Collection Inter Africaine de Mathématiques

3e

Mathématiques

Guide pédagogique

tGbatg

$2x + 3 < 5$

$\sqrt{2 \times 3} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$

EDICEF

Collection
Inter
Africaine de
Mathématiques

sous la direction
de Saliou Touré
Professeur à l'Université
d'Abidjan

MATHÉMATIQUES

3e

GUIDE PÉDAGOGIQUE

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen,
92178 Vanves Cedex

SOMMAIRE

ISBN 2-84-129047-6

1 TABLEAU SYNOPTIQUE DES PROGRAMMES DU PREMIER CYCLE

Les programmes du Premier Cycle établis en juin 1992, lors du quatrième séminaire d'harmonisation des programmes de mathématiques des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien, sont présentés ici dans un tableau synoptique afin de faire apparaître :

– d'une part, la cohérence des différents thèmes à un niveau donné ;

– d'autre part, l'évolution d'un thème d'un niveau à l'autre.

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

	Sixième	Cinquième	Quatrième	Troisième
CONFIGURATIONS DE L'ESPACE	◆ **Cube - Pavé droit** • Observation et description • Vocabulaire, propriétés • Construction d'un patron • Réalisation d'un solide • Calcul de volumes, d'aires	❥ **Pyramide *(facultatif)*** ◆ **Prisme droit** ***(dont la base est une des figures planes étudiées en 6° ou 5°)*** • Observation et description • Vocabulaire, propriétés • Construction d'un patron • Réalisation d'un solide • Calcul de volumes, d'aires *(pas de calcul de volume pour la pyramide)*		◆ **Pyramide** • Observation et description • Vocabulaire, propriétés • Pyramide régulière • Construction d'un patron • Réalisation d'un solide • Calcul de volumes, d'aires
	◆ **Cylindre** • Observation et description • Vocabulaire, propriétés • Construction d'un patron • Réalisation d'un solide • Calcul de volumes, d'aires		◆ **La sphère** • Calcul de volumes, d'aires ❥ **Cône de révolution *(facultatif)*** • Observation et description • Vocabulaire, propriétés • Construction d'un patron • Réalisation d'un solide • Calcul d'aires	◆ **Cône de révolution** • Observation et description • Vocabulaire, propriétés • Construction d'un patron • Réalisation d'un solide • Calcul de volumes, d'aires
			◆ **Notions de plans et de droites de l'espace** • Positions relatives (en s'appuyant sur les solides connus) ◆ **Perspective cavalière** • Règles élémentaires de la perspective cavalière • Représentation de solides	◆ **Section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à celui de la base.** • Section • Tronc de cône, de pyramide • Calculs de volumes d'aires Propriétés de réduction

CONFIGURATIONS DU PLAN

Sixième	Cinquième	Quatrième	Troisième
◆ **Droites** • Droites ; points alignés ; demi-droites • Droites sécantes ; droites perpendiculaires • Droites parallèles - définition - propriétés ◆ **Segments** • Segment, support d'un segment • Longueur d'un segment ; mesure de cette longueur • Milieu d'un segment • Médiatrice d'un segment - définition	◆ **Distance de deux points** • Inégalité triangulaire. • Caractérisation du segment • Médiatrice d'un segment - caractérisation - régionnement du plan	◆ **Distance d'un point à une droite** • Définition ◆ **Distance de deux droites parallèles** • Définition • Caractérisation de la bissectrice d'un angle	
◆ **Angle** • Introduction de la notion d'angle • Vocabulaire • Mesure (en degrés) • Angles adjacents • Bissectrice d'un angle	◆ **Angle** • Angles complémentaires, angles supplémentaires • Angles opposés par le sommet • Angles formés par deux droites parallèles et une sécante - alternes-internes - alternes-externes - correspondants	◆ **Angle** • Angle au centre d'un cercle ; arc de cercle intercepté	◆ **Angle inscrit dans un cercle** • Définition, vocabulaire • Propriétés - angle inscrit et angle au centre associés - angles inscrits interceptant le même arc
◆ **Triangle** • Vocabulaire • Triangles particuliers • Droites particulières - hauteur - médiatrice d'un côté - bissectrice d'un angle • Périmètre, aire	◆ **Triangle** • Somme des angles d'un triangle • Caractérisation de triangles particuliers • Droites particulières : - médiatrices - centre du cercle circonscrit	◆ **Triangle** • Droite des milieux : - propriété directe - propriété réciproque • Droites particulières : - bissectrices - centre du cercle inscrit - hauteurs - orthocentre - médianes - centre de gravité • Triangle rectangle - propriété de Pythagore ; (directe et réciproque) - propriété métrique déduite de l'aire	◆ **Trigonométrie dans le triangle rectangle** • Rapports trigonométriques d'un angle aigu (sinus, cosinus, tangente) • Propriétés : - calculs dans le triangle rectangle • Rapports trigonométriques des angles - lecture de table - angles de 30°, 45°, 60°
◆ **Cercle** • Centre, rayon, diamètre, corde • Périmètre du cercle ; aire du disque	◆ **Cercle** • Cercle circonscrit à un triangle rectangle • Régionnement du plan par un cercle : intérieur, extérieur	◆ **Cercle** • Positions relatives d'une droite et d'un cercle • Tangente - définition - tangentes passant par un point	
◆ **Parallélogramme** • Définition • Propriétés : - côtés opposés, - diagonales • Losange, rectangle, carré • Périmètre, aire	◆ **Polygone** • Caractérisation de parallélogrammes particuliers • Trapèze ◆ **Polygone régulier** • Définition • Triangle équilatéral et hexagone • Carré et octogone	◆ **Parallélogramme** • Parallélogramme et égalités vectorielles cf « OUTIL VECTORIEL » ◆ **Polygone régulier** • Triangle équilatéral et hexagone • Carré et octogone • Pentagone	◆ **Polygone régulier**

	Sixième	Cinquième	Quatrième	Troisième
APPLICATIONS DU PLAN	◆ **Figures symétriques par rapport à une droite** • Programme de construction • Droites, segments, angles symétriques par rapport à une droite ◆ **Figures symétriques par rapport à un point** • Programme de construction • Droites, segments, angles symétriques par rapport à un point	◆ **Figures symétriques par rapport à une droite ou un point** • Symétrique, - du milieu d'un segment - de droites perpendiculaires - de droites parallèles • Construction de figures symétriques	◆ **Symétrie orthogonale - Symétrie centrale** • Définition • Propriétés	◆ **Symétrie orthogonale - Symétrie centrale** Images de figures simples par la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles ou perpendiculaires
			◆ **Translation** • Programme de construction • Translation et vecteur • Propriétés - conservation de l'alignement, des distances, des mesures angulaires - image d'une droite • Composée de deux translations	◆ **Translation** • Propriétés de conservation : - du milieu - de l'orthogonalité - du parallélisme
			◆ **Projection** • Programme de construction • Projeté du milieu	◆ **Propriétés de Thalès** • Propriété directe • Propriété réciproque • Cas particulier du triangle
OUTIL VECTORIEL - GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE			◆ **Vecteur** • Notion de vecteur - égalité de vecteurs - représentant d'un vecteur d'origine donnée. • Addition des vecteurs - somme de deux vecteurs - propriété de Chasles - vecteur nul - opposé d'un vecteur - caractérisation vectorielle du milieu	◆ **Multiplication d'un vecteur par un nombre réel** • Produit d'un vecteur par un nombre réel - définition - propriétés • Vecteurs colinéaires - définition - vecteurs directeurs d'une droite
	◆ **Repérage d'un point sur une droite** • *En liaison avec la comparaison des nombres décimaux (arithmétiques) :* demi-droite graduée - origine - unité • *En liaison avec l'introduction des nombres décimaux relatifs :* droite graduée - origine, unité - abscisse d'un point	◆ **Repérage d'un point sur une droite** *En liaison avec la comparaison des nombres décimaux relatifs* ◆ **Repérage d'un point sur un quadrillage** • Vocabulaire : - noeud, maille • Notion de couple	◆ **Repérage** • Sur une droite graduée - repère d'une droite, axe, abscisse • Dans le plan - repère orthogonal, orthonormal - couple de coordonnées d'un point : abscisse, ordonnée	◆ **Coordonnées d'un vecteur** • Définition • Coordonnées : - d'une somme de vecteurs - du produit d'un vecteur par un nombre réel • Condition de colinéarité de deux vecteurs • Calculs dans un repère orthonormal - condition d'orthogonalité - norme d'un vecteur - distance de deux points
				◆ **Équations de droites** • Coordonnées d'un vecteur directeur • Coefficient directeur - coefficient directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. - condition de parallélisme de deux droites - condition d'orthogonalité de deux droites (repère orthonormal)

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

ORGANISATION DES CALCULS – CALCUL NUMÉRIQUE

Sixième	Cinquième	Quatrième	Troisième
◆ **Arithmétique** • Ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels • Multiples, diviseurs • Caractères de divisibilité : - par 10 ; 100 ; 1000... ; - par 2 ; 5 - par 3 ; 9	◆ **Arithmétique** • Division euclidienne • Nombres premiers - Décomposition en produit de facteurs premiers - Application à la recherche de multiples ou de diviseurs • Calcul du PPCM et du PGCD	◆ **Arithmétique** • Utilisation du PPCM et du PGCD	
◆ **Fraction** • Différentes écritures d'une fraction - simplification - écriture fractionnaire d'un nombre décimal • Somme ou différence de deux fractions de même dénominateur • Produit d'un nombre entier naturel par une fraction	◆ **Fraction** • Simplification (fraction irréductible) • Comparaison - comparaison à l'unité - encadrement par deux nombres décimaux de même ordre consécutifs - écriture du type : $\frac{a}{b} = n + \frac{c}{b}$ avec $\frac{c}{b} < 1$ • Somme ou différence de deux fractions de dénominateurs différents • Produit de deux fractions	◆ **Fractions**	
◆ **Nombres décimaux (arithmétiques)** • Opérations - addition - soustraction - multiplication - division • Comparaison • Estimation d'un résultat ◆ **Nombres décimaux relatifs *(facultatif)*** • Introduction : - ensembles $\mathbb{D}$ des nombres décimaux relatifs - ensembles $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs • Somme d'entiers relatifs	◆ **Nombres décimaux relatifs** • Introduction : - ensembles $\mathbb{D}$ des nombres décimaux relatifs - ensembles $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs • Addition - opposé d'un nombre décimal • Soustraction • Comparaison • Multiplication	◆ **Nombres décimaux** • Écriture sous la forme $a.10^n$ $(a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z})$ - Multiplication : $a.10^m \times b.10^n$ ◆ **Nombres rationnels** • Introduction - ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels • Inverse d'un nombre rationnel non nul ; notation : $\frac{1}{a}$ • Division • Encadrement (approximations décimales d'un nombre rationnel positif)	◆ **Nombres réels** • Introduction - ensemble $\mathbb{R}$ des nombres décimaux • Radicaux - définition - propriétés - comparaison - opérations • Comparaison de nombres réels • Intervalles dans $\mathbb{R}$ • Encadrement de : - somme - différence - produit - quotient • Usage de tables numériques
	◆ **Puissances** • Puissance à exposant entier naturel non nul d'un nombre décimal relatif • Calculs simples	◆ **Puissances** • Puissances à exposant entier naturel d'un nombre rationnel non nul • Propriétés	◆ **Puissances** • Puissances à exposant entier relatif d'un nombre réel • Propriété
			◆ **Valeur absolue d'un nombre réel** • Définition • Propriétés immédiates

	Sixième	Cinquième	Quatrième	Troisième
ORGANISATION DES CALCULS CALCUL LITTÉRAL	◆ **Organisation des calculs** • Utilisation des propriétés de l'addition et de la multiplication • Règles de priorité des opérations : utilisation des parenthèses ◆ **Initiation au calcul littéral** *En relation avec les calculs de périmètres, d'aires et de volumes*	◆ **Initiation au calcul littéral**	◆ **Calcul sur les expressions algébriques** • Développement, réduction • Factorisation • Produits remarquables : $(a+b)^2$; $(a-b)^2$; $(a+b)(a-b)$	◆ **Monômes - Polynômes** • Notion de monôme - degré - coefficient • Notion de polynôme - degré - addition - multiplication • Fractions rationnelles - condition d'existence d'une valeur numérique - simplification
		◆ **Notion d'équation** • Équation du type : $a + x = b$ dans $\mathbb{D}$ • Trouver x tel que : $ax = b$	◆ **Équations, Inéquations** • Équations du type : $ax + b = 0$ dans $\mathbb{Q}$ résolution • Inéquations des types : $ax + b < 0$ dans $\mathbb{Q}$ $ax + b > 0$ dans $\mathbb{Q}$ recherche de solutions.	◆ **Équations, Inéquations** • Équations et inéquations du 1[er] degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$ • Équations et systèmes de deux équations du 1[er] degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ • Inéquations et systèmes d'inéquations du 1[er] degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
ORGANISATION DE DONNÉES	◆ **Situations de proportionnalité** • Tableau de proportionnalité • Coefficients de proportionnalité ◆ **Pourcentage - Échelle** • Utilisation - d'un pourcentage - d'une échelle	◆ **Proportionnalité** • Calcul d'un coefficient : - vitesse - masse volumique - débit • Représentation graphique point par point d'un tableau de proportionnalité ◆ **Pourcentage - Échelle** • Calcul : - d'un pourcentage - d'une échelle	◆ **Proportionnalité** ◆ **Notion d'application linéaire**	◆ **Applications linéaires** • Définition • Propriétés de linéarité • Bijection • Sens de variation • Représentation graphique ◆ **Applications affines** • Définition • Sens de variation • Représentation graphique • Exemples d'applications affines par intervalles.
			◆ **Statistiques** • Vocabulaire • Classification de données • Effectifs, fréquence (en %) • Moyenne • Diagrammes - à bandes - à bâtons - circulaires	◆ **Statistiques** • Exemples de regroupement en classes (d'égales amplitudes) • Histogramme

Compléments facultatifs au programme

Homothétie

L'homothétie pourra être introduite en classe de 3[e] après les propriétés de Thalès.
On se limitera à :
- donner la définition (centre, rapport) ;
- mettre en évidence les propriétés élémentaires ;
- construire des figures simples.

Rotation

On pourra faire, en classe de 3[e], une approche expérimentale de la rotation en liaison avec les polygones réguliers. On se limitera à :
- réaliser des programmes de construction ;
- mettre en évidence la conservation de la distance.

2 COMMENTAIRES VALABLES POUR TOUT LE PREMIER CYCLE

Les nouveaux programmes du Premier Cycle, qui sont mis en place progressivement sont en conformité avec les décisions du 4e Séminaire d'Harmonisation des Programmes de Mathématiques dans les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien. Ils tiennent compte tant des progrès de la science (prise en compte des moyens modernes de calcul) que des recherches actuelles en didactique des mathématiques. Ce faisant, ils visent à corriger quelques dysfonctionnements des anciens programmes :

❒ AMÉLIORER LES CONTINUITÉS

Les nouveaux programmes évitent de laisser se perdre des techniques acquises ou en cours d'acquisition :
– soit à l'École Primaire (calcul sur les fractions...)
– soit à un niveau donné du cycle (angles vus en classes de 6e et 3e mais non utilisés en classes de 5e et 4e, espace abordé seulement en 5e...).

❒ ASSURER UNE COHÉRENCE PAR THÈME ET PAR NIVEAU

Voir le tableau synoptique des programmes du premier cycle.

❒ PRÉSENTER UN CONCEPT SEULEMENT LORSQUE LA NÉCESSITÉ DE SON UTILISATION SE FAIT SENTIR

On ne comprend un concept qu'en le faisant fonctionner dans une situation donnée.
Les nouveaux programmes respectent ce principe. On évitera d'être plus ambitieux que les programmes.

❒ PRÉSENTER PLUTÔT DES OUTILS QUE DES OBJETS D'ÉTUDE

D'où la nécessité de :

• **donner du sens aux concepts pour une meilleure appropriation par les élèves d'une notion qui leur semble utile.**

Par exemple, il est anormal que certains élèves confondent des formules de calcul d'aire et de périmètre ; cela dénote qu'ils ne maîtrisent pas la notion pourtant extrêmement simple de périmètre.

• **faire fonctionner ces outils implicitement avant toute formalisation lorsque c'est nécessaire.**

Par exemple, il semble plus important, au lieu de donner une définition des angles sur laquelle les professeurs discuteront sans arriver à se mettre d'accord, d'entraîner les élèves à voir sur des configurations des égalités angulaires par exemple, à justifier ou à en déduire d'autres propriétés, à les utiliser dans des problèmes.

❒ PRATIQUER UN ENSEIGNEMENT EN SPIRALE ET ASSURER UNE PROGRESSIVITÉ DES ACQUIS

Plutôt que de présenter de façon exhaustive une notion en considérant que tout est dit, il vaut mieux au contraire revenir régulièrement dessus en renforçant et en enrichissant les acquis.
Évidemment, revenir à un « niveau n+1 » sur une notion présentée à un « niveau n » ne signifiera pas recommencer une seconde fois la présentation sous l'appellation rappel ou révision. Il s'agira de mettre en œuvre des savoirs et des savoir-faire déjà installés pour s'attaquer à des problèmes non traités au niveau précédent et dégager des propriétés supplémentaires.
Évaluer les savoirs et savoir-faire fondamentaux, s'assurer de leur maîtrise, les entretenir régulièrement, les réinvestir paraît fondamental.

❒ INITIER LE PLUS TÔT POSSIBLE L'ÉLÈVE AU RAISONNEMENT

Certains anciens programmes semblaient inviter les professeurs à attendre la classe de 4e pour commencer l'apprentissage de la démonstration. Cet apprentissage présente de nombreuses difficultés et peu d'élèves maîtrisent ce savoir-faire à l'entrée dans le second Cycle.

Désormais, le professeur saisira toutes les occasions, dès la classe de 6ᵉ, pour faire raisonner les élèves.

Il veillera à la mise en place d'exercices visant à améliorer la capacité des élèves à émettre des conjectures, à argumenter, à justifier leurs réponses et à infirmer des propositions par des contre-exemples...

Il ne saurait être question d'exiger tout de suite un discours formel et rigoureux. Le professeur définira un niveau d'exigence raisonnable pour la classe considérée. Il saura taire des subtilités sans intérêt, pour s'attacher à l'essentiel.

Que l'élève donne du sens à la démonstration, qu'il éprouve le besoin de démontrer, qu'il soit capable d'organiser un raisonnement, est essentiel. La détermination de ce niveau d'exigence sera fonction des outils disponibles et du niveau des élèves.

La rigueur est par définition relative : elle dépend de la personne qui produit la démonstration et du destinataire.

René THOM (Médaille Fields de mathématiques) déclare :

« Si j'avais à choisir entre la rigueur et le sens, je choisirais sans hésiter le sens ».

Ainsi, en classe de 6ᵉ, on ne considérera que les quadrilatères convexes ; on taira donc, à ce niveau, la subtilité liée à la caractérisation d'un parallélogramme par deux côtés opposés parallèles et de même longueur. L'outil vectoriel, introduit ultérieurement, apportera la seule réponse valable à cette subtilité : il ne sert à rien d'affirmer que ce quadrilatère n'est pas croisé puisqu'on ne dispose d'aucun argument (si ce n'est visuel) pour conclure de manière convaincante.

❐ PRENDRE EN COMPTE LE CARACTÈRE D'OUTIL DES MATHÉMATIQUES

– Puiser dans la vie courante des situations où l'on utilise des mathématiques.
– Encourager les échanges interdisciplinaires.

❐ EXPLOITER DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES L' ENVIRONNEMENT SOCIO-CULTUREL DE L'AFRIQUE ET DE L'OCÉAN INDIEN

Toutes les études psychopédagogiques préconisent de sécuriser les jeunes élèves et de favoriser leur épanouissement en proposant des motivations d'activités dans leur environnement immédiat.

L'école ne doit pas couper l'élève de son milieu socio-culturel. Comme le propose le Professeur Paulus GERDES, tout professeur de mathématique se doit de montrer par des activités, que les artisans savent résoudre de façon originale les problèmes mathématiques qui leur sont posés dans la pratique de tous les jours. Ainsi tous les élèves seront fiers de leur culture.

❐ RENDRE L'ÉLÈVE ACTIF

Ce point n'est certainement pas nouveau : il est souligné dans de nombreux programmes. Il est sans aucun doute le plus important. Nous ne citerons pas tous les travaux de spécialistes affirmant que l'élève doit **construire ses savoirs mathématiques**. Il y a semble-t-il consensus sur ce point ; la méthodologie préconisée paraît répondre à une des finalités de l'école : former des personnes autonomes, dotées d'un sens critique et capables d'initiative réfléchie. Encore ne faut-il pas se leurrer sur ce que l'on entend par activités dans la préparation d'une séquence d'apprentissage. Il s'agit d'activités de l'élève, non du professeur. C'est l'élève qui doit dans la mesure du possible, décider d'une stratégie pour résoudre un problème donné.

❐ TRAITER LE PROGRAMME, TOUT LE PROGRAMME

3 COMMENTAIRES GÉNÉRAUX POUR LA CLASSE DE TROISIÈME

Les commentaires généraux valables pour tout le Premier Cycle prennent bien sûr, comme en 6e, 5e et 4e toute leur valeur en classe de 3e. Il s'agira de les mettre en application en tenant compte du fait que les élèves sont depuis trois ans dans le premier cycle de l'enseignement secondaire et qu'en conséquence ils ont déjà acquis des méthodes de travail et des comportements propres à ce cycle.

Le programme de Troisième est surtout conçu pour l'apprentissage de connaissances nouvelles, tout en s'appuyant fortement sur les connaissances acquises en 6e, 5e et 4e, et aussi pour le réinvestissement de ces connaissances.

L'enseignement en 3e reste bien entendu centré sur l'élève. Celui-ci est mis en activité tout au long des séquences d'apprentissage :

Il construit des figures, il argumente, il justifie, il démontre.

Il s'agira donc pour le professeur de mener sa classe de façon à :

• **consolider les savoirs et savoir-faire acquis en classes de 6e, 5e et 4e en les réinvestissant immédiatement dans des exercices ;**

(pour éviter les déperditions de connaissances, sans pour autant perdre de temps dans la progression du programme sur ces connaissances normalement acquises en 6e, 5e et 4e)

• **enrichir ces connaissances de façon à assurer la progressivité de leur acquisition ;**

• **utiliser ces nouveaux acquis dans des situations variées au travers de la résolution d'exercices qui donnent du sens à ces nouvelles connaissances en tenant compte dans la mesure du possible de l'environnement socio-culturel proche de l'élève.**

Le professeur entraînera les élèves à travailler sur différents types d'exercices : les exercices du cours et les exercices de fin de chapitre (exercices d'entraînement, d'approfondissement, de recherche).

Types d'exercices	Objectifs
Exercices d'application directe On les trouve dans le Manuel – partie cours – partie exercices d'entraînement	*Faire fonctionner directement les définitions et les propriétés*
Exercices de consolidation des acquis On les trouve dans le Manuel parmi les exercices d'approfondissement	*Faire fonctionner les définitions et les propriétés dans des situations plus complexes*
Exercices de recherche On les trouve dans : – le Manuel parmi les exercices de recherche – le Livret d'Activités dans la rubrique « Problèmes »	*Faire découvrir par les élèves une méthode pour résoudre un problème complexe. Le professeur organisera la recherche de cette méthode en faisant travailler, de préférence, les élèves en groupes.*

• Certains exercices de recherche pourront être décomposés et présentés, à l'initiative du professeur en plusieurs exercices liés : la résolution des premiers facilitant celle des suivants.

Si un exercice de recherche est présenté sous forme d'une chaîne d'exercices liés, il devra faire l'objet d'un travail individuel de la part des élèves. S'il n'est pas décomposé, il est souhaitable de le traiter en groupes.

Parmi les exercices de recherche, nous appellerons « problèmes ouverts » ceux dont la solution n'est pas connue de la communauté des élèves. Ce sont des problèmes présentés par un énoncé court où n'apparaît, ni méthode de résolution, ni solution et qui se situent dans un domaine conceptuel familier de l'élève.

Pour résoudre de tels problèmes, on utilise une véritable démarche scientifique :

Faire des essais – conjecturer – tester – prouver.

C'est une approche inductive. L'organisation « d'un problème ouvert » étant lourde à gérer, on pourra néanmoins en proposer environ un par trimestre aux élèves pour bénéficier de la richesse de cette activité.

• **En activité géométrique**

Dans les classes précédentes, l'accent était plus particulièrement mis sur la compréhension de l'énoncé et sur l'acquisition de méthodes de recherche d'une démarche, plus spécifiquement pendant les séquences de résolution d'exercices et de problèmes (voir rubrique « Exercice commenté » en classe de 5ᵉ et 4ᵉ).

En classe de Troisième cet objectif sera poursuivi et complété par un apprentissage progressif de la rédaction (voir rubrique « Préparation aux examens »).

• **En activités numériques**, l'élève devra :

– avoir des réflexes d'auto-contrôle ;

– choisir une écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale, pour l'utilisation souhaitée ;

– choisir une démarche performante pour effectuer un calcul numérique ;

– adopter une démarche expérimentale pour de nombreux exercices :

effectuer plusieurs essais
émettre une conjecture
confirmer cette conjecture ou l'infirmer.

Pour confirmer une conjecture, il faut la justifier.

Pour infirmer une conjecture, il suffit de la prendre en défaut en exhibant un contre-exemple.

On insistera particulièrement sur le fait que les élèves ont la fâcheuse tendance à confirmer une conjecture par un seul exemple (parfois deux ou trois).

Le manuel de 3ᵉ est constitué, comme ceux de 6ᵉ, 5ᵉ et 4ᵉ, de deux parties : les Activités Géométriques et les Activités Numériques.

	Activités géométriques	**Activités numériques**	
Configurations du plan	Ch 1 : Propriété de Thalès Ch 2 : Triangle rectangle Trigonométrie Ch 6 : Angles inscrits	Ch 11 : Racines carrées Ch 12 : Calcul numérique	*Calcul numérique*
Calcul vectoriel et Géométrie analytique	Ch 3 : Vecteurs Ch 4 : Coordonées d'un vecteur Ch 5 : Équations de droite	Ch 10 : Calcul littéral Ch 13 : Équations, inéquations dans $\mathbb{R}$ Ch 14 : Équations, inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	*Calcul littéral*
Applications du plan	Ch 7 : Symétries et translation Ch 8 : Rotation et Homothétie	Ch 15 : Applications affines Ch 16 : Statistiques	*Organisation des données*
Configurations de l'espace	Ch 9 : Pyramides et Cônes		

A. ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

La géométrie restant un domaine privilégié pour mettre les élèves en activité et leur apprendre à argumenter, les activités géométriques occupent encore en 3e une place importante dans les programmes et s'articulent autour de quatre grands axes.

1. Les grands axes en activités géométriques

❒ CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

Dans le premier cycle, l'étude de l'espace se fait suivant des différents niveaux d'apprentissage.

	6e	5e	4e	3e
NIVEAU 1 • Décrire un solide avec le vocabulaire propre aux configurations de l'espace	• pavés droits • cylindre	• primes droits • pyramide *(facultatif)*	• cône de révolution *(facultatif)* • sphère	• pyramides régulières • cône de révolution
• Construire un patron et réaliser le solide	• pavés droits • cylindre	• primes droits • pyramide *(facultatif)*	• cône de révolution *(facultatif)*	• pyramides régulières • cône de révolution
• Calculer les aires et les volumes (sans détermination de hauteur)	• pavés droits • cylindre	• primes droits	• sphère	• pyramides régulières • cône de révolution
NIVEAU 2 • Représentation en perspective			– tous les solides étudiés	– tous les solides étudiés
• Reconnaître les positions relatives de plans, de droites, en utilisant les définitions et les propriétés			– en prenant appui sur les solides étudiés	– en prenant appui sur les solides étudiés
NIVEAU 3 • Extraire d'une configuration de l'espace, des configurations du plan et les dessiner en dimensions réelles ou à une échelle donnée			– initiation en exercices dans des cas très simples	– détermination de la hauteur d'une pyramide régulière et d'un cône de révolution – calcul de leur volume
• Section d'un solide par un plan				– section d'une pyramide régulière et d'un cône de révolution par un plan parallèle à celui de leur base

❒ CONFIGURATIONS DU PLAN

Les séquences d'apprentissage utilisant les configurations du plan devront toujours être pour l'élève l'occasion de conforter et d'enrichir les connaissances acquises dans les classes précédentes.

La propriété de Pythagore est revue et utilisée de manière plus performante en classe de 3ᵉ avec l'introduction de la notion de racine carrée d'un nombre.

Les configurations du plan seront considérées comme définitivement acquises à la fin de la classe de 3ᵉ et seront très utiles pour les classes supérieures.

❒ APPLICATIONS DU PLAN DANS LE PLAN

Tout en continuant de privilégier l'aspect « outil » des configurations du plan en 4ᵉ, on a mis en place des images mentales les plus riches possibles de façon à provoquer des associations immédiates d'idées, des réflexes à la lecture d'énoncés de problèmes ou à l'observation de dessins.

L'utilisation des symétries pour démontrer et résoudre des problèmes de construction a été amorcée en classe de quatrième, dans des cas très simples. Cette activité poursuivie en classe de Troisième est une bonne préparation de la classe de 2ᵈᵉ S.

Pour les applications du plan dans le plan, comme les principaux thèmes introductifs, la continuité et la progressivité sont assurés tout en respectant les différents niveaux d'apprentissage.

	6ᵉ	5ᵉ	4ᵉ	3ᵉ
NIVEAU 1 • Reconnaître • Construire l'image d'un point, d'une figure, par : – un programme de construction – des définitions – des propriétés	• figures symétriques par rapport à un point, à une droite	• figures symétriques par rapport à un point, à une droite	• symétrie centrale • symétrie orthogonale • translation • projection	• symétrie centrale • symétrie orthogonale • translation • projection
NIVEAU 2 • Utiliser les propriétés pour : – démontrer			• symétrie centrale • symétrie orthogonale	• symétrie centrale • symétrie orthogonale • translation
– résoudre un problème de construction			• symétrie centrale • symétrie orthogonale	• symétrie centrale • symétrie orthogonale • translation
– trouver un lieu géométrique				
NIVEAU 3 • Composer des transformations pour construire l'image d'une figure				• composé de : – deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires ou parallèles – de translations
NIVEAU 4 • Utiliser la composition des transformations pour résoudre un problème de géométrie				

❒ OUTIL VECTORIEL ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

L'outil vectoriel abordé en classe de Quatrième, introduit la géométrie analytique par les coordonnées d'un vecteur.

2. Faire des activités géométriques dans le 1er cycle

Domaine	Niveau	Activité	Objet		Finalité
ESPACE	6^e	Observer Décrire	des solides	*en utilisant :* • un vocabulaire	*permet :* • une meilleure appropriation de l'espace
	6^e	Construire	un patron de solide	*en utilisant :* • des définitions • des propriétés • des règles • des instruments de dessin	
	6^e	Réaliser	un solide		
	4^e	Interpréter Construire	une représentation en perspective		
ÉTUDE EXPÉRIMENTALE	6^e	Mesurer Reporter Comparer	des segments des angles	*en utilisant :* • des instruments de dessin	*permet :* • la découverte de notions et de propriétés • la réalisation d'une démarche scientifique • la résolution de problèmes pratiques
	6^e	Vérifier	une propriété un résultat		
	6^e 5^e	Calculer	un périmètre une aire un volume une mesure de segment une mesure d'angle	*en utilisant :* • des définitions • des propriétés • des formules	
APPRENTISSAGE DE LA DÉMONSTRATION	6^e	Observer Lire Coder	une figure	*en utilisant :* • des codages • des informations	*permet :* • l'initiation au raisonnement • l'apprentissage de la démonstration
	6^e	Reconnaître	une configuration de base	*en utilisant :* • des présentations des codages du vocabulaire • des définitions • des propriétés caractéristiques	
	6^e	Construire	une figure	*en utilisant :* • des définitions • des propriétés • des instruments de dessin	
	6^e	Expliquer	un résultat une méthode	*en utilisant :* • une argumentation	
	6^e	Justifier	une propriété un résultat une méthode	*en utilisant :* • des définitions • des propriétés	
	4^e	Démontrer	une propriété un résultat		

3. Activités, définitions, propriétés

L'une des difficultés majeures pour les élèves à tous les niveaux est d'arriver à produire une démonstration.

Le passage d'un énoncé en français à sa traduction en langage mathématique en est une étape indispensable. La maîtrise de cette étape permet de dégager les données et les conclusions d'un énoncé de problème.

L'utilisation de dessins codés et d'organigrammes de raisonnement aideront à cet apprentissage.

La présentation d'un objet géométrique obéit aux préoccupations pédagogiques suivantes :

– faire fonctionner des outils implicitement, lorsque la formalisation de leur présentation est complexe ;

– susciter une représentation mentale de l'objet ;

– faciliter son utilisation (ce point est la principale préoccupation de la formulation d'une définition ou d'une propriété) ;

– savoir faire fonctionner les propriétés qui traduisent une équivalence.

❒ ACTIVITÉS

On peut répertorier cinq types d'activités, chacun d'eux étant déterminé par l'objectif visé :

- **la motivation à l'introduction d'une notion** (présentation, vocabulaire, définition) ;
- **la découverte d'une propriété par des manipulations** ; ce type d'activités montre l'importance d'une étude expérimentale, pouvant être basée sur une véritable démarche scientifique (faire des essais - conjecturer - tester - prouver) ;
- **la préparation d'une démonstration** afin de faciliter la compréhension de la démarche, soit par des activités préparatoires, soit en isolant chaque difficulté ;
- **la démonstration complète** d'une propriété, qui fournit un modèle que l'élève peut analyser, ou **la démonstration guidée**, qui permet à l'élève de porter son attention sur la stratégie décrite en même temps qu'il complète cette démonstration ;
- **l'application d'une définition ou d'une propriété.**

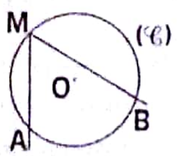
Afin que les activités permettent à l'élève une initiation au raisonnement et un apprentissage de la démonstration, il est nécessaire que ces activités l'incitent à prendre des initiatives et à se familiariser à des méthodes de recherche. Une activité doit donc en général :

- **décrire une situation ou un objet mathématique,**
- **poser le problème à résoudre,**
- **aider éventuellement à la résolution de ce problème,**
- **laisser la possibilité de dégager un bilan.**

❒ PRÉSENTATION PAR UNE FIGURE ACCOMPAGNÉE DE VOCABULAIRE

Cette présentation, fréquemment employée en 6^{e} pour des notions simples telles que droite, segment, triangle, quadrilatère…, doit permettre de reconnaître une configuration et de l'utiliser. Elle est de moins en moins utilisée au fur et à mesure que l'on peut procéder à des démonstrations.

Exemple : présentation d'un angle inscrit dans un cercle (Manuel p. 74)



(𝒞) est un cercle de centre O.

A, B et M sont trois points du cercle (𝒞).

L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé **angle inscrit** dans le cercle (𝒞).

❒ DÉFINITION EXPLICITE

Cette définition doit être opératoire, c'est-à-dire qu'on peut l'utiliser directement pour construire des figures ou justifier des propriétés de figure. Sa formulation met en évidence deux parties afin de faciliter son utilisation dans un raisonnement déductif :

• **la description d'une situation** qui permet de reconnaître l'objet et qui correspond aux données dans un organigramme d'utilisation de cette définition.
• **la désignation de l'objet** qui correspond aux conclusions dans un tel organigramme.

Exemple : définition de la tangente d'un angle aigu (Manuel p. 27). Voir à la page 27.

❒ PROPRIÉTÉS

• Les remarques concernant les définitions explicites s'appliquent aux propriétés. Elles sont le plus souvent associées à :
– une figure codée qui illustre cette propriété ;
– une traduction mathématique (sous forme d'organigramme) qui explique l'utilisation de cette propriété.

• La plupart des propriétés sont introduites par des activités.
L'élève est alors amené à découvrir et à vérifier cette propriété. Lorsque la propriété n'est pas justifiée, il est explicitement mentionné :

« On admet la propriété suivante ».

Exemple : propriétés du produit d'un vecteur par un nombre, introduites par une activité (Manuel p. 40).

A, B, C et D sont quatre points du plan. On veut comparer $3\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{CD}$ et $3\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

Pour cela, place deux points du plan : M, P.

Construis le point N tel que : $\overrightarrow{MN} = 3\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{CD}$.

Construis le point Q tel que : $\overrightarrow{PQ} = 3\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

Vérifie, à l'aide de tes instruments, que : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$

On admet les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉS

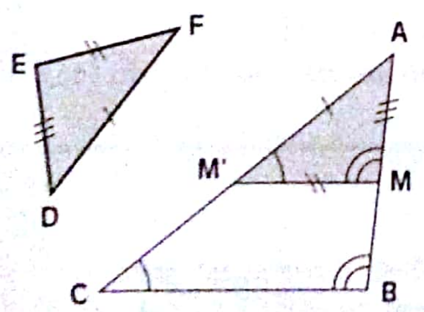
A, B, C et D sont des points du plan. k et h sont des nombres réels. On a :

$$k\,(h\,\overrightarrow{AB}) = (k\,h)\,\overrightarrow{AB} \qquad k\,\overrightarrow{AB} + k\,\overrightarrow{CD} = k\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$$

$$k\,\overrightarrow{AB} + h\,\overrightarrow{AB} = (k + h)\,\overrightarrow{AB} \qquad 1\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

• Lorsque cela est possible, la démonstration de la propriété est demandée à l'élève dans une activité. C'est en général une démonstration guidée.

Exemple : présentation dans une activité, des triangles semblables suivie d'une démonstration guidée de ses propriétés (Manuel p. 14).



ABC est un triangle. M est un point de [AB] et M' le point de [AC] tel que (MM') soit parallèle à (BC).

On dit que ABC et AMM' sont des **triangles semblabes**.

On sait que : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AM'}{AC} = \dfrac{MM'}{BC}$

$$\text{mes } \widehat{M'} = \text{mes } \widehat{C} \text{ et mes } \widehat{M} = \text{mes } \widehat{B}$$

Les triangles DEF et AMM' sont superposables.
On dit que ABC et DEF sont des **triangles semblables**.

- Parmi les angles des triangles ABC et DEF, cite ceux qui ont la même mesure.
- À l'aide des distances AB, BC, AC, DE, EF et DF, écris trois quotients égaux.

On dit que : A et D sont des **sommets homologues**,
$\widehat{A}$ et $\widehat{D}$ sont des **angles homologues**,
[AB] et [DE] sont des **côtés homologues**.

Pour retrouver aisément tous les éléments homologues de ces deux triangles semblables, on peut utiliser la disposition pratique ci-contre :

$$\frac{A\ B\ C}{D\ E\ F}$$

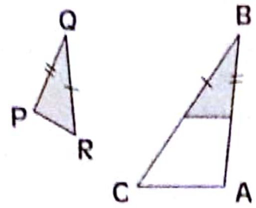
PROPRIÉTÉS

• Si deux triangles sont semblables, alors leurs côtés sont deux à deux proportionnels.

• Si deux triangles sont semblables, alors leurs angles sont deux à deux de même mesure.

ABC et PQR sont semblables

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA}$$

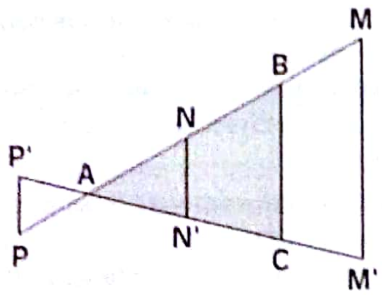


ABC et PQR sont semblables

mes $\widehat{P}$ = mes $\widehat{A}$
mes $\widehat{Q}$ = mes $\widehat{B}$
mes $\widehat{R}$ = mes $\widehat{C}$

- L'énoncé d'une propriété peut être associé à une démonstration complète (ou guidée) dont la rédaction peut servir de modèle à l'élève..

Exemple : propriété de Thalès, introduite par une activité, suivie d'une démonstration complète (Manuel p. 8).



ABC est un triangle. M, N, P sont des points de (AB). M', N', P' sont les points de (AC), tels que les droites (MM'), (NN') et (P'P) soient parallèles à (BC).

- À l'aide de ta règle graduée, détermine les distances : AB, AM, AN, AP, AC, AM', AN' et AP'.
- Calcule les quotients suivants et compare les : $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AM'}{AC}$; $\frac{AP}{AB}$ et $\frac{AP'}{AC}$; $\frac{AN}{AB}$ et $\frac{AN'}{AC}$.

Il semble que pour toute position de M sur (AB) et de M' sur (AC) telle que (MM') soit parallèle à (BC), on ait : $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$.

Démonstration

ABC est un triangle. M est un point de (AB) et M' le point de (AC) tel que : (MM') // (BC).

Démontrons que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$.

4. Les constructions géométriques

- On réserve en général le verbe **construire** à la réalisation d'une figure mettant en action une méthode plus ou moins élaborée suivant le stade de l'apprentissage. Ainsi, on dira : « tracer un triangle quelconque », mais, « construire un triangle de côtés 3 cm, 4 cm et 6 cm ».

Reproduire une figure, c'est réaliser une autre figure qui lui est superposable ; quant au verbe **dessiner**, on lui attribue un sens large.

Après avoir utilisé, en classe de 6ᵉ, des définitions pour construire des configurations de base, permettant ainsi à l'élève de se familiariser avec le concept utilisé, on favorisera, en 5ᵉ, 4ᵉ et 3ᵉ la recherche de méthodes de construction « économiques » ou performantes, ce qui permet de poursuivre l'initiation au raisonnement par la construction géométrique.

Le dessin à main levée revêt une très grande importance dans les activités géométriques.
En effet, cette pratique s'est poursuivie en classe de 5ᵉ car, comme en classe de 6ᵉ :
– d'une part, elle permet de développer l'habileté manuelle de l'élève ;
– d'autre part, elle lui laisse une plus grande autonomie vis à vis des instruments dont il ne maîtrise pas toujours l'utilisation et peut permettre une meilleure compréhension du concept représenté par la configuration tracée .

L'esquisse d'une figure est un dessin approximatif qui peut être tracé à main levée. Elle précède la construction d'une figure avec les instruments.

• Ainsi, « construire » une figure, c'est :

a) Tracer des configurations de base
– à l'aide d'instruments (en suivant une technique de construction) ;
– à main levée.

b) Réaliser la construction d'une figure
– décrite dans l'énoncé d'un exercice (cette figure étant le support d'un raisonnement, il est souhaitable de la coder par les données de l'exercice) ;
– obtenue par un programme de construction (cette activité favorise la compréhension d'un texte mathématique et la bonne exécution de consignes).

c) Résoudre un problème de construction de figure
– en expliquant la méthode utilisée après avoir réalisé la construction ;
– en recherchant une méthode pour réaliser cette construction.

5. L'apprentissage de la démonstration

Dès la classe de 6ᵉ, les Activités Géométriques ont permis une véritable initiation au raisonnement par des exercices de construction, par la justification de propriétés de figures...
Cependant, il est essentiel que cette initiation au raisonnement se fasse par des exercices gradués de difficultés très progressives. Selon les cas, l'élève pourra travailler individuellement ou par groupe. Le mode d'intervention du professeur dépendra de l'objectif visé.

• En classe de 6ᵉ, l'option choisie était de ne mettre en œuvre que des raisonnements à un seul pas déductif pour justifier.
En classe de 5ᵉ, la rubrique « Exercice commenté » a permis à l'élève de poursuivre cette initiation.
En classe de 4ᵉ et 3ᵉ, un apprentissage de la démonstration doit se faire par la résolution de problèmes.

On pourra alors suivre les étapes suivantes :

Lecture de l'énoncé	Recherche d'une démarche	Rédaction de cette solution
• Mise en évidence – des données, – de la conclusion. • Traduction de l'énoncé par une esquisse codée.	• Réalisation à l'aide des instruments, de la figure codée par les données. • Recherche des conséquences immédiates des données. • Recherche de pistes conduisant à la conclusion. • Sélection d'une définition ou d'une propriété pour justifier chaque étape du raisonnement.	• Réalisation de la figure codée à l'aide des instruments. • Mise en évidence des différentes étapes à justifier (utilisation possible d'organigrammes de déduction). • Rédaction en français de la solution trouvée.

• En 6^e et 5^e, les problèmes de construction ont largement contribué à l'initiation au raisonnement. On poursuivra cet effort en 4^e et 3^e en apprenant progressivement à l'élève à suivre, lorsque cela est nécessaire, les étapes ci-dessous :

Lecture de l'énoncé	Recherche d'une méthode de construction	Rédaction de cette solution
• Mise en évidence – des données, – des contraintes, – de l'objectif, – des instruments imposés.	• Faire une esquisse de la figure que l'on doit réaliser. • Analyser cette esquisse afin de dégager une méthode de construction.	• Réaliser la construction. • Expliquer la méthode utilisée pour cette construction. • S'assurer que la figure obtenue vérifie toutes les données et contraintes du problème.

• En classe de 3^e, la rubrique « Préparation aux examens » prolonge les « Exercices commentés » des classes de 5^e et 4^e en mettant l'accent sur la rédaction de la solution.

6. Quelques expressions utilisées

• En classes de 6^e et de 5^e, on emploie le terme « **Justifie que** » au sens de « **Démontre que** », c'est-à-dire que l'on attend de l'élève qu'il apporte une preuve à chaque pas de son raisonnement déductif, sous forme d'une définition, d'une propriété, d'une remarque, d'une formule, d'une règle, ou d'un mot de vocabulaire.
L'emploi de « Justifie que » a été préféré à « Démontre que » dans les classes de 6^e et 5^e mais dès la classe de 4^e, on emploiera systématiquement le terme « Démontre que » dès que le raisonnement nécessite plus d'un pas de démonstration.

• Le terme « **Donnée** » continue d'être employé en lieu et place du terme « Hypothèse » qui peut prêter à équivoque, car dans le langage courant « Hypothèse » est un fait qui n'est pas certain (faire une hypothèse, c'est émettre une conjecture qui peut se révéler vraie ou bien fausse), alors qu'une donnée est un fait certain.

• Le terme « **Explique pourquoi** » est employé lorsque l'on ne peut apporter une justification parce que l'on n'a pas les outils nécessaires pour le faire, mais son emploi veut dire néanmoins que l'on attend que l'élève argumente de façon à conclure, même si cette conclusion n'est pas rigoureusement étayée.

• On emploie en activité géométrique « **Vérifie que** » lorsque l'on veut se convaincre d'un résultat en utilisant, non pas des définitions, propriétés... mais par exemple des instruments (mesurer des segments, des distances, des angles ; contrôler le parallélisme de droites ou contrôler que deux droites sont perpendiculaires...).
Attention, cette vérification peut toutefois devenir une preuve lorsqu'elle est exhaustive (démonstration par épuisement des cas).
La vérification peut aussi conduire à contrario à une preuve dans le cas où on exhibe un contre-exemple qui permet d'infirmer une conjecture.
L'utilisation des termes « Explique pourquoi » et « Vérifie que » sera de moins en moins fréquent de la 6^e à la 3^e au fur et à mesure que les outils nécessaires pour démontrer seront mis en place.

• Dans la partie Cours du manuel est fréquemment utilisée la phrase « ***On admet la propriété suivante*** » ; ceci veut dire que :
– soit, on n'a pas les outils nécessaires pour la justifier (démontrer) ;
– soit, on ne veut pas la justifier (bien qu'en en ayant les moyens) pour des raisons diverses (évidence, démonstration trop longue, sans intérêt ou peu riche...).
On l'utilise souvent après une activité qui amène à une vérification et non à une justification.
Le professeur ne manquera pas de faire remarquer aux élèves toute l'importance de cette phrase qui précède une propriété qui n'a pas été justifiée.

• Les expressions « **signifie que** » et « **équivaut à** » ont le même sens pour l'élève du 1^{er} cycle. Toutefois « signifie que » est réservée à une définition ou à un mot de vocabulaire, alors que « équivaut à » est exclusivement employée dans une propriété et apparaît pour la 1^{re} fois au niveau de la classe de 4^e (Chapitre 5 : Translation et vecteurs) et indique sans équivoque que la propriété énoncée comprend une propriété directe et sa réciproque.

7. Configurations de base – configurations remarquables

Acquérir des connaissances et résoudre des problèmes sont des activités qui se complètent mutuellement et qui permettent à l'élève de maîtriser à la fois les savoirs et les savoir-faire.

En ce qui concerne les activités géométriques, les supports visuels ont une part très importante dans cet apprentissage. Aussi le professeur incitera l'élève à se constituer de manière évolutive,

1 un fichier sur les définitions et les propriétés, illustrées par des configurations de base

Exemple : révisions – p. 121 et 122 – Manuel de 3e.

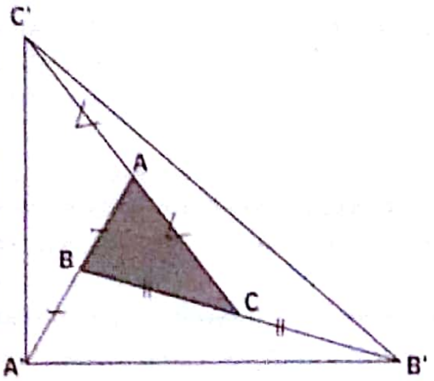
2 un inventaire des principales configurations remarquables extraites des résolutions de problèmes

Ces configurations seront analysées par l'élève avec l'aide du professeur. Il pourra en extraire des configurations de base, élargir le problème posé ou reformuler d'autres problèmes en modifiant le couple (données ; conclusions).

L'élève pourra alors compléter et enrichir ses configurations de base par des configurations remarquables. Cette pratique lui permettra d'acquérir progressivement une imagination créatrice et dynamique, nécessaire à la recherche d'une démarche, dans la résolution d'un problème de géométrie.

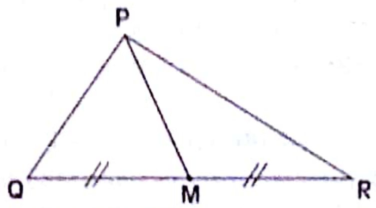
Exemple 1 : un exercice utilisant une propriété d'une médiane d'un triangle – n° 15 p. 126 – Manuel de 5e.

Configuration remarquable



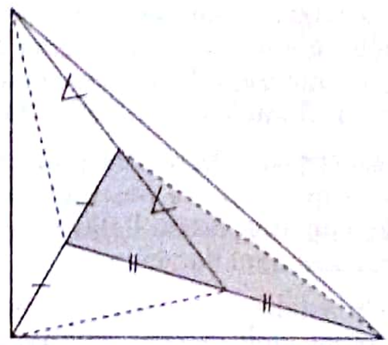
On veut démontrer que :
aire (A'B'C') = 7 × aire (ABC).

Configuration de base



On sait que :
aire (PMQ) = aire (PMR).

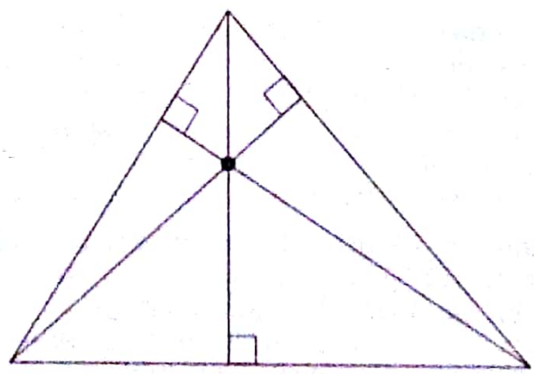
Résolution du problème



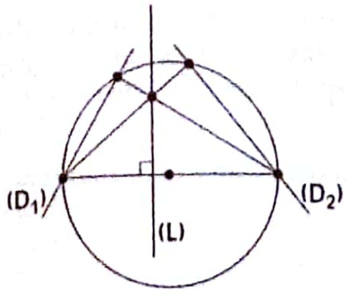
Dans cette configuration remarquable, on extrait des configurations de base.

Exemple 2 : différentes présentation d'un même thème (l'orthocentre d'un triangle).

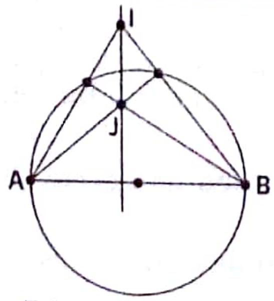
Configuration de base



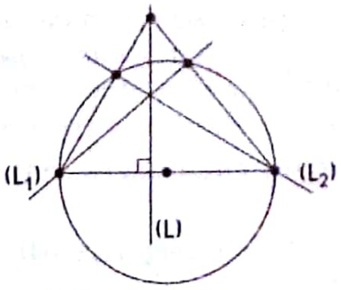
Configurations remarquables



Démontrer que :
(D_1), (D_2) et (L)
sont concourantes



Démontrer que :
$(IJ) \perp (AB)$

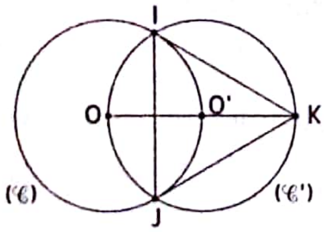


Démontrer que :
(L_1), (L_2) et (L)
sont concourantes

3 des méthodes simples de recherche d'une démarche dans la résolution des problèmes

Exemple : exercice n° 16 p. 16 – Manuel de 4e.

LECTURE DE L'ÉNONCÉ

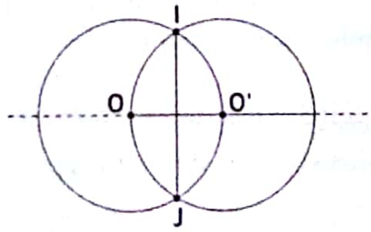


Données
(𝒞) cercle de centre O, de rayon OO'
(𝒞') cercle de centre O', de rayon OO'
(𝒞) et (𝒞') se coupent en I et J
K symétrique de O par rapport à O'

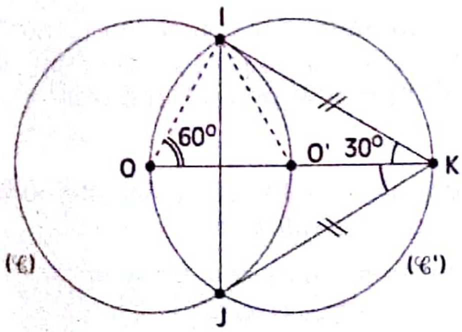
Conclusion
IJK est un triangle équilatéral

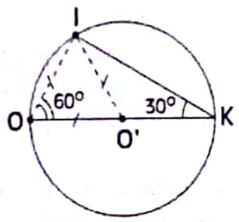
RECHERCHE D'UNE DÉMARCHE

- Marquer sur la figure les données en couleur (ou en gras). Tracer au crayon les constructions auxiliaires et les codages des conséquences immédiates des données (elles seront justifiées dans la rédaction).
- Si cela est nécessaire, faire plusieurs figures (on pourra extraire des configurations de base).



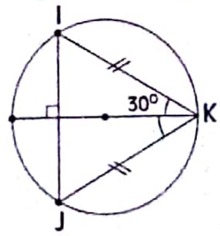
(OO') est la médiatrice de [IJ]





OO'I est un triangle équilatéral

OIK est un triangle rectangle en I ayant un angle de 30° (de 60°)



IJK est un triangle isocèle ayant un angle de 60°

RÉDACTION DE LA SOLUTION

Ordonner les étapes de la démonstration et justifier chacune de ces étapes à l'aide de la définition ou des propriétés.

B. ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

Si la géométrie reste un domaine privilégié pour mettre les élèves en activité et leur apprendre à argumenter, il n'en demeure pas moins vrai qu'il ne faut pas réduire les activités numériques à une simple manipulation des nombres et à l'acquisition de techniques opératoires, bien que celles-ci soient très importantes.

Les activités numériques sont aussi l'occasion de développer les facultés de raisonnement de l'élève.

Les activités numériques s'articulent autour de trois grands axes.

1. Les grands axes en activités numériques

❒ ORGANISATION DES CALCULS - CALCUL NUMÉRIQUE

Comme dans les classes précédentes, les notions sur les nombres présentées en 3ᵉ sont des outils et non des objets d'étude pour eux-mêmes.

L'étude mathématique des ensembles structurés de nombres n'est pas du domaine de l'enseignement de base ; elle se fera plus tard.

Il s'agit toujours d'enrichir la notion de nombre en faisant manipuler intuitivement des propriétés qui apparaissent naturellement au fur et à mesure que de nouveaux problèmes se posent et qui sont pleinement utilisées en 4ᵉ et en 3ᵉ dans le calcul littéral.

L'introduction des racines carrées se fait de manière naturelle par la résolution d'un problème géométrique.

❒ ORGANISATION DES CALCULS - CALCUL LITTÉRAL

L'entraînement au calcul littéral se fait effectivement à partir de la 4ᵉ, elle est poursuivie en 3ᵉ et aboutit à l'introduction des polynômes et des fractions rationnelles.

❒ ORGANISATION DE DONNÉES

En classe de 4ᵉ s'est faite l'introduction à la Statistique et à son vocabulaire de base par l'intermédiaire de l'étude pratique d'une collecte d'informations que l'on :

- organise (tableau des effectifs et tableau des fréquences) ;
- traite (calcul de la moyenne) ;
- représente (diagramme semi-ciculaire, à bandes, en bâtons).

En classe de 3ᵉ on aborde des exemples simples de regroupement en classe.

La notion d'équation a été abordée en classe de 5ᵉ. En classe de 4ᵉ, la résolution complète des principaux types d'équations du premier degré à une inconnue a été faite. Par contre, on n'aborde à ce niveau que la notion d'inéquations, les transformations sur les inéquations et la recherche de quelques solutions. En classe de 3ᵉ l'introduction de la notion d'intervalle permet une résolution complète des inéquations du 1ᵉʳ degré à une inconnue.

Les problèmes de dénombrement, déjà abordés en 6ᵉ, 5ᵉ et 4ᵉ permettent d'utiliser des méthodes de dénombrement : le comptage direct, l'arbre de choix, le diagramme, le tableau…

Les problèmes de dénombrement étant toujours au stade de l'initiation, on évitera toute étude systématique.

2. Faire des activités numériques dans le 1er cycle

Domaine	Classe	Verbe	Objet		
CALCUL NUMÉRIQUE	6e	Comparer	des nombres	*en utilisant :* • des définitions • des propriétés • des règles • des techniques	*permet :* • la mise en place des nombres • la maîtrise des techniques opératoires
	6e	Transformer	l'écriture d'un nombre		
	6e	Calculer	une somme, une différence, un produit, une puissance, un quotient		
	6e	Utiliser	un schéma de calcul, une calculatrice		
	6e	Estimer	une somme, un produit		
	6e	Organiser	un calcul		
	6e	Contrôler	un résultat		
CALCUL LITTÉRAL	4e	Traduire	une situation	*en utilisant :* • des informations	*permet :* • la mise en place des équations, des inéquations et de leur résolution
	4e	Transformer	une équation, une inéquation	*en utilisant :* • des définitions • des propriétés • des règles	
	4e	Vérifier	une égalité, une inégalité, un résultat		
	4e 3e	Résoudre	une équation, une inéquation		
	4e	Exprimer	en fonction de ...	*en utilisant :* • des informations	*permet :* • la mise en place de la notion d'application et de son utilisation
ORGANISATION DES DONNÉES	6e 5e	Utiliser Calculer	un coefficient de proportionnalité	*en utilisant :* • des définitions • des propriétés • des règles	
	4e	Observer Lire Construire	un tableau, un graphique		
	4e	Organiser Traiter	des données	*en utilisant :* • des tableaux • des diagrammes	*permet :* • la mise en place de l'outil statistique
APPRENTISSAGE DE LA DÉMONSTRATION	6e	Expliquer	un résultat, une méthode	*en utilisant :* • une argumentation	*permet :* • l'initiation au raisonnement et l'apprentissage de la démonstration
	6e	Justifier	un résultat, une méthode	*en utilisant :* • des définitions • des propriétés • des règles	
	4e	Démontrer	un résultat		
	6e	Dénombrer	des objets	*en utilisant :* • un comptage direct • un tableau • un arbre de choix • un diagramme	

3. Les définitions, les règles et les propriétés

Le même point de vue qu'en ***Activités Géométriques*** dicte la présentation des définitions, des règles et des propriétés. Le but est de les faire fonctionner pour que l'élève se les approprie le plus rapidement possible de manière performante à travers des exercices simples, puis des problèmes qui leur donnent du sens.

Dans certains cas, une représentation graphique, un schéma de calcul, un diagramme, une figure géométrique seront d'une grande utilité pour l'appropriation d'une notion ; il n'y a donc pas lieu de se priver d'un support visuel, en précisant toutefois qu'il ne tient pas lieu d'une démonstration.

4. L'utilisation de la calculatrice

La calculatrice est sans doute encore un accessoire dont le prix peut paraître trop élevé à des familles. Ces commentaires ne peuvent donc pas en faire un outil indispensable et obligatoire pour l'élève du Premier Cycle.

Il n'empêche qu'on trouve des machines de toutes sortes (calculettes, calculatrices scientifiques ou programmables...) à des prix de plus en plus bas sur les étals des marchés. La calculatrice s'impose donc lentement mais sûrement ; elle a droit de cité au Lycée et au Baccalauréat ; le Collège ne peut pas l'ignorer.

Ainsi, il serait souhaitable qu'en classe de 3e, le professeur continue, sinon initie les élèves à l'utilisation de la calculatrice.

Cela pourra aider les élèves à préparer leur entrée dans le Second Cycle.

❒ L'ENSEIGNANT SE DOIT DE RECHERCHER UNE STRATÉGIE POUR QUE L'ÉLÈVE UTILISE UNE CALCULATRICE À BON ESCIENT

Il faudra que le professeur fasse bien attention à ne pas induire des réflexes d'utilisation systématique de la calculatrice pour des calculs trop simples et il ne devra donner la consigne de son utilisation que dans des cas propices auxquels il aura préalablement réfléchi. En tout état de cause, l'utilisation de la calculatrice devra être strictement réglementée. Les effets pervers de son emploi pourront être corrigés par l'utilisation à bon escient du calcul rapide et du calcul mental.

❒ IDÉES D'EMPLOI DE LA CALCULATRICE

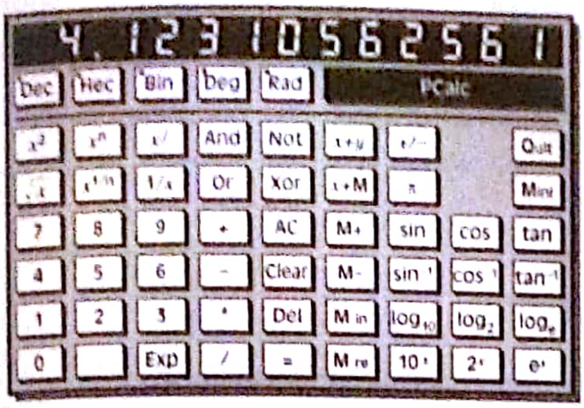
- **La calculatrice est un outil privilégié pour la motivation, la mise en place, le renforcement de nombreuses notions numériques :**
  - priorité des opérations ;
  - diverses écritures d'un nombre décimal : notation scientifique... ;
  - calcul approché : troncature, arrondi...
- **La calculatrice est une aide technique permettant :**
  - *à l'élève :*
    d'avoir une attitude active ;
    de mieux se concentrer sur le problème posé ;
    de faire rapidement de nombreux essais pour arriver à des conjectures.
  - *à l'enseignant :*
    de proposer l'étude de situations concrètes sans crainte que l'élève soit rebuté par la difficulté des calculs.

❒ CALCULATRICE ET CALCUL MENTAL NE SONT PAS INCOMPATIBLES

En effet, on peut noter :

- **la nécessité de contrôle des résultats par le calcul mental**
  - estimation du résultat ;
  - contrôle du dernier chiffre, du nombre de chiffres après la virgule ...
- **l'analogie entre l'utilisation de la calculatrice et le calcul mental**
  - nécessité d'analyser et d'organiser les calculs ;
  - bonne motivation pour utiliser les propriétés des opérations.

Exemple : calcul de la racine carrée d'un nombre à l'aide d'une calculatrice (Manuel p. 150).



Pour $\sqrt{17}$ la calculatrice affiche :

4.1231056

On peut en déduire que l'arrondi d'ordre 5 de $\sqrt{17}$ est 4,123 11.

• Donne un encadrement de $\sqrt{17}$ par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

5. L'apprentissage de la démonstration

La géométrie n'a pas l'apanage du raisonnement. En classe de 3e, les Activités Numériques permettent de continuer l'initiation au raisonnement par des activités de gestion de calcul numérique et de calcul littéral, d'organisation de données (proportionnalité, dénombrement, statistiques), et surtout par l'utilisation des équations et des inéquations pour résoudre des problèmes.

Cette dernière utilisation est très importante, car elle permet d'inculquer aux élèves, au même titre qu'un problème de géométrie, une véritable démarche scientifique (explicitation de ce que l'on connaît et de ce que l'on cherche, mathématisation du problème, recherche de la solution mathématique et vérification, validation de la solution trouvée par rapport aux données initiales du problème).

D'une manière générale, on proposera à l'élève des situations où il pourra :

- observer des données,
- utiliser un support visuel,
- pratiquer un auto-contrôle de ses résultats,
- explorer des situations par épuisement des cas.

La résolution de problèmes concrets utilisant des équations peut constituer une première approche de mathématisation d'une situation. On pourra démarrer sur le modèle suivant :

LANGAGE COURANT		LANGAGE MATHÉMATIQUE
Lecture de l'énoncé – Ce que je cherche : – Ce que je connais :	→	**Traduction mathématique** – Choix de l'inconnue : – Mise en équation :
		↓
Vérification et solution du problème	←	**Résolution de l'équation**

Le professeur pourra insister sur la vérification, la validation et l'explicitation littérale de la solution du problème. Trop d'élèves se contentant d'encadrer la solution trouvée, sans avoir au préalable vérifié les calculs (littéraux ou numériques) et sans avoir confronté le résultat trouvé avec les données, ceci pouvant permettre de déceler des erreurs éventuelles (nombre incompatible avec les données du problème : hors de l'intervalle de définition, ordre de grandeur, ...).

4 PRÉSENTATION DES OUVRAGES-ÉLÈVES

L'élève de 3ᵉ dispose de deux ouvrages complémentaires :
- un Manuel,
- un Livret d'Activités.

1. Découpage en chapitre des ouvrages-élèves

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES		ACTIVITÉS NUMÉRIQUES	
CH 1 : Propriété de Thalès	5 H	**CH 10 :** Calcul littéral	5 H
CH 2 : Triangle rectangle Trigonométrie	8 H	**CH 11 :** Racines carrées	4 H
CH 3 : Vecteurs	4 H	**CH 12 :** Calcul numérique	8 H
CH 4 : Coordonnées d'un vecteur	4 H	**CH 13 :** Équations, inéquations dans $\mathbb{R}$	6 H
CH 5 : Équations de droite	3 H	**CH 14 :** Équations, inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	6 H
CH 6 : Angles inscrits	3 H	**CH 15 :** Applications affines	4 H
CH 7 : Symétries et translation	3 H	**CH 16 :** Statistiques	4 H
CH 8 : Rotation et homothétie		Préparation aux examens	
CH 9 : Pyramides et cônes	8 H		Total **37 H**
	Total **38 H**		

La répartition horaire indiquée est une estimation pour un volume horaire annuel de 100 heures, dont 75 heures de cours et 25 heures d'évaluation et de correction. Elle est donnée à titre indicatif.

2. Le manuel de l'élève

• Dans le manuel de l'élève, chacun des chapitres est divisé en leçons et chaque leçon en paragraphes. Les notions nouvelles sont introduites en général, selon le schéma suivant :

Présentation ou Activité de découverte ou Activité de démonstration	→	Définition ou Propriété	→	Exemples et Exercices d'application directe pour fixer la notion

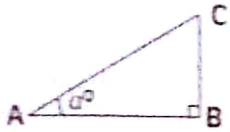
• **Les caractères gras** attirent l'attention sur les mots nouveaux ou importants dans le texte.

• **Les définitions et les propriétés** sont en général présentées dans un « blason » créant une unité entre les différentes parties qui le constituent :
- la partie à mémoriser étant sur fond colorié ;
- une figure illustrant la définition ou la propriété ;
- une traduction mathématique mettant en évidence son utilisation.

Exemple : définition de la tangente d'un angle aigu (Manuel p. 27)

DÉFINITION

Dans un triangle rectangle, on appelle *tangente* d'un angle aigu (ou de sa mesure) le quotient du côté opposé à cet angle par le côté adjacent.



$$\tan a° = \tan \widehat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{Côté opposé à } \widehat{A}}{\text{Côté adjacent à } \widehat{A}}$$

- **Le manuel est destiné aux élèves.** C'est pour cette raison que le tutoiement qui est un langage direct, est utilisé pour permettre à l'élève de se sentir réellement concerné.

- **Le professeur doit apprendre à l'élève à connaître son manuel et à s'en servir correctement.**

Après le cours, l'élève fera le point sur la leçon du jour.

Pour cela, à chaque paragraphe :
- il s'assurera qu'il connaît bien les définitions et les propriétés après les avoir relevées dans un cahier, puis mémorisées ;
- il fera ensuite les exercices d'application directe du paragraphe.

Deux cas peuvent se présenter :
- l'élève maîtrise la notion : il peut alors faire quelques exercices de fin de chapitre (de préférence ceux proposés par le professeur).
- l'élève ne maîtrise pas la notion : il doit reprendre les activités ou la présentation de la notion dans le manuel avant de traiter les exercices d'application.

Ainsi, le professeur apprendra progressivement à l'élève à mieux organiser son travail personnel.

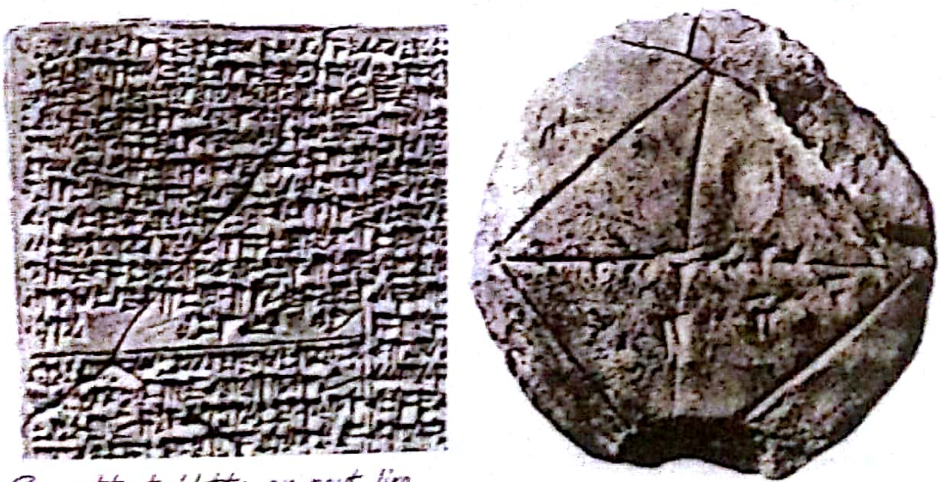
- **La première page d'un chapitre est illustrée par un flash.**

Ceci contribue à situer le thème du chapitre ou à initier l'élève à la culture mathématique.

Exemple : flash introduisant le chapitre « Racines carrées » (Manuel p. 131).

Calculer le côté d'un carré d'aire donnée numériquement, ou construire le côté d'un carré d'aire donnée géométriquement, sont deux aspects, l'un numérique, l'autre géométrique d'un très vieux problème.

Tablettes babyloniennes



DR

Sur cette tablette, on peut lire l'équivalent de : $\sqrt{2} \approx 1{,}414\,222$

3. Le livret d'activités

Le Livret d'Activités pourra être utilisé en classe et à la maison, au gré du professeur, afin de rendre possible une pédagogie active, même dans une classe à effectif élevé.

Il est d'une aide appréciable pour le professeur et les élèves ; il peut remplacer avantageusement le cahier de trace écrite.

Ce livret d'activités est présenté selon la structure du manuel ; il vient en complément de celui-ci. En ce sens, il est lié au manuel et en est indissociable, sans toutefois en faire un outil indispensable.

Son utilisation tient compte de cette structure. Lorsque le livret n'est pas utilisé en classe, le professeur peut néanmoins proposer son utilisation à titre de consolidation des connaissances et de banque d'exercices supplémentaires.

Le livret d'activités :

- permet de **donner du sens** aux définitions, propriétés, règles et formules ;
- permet un **gain de temps** appréciable dans la présentation de certaines notions ;
- favorise l'**activité de l'élève**, son **autonomie** et sa « **débrouillardise** » ;
- favorise une **pédagogie active de la part du professeur** ;
- introduit **en douceur une notion nouvelle** sans formalisme excessif ;
- permet de **garder bien en vue des résultats** intéressants ou à retenir ;
- permet de faire un **lien avec des problèmes de la vie courante** ;
- permet de **mettre en garde** contre des erreurs classiques et prévisibles ;
- permet d'**attirer l'attention de l'élève** sur des cas de figures non classiques.

Chacun des chapitres est divisé en leçons et chaque leçon en trois parties :

• **activité**

Dans cette partie, après avoir présenté une activité, le professeur laissera les élèves :

- réaliser les constructions qui s'y trouvent ;
- faire les manipulations qui sont demandées ;
- découvrir les définitions ou les propriétés.

Ensuite le professeur fera, avec les élèves, le bilan de cette activité.

• **définition ou propriété**

Dans cette partie, l'élève remplira le cadre prévu pour la définition ou la propriété.

• **exercices d'application**

Ici, l'élève s'exercera à appliquer la définition ou la propriété précédemment dégagée.

À la fin de chaque chapitre, dans la rubrique PROBLÈMES sont proposés un ou des problèmes faisant la synthèse de plusieurs notions vues dans le chapitre.

Ce type de problèmes correspond aux exercices d'approfondissement ou aux exercices de recherche du manuel.

Le professeur sera vigilant à propos de la gestion du temps. Néanmoins, il laissera une durée suffisante pour la recherche personnelle de l'élève.

Il pourra intervenir individuellement ou collectivement, à bon escient.

4. Évolution des chapitres dans les manuels du 1er cycle

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

	Classe de Sixième		Classe de Cinquième	
Configuration du plan	CH 1 : Droites CH 2 : Mesure d'un segment CH 4 : Angles CH 3 : Cercles CH 6 : Parallélogrammes	6 H 4 H 5 H 4 H 5 H	CH 1 : Distances CH 5 : Médiatrice d'un segment CH 3 : Angles CH 6 : Triangles particuliers CH 7 : Parallélogrammes CH 8 : Polygones particuliers	3 H 5 H 6 H 7 H 7 H 3 H
Application du plan	CH 5 : Figures symétriques par rapport à un point CH 7 : Figures symétriques par rapport à une droite	7 H 7 H	CH 2 : Figures symétriques par rapport à un point CH 4 : Figures symétriques par rapport à une droite	4 H 4 H
Géométrie analytique	Demi-droite graduée (en liaison avec les nombres décimaux arithmétiques)		Droite graduée (en liaison avec les nombres décimaux relatifs)	
Configuration de l'espace	CH 8 : Pavés et cylindres droits	7 H	CH 9 : Prismes droits et pyramides	6 H
		45 H		**45 H**

	Classe de Quatrième		Classe de Troisième	
Configurations du plan	CH 3 : Distances CH 1 : Résolution de problèmes de géométrie CH 4 : Triangles CH 7 : Angles au centre Polygones réguliers	4 H 3 H 8 H 3 H	CH 1 : Propriétés de Thalès CH 2 : Triangles rectangles Trigonométrie CH 6 : Angles inscrits	5 H 8 H 3 H
Applications du plan *Outil vectoriel* *Géométrie analytique*	CH 2 : Symétries CH 5 : Translation et vecteurs CH 6 : Projection et repérage	6 H 7 H 4 H	CH 7 : Symétries et translation CH 8 : Rotation et homothétie CH 3 : Vecteurs CH 4 : Coordonnées d'un vecteur CH 5 : Équations d'une droite	3 H — 4 H 4 H 3 H
Configuration de l'espace	CH 8 : Solides de l'espace CH 9 : Droites et plans de l'espace	4 H 6 H	CH 9 : Pyramides et cônes	8 H
		45 H		**38 H**

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

	Classe de Sixième		Classe de Cinquième	
Calcul numérique	CH 9 : Multiples et diviseurs d'un nombre entier naturel	5 H	CH 10 : Nombres décimaux relatifs	5 H
	CH 10 : Comparaison des nombres décimaux	4 H	CH 11 : Somme et différence de nombres décimaux relatifs	5 H
	CH 11 : Addition, soustraction, multiplication des nombres décimaux	5 H	CH 12 : Puissance entière d'un nombre entier naturel	4 H
	CH 12 : Division	4 H	CH 13 : Division dans $\mathbb{N}$. Nombres premiers	4 H
	CH 13 : Fractions	7 H	CH 14 : Fractions	5 H
			CH 16 : Produits de nombres décimaux relatifs	3 H
Calcul littéral	Utilisation des formules (aire, volume...)		Utilisation des formules (aire, volume...)	
Organisation des données	CH 14 : Proportionnalité	5 H	CH 15 : Proportionnalité	4 H
		30 H		**30 H**

	Classe de Quatrième		Classe de Troisième	
Calcul numérique	CH 11 : Nombres rationnels	4 H	CH 11 : Racines carrées	4 H
	CH 13 : Approximations décimales d'un nombre	4 H	CH 12 : Calcul numérique	8 H
Calcul littéral	CH 10 : Calcul littéral	6 H	CH 10 : Calcul littéral	5 H
	CH 12 : Équations, inéquations	6 H	CH 13 : Équations, inéquations dans $\mathbb{R}$	6 H
	CH 14 : Résolution de problèmes	6 H	CH 14 : Équations, inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	6 H
Organisation des données			CH 15 : Applications affines	4 H
	CH 15 : Statistiques	4 H	CH 16 : Statistiques	4 H
		30 H		**37 H**

5 ANALYSE DES CHAPITRES

Chacun des 16 chapitres est analysé selon la structure suivante :

objectifs ; commentaires ; savoirs et savoir-faire ; exercices.

Selon les exercices, on trouvera une résolution complète, des indications pour une résolution, une analyse du problème et une méthode de recherche d'une démarche, des résultats, des commentaires.

1. Propriété de Thalès

(pages 7 à 20 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à mettre en place des outils permettant :

- de justifier un parallélisme de droites,
- de calculer des distances,
- de placer des points sur des droites.

COMMENTAIRES

Ce chapitre doit être traité en parallèle avec le chapitre 10.

La présentation de la propriété de Thalès n'utilise pas les mesures algébriques, celles-ci étant remplacées par la donnée des positions relatives des points sur une droite.

En quelques lignes, un raisonnement sur les distances et les aires permet d'établir le résultat principal.

L'expression de la propriété de Thalès avec des longueurs permet de résoudre la plupart des problèmes que l'on rencontre dans le Premier Cycle de l'Enseignement Secondaire.

Deux conséquences directes de la propriété de Thalès ont été abordées pour apporter des ouvertures à ce chapitre :

- les triangles semblables ;
- la propriété de Thalès dans le cas général.

Lorsque deux triangles constituent une configuration de Thalès, tout triangle superposable à l'un est dit semblable à l'autre. On dégage ensuite les propriétés caractéristiques concernant les côtés homologues et les angles homologues. Dans cette présentation des triangles semblables, on retrouve la similitude comme composée d'une homothétie suivie d'une isométrie (conformément à l'étude qui sera faite dans le second cycle).

La propriété de Thalès dans le cas général est traitée dans la dernière leçon.

Il conviendra de souligner, soit immédiatement, soit en démontrant la propriété, que les égalités de rapports se justifient « de proche en proche ».

On remarquera que la construction de la quatrième proportionnelle est un problème spécifique dont les données ne sont pas numériques : il ne s'agit pas d'une détermination de longueur de segment.

La formulation vectorielle des propriétés de Thalès est vue dans le chapitre 3, leçon 3.

Savoirs et savoir-faire

Propriété de Thalès dans le triangle

savoirs	savoir-faire

• Propriétés
Propriété de Thalès
ABC est un triangle. M est un point de (AB) et M' un point de (AC).
Si (MM') // (BC), alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$.
Réciproque de la propriété de Thalès
ABC est un triangle. M est un point de (AB) et M' un point de (AC) tels que la position de M par rapport à A et B soit la même que celle de M' par rapport à A et C.
Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$, alors (MM') // (BC).
Propriété
ABC est un triangle. M est un point de (AB) et M' un point de (AC) tels que la position de M par rapport à A et B soit la même que celle de M' par rapport à A et C.
$\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$ *équivaut à* (MM') // (BC).
Conséquence de la propriété de Thalès
ABC est un triangle. M est un point de (AB) et M' un point de (AC).
Si (MM') // (BC), alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC} = \frac{MM'}{BC}$.
	• Reconnaître une configuration de Thalès en indiquant le triangle et la droite parallèle à l'un des côtés.
	• À partir d'un triangle ABC :
	– trouver des rapports égaux découlant d'un parallélisme de droites,
	– trouver des droites parallèles découlant d'une égalité de rapports.
	• Justifier des parallélismes de droites.

Utilisation des propriétés de Thalès

savoirs	savoir-faire
• Vocabulaire Quatrième proportionnelle des mesures de trois segments.	• Construire une quatrième proportionnelle. • Partager un segment dans un rapport donné. • Calculer des distances. • Démontrer des égalités de quotients. • Démontrer un parallélisme de droites.

Triangles semblables

savoirs	savoir-faire
• Vocabulaire – Triangles semblables – Sommets, angles et côtés homologues – Disposition pratique $\frac{A\ B\ C}{D\ E\ F}$ **• Propriétés** – Si deux triangles sont semblables alors leurs angles sont deux à deux de même mesure. – Si deux triangles sont semblables alors leurs côtés sont deux à deux proportionnels. – Si deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure alors ils sont semblables. – Si deux triangles ont leurs côtés deux à deux proportionnels alors ils sont semblables.	• Reconnaître deux triangles semblables. • Déterminer les éléments homologues dans deux triangles semblables. • Déterminer des longueurs inaccessibles par voie directe. • Utiliser la disposition pratique $\frac{A\ B\ C}{D\ E\ F}$

Propriété de Thalès dans le cas général

savoirs	savoir-faire
• Propriété - Des droites parallèles découpent des segments proportionnels sur deux droites qui leurs sont sécantes.	• Deux droites étant sécantes à deux droites parallèles, trouver les rapports égaux qui en découlent.

Exercices du Manuel

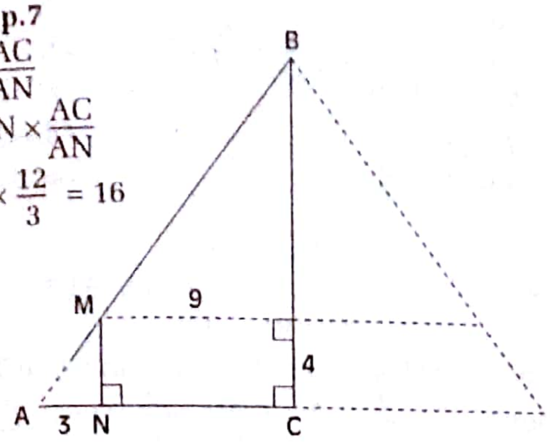
Exercices du cours

♦ **Flash p.7**

$\dfrac{BC}{MN} = \dfrac{AC}{AN}$

$BC = MN \times \dfrac{AC}{AN}$

$BC = 4 \times \dfrac{12}{3} = 16$



♦ **Exercice 1.d p.11**

Dans les triangles ABI et AIC, (DE) // (BC).
D'après la conséquence de la propriété de Thalès, on a :

$$\frac{DJ}{BI} = \frac{JA}{IA} \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{JA}{IA} = \frac{JE}{IC} \quad (2)$$

De (1) et (2), on déduit : $\dfrac{DJ}{BI} = \dfrac{JE}{IC}$.

Or BI = IC ; donc DJ = JE.

De plus, J ∈ [DE] ; donc J est le milieu de [DE].

♦ **Exercice 2.b p.13**

Dans les triangles AME et ANE, (DB) // (AE).
D'après la conséquence de la propriété de Thalès, on a :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AE}{BC} \ (1) \quad \text{et} \quad \frac{AE}{BD} = \frac{NA}{NB} \ (2)$$

Or BC = BD

Donc $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NA}{NB}$

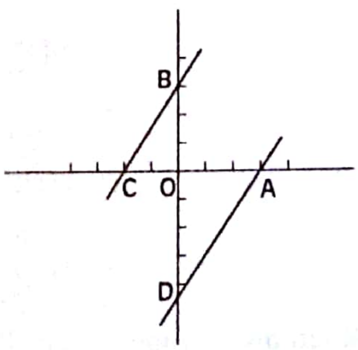
♦ **Exercice 2.c p.13**

Dans les triangles IAD et JAD, (BC) // (AD).
D'après la conséquence de la propriété de Thalès, on a :

$$\frac{IB}{IA} = \frac{IC}{ID} = \frac{BC}{AD} \ (1) \ ; \ \frac{JB}{JD} = \frac{JC}{JA} = \frac{BC}{AD} \ (2).$$

De (1) et (2), on déduit que : $\dfrac{IB}{IA} = \dfrac{IC}{ID} = \dfrac{JB}{JD} = \dfrac{JC}{JA}$.

♦ **Exercice 2.d p.13**

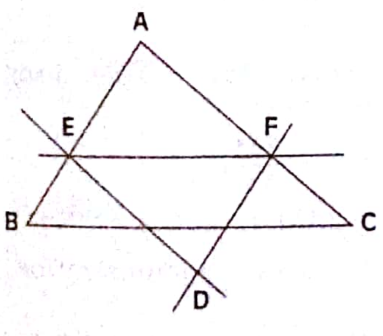


On désigne par O, l'origine du repère orthonormé.
Dans le triangle AOD, O ∈ [CA] et O ∈ [BD].

De plus, $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OB}{OD}$ car $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{OB}{OD} = \dfrac{3}{4,5} = \dfrac{2}{3}$.

D'après la réciproque de la propriété de Thalès, on a : (AD) // (BC).

♦ **Exercice 3.a p.15**



Dans le triangle ABC, (EF) // (BC). Les triangles AEF et ABC sont donc semblables : $\dfrac{A\ E\ F}{A\ B\ C}$. (1)

Le quadrilatère AEDF est tel que : (AF) // (ED) et (AE) // (FD). C'est donc un parallélogramme. Les triangles AEF et DFE sont symétriques par rapport au centre de ce parallélogramme.

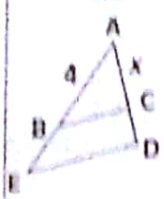
Les triangles AEF et DFE sont donc superposables. (2)

De (1) et (2), on déduit que les triangles DFE et ABC sont semblables : $\dfrac{D\ F\ E}{A\ B\ C}$.

❑ Exercices d'entraînement

♦ Exercice n°1 p.17

1er cas



Données :
AB = 4
AE = 6
AD = 9
(BC) // (ED)

Objectif :
Calculer AC

Solution
Dans le triangle AED,
(BC) // (ED).
D'après la propriété de Thalès : $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$. Donc : $\frac{4}{6} = \frac{x}{9}$.
D'où : $x = 6$.

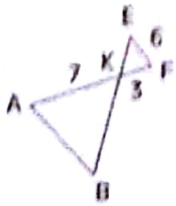
2e cas

Données :
OB = 3
AB = 4
CD = 5
(BA) // (CD)

Objectif :
Calculer OC

Solution
Dans le triangle OCD,
(BA) // (CD).
D'après la propriété de Thalès : $\frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OD} = \frac{BA}{CD}$. Donc : $\frac{3}{x} = \frac{4}{5}$.
D'où : $x = 3{,}75$.

3e cas

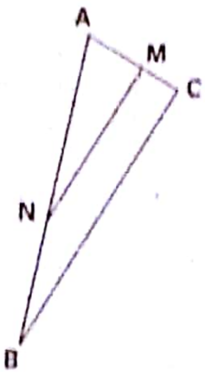


Données :
EF = 6
AK = 7
FK = 3
(AB) // (EF)

Objectif :
Calculer AB

Solution
Dans le triangle AKB,
(AB) // (EF).
D'après la propriété de Thalès : $\frac{KF}{KA} = \frac{KE}{KB} = \frac{EF}{AB}$. Donc : $\frac{3}{7} = \frac{6}{x}$.
D'où : $x = 14$.

♦ Exercice n°2 p.17

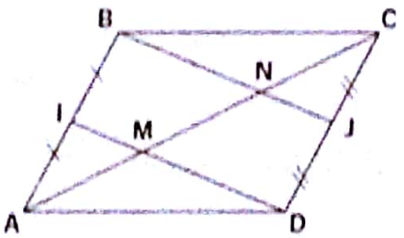


Données :
AB = 15
AC = 5
AM = 3
AN = 9

Conclusion :
(MN) // (CB)

Démonstration
Dans le triangle ABC, $M \in [AC]$ et $N \in [AB]$.
De plus, $\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}$ car $\frac{AN}{AB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$
et $\frac{AM}{AC} = \frac{3}{5}$.
Donc, d'après la réciproque de la propriété de Thalès dans le triangle ABC : (MN) // (CB).

♦ Exercice n°4 p.17



Données :
ABCD est un parallélogramme
I milieu de [AB]
J milieu de [CD]
M, point d'intersection de (DI) et (AC)
N, point d'intersection de (BJ) et (AC)

Conclusion :
AM = MN = NC

Démonstration
• ABCD est un parallélogramme, donc :
(AB) // (DC) et AB = DC.
Par conséquent : (IB) // (JD) et IB = JD.
Donc, BJDI est un parallélogramme
et (BJ) // (ID).

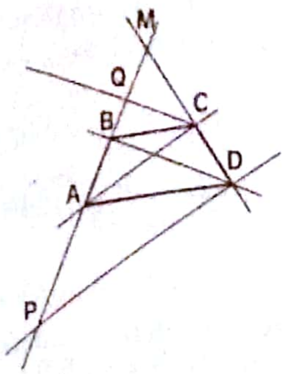
• Dans le triangle ABN, (IM) // (BN), donc d'après la propriété de Thalès :

$$\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{AM}{AN}.$$

Par conséquent : AN = 2AM. D'où AM = MN (1).

• Dans triangle DMG, même démonstration, d'où : MN = NC (2).
Par conséquent, des égalités (1) et (2), on tire :
AM = MN = NC.

♦ Exercice n°5 p.17



Données :

ABCD est un quadrilatère

M, point d'intersection de (AB) et (CD)

(PD) // (AC)

P, point d'intersection de (AB) et (DP)

(QC) // (BD)

Q, point d'intersection de (AB) et (CQ)

Conclusion :

$\frac{MP}{MA} = \frac{MB}{MQ}$.

Démonstration

• Dans le triangle PMD, (PD) // (AC).

D'après la propriété de Thalès, on a :

$$\frac{MP}{MA} = \frac{MD}{MC} \quad (1).$$

• Dans le triangle BMD, (QC) // (BD).

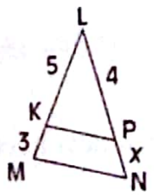
D'après la propriété de Thalès, on a :

$$\frac{MD}{MC} = \frac{MB}{MQ} \quad (2).$$

• Des égalités (1) et (2), on déduit que :

$$\frac{MP}{MA} = \frac{MB}{MQ}.$$

♦ Exercice n°6 p.17



Données :

LK = 5

KM = 3

LP = 4

(KP) // (MN)

Objectif :

Calculer PN

Solution

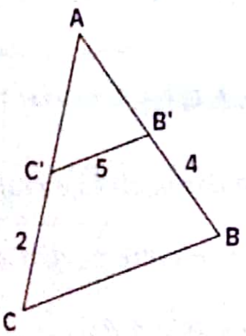
Dans le triangle LMN, (KP) // (MN)

D'après la propriété de Thalès, on a :

$\frac{LK}{LM} = \frac{LP}{LN}$, c'est-à-dire : $\frac{5}{8} = \frac{4}{4 + x}$

D'où : $20 + 5x = 32$. Donc : $x = 2{,}4$.

♦ Exercice n°7 p.17



1^er^ cas

Données :

(B'C') // (BC)

AB = 8

B'C' = 5

C'C = 2

B'B = 4

Objectifs :

Calculer B'A, C'A, BC et AC

• B'A = AB – B'B = 4

• Dans le triangle ABC, (B'C') // (BC).

D'après la propriété de Thalès :

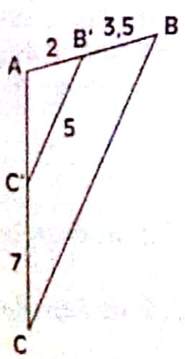
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{C'B'}{CB}.$$

Donc : $\frac{4}{8} = \frac{AC'}{AC' + 2}$.

Par conséquent : AC' = 2.

• AC = AC' + C'C = 4.

• De même : $\frac{4}{8} = \frac{5}{CB}$. D'où : BC = 10.



2^e^ cas

Données :

(B'C') // (BC)

AB' = 2

B'B = 3,5

C'C= 7

B'C' = 5

Objectifs :

Calculer C'A, AC et BC

• Dans le triangle ABC, (B'C') // (BC).

D'après la propriété de Thalès :

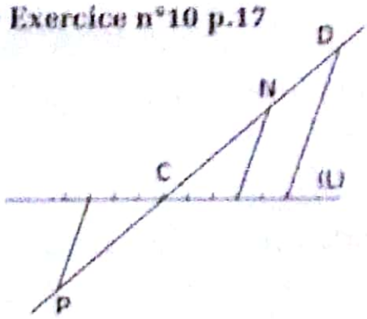
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{C'B'}{CB}.$$

Donc : $\frac{2}{5{,}5} = \frac{AC'}{AC' + 7}$.

Par conséquent : AC' = 4. D'où : AC = 11.

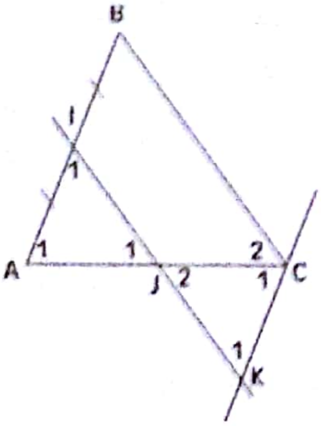
• De même : $\frac{2}{5{,}5} = \frac{5}{CB}$. D'où : BC = 13,75.

♦ Exercice n°10 p.17



– Tracer une droite sécante en C à (CD).
– Graduer régulièrement cette droite, avec C comme origine.
– Tracer la droite (L) qui passe par le point « d'abscisse 5 » et par D.
– Tracer la droite parallèle à (L) qui passe par le point « d'abscisse 3 » ; elle coupe (CD) au point N cherché.
– Tracer la droite parallèle à (L) qui passe par le point « d'abscisse – 3 » ; elle coupe (CD) au point P cherché.

♦ Exercice n°11 p.18

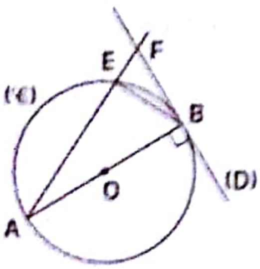


• mes $\widehat{A_1}$ = mes $\widehat{C_1}$, car ce sont des angles alternes-internes formés par les droites parallèles (AB) et (CK), coupées par la droite (AC) ;
• mes $\widehat{K_1}$ = mes $\widehat{I_1}$, car ce sont des angles alternes-internes formés par les droites parallèles (AB) et (CK), coupées par la droite (IK) ;
• mes $\widehat{B}$ = mes $\widehat{I_1}$, car ce sont des angles correspondants formés par les droites parallèles (BC) et (IK), coupées par la droite (AB) ;
donc : mes $\widehat{K_1}$ = mes $\widehat{B}$.
• mes $\widehat{J_2}$ = mes $\widehat{C_2}$, car ce sont des angles alternes-internes formés par les droites parallèles (BC) et (IK), coupées par la droite (AC).

Par conséquent, les triangles ABC et JCK sont semblables, car ils ont leurs angles deux à deux de même mesure.

Les sommets homologues : $\dfrac{A\ \ B\ \ C}{C\ \ K\ \ J}$

♦ Exercice n°12 p.18

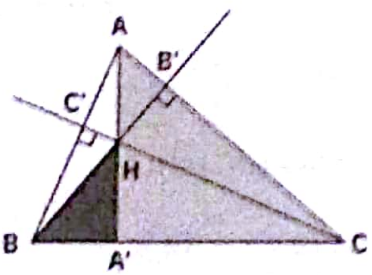


• Le triangle AEB est rectangle en E, car il est inscrit dans le cercle (€) de diamètre [AB].
• Le triangle ABF est rectangle en B, car (D) est perpendiculaire à (AB) en B (définition de la tangente).

Donc, les triangles AEB et ABF sont semblables, car ils ont leurs angles deux à deux de même mesure (mes $\widehat{AEB}$ = mes $\widehat{ABF}$ = 90° ; mes $\widehat{EAB}$ = mes $\widehat{FAB}$ et mes $\widehat{ABE}$ = mes $\widehat{AFB}$).

Par conséquent : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AB}{AF}$. Donc : $AE \times AF = AB^2 = 4r^2$.

♦ Exercice n°13 p.18



• **Démonstration de l'égalité A'A × A'H = A'B × A'C (1).**

Recherche d'une démarche

L'égalité (1) équivaut à : $\dfrac{A'A}{A'B} = \dfrac{A'C}{A'H}$. *(propriété des égalités de rapports)*

Deux triangles semblables permettraient d'écrire cette égalité de rapports.

Or, *– les numérateurs sont deux côtés du triangle A'AC ;*
– les dénominateurs sont deux côtés du triangle A'BH.

Par conséquent, on peut essayer de démontrer que les triangles A'AC et A'BH sont semblables. (En utilisant les mesures d'angles, car il n'y a aucune donnée numérique concernant les côtés de ces triangles.)

Solution

• mes $\widehat{HA'B}$ = mes $\widehat{AA'C}$ = 90°, car (AA') est la hauteur relative au côté (BC).
• mes $\widehat{A'BH}$ = mes $\widehat{A'AC}$, car ces angles sont complémentaires de l'angle $\widehat{A'CB'}$, l'un dans le triangle rectangle CBB', l'autre dans le triangle rectangle CAA'.
• mes $\widehat{A'HB}$ = mes $\widehat{ACA'}$, car ces angles sont complémentaires de l'angle $\widehat{B'BC}$, l'un dans le triangle rectangle HBA', l'autre dans le triangle rectangle BB'C.

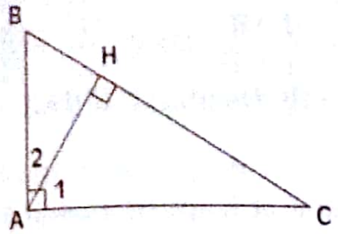
Par conséquent les triangles A'AC et A'BH sont semblables, car ils ont leurs angles deux à deux de même mesure.

Donc : $\frac{A'A}{A'B} = \frac{A'C}{A'H}$. Cette égalité équivaut à $A'A \times A'H = A'B \times A'C$.

On procède de même pour établir :

- l'égalité $HA \times HA' = HB \times HB'$: triangles semblables HAB' et HBA'.
- l'égalité $HB \times HB' = HC \times HC'$: triangles semblables HBC' et HCB'.
- l'égalité $BC \times AA' = CA \times BB'$: triangles semblables BCB' et CAA'.
- l'égalité $CA \times BB' = AB \times$ ¥ CC' : triangles semblables CAC' et BAB'.

♦ Exercice n°14 p.18



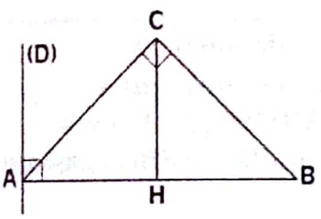
1) Les triangles ABC et HAC sont semblables, car ils ont leurs angles deux à deux de même mesure (mes $\widehat{A}$ = mes $\widehat{H} = 90°$, mes $\widehat{C}$ = mes $\widehat{C}$ et mes $\widehat{B}$ = mes $\widehat{A_1}$). Donc leurs côtés sont deux à deux proportionnels, par conséquent : $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC} = \frac{AB}{AH}$.

D'où : $AC^2 = BC \times HC$ et $AB \times AC = AH \times BC$.

2) Les triangles HAB et HCA sont semblables, car ils ont des angles deux à deux de même mesure. Donc, leurs côtés sont deux à deux proportionnels, par conséquent : $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH}$.

D'où : $AH^2 = HC \times HB$.

♦ Exercice n°15 p.18

Esquisse	Recherche d'une méthode de construction	Programme de construction
	• L'aire d'un carré de côté p est : p^2. • Si ABC est un triangle rectangle en C de hauteur [CH], alors les triangles HCA et HBC sont semblables, et $HA \times HB = CH^2$. On demande de construire un carré de côté p et d'aire $HA \times HB$, donc : $p^2 = CH^2$. Par conséquent : $p = CH$.	– Tracer le cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [AB]. – Tracer la droite (L) perpendiculaire à (AB) passant par H. – Marquer C, un des points d'intersection de (L) et ($\mathscr{C}$). – Construire un carré de côté CH.

♦ Exercice n°16 p.18

$\overset{\frown}{p}$	
A	E
B	F
C	G
D	H

D'après la propriété de Thalès dans le cas général :

1) $\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{EG}$. Donc : EG = 7,5.

2) $\frac{AB}{AD} = \frac{EF}{EH}$. Donc : EF = 2.

3) $\frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}$. Donc : BC = 3.

♦ Exercice n°17 p.18

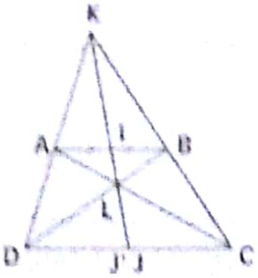
$\overset{\frown}{p}$	
A	E
B	F
C	G

D'après la propriété de Thalès dans le cas général : $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}$.

Donc : $\frac{2}{1} = \frac{7}{EG}$. D'où : EG = 3,5.

❑ *Exercices d'approfondissement*

♦ Exercice n°18 p.18



• Les triangles KIA et KJD sont semblables : $\frac{K\ I\ A}{K\ J\ D}$. Donc : $\frac{KI}{KJ} = \frac{AI}{DJ}$

De même, les triangles KIB et KJC sont semblables : $\frac{K\ I\ B}{K\ J\ C}$. Donc : $\frac{KI}{KJ} = \frac{IB}{JC}$

Par conséquent : $\frac{AI}{DJ} = \frac{IB}{JC}$. Donc, DJ = JC, car AI = IB. De plus, J ∈ (DC).

J est donc le milieu de [DC]. (1)

• Les triangles LIA et LJ'C sont semblables : $\frac{L\ I\ A}{L\ J'\ C}$. Donc : $\frac{LI}{LJ'} = \frac{AI}{CJ'}$

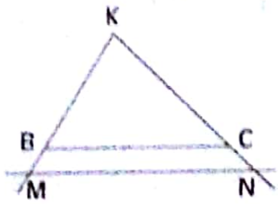
De même, les triangles LIB et LJ'C sont semblables : $\frac{L\ I\ B}{L\ J'\ D}$. Donc : $\frac{LI}{LJ'} = \frac{IB}{J'D}$

Par conséquent : $\frac{AI}{CJ'} = \frac{IB}{J'D}$. Donc, DJ' = J'C, car AI = IB. De plus, J' ∈ (DC).

J' est donc le milieu de [DC]. (2)

• De (1) et (2), on déduit que les points J et J' sont confondus ; les points K et L appartiennent à la droite (IJ), ou encore, les points I, J, K et L sont alignés.

♦ Exercice n°19 p.18



Dans le triangle ABC, (MN) // (BC).

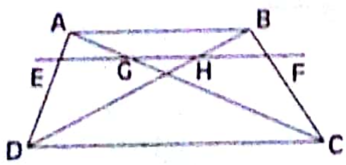
• D'après la propriété de Thalès : $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$.

Or, AM = AC, donc : $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AN}$.

Par conséquent : $AN \times AB = AC^2$ (1).

Recherche d'une méthode de construction	Programme de construction
Si AB = 3, AC = 4 et AN = ℓ, on a, d'après l'égalité (1) précédente : $3\ell = 16$. On peut donc construire le point N.	– Tracer un segment [AB] de longueur 3. – Tracer un segment [AC] de longueur 4. – Placer le point M de [AB) tel que AM = 4. – Tracer la droite (L) parallèle à (BC) passant par M. – Marquer N, point d'intersection de (AC) et (L).

♦ Exercice n°20 p.18



• **Calcul de $\frac{DA}{DE}$ et $\frac{AD}{AE}$.**

$\frac{AE}{DE} = \frac{m}{n}$ et AE = AD – ED, donc : $\frac{AD - ED}{ED} = \frac{m}{n}$.

Par conséquent : $\frac{AD}{ED} = \frac{m}{n} + 1 = \frac{m+n}{n}$.

$\frac{ED}{AE} = \frac{n}{m}$ et ED = AD – AE, donc : $\frac{AD - AE}{AE} = \frac{n}{m}$.

Par conséquent : $\frac{AD}{AE} = \frac{n}{m} + 1 = \frac{m+n}{m}$.

• **Calcul de EG, EH, FG, GH et EF.**

– Les triangles ADC et AEG sont semblables : $\frac{A\ D\ C}{A\ E\ G}$. Donc : $\frac{AD}{AE} = \frac{DC}{EG}$.

Par conséquent : $\frac{m+n}{m} = \frac{b}{EG}$. D'où : $EG = \frac{bm}{m+n}$.

– Les triangles DAB et DEH sont semblables : $\frac{D\ A\ B}{D\ E\ H}$. Donc : $\frac{DA}{DE} = \frac{AB}{EH}$.

Par conséquent : $\frac{m+n}{n} = \frac{a}{EH}$. D'où : $EH = \frac{an}{m+n}$.

– D'après la propriété de Thalès dans le cas général, $\frac{DA}{DE} = \frac{CB}{CF}$.

– Les triangles CBA et CFG sont semblables : $\frac{C\,B\,A}{C\,F\,G}$. Donc : $\frac{CB}{CF} = \frac{BA}{FG}$.

Par conséquent : $FG = \frac{an}{m+n}$ et $FH = \frac{bm}{m+n}$.

– Par conséquent : $EF = EH + HF = \frac{an}{m+n} + \frac{bm}{m+n} = \frac{an+bm}{m+n}$.

– De même : $GH = EH - EG = \frac{an}{m+n} - \frac{bm}{m+n} = \frac{an-bm}{m+n}$.

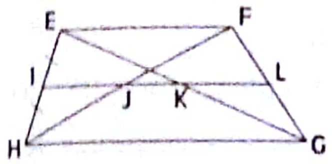
• **Démonstration de « [EF] et [GH] ont le même milieu ».**

I est le milieu de [EF] . Donc : $EI = \frac{1}{2}EF = \frac{an+bm}{2(m+n)}$ (1) ;

J est le milieu de [GH]. Donc : $EJ = EG + \frac{1}{2}GH = \frac{bm}{m+n} + \frac{an-bm}{2(m+n)} = \frac{an+bm}{2(m+n)}$ (2).

De (1) et (2), on déduit que EI = EJ. Par conséquent, les points I et J sont confondus.

♦ **Exercice n°21 p.19**



1) Dans le triangle EHG, (IK)//(HG), donc : $\frac{EI}{EH} = \frac{1}{2} = \frac{IK}{HG}$.

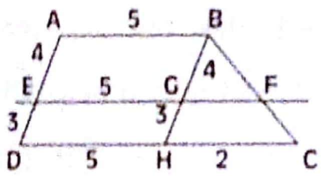
Par conséquent : $IK = \frac{1}{2}HG$ (1).

• Dans le triangle EFG, (KL)//(EF), donc : $\frac{GL}{GF} = \frac{KL}{EF}$. Par conséquent : $KL = \frac{1}{2}EF$ (2).

Des égalités (1) et (2), on déduit que : $IL = IK + KL = \frac{EF + HG}{2}$.

2) $IJ = \frac{1}{2}EF = KL$. 3) $JK = IK - IJ = \frac{EF - HG}{2}$.

♦ **Exercice n°22 p.19**



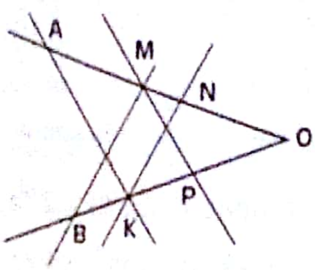
Pour obtenir des triangles, on trace la droite parallèle à (AD) passant par B ; elle coupe (EF) en G et (DC) en H.

• Dans le triangle BHC, (GF) // (HC), donc d'après la propriété de Thalès :

$\frac{BG}{BH} = \frac{GF}{HC}$. Donc : $GF = \frac{8}{7}$.

• $EF = EG + GF = 5 + \frac{8}{7} = \frac{43}{7}$.

♦ **Exercice n°23 p.19**



• Dans le triangle OAK, (MP)//(AK), donc d'après la propriété de Thalès :

$\frac{OM}{OA} = \frac{OP}{OK}$. D'où : $OM \times OK = OA \times OP$ (1).

• Dans le triangle OMB, (MB)//(KN), donc d'après la propriété de Thalès :

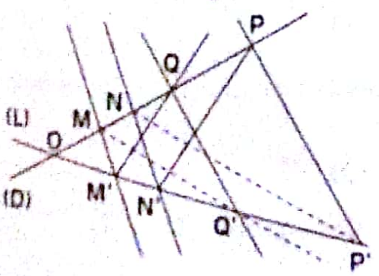
$\frac{ON}{OM} = \frac{OK}{OB}$. D'où : $OM \times OK = ON \times OB$ (2).

• Des égalités (1) et (2), on tire : $OA \times OP = ON \times OB$.

D'où : $\frac{ON}{OA} = \frac{OP}{OB}$. De plus, N ∈ [OA] et P ∈ [OB].

Par conséquent, d'après la réciproque de la propriété de Thalès : (AB)//(NP).

♦ **Exercice n°24 p.19**



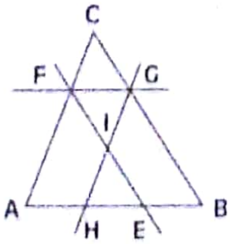
En utilisant la propriété de Thalès dans les triangles OMM', OQM' et OQQ', on peut écrire successivement :

$\frac{OM}{ON} = \frac{OM'}{ON'}$, $\frac{OM'}{ON'} = \frac{OQ}{OP}$ et $\frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'}$.

Par conséquent : $\frac{OM}{ON} = \frac{OQ'}{OP'}$. De plus, la position de M par rapport à O et N est la même que celle de Q' par rapport à O et P'.

D'où : (MQ') // (NP').

♦ Exercice n°25 p.19



1) Dans le triangle ABC,

– (FE)//(CB). Donc, d'après la propriété générale de Thalès : $\frac{FC}{AC} = \frac{EB}{AB} = \frac{1}{3}$

– (FG)//(AB). Donc, d'après la propriété de Thalès : $\frac{GC}{BC} = \frac{FC}{AC} = \frac{1}{3}$.

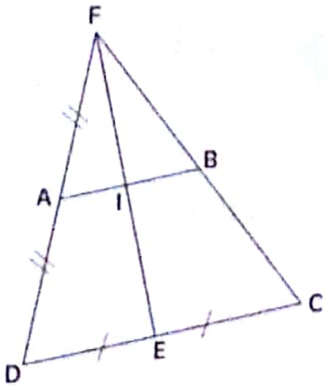
– (GH)//(AC). Donc, d'après la propriété générale de Thalès : $\frac{AH}{AB} = \frac{GC}{BC} = \frac{1}{3}$

2) $EB = \frac{1}{3}AB$ et $AH = \frac{1}{3}AB$. Les points A, H, E et B sont alignés, donc :

$HE = \frac{1}{3}AB$. Par conséquent : H est le milieu de [AE].

3) D'où, dans le triangle EAF : $\frac{EH}{EA} = \frac{1}{2} = \frac{HI}{AF}$.

♦ Exercice n°26 p.19



• Dans le triangle FDE, (AB) // (DC) ; donc d'après la conséquence de la propriété de Thalès : $\frac{FA}{FD} = \frac{AI}{DE} = \frac{FI}{FE}$. Or $\frac{FA}{FD} = \frac{1}{2}$.

Donc, le point I est le milieu du segment [FE]. De plus, $AI = \frac{1}{2}DE$ (1)

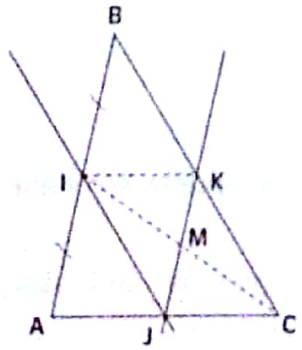
• Dans le triangle FEC, (AB) // (DC) ; donc d'après la conséquence de la propriété de Thalès : $\frac{FI}{FE} = \frac{IB}{EC}$. Or $\frac{FI}{FE} = \frac{1}{2}$; donc : $IB = \frac{1}{2}EC$ (2)

Or, DE = EC. Des égalités (1) et (2), on déduit : AI = IB.

De plus, $I \in (AB)$.

Par conséquent : I est le milieu du segment [AB].

♦ Exercice n°27 p.19



1) Dans le triangle ABC, d'après la propriété de Thalès :

• (IJ)//(BC). Donc : $\frac{BI}{BA} = \frac{1}{2} = \frac{CJ}{CA}$ (1).

• (JK)//(AB). Donc : $\frac{CJ}{CA} = \frac{1}{2} = \frac{CK}{CB}$.

D'où : $CK = \frac{1}{2}CB$. Or $K \in (CB)$.

Par conséquent, K est le milieu de [CB] et $\frac{BK}{BC} = \frac{1}{2}$ (2).

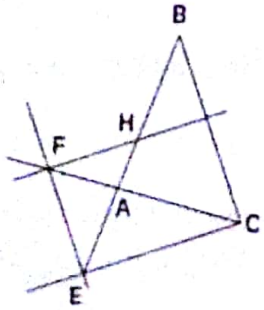
D'après les égalités (1) et (2), et la réciproque de la propriété de Thalès : (IK)//(AC).

2) $\frac{BI}{BA} = \frac{BK}{BC} = \frac{1}{2} = \frac{IK}{AC}$. D'où : $IK = \frac{1}{2}AC = AJ = JC$.

• (IK)//(AC) et IK = JC. Donc le quadrilatère IKCJ est un parallélogramme.

[IC] et [JK] sont les diagonales de ce parallélogramme, donc M est le milieu de [JK].

♦ Exercice n°28 p.19



• Dans le triangle ABC, (EF) // (BC). D'après la conséquence de la propriété de Thalès :

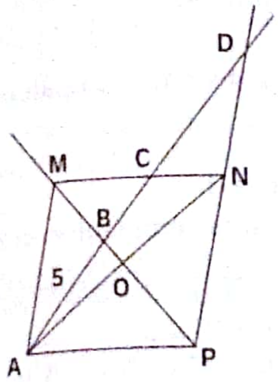
$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{FE}{BC}$. Donc : $AE = \frac{AB \times AF}{AC}$ (1).

• Dans le triangle AEC, (EC) // (FH) . D'après la conséquence de la propriété de Thalès :

$\frac{AE}{AH} = \frac{AC}{AF} = \frac{EC}{FH}$. Donc : $AE = \frac{AH \times AC}{AF}$ (2).

En effectuant le produit membre à membre des égalités (1) et (2) :
$AE^2 = AB \times AH$.

♦ Exercice n°29 p.19



• Placer un point N n'appartenant pas à (AB), puis le milieu O de [AN]. M est l'intersection de (OB) et de (CN), P est l'intersection de (OB) et de la parallèle à (MN) passant par A.

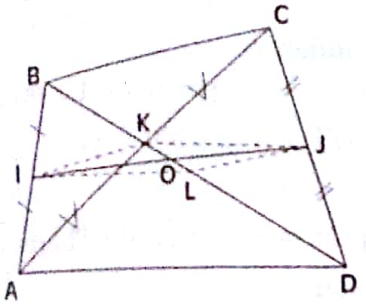
• Les triangles BMC et BPA sont semblables : $\frac{B\,M\,C}{B\,P\,A}$;
donc : $\frac{MC}{PA} = \frac{BC}{BA}$.

Par conséquent : $MC = \frac{2}{5}$ AP. Or, MN = AP ; donc : $CN = \frac{3}{5}$ AP.

• Les triangles DNC et DPA sont semblables : $\frac{D\,N\,C}{D\,P\,A}$;
donc : $\frac{DC}{DA} = \frac{CN}{AP}$,

ou bien : $\frac{DC}{DC + CA} = \frac{CN}{AP} = \frac{3}{5}$. D'où : DC =10,5.

♦ Exercice n°30 p.19



La droite (KJ) passe par les milieux des côtés [AC] et [CD] du triangle ACD. D'après la propriété de la droite des milieux,

$$(KJ) \,//\, (AD) \quad (1) \qquad \text{et} \qquad KJ = \frac{1}{2}\,AD \ (2).$$

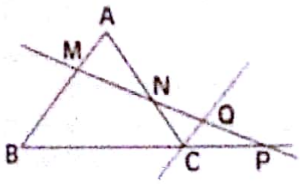
La droite (IL) passe par les milieux des côtés [AB] et [BD] du triangle ABD.
D'après la propriété de la droite des milieux,

$$(IL) \,//\, (AD) \quad (3) \qquad \text{et} \qquad IL = \frac{1}{2}\,AD \ (4).$$

De (1) et (3), on déduit que (KJ) // (IL) ; de (2) et (4), on déduit que KJ = IL.
Le quadrilatère KJLI est donc un parallélogramme. Donc, le point O est le milieu de [KL].

• *Pour démontrer qu'un point est le milieu d'un segment, on peut démontrer que ce point est le centre d'un parallélogramme dont une des diagonales est ce segment.*

♦ Exercice n°31 p.19 (Théorème de Ménélaüs)



• Les triangles PMB et PQC sont semblables : $\frac{P\,M\,B}{P\,Q\,C}$. D'où $\frac{PB}{PC} = \frac{MB}{QC}$.

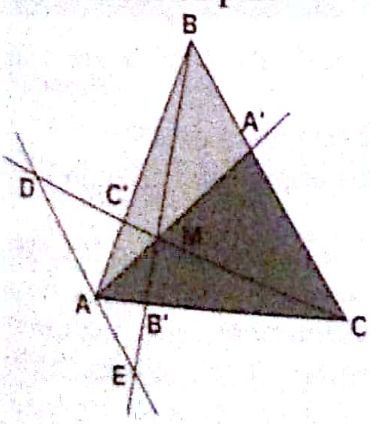
• Les triangles CQN et AMN sont semblables : $\frac{C\,Q\,N}{A\,M\,N}$. D'où $\frac{NC}{NA} = \frac{QC}{MA}$.

Dans le premier membre de l'égalité à démontrer, en remplaçant $\frac{PB}{PC}$ par $\frac{MB}{QC}$ et $\frac{NC}{NA}$ par $\frac{QC}{MA}$,

on obtient : $\frac{PB}{PC} \times \frac{NC}{NA} \times \frac{MA}{MB} = \frac{MB}{QC} \times \frac{QC}{MA} \times \frac{MA}{MB} = 1.$

Attention : *Avant de résoudre l'exercice n°32, il serait bon de faire remarquer aux élèves, la façon dont sont constitués les quotients dont le produit est égal à 1 dans le théorème de Ménélaüs.*

♦ Exercice n°32 p.20



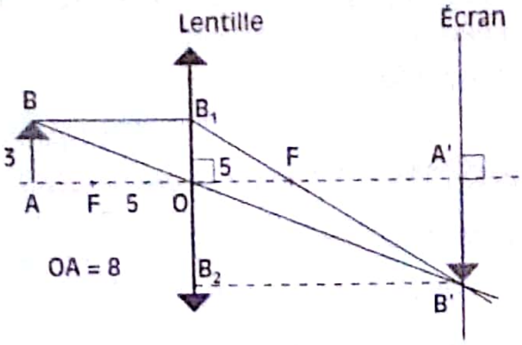
Dans le triangle AA'C, la droite (BB') coupe les droites (CA') en B, (A'A) en M et (AC) en B'.
D'après le Théorème de Ménélaüs, on a : $\frac{BA'}{BC} \times \frac{MA}{MA'} \times \frac{B'C}{B'A} = 1.$ (1)

Dans le triangle AA'B, la droite (CC') coupe les droites (BA') en C, (A'A) en M et (AB) en C'.
D'après le Théorème de Ménélaüs, on a : $\frac{CB}{CA'} \times \frac{MA'}{MA} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$ (2)

On effectue le produit membre à membre des égalités (1) et (2) :

$$\frac{BA'}{CA'} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

♦ **Exercice n°33 p.20**



L'unité de longueur est le centimètre.

On cherche OA' et A'B'.

• Les triangles OAB et OA'B' sont semblables, alors : $\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'}$. Donc : $\frac{A'B'}{OA'} = \frac{3}{8}$.

Par conséquent : 3 OA' = 8 A'B' (1).

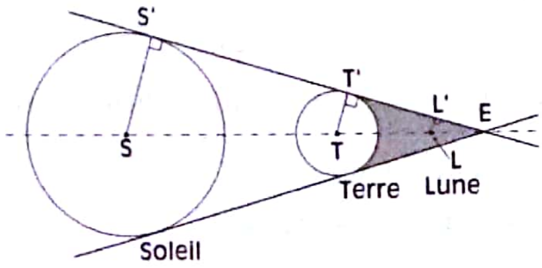
• Les triangles B_1B_2B' et B_1OF' sont semblables, alors : $\frac{OF'}{B_2B'} = \frac{B_1O}{B_1B_2}$. D'où : $\frac{5}{OA'} = \frac{3}{3 + A'B'}$.

Par conséquent : 3 OA' = 15 + 5 A'B' (2).

Des égalités (1) et (2), on tire : 8 A'B' = 15 + 5 A'B'.

Donc : A'B' = 5 et $OA' = \frac{40}{3}$.

♦ **Exercice n°34 p.20**



L'unité de longueur est le kilomètre.

1) Dans le triangle ESS', d'après la propriété de Thalès : $\frac{ET}{ET + ST} = \frac{TT'}{SS'}$. D'où : TT'(ET + ST) = SS' × ET

Donc : ET ≅ 1 379 641,5

2) Dans le triangle ETT', d'après la propriété de Thalès : $\frac{EL}{ET} = \frac{LL'}{TT'}$. Donc : LL' ≅ 4 599

3) 1 738 < 4 599. Donc la Lune est bien entièrement dans la zone d'ombre de la Terre.

2. Triangle rectangle - Trigonométrie

(pages 21 à 34 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
- utiliser la propriété de Pythagore ;
- introduire les notions de sinus, cosinus et tangente d'un angle aigu ou de sa mesure ;
- calculer les éléments d'un triangle rectangle.

Commentaires

Dans ce chapitre, on a besoin du symbole $\sqrt{\ }$, ce qui nécessite l'étude préalable de la leçon 1 du chapitre 11.

Seul le degré sera utilisé pour la mesure des angles ; le radian sera étudié en classe de 2^de^.

Les notions de sinus, cosinus et tangente sont présentées pour les **angles aigus** d'un triangle rectangle.

On ne peut donc, a posteriori, parler de cos $a°$, de sin $a°$ ou de tan $a°$ pour $a = 0$ ou pour $90 \leq a \leq 180$.

On utilisera le repère orthonormé pour compléter la présentation du sinus et du cosinus d'un angle aigu comme abscisse et ordonnée d'un point du quart de cercle trigonométrique. Ceci permet alors de faire une synthèse des acquits de l'élève et facilite la mémorisation des angles particuliers et de leur construction.

Par ailleurs, cette présentation permet de mettre en évidence la décroissance de cos sur]0 ; 90[et la croissance de sin sur ce même intervalle. Cette remarque est nécessaire pour donner un encadrement de la mesure d'un angle dont on connaît le sinus ou le cosinus.
Les problèmes 42 et 43 p 34 montrent comment, à partir d'observations simples et un traitement mathématique convenable, on peut obtenir des résultats intéressants (périmètre de la Terre, distance Terre-Lune).

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Propriétés de Pythagore	
• Propriété de Pythagore Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. **• Réciproque de la propriété de Pythagore** Si dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.	• Calculer un côté d'un triangle rectangle connaissant les deux autres côtés. • Démontrer qu'un triangle est rectangle. • Calculer la mesure d'un segment dans une configuration où ce segment est un côté d'un triangle rectangle : – une corde d'un cercle connaissant le rayon. – le rayon du cercle circonscrit à un triangle équilatéral connaissant le côté. – la hauteur d'un triangle équilatéral connaissant le côté. – la diagonale d'un carré connaissant le côté. – le côté d'un carré connaissant la diagonale.
Cosinus et sinus d'un angle aigu	
• Définitions Dans un triangle rectangle, – on appelle sinus d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse. – on appelle cosinus d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse. **• Notations** $\sin \widehat{A}$, $\cos \widehat{A}$, $\sin a°$ et $\cos a°$. **• Propriétés** – Pour tout angle aigu de mesure $a°$, on a : $0 < \cos a° < 1$; $0 < \sin a° < 1$ $\cos^2 a° + \sin^2 a° = 1$. – Lorsque deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre. • cosinus et sinus d'angles particuliers (30°, 45° et 60°).	• Reconnaître dans un triangle rectangle : – le côté opposé à un angle aigu ; – le côté adjacent à un angle aigu. • Dans un triangle rectangle, calculer : – le sinus et le cosinus d'un angle aigu connaissant l'hypoténuse et un côté de l'angle droit ; – l'hypoténuse connaissant un côté et le cosinus ou le sinus d'un des angles aigus ; – un côté connaissant l'hypoténuse et le cosinus ou le sinus d'un des angles aigus. • Calculer le cosinus d'un angle aigu connaissant son sinus ou le sinus connaissant son cosinus. • Calculer le cosinus d'un angle aigu connaissant le sinus de son complémentaire ou le sinus d'un angle aigu connaissant le cosinus de son complémentaire. • Déterminer graphiquement le sinus et le cosinus d'un angle aigu.
Tangente d'un angle aigu	
• Définitions Dans un triangle rectangle, on appelle tangente d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient du côté opposé à cet angle par le côté adjacent. **• Notations** $\tan \widehat{A}$ et $\tan a°$ **• Propriétés** – La tangente d'un angle aigu est égale au quotient du sinus de cet angle par son cosinus.	• Dans un triangle rectangle, calculer – la tangente d'un angle aigu connaissant les deux côtés de l'angle droit ; – un côté de l'angle droit connaissant l'autre côté et la tangente d'un des angles aigus. • Calculer la tangente d'un angle aigu connaissant : – le sinus de cet angle et son cosinus ; – le sinus de cet angle ; – le cosinus de cet angle.

– Dans un triangle rectangle, les tangentes des angles complémentaires sont inverses l'une de l'autre. • tangente d'angles particuliers (30°, 45° et 60°).	• Calculer la tangente d'un angle aigu connaissant la tangente de son complément. • Connaître la tangente des angles particuliers de mesure 30°, 45° et 60°. • Déterminer graphiquement la tangente d'un angle aigu.

Utilisation de la trigonométrie

	• Utiliser une table trigonométrique pour : – lire le cosinus, le sinus ou la tangente d'angles aigus dont la mesure est un nombre entier ; – trouver la mesure ou une valeur approchée de la mesure d'un angle aigu connaissant son sinus, son cosinus ou sa tangente. • Utiliser une calculatrice pour : – déterminer le cosinus, le sinus ou la tangente d'angles aigus ; – trouver la mesure ou une valeur approchée de la mesure d'un angle aigu connaissant son sinus, son cosinus ou sa tangente. • Utiliser un repère orthonormé pour lire directement certaines informations concernant le sinus et le cosinus.

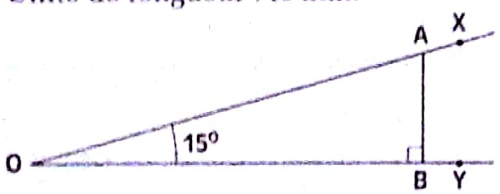
EXERCICES DU MANUEL

♦ **Exercice n°1.a p.22**
a) $BC = \sqrt{74}$ b) $AC = 5\sqrt{3}$.

♦ **Exercice n°1.b p.22**
b) EFG triangle rectangle en G

♦ **Exercice n°1.c p.23**
$\mathcal{A} = 4\sqrt{3}$ $\quad r = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

♦ **Exercice n°2.c p.25**
Unité de longueur : le mm.

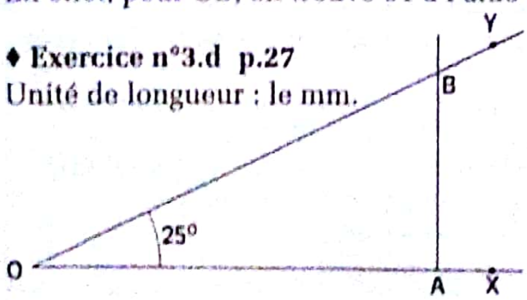


La figure a été réalisée à l'échelle $\frac{1}{2}$

À l'aide du rapporteur, construire un angle $\widehat{XOY}$ de 15°.
Sur la demi-droite [OX), marquer A tel que OA = 100.
La droite passant par A, perpendiculaire à (OY) coupe (OY) en B.
À l'aide de la règle graduée, on mesure le côté [AB] du triangle rectangle AOB.
On trouve : $AB \approx 26$. On en déduit : $\sin 15° = \dfrac{AB}{OA} \approx 0{,}26$.

Remarques:
1) On aurait pu aisément construire un angle de 15° uniquement avec la règle et le compas.
2) On peut profiter de la même figure pour trouver cos 15°.
En effet, pour OB, on trouve 91 à l'aide de la règle graduée. D'où : $\cos 15° = \dfrac{AB}{OA} \approx 0{,}91$.

♦ **Exercice n°3.d p.27**
Unité de longueur : le mm.



La figure a été réalisée à l'échelle $\frac{1}{2}$

À l'aide du rapporteur, construire un angle $\widehat{XOY}$ de 25°.
Sur la demi-droite [OX), marquer A tel que OA = 100.
La droite passant par A, perpendiculaire à (OX) coupe (OY) en B.

À l'aide de la règle graduée, on mesure le côté [AB] du triangle rectangle AOB.
On trouve : AB ≈ 47. On en déduit : $\tan 25° \approx \frac{AB}{OA} \approx 0{,}47$.

Exercices d'entraînement

♦ **Exercice n°1 p.31**

1er cas
$AC = 5\sqrt{2}$
$AC \approx 7{,}07$

2e cas
$AC = 4\sqrt{2}$
$AC \approx 5{,}65$

♦ **Exercice n°2 p.31**

$AC^2 = AD^2 + CD^2$.
$72 = 2\,a^2$
Donc : $a = 6$

♦ **Exercice n°3 p.31**

$BH^2 = BC^2 - HC^2$.
$BH = \sqrt{6{,}75}$
$BH \approx 2{,}59$

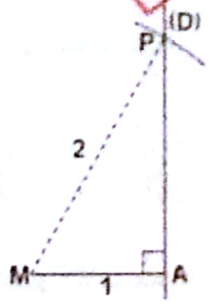
♦ **Exercice n°4 p.31**

$BC^2 = BH^2 + HC^2$.

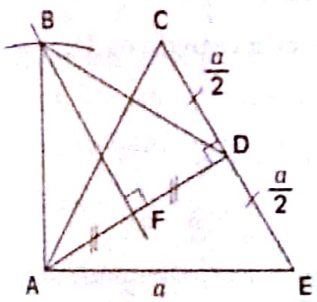
$x^2 - \frac{x^2}{4} = 25$. Donc : $x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

♦ **Exercice n°5 p.31**

1) $BH = \sqrt{3}$
2) L'unité de longueur est le cm.
- Construire un segment [AM] tel que : AM = 1.
- Construire la droite (D) perpendiculaire à la droite (AM), passant par A.
- Construire un arc de cercle de centre M et de rayon 2.
- Marquer P, point d'intersection de cet arc de cercle et de (D).



♦ **Exercice n°6 p.31**



• Dans le triangle ACE : $AD^2 = AE^2 - DE^2$. Donc : $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Par conséquent : Aire ACE $= \frac{a}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

• Dans le triangle ABD : $BF^2 = BD^2 - FD^2$. Donc : $BF^2 = \frac{3a^2}{4} - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2$.

D'où : $BF = \frac{3a}{4}$.

Par conséquent : Aire ABD $= \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{3a}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$.

• Conclusion : Aire ABD $= \frac{3}{2}$ Aire ACE.

♦ **Exercice n°7 p.31**

$OA = r = 4$; $OH^2 = 16 - 4$. Par conséquent : $OH = 2\sqrt{3}$.

♦ **Exercice n°8 p.31**

$\sin \widehat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{4{,}5}{7{,}5} = \frac{3}{5}$.

♦ **Exercice n°9 p.31**

$\cos \widehat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{10{,}8}{13{,}5} = \frac{4}{5}$.

♦ **Exercice n°10 p.31**

$AB = AC \times \cos \widehat{A} = 32{,}5 \times \frac{12}{13}$
$AB = 30$.
$BC = AC \times \sin \widehat{A} = 32{,}5 \times \frac{5}{13}$
$BC = 12{,}5$.

♦ **Exercice n°11 p.31**

$\cos \widehat{A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

♦ **Exercice n°12 p.31**

$\sin \widehat{A} = \frac{40}{41}$.

♦ **Exercice n°13 p.31**

$AC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ et $BC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

♦ **Exercice n°14 p.31**

$BC = \sqrt{3}$ et $AB = 1$.

♦ **Exercice n°15 p.32**

$\cos \widehat{C} = \frac{0{,}75}{2} = \frac{3}{8}$.

♦ **Exercice n°16 p.32**

$\tan \widehat{C} = \frac{7{,}5}{12{,}5} = \frac{3}{5}$.

♦ **Exercice n°17 p.32**

$\tan \widehat{A} = \frac{2}{AB} = \frac{4}{3}$.
Donc : $AB = 1{,}5$
D'où : $AC = 2{,}5$.

♦ **Exercice n°18 p.32**

$AB = 4\sqrt{3}$ et $AC = 8\sqrt{3}$.

♦ **Exercice n°19 p.32**

$\tan \widehat{A} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$.

♦ **Exercice n°20 p.32**

1) $\tan \widehat{A} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

2) $\tan \widehat{C} = \frac{25}{12}$, donc $\tan \widehat{A} = \frac{12}{25}$

♦ **Exercice n°26 p.32**

1) $\sin \widehat{A} = \frac{3}{3{,}2} = 0{,}937\,5$; d'où mes $\widehat{A} \approx 70°$.

2) AB ≈ 1,11.

♦ **Exercice n°24 p.32**

1) $\frac{\sqrt{5}+1}{4} \approx 0{,}809$ et $\frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}309$.

2) $54° < a° < 55°$ et $18° < b° < 19°$.

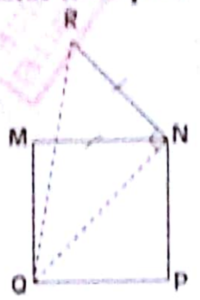
♦ **Exercice n°27 p.32**

1) $\cos \widehat{A} = \frac{0{,}75}{3} = 0{,}25$; d'où mes $\widehat{A} \approx 76°$.

2) BC ≈ 2,90.

Exercices d'approfondissement

♦ **Exercice n°28 p.32**

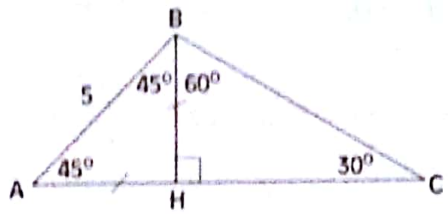


Le carré MNPQ a pour aire MN^2.

• Dans le triangle rectangle MNQ : $NQ^2 = 2\ MN^2$.
Donc le carré ayant pour côté NQ a pour aire le double de l'aire du carré MNPQ.

• Dans le triangle rectangle NRQ : $RQ^2 = 3\ MN^2$.
Donc le carré ayant pour côté RQ a pour aire le triple de l'aire du carré MNPQ.

♦ **Exercice n°29 p.32**



• $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{5}$, donc : $AH = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

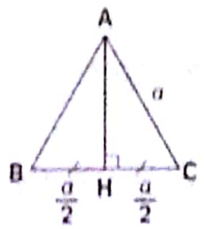
• Le triangle ABH est isocèle et rectangle en H,
donc $BH = AH = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

• $\sin 30° = \frac{1}{2} = \frac{BH}{BC}$, donc : $BC = 5\sqrt{2}$.

• $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CH}{BC}$, donc : $HC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.

• $AC = AH + HC = \frac{5(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2}$.

♦ **Exercice n°30 p.33**



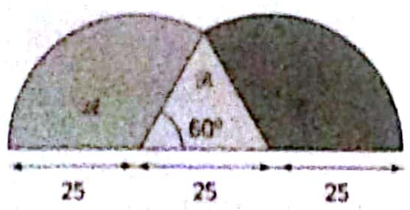
• ABC est un triangle équilatéral de côté a. Donc : $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$AB - AH = \sqrt{3}$; donc : $a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. D'où : $a = 2(2\sqrt{3} + 3)$.

Par conséquent : $AH = 3\sqrt{3} + 6$.

• Donc : $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = 36 + 21\sqrt{3}$.

♦ **Exercice n°31 p.33**



• L'unité de longueur est le cm. ($\pi \approx 3{,}14$)
$\mathcal{A}$: aire d'un des secteurs circulaires (de 120°).
$\mathcal{B}$: aire du triangle équilatéral.
$\mathcal{C}$: aire de l'autre secteur circulaire (de 120°).
• Aire balayée $= \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = 2\mathcal{A} + \mathcal{C}$
car les deux secteurs ont la même aire.

$\mathcal{A} = \frac{120}{360}\pi \times 25^2 = \frac{625}{3}\pi$

$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \times 25 \times 25\frac{\sqrt{3}}{2} = 625\frac{\sqrt{3}}{4}$

Aire balayée : $625 \times (\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}) \approx 1\,580$.

♦ **Exercice n°32 p.33**

1) $66° < \text{mes } \widehat{O_1} < 67°$ et $23° < \text{mes } \widehat{O_2} < 24°$.

2) • $\sin \widehat{O_2} = \dfrac{OT}{r}$, donc : $OT = r \sin \widehat{O_2}$. Par conséquent : $r \sin 23° < OT < r \sin 24°$ $(r = 6\,400)$.

D'où : $2\,502{,}4 < OT < 2\,604{,}8$.

• $\sin \widehat{O_1} = \dfrac{OC}{r}$, donc : $OC = r \sin \widehat{O_1}$. Par conséquent : $r \sin 66° < OC < r \sin 67°$

D'où : $5\,849{,}6 < OC < 5\,894{,}4$.

$TC = OC - OT = OC + (-OT)$ et $PC = r - OC = r + (-OC)$

d'où : $3\,244{,}8 < TC < 3\,392$ et $505{,}6 < PC < 550{,}4$

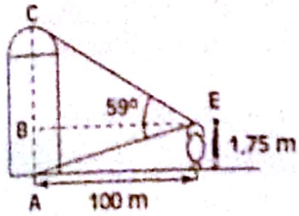
3) P_{CA} désigne le périmètre du Cercle Polaire Arctique

$P_{CA} = 2\pi\sqrt{r^2 - OC^2}$ d'où : $15\,657{,}29 < P_{CA} < 16\,306{,}46$

P_{TC} désigne le périmètre du Tropique du Cancer.

$P_{TC} = 2\pi\sqrt{r^2 - OT^2}$ d'où : $36\,712{,}50 < P_{TC} < 36\,992{,}34$

♦ **Exercice n°33 p.33**



On pose : $AC = h$; $BC = x$.

• $\tan \widehat{AEB} = \dfrac{1{,}75}{100} = 0{,}017\,5$. D'où : $\text{mes } \widehat{AEB} \approx 1°$.

Par conséquent : $\text{mes } \widehat{BEC} \approx 58°$.

• $\tan 58° = \dfrac{x}{100}$, donc : $x = 100 \tan 58°$. D'où : $x \approx 160$.

Par conséquent : $h \approx 161{,}75$ (en m).

♦ **Exercice n°34 p.33**

$\tan x° = \dfrac{0{,}15}{2} = 0{,}075$. Donc : $x° \approx 4°$.

♦ **Exercice n°35 p.33**

1) $\cos \widehat{B} = 0{,}6$: donc $\sin \widehat{B} = 0{,}8$.

Par conséquent : $\tan \widehat{B} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3}$.

2) $\sin \widehat{B} = \dfrac{8}{17}$; donc : $\cos \widehat{B} = \dfrac{15}{17}$.

Par conséquent : $\tan \widehat{B} = \dfrac{8}{15}$.

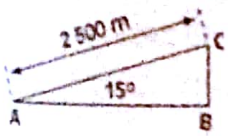
♦ **Exercice n°36 p.33**

• $\tan x° = 0{,}06$; donc $x° \approx 3{,}4°$.

• $\tan x° = 0{,}08$; donc $x° \approx 4{,}6°$.

• $\tan x° = 0{,}10$; donc $x° \approx 5{,}7\,°$.

♦ **Exercice n°37 p.33**



$\sin 15° \approx 0{,}259$ et

$\sin 15° = \dfrac{CB}{2\,500}$.

Donc : $CB = 647{,}5$ (en m)

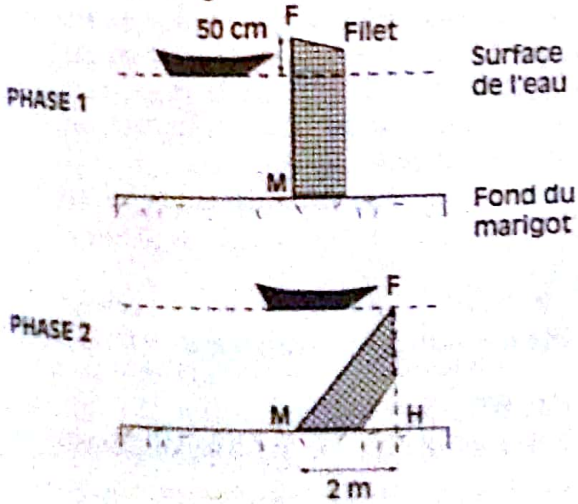
♦ **Exercice n°38 p.34**

1) $\tan \widehat{A} = 0{,}17$;

donc : $\text{mes } \widehat{A} \approx 10°$.

2) $CB = 34{,}8$ (en m).

♦ **Exercice n°39 p.33**



L'unité de longueur est le centimètre.

MF : longueur du filet.

MS : profondeur du marigot.

$SF = 50$.

$MH = 200$.

• Le triangle MHF est rectangle en H, donc :

$MF^2 = MH^2 + HF^2$.

Or : $HF = MS$ et $MF = MS + 50$.

Par conséquent, $(MS + 50)^2 = 40\,000 + MS^2$.

Donc : $MS^2 + 100\,MS + 2\,500 = 40\,000 + MS^2$.

D'où : $MS = 375$.

Profondeur du marigot : 3,75 m.

3. vecteurs

(pages 35 à 46 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
- présenter le produit d'un vecteur par un nombre réel ;
- construire l'outil vectoriel qui permettra de compléter l'étude des configurations du plan.

Commentaires

Les vecteurs seront utilisés pour justifier ou établir des propriétés de certaines configurations du plan. (Droites de même direction, ou perpendiculaires, points alignés ou non, ...), et réciproquement les propriétés des configurations du plan permettront de justifier que deux vecteurs sont colinéaires ou non.

Dans le paragraphe « Langage géométrique - Langage vectoriel », on trouvera la formulation vectorielle des propriétés de Thalès.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Somme de vecteurs **• Vocabulaire** Différence de vecteurs. **• Remarques** – La somme de deux vecteurs de même direction est un vecteur de même direction ou le vecteur nul. – Pour effectuer certains calculs sur les vecteurs, il est souvent judicieux de remplacer l'un d'eux par une somme ou par une différence de deux vecteurs.	• Représenter la somme de plusieurs vecteurs. • Représenter la différence de deux vecteurs. • Reconnaître la somme de plusieurs vecteurs. • Reconnaître la différence de deux vecteurs. • Réduire des sommes de vecteurs. • Utiliser des transformations d'écritures pour : – représenter un vecteur ; – construire un point ; – démontrer une égalité de vecteurs. • Écrire un vecteur comme somme ou différence de vecteurs.
Somme de vecteurs **• Définition** On appelle produit du vecteur non nul $\vec{AB}$ par le nombre réel non nul k, le vecteur $\vec{MN}$ tel que : – (MN) et (AB) ont la même direction ; – $\vec{MN}$ et $\vec{AB}$ ont le même sens lorsque k est positif et ont des sens contraires lorsque k est négatif ; – $MN = \lvert k \rvert AB$. Le produit du vecteur nul par un nombre réel est le vecteur nul. Le produit du vecteur $\vec{AB}$ par 0 est le vecteur nul. **• Propriétés** A, B, C et D sont des points du plan. k et k' sont des nombres réels. On a : $k(k'\vec{AB}) = (kk')\vec{AB}$; $k\vec{AB} + k\vec{CD} = k(\vec{AB} + \vec{CD})$ $k\vec{AB} + k'\vec{AB} = (k + k')\vec{AB}$; $1\vec{AB} = \vec{AB}$	• Représenter le produit d'un vecteur par un nombre réel. • Exprimer un vecteur en fonction d'un autre vecteur. • Utiliser les propriétés du produit d'un vecteur par un nombre réel pour : – représenter un vecteur ; – construire un point ; – simplifier une écriture ; – démontrer une égalité de vecteurs.

• **Propriété**

A, B, C et D sont quatre points du plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction
équivaut à
on peut trouver un nombre réel k non nul
tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

• **Définition**

On dit que deux vecteurs sont *colinéaires* lorsqu'ils ont même direction ou lorsque l'un d'eux est le vecteur nul.

• **Propriété**

A et B sont deux points du plan.

M ∈ (AB) *équivaut à* $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

• **Définitions**

– On dit que le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est un *vecteur directeur* de la droite (D) lorsque les droites (D) et (AB) sont parallèles.

– On dit que deux *vecteurs non nuls* sont *orthogonaux* lorsqu'ils sont des vecteurs directeurs de deux droites perpendiculaires.

• **Propriétés**

– I est le milieu de [AB] *équivaut à* $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

– M ∈ (AB) *équivaut à* on peut trouver un nombre k tel que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

– (AB)//(CD) *équivaut à* on peut trouver un nombre k non nul tel que : $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

– ABC est un triangle, M un point de (AB) et N un point de (AC).
(MN)//(BC) *équivaut à* on peut trouver un nombre k non nul tel que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$.

• Justifier que deux vecteurs ont même direction.
• Justifier que deux vecteurs sont colinéaires.
• Justifier qu'un vecteur non nul est un vecteur directeur d'une droite.
• Justifier que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux.
• Justifier, en utilisant une égalité vectorielle :
  – qu'un point est le milieu d'un segment ;
  – que trois points sont alignés ;
  – que deux droites sont parallèles.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ **Exercice 1.c p.37**

$\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HI} = (\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OG}) + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FO} + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{HI}) = \overrightarrow{FO} + (-\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{HI})$

$\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{FO} + \vec{0} = \overrightarrow{FO}$

♦ **Exercice 3.a p.41**

– La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au support du troisième côté.

– Si $\overrightarrow{BJ}$ a la même direction que $\overrightarrow{CJ}$, alors B, C, J et A sont alignés, ce qui est contraire à l'hypothèse « ABC est un triangle ».

Exercices d'entraînement

♦ **Exercice n°1 p.44**

1) 2) et 3) : $\overrightarrow{AC}$; 4) et 8) $\vec{0}$; 5) $\overrightarrow{CD}$; 6) $\overrightarrow{AD}$; 7) $\overrightarrow{AO}$

♦ **Exercice n°2 p.44**

1) $\vec{AB} - \vec{IC} = \vec{DI}$. 2) $\vec{AB} - \vec{DA} = \vec{AC}$. 3) $\vec{AI} - \vec{IC} = \vec{0}$.
4) $\vec{AI} - \vec{BC} = \vec{IB}$. 5) $\vec{AB} - \vec{DI} = \vec{AI}$. 6) $\vec{AD} - \vec{ID} = \vec{AI}$.

♦ **Exercice n°3 p.44**

1) $\vec{AF}$ 2) $\vec{DG}$ 3) $\vec{CE}$ 4) $\vec{0}$.

♦ **Exercice n°7 p.44**

1) $\vec{AC} = 2\,\vec{OC}$ 2) $\vec{OB} = \frac{1}{2}\vec{DB}$ 3) $\vec{AB} + \vec{DC} = 2\,\vec{DC}$ 4) $\vec{BO} = -1\,\vec{DO}$ 5) $\vec{AO} = -\frac{1}{2}\,\vec{CA}$.

♦ **Exercice n°8 p.44**

1) $\vec{AC} = 4\,\vec{OP}$ 2) $\vec{ON} = -\frac{1}{2}\vec{BO}$ 3) $\vec{OI} + \vec{OJ} = -2\,\vec{OQ}$ 4) $\vec{OC} + \vec{OD} = -2\,\vec{OI}$.

♦ **Exercice n°11 p.44-45**

1) $-\frac{7}{3}\vec{CD} + 2\,\vec{EF}$ 2) $\frac{17}{3}\vec{CD} + 8\,\vec{EF}$ 3) $\frac{13}{3}\vec{CD} + 2\,\vec{EF}$ 4) $7\vec{CD} + \frac{91}{4}\vec{EF}$ 5) $\frac{23}{6}\vec{CD} + 11\vec{EF}$.

♦ **Exercice n°12 p.45**

$\vec{AB} = \frac{8}{3}\vec{EF}$.

♦ **Exercice n°13 p.45**

1) $\vec{AB} = -\frac{3}{10}\vec{EF}$. 2) $\vec{EF} = -\frac{10}{3}\vec{AB}$.

♦ **Exercice n°18 p.46**

1) $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{MP}$ 2) $\vec{PM} = -2\,\vec{IJ}$.

♦ **Exercice n°19 p.45**

$\vec{EF} = \frac{2}{3}\vec{AC}$.

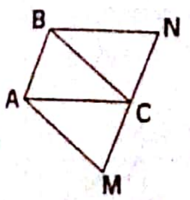
♦ **Exercice n°20 p.45**

1) $\vec{BI} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$ 2) $\vec{BC} = 2\vec{JC}$.

♦ **Exercice n°21 p.45**

$\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AP}$; $\vec{BM} = -\frac{3}{2}\vec{GB}$; $\vec{NG} = -\frac{1}{3}\vec{CN}$.

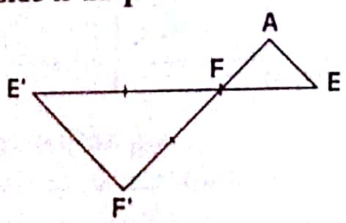
♦ **Exercice n°22 p.45**



- $\vec{AM} = \vec{BC}$, donc : $\vec{AB} = \vec{MC}$ (1).
- $\vec{NB} = \vec{CA}$, donc : $\vec{AB} = \vec{CN}$ (2).

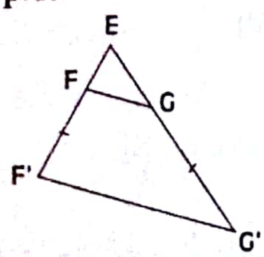
Par conséquent : $\vec{MC} = \vec{CN}$.
Donc les points M, C et N sont alignés et C est le milieu de [MN].

♦ **Exercice n°23 p.45**



1) $\vec{AE} = \vec{AF} + \vec{FE}$ et $\vec{F'E'} = \vec{F'E} + \vec{FE'}$
2) $\vec{F'F} = -2\,\vec{AF}$ et $\vec{FE'} = -2\vec{FE}$
donc : $\vec{F'E'} = -2\,\vec{AE}$
Par conséquent : $\vec{AE} = -\frac{1}{2}\vec{F'E'}$.

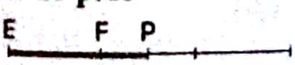
♦ **Exercice n°24 p.45**



- $\vec{FF'} = 2\,\vec{EF}$, donc : $\vec{EF'} = 3\,\vec{EF}$.
- $\vec{GG'} = 2\,\vec{EF}$, donc : $\vec{EG'} = 3\,\vec{EG}$.
- $\vec{F'G'} = \vec{F'E} + \vec{EF'} = 3\,\vec{FE} + 3\,\vec{EG} = 3\,\vec{FG}$.

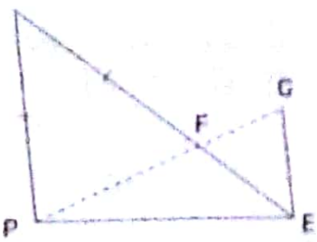
Exercices d'approfondissement

♦ **Exercice n°25 p.45**



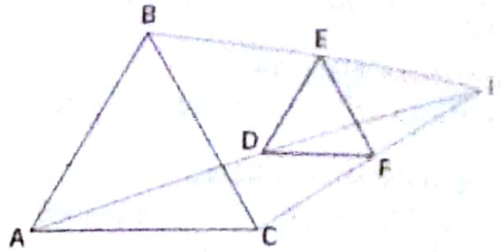
2) $\vec{PF} = -\frac{1}{3}\vec{EP}$ et $\vec{FE} = 2\,\vec{PF}$.

♦ **Exercice n°26 p.45**



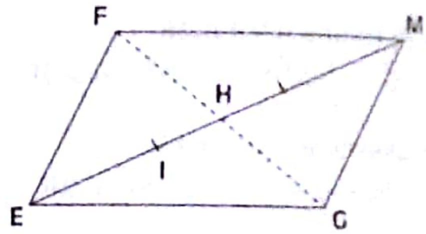
2) $\overrightarrow{FP} = 2\,\overrightarrow{EF} + (-2)\,\overrightarrow{EG}$.
3) $\overrightarrow{FP} = 2\,(\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EG}) = 2\overrightarrow{GF}$.
Donc, les points G, F et P sont alignés.

♦ **Exercice n°27 p.46**



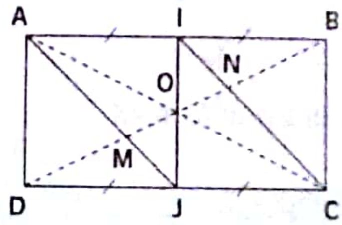
2) $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{IB}$. Donc, E est le milieu de [IB].
De même, D est le milieu de [IA].
Donc, dans le triangle IBA : (ED)//(BA) et $ED = \frac{1}{2}AB$
(Conséquence de la propriété de Thalès).
3) On démontre de même que : $DF = \frac{1}{2}AC$ et $EF = \frac{1}{2}\,BC$.
Par conséquent, le triangle EDF est équilatéral.

♦ **Exercice n°28 p.46**



1) M est le point tel que : $\overrightarrow{EM} = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG})$; et H le milieu de [EM]. Donc : $\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG})$. Par conséquent, le quadrilatère EFMG est un parallélogramme, donc H est le milieu de [FG].
2) I est le point tel que : $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG})$.
Donc : $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.
I est donc le centre de gravité du triangle EFG. (I situé aux $\frac{2}{3}$ de la médiane à partir du sommet E)

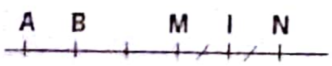
♦ **Exercice n°29 p.46**



a) • Les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [DC], donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{JC}$. Par conséquent : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{IC}$ et (AJ)//(IC).
• Dans le triangle DNC, le point J est le milieu de [DC], donc la droite passant par J et parallèle à (NC) coupe [DN] en son milieu : M est le milieu de [DN]. Par conséquent : $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN}$.
• De même, dans le triangle AMB, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.
b) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{6}\,\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{BD} = -\frac{3}{2}\,\overrightarrow{DN}$; $\overrightarrow{MO} = -\frac{1}{6}\,\overrightarrow{BD}$.

♦ **Exercice n°30 p.46**
$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BI}$, donc : $2\,\overrightarrow{MI} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI})$.
Par conséquent : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$ (car I est le milieu de [AB]).

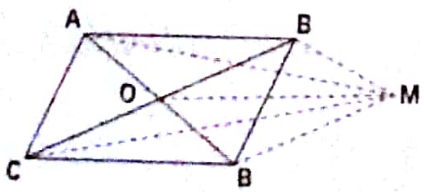
♦ **Exercice n°31 p.46**



• $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MN}$, et $2\,\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{MI}$. Donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MI}$.
• $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AB}$.

Remarque : En utilisant le résultat de l'exercice 30, on a : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}\,(3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AB})$.

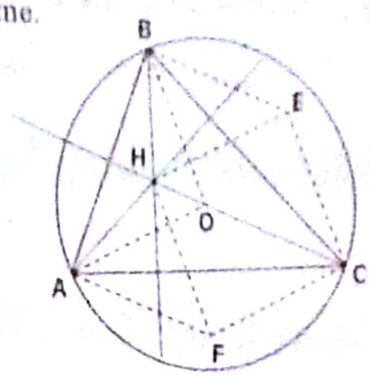
♦ **Exercice n°32 p.46**



• $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) = 2\,\overrightarrow{MO}$, car $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.
• $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) = 2\,\overrightarrow{MO}$, car $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
Par conséquent : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

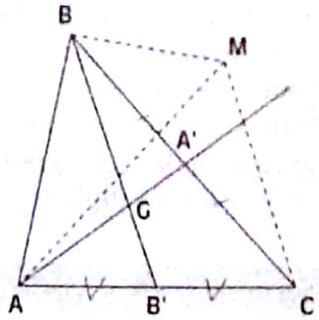
♦ Exercice n°33 p.46

2) $\vec{OE} = \vec{OB} + \vec{OC}$. Donc, le quadrilatère OBEC est un parallélogramme.
Or, $OB = OC = r$, par conséquent OBEC est un losange.
D'où : $(OE) \perp (BC)$.
On démontre de même que : $(OF) \perp (AC)$.
4) $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$. Donc : $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OE}$
Par conséquent, OAHE est un parallélogramme, donc : $\vec{AH} = \vec{OE}$.
Même démonstration pour $\vec{BH} = \vec{OF}$.
5) $(AH)//(OE)$ et $(OE) \perp (BC)$. Donc : $(AH) \perp (BC)$.
On démontre de même que : $(OF) \perp (AC)$ et $(BH) \perp (AC)$.
Par conséquent, le point H est l'orthocentre du triangle ABC.



♦ Exercice n°34 p.46

1) Le point A' est le milieu de [BC], donc : $\vec{A'B} + \vec{A'C} = \vec{0}$.
Par conséquent :
$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MA'} + \vec{A'A} + \vec{MA'} + \vec{A'B} + \vec{MA'} + \vec{A'C} = 3\,\vec{MA'} + \vec{A'A}$.
2) Le point G est le centre de gravité du triangle ABC, par conséquent G appartient à la droite (AA'), on a :
$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 3\vec{GA'} + \vec{A'A}$. Or : $\vec{GA'} = \frac{1}{3}\vec{AA'}$.
Par conséquent, $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

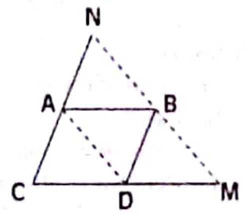


♦ Exercice n°35 p.46

1) $\vec{AC} + \vec{BD} = (\vec{AD} + \vec{DC}) + (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AD} + \vec{BC}$.
2) $\vec{AC} - \vec{BD} = (\vec{AB} + \vec{BC}) - (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} - \vec{CD}$.

♦ Exercice n°36 p.46

• (AD) // (BN) et (AN) // (BD) ; donc ADBN est un parallélogramme.
D'où : $\vec{NB} = \vec{AD}$.
De même, ABMD est un parallélogramme, d'où : $\vec{BM} = \vec{AD}$.
Par conséquent : $\vec{NB} = \vec{BM}$.
• $\vec{BM} = \vec{BD} + \vec{DM} = \vec{AC} + \vec{DM} = \vec{NB}$.



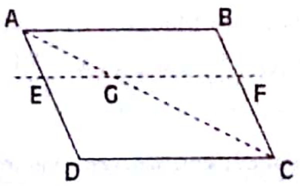
♦ Exercice n°37 p.46

$\vec{BD} + \vec{BF} = \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{BC} + \vec{CF} = \vec{BA} + \vec{BC} - 2\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AB} - 2\vec{AC} = \vec{0}$.

♦ Exercice n°38 p.46

1) D'après la formulation vectorielle de la propriété de Thalès, dans le triangle ADC,
(EG) // (DC) *équivaut à* on peut trouver un nombre réel k tel que : $\vec{AE} = k\,\vec{AD}$ et $\vec{AG} = k\,\vec{AC}$.

Or $\vec{AE} = \frac{4}{11}\vec{AD}$; donc $\vec{AG} = \frac{4}{11}\vec{AC}$.
Par conséquent, $\vec{EG} = \vec{AG} - \vec{AE} = \frac{4}{11}\vec{AC} - \frac{4}{11}\vec{AD} = \frac{4}{11}\vec{DC}$.



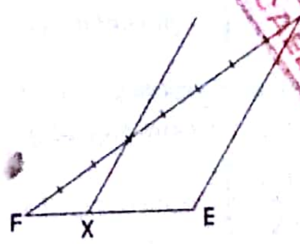
or $\vec{DC} = \vec{EF} = \vec{AB}$ donc $\vec{EG} = \frac{4}{11}\vec{EF} = \frac{4}{11}\vec{AB}$ et $\vec{AB} = \vec{EF} = \vec{EG} + \vec{GF}$.
On déduit :

2) $\vec{GF} = \frac{7}{11}\vec{AB}$ et 3) $7\vec{EG} + 4\,\vec{FG} = \vec{0}$.

♦ Exercice n°39 p.46

$$3\vec{EX} + 5\vec{FX} = 3\vec{EF} + 3\vec{FX} + 5\vec{FX} = 3\vec{EF} + 8\vec{FX}$$

Donc
$3\vec{EX} + 5\vec{FX} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{FX} = \frac{3}{8}\vec{FE}$.



4. Coordonnées d'un vecteur

(pages 47 à 58 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à fournir à l'élève les bases de la géométrie analytique, en particulier les équations de droites.

Commentaires

Il s'agit d'amener progressivement l'élève à utiliser les cordonnées de vecteur pour résoudre des problèmes qui concernent des configurations du plan.
Le professeur attirera l'attention des élèves sur la nécessité de l'orthonormalité du repère pour les études où interviennent les distances et l'orthogonalité.
Pour améliorer la représentation mentale de la notion de vecteur chez l'élève, on pourra faire des activités telles que la représentation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le cas où A et B sont des points « inaccessibles » (cf. exemple p 53).

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Somme de vecteurs	
• **Égalité de couples** Les couples $(x\ ;\ y)$ et $(x'\ ;\ y')$ sont égaux *équivaut à* $x = x'$ et $y = y'$. • **Définitions** Le plan est muni du repère (O, I, J). A et B sont des points du plan. On appelle couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, le couple de nombres réels $(x\ ;\ y)$ tel que : $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OY}$. • **Notations** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, ou $\overrightarrow{AB}\ (x\ ;\ y)$ • **Propriétés** – Le plan est muni d'un repère. A, B, A' et B' sont des points du plan. Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'})\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$. – Le plan est muni d'un repère. A et B sont des points du plan, k est un nombre réel. Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors $k\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.	• Reconnaître des couples égaux. • Dans le plan muni d'un repère, représenter un vecteur connaissant le couple de ses coordonnées. • Dans le plan muni d'un repère, construire le point B connaissant le couple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le couple des coordonnées du point A. • Calculer le couple des coordonnées de la somme de deux vecteurs. • Calculer le couple des coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre.
Vecteurs colinéaires - Vecteurs orthogonaux	
• **Propriétés** – Le plan est muni d'un repère. $\left[\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\text{ et }\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\text{ sont colinéaires}\right]$ *équivaut à* $[xy' - yx' = 0]$. – Le plan est muni d'un repère. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont deux vecteurs non nuls. $\left[\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\text{ et }\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\text{ sont orthogonaux}\right]$ *équivaut à* $[xx' + yy' = 0]$.	• Reconnaître des vecteurs colinéaires. • Démontrer que des vecteurs sont colinéaires. • Reconnaître des vecteurs orthogonaux. • Démontrer que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux.

Calculs dans un repère

Propriétés

– Le plan est muni d'un repère.
A et B sont deux points du plan.
Si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$, alors $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

– Le plan est muni du repère (O,I,J).
K est le milieu du segment [AB].
Si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$, alors $K\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$

– Le plan est muni d'un repère orthonormé.
A et B sont deux points du plan.
Si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$,
alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

* Calculer le couple des coordonnées d'un vecteur $\vec{AB}$ connaissant le couple des coordonnées de A et de B
* Calculer le couple des coordonnées de A (respectivement de B) connaissant le couple des coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ et le couple des coordonnées de B (respectivement de A)
* Démontrer que trois points sont alignés
* Démontrer que deux droites sont perpendiculaires
* Calculer le couple des coordonnées du milieu d'un segment
* Calculer la distance de deux points dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Exercices du Manuel

Exercices d'entraînement

♦ **Exercice n°4 p.56**

$x = -2$ et $y = 11$.

♦ **Exercice n°7 p.56**

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont orthogonaux.

♦ **Exercice n°11 p.56**

$\vec{AC}(2 ; 2)$ et $\vec{AD}(-7,5 ; -7,5)$.
$C(1 ; 4)$ et $D(-6,5 ; -6,5)$.

♦ **Exercice n°13 p.56**

$\vec{AB}(-2 ; 1)$ et $\vec{AC}(4 ; -2)$. Les points A, B et C sont alignés, car : $(-2) \times (-2) - 1 \times 4 = 0$.

♦ **Exercice n°16 p.57**

1) $M(0 ; 0,5)$. 2) $P(0 ; 0,5)$.
3) ABCD est un parallélogramme.

♦ **Exercice n°18 p.57**

$\vec{AB}(\frac{4}{3} ; \frac{4}{3})$ et $\vec{BC}(\frac{11}{3} ; -\frac{11}{3})$, donc $\vec{AB} \perp \vec{BC}$.

♦ **Exercice n°19 p.57**

1) $AB = DC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $BC = AD = \sqrt{10}$.
2) $\vec{AB}(4 ; 2)$ et $\vec{DC}(4 ; 2)$, donc : $\vec{AB} = \vec{DC}$.
Par conséquent ABCD est un parallélogramme.

♦ **Exercice n°6 p.56**

$x = 6$.

♦ **Exercice n°8 p.56**

$x = \frac{1}{12}$.

♦ **Exercice n°12 p.56**

1) $\vec{AB}(6 ; 14)$ et $\vec{CD}(3 ; 7)$. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires, car : $6 \times 7 - 14 \times 3 = 0$.
2) $\vec{BD}$ et $\vec{CD}$ ne sont pas colinéaires.

♦ **Exercice n°14 p.56**

$y_B = 3$.

♦ **Exercice n°17 p.57**

1) $AB = AC = \sqrt{29}$.
2) ABC est un triangle isocèle en A.

♦ **Exercice n°20 p.57**

$AB = BC = AC = 6\sqrt{2}$.

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n°21 p.57

$D(x\ ;\ y)$ est le point tel que ABCD soit un parallélogramme.

$\vec{AB}(-5\ ;\ -3)$ et $\vec{DC}(-4-x\ ;\ 3-y)$.

$\vec{AB} = \vec{DC}$ équivaut à $x = 1$ et $y = 6$.

♦ Exercice n°22 p.57

$D(x\ ;\ y)$ est l'image de C par la translation $t_{\vec{AB}}$.

$\vec{AB} = \vec{CD}$ équivaut à $(4\ ;\ 2) = (x\ ;\ y+3)$.

Donc : $x = 4$ et $y = -1$.

♦ Exercice n°23 p.57

1) $M\left(-\frac{3}{2}\ ;\ 1\right)$.

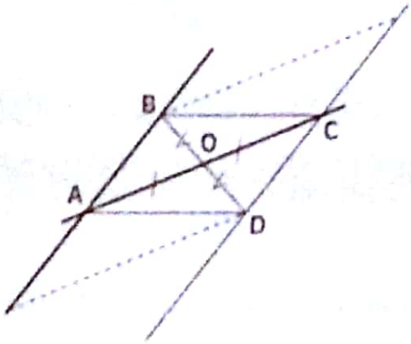
2) $\vec{MB} + \vec{MD} = \vec{0}$ équivaut à $\left(-\frac{5}{2}\ ;\ 1\right) + \left(x + \frac{3}{2}\ ;\ y-1\right) = (0\ ;\ 0)$.

Par conséquent : $x = 1$ et $y = 0$.

3) ABCD est un parallélogramme.

♦ Exercice n°24 p.57

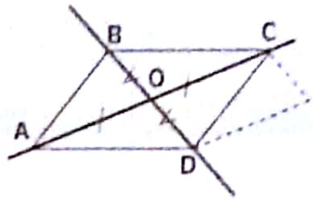
1) Dans le repère (A,O,B)



$A(0\ ;\ 0)$; $B(0\ ;\ 1)$; $O(1\ ;\ 0)$; $C(2\ ;\ 0)$ et $D(2\ ;\ -1)$.

Donc : $\vec{AC}(2\ ;\ 0)$; $\vec{CD}(0\ ;\ -1)$; $\vec{BC}(2\ ;\ -1)$; $\vec{BD}(2\ ;\ -2)$.

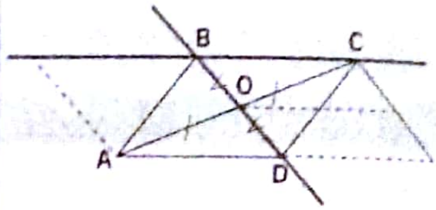
2) Dans le repère (O,D,C)



$A(0\ ;\ -1)$; $B(-1\ ;\ 0)$; $O(0\ ;\ 0)$; $C(0\ ;\ 1)$ et $D(1\ ;\ 0)$.

Donc : $\vec{AC}(0\ ;\ 2)$; $\vec{CD}(1\ ;\ -1)$; $\vec{BC}(1\ ;\ 1)$; $\vec{BD}(2\ ;\ 0)$.

3) Dans le repère (B,O,C)



$A(2\ ;\ -1)$; $B(0\ ;\ 0)$; $O(1\ ;\ 0)$; $C(0\ ;\ 1)$ et $D(2\ ;\ 0)$.

Donc : $\vec{AC}(-2\ ;\ 2)$; $\vec{CD}(2\ ;\ -1)$; $\vec{BC}(0\ ;\ 1)$; $\vec{BD}(2\ ;\ 0)$.

♦ Exercice n°25 p.57

1) Dans le repère (B,B',C)

$A(2\ ;\ -1)$; $B(0\ ;\ 0)$; $A'(0\ ;\ -0{,}5)$; $B'(1\ ;\ 0)$; $C(0\ ;\ 1)$; $G\left(\frac{2}{3}\ ;\ 0\right)$.

Donc :

$\vec{BC}(0\ ;\ 1)$; $\vec{CA}(2\ ;\ -2)$;

$\vec{AA'}\left(-2\ ;\ \frac{1}{2}\right)$; $\vec{GB'}\left(\frac{1}{3}\ ;\ 0\right)$;

$\vec{AG}\left(-\frac{4}{3}\ ;\ 1\right)$

2) Dans le repère (G,B,C)

$A(-1\ ;\ -1)$; $B(1\ ;\ 0)$; $A'(0{,}5\ ;\ 0{,}5)$; $B'(-0{,}5\ ;\ 0)$; $C(0\ ;\ 1)$; $G(0 ;\ 0)$.

Donc :

$\vec{BC}(-1\ ;\ 1)$; $\vec{CA}(-1\ ;\ -2)$;

$\vec{AA'}\left(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right)$; $\vec{GB'}\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$;

$\vec{AG}(1\ ;\ 1)$

3) Dans le repère (A',B',C')

$A(1\ ;\ 1)$; $B(-1\ ;\ 1)$; $A'(0\ ;\ 0)$; $B'(1\ ;\ 0)$; $C(1\ ;\ -1)$; $G\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

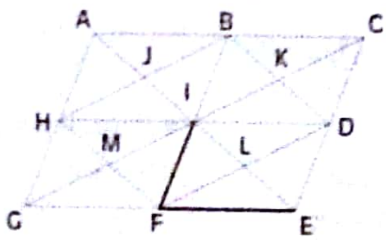
Donc :

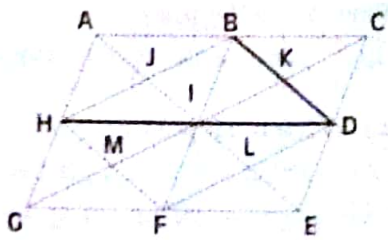
$\vec{BC}(2\ ;\ -2)$; $\vec{CA}(0\ ;\ 2)$;

$\vec{AA'}(-1\ ;\ -1)$; $\vec{GB}\left(\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{1}{3}\right)$;

$\vec{AG}\left(-\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{2}{3}\right)$

♦ Exercice n°26 p.57





1) Dans le repère (I,D,B)
A(– 1 ; 1) ; B(0 ; 1) ; C(1 ; 1) ;
D(1 ; 0) ; E(1 ; – 1) ; F(0 ; – 1) ;
G(– 1 ; – 1) ; H(– 1; 0) ; I(0 ; 0) ;
J(–0,5 ; 0,5) ; K(0,5 ; 0,5) ;
L(0,5 ; – 0,5) ; M(– 0,5 ; – 0,5).

2) Dans le repère (F,E,I)
A(– 1 ; 2) ; B(0 ; 2) ; C(1 ; 2) ;
D(1 ; 1) ; E(1 ; 0) ; F(0 ; 0) ;
G(– 1 ; 0) ; H(– 1; 1) ; I(0 ; 1) ;
J(– 0,5 ; 1,5) ; K(0,5 ; 1,5) ;
L(0,5 ; 0,5) ; M(– 0,5 ; 0,5).

3) Dans le repère (D,B,H)
A(1 ; 0,5) ; B(1 ; 0) ; C(1 ; – 0,5) ;
D(0 ; 0) ; E(– 1 ; 0,5) ; F(– 1 ; 1) ;
G(– 1 ; 1,5) ; H(0 ; 1) ; I(0 ; 0,5) ;
J(0,5 ; 0,5); K(0,5 ; 0);
L(– 0,5 ; 0,5) ; M(– 0,5 ; 1).

♦ Exercice n°27 p.57

$\vec{AB}(4 ; 2)$; $C(0 ; y)$ et $D(x ; 0)$. Donc : $\vec{AC}(1 ; y + 1)$ et $\vec{AD}(x + 1 ; 1)$.

• $\vec{AC} \perp \vec{AB}$ équivaut à $4 + 2(y + 1) = 0$, donc : $y = -3$. Par conséquent : C $(0 ; -3)$.

• $\vec{AD} \perp \vec{AB}$ équivaut à $4(x + 1) + 2 = 0$, donc : $x = -\frac{3}{2}$. Par conséquent : D $(-\frac{3}{2} ; 0)$.

♦ Exercice n°28 p.57

1) $\vec{AB}(-2 ; 2)$ et $\vec{AC}(4 ; -4)$. Donc : $\vec{AB} \perp \vec{AC}$. Par conséquent, le triangle ABC est rectangle en A.

2) E est le milieu de [BC]. D'où : $E(-1 ; 1)$ et $r = EC = \sqrt{10}$.

♦ Exercice n°29 p.57

1) $\vec{AB}(-2 ; 6)$ et $\vec{AD}(6 ; 2)$. Donc : $\vec{AB} \perp \vec{AD}$;
2) $AB = 2\sqrt{10} = AD$;
3) Donc, le triangle BAD est rectangle isocèle en A ;
4) $BC = 2\sqrt{10} = AD$. D'où, ABCD est un carré.

♦ Exercice n°30 p.58

1) • On pose $C(x ; 0)$ le point d'intersection de (AB) et (OI) ; donc : $\vec{AB}(-4 ; 4)$ et $\vec{AC}(x - 2 ; 1)$.
Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, donc : $(-4)(1) - 4(x - 2) = 0$. D'où : $x = 1$. $C(1 ; 0)$.

• On pose $D(0 ; y)$, le point d'intersection de (AB) et (OJ) ; donc : $\vec{AB}(-4 ; 4)$ et $\vec{AD}(-2 ; y + 1)$.
Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ sont colinéaires, donc : $(-4)(y + 1) - 4(-2) = 0$. D'où : $y = 1$. $D(0 ; 1)$.

2) On pose $G(m ; 0)$, donc : $-4(-3) - 4m = 0$. D'où : $m = 3$. Par conséquent : $G(3 ; 0)$.

3) On pose $H(0; p)$, donc : $2(4) - p(-4) = 0$. D'où : $p = -2$. Par conséquent : $H(0 ; -2)$.

♦ Exercice n°31 p.58

1) Soit M le milieu de [AC] : $M(0 ; 2)$. Soit P le milieu de [BD] : $P(0 ; 2)$. Donc : M = P.

2) $AC = 4\sqrt{5} = BD$.
3) $\vec{AC}(4 ; 8)$ et $\vec{BD}(8 ; -4)$. Donc : $\vec{AC} \perp \vec{BD}$.

4) Le quadrilatère ABCD est un carré, car ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu M, sont de même longueur et sont perpendiculaires.

♦ Exercice n°32 p.58

• On calcule par exemple le couple de coordonnées du milieu M de [AC] : M $(0 ; 2)$.

• On pose : $G(x ; y)$. On sait que : $\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BM}$. Par conséquent : $(x - 3 ; y + 4) = (-2 ; 4)$.

Donc : G $(1 ; 0)$.

♦ Exercice n°33 p.58

1) $A(-1 ; 2)$; $B(7 ; -8)$ et $E(7 ; 2)$. On a : $\vec{AE}(8 ; 0)$ et $\vec{EB}(0 ; -10)$. Par conséquent : $\vec{AE} \perp \vec{EB}$.
Donc le triangle AEB est rectangle en E.
Par conséquent E est un point du cercle $(\mathscr{C})$ de centre I et de diamètre [AB].

2) Soit I le milieu de [AB] : $I(3 ; -3)$. On désigne par $(x ; y)$ le couple de coordonnées du point F, donc :

$$\frac{7 + x}{2} = 3 \quad ; \quad \frac{2 + y}{2} = -3. \quad \text{D'où : } F(-1 \; ; -8).$$

3) Le quadrilatère AEBF est un rectangle.

♦ Exercice n°34 p.58

1) • On pose : $A'(x ; y)$. On a : $\vec{OM}(-4 ; 3)$ et $\vec{AA'}(x - 5 ; y - 2)$.
$A' = t_{\vec{OM}}(A)$ équivaut à $\vec{OM} = \vec{AA'}$; donc $\vec{OM} = \vec{AA'}$ équivaut à $(x - 5 ; y - 2) = (-4 ; 3)$.
D'où : $x - 5 = -4$ et $y - 2 = 3$. Donc : $x = 1$ et $y = 5$. Par conséquent, $A'(1 ; 5)$.

• On pose B'(m ; p). On a : $\vec{OM}$ $(-4 ; 3)$ et $\vec{BB'}$ $(m+1 ; p-6)$
B' = $t_{\vec{OM}}$ (B) équivaut à $\vec{OM} = \vec{BB'}$; donc $\vec{OM} = \vec{BB'}$ équivaut à $(m+1 ; p-6) = (-4 ; 3)$.
D'où : B'(– 5 ; 9).
2) N(x ; 0). On obtient : N(8 ; 0).

♦ Exercice n°35 p.58
1) A(– 4 ; 2) ; B(– 2 ; – 6) et C(4 ; 6). Donc : $\vec{AB}(2 ; -8)$, $\vec{AC}(8 ; 4)$ et $\vec{BC}(6 ; 12)$.
2) On pose : M(m ; p). Donc : $\vec{OA}(-4 ; 2)$ et $\vec{AM}(m+4 ; p-2)$.
$\vec{OA} = \vec{AM}$ équivaut à $(m+4 ; p-2) = (-4 ; 2)$. Donc : M (– 8 ; 4).

♦ Exercice n°36 p.58
On a : $xy - 8 = 0$. Par exemple : $x = 1$ et $y = 8$; $x = 2$ et $y = 4$; $x = -4$ et $y = -2$; $x = 8$ et $y = 1$.

♦ Exercice n°37 p.58
1) On pose : M(x ; y). Donc $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$ équivaut à $(x+1 ; y-1) = (3 ; 0)$. D'où : M(2 ; 1).
2) K est le milieu de [BC]. D'où K$(\frac{1}{2} ; 1)$.

♦ Exercice n°38 p.58
• M(2 ; 3) ; N(6 ; 6) ; K(6 ; 1) et P(2 ; – 2). Donc : $\vec{MN}(4 ; 3)$ et $\vec{PK}(4 ; 3)$. Par conséquent : $\vec{MN} = \vec{PK}$.
D'où, MNKP est un parallélogramme.
• MP = MN = 5. D'où : MNKP est un losange.

♦ Exercice n°39 p.58
1) $\vec{GA} + 2\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{OA} - \vec{OG} + 2(\vec{OB} - \vec{OG}) + \vec{OC} - \vec{OG}$
$= \vec{OA} + 2\vec{OB} + \vec{OC} - 4\vec{OG}$
D'où $\vec{GA} + 2\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{OA} + 2\vec{OB} + \vec{OC} - 4\vec{OG} = \vec{0}$.
Donc $4\vec{OG} = \vec{OA} + 2\vec{OB} + \vec{OC}$ c'est-à-dire $\vec{OG} = \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{4}\vec{OC}$
Or $\vec{OA}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{OB}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{OC}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$;

$(\frac{1}{4}\vec{OA})\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$; $(\frac{1}{2}\vec{OB})\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$; $(\frac{1}{4}\vec{OC})\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $(\frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{4}\vec{OC})\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

Par conséquent : G$(-\frac{3}{4} ; -\frac{3}{4})$.
2) $\vec{BD} = \vec{OD} - \vec{OB}$.
Donc $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC}$ équivaut à $\vec{OD} - \vec{OB} = \vec{BA} + \vec{BC}$
D'où $\vec{OD} = \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{OB}$ c'est-à-dire $\vec{OD} = \vec{BA} + \vec{OC}$
Or : $\vec{BA}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{OC}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$; $(\vec{BA} + \vec{OC})\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$. Par conséquent : D(0 ; 3)

3) $\vec{BG}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}$. $\vec{BD}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$. Donc : $\vec{BG} = \frac{1}{4}\vec{BD}$. Par conséquent : B, G et D sont alignés.

♦ Exercice n°40 p.58
• $\vec{AB}(4 ; 2)$ et $\vec{DC}(10,4 ; 5,2)$. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ sont colinéaires, car $4 \times 5,2 - 2 \times 10,4 = 0$.
Par conséquent : (AB)//(DC).
• $\vec{AD}(-1 ; 6)$ et $\vec{BC}(5,4 ; -2,8)$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, car : $2,8 + 32,4 \neq 0$.
Par conséquent, les droites (AD) et (BC) sont sécantes.
• AD = BC = $\sqrt{37}$. Donc : ABCD est un trapèze isocèle.

• **Exercice n°41 p.58**

• $\vec{AB}(2\ ;-5)$, $\vec{CB}(5\ ;\ 2)$, $\vec{DA}(10\ ;\ 4)$ et $\vec{DC}(7\ ;-3)$.

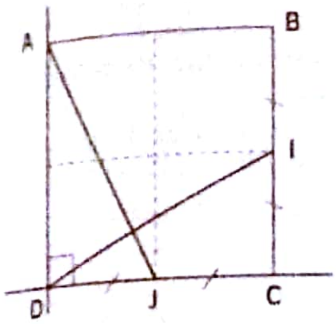
• $\vec{DA} = 2\vec{CB}$. Donc : $\vec{DA}$ et $\vec{CB}$ sont colinéaires. Par conséquent : (DA)//(CB).

• $\vec{DC}$ et $\vec{AB}$ ne sont pas colinéaires. Donc, (DC) et (AB) sont sécantes.

D'où : ABCD est un trapèze.

• $\vec{AB} \perp \vec{CB}$ car : $2 \times 5 + (-5) \times 2 = 0$. Par conséquent : ABCD est un trapèze rectangle en B.

• **Exercice n°42 p.58**



• Dans le repère (D,C,A), on a :
A(0 ; 1) ; B(1 ; 1) ; C(1 ; 0) ; D(0 ; 0) ; I(1 ; 0,5) et J(0,5 ; 0).

• $\vec{AJ}(0{,}5\ ;-1)$ et $\vec{DI}(1\ ;\ 0{,}5)$.
$\vec{AJ} \perp \vec{DI}$, car : $0{,}5 \times 1 + (-1) \times 0{,}5 = 0$.

5. Équations de droite

(pages 59 à 72 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :
- poursuivre l'initiation de l'élève à la géométrie analytique,
- créer des associations entre la géométrie vectorielle et la géométrie de la droite par ce biais, et, plus précisément, associer une droite du plan muni d'un repère à une équation du type « $ax + by + c = 0$ » et réciproquement (avec, évidemment, $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$).

COMMENTAIRES

Le point de vue adopté dans ce chapitre est le suivant : une équation d'une droite (D) est une équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dont la représentation graphique de l'ensemble des solutions est (D). C'est pourquoi le chapitre commence par la notion d'équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et utilise le vocabulaire classique des équations qu'on retrouve généralement dans la partie « Activités numériques » du cours.

L'activité de calcul de valeurs numériques d'une expression littérale (p 61) est essentielle pour la formation de l'élève : en complétant le tableau et en représentant graphiquement des couples solutions de l'équation, l'élève pourra découvrir la notion de caractérisation analytique de parties du plan et conjecturer la caractérisation de droites mais aussi de demi-plans.

Dans la progression adoptée, il est indispensable d'étudier entièrement le chapitre 5 avant d'aborder le chapitre 14.

On déterminera une équation (ou éventuellement plusieurs équations) d'une droite dans diverses situations, en n'omettant pas les cas particuliers de droites parallèles aux axes.

On s'intéressera plus particulièrement aux équations de la forme $y = ax + b$ ou $x = k$. L'expression « équation réduite » n'est pas utilisée dans le manuel pour traiter de ces équations.

On présentera le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine, et on traitera (au moins) un exercice demandant à l'élève d'associer le tracé de diverses droites à autant d'équations du type $y = ax + b$.

(La connaissance du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine permettant d'identifier la droite parmi plusieurs autres, et réciproquement).

On examinera l'incidence de la position de deux droites sur leurs coefficients directeurs ; les résultats de cette étude sont les bases de la résolution des systèmes d'équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ch 14).

savoirs	savoir-faire

Équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

savoirs

• **Propriétés**

– Lorsqu'on ajoute un même nombre à chaque membre d'une équation, on obtient une équation qui a les mêmes solutions que l'équation de départ.

– Lorsqu'on multiplie par un même nombre non nul chaque membre d'une équation, on obtient une équation qui a les mêmes solutions que l'équation de départ.

• **Vocabulaire**

Équation du premier degré - Inconnues - Solutions - Équation de la droite.

savoir-faire

• Transformer une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

• Trouver des solutions d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$..

• Vérifier si un couple est solution d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

• Représenter les (ou des) solutions d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Équations d'une droite

savoirs

• **Propriétés**

– Dans le plan muni d'un repère,

• toute droite a une équation de la forme $px + qy + r = 0$ (avec $(p ; q) \neq (0 ; 0)$).

• toute équation de la forme $px + qy + r = 0$ est une équation d'une droite (avec $(p ; q) \neq (0 ; 0)$).

– Une droite (D) non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = ax + b$; a est le coefficient directeur de la droite (D) et b son ordonnée à l'origine.

– Une droite (D) parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $x = k$. Elle n'a ni coefficient directeur, ni ordonnée à l'origine.

• **Vocabulaire**

Coefficient directeur - Ordonnée à l'origine.

savoir-faire

• Trouver une équation de la droite :

– passant par deux points donnés ;

– passant par un point et parallèle à une droite donnée ;

— passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée.

• Vérifier qu'un point appartient ou n'appartient pas à une droite d'équation donnée.

• Trouver le couple des coordonnées de points d'une droite d'équation donnée.

• Dans le plan muni d'un repère, construire une droite d'équation donnée.

• Passer d'une équation d'une droite de la forme $px + qy + r = 0$ à l'équation de la forme $y = ax + b$ et réciproquement.

• Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées et d'équation donnée.

• Écrire une équation d'une droite dont on connaît le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

• Calculer le coefficient directeur d'une droite passant par deux points.

Positions relatives de deux droites

savoirs

• **Propriétés**

– Le plan est muni d'un repère.

Les droites (D) et (D') ont respectivement pour coefficients directeurs a et a'.

(D) // (D') *équivaut à* $a = a'$.

– Le plan est muni d'un repère orthonormé. Les droites (D) et (D') ont respectivement pour coefficients directeurs a et a'.

(D) ⊥ (D') *équivaut à* $a\,a' = -1$.

savoir-faire

• Démontrer que deux droites dont on connaît une équation pour chacune :

– sont parallèles ;

– sont perpendiculaires.

• Trouver une équation d'une droite passant par un point donné et parallèle à une droite d'équation donnée.

• Trouver une équation d'une droite passant par un point donné et perpendiculaire à une droite d'équation donnée.

Exercices d'entraînement

♦ Exercice n°1 p.68
1) $x = 1$ et $y = -\frac{7}{3}$; 2) $x = \frac{8}{3}$ et $y = \frac{2}{15}$.

♦ Exercice n°2 p.68
1) $(\frac{4}{3}; 0)$ et $(0 ; -\frac{4}{5})$. 2) L'équation $3x - 5y = 4$ a les mêmes solutions que l'équation $y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$.
Pour $x = 3$, $y = 1$; pour $x = 8$, $y = 4$. Plus généralement : pour $x = 3 + 5k$, $y = 1 + 3k$.

♦ Exercice n°3 p.68
125 F sont obtenus avec x pièces de 10 F et y pièces de 25 F. $125 = 10x + 25y$ $[(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}]$
Solutions : $(0 ; 5)$, $(5 ; 3)$, $(10 ; 1)$.

♦ Exercice n°4 p.68
x est la longueur de la base du triangle, y est celle des côtés égaux. $[(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}]$
Le périmètre étant 12 : $x + 2y = 12$
Solutions de l'équation : $(0 ; 6)$, $(2 ; 5)$, $(4 ; 4)$, $(6 ; 3)$, $(8 ; 2)$, $(10 ; 1)$ et $(12 ; 0)$.
Les couples $(0 ; 6)$, $(6 ; 3)$, $(8 ; 2)$, $(10 ; 1)$ et $(12 ; 0)$ ne sont pas solutions du problème, car ils ne définissent pas un triangle, il n'y a donc que deux solutions : $(2 ; 5)$ et $(4 ; 4)$.
Remarque : la solution (4 ; 4) correspond à un triangle équilatéral.

♦ Exercice n°5 p.68
1) $A(-3 ; 2)$, $B(1 ; 5)$ et $M(x ; y)$: $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

M appartient à (AB) *équivaut à* $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires .
et $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires *équivaut à* $3(x + 3) - 4(y - 2) = 0$
Équation de (AB) : $3x - 4y + 17 = 0$.
De même :
2) Équation de (AB) : $x + y = 0$. 3) Équation de (AB) : $x = 2$. 4) Équation de (AB) : $y = -2$.

♦ Exercice n°6 p.68
1) $A(5 ; 3)$, $B(-3 ; 2)$ et $C(0 ; -4)$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$. $(-8)(-7) - (-1)(-5) \neq 0$, donc A, B et C ne sont pas alignés.
2) a) Équation de (D) : $-6x - 3y + 39 = 0$.
b) Équation de (D) : $-7x + 5y - 31 = 0$.

♦ Exercice n°7 p.68
$A(2 ; -1)$, $B(1 ; 1)$, $C(-\frac{1}{2} ; 0)$ et $D(2 ; 0)$; (L) : $-2x + 3y - 1 = 0$.
$A \notin (L)$, car $-2(2) + 3(-1) - 1 \neq 0$; $B \in (L)$, car $-2(1) + 3(1) - 1 = 0$. $C \in (L)$; $D \notin (L)$.

♦ Exercice n°8 p.68
(D) : $x - 5y + 2 = 0$; $(3 ; 1)$ et $(8 ; 2)$ sont deux solutions de l'équation.
Les points $M(3 ; 1)$ et $N(8 ; 2)$ appartiennent à (D), donc $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D).

♦ Exercice n°9 p.68
1) $6x - 2y + 4 = 0$ est aussi une équation de (D), car cette équation peut s'écrire : $\frac{1}{2}(12x - 4y + 8) = 0$.
2) $-3x + y + 2 = 0$ n'est pas une équation de (D) : on peut trouver une solution de l'une qui n'est pas solution de l'autre. Par exemple, le couple $(0 ; 2)$ qui est une solution de $12x - 4y + 8 = 0$ n'est pas une solution de $-3x + y + 2 = 0$
3) On démontre de même que : $24x + 8y + 16 = 0$ n'est pas une équation de (D).

4) $18x - 6y + 12 = 0$ est aussi une équation de (D), car cette équation peut s'écrire : $\frac{3}{2}(12x - 4y + 8) = 0$.

5) $3x - y + 2 = 0$ est aussi une équation de (D), car cette équation peut s'écrire : $\frac{1}{4}(12x - 4y + 8) = 0$.

6) De même $-\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} = 0$ est aussi une équation de (D), car : $-\frac{1}{16}(12x - 4y + 8) = 0$.

♦ **Exercice n°10 p.68**

(D) : $360x - 108y - 828 = 0$. En multipliant chaque membre de cette équation par $\frac{1}{2}$, par $\frac{1}{4}$, par $\frac{1}{12}$ et par $\frac{1}{36}$ (c'est à dire en divisant successivