc : $S = [-2 ; 1]$.

◆ Exercice n° 15 p.202

a) $S_Q = S_Z = \{-1 ; 2\}$;

b) $S_Q = S_Z = \{-1\}$;

c) $S_Q = \{-\frac{1}{3} ; 2\}$ et $S_Z = \{2\}$;

d) $S_Q = \{1 ; \frac{3}{5}\}$ et $S_Z = \{1\}$.

$$\begin{aligned} b) (2x-3)^2(3x+2) &= 11x^3 - 34x^2 + 12x + 32 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 - 9x - 14 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 5x - 14) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x+7) = 0 ; \\ \text{donc : } S &= \{-7 ; -1 ; 2\}. \end{aligned}$$

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS LIANT DEUX FRACTIONS RATIONNELLES

◆ Exercice n° 19 p.203

a) contraintes : $x \neq 0$; $S = \{4\}$;

b) contraintes : $x \neq -1$ et $x \neq 1$; $S = \{-2 ; \frac{4}{3}\}$;

c) contraintes : $x \neq -1$ et $x \neq 1$; $S = \emptyset$;

d) contraintes : $x \neq -1$ et $x \neq 1$; $S = \{2 - \sqrt{7} ; 2 + \sqrt{7}\}$.

◆ Exercice n° 21 p.203

$$\text{On a : } 2x^2 + 2x + 9 = 2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}\right).$$

$$\begin{aligned} a) x + 1 &= -\frac{9}{2x} \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 2x + 9}{2x} = 0 ; \\ \text{donc : } S &= \emptyset ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) x(x+1) &\geq -\frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 9 \geq 0 ; \\ \text{donc : } S &= \mathbb{R} ; \end{aligned}$$

◆ Exercice n° 22 p.203

$$\frac{3x-1}{x^2-1} \geq \frac{2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2-1} \geq 0 ; \text{ donc : } S =]1 ; +\infty[.$$

◆ Exercice n° 23 p.203

$$\begin{aligned} a) \frac{x-2}{x+1} < \frac{2x+5}{x} &\Leftrightarrow \frac{x^2+9x+5}{x(x+1)} > 0 ; \text{ or : } x^2+9x+5 = \left(x + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{61}{4} ; \\ \text{donc : } S &=]-\infty ; -\frac{9-\sqrt{61}}{2}[\cup]-\frac{9+\sqrt{61}}{2} ; +\infty[; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \frac{2}{(x-1)^2} &\leq \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} \leq 0 ; \text{ donc : } S = \{-1\} ; \end{aligned}$$

◆ Exercice n° 20 p.203

a) contraintes : $x \neq -1$ et $x \neq 0$;

$$S = \left\{-\frac{9-\sqrt{61}}{2} ; -\frac{9+\sqrt{61}}{2}\right\} ;$$

b) contraintes : $x \neq -\frac{3}{2}$ et $x \neq 3$; $S = \{0 ; \frac{1}{4}\}$.

$$\begin{aligned} c) x + 1 &\geq -\frac{9}{2x} \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 2x + 9}{2x} \geq 0 ; \\ \text{donc : } S &=]0 ; +\infty[; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) 2x &\geq -\frac{9}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 2x + 9}{x+1} \geq 0 ; \\ \text{donc : } S &=]-1 ; +\infty[. \end{aligned}$$

$$c) \frac{x}{x-2} \leq \frac{6}{x-1} \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-3)}{(x-2)(x-1)} \leq 0 ; \text{ donc : } S =]1 ; 2[\cup]3 ; 4[;$$

$$d) \frac{x^3}{x^2-2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x^2-2x+2)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} \leq 0 ; \text{ or : } x^2-2x+2 = (x-1)^2 + 1 ;$$

$$\text{ donc : } S =]-\infty ; -\sqrt{2}[\cup]-1 ; \sqrt{2}[.$$

◆ Exercice n° 24 p.203

$$a) \frac{4x-1}{x-1} \leq \frac{2x+3}{x+1} \Leftrightarrow \frac{(4x-1)(x+1) - (2x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0 ;$$

$$\text{ or : } x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} ;$$

$$\text{ donc : } S =]-1 ; 1[;$$

$$b) \frac{2x-1}{x-1} \leq \frac{x+7}{x+1} \Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x+1) - (x+7)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)} \leq 0 ;$$

$$\text{ donc : } S =]-1 ; 1[\cup]2 ; 3[.$$

◆ Exercice n° 25 p.203

$$a) \frac{x}{x^2-1} \leq \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{x^2-1} ;$$

$$\text{ donc : } S =]-1 ; 0[\cup]1 ; +\infty[;$$

$$b) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} \leq \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(x-1)(x+1)} \leq \frac{-8}{(x-4)(x+4)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-16+4(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x-4)(x+4)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x-4)(x+4)} \leq 0 ;$$

$$\text{ donc : } S =]-4 ; -2[\cup]-1 ; 1[\cup]2 ; 4[.$$

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS AVEC VALEURS ABSOLUES

◆ Exercice n° 26 p.203

$$a) S = \{-2 ; 4\} ; b) S =]-\frac{4}{3} ; 2[; c) S = \{-4 ; 3\} ; d) S = \{-3 ; -1 ; 1 ; 2\}.$$

◆ Exercice n° 27 p.203

$$a) S =]-1 ; 2[; b) S = [1 ; 3] ; c) S = [-1 ; 5].$$

◆ Exercice n° 28 p.203

$$a) 3|2x+1| \leq 4|x-2| \Leftrightarrow 9(2x+1)^2 - 16(x-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (10x-5)(2x+11) \leq 0 ; \text{ donc : } S = [-\frac{11}{2} ; \frac{1}{2}] ;$$

$$b) |x^2-5x-15| < |6x+13| \Leftrightarrow (x^2+x-2)(x^2-11x-28) < 0 ;$$

$$\text{ donc : } S =]\frac{11-\sqrt{233}}{2} ; -2[\cup]1 ; \frac{11+\sqrt{233}}{2}[;$$

$$c) |2x^2-x+1| \geq |5x^2-3x-22| \Leftrightarrow (7x^2-4x-21)(3x^2-2x+23) \leq 0 ;$$

$$\text{ donc : } S =]\frac{1-\sqrt{70}}{3} ; \frac{2-\sqrt{151}}{7}[\cup]\frac{2+\sqrt{151}}{7} ; \frac{1+\sqrt{70}}{3}[.$$

AUTRES EXEMPLES

◆ Exercice n° 29 p.203

$$a) |2-x| = x^2+1 \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \text{ ou } x^2-x+3=0 ; \text{ donc : } S = \{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}.$$

$$b) |x^2-1| = 1-x^2 \Leftrightarrow x^2-1 \leq 0 ; \text{ donc : } S = [-1 ; 1] ;$$

$$c) S = \emptyset, \text{ puisque } 2-\sqrt{7} < 0 ; d) S = \{3\}.$$

◆ Exercice n° 30 p.203

$$a) \text{ En utilisant l'inconnue auxiliaire } X = x^2, \text{ on obtient : } X^2 - 8X + 15 = 0 ; \text{ c'est-à-dire : } X = 3 \text{ et } X = 5 ;$$

$$\text{ donc : } S = \{-\sqrt{5} ; -\sqrt{3} ; \sqrt{3} ; \sqrt{5}\} ;$$

$$b) \text{ en utilisant l'inconnue auxiliaire } X = (2x+1)^2, \text{ on retrouve : } X^2 - 8X + 15 = 0 ;$$

$$\text{ donc : } S = \{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{-1-\sqrt{3}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{3}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\} ;$$

$$c) \text{ en utilisant l'inconnue auxiliaire } X = (2x^2+1)^2, \text{ on retrouve : } X^2 - 8X + 15 = 0 ;$$

$$\text{ donc : } S = \{-\frac{\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}}{2} ; -\frac{\sqrt{2(\sqrt{3}-1)}}{2} ; \frac{\sqrt{2(\sqrt{3}-1)}}{2} ; \frac{\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}}{2}\}.$$

Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n° 31 p.203

$30 = 3 \times 10 = 3 \times (3^2 + 1)$; donc 3 est solution de (E) : $x(x^2 + 1) = 30$.

Le polynôme $x^3 + x - 30$, factorisable par $(x - 3)$, s'écrit : $x^3 + x - 30 = (x - 3)(x^2 + 3x + 10)$;

or $x^2 + 3x + 10 = (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{31}{4}$; donc 3 est la seule solution de (E).

◆ Exercice n° 32 p.203

(E) : $(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2) = 1\,120$.

1. $1\,120 = 4 \times 5 \times 7 \times 8$, donc 6 est solution de (E).

2. α solution de (E) $\Rightarrow (\alpha - 2)(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha + 2) = 1\,120$

$$\Rightarrow (-\alpha - 2)(-\alpha - 1)(-\alpha + 1)(-\alpha + 2) = (\alpha + 2)(\alpha + 1)(\alpha - 1)(\alpha - 2) = 1\,120$$

$$\Rightarrow -\alpha \text{ est solution de (E).}$$

3. 6 et -6 sont solutions de (E) ; le polynôme $(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2) - 1\,120$:

• s'écrit $(x^2 - 1)(x^2 - 4) - 1\,120 = x^4 - 5x^2 - 1\,116$,

• est factorisable par $x^2 - 36$;

Après calculs, on trouve : $x^4 - 5x^2 - 1\,116 = (x^2 - 36)(x^2 + 31)$; donc -6 et 6 sont les seules solutions de (E).

◆ Exercice n° 33 p.203

• 4 est solution évidente de l'équation (E) : $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$.

• $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{11}{30} \Leftrightarrow 60x + 90 = 11x^2 + 33x + 22$ (avec $x \neq -1$ et $x \neq -2$).

Donc le polynôme $11x^2 - 27x - 68$, factorisable par $x - 4$, s'écrit : $11x^2 - 27x - 68 = (x - 4)(11x + 17)$;

les solutions de (E) sont finalement : $-\frac{17}{11}$ et 4.

◆ Exercice n° 34 p.203

(E) : $\frac{|1 - |x||}{2 - |x|} = 1 + |x|$. En utilisant l'inconnue auxiliaire $X = |x|$, on obtient : $\frac{|1 - X|}{2 - X} = 1 + X$;

c'est-à-dire : $|1 - X| = -X^2 + X + 2$, avec $0 < X < 2$ (1).

• Ou bien $-X^2 + X + 2 = 1 - X$ et $X^2 - 2X - 1 = 0 \Rightarrow X = 1 - \sqrt{2}$ ou $X = 1 + \sqrt{2}$.

• Ou bien $-X^2 + X + 2 = X - 1$ et $X^2 - 3 = 0 \Rightarrow X = -\sqrt{3}$ ou $X = \sqrt{3}$.

Des 4 valeurs précédentes, on ne retient que : $X = \sqrt{3}$, la seule qui vérifie (1).

Les solutions de l'équation (E) sont : $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

◆ Exercice n° 35 p.203

$$\frac{1 + \frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}}{1 - \frac{1-x}{1-\frac{1}{x}}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1 + \frac{1+x}{\frac{x+1}{x}}}{1 - \frac{1-x}{\frac{x-1}{x}}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1 + \frac{(1+x)x}{x+1}}{1 - \frac{(1-x)x}{x-1}} = 1 \text{ et } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x}{1+x} = 1 \text{ et } x \neq 0, x \neq -1 \text{ et } x \neq 1$$

donc : $S = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$

◆ Exercice n° 36 p.204

$$\begin{aligned} x - \frac{2}{|x|} \leq \frac{2 - |x|}{x} &\Leftrightarrow x < 0 \text{ et } x + \frac{2}{x} \leq \frac{2+x}{x} \quad \text{ou } x > 0 \text{ et } x - \frac{2}{x} \leq \frac{2-x}{x} \\ &\Leftrightarrow x < 0 \text{ et } \frac{x^2+2}{x} - \frac{2+x}{x} \leq 0 \quad \text{ou } x > 0 \text{ et } \frac{x^2-2}{x} - \frac{2-x}{x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x < 0 \text{ et } x^2 - x \geq 0 \quad \text{ou } x > 0 \text{ et } x^2 + x - 4 \leq 0. \end{aligned}$$

En tenant compte de chacune des contraintes, on obtient : $S =]-\infty; 0[\cup]0; \frac{\sqrt{17}-1}{2}]$.

◆ Exercice n° 37 p.204

$$(E) : \frac{|x+1|}{1-|x|} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|x+1| - 1 + |x|}{1-|x|} \leq 0.$$

• Pour $x < -1$, (E) $\Leftrightarrow \frac{-x-1-1-x}{1+x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-2}{1+x} \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq 0$; donc : $S_1 =]-\infty; -1[$.

• Pour $-1 < x \leq 0$, (E) $\Leftrightarrow \frac{x+1-1-x}{1+x} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0$; donc : $S_2 =]-1; 0]$.

• Pour $x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$, (E) $\Leftrightarrow \frac{x+1-1-x}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1-x} \leq 0$; donc : $S_3 =]1; +\infty[$.

Finalement $S =]-\infty; -1[\cup]-1; 0] \cup]1; +\infty[$.

◆ Exercice n° 38 p.204

a) $(I_1) : |x+2| \leq (x-1)(3x-2)$;

• pour $x \in]-\infty; -2]$,

$(I_1) \Rightarrow -(x+2) \leq -(x-1)(3x-2)$
 $\Rightarrow 3x^2 - 6x \leq 0$
 $\Rightarrow 0 \leq x \leq 2$;

pas de solution ;

• pour $x \in [-2; \frac{2}{3}]$,

$(I_1) \Rightarrow x+2 \leq -(x-1)(3x-2)$
 $\Rightarrow 3x^2 - 4x + 4 \leq 0$
 $\Rightarrow 3\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{32}{9}\right) \leq 0$;

pas de solution ;

• pour $x \in [\frac{2}{3}; +\infty[$,

$(I_1) \Rightarrow x+2 \leq (x-1)(3x-2)$
 $\Rightarrow 0 \leq 3x^2 - 6x$
 $\Rightarrow x \leq 0$ ou $2 \leq x$;

les solutions sont : $[2; +\infty[$;

l'ensemble des solutions de (I_1) est : $[2; +\infty[$;

b) $(I_2) : |x^2 - 5x + 3| \leq 2x - 3$;

• pour $x \in]-\infty; \frac{3}{2}]$, $2x - 3 < 0$; donc pas de solution ;

• pour $x \in [\frac{3}{2}; +\infty[$, $(I_2) \Rightarrow (x^2 - 5x + 3)^2 \leq (2x - 3)^2 \Rightarrow (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 3x) \leq 0$
 $\Rightarrow x(x-1)(x-3)(x-6) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$ ou $3 \leq x \leq 6$;

donc les solutions sont : $[3; 6]$; l'ensemble des solutions de (I_2) est : $[3; 6]$;

c) $(E) : |x-1| + |x-3| = 4$;

• pour $x \in]-\infty; 1]$,

$(E) \Rightarrow 1 - x + 3 - x = 4$

une solution : 0 ;

• pour $x \in [1; 3]$,

$(E) \Rightarrow x - 1 + 3 - x = 4$

pas de solution ;

• pour $x \in [3; +\infty[$,

$(E) \Rightarrow x - 1 + x - 3 = 4$

une solution : 4 ;

l'ensemble des solutions de (E) est : $\{0; 4\}$;

Ces solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe d'équation $y = |x-1| + |x-3|$ et de la droite d'équation $y = 4$.

◆ Exercice n° 39 p.204

1. $(E) : 3\sqrt{9-x^2} = x$.

a) Contraintes sur l'inconnue : $x \in [0; 3]$.

b) Sur $[0; 3]$, $(E) \Leftrightarrow 9(9-x^2) = x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{81}{10} \Leftrightarrow x = 9 \frac{\sqrt{10}}{10}$;

donc (E) a une seule solution : $9 \frac{\sqrt{10}}{10}$.

2. $x^2 - \sqrt{4-x^2} + 2 = 0$.

a) Contraintes sur l'inconnue : $x \in [-2; 2]$.

b) Sur $[-2; 2]$, $(E) \Leftrightarrow x^2 + 2 = \sqrt{4-x^2}$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = 4 - x^2$

$\Leftrightarrow x^4 + 5x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 5) = 0$;

donc l'équation a une seule solution : 0.

◆ Exercice n° 40 p.204

$(E) : \frac{x^2 + |x| + 2}{x^2 - |x| + 2} = 2$.

• Aucune contrainte sur l'inconnue, puisque : $x^2 - |x| + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \neq |x| \Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 \neq x^2$.

• $(E) \Leftrightarrow \frac{x^2 + |x| + 2 - 2(x^2 - |x| + 2)}{x^2 - |x| + 2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3|x| - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 3|x|$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = 9x^2 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$ ou $x^2 = 4$.

Donc l'ensemble des solutions de (E) est : $\{-2; -1; 1; 2\}$.

◆ Exercice n° 41 p.204

$(I) : \frac{(2+x)^2 + (2-x)^2}{(2+x)^2 - (2-x)^2} < -\frac{3}{5}$.

- Contraintes sur l'inconnue : $(2+x)^2 - (2-x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow [(2+x) + (2-x)][(2+x) - (2-x)] \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.
- (I) $\Leftrightarrow \frac{5[(2+x)^2 + (2-x)^2] + 3[(2+x)^2 - (2-x)^2]}{(2+x)^2 - (2-x)^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{8(2+x)^2 + 2(2-x)^2}{8x} < 0$.

Donc l'ensemble des solutions de (I) est : $]-\infty; 0[$.

♦ Exercice n° 42 p.204

Soit x la somme d'argent qu'avait initialement le marchand.

La 1^{re} année, la somme est : $(x - 100) \times \frac{4}{3} = \frac{4(x - 100)}{3}$;

La 2^e année, la somme est : $[\frac{4(x - 100)}{3} - 100] \times \frac{4}{3}$;

La 3^e année, la somme est : $[\frac{16}{9}(x - 100) - \frac{4}{3} \times 100 - 100] \times \frac{4}{3}$;

donc : $\frac{64}{27}x - \frac{14\,800}{27} = 2x \Leftrightarrow x = 1\,480 \text{ F.}$

♦ Exercice n° 43 p.204

Soit x la somme d'argent initiale.

Après la rencontre du 1^{er} mendiant, il reste :

$$\frac{x}{2} - 100 = \frac{x - 200}{2} ;$$

après la rencontre du 2^e mendiant, il reste :

$$\frac{x - 200}{4} - 100 = \frac{x - 600}{4} ;$$

après la rencontre du 3^e mendiant, il reste :

$$\frac{x - 600}{8} - 100 = \frac{x - 1\,400}{8} = 100 ;$$

donc : $x = 2\,200 \text{ F.}$

♦ Exercice n° 44 p.204

1. Pour traverser entièrement un pont de 200 m, un train (long de 800 m) doit parcourir $800 + 200$ mètres, c'est-à-dire : 1 km. À 50 km/h, ce train mettra : $\frac{1}{50} = 0,02 \text{ h}$; c'est-à-dire : 1 min 12 s.

2. Les vitesses du train et de la colonne sont respectivement de 50 000 m/h et 5 000 m/h.

a) Soit t_1 le temps mis par le train pour dépasser la colonne de troupe.

On a : $t_1 \times 50\,000 = t_1 \times 5\,000 + 800 + 100$;

donc : $t_1 = \frac{900}{45\,000} = 0,02 \text{ h}$; c'est-à-dire : 1 min 12 s.

b) Soit t_2 le temps mis par le train pour croiser la colonne de troupe.

On a : $t_2 \times 50\,000 + t_2 \times 5\,000 = 800 + 100$;

donc : $t_2 = \frac{900}{55\,000} = 0,016\,36 \dots \text{ h}$; c'est-à-dire : environ 59 s (arrondi d'ordre 0).

♦ Exercice n° 45 p.204

On suppose que les trajectoires du bus, du cycliste et du passager potentiel sont en ligne droite.

1. La vitesse du cycliste est 18 km/h, c'est-à-dire 5 m/s.

Soit t le temps mis par le cycliste pour rattraper le bus.

Pour $0 \leq t \leq 30$, les distances parcourues par le bus et le cycliste sont respectivement : $\frac{t^2}{10}$ et $5t$.

a) Le cycliste rattrape le bus équivaut à : $\begin{cases} \frac{t^2}{10} + 22,5 = 5t \\ 0 \leq t \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 50t + 225 = 0 \\ 0 \leq t \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t - 45)(t - 5) = 0 \\ 0 \leq t \leq 30 \end{cases}$;

donc le cycliste rattrapera le bus au bout de 5 secondes, c'est-à-dire à $\frac{5^2}{10} = 2,5$ mètres de l'arrêt de bus.

b) Le temps mis par le bus pour rattraper à son tour le cycliste, qui doit vérifier le même système, ne peut être que de 45 secondes. Avec les données de l'énoncé ($0 \leq t \leq 30$) cela ne peut être assuré.

2. Pour $0 \leq t \leq 30$, les distances parcourues par le bus et le passager potentiel sont respectivement : $\frac{t^2}{10}$ et vt .

Dire que le passager rattrape le bus équivaut à dire que le système (S) $\begin{cases} \frac{t^2}{10} + 22,5 = vt \\ 0 \leq t \leq 30 \end{cases}$ a au moins une solution.

a) Lorsque $v = 9 \text{ km/h}$ ou $v = 2,5 \text{ m/s}$, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{t^2}{10} + 22,5 = 2,5t \\ 0 \leq t \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 25t + 225 = 0 \\ 0 \leq t \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t - \frac{25}{2})^2 + \frac{275}{4} = 0 \\ 0 \leq t \leq 30 \end{cases} ;$$

ce système n'ayant pas de solution, le passager ne peut pas rattraper le bus.

b) $\frac{t^2}{10} + 22,5 = vt \Leftrightarrow t^2 - 10vt + 225 = 0 \Leftrightarrow (t - 5v)^2 - 25v^2 + 225 = 0$;

cette équation a au moins une solution équivaut à : $-25v^2 + 225 \leq 0 \Leftrightarrow v^2 \geq \frac{225}{25} \Leftrightarrow v^2 \geq 9 \Leftrightarrow v \geq 3$;

de plus, pour $v = 3$ l'équation précédente, qui s'écrit « $(t - 15)^2 = 0$ », a pour solution 15 et $0 \leq 15 \leq 30$;
donc la valeur minimale de v pour que le passager puisse rattraper le bus est : 3 m/s ou 10,8 km/h.

♦ Exercice n° 46 p.204

1. En accordant jusqu'à 10% de remise sur un pagne de 6 000 F, le prix du pagne est entre 5 400 F et 6 000 F.
2. Si R_n est la recette issue de la vente de n pagnes, alors : $5\,400n \leq R_n \leq 6\,000n$.
3. Si $R_n = 57\,000$ F, alors : $5\,400n \leq R_n \leq 6\,000n \Rightarrow n \leq \frac{57\,000}{5\,400}$ et $\frac{57\,000}{6\,000} \leq n$
 $\Rightarrow n \leq 10,6$ et $9,5 \leq n \Rightarrow n = 10$.
4. En vendant 10 pagnes à 57 000 F, dont 6 pagnes sans remise, on aurait : $6 \times 6\,000 + 4 \times 5\,400 \leq 57\,000$
c'est-à-dire : $57\,600 \leq 57\,000$; cela n'est pas possible.
5. Soit n le nombre de pagnes vendus avec une remise de 4% (c'est-à-dire à 5 760 F) sur les 10 vendus à 57 000 F.
On a : $n \in \mathbb{N}$, $n \in [0 ; 10]$ et $5\,760n + 5\,400(10 - n) \leq 57\,000 \leq 5\,760n + 6\,000(10 - n)$;
c'est-à-dire : $n \in \mathbb{N}$, $n \in [0 ; 10]$, $360n \leq 3\,000$ et $240n \leq 3\,000$
 $n \leq \frac{25}{3}$ et $n \leq \frac{25}{2}$;

finalement les nombres possibles de pagnes vendus avec une remise de 4% sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

♦ Exercice n° 47 p.204

1. L'aiguille des heures (ou petite aiguille) fait un tour de cadran en 12h ; l'aiguille des minutes (ou grande aiguille) fait 12 tours de cadran en 12h. Prenons l'heure comme unité de temps.

À 0h les deux aiguilles sont superposées.

À tout instant t , les deux aiguilles seront superposées si et seulement si $t - \frac{t}{12}$ représente un nombre entier de tours,

si et seulement : si $\frac{11}{12}t = k$, $k \in \mathbb{N}$,

c'est-à-dire : $t = \frac{12}{11}k$, $k \in \mathbb{N}$.

Or $\frac{12}{11}$ d'heure est égale à 1h 5min 27 s ; donc, entre 0h et 24h, les deux aiguilles sont superposées à :

0h, 1h 5mn 27s, 2h 10mn 54s, 3h 16mn 22s, 4h 21mn 49s, 5h 27mn 16s, 6h 32mn 44s, 7h 38mn 11s, 8h 43mn 38s, 9h 49mn 5s, 10h 54mn 33s, 12h, 13h 5mn 27s, 14h 10mn 54s, 15h 16mn 22s, 16h 21mn 49s, 17h 27mn 16s, 18h 32mn 44s, 19h 38mn 11s, 20h 43mn 38s, 21h 49mn 5s, 22h 54mn 33s et 24h.

Commentaire

Entre 0h et 24h (inclus) les deux aiguilles se superposent 23 fois. Ce résultat est à rapprocher de celui obtenu à l'exercice n°36 p.60.

2. Reprenons les données précédentes. À tout instant t , les deux aiguilles seront dans le prolongement l'une de l'autre

si et seulement si $t - \frac{t}{12}$ représente un nombre impair de demi-tours,

si et seulement si : $\frac{11}{12}t = \frac{2k+1}{2}$, $k \in \mathbb{N}$,

c'est-à-dire : $t = \frac{12}{11}k + \frac{6}{11}$, $k \in \mathbb{N}$.

Or $\frac{6}{11}$ d'heure est égale à 32min 44s ; donc, entre 0h et 24h, les deux aiguilles sont dans le prolongement l'une de l'autre à chacune des heures obtenues précédemment augmentées de 32min 44s :

0h 32mn 44s, 1h 38mn 11s, 2h 43mn 38s, 3h 49mn 5s, 4h 54mn 33s, 6h, 7h 5mn 27s, 8h 10mn 55s, 9h 16mn 22s, 10h 21mn 49s, 11h 27mn 16s, 12h 32mn 44s, 13h 38mn 11s, 14h 43mn 38s, 15h 49mn 5s, 16h 54mn 33s, 18h, 19h 5mn 27s, 20h 10mn 55s, 21h 16mn 22s, 22h 21mn 49s, 23h 27mn 16s.

Commentaire

Entre 0h et 24h, les deux aiguilles sont 22 fois dans le prolongement l'une de l'autre.

12. Études de fonctions

(pages 205 à 220 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à initier l'élève à la démarche d'une étude de fonction.

COMMENTAIRES

Les fonctions affines par intervalles constituent un trait d'union entre les applications affines, monotones et de représentations graphiques connues, et les fonctions non monotones. Cependant, l'étude des fonctions affines par intervalles n'étant qu'une introduction à l'étude des fonctions, il n'y a pas lieu de donner à étudier des fonctions s'exprimant de façon artificiellement compliquée.

On fera noter à l'élève la méthodologie suivie : ensemble de définition, sens de variation, tableau de variation et représentation graphique.

SAVOIRS ET SAVOIR - FAIRE

savoirs

Fonctions affines par intervalles

- Fonction définie par intervalles.
- La fonction valeur absolue.
- Fonction dont l'expression contient des valeurs absolues.
- Fonction en escalier, fonction partie entière.

Fonctions élémentaires

- Fonction carré, parabole, sommet de la parabole.
- Fonction racine carrée.
- Fonction inverse, hyperbole.
- Fonction cube.

Utilisation des fonctions élémentaires

- Comparaison de a , a^2 , a^3 , $\sqrt{a}$, $\frac{1}{a}$ ($a > 0$).
- Fonctions $x \mapsto ax^2$ et $x \mapsto \frac{a}{x}$.

savoir-faire

- Reconnaître une fonction affine par intervalles.
- Construire la représentation graphique d'une fonction affine par intervalles.
- Expliciter une fonction affine par intervalles, déterminée par une représentation graphique.

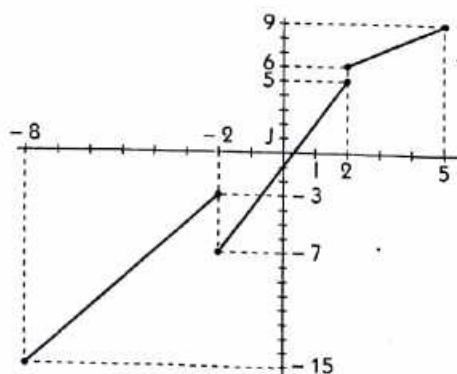
- Représenter les fonctions élémentaires.
- Utiliser les graphiques de fonctions élémentaires pour résoudre des équations ou des inéquations.

- Établir, sur un intervalle ou une partie de $\mathbb{R}$, le sens de variation de certaines fonctions composées.
- Construire la représentation graphique de certaines fonctions composées.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

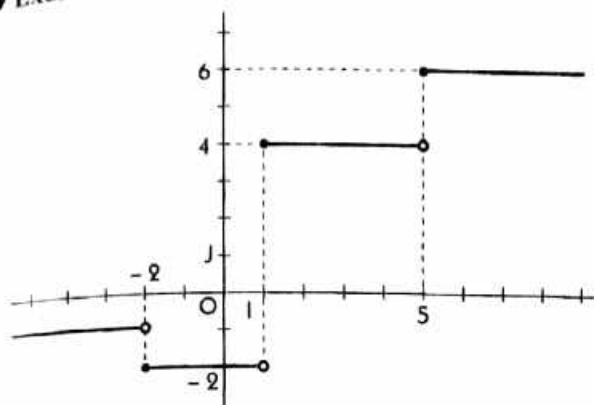
♦ Exercice n° 1.a p. 210



La fonction f n'est pas croissante sur $D_f = [-8; 5]$, puisque $-2,5 < 2$ et $f(-2,5) > f(2)$.

Cependant elle est strictement croissante sur chacun des intervalles $[-8; -2]$, $[-2; 2]$ et $[2; 5]$.

♦ Exercice n° 1.b p. 210



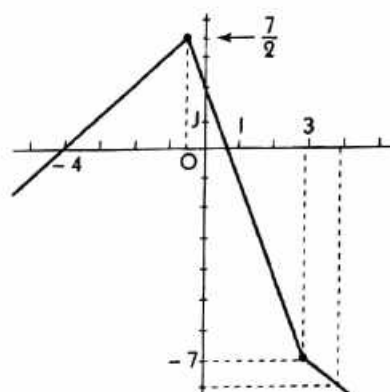
♦ Exercice n° 1.c p. 210

$$f(x) = |x - 3| - |2x + 1|.$$

1.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
signe de $x - 3$	-	-	0	+
expression de $ x - 3 $	$-(x - 3)$	$-(x - 3)$	$x - 3$	
signe de $2x + 1$	-	0	+	+
expression de $ -2x + 1 $	$2x + 1$	$-(2x + 1)$	$-(2x + 1)$	
expression de $f(x)$	$x + 4$	$\frac{7}{2}$	$-3x + 2$	$-x - 4$

2.



Donc f est une fonction affine par intervalles.

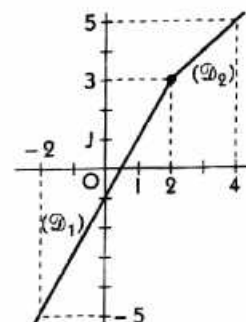
♦ Exercice n° 1.d p. 210

$2x - 1 \leq x + 1 \Leftrightarrow x \leq 2$. Donc f est définie par :

- pour $x \in]-\infty; 2]$, $f(x) = 2x - 1$,
- pour $x \in [2; +\infty[$, $f(x) = x + 1$.

La représentation graphique s'obtient à partir des demi-droites suivantes :

$$(\mathcal{D}_1) : y = 2x - 1 \quad (x \leq 2) \quad \text{et} \quad (\mathcal{D}_2) : y = x + 1 \quad (2 \leq x)$$



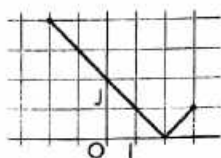
♦ Exercice n° 1.e p. 210

1. $(\mathcal{C}_\theta) = [AI] \cup [IB]$, où $A(-3; 2)$ et $B(3; 1)$.

$$M(x; y) \in [AI] \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 1 \\ \det(\vec{AM}, \vec{AI}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 1 \\ y = \frac{-x+1}{2} = \frac{|x-1|}{2} \end{cases}$$

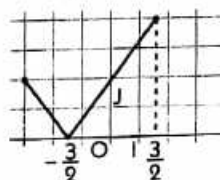
$$M(x; y) \in [IB] \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \det(\vec{IM}, \vec{IB}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ y = \frac{x-1}{2} = \frac{|x-1|}{2} \end{cases}$$

2.



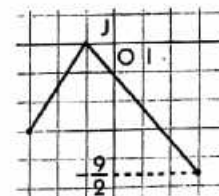
Cette courbe représente la fonction f_1 définie par :

$$f_1(x) = |x - 2|, \text{ sur } [-2; 3].$$



Cette courbe représente la fonction f_2 définie par :

$$f_2(x) = \left| \frac{4}{3}x + 2 \right|, \text{ sur } \left[-3; \frac{3}{2}\right]$$



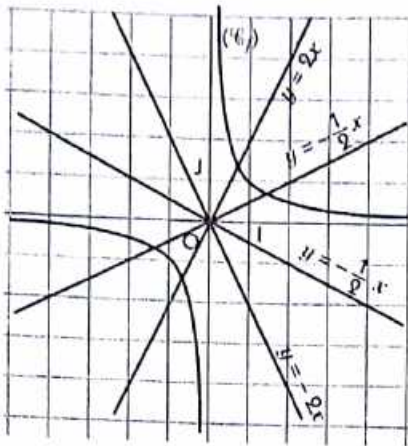
Cette courbe représente la fonction f_3 définie par :

- $f_3(x) = -\left| \frac{3}{2}(x+1) \right|$, sur $[-3; -1]$,
- $f_3(x) = -\left| \frac{9}{8}(x+1) \right|$, sur $[-1; 3]$.

(Pour chaque cas, même démarche qu'à la question 1.)

♦ Exercice n° 2.a p.214

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$ $x \mapsto ax$



2. Pour $a = 2$ ou $a = \frac{1}{2}$, (E) a 2 solutions distinctes.
 Pour $a = -2$ ou $a = -\frac{1}{2}$, (E) n'a pas de solution.
 3. Pour $a < 0$, (E) n'a pas de solution.

♦ Exercice n° 3.a p.217

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{2x-1}{x-1}$

1. $Dg = \mathbb{R} - \{1\}$. Pour $x \neq 1$, $2 + \frac{1}{x-1} = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1} = g(x)$.

2. Lorsque $u < v < 1$, on a : $u-1 < v-1 < 0$

$$\frac{1}{u-1} > \frac{1}{v-1}$$

$$2 + \frac{1}{u-1} > 2 + \frac{1}{v-1}$$

$$g(u) > g(v).$$

Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$.

Lorsque $1 < u < v$, on a : $0 < u-1 < v-1$

$$\frac{1}{u-1} > \frac{1}{v-1}$$

$$2 + \frac{1}{u-1} > 2 + \frac{1}{v-1}$$

$$g(u) > g(v).$$

Donc g est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

♦ Exercice n° 3.b p.217

• $f(x) = -2x^2 + x + 1 = -2(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) = -2((x - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{16})$.

Lorsque $u < v \leq \frac{1}{4}$, on a : $u - \frac{1}{4} < v - \frac{1}{4} \leq 0$

$$(u - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{16} > (v - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{16}$$

$$-2((u - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{16}) < -2((v - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{16})$$

$$f(u) < f(v).$$

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; \frac{1}{4}]$.

Lorsque $\frac{1}{4} \leq u < v$, on a : $0 \leq u - \frac{1}{4} < v - \frac{1}{4}$

$$(u - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{16} < (v - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{16}$$

$$-2((u - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{16}) > -2((v - \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{16})$$

$$f(u) > f(v).$$

Donc f est strictement décroissante sur $[\frac{1}{4}; +\infty[$.

• $g(x) = 5(x-1)^3 + 2$. Lorsque $u < v$, on a : $u-1 < v-1$

$$5(u-1)^3 + 2 < 5(v-1)^3 + 2$$

$$g(u) < g(v).$$

Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• $h(x) = \frac{x+3}{4x+1} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{11}{4}}{4x+1}$.

♦ Exercice n° 2.b p.214

f est la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{4x}$.

1. $D_f = [0; +\infty[$.

Pour tous éléments u et v , on a :

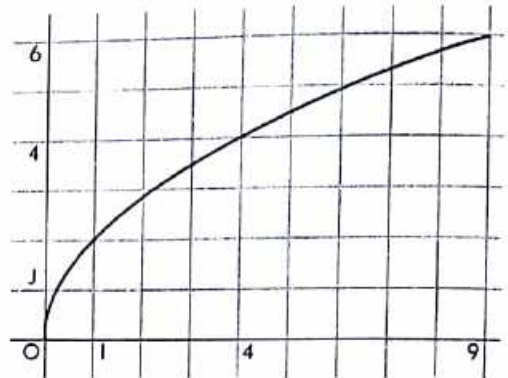
$$0 \leq u < v \Rightarrow 0 \leq 4u < 4v$$

$$\Rightarrow \sqrt{4u} < \sqrt{4v}$$

$$\Rightarrow f(u) < f(v).$$

Donc f est (strictement) croissante sur $[0; +\infty[$.

2. $f(x) = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$.



Lorsque $u < v < -\frac{1}{4}$, on a : $4u < 4v < -1$

$$\begin{aligned} 4u + 1 &< 4v + 1 < 0 \\ \frac{11}{4} &> \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{11}{4u+1} &> \frac{1}{4} + \frac{11}{4v+1} \\ h(u) &> h(v). \end{aligned}$$

Donc h est strictement décroissante sur $]-\infty; -\frac{1}{4}[$.

• $k(x) = -5\sqrt{3x+1}$.

$D_k = [-\frac{1}{3}; +\infty[$. Lorsque $-\frac{1}{3} \leq u < v$, on a : $-1 \leq 3u < 3v$

$$\begin{aligned} 0 &\leq 3u + 1 < 3v + 1 \\ -5\sqrt{3u+1} &> -5\sqrt{3v+1} \\ k(u) &> k(v). \end{aligned}$$

Donc k est strictement décroissante sur $[-\frac{1}{3}; +\infty[$.

Lorsque $-\frac{1}{4} < u < v$, on a : $-1 < 4u < 4v$

$$\begin{aligned} 0 &< 4u + 1 < 4v + 1 \\ \frac{11}{4} &> \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{11}{4u+1} &> \frac{1}{4} + \frac{11}{4v+1} \\ h(u) &> h(v). \end{aligned}$$

Donc h est strictement décroissante sur $]-\frac{1}{4}; +\infty[$.

Exercices d'apprentissage

FONCTIONS AFFINES PAR INTERVALLES

♦ Exercice n° 1 p.218

a) $f(x) = |3x - 1|$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
signe de $3x - 1$	-	0	+
expression de $f(x)$	$-3x + 1$	0	$3x - 1$

Donc f est une fonction affine sur chacun des intervalles $]-\infty; \frac{1}{3}[$ et $[\frac{1}{3}; +\infty[$.

c) $f(x) = |2x + 3| + |x - 5|$.

Le tableau ci-contre montre que f est une fonction affine sur chacun des intervalles :

$$]-\infty; -\frac{3}{2}], [-\frac{3}{2}; 5] \text{ et } [5; +\infty[.$$

b) $f(x) = 7x + 1 - |4x + 3|$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
expression de $- 4x+3 $	$4x + 3$	0	$-4x - 3$
expression de $f(x)$	$11x + 4$	$-\frac{17}{4}$	$3x - 2$

Donc f est une fonction affine sur chacun des intervalles $]-\infty; -\frac{3}{4}[$ et $[-\frac{3}{4}; +\infty[$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	5	$+\infty$
expression de $ 2x+3 $	$-2x - 3$	0	$2x + 3$	$2x + 3$
expression de $ x-5 $	$-x + 5$	$-x + 5$	0	$x - 5$
expression de $f(x)$	$-3x + 2$	$-\frac{13}{2}$	$x + 8$	$3x - 2$

♦ Exercice n° 2 p. 218

a) $f(x) = \max(1; 2x - 3)$. $D_f = \mathbb{R}$.

$$f(x) = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x - 3 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Donc f est une fonction affine par intervalles.

c) $f(x) = \max(3x - 1; x - 1)$. $D_f = \mathbb{R}$.

$$f(x) = 3x - 1 \Leftrightarrow 3x - 1 \geq x - 1 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

$$f(x) = x - 1 \Leftrightarrow x \leq 0.$$

Donc f est une fonction affine par intervalles.

b) $f(x) = \min(x; 3x + 1)$. $D_f = \mathbb{R}$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow x \leq 3x + 1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

$$f(x) = 3x + 1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}.$$

Donc f est une fonction affine par intervalles.

d) $f(x) = \min(x + 3; -1)$. $D_f = \mathbb{R}$.

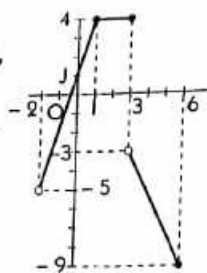
$$f(x) = x + 3 \Leftrightarrow x + 3 \leq -1 \Leftrightarrow x \leq -4.$$

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow x \geq -4.$$

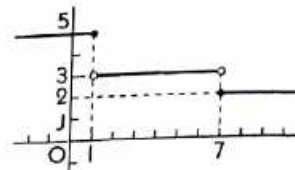
Donc f est une fonction affine par intervalles.

♦ Exercice n° 3 p. 218

- a) $f(x) = 3x + 1$, pour $x \in]-2 ; 1]$,
 $f(x) = 4$, pour $x \in]1 ; 3]$,
 $f(x) = -2x + 3$, pour $x \in]3 ; 6]$.

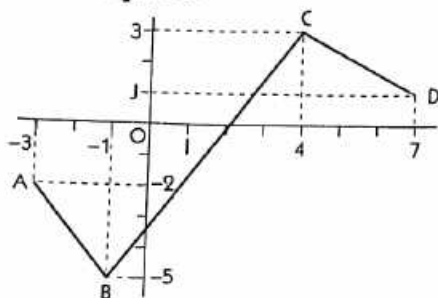


- b) $f(x) = 5$, pour $x \in]-\infty ; 1]$,
 $f(x) = 3$, pour $x \in]1 ; 7]$,
 $f(x) = 2$, pour $x \in]7 ; +\infty[$.



♦ Exercice n° 4 p. 218

1.



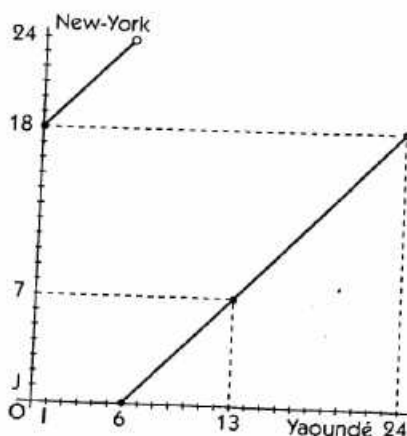
2.

x	-3	-1	4	7
expression de $f(x)$	$-\frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$	$\frac{8}{5}x - \frac{17}{5}$	$-\frac{2}{3}x - \frac{17}{3}$	

Commentaire

L'expression de $f(x)$ est obtenue à partir des équations respectives des droites (AB), (BC) et (CD).

♦ Exercice n° 5 p. 218

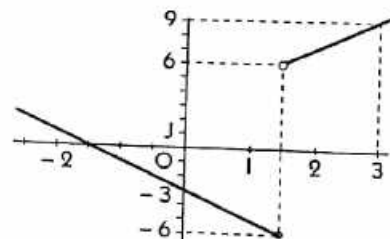


♦ Exercice n° 6 p. 218

$$f(x) = \frac{4x^2 - 9}{|2x - 3|} = \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{|2x - 3|}$$

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$.
 2. Pour $x < \frac{3}{2}$, $f(x) = \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{-2x + 3} = -2x - 3$;
 pour $x > \frac{3}{2}$, $f(x) = \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{2x - 3} = 2x + 3$.

3.



♦ Exercice n° 7 p. 218

1.

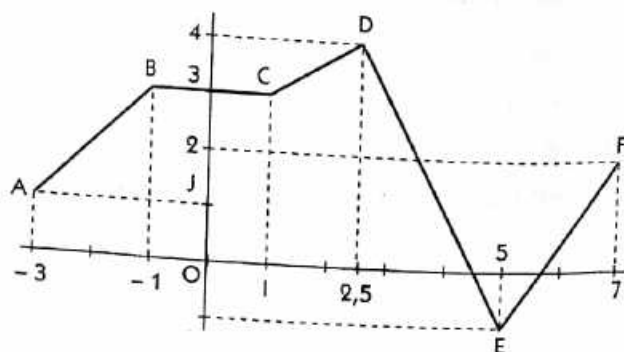
x	2	3	4	8
expression de $ x - 2 $	0	1	2	6
expression de $ x - 4 $	2	1	0	4
expression de $-12x - 6$	-24	-30	-42	-90
expression de $f(x)$	0	2	0	0

♦ Exercice n° 8 p. 218

f est la fonction affine par intervalles dont la représentation graphique est :

$[AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DE] \cup [EF]$.

1. Sur $[-3 ; -1]$, $f(x) = x + 4$;
 sur $[-1 ; 1]$, $f(x) = 3$;
 sur $[1 ; 2,5]$, $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$;
 sur $[2,5 ; 5]$, $f(x) = -2x + 9$;
 sur $[5 ; 7]$, $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{17}{2}$.



2. $f(-1,5) = 2,5$; $f(-0,5) = 3$; $f(2) = \frac{11}{3}$; $f(4) = 1$; $f(5,5) = -0,25$.

3. -1 a pour antécédent 5 (lecture graphique) ;

-0,5 a pour antécédents $\frac{19}{4}$ (solution de l'équation $-2x + 9 = 0,5$) et $\frac{16}{3}$ (solution de l'équation $\frac{3}{2}x - \frac{17}{2} = 0,5$) ;

0 a pour antécédents $\frac{9}{2}$ (solution de l'équation $-2x + 9 = 0$) et $\frac{17}{3}$ (solution de l'équation $\frac{3}{2}x - \frac{17}{2} = 0$) ;

1 a pour antécédents -3, 4 et $\frac{19}{3}$; 2 a pour antécédents -2, $\frac{7}{2}$ et 7 ;

3 a pour antécédents tous les éléments de $[-1 ; 1] \cup \{3\}$; 3,5 a pour antécédents $\frac{7}{4}$ et $\frac{11}{4}$;

4 a pour antécédent 2,5 ;

5 n'a pas d'antécédent.

x	-3	-1	1	2,5	5	7
f(x)	1	3	3	4	-1	2

5. $f([-3 ; -1,5]) = [1 ; 2,5]$;

$f([-0,5 ; 0,5]) = \{3\}$;

$f([3 ; 4]) = [1 ; 3]$;

$f([4 ; 6]) = [-1 ; 1]$.

(La prise en compte du sens de variation de f et le calcul des images des bornes de chacun des intervalles confirme les résultats.)

6. L'image réciproque par f de $[-1 ; 0]$ est $[\frac{9}{2} ; \frac{17}{3}]$ ($\frac{9}{2}$ et $\frac{17}{3}$ sont les antécédents de 0) ;

l'image réciproque par f de $[-0,5 ; 0,5]$ est $[\frac{17}{4} ; \frac{19}{4}] \cup [\frac{16}{3} ; 6]$ (d'après le sens de variation et les antécédents de -0,5 et 0,5) ;

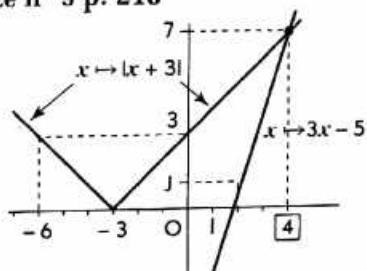
l'image réciproque par f de $[1 ; 2]$ est $[-3 ; -2] \cup [\frac{7}{2} ; 4] \cup [\frac{19}{3} ; 7]$ (d'après le sens de variation et les antécédents de 1 et 2) ;

l'image réciproque par f de $[2 ; 3]$ est $[-2 ; 1] \cup [3 ; \frac{7}{2}] \cup \{7\}$;

l'image réciproque par f de $[1 ; 5]$ est $[-3 ; 4] \cup [\frac{19}{3} ; 7]$.

♦ Exercice n° 9 p. 218

1.

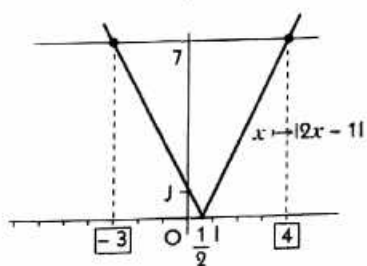


2. Résoudre graphiquement l'équation $|x + 3| = 3x - 5$ revient à déterminer les abscisses des points communs aux courbes représentatives des fonctions :

$x \mapsto |x + 3|$ et $x \mapsto 3x - 5$.

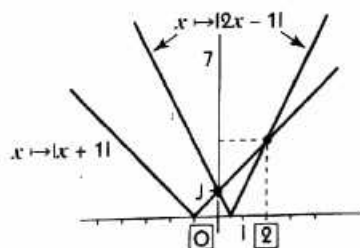
On trouve, par lecture graphique, que cette équation a une solution : 4.

3. a)



$|2x - 1| = 7$ a pour solutions -3 et 4.

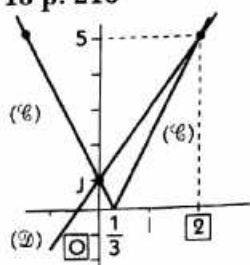
b)



L'équation $|2x - 1| = |x + 1|$ a pour solutions 0 et 2.

♦ Exercice n° 10 p. 218

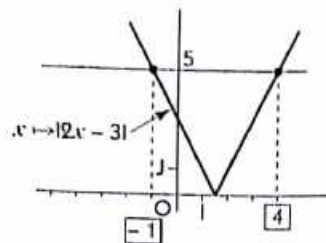
1.



2. Résoudre graphiquement l'inéquation $|3x - 1| < 2x + 1$ revient à déterminer les abscisses des points pour lesquels la courbe (C), représentative de la fonction $x \mapsto |3x - 1|$, est au-dessous de la droite (D), représentative de la fonction $x \mapsto 2x + 1$.

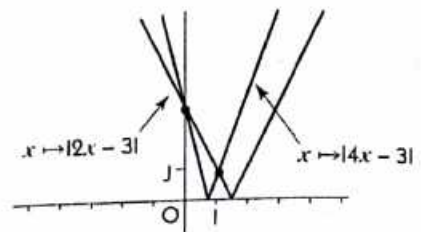
On trouve, par lecture graphique, que l'ensemble des solutions de cette inéquation est : $]0 ; 2[$.

3. a)



L'inéquation $|2x - 3| < 5$ a pour solutions $] -1 ; 4[$.

b)



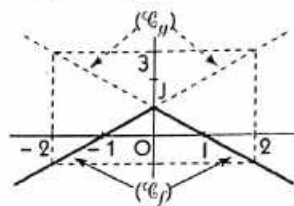
L'inéquation $|4x - 3| > |2x - 3|$ a pour solutions $] -\infty ; 0[\cup] 1 ; +\infty[$.

♦ Exercice n° 11 p. 218

$f(x) = \min(x + 1 ; 1 - x)$ et $g(x) = \max(x + 1 ; 1 - x)$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	0	1	0	-1
$g(x)$	3	2	1	2	3

2.



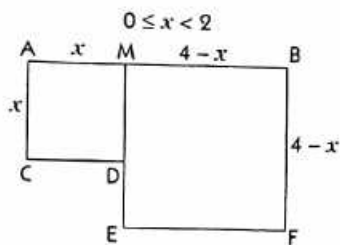
3.

x	$-\infty$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$
$g(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

♦ Exercice n° 12 p. 218

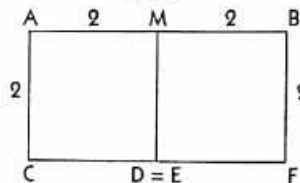
$x \in [0 ; 4]$

1.



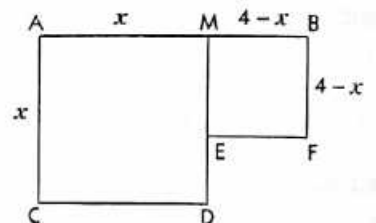
Le périmètre de ACDEFB est :
 $f(x) = -2x + 16$.

$x = 2$



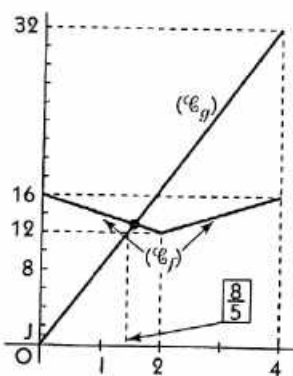
Le périmètre de ACDEFB est :
 $f(2) = 12$.

$2 < x \leq 4$



Le périmètre de ACDEFB est :
 $f(x) = 2x + 8$.

2. et 3.



4. Le double du périmètre de ACDM est : $g(x) = 8x$.

Résoudre l'équation : $g(x) = f(x)$ revient à résoudre les équations :

- $-2x + 16 = 8x$, pour $x \in [0 ; 2[$;
- $2x + 8 = 8x$, pour $x \in]2 ; 4]$.

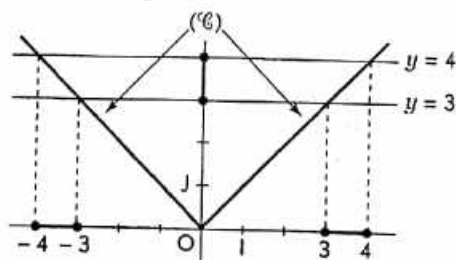
La première a pour solution $\frac{8}{5}$;

la seconde n'a pas de solution.

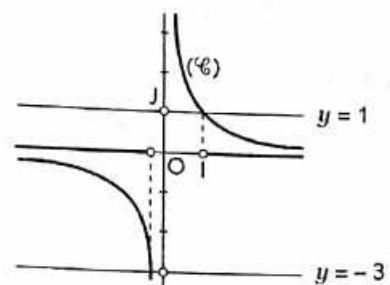
(Ce que confirme la lecture graphique.)

FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

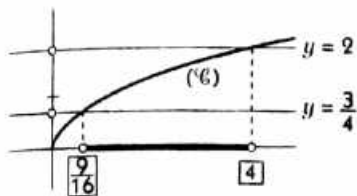
♦ Exercice n° 13 p. 219



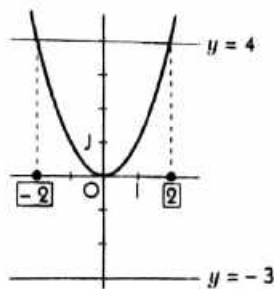
$3 \leq |x| \leq 4$ a pour solutions : $[-4 ; -3] \cup [3 ; 4]$.



$-3 < \frac{1}{x} < 4$ a pour solutions : $] -\infty ; -\frac{1}{3}[\cup] 1 ; +\infty[$.



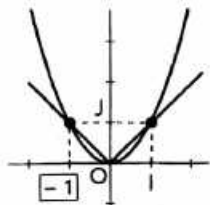
$\frac{3}{4} < \sqrt{x} < 2$ a pour solutions : $|\frac{9}{16}; 4|$.



$-3 < x^2 \leq 4$ a pour solutions : $|-2; 2|$.

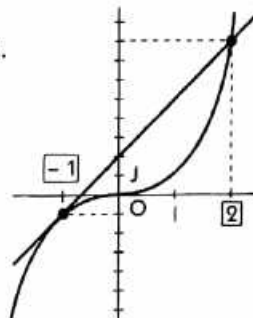
♦ Exercice n° 14 p. 219

1.



2. Les solutions (résolution graphique) de l'équation $x^2 = |x|$ sont -1 et 1 .

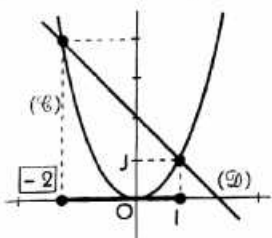
3.



Les solutions (résolution graphique) de l'équation $x^3 = 3x + 2$ sont : -1 et 2 .

♦ Exercice n° 15 p. 219

1.



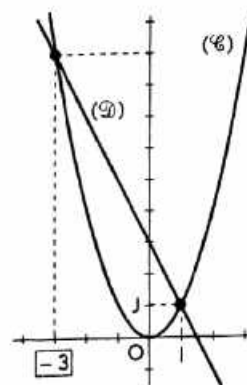
2. Soit (C) la courbe d'équation $y = x^2$ et (D) la droite d'équation $y = -x + 2$. Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 + x - 2 \leq 0$ revient à déterminer les abscisses des points pour lesquels (C) est au dessous de (D). L'ensemble des solutions est $[-2; 1]$.

♦ Exercice n° 16 p. 219

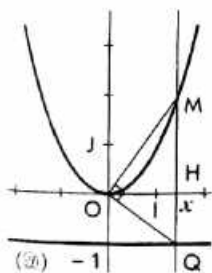
$$\begin{cases} y = x^2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

Résoudre graphiquement le système initial revient à déterminer les coordonnées des points communs à la courbe (C), d'équation $y = x^2$, et à la droite (D), d'équation $y = -2x + 3$.

Les solutions de ce système sont $(-3; 9)$ et $(1; 1)$.



♦ Exercice n° 17 p. 219



1. Q est le point de coordonnées $(x; -1)$.

Si y désigne l'ordonnée du point M, les coordonnées de ce point sont $(x; y)$ tels que :

• $\vec{OM} \cdot \vec{OQ} = 0$, puisque $(OM) \perp (OQ)$;

• $x \cdot x + y \cdot (-1) = 0$, puisque (O, I, J) est un repère orthonormé.

Donc, on a : $x^2 - y = 0$; c'est à dire, M appartient à la parabole (P) d'équation : $y = x^2$.

2. Pour construire point par point la parabole (P), d'équation $y = x^2$:

• choisir un point Q de (D) et tracer la droite (OQ) ;

• la perpendiculaire en Q à (D) et la perpendiculaire en O à (OQ) se coupent en un point de (P).

UTILISATIONS DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

♦ Exercice n° 18 p. 219

- Pour $x \leq 0$, $f(x) = -x^2$;
pour $x \geq 0$, $f(x) = x^2$.

2.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

♦ Exercice n° 19 p. 219

- Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$.
 $A(5; -0,6) \in (\mathcal{H}) \Leftrightarrow -0,6 = \frac{a}{5} \Leftrightarrow a = -3$.
- L'équation de $(\mathcal{H})$ est : $y = \frac{-3}{x}$.
 $\frac{-3}{-6} = 0,5 \Rightarrow B(-6; 0,5) \in (\mathcal{H})$;
 $\frac{-3}{-1,5} = 2 \Rightarrow C(-1,5; 2) \in (\mathcal{H})$;
 $\frac{-3}{-3} = 1 \Rightarrow D(-3; 1) \in (\mathcal{H})$.

♦ Exercice n° 21 p. 219

f est la fonction définie sur $[-3; 3]$ par : $f(x) = \frac{x}{E(x)}$.

- Pour $x \in [-3; -2[$, $f(x) = -\frac{x}{3}$;
pour $x \in [-2; -1[$, $f(x) = -\frac{x}{2}$;
pour $x \in [-1; 0[$, $f(x) = -x$;
pour $x \in [1; 2[$, $f(x) = x$;
pour $x \in [2; 3[$, $f(x) = \frac{x}{2}$;
 $f(3) = 1$.

- Les antécédents de 1 sont $-3, -2, -1, 1, 2$ et 3 .

♦ Exercice n° 22 p. 219

f est la fonction définie sur $[-2; 2]$ par $f(x) = xE(x)$.

- | | | | | | |
|--------|----|----|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $f(x)$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |

- $f(-1,9) = 3,8$; $f(-0,7) = 0,7$;
 $f(0,1) = 0$; $f(1,8) = 1,8$.

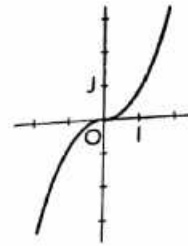
- Pour $x \in [-2; -1[$, $f(x) = -2x$;
pour $x \in [-1; 0[$, $f(x) = -x$;
pour $x \in [0; 1[$, $f(x) = 0$;
pour $x \in [1; 2[$, $f(x) = x$;
 $f(2) = 4$.

- $f([0; 2]) = [0] \cup [1; 2[$; $f([0; 1]) = [0; 1]$;
 $f([-2; 0]) = [0; 1] \cup [2; 4]$; $f([-2; -1]) = [1] \cup [2; 4]$.

♦ Exercice n° 23 p. 219

f et g sont les fonctions définies par $f(x) = x|x|$ et $g(x) = x^3$.

3.



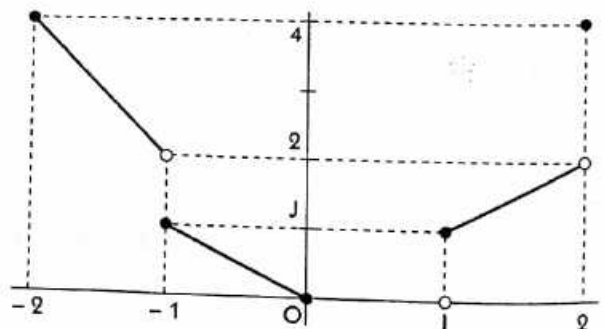
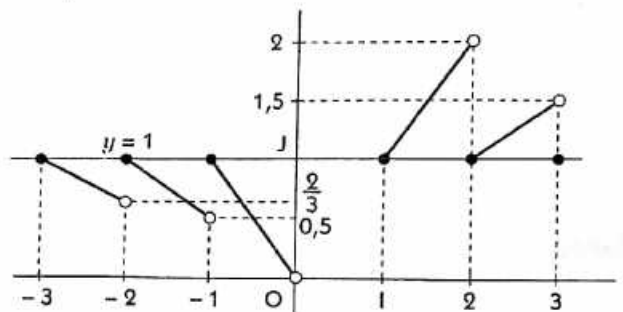
♦ Exercice n° 20 p. 219

- | | |
|---------------------|--------------------|
| $M_1(-10; -0,21)$, | $M_2(-7; -0,3)$, |
| $M_3(-4; -0,525)$, | $M_4(-3; -0,7)$, |
| $M_5(-1; -2,1)$, | $M_6(1; 2,1)$, |
| $M_7(3; 0,7)$, | $M_8(4; 0,525)$, |
| $M_9(7; 0,3)$, | $M_{10}(10; 0,21)$ |

sont 10 points dont le produit des coordonnées est 2,1 (il y en a d'autres).

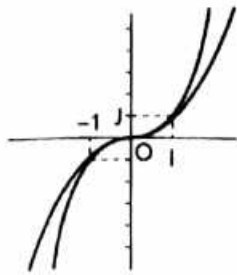
- La fonction numérique f , définie par $f(x) = \frac{2,1}{x}$, a pour représentation graphique une hyperbole passant par ces points.

- $D_f = [-3; 0[\cup [1; 3]$.



1. La fonction f a été étudiée dans l'exercice n° 18.

2.



♦ Exercice n° 24 p. 219

f est la fonction définie par $f(x) = (x+2)^2 - 1$.

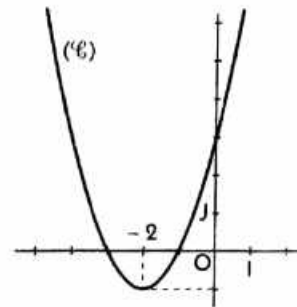
1. Pour tous nombres réels u et v , on a :

$$\begin{aligned} \bullet u < v \leq -2 &\Rightarrow u+2 < v+2 \leq 0 \\ &\Rightarrow (u+2)^2 - 1 > (v+2)^2 - 1 \\ &\Rightarrow f(u) > f(v); \end{aligned}$$

donc, f est strictement décroissante sur $]-\infty; -2]$;

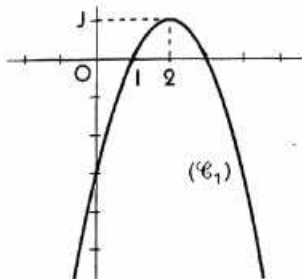
$$\begin{aligned} \bullet -2 \leq u < v &\Rightarrow 0 \leq u+2 < v+2 \\ &\Rightarrow (u+2)^2 - 1 < (v+2)^2 - 1 \\ &\Rightarrow f(u) < f(v); \end{aligned}$$

donc, f est strictement croissante sur $[-2; +\infty[$.



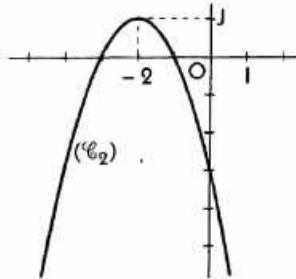
La courbe $(\mathcal{C})$ a pour équation : $y = f(x)$,
c'est-à-dire : $y = (x+2)^2 - 1$.

2. $(\mathcal{C}_1)$ est le symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à O .



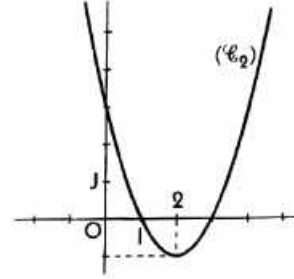
On a : $M(x; f(x)) \in (\mathcal{C})$
 $\Leftrightarrow M_1(-x; -f(x)) \in (\mathcal{C}_1)$.
Donc, une équation de $(\mathcal{C}_1)$ est :
 $y = -f(-x)$;
c'est-à-dire : $y = -(x-2)^2 + 1$.

3. $(\mathcal{C}_2)$ est le symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à (OI) .



On a : $M(x; f(x)) \in (\mathcal{C})$
 $\Leftrightarrow M_2(x; -f(x)) \in (\mathcal{C}_2)$.
Donc, une équation de $(\mathcal{C}_2)$ est :
 $y = -f(x)$;
c'est-à-dire : $y = -(x+2)^2 + 1$.

4. $(\mathcal{C}_3)$ est le symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à (OJ) .



On a : $M(x; f(x)) \in (\mathcal{C})$
 $\Leftrightarrow M_3(-x; f(x)) \in (\mathcal{C}_3)$.
Donc, une équation de $(\mathcal{C}_3)$ est :
 $y = f(-x)$;
c'est-à-dire : $y = (x-2)^2 - 1$.

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n° 25 p. 219

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. 2. $f(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{2x-4}$.

3. Pour tous nombres réels u et v , on a :

$$\begin{aligned} 2 < u < v &\Rightarrow 0 < 2u-4 < 2v-4 \\ &\Rightarrow f(u) > f(v); \end{aligned}$$

donc, f est strictement décroissante sur $[3; 7]$.

$f(7) = 2,1$ est le minimum de f sur cet intervalle.

On en déduit que 1 est un minorant de $f([3; 7])$.

4. Pour tous nombres réels u et v , on a :

$$\begin{aligned} u < v < 2 &\Rightarrow 2u-4 < 2v-4 < 0 \\ &\Rightarrow f(u) > f(v); \end{aligned}$$

donc, f est strictement décroissante sur $[-3; -1]$.

$f(-3) = \frac{9}{10}$ est le maximum de f sur cet intervalle.

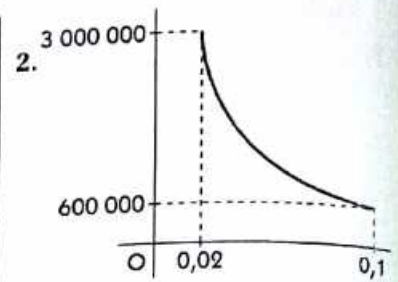
On en déduit que 3 est un majorant de $f([-3; -1])$.

♦ Exercice n° 26 p. 219

1. Désignons par C le capital que l'on doit placer et par t le taux d'intérêt.

On a : $60\,000 = C \times t \Leftrightarrow C = \frac{60\,000}{t}$, pour $2\% \leq t \leq 10\%$.

Donc, f est la fonction définie sur $[0,02; 0,1]$ par $f(t) = \frac{60\,000}{t}$.



♦ Exercice n° 27 p. 220

1. Si la loi de Mariotte s'applique, alors : $PV = a \Leftrightarrow P = \frac{a}{V}$.

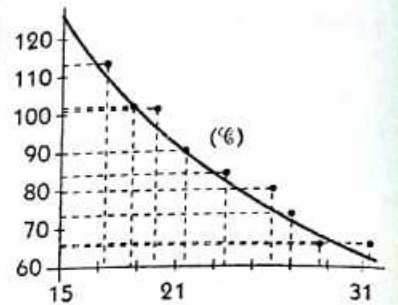
2. L'ensemble des points $M(V, P)$ est représenté ci-contre.

3. La moyenne des produits PV est :

$$\frac{17,5 \times 112,8 + 18,5 \times 103,1 + 20 \times 102,6 + 21,5 \times 89,9 + 23,5 \times 84,1}{9} + \frac{26 \times 78,9 + 27 \times 73,2 + 28,5 \times 67 + 31,5 \times 66,2}{9} = \frac{17\,869,15}{9} \approx 1\,985.$$

Une équation de la courbe $V \mapsto P(V)$ est alors : $P = \frac{1\,985}{V}$.

Cette courbe est représentée, ci-contre, par (%). Elle conforte la loi de Mariotte.



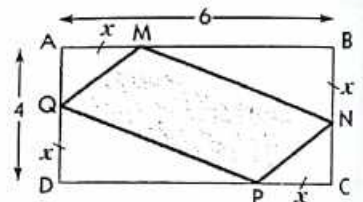
♦ Exercice n° 28 p. 220

$$\mathcal{A}(\text{MNPQ}) = \mathcal{A}(\text{ABCD}) - 2\mathcal{A}(\text{BMN}) - 2\mathcal{A}(\text{CNP})$$

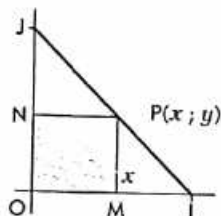
$$= 24 - x(6-x) - x(4-x)$$

$$= 2(x^2 - 5x + 12) = 2\left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}\right).$$

Cette aire est la plus petite possible pour $x = \frac{5}{2}$; c'est-à-dire : $AM = 2,5$ cm.



♦ Exercice n° 29 p. 220



1. a) Une équation de la droite (IJ) est : $y = -x + 1$.

b) $f(x) = x + (1-x) = 1$.

c) $D_f = [0; 1]$.

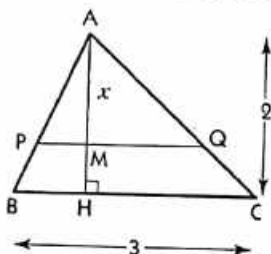
2. a) $\mathcal{A}(x) = x(1-x) = -x^2 + x$.

b) $\mathcal{A}(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\mathcal{A}(x)$	0	$\frac{1}{4}$	0

c) Le maximum de $\mathcal{A}$ sur $[0; 1]$ est $\mathcal{A}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

♦ Exercice n° 30 p. 220

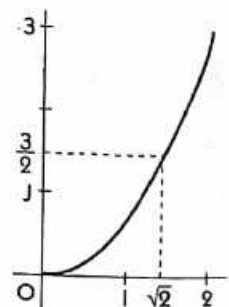


1. $x \in [0; 2]$, $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2} AM \times PQ$;

or : $AM = x$ et $\frac{PQ}{3} = \frac{x}{2}$; donc : $\mathcal{A}(x) = \frac{3}{4} x^2$.

2. $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(\text{ABC}) \Leftrightarrow \frac{3}{4} x^2 = \frac{3}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

3.



♦ Exercice n° 31 p. 220

1. Désignons par $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ les prix de location respectifs de x cassettes par les formules 1, 2 et 3.

- $f_1(10) = 39\ 000\text{ F}$,
 $f_2(10) = 32\ 000\text{ F}$,
 $f_3(10) = 30\ 000\text{ F}$,
 donc la formule 3 est la plus économique pour 10 cassettes.

- La formule 2 est la plus économique pour 20 cassettes
 $f_2(20) = 52\ 000\text{ F}$.

- La formule 1 est la plus économique pour 30 cassettes
 $f_1(30) = 69\ 000\text{ F}$.

2. a) $f_1(x) = 1\ 500x + 24\ 000$;

$f_2(x) = 2\ 000x + 12\ 000$;

$f_3(x) = 3\ 000x$.

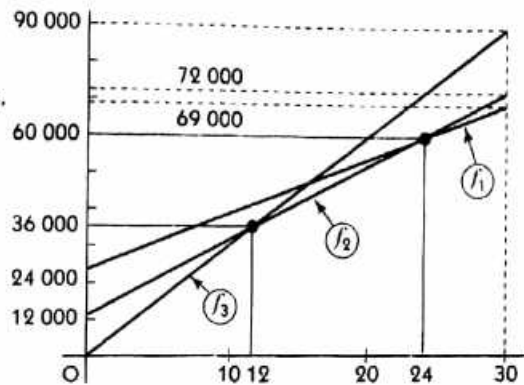
b) Voir ci-contre.

c) $f_1(x) = 51\ 000 \Leftrightarrow x = 18$. Or, $f_2(18) = 48\ 000$.

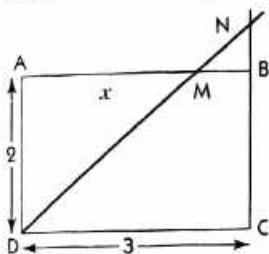
Donc le client, qui a dépensé 51 000 F, n'a pas choisi la formule la plus économique avec la formule 1.

3. Par lecture graphique, on obtient les résultats suivants :

- pour un nombre de cassettes inférieur ou égal à 12, la formule 3 est la plus économique ;
- pour un nombre de cassettes compris entre 12 et 24, la formule 2 est la plus économique ;
- pour un nombre de cassettes supérieur ou égal à 24, la formule 1 est la plus économique.



◆ Exercice n° 32 p. 220

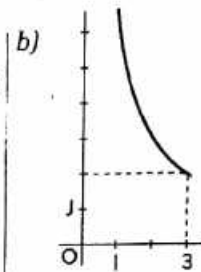


1. $CN = CB + BN$.

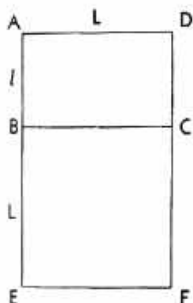
Or, d'après la propriété de Thalès pour les triangles ADM et BNM, on a : $\frac{BN}{AD} = \frac{BM}{AM}$.

Donc, $CN = CB + \frac{AD \times BM}{AM} = 2 + \frac{2(3-x)}{x} = \frac{6}{x}$.

2. $f(x) = \frac{6}{x}$. a) $D_f =]0 ; 3]$.



◆ Exercice n° 33 p. 220



1. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AD} \Leftrightarrow \frac{L}{l} = \frac{L+l}{L} \Leftrightarrow \frac{L}{l} = 1 + \frac{l}{L}$

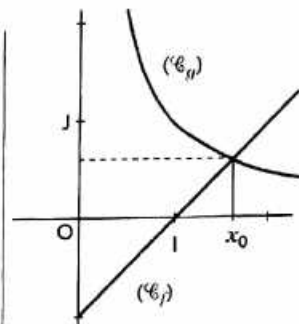
$\Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{x}$, en posant $x = \frac{L}{l}$.

2. a) Voir les courbes ci-contre.

b) On peut lire, sur un graphique tracé avec soin, que le point d'intersection des deux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ a pour abscisse x_0 telle que : $1,6 < x_0 < 1,7$.

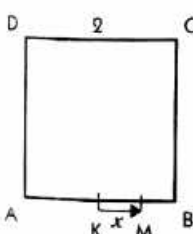
c) $f(1,6) = 0,6$ et $g(1,6) = 0,625$; donc $f(1,6) < g(1,6)$.

$f(1,7) = 0,7$ et $g(1,7) = 0,588...$; donc $f(1,7) > g(1,7)$



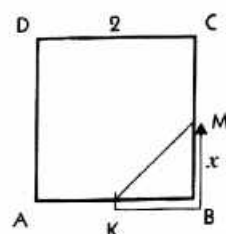
◆ Exercice n° 34 p. 220

1. $0 \leq x \leq 1$



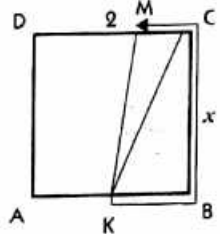
$\mathcal{A}(x) = 0$

$1 \leq x \leq 3$



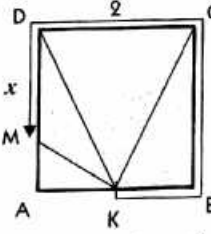
$\mathcal{A}(x) = \frac{1(x-1)}{2}$
 $= \frac{x-1}{2}$

$3 \leq x \leq 5$



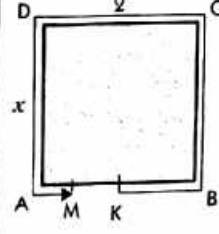
$\mathcal{A}(x) = 1 + \frac{2(x-3)}{2}$
 $= x - 2$

$5 \leq x \leq 7$

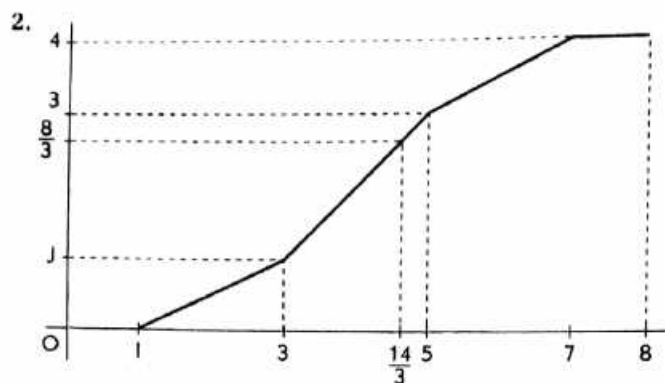


$\mathcal{A}(x) = 3 + \frac{1(x-5)}{2}$
 $= \frac{x+1}{2}$

$7 \leq x \leq 8$



$\mathcal{A}(x) = 4$



3. L'aire $\mathcal{A}(x)$ est égale aux deux tiers de l'aire du carré (c'est-à-dire $\frac{8}{3}$) si :

- $3 < x < 5$ (lecture graphique),
- $x - 2 = \frac{8}{3}$.

On obtient donc : $x = \frac{14}{3}$.

13. Équations et inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(pages 221 à 234 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

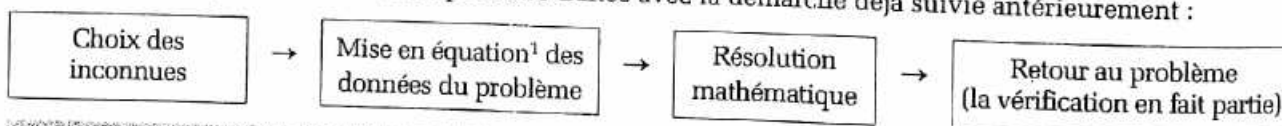
- conjuguer études graphique et algébrique pour la résolution d'un système d'équations et/ou d'inéquations du premier degré à deux inconnues ;
- entraîner les élèves à la modélisation de problèmes conduisant à un système d'équations et/ou d'inéquations du premier degré à deux inconnues et à leur résolution.

COMMENTAIRES

Il y a deux nouveautés par rapport au premier cycle :

- le déterminant d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, comme critère d'existence et de nombre de solution(s) d'un tel système ;
- la démonstration du théorème fondamental (admis en classe de troisième) concernant l'interprétation géométrique d'une inéquation du premier degré à deux inconnues.

Ce chapitre donne donc la part belle à l'étude d'exemples, à la résolution d'exercices et problèmes concrets. La résolution de problèmes concrets peut être traitée avec la démarche déjà suivie antérieurement :



SAVOIRS ET SAVOIR – FAIRE

savoirs

Généralités

- Notion de systèmes équivalents.
- Interprétation géométrique d'une équation ou d'une inéquation du premier degré à deux inconnues.
- Déterminant d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.
- Propriété du déterminant

savoir-faire

- Trouver les contraintes que doit respecter le couple d'inconnues d'un système d'équations et/ou inéquations.
- Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation du premier degré à deux inconnues.
- Calculer le déterminant d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues ; l'utiliser comme critère pour l'existence et le nombre de solution(s).

¹ désigne également la recherche d'inéquations ou de systèmes d'inéquations traduisant les données

Résolutions

- Dans la résolution d'un système d'équations et/ou d'inéquations du premier degré à deux inconnues :
 - utiliser un support graphique soit pour conjecturer, soit pour vérifier un résultat ;
 - utiliser conjointement les études graphique et algébrique ;
 - utiliser un (ou des) changement(s) d'inconnue ;
 - conclure, en tenant compte des contraintes.
- Mettre en équation un problème concret conduisant à un système d'équations et/ou inéquations à deux inconnues ; résoudre et interpréter les résultats de ce système.
- Résoudre des problèmes de répartition du plan (programmation linéaire).

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice n° 1.a p. 226

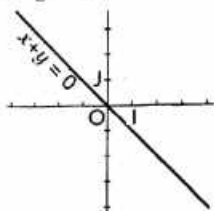
1. Solutions : tous les couples qui vérifient $x + 5y = 7$;
2. pas de solution ;
3. une solution : $(\frac{11}{4} ; -\frac{13}{4})$;
4. une solution : $(\frac{225}{11} ; -\frac{128}{11})$.

♦ Exercice n° 1.b p. 226

1. Pas de solution ;
2. solutions : tous les couples qui vérifient $x\sqrt{3} + y = \sqrt{3}$;
3. une solution $(\sqrt{2} ; -1)$;
4. solutions : tous les couples qui vérifient $x - 2y = 5$;
5. une solution $(2 ; -1)$;
6. pas de solution.

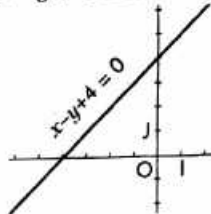
♦ Exercice n° 1.c p. 226

a) $x + y \geq 0$.



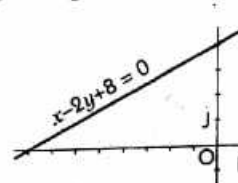
L'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan colorié, bord inclus.

b) $x - y + 4 \leq 0$.



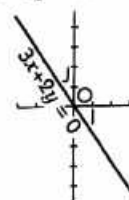
L'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan colorié, bord inclus.

c) $x - 2y + 8 > 0$.



L'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan colorié, bord exclus.

d) $3x + 2y < 0$.

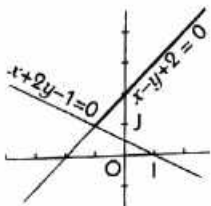


L'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan colorié, bord exclus.

♦ Exercice n° 1.d p. 226

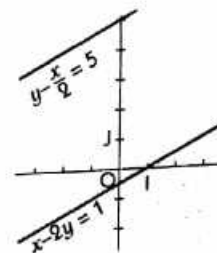
a) $\begin{cases} x - y + 2 \leq 0 \\ x + 2y - 1 > 0 \end{cases}$

L'ensemble des solutions est représenté par la surface coloriée, bord inclus pour la demi-droite « $x - y + 2 = 0$ » et bord exclus pour la demi-droite « $x + 2y - 1 = 0$ ».



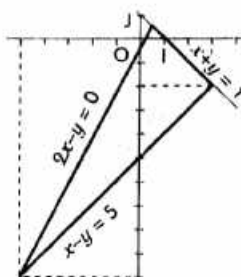
b) $\begin{cases} x - 2y \geq 1 \\ y - \frac{x}{2} \leq 5 \end{cases}$

L'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan colorié, bord inclus.



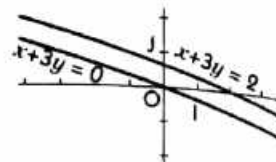
$$c) \begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est représenté par l'intérieur du triangle colorié, bords inclus.



$$d) 0 < x + 3y \leq 2.$$

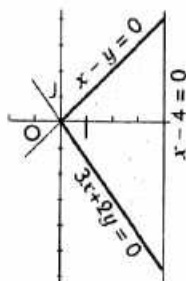
L'ensemble des solutions est représenté par la bande coloriée, bord supérieur inclus et bord inférieur exclus.



◆ Exercice n° 2.a p. 230

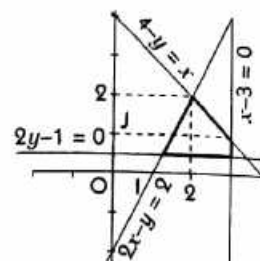
$$1. \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x - 4 \leq 0 \\ 3x + 2y \geq 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est représenté par l'intérieur du triangle colorié ci-contre, bords inclus.



$$2. \begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ x - 3 \leq 0 \\ 2y - 1 \geq 0 \\ 4 - y \geq x \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est représenté par l'intérieur du quadrilatère colorié ci-contre, bords inclus.



◆ Exercice n° 2.b p. 230

1. a pour solution $(1; \frac{1}{2})$;
2. a pour solution $(16; 1)$.

◆ Exercice n° 2.c p. 230

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x - 8y = 2 \end{cases}$ a pour solution $(2; 1)$.
2. À l'aide de changements appropriés d'inconnues :
 - a) a pour solutions $(-2; -1)$, $(-2; 1)$, $(2; -1)$ et $(2; 1)$;
 - b) a pour solutions $(\frac{1}{2}; 1)$ et $(\frac{1}{2}; -1)$;
 - c) a pour solutions $(-\sqrt{2}; -2)$ et $(\sqrt{2}; -2)$;
 - d) n'a pas de solution.

◆ Exercice n° 2.e p. 230

1. L'ensemble E des points $M(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix})$ qui vérifient le système $\begin{cases} 4x + y - 4 \leq 0 \\ x + y - 2 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ est la surface coloriée ci-contre, bords inclus.

La droite $(\mathcal{D}_p)$, d'équation $2x + y = p$, varie parallèlement à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $2x + y = 0$.

Le point de E dont les coordonnées rendent maximal $2x + y$ est, par lecture graphique, le point d'intersection des droites d'équations $4x + y - 4 = 0$ et $x + y - 2 = 0$, c'est à dire $A(\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$. Ce maximum vaut $\frac{8}{3}$.

2. L'ensemble F des points $M(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix})$ qui vérifient le système $\begin{cases} x - y \leq 5 \\ x + 2y \leq 2 \\ 5x + 2y \geq 8 \end{cases}$ est la surface coloriée ci-contre, bords compris.

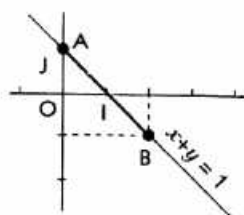
La droite $(\mathcal{D}_p)$, d'équation $4y - x = p$, varie parallèlement à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $4y - x = 0$.

Le point de F dont les coordonnées rendent minimal $4y - x$ est, par lecture graphique, le point d'intersection des droites d'équations $x - y = 5$ et $5x + 2y = 8$, c'est à dire le point $A(\frac{18}{7}; -\frac{17}{7})$. Ce minimum vaut $-\frac{86}{7}$.

◆ Exercice n° 2.d p. 230

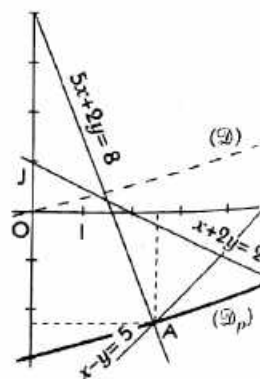
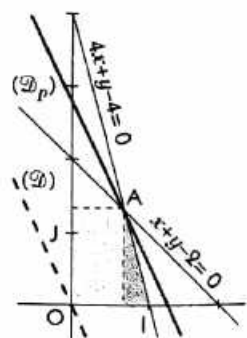
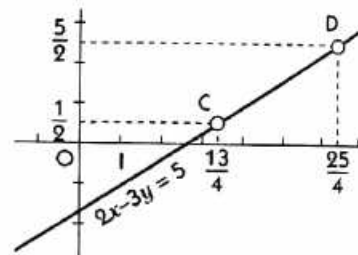
$$1. \begin{cases} |x - 1| \leq 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est représenté par le segment [AB] ci-dessous.



$$2. \begin{cases} |3 - 2y| > 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est représenté par la partie extérieure au segment [CD] ci-dessous.



Exercices d'apprentissage

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

♦ Exercice n° 1 p. 231

(S_1) a une seule solution ; (S_2) a une infinité de solutions ; (S_3) a une seule solution ; (S_4) n'a pas de solution.

♦ Exercice n° 2 p. 231

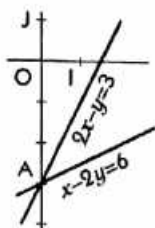
$\begin{cases} 122\,678x - 57\,332y - 2\,198 = 0 \\ 19\,245x + 52\,954y - 753 = 0 \end{cases}$ a une solution unique, puisque son déterminant est strictement positif.

♦ Exercice n° 3 p. 231

1. Les solutions de $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

sont les couples de coordonnées des points communs aux droites d'équations $2x - y = 3$ et $x - 2y = 6$.

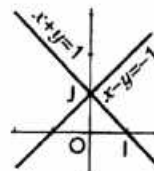
Ce système a pour solution $(0 ; -3)$.



2. Les solutions de $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

sont les couples de coordonnées des points communs aux droites d'équations $x + y = 1$ et $x - y = -1$.

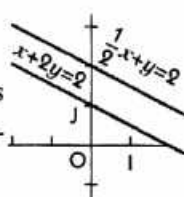
Ce système a pour solution $(0 ; 1)$.



3. Les solutions de $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ \frac{1}{2}x + y = 2 \end{cases}$

sont les couples de coordonnées des points communs aux droites d'équations $x + 2y = 2$ et $\frac{1}{2}x + y = 2$.

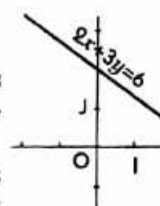
Ce système n'a pas de solution.



4. Les solutions de $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x + 1,5y = 3 \end{cases}$

sont les couples de coordonnées des points communs aux droites d'équations $2x + 3y = 6$ et $x + 1,5y = 3$.

Ce système admet pour solutions tous les couples $(x ; y)$ qui vérifient l'une de ces équations.



♦ Exercice n° 4 p. 231

1. Une solution $(75 ; -59)$; 2. solutions : tous les couples $(x ; y)$ qui vérifient $2x + y = 5$;

3. une solution $(\frac{42}{17} ; -\frac{92}{17})$; 4. pas de solution.

♦ Exercice n° 5 p. 231

$(S_1) \begin{cases} 2x + my = 2 \\ -x + 3y = -1 \end{cases} ; \begin{vmatrix} 2 & m \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + m ;$

si $m \neq -6$, une seule solution ;
si $m = -6$, une infinité de solutions.

$(S_2) \begin{cases} mx + y = -2m \\ x + my = m - 1 \end{cases} ; \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 ;$

si $m \neq -1$ et $m \neq 1$, une seule solution ;
si $m = -1$, une infinité de solutions ;
si $m = 1$, pas de solution.

$(S_3) \begin{cases} 2mx + 4y = 2m \\ (2m-3)x + (m-1)y = 1 \end{cases} ; \begin{vmatrix} 2m & 4 \\ 2m-3 & m-1 \end{vmatrix} = (m-2)(m-3) ;$

si $m \neq 2$ et $m \neq 3$, une seule solution ;
si $m = 2$, une infinité de solutions ;
si $m = 3$, pas de solution.

♦ Exercice n° 6 p. 231

$(S_1) : \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x + 2 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases}$ n'a pas de solution.

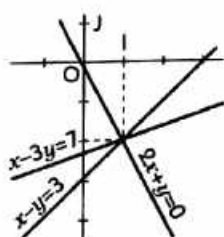
$(S_2) : \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x = \frac{1-y}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y + x\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$

a une seule solution : $(0 ; 1)$.

♦ Exercice n° 7 p. 231

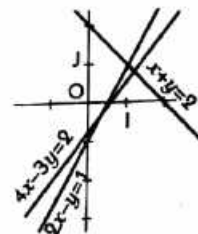
$(S_1) : \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$

a pour solution $(1 ; -2)$.



$(S_2) : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 3y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$

n'a pas de solution.



♦ Exercice n° 8 p. 231

1. Poser $X = x^2$ et $Y = y^2$; le système a 4 solutions : $(-\sqrt{5}; -\sqrt{10})$, $(-\sqrt{5}; \sqrt{10})$, $(\sqrt{5}; -\sqrt{10})$ et $(\sqrt{5}; \sqrt{10})$;
 2. une seule solution : $(81; 16)$; 3. une seule solution : $(\frac{5}{4}; -\frac{1}{3})$; 4. pas de solution ; 5. pas de solution.

♦ Exercice n° 9 p. 231

$$1. \begin{cases} 2x^2 + 4x - y^2 - 2y - 4 = 0 \\ 3x^2 + 6x - 2y^2 - 4y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2 + 2x) - (y^2 + 2y + 4) = 0 \\ 3(x^2 + 2x) - 2(y^2 + 2y + 4) + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ y^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Ce système a 4 solutions : $(-3; -1 - \sqrt{3})$, $(-3; -1 + \sqrt{3})$, $(1; -1 - \sqrt{3})$ et $(1; -1 + \sqrt{3})$.

$$2. \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 3 = 0 \\ 3x^2 - y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2x + 1) + 2(y^2 + 4y + 4) = 6 \\ 3(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 4 \\ (y+2)^2 = 1 \end{cases}$$

Ce système a 4 solutions : $(-1; -1)$, $(-1; -3)$, $(3; -1)$ et $(3; -3)$.

♦ Exercice n° 10 p. 231

Réponses multiples à chaque question.

♦ Exercice n° 11 p. 231

Le système initial a pour solution $(1; -1)$.

1. et 4. sont équivalents à ce système ; 2. et 3. ne le sont pas.

♦ Exercice n° 12 p. 231

Soit (S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ avec $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, a' \neq 0, b' \neq 0$ et $c' \neq 0$.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x \\ a'x + b'(\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x) = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x \\ (a' - \frac{b'}{b}a)x = c' - \frac{b'}{b}c \end{cases}$$

si (S) a une infinité de solutions, alors l'équation $(a' - \frac{b'}{b}a)x = c' - \frac{b'}{b}c$ a une infinité de solutions ;

$$a' - \frac{b'}{b}a = c' - \frac{b'}{b}c = 0 \text{ ou } \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c};$$

c'est-à-dire les équations « $ax + by = c$ » et « $a'x + b'y = c'$ » ont leurs coefficients proportionnels.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES PAR MISE EN ÉQUATIONS

♦ Exercice n° 13 p. 231

Soit x et y les nombres respectifs de pièces de 25 F et de 50 F. Les données de l'énoncé se traduisent par le système :
 $\begin{cases} x + y = 16 \\ 25x + 50y = 575 \end{cases}$, qui a une seule solution : $(9; 7)$. Saliou a donc 9 pièces de 25 F et 7 pièces de 50 F.

♦ Exercice n° 14 p. 231

Soit a le chiffre des dizaines et b celui des unités ;
 on a : a entier strictement positif et inférieur à 9 ;
 b entier positif et inférieur à 9 ;
 $a + b = 10$; $10b + a = 10a + b + 54$.

$$\text{Or } \begin{cases} a + b = 10 \\ 9b - 9a = 54 \end{cases} \text{ a une solution } (2; 8).$$

Le nombre cherché est 28.

♦ Exercice n° 15 p. 231

Soit a le chiffre des dizaines et b celui des unités ;
 on a : a entier strictement positif et inférieur à 9 ;
 b entier positif et inférieur à 9 ;
 $a + b = 10$; $10b + a = 10a + b + 50$.

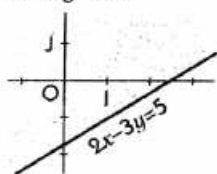
$$\text{Or } \begin{cases} a + b = 10 \\ 9b - 9a = 50 \end{cases} \text{ n'a aucune solution entière,}$$

puisque 50 n'est pas un multiple de 9.
 Le problème n'a pas de solution.

SYSTEMES D'INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

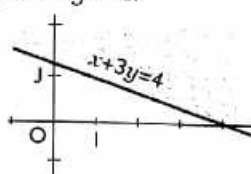
♦ Exercice n° 16 p. 232

a) $2x - 3y \leq 5$.



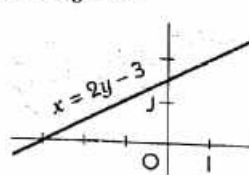
L'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan colorié, bord inclus.

b) $x + 3y > 4$.



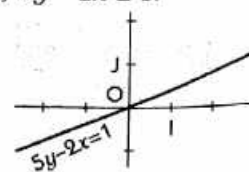
L'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan colorié, bord exclus.

c) $x < 2y - 3$.



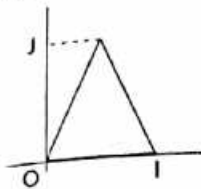
L'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan colorié, bord exclus.

d) $5y - 2x \geq 1$.



L'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan colorié, bord inclus.

◆ Exercice n° 17 p. 232



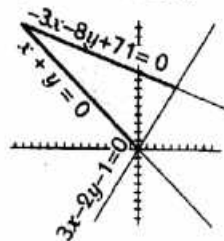
L'ensemble colorié ci-dessus représente l'ensemble des solutions du système

$$(S_2) : \begin{cases} y \leq 2x \\ y + 2x \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

◆ Exercice n° 18 p. 232

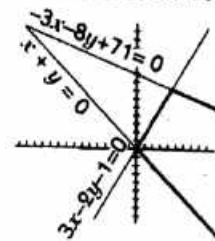
$$1. \begin{cases} 3x - 2y - 1 < 0 \\ -3x - 8y + 71 > 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est représenté par l'intérieur du triangle colorié ci-dessous, bords exclus.



$$2. \begin{cases} 3x - 2y - 1 > 0 \\ -3x - 8y + 71 > 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est représenté par la zone coloriée ci-dessous, limitée par les trois droites et bords exclus.

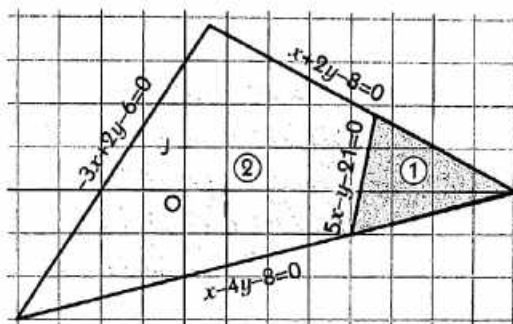


◆ Exercice n° 19 p. 232

$$1. \begin{cases} x + 2y - 8 \leq 0 \\ 5x - y - 21 \geq 0 \\ x - 4y - 8 \leq 0 \\ -3x + 2y - 6 \leq 0 \end{cases}$$

Les solutions sont représentées par les points, de coordonnées entières, situés à l'intérieur (bords inclus) du triangle 1.

Ce système admet donc 7 solutions : $(-1; 4)$, $(5; 0)$, $(6; 0)$, $(7; 0)$, $(8; 0)$, $(5; 1)$ et $(6; 1)$.



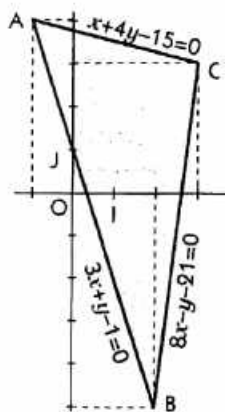
$$2. \begin{cases} x + 2y - 8 \leq 0 \\ 5x - y - 21 \leq 0 \\ x - 4y - 8 \leq 0 \\ -3x + 2y - 6 \leq 0 \end{cases}$$

Les solutions sont représentées par les points, de coordonnées entières, situés à l'intérieur (bords inclus) du quadrilatère 2.

Ce système admet donc 33 solutions.

◆ Exercice n° 20 p. 232

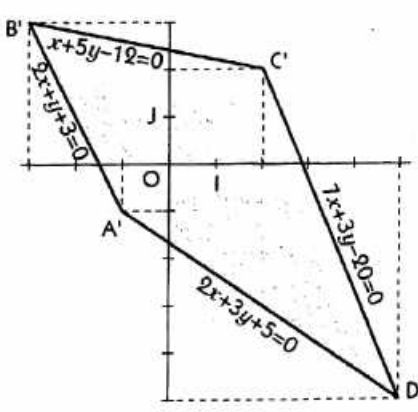
$$1. A\left(-\frac{1}{4}\right), B\left(\frac{2}{-5}\right) \text{ et } C\left(\frac{3}{3}\right).$$



L'intérieur du triangle ABC (bords inclus) représente l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} 3x + y - 1 \geq 0 \\ x + 4y - 15 \leq 0 \\ 8x - y - 21 \leq 0 \end{cases}$$

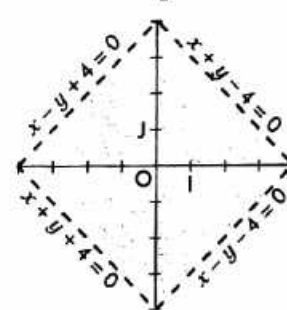
$$2. A'\left(-\frac{1}{1}\right), B'\left(-\frac{3}{3}\right), C'\left(\frac{2}{2}\right) \text{ et } D'\left(\frac{5}{-5}\right).$$



L'intérieur du quadrilatère A'B'C'D' (bords inclus) représente l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} 2x + y + 3 \geq 0 \\ x + 5y - 12 \leq 0 \\ 7x + 3y - 20 \leq 0 \\ 2x + 3y + 5 \geq 0 \end{cases}$$

◆ Exercice n° 21 p. 232



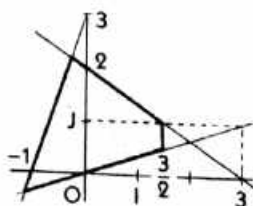
Les quatre droites supports des côtés du carré ont pour équations respectives :

$$x + y - 4 = 0, x + y + 4 = 0, x - y - 4 = 0, x - y + 4 = 0.$$

L'intérieur de ce carré (bords exclus), qui contient le point O, représente l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x + y - 4 < 0 \\ x + y + 4 > 0 \\ x - y - 4 < 0 \\ x - y + 4 > 0 \end{cases}$$

♦ Exercice n° 22 p. 232



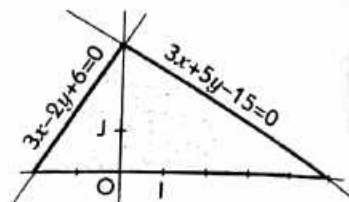
Les quatre droites supports des côtés du polygone colorié ont pour équations respectives : $x = \frac{3}{2}$, $2x + 3y - 6 = 0$, $3x - y + 3 = 0$ et $x - 3y = 0$.

L'intérieur de ce polygone (bords inclus), qui contient le point $J(0; 1)$, représente donc l'ensemble des solutions du système :
$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 2x + 3y - 6 \leq 0 \\ 3x - y + 3 \geq 0 \\ x - 3y \leq 0 \end{cases}$$

♦ Exercice n° 23 p. 232

$$\begin{cases} 5y - 6 \leq 3x + 3y \leq 15 - 2y \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 6 \geq 0 \\ 3x + 5y - 15 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Les solutions sont représentées par l'intérieur du triangle colorié ci-contre, bords inclus.



□ Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n° 24 p. 232

- $(-1; -3)$, $(-3; -1)$, $(1; 3)$ et $(3; 1)$ sont les couples de nombres entiers relatifs dont le produit est égal à 3.
- $x^2 - y^2 = 3 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -1 \\ x-y = -3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y = -3 \\ x-y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y = 1 \\ x-y = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 1 \end{cases}$
 $(-2; 1)$, $(-2; -1)$, $(2; -1)$ et $(2; 1)$ sont les couples de nombres entiers relatifs tels que : $x^2 - y^2 = 3$.

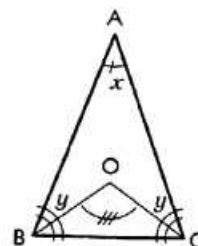
♦ Exercice n° 25 p. 232

Dans le triangle ABC, isocèle en A, O est le point d'intersection des bissectrices des deux angles égaux.

Si $x = \widehat{\text{BAC}}$ et $y = \widehat{\text{ABC}} = \widehat{\text{BCA}}$, alors : $\widehat{\text{BOC}} = \pi - y$.

Les contraintes de l'énoncé se traduisent par le système :
$$\begin{cases} \pi - y = 3x \\ x + 2y = \pi \end{cases}$$

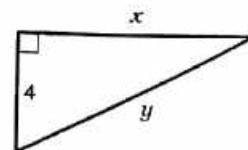
Donc : $x = \frac{\pi}{5}$ et $y = \frac{2\pi}{5}$.



♦ Exercice n° 26 p. 232

- Soit x et y les longueurs respectives du deuxième côté de l'angle droit et de l'hypoténuse ; les contraintes de l'énoncé se traduisent par le système (S_1) :

$$\begin{cases} x + y + 4 = 12 \\ x^2 + 16 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad ; \text{ donc : } x = 3 \text{ et } y = 5.$$



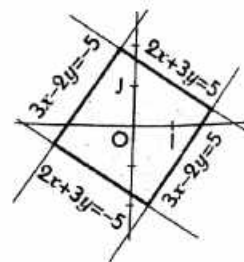
- Les contraintes de l'énoncé se traduisent maintenant par le système (S_2) :

$$\begin{cases} x + y + a = p \\ x^2 + a^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = p - a \\ y - x = \frac{a^2}{p - a} \end{cases} \quad ; \text{ donc : } x = \frac{(p-a)^2 - a^2}{2(p-a)} \text{ et } y = \frac{(p-a)^2 + a^2}{2(p-a)}.$$

♦ Exercice n° 27 p. 232

$$\begin{cases} |2x + 3y| \leq 5 \\ |3x + 2y| \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq 2x + 3y \leq 5 \\ -5 \leq 3x + 2y \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \geq -5 \\ 2x + 3y \leq 5 \\ 3x - 2y \geq -5 \\ 3x - 2y \leq 5 \end{cases}$$

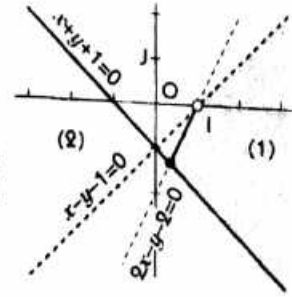
L'ensemble des points vérifiant ce système est la surface coloriée ci-contre, bords inclus.



♦ Exercice n° 28 p. 232

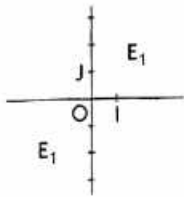
$$\begin{cases} \frac{x+y+1}{x-y-1} \geq 0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 \geq 0 \\ x-y-1 > 0 \text{ (1)} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y+1 \leq 0 \\ x-y-1 < 0 \text{ (2)} \end{cases}$$

L'ensemble des points $M(x; y)$, vérifiant le système initial, est la partie de la droite, d'équation $2x - y - 2 = 0$, située dans la surface coloriée (1) (bord « supérieur » exclus) ou dans la surface coloriée (2) (bord « inférieur » exclus).
Il s'agit donc des points de cette droite, dont l'abscisse x est telle que : $\frac{1}{3} \leq x < 1$.

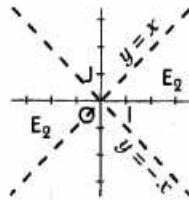


♦ Exercice n° 29 p. 232

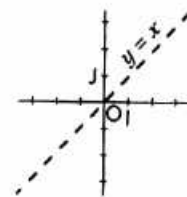
E_1 , ensemble des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ tels que $xy > 0$, est la surface coloriée ci-dessous, axes exclus.



E_2 , ensemble des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ tels que $x^2 - y^2 > 0$, est la surface coloriée ci-dessous, bords exclus.



L'ensemble des solutions de $\begin{cases} x^2 - y^2 > 0 \\ xy > 0 \end{cases}$ est représenté par $E_1 \cap E_2$, c'est-à-dire la surface coloriée ci-dessous, bords exclus.



♦ Exercice n° 30 p. 232

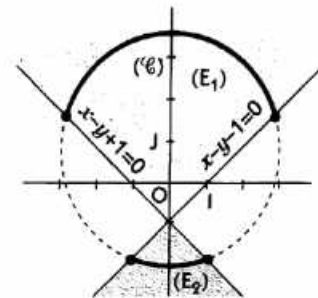
$$\begin{cases} x^2 - (y+1)^2 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y-1)(x+y+1) \leq 0 \\ x^2 + (y-1)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1 \leq 0 \\ x+y+1 \geq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-y-1 \geq 0 \\ x+y+1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 9 \\ x^2 + (y-1)^2 = 9 \end{cases}$$

(E_1) et (E_2) représentant respectivement les ensembles des solutions des systèmes : (1) $\begin{cases} x-y-1 \leq 0 \\ x+y+1 \geq 0 \end{cases}$ et (2) $\begin{cases} x-y-1 \geq 0 \\ x+y+1 \leq 0 \end{cases}$,

l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant le système initial est la partie du cercle ($\mathcal{C}$), de centre J et de rayon 3, située dans les surfaces coloriées (E_1) ou (E_2), bords inclus.



♦ Exercice n° 31 p. 233

1. L'ensemble E des points $M(x; y)$ tels que $|x+y| = |x|+|y|$ est non vide, car il contient l'origine de repère.

2. $|x+y| = x+y \Leftrightarrow x+y \geq 0$

$|x+y| = -(x+y) \Leftrightarrow x+y \leq 0$.

$|x|+|y| = x+y \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } y \geq 0$

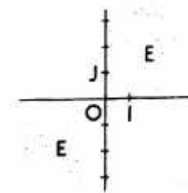
$|x|+|y| = -x+y \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ et } y \geq 0$

$|x|+|y| = x-y \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } y \leq 0$

$|x|+|y| = -x-y \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ et } y \leq 0$.

Donc, $|x+y| = |x|+|y| \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |xy| = xy$.

3. L'ensemble E est la surface coloriée ci-dessous (axes inclus).



♦ Exercice n° 32 p. 233

E est l'ensemble des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ tels que $|x|+|y| = 1$.

1. $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \in E$, $B(-1; 1) \notin E$, $C(0; 1) \in E$ et $D(2; 3) \notin E$.

2. Déterminer les points d'intersection de E avec chacune des droites (OI) et (OJ) équivaut à résoudre les systèmes

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Donc, les points d'intersection de E avec (OI) sont I(1 ; 0) et I'(-1 ; 0), avec (OJ) sont J(0 ; 1) et J'(0 ; -1).

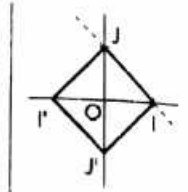
3. $|x| + |y| = 1 \Rightarrow |x| + |-y| = 1$; donc le symétrique, par rapport à (OI), de tout point de E est un point de E.

$|x| + |y| = 1 \Rightarrow |-x| + |y| = 1$; donc le symétrique, par rapport à (OJ), de tout point de E est un point de E. (OI) et (OJ) sont donc des axes de symétrie pour E.

4. Le segment [IJ] est l'ensemble des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ tels que : $\begin{cases} x + y = 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

Les côtés du carré IJJ'I' constituent l'ensemble E.

5. L'ensemble F des points $M(x ; y)$ tels que $|x| + |y| \leq 1$ est l'intérieur de IJJ'I', bords inclus.



♦ Exercice n° 33 p. 233

Le prix des 20 cartons de feuilles de papier vélin est :

$$1\,310\,500 - 10 \times 40\,900 - 2 \times 63\,900 - 51\,900 - 2 \times 72\,900 = 576\,000 \text{ F.}$$

Soit x et y les quantités respectives de cartons de vélin 80g et de cartons de vélin extra.

Les données de l'énoncé se traduisent par le système $\begin{cases} x + y = 20 \\ 24\,000x + 32\,000y = 576\,000 \end{cases}$ qui a pour solution : (8 ; 12).

Donc les nombres de cartons de vélin 80g et de cartons de vélin extra sont respectivement égaux à 8 et 12 ; le taux de la taxe sur la valeur ajoutée est : $\frac{1\,572\,600 - 1\,310\,500}{1\,310\,500} = 20\%$.

♦ Exercice n° 34 p. 233

1. Soit x le volume, en cm^3 , de cuivre et y le volume, en cm^3 , d'étain que contient 200 cm^3 de bronze.

Les données de l'énoncé se traduisent par le système $\begin{cases} x + y = 200 \\ 8,9x + 7,3y = 1,7 \end{cases}$, qui a pour solution : (150 ; 50).

Les proportions de cuivre et d'étain, dans la statuette en bronze, sont donc respectivement de 75% et 25%.

2. Cette statuette contient 1,335 kg de cuivre et 0,365 kg d'étain.

♦ Exercice n° 35 p. 233

Soit x la quantité, en litres, d'acide chlorhydrique prélevée dans la cuve où il est concentré à 10^{-2} mol/l et y la quantité, en litres, prélevée dans la cuve où il est concentré à 10^{-4} mol/l . Les données de l'énoncé

se traduisent par le système $\begin{cases} x + y = 20 \\ \frac{10^{-2}x + 10^{-4}y}{20} = 1,7 \end{cases}$, qui a pour solution : (6 ; 14).

Le laborantin doit donc prélever 6 litres d'acide chlorhydrique concentré à 10^{-2} mol/l et 14 litres d'acide chlorhydrique concentré à 10^{-4} mol/l .

♦ Exercice n° 36 p. 233

Désignons par A le marcheur parti de A, par B le marcheur parti de B.

• Les 18 km ont été parcourus par A en $45 + 75 + 15 = 135 \text{ min}$, à la vitesse de $\frac{18}{135} \times 45 = 8 \text{ km/h}$.

• Quand ils se sont croisés, A avait parcouru $\frac{8}{60} \times 45 = 6 \text{ km}$; ces 6 km ont été parcouru en 75 min, à la vitesse de $\frac{6}{75} \times 60 = 4,8 \text{ km/h}$.

Commentaire

On peut se demander si B est parti « avant ou après » A. Or avant la rencontre, B a parcouru 12 km en $\frac{12}{4,8} = 150 \text{ min}$; donc B est parti 105 (= 150 - 45) min avant A (c'est-à-dire 1 h trois quarts avant).

♦ Exercice n° 37 p. 233

1. On considère l'application qui, à $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = 3x + 4y - 5 \\ y' = x - y + 3 \end{cases}$.
- a) $O'\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ est l'image de O .
- b) $\Lambda\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ est le seul point qui a pour image O .
- c) Tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a une image unique : $M'\begin{pmatrix} 3x + 4y - 5 \\ 3x + 4y - 5 \end{pmatrix}$. Tout point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est l'image d'un seul point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, puisque le système $\begin{cases} 3x + 4y = x' + 5 \\ x - y = y' - 3 \end{cases}$ a un déterminant non nul.
- Donc l'application est une bijection du plan dans lui-même.

2. Dans l'application qui, à $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$, avec $ab' - a'b \neq 0$;
- $O'\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$ est l'image de O ; tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a une image unique : $M'\begin{pmatrix} ax + by + c \\ a'x + b'y + c' \end{pmatrix}$; tout point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est l'image d'un seul point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, puisque le système, $\begin{cases} ax + by = x' - c \\ a'x + b'y = y' - c' \end{cases}$ a un déterminant non nul ; donc l'application est une bijection du plan dans lui-même.

♦ Exercice n° 38 p. 233

- On considère l'application qui, à tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = 9x + 3y - 5 \\ y' = 12x + 4y + 3 \end{cases}$.
1. $O'\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ est l'image de O .
2. Aucun point n'a pour image O , puisque le système $\begin{cases} 9x + 3y - 5 = 0 \\ 12x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$ n'a pas de solution.
3. Les points qui ont pour image $\Lambda\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ sont ceux dont les coordonnées $(x ; y)$ sont solutions du système $\begin{cases} 9x + 3y - 5 = -2 \\ 12x + 4y + 3 = 7 \end{cases}$; ce système est équivalent à $\begin{cases} 9x + 3y = 3 \\ 12x + 4y = 4 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$; donc, tous les points de la droite d'équation $3x + y - 1 = 0$ ont pour image le point Λ .
4. Pour tout couple de nombres réels $(x ; y)$, $4(9x + 3y - 5) - 3(12x + 4y + 3) + 29 = 0$; donc, l'image de tous les points du plan appartiennent à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $4x - 3y + 29 = 0$.
5. Les points qui ont pour image un point $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de $(\mathcal{D})$ sont ceux dont les coordonnées $(x ; y)$ sont solutions du système $\begin{cases} 9x + 3y - 5 = x_0 \\ 12x + 4y + 3 = y_0 \end{cases}$; ce système est équivalent à $\begin{cases} 36x + 12y - 20 = 4x_0 \\ 12x + 4y + 3 = y_0 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} 36x + 12y + 9 = 3y_0 \\ 12x + 4y + 3 = y_0 \end{cases}$, puisque $4x_0 = 3y_0 + 29$.
- donc, tous les points de la droite d'équation $12x + 4y + 3 - y_0 = 0$ ont pour image le point $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de $(\mathcal{D})$.

Commentaires

On pourra faire remarquer que cette droite admet toujours le même vecteur directeur et que l'application étudiée est la projection sur la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $4x - 3y + 29 = 0$ (rencontrée à la question 4), parallèlement à la droite d'équation $3x + y - 1 = 0$ (rencontrée à la question 3).

♦ Exercice n° 39 p. 233

Cet exercice met en jeu trois époques : le *passé*, le *présent* et l'*avenir*.

Soit x l'âge du narrateur et y l'âge de son interlocuteur ... « *présentement* ». Les données de l'énoncé se traduisent par :

- a) $x \geq y$ et une égalité de temps écoulé entre *passé* - *présent* et *présent* - *futur* : $x - y$;
- b) $x = 3[y - (x - y)]$... puisque l'âge *présent* du narrateur est trois fois l'âge *passé* de son interlocuteur ;
- c) $[x + (x - y)] + [y + (x - y)] = 154$... puisque la somme des âges *futurs* sera 154.
- Or $\begin{cases} x = 3[y - (x - y)] \\ [x + (x - y)] + [y + (x - y)] = 154 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ 3x - y = 154 \end{cases}$.

Donc, l'âge du narrateur est 66 ans et celui de son interlocuteur est 44 ans.

♦ Exercice n° 40 p. 234

Soit $s \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}$. Désignons par a le chiffre des dizaines et par b le chiffre des unités du nombre cherché. Ce nombre est $\overline{ab} = 10a + b$; le nombre obtenu en permutant les deux chiffres est : $\overline{ba} = 10b + a$.

On cherche a et b tels que : $\begin{cases} a + b = s \\ \overline{ba} - \overline{ab} = d \end{cases} \quad (S).$

1. • Si $\overline{ab}$ est un nombre de deux chiffres, alors $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; donc : $1 \leq s \leq 18$.

• Si $\overline{ba} > \overline{ab}$, alors la plus petite différence entre ces deux nombres est obtenue pour $b = a + 1$ et la plus grande pour $a = 1$ et $b = 9$; donc : $9 \leq d \leq 72$ (ainsi : $21 - 12 = 32 - 23 = \dots = 98 - 89 = 9$; $91 - 19 = 72$).

2. • $d = \overline{ba} - \overline{ab} = (10b + a) - (10a + b) = 9(b - a)$; d est donc un multiple de 9.

• Si d est pair, alors $b - a$ est pair et $s = b + a = b - a + 2a$ est pair ;
si d est impair, alors $b - a$ est impair et $s = b + a = b - a + 2a$ est impair } donc : s et d sont de même parité.

3. (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = s \\ 9(b - a) = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = s - a \\ a = \frac{9s - d}{18} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{donc pour } 1 \leq s \leq 18, 9 \leq d \leq 72, d \text{ multiple de } 9, s \text{ et } d \text{ de} \\ \text{même parité, le problème n'a pas toujours de solution.} \end{array} \right.$

Ainsi :

• pour $s = 1$ et $d = 27$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 9(b - a) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases};$$

pas de solution

• pour $s = 3$ et $d = 9$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 9(b - a) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases};$$

une solution

• pour $s = 16$ et $d = 36$

$$\begin{cases} a + b = 16 \\ 9(b - a) = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 10 \end{cases};$$

pas de solution

♦ Exercice n° 41 p. 234

$$\begin{cases} 2h + p = 64 \\ 0 < h \leq 25 \end{cases} \Rightarrow p = 64 - 2h \text{ et } 14 \leq p < 64. \text{ Désignons par } n \text{ le nombre de marches.}$$

Comme $np \leq 160$, le nombre de marches est maximum lorsque p est minimum et vaut alors : $E(\frac{160}{14}) = 11$.

À ce nombre correspond la hauteur maximale de l'escalier, qui est égale à :

$$nh = n \times \frac{64 - p}{2} = 11 \times \frac{50}{2} = 275 \text{ mètres.}$$

♦ Exercice n° 42 p. 234

Soit x le prix d'un ananas, y le prix d'une mangue et z le prix d'une banane.

Sachant que $10x + 2y + 8z = 1\,400$ et $4x + 4y + 6z = 900$, il faut déterminer la valeur de $2x + 10y + 10z$.

Répondre à la question 1. dispense de déterminer x , y et z .

$$1. \begin{cases} 10a + 4b = 2 \\ 2a + 4b = 10 \\ 8a + 6b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + 2b = 1 \\ a + 2b = 5 \\ 4a + 3b = 5 \end{cases} \quad \text{admet pour solution } a = -1 \text{ et } b = 3.$$

2. On en déduit que : $2x + 10y + 10z = -(10x + 2y + 8z) + 3(4x + 4y + 6z) = -1\,400 + 2\,700 = 1\,300$.

♦ Exercice n° 43 p. 234

$AB = 4$, $\widehat{\text{BAC}} = 45^\circ$ et $\widehat{\text{ABC}} = 120^\circ$.

1. D'après le théorème des sinus, $\frac{AB}{\sin 15^\circ} = \frac{AC}{\sin 120^\circ}$; donc : $\sin 15^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{AC}$.

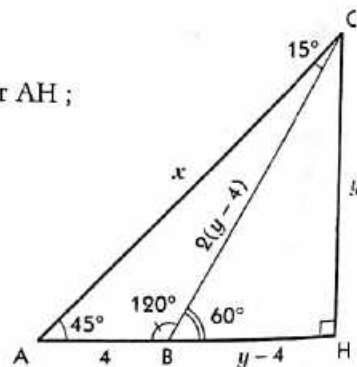
2. Si on pose $x = AC$ et $y = HC$, alors :

- $2y^2 = x^2$, puisque AHC est un triangle rectangle isocèle en H ;
- $BC = 2(y - 4)$, BHC est « la moitié » d'un triangle équilatéral de hauteur AH ;
- $(y - 4)^2 + y^2 = 4(y - 4)^2$, puisque BHC est un triangle rectangle en H .

Finalement les données de l'énoncé se traduisent par le système :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 4 \\ 2y^2 = x^2 \\ 3(y - 4)^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 4 \\ \sqrt{2}y = x \\ \sqrt{3}(y - 4) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = 2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) \\ x = \sqrt{2}y = 2\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1) \end{cases}$$

$$3. \sin 15^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4} \approx 0,258\,819\,045.$$



♦ Exercice n° 44 p. 234

1. Si x désigne le nombre d'objets A et y le nombre d'objets B fabriqués en une journée, alors $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$;
de plus les dépenses journalières s'élèvent à :
- $25\,000x + 15\,000y$, pour la main-d'œuvre ;
 - $6\,000x + 14\,000y$, pour les matières premières.

2. Les contraintes de l'artisan se traduisent par le système :

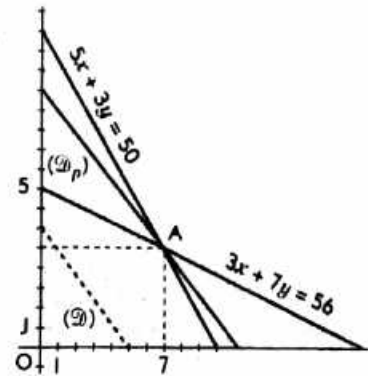
$$\begin{cases} 25\,000x + 15\,000y \leq 250\,000 \\ 6\,000x + 14\,000y \leq 112\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y \leq 50 \\ 3x + 7y \leq 56 \end{cases} ;$$

donc $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient à la zone coloriée ci-contre, bords inclus.

3. Le bénéfice journalier est $g : 10\,800x + 9\,000y = 1\,800(6x + 5y)$.
Ce bénéfice est maximal lorsque $6x + 5y$ est maximal.

Or la droite $(\mathcal{D}_p)$, d'équation $6x + 5y = p$, varie parallèlement à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $6x + 5y = 30$. Par lecture graphique le point de la surface coloriée, dont les coordonnées rendent maximal $6x + 5y$, est le point d'intersection des droites d'équations $5x + 3y = 50$ et $3x + 7y = 56$, c'est-à-dire $M\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Le bénéfice maximum, obtenu pour une production journalière de 7 objets A et 5 objets B, s'élève à 120 600 F.



♦ Exercice n° 45 p. 234

Soit x et y les nombres respectifs de cornets à une et deux boules vendus quotidiennement ; $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$;
les contraintes du marchand de glaces se traduisent par le système :

$$\begin{cases} x \leq 60 \text{ et } y \leq 60 \\ x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 150 \end{cases} ;$$

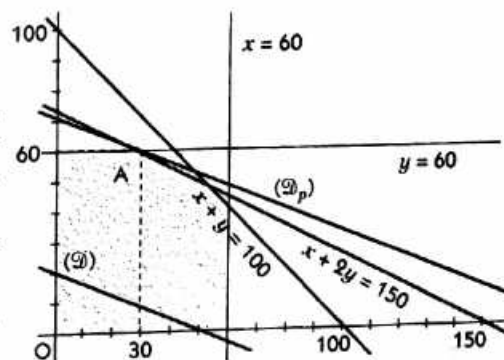
le bénéfice journalier est égal à $100x + 250y = 50(2x + 5y)$.

Les points à coordonnées entières de la surface coloriée ci-contre, bords inclus, représentent les couples $(x ; y)$ solutions du système ; il s'agit de choisir, parmi eux, celui qui rend $2x + 5y$ maximal.

Or la droite $(\mathcal{D}_p)$, d'équation $2x + 5y = p$, varie parallèlement à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $2x + 5y = 100$.

Par lecture graphique, $A\begin{pmatrix} 30 \\ 60 \end{pmatrix}$, point d'intersection des droites d'équations $x + 2y = 150$ et $y = 60$, est le point cherché.

Le bénéfice journalier maximal que peut espérer le marchand de glace est donc de 18 000 F.



♦ Exercice n° 46 p. 234

Soit x et y les nombres respectifs de sacs de produit A et B utilisés quotidiennement ; $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$; les contraintes de l'énoncé se traduisent par le système :

$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 120 \\ 3x + y \geq 90 \\ x + 2y \geq 60 \end{cases} ;$$

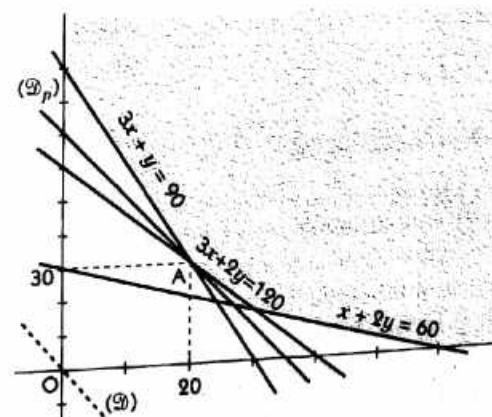
la dépense quotidienne est : $5\,000x + 2\,500y = 2\,500(2x + y)$.

Les points à coordonnées entières de la surface coloriée ci-contre, bords inclus, représentent les couples $(x ; y)$ solutions du système ; il s'agit de choisir, parmi eux, celui qui rend $2x + y$ minimal.

Or la droite $(\mathcal{D}_p)$, d'équation $2x + y = p$, varie parallèlement à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $2x + y = 20$.

Par lecture graphique, $A\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$, point d'intersection des droites d'équations $3x + y = 90$ et $3x + 2y = 120$, est le point cherché.

La dépense quotidienne minimale est alors de 175 000 F.

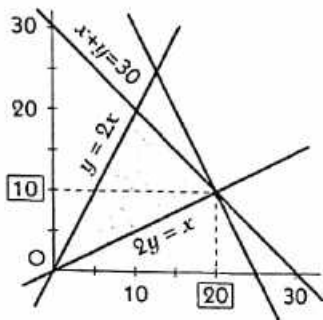


♦ Exercice n° 47 p. 234

Soit x le nombre de bonbons et y le nombre de caramels contenus dans un sachet; $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$; les contraintes initiales de l'énoncé se traduisent par le système

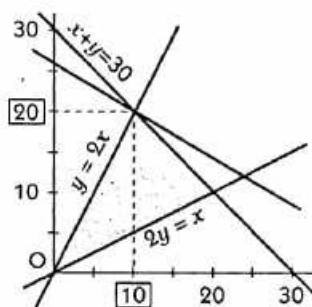
$$\begin{cases} \frac{y}{2} \leq x \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 30 \end{cases}, \text{ dont les couples solutions sont représentés par les points à coordonnées entières du triangle colorié, bords inclus, reproduit ci-dessous pour chacun des trois cas envisagés.}$$

1. Avec un bénéfice de 30 F par bonbon et 15 F par caramel, le bénéfice par paquet, égal à $30x + 15y = 15(2x + y)$, sera maximal pour $x = 20$ et $y = 10$.



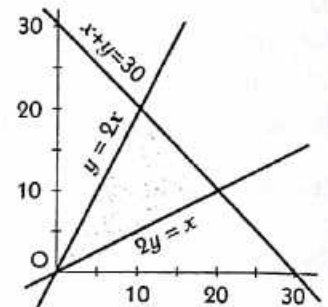
Le bénéfice réalisé est alors de 750 F.

2. Avec un bénéfice de 15 F par bonbon et 25 F par caramel, le bénéfice par paquet, égal à $15x + 25y = 5(3x + 5y)$, sera maximal pour $x = 10$ et $y = 20$.



Le bénéfice réalisé est alors de 650 F.

3. Avec un bénéfice de 20 F par bonbon et par caramel, le bénéfice par paquet est indépendant des nombres respectifs de bonbons et de caramels pourvu que leur somme soit 30.



Le bénéfice réalisé est alors de 600 F.

14. Statistiques

(pages 235 à 254 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- consolider les notions vues au collège ;
- présenter médiane et caractéristiques de dispersion, ainsi que leur utilisation dans l'analyse d'une série statistique.

COMMENTAIRES

Ce chapitre donne l'occasion de faire fonctionner les concepts acquis au premier cycle, tant pour l'organisation des données que pour leurs représentations graphiques.

Les points nouveaux sont :

- l'introduction de notations indicielles dans les calculs, définitions ou propriétés ;
- la présentation de nouvelles caractéristiques d'une série statistique ;
- les histogrammes, notamment pour représenter des séries regroupées en classes.

Quand l'occasion se présente, on pourra interpréter les caractéristiques en terme de répartition des éléments de la série.

Organisation de données

- Notation indicielle et notation Σ .
- Linéarité des Σ .
- Effectifs cumulés.
- Fréquences cumulées.

Graphiques

- Diagrammes circulaires, semi-circulaires.
- Diagrammes à bandes.
- Diagrammes en bâtons.
- Diagrammes cumulatifs.
- Histogrammes.

Caractéristiques de position

- Mode.
- Moyenne.
- Médiane.

Caractéristiques de dispersion

- Écart moyen.
- Variance - Écart-type.
- Formule de Kœnig.

- Utiliser les notations indicielle et Σ .
- Déterminer un effectif (une fréquence) cumulé(e) relatif(ve) à une modalité.
- Dresser un tableau des effectifs cumulés.
- Dresser un tableau des fréquences cumulées.

- Représenter une série par un diagramme circulaire, semi-circulaire, à bandes, en bâtons.
- Représenter une série par un diagramme cumulatif.
- Représenter une série regroupée en classes par un histogramme.
- Établir le tableau des effectifs ou des fréquences à partir du diagramme d'une série.

- Déterminer le mode d'une série statistique.
- Déterminer la moyenne, la médiane d'une série statistique à caractère quantitatif.

- Calculer l'écart moyen d'une série statistique à caractère quantitatif.
- Calculer la variance, l'écart-type d'une série statistique à caractère quantitatif.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice n° 1.a p. 239

Classe	[50 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 90[	[90 ; 100[	[100 ; 120[
Décompte	### ###	### ###	### III	## /	## /
Effectif	10	10	8	6	6
Fréquence	25 %	25 %	20 %	15 %	15 %

♦ Exercice n° 1.b p. 239

Note	2	5	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	
Effectif	1	2	3	4	4	7	7	9	5	2	3	2	1	50
Fréq. en %	2	4	6	8	8	14	14	18	10	4	6	4	2	100
Eff. c. ↑	2	6	12	20	28	42	56	74	84	88	94	98	100	
Eff. c. ↓	100	98	94	88	80	72	58	44	26	16	12	6	2	

72 % des élèves ont obtenu une note supérieure ou égale à 10.

♦ Exercice n° 1.c p. 239

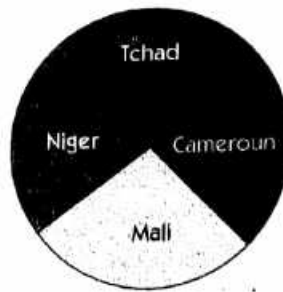
$$\sum_{i=1}^4 2u_i = 2 \sum_{i=1}^4 u_i ;$$

$$\sum_{i=1}^4 (2u_i + 3v_i) = 2 \sum_{i=1}^4 u_i + 3 \sum_{i=1}^4 v_i ;$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (2u_i + 3v_i - 5) &= 2 \sum_{i=1}^4 u_i + 3 \sum_{i=1}^4 v_i + \sum_{i=1}^4 (-5) \\ &= 2 \sum_{i=1}^4 u_i + 3 \sum_{i=1}^4 v_i - 20. \end{aligned}$$

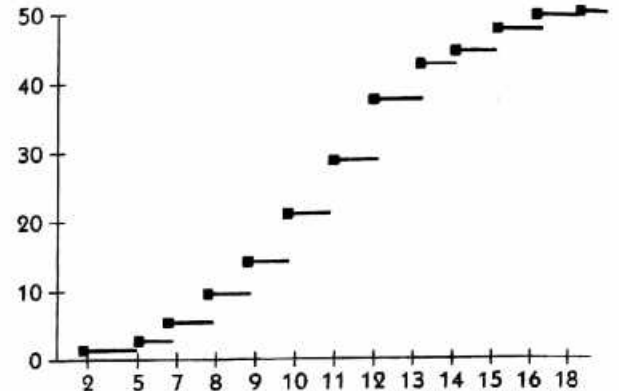
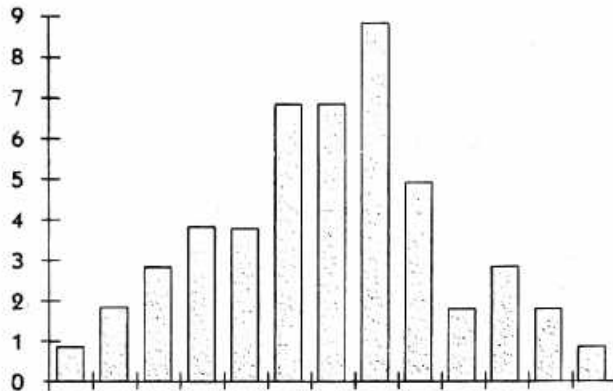
♦ Exercice n° 1.d p. 239
C'est un caractère qualitatif.

	Cameroun	Mali	Niger	Tchad
Bovins	5 000	5 500	4 750	4 750
Frq.	25	27,5	23,75	23,75

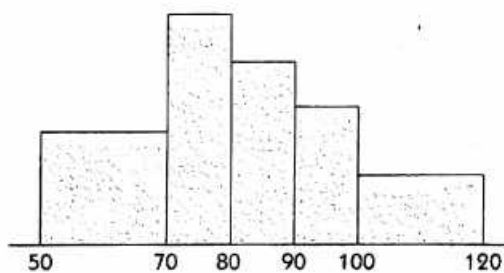


♦ Exercice n° 2.b p. 242

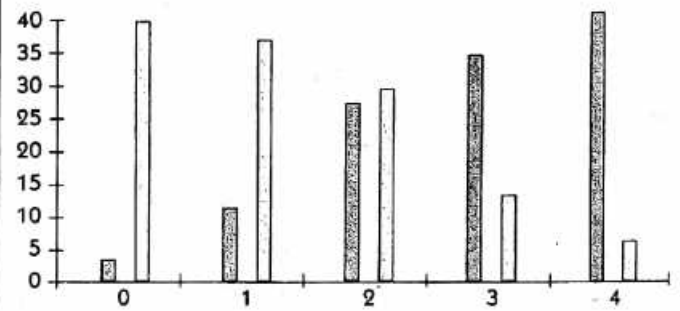
Note	2	5	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	
Effectif	1	2	3	4	4	7	7	9	5	2	3	2	1	50
Eff. c. ↑	1	3	6	10	14	21	28	37	42	44	47	49	50	



♦ Exercice n° 2.c p. 242



♦ Exercice n° 2.d p. 242



♦ Exercice n° 3.a p. 245

1. Le mode est 12. 2. Voir tableau ci-dessous. 3. La moyenne est 11. 4. La médiane est 11.

Note	4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18
Effectif	1	2	2	4	5	7	7	9	5	2	3	2	1
Eff. c. ↑	1	3	5	9	14	21	28	37	42	44	47	49	50
Eff. c. ↓	50	49	47	45	41	36	29	22	13	8	6	3	1

♦ Exercice n° 3.b p. 245

Pointure	40	41	42	43	44	45	46	47
Effectif	30	10	10	200	20	200	20	10
Eff. c. ↑	30	40	50	250	270	470	490	500
Eff. c. ↓	500	470	460	450	250	230	30	10
$n_i x_i$	1 200	410	420	8 600	880	9 000	920	470

1. Les modes sont les modalités 43 et 45. 2. L'intervalle médian est : [43 ; 44]. 3. La moyenne est : $\bar{x} = 43,8$.

♦ Exercice n° 4.a p. 249

Âge (x_i)	12	13	15	16	17	18	19	Total
Effectif (n_i)	2	3	1	2	3	3	1	15
$(x_i - \bar{x})$	3,6	2,6	0,6	0,4	1,4	2,4	3,4	
$n_i (x_i - \bar{x})$	7,2	7,8	0,6	0,8	4,2	7,2	3,4	31,20
x_i^2	144	169	225	256	289	324	361	
$n_i x_i^2$	288	507	225	512	867	972	361	3 732

1. La moyenne est : $\bar{x} = 15,6$. 2. L'écart moyen est : $e_m = 2,08$. L'écart type est : $\sigma = 2,33$.

♦ Exercice n° 4.b p. 249

Nombre d'enfant(s)	0	2	3	4	5	6	7	9	10	Total
Effectif	2	3	5	4	11	11	8	4	2	50
$n_i x_i$	0	6	15	16	55	66	56	36	20	270
$n_i (x_i - \bar{x})^2$	58,32	34,68	28,8	7,84	1,76	3,96	20,48	51,84	42,32	250
$n_i x_i^2$	0	12	45	64	275	396	392	324	200	1 708

$$\bar{x} = \frac{270}{50} = 5,4 ; \sigma = \sqrt{\frac{250}{50}} = 2,236 07... \text{ ou } \sigma = \sqrt{\frac{1 708}{50} - 5,4^2} = 2,236 07...$$

□ Exercices d'apprentissage

NOTATION Σ

♦ Exercice n° 1 p. 250

i	1	2	3	4	Total
u_i	2	3	5	6	16
v_i	-1	4	-2	-7	-6
u_i^2	4	9	25	36	74
v_i^2	1	16	4	49	70
$u_i v_i$	-2	12	-10	-42	-42
$(u_i + v_i)^2$	1	49	9	1	60

$$2. \left(\sum_{i=1}^4 u_i \right)^2 > \sum_{i=1}^4 u_i^2 ; \left(\sum_{i=1}^4 v_i \right)^2 < \sum_{i=1}^4 v_i^2$$

$$3. a) \sum_{i=1}^4 (u_i + v_i)^2 = \sum_{i=1}^4 u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^4 u_i \times v_i + \sum_{i=1}^4 v_i^2$$

$$b) 60 = 74 + 70 - 84.$$

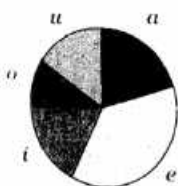
♦ Exercice n° 2 p. 250

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2 \right) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^p n_i x_i \bar{x} + \sum_{i=1}^p n_i (\bar{x})^2 \right) = \bar{x}^2 - 2\bar{x} \times \bar{x} + (\bar{x})^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2.$$

REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

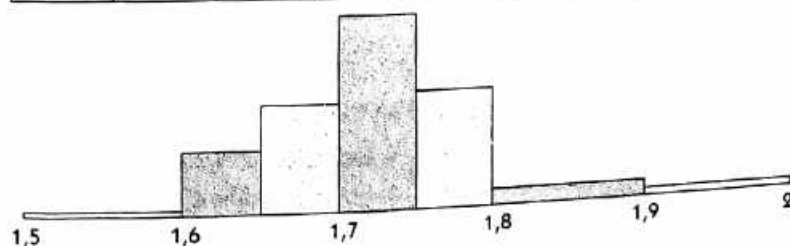
♦ Exercice n° 3 p. 250

Voyelle	a	e	i	o	u
Effectif	14	26	12	7	11



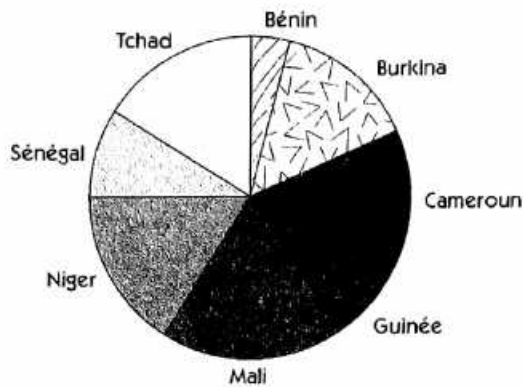
♦ Exercice n° 4 p. 250

Taille	[1,5 ; 1,6[	[1,6 ; 1,65[	[1,65 ; 1,7[	[1,7 ; 1,75[	[1,75 ; 1,8[	[1,8 ; 1,9[	[1,9 ; 2[
Effectif	1	6	10	18	11	3	1

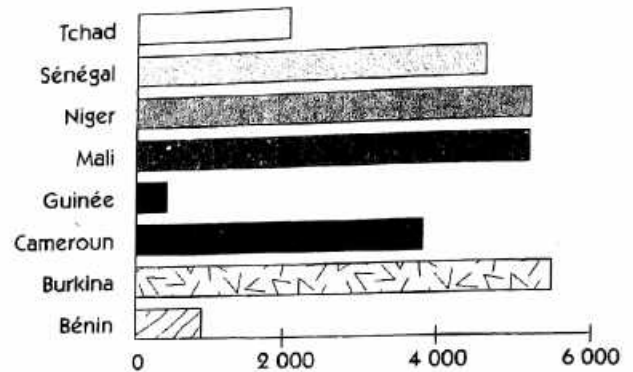


♦ Exercice n° 5 p. 250

	Bovins (x 1 000)	Fréquence (%)	Ovins (x 1 000)	Fréquence (%)
Bénin	1 250	4,167	938	3,35
Burkina	4 250	14,167	5 558	19,85
Cameroun	5 000	16,667	3 836	13,7
Guinée	1 750	5,833	448	1,6
Mali	5 500	18,333	5 208	18,6
Niger	4 750	15,833	5 250	18,75
Sénégal	2 750	9,167	4 648	16,6
Tchad	4 750	15,833	2 114	7,55
TOTAL	30 000	100	28 000	100



Répartition des 30 000 000 de bovins

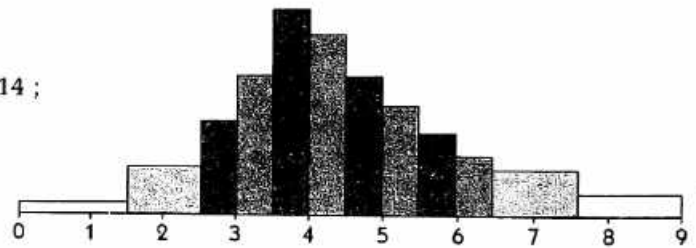


Répartition des 28 000 000 d'ovins

♦ Exercice n° 6 p. 250

$$\frac{x}{13+37+37+54+80+x+53+42+32+23+33+26} = 0,14 ;$$

d'où $x = 70$.



♦ Exercice n° 7 p. 251

1. Le caractère étudié est quantitatif.

Modalité	[0 ; 1 000[	[1 000 ; 2 000[	[2 000 ; 4 000[	[4 000 ; 5 000[	[5 000 ; + ∞[
Effectif	0	8	12	15	5
Fréquence	0 %	20 %	30 %	37,5 %	12,5 %

♦ Exercice n° 8 p. 251

Modalité	[0 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 14[	Totaux
Effectif « relatif »	$12 \times 2x$	$15 \times x$	$9 \times x$	$4 \times 3x$	$60x = 60$
Effectif	24	15	9	12	60
Fréquence	40 %	25 %	15 %	20 %	100 %

CARACTÉRISTIQUES DE POSITION

♦ Exercice n° 9 p. 251

À faire avec les élèves de la classe.

♦ Exercice n° 10 p. 251

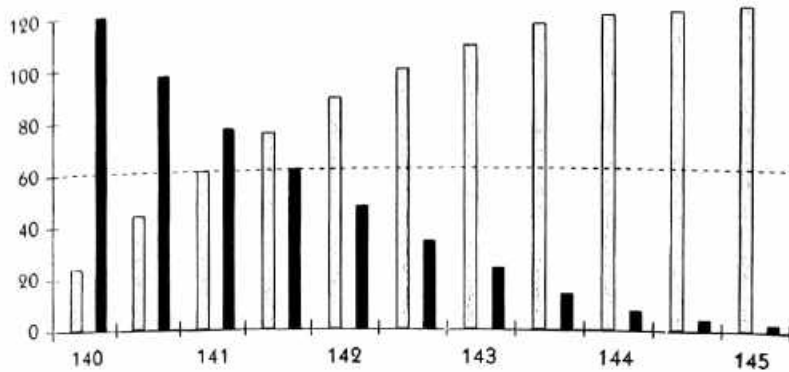
1. B est le mode de cette série, dont l'effectif total est 200.

2. a) $f(\text{AEIOUY}) = 7,5 \%$; b) $f(\text{ABCDE}) = 36 \%$; c) $f(\text{VWXYZ}) = 6 \%$.

♦ Exercice n° 11 p. 251

Classe	140	140,5	141	141,5	142	142,5	143	143,5	144	144,5	145
Effectif	24	20	16	14	13	10	9	7	3	2	2
Eff. c. ↑	24	44	60	74	87	97	106	113	116	118	120
Eff. c. ↓	120	96	76	60	46	33	23	14	7	4	2
$n_i \cdot x_i$	3 360	2 810	2 256	1 981	1 846	1 425	1 287	1 004,5	432	289	290

Effectif total : 120 ; moyenne : 141,504 ; médiane : [141 ; 141,5].



♦ Exercice n° 12 p. 251

Prix	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000	3 500	4 000	4 500
Effectif	1	5	17	15	11	8	5	2
Eff. c. ↑	1	6	23	38	49	57	62	64
Fréquence	0,015 6	0,078 1	0,265 6	0,234 4	0,171 9	0,125	0,078 1	0,031 3
Eff. c. ↓	0,015 6	0,093 8	0,359 4	0,593 8	0,765 6	0,890 6	0,968 8	1
$n_i \cdot x_i$	1 000	7 500	34 000	37 500	33 000	28 000	20 000	9 000

2. $f(3\ 500) = 0,17$; $f(\geq 2\ 000) = 0,906\ 2$; $f(\geq 3\ 000) = 0,406\ 2$.

3. Coût total : 170 000 F ; prix moyen : $\bar{x} = 2\ 656,25$.

♦ Exercice n° 13 p. 251-252

Meilleure moyenne possible : $\frac{9 \times 11,75 + 20}{10} = 12,575$.

Pire moyenne possible : $\frac{9 \times 11,75 + 0}{10} = 10,575$.

♦ Exercice n° 14 p.252

n devoirs de moyenne 12,5 étant déjà effectués,

on a : $\frac{12,5 \times n + 16}{n + 1} = 13$;

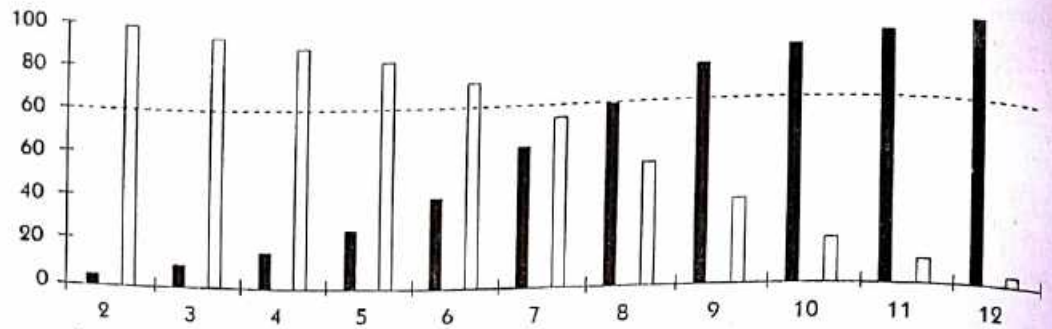
d'où : $n = 6$.

CARACTÉRISTIQUES DE DISPERSION

♦ Exercice n° 15 p. 252

1. Moyenne : 7,3 ; écart moyen : 1,953 ; écart type : 2,438.

Points	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	2	3	3	5	8	11	9	8	5	3	3
Eff. c. ↑	2	5	8	13	21	32	41	49	54	57	60
Eff. c. ↓	60	58	55	52	47	39	28	19	11	6	3



La médiane est la modalité 7.

♦ Exercice n° 16 p. 252

Moyenne : 30,052 5 ; écart type : 0,4 ; pourcentage $([29,61 ; 30,51]) = 80 \%$.

♦ Exercice n° 17 p. 252

Nombre de livres	0	1	2	3	4
Effectif	18	72	45	36	9
Fréquence	0,1	0,4	0,25	0,2	0,05
Fréquence (en %)	10	40	25	20	5
Effectif cumulé croissant	18	90	135	171	180
Effectif cumulé décroissant	180	162	90	45	9

2. 90 élèves ont lu au moins 2 livres ; 90 élèves ont lu moins de 2 livres.
 3. Le mode est la modalité 1. La moyenne est 1,7 ; l'écart moyen est 0,9 ; l'écart type est 1,05.

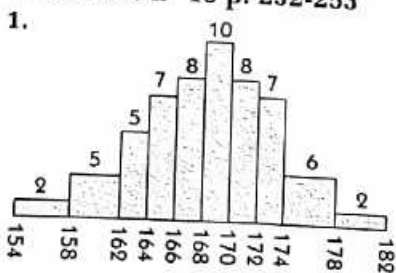
♦ Exercice n° 18 p. 252

Pièces	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Nb d'ouvriers	6	12	20	17	8	8	22	25	20	12
$n_i x_i$	210	432	740	646	312	320	902	1 050	860	528
$n_i x_i^2$	7 350	15 552	27 380	24 548	12 168	12 800	36 982	44 100	36 980	23 232

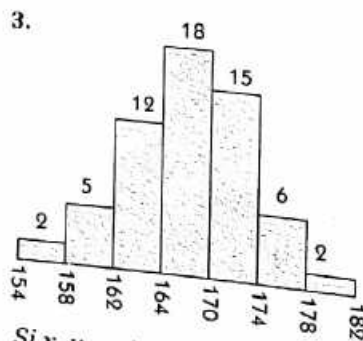
2. a) 37,143 ; b) 42,069 ; c) 40.
 3. Le mode est la modalité 42 ; la médiane est 41 ; l'écart type est 2,698.

□ Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n° 19 p. 252-253



2. 23 élèves ont une taille supérieure à 1,70 m ; 19 ont une taille inférieure à 1,60 m.



Si x, y, z et t désignent les effectifs respectifs des modalités 1, 2, 3 et 4,
 Il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1\,045 \\ x + 2y + 3z + 4t = 2\,486 \\ x + y = 616 \\ t = \frac{16}{100} \times 1\,100 \end{cases}$$

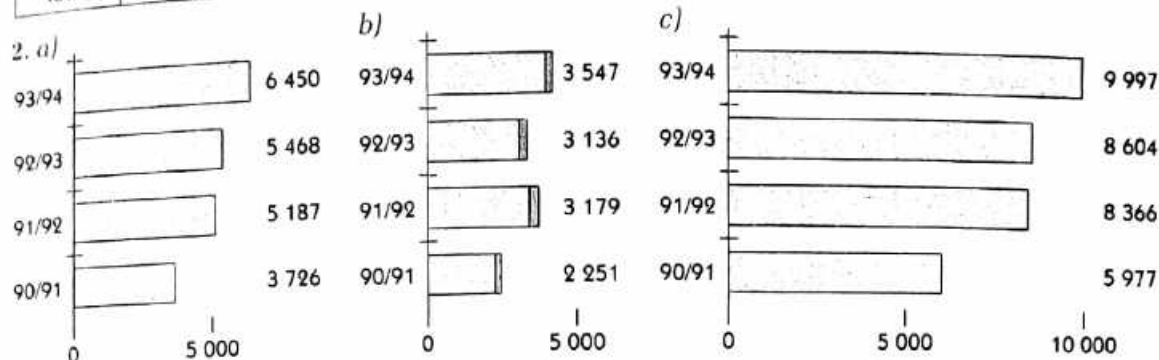
♦ Exercice n° 20 p. 253

Modalité	Eff.	Fréq.	Eff. c. cr.
0	55	5 %	55
1	209	19 %	264
2	407	37 %	671
3	253	23 %	924
4	176	16 %	1 100

Commentaire pour le n° 20

♦ Exercice n° 21 p. 253

1.	90/91	%	91/92	%	92/93	%	93/94	%
TA	3 726	62,34	5 187	62,00	5 468	63,56	6 450	64,52
TC	83	1,39	96	1,15	89	1,03	94	0,94
TD	2 168	36,27	3 083	36,85	3 047	35,41	3 453	34,54
Total	5 977		8 366		8 604		9 997	

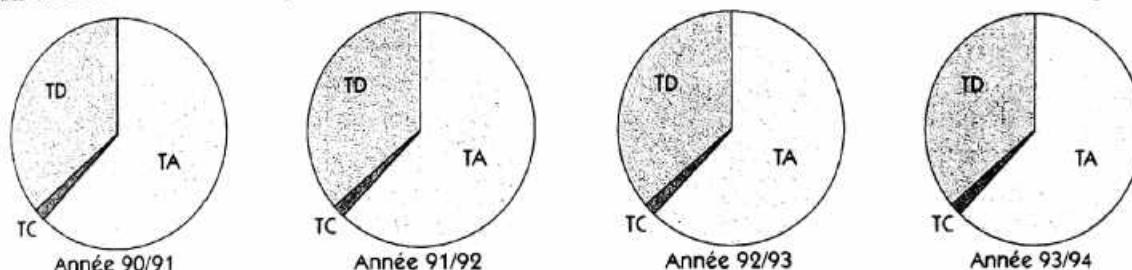


Effectifs en série littéraire (A)

Effectifs en série scientifique (D + C)

Effectifs totaux

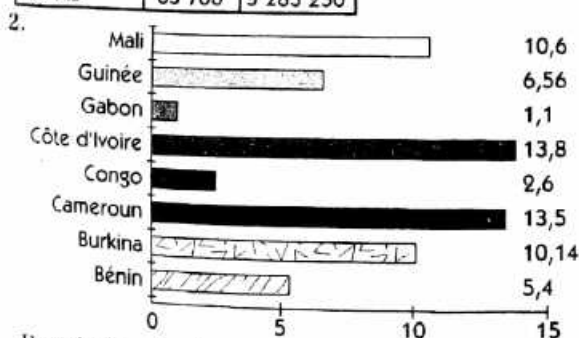
3. Voir en 1. le tableau des fréquences de chaque série et ci-dessous les diagrammes circulaires correspondants.



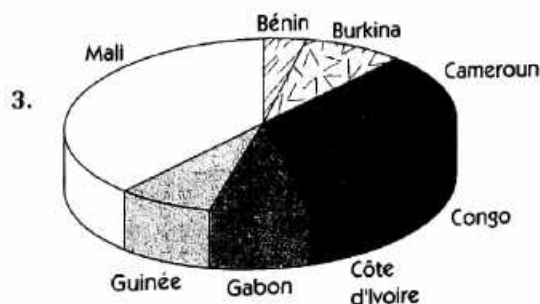
4. % d'élèves TC/(TC + TD)	90/91	91/92	92/93	93/94
	3,69	3,02	2,84	2,65

♦ Exercice n° 22 p. 253

1.	Habitants (x 1 000)	Superficie (en km ²)	Superficie (%)	Densité
Bénin	5 400	112 620	3,43	47,95
Burkina	10 140	274 200	8,35	36,98
Cameroun	13 500	475 440	14,48	28,39
Congo	2 600	342 000	10,42	7,60
Côte d'Ivoire	13 800	322 460	9,82	42,80
Gabon	1 100	267 670	8,15	4,11
Guinée	6 560	248 860	7,58	26,36
Mali	10 600	1 240 000	37,77	8,55
TOTAL	63 700	3 283 250		



Population des huit pays en millions d'habitants



Répartition de superficie entre les huit pays pour un total de 3 283 250 km²

4. Densité moyenne : 19,40 ha/km² ; moyenne des densités : 25,342 5 ha/km².

♦ Exercice n° 23 p. 253

8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 9 ; 12 ; 15 ; 16 ; 20 ; 20.

♦ Exercice n° 24 p. 253

1. $3 \times 6 + 4 \times 5 = 38$.

Nombre d'interventions	0	1	2	3	4	5	6	Totaux
Nombre de nuits	70	115	82	58	25	12	3	365
Fréquence (en %)	19,18	31,51	22,47	15,89	6,85	3,29	0,82	
$n_i x_i$	0	115	164	174	100	60	18	631
Eff. cum. ↑	0	115	279	453	553	613	631	
Eff. cum. ↓	631	631	516	352	178	78	18	

3. Nombre de sorties dans l'année : 631. 4. Médiane de la série : la modalité 3.

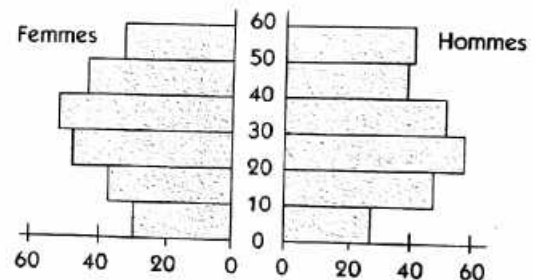
5. Moyenne nocturne : 1,73 ; moyenne hebdomadaire : 12,11.

♦ Exercice n° 25 p. 253

Âges	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
Femmes	14	18	18	20	23	28	28	25	22	22	20	15
Hommes	12	15	20	25	27	30	28	23	20	16	20	18

Population totale du village : 507.

Âges	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
Femmes	32	38	51	53	44	35
Hommes	27	45	57	51	36	38



♦ Exercice n° 26 p. 253-254

Notes	$2C_1$					$2C_2$					$2C_3$				
	n_i	eff ↑	eff ↓	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	n_i	eff ↑	eff ↓	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	n_i	eff ↑	eff ↓	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
7	1	1	50	7	49	5	5	50	35	245	14	14	50	98	686
8	2	3	49	16	128	3	8	45	24	192	1	15	36	8	64
9	3	6	47	27	243	5	13	42	45	405	4	19	35	36	324
10	7	13	44	70	700	5	18	37	50	500	2	21	31	20	200
11	11	24	37	121	1 331	4	22	32	44	484	2	23	29	22	242
12	8	32	26	96	1 152	5	27	28	60	720	2	25	27	24	288
13	6	38	18	78	1 014	6	33	23	78	1 014	1	26	25	13	169
14	5	43	12	70	980	5	38	17	70	980	1	27	24	14	196
15	4	47	7	60	900	5	43	12	75	1 125	10	37	23	150	2 250
16	3	50	3	48	768	7	50	7	112	1 792	13	50	13	208	3 328
Total	50			593	7 265	50			593	7 457	50			593	7 747

Classe	Moyenne	Mode	Écart-type	Écart moyen
$2C_1$	11,86	11	2,15	1,75
$2C_2$	11,86	16	2,91	2,52
$2C_3$	11,86	7	3,78	3,55
Ensemble	11,86	16	3,02	2,60

♦ Exercice n° 27 p. 254
L'effectif étant de 100, pour une modalité donnée, le même nombre exprime l'effectif partiel et la fréquence en %.

Masse	51	53	54	55	56	57	58	59	60	61
Fréq.	4	1	3	1	1	3	6	1	6	2
Fréq. c. ↑	4	5	8	9	10	13	19	20	26	28
Fréq. c. ↓	100	96	95	92	91	90	87	81	80	74
$m_i n_i$	204	53	162	55	56	171	348	59	360	122
$m_i^2 n_i$	10 404	2 809	8 748	3 025	3 136	9 747	20 184	3 481	21 600	7 442

Masse	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
Fréq.	1	5	9	9	5	3	4	8	4	1
Fréq. c. ↑	29	34	43	52	57	60	64	72	76	77
Fréq. c. ↓	73	72	67	58	49	44	41	37	29	25
$m_i n_i$	62	315	576	585	330	201	272	552	280	71
$m_i^2 n_i$	3 844	19 845	36 864	38 025	21 780	13 467	18 496	38 088	19 600	5 041

Masse	72	73	75	76	77	80	81	82	87	
Fréq.	2	3	5	1	2	3	4	1	2	100
Fréq. c. ↑	79	82	87	88	90	93	97	98	100	
Fréq. c. ↓	23	21	18	13	12	10	7	3	2	
$m_i n_i$	144	219	375	76	154	240	324	82	174	6 622
$m_i^2 n_i$	10 368	15 987	28 125	5 776	11 858	19 200	26 244	6 724	15 138	445 046

1. Médiane : 65. 2. Masse moyenne : $m = 66,22$. 3. Écart type : $\sigma = 8,09$.

4. L'effectif des élèves dont la masse est comprise entre $m - \sigma$ et $m + \sigma$ est 63, soit un pourcentage de 63 %.

♦ Exercice n° 28 p. 254

	Population totale (hommes, femmes, enfants)	Population de l'Université (enfants seulement)
Agriculteurs	x %	24 %
Ouvriers	y %	13 %

1. Il n'y a pas assez de renseignements. Pour la tranche d'âge concernée (tranche où les enfants fréquentent l'université), il conviendrait de connaître le nombre total d'enfants d'agriculteurs et d'enfants d'ouvriers de cette tranche ne fréquentant pas l'université (ou leur pourcentage relativement au nombre total d'enfants de cette tranche d'âge).

2. En première approximation, on peut comparer les rapports $\frac{x}{y}$ et $\frac{24}{13}$ et énoncer :

si $\frac{x}{y} > \frac{24}{13}$, alors les enfants d'agriculteurs sont désavantagés par rapport aux enfants d'ouvriers ;

si $\frac{x}{y} = \frac{24}{13}$, alors les enfants d'agriculteurs et les enfants d'ouvriers sont à égalité ;

si $\frac{x}{y} < \frac{24}{13}$, alors les enfants d'agriculteurs sont avantagés par rapport aux enfants d'ouvriers.

Cette approximation suppose cependant que, pour chaque famille, un seul parent est « compté » comme agriculteur ou ouvrier et il y a le même nombre d'enfant(s) dans la tranche d'âge considérée.

♦ Exercice n° 29 p. 254

1. Désignons par $\bar{s}$ l'ancienne moyenne des salaires, σ l'ancien écart type, $\bar{S}$ la nouvelle moyenne et σ' le nouvel écart type, après une augmentation collective des salaires s_i d'une valeur A , et par N l'effectif total.

$$\bar{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (s_i + A) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i s_i + A \times \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i = \bar{s} + A. \text{ La moyenne augmente donc de } 20\,000 \text{ F.}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma'^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (s_i + A)^2 - (\bar{s} + A)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p (n_i s_i^2 + 2A n_i s_i + A^2 n_i) - (\bar{s})^2 - 2A \bar{s} - A^2 \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i s_i^2 + 2A \times \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i s_i + \frac{1}{N} \times A^2 \sum_{i=1}^p n_i - (\bar{s})^2 - 2A \bar{s} - A^2 \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i s_i^2 - (\bar{s})^2 + 2A \bar{s} - 2A \bar{s} + A^2 - A^2 = (\sigma')^2.
 \end{aligned}$$

La variance ne change pas, donc l'écart type ne change pas non plus.

2. Désignons par $\bar{s}$ l'ancienne moyenne des salaires, σ l'ancien écart type, $\bar{S}$ la nouvelle moyenne et σ' le nouvel écart type, après une augmentation des salaires s_i d'un pourcentage commun α %, et par N l'effectif total.

Posons $A = 1 + \frac{\alpha}{100}$; As_i est l'expression du nouveau salaire après l'augmentation.

$$\bar{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i A \times s_i = A \times \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i s_i = A \times \bar{s}. \quad \text{Donc la moyenne augmente de } \alpha \text{ \%}.$$

$$\sigma'^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (A \times s_i)^2 - (A \times \bar{s})^2 = A^2 \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i s_i^2 - (\bar{s})^2 \right) = A^2 \sigma^2.$$

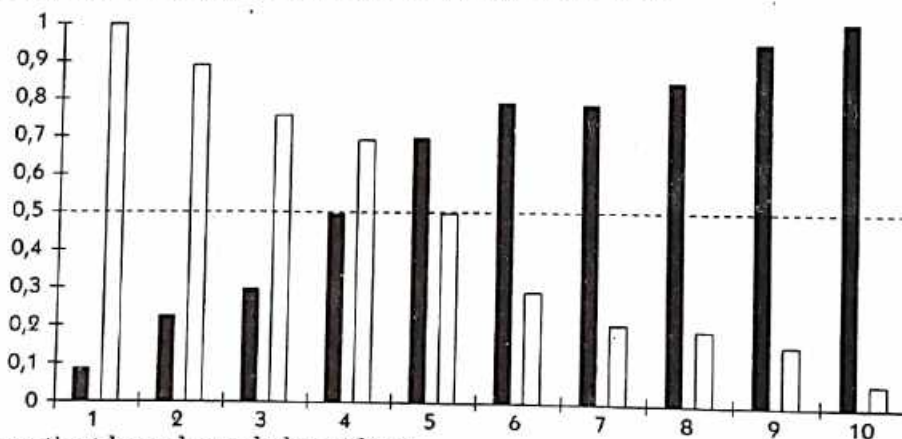
Donc $\sigma' = A \times \sigma$ et l'écart type augmente de α %.

♦ Exercice n° 30 p. 254

1.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Fréq. c. ↑	0,1	0,25	0,3	0,5	0,7	0,8	0,8	0,85	0,95	1	
Eff. c. ↑	64	160	192	320	448	512	512	544	608	640	
Effect.	64	96	32	128	128	64	0	32	64	32	640
Eff. c. ↓	640	576	480	448	320	192	128	128	96	32	
Fréq. c. ↓	1	0,9	0,75	0,7	0,5	0,3	0,2	0,2	0,15	0,05	
$x_i n_i$	64	192	96	512	640	384	0	256	576	320	3 040
$x_i^2 n_i$	64	384	288	2 048	3 200	2 304	0	2 048	5 184	3 200	18 720
$ x_i - \bar{x} n_i$	240	264	56	96	32	80	0	104	272	168	1 312

2. La moyenne est : 4,75 ; l'écart type est : 2,59 ; l'écart moyen est : 2,05.

3.



L'intervalle [4 ; 5] contient les valeurs de la médiane.

♦ Exercice n°31 p.254

1. Salaire médian : 102 200 F (5 déciles avant, 5 déciles après). 2. 40 % (4 déciles).

3.

	0	29 800	50 900	71 000	89 800	102 200	123 600	150 300	194 500	269 300
« moyenne »/décile	14 900	40 350	60 950	80 400	96 000	112 900	136 950	172 400	231 900	

On peut supposer que les salaires sont « bien répartis » dans chaque décile ; la moyenne par décile est alors la demi-somme des « bornes salariales » de ce décile.

Salaire moyen des 90 % d'employés percevant les salaires les plus faibles : 105 194,44 F.
(C'est la moyenne des moyennes par décile.)

4. Non, car si chaque employé d'un décile percevait le minimum de la tranche où il se trouve (0 F !, 29 800 F, 50 900 F, ..., 269 300 F), la moyenne des salaires serait 108 140 F.

Imprimé en Italie par Rotolito
Dépôt légal Éditeur 2338 - 08/2000 - Collection 61 - Édition 01
59/4705/6



9 782841 292172

DIFFUSION
R.C.I. : NOUVELLES EDITIONS IVOIRIENNES
AUTRES PAYS : EDICEF

59.47.05.6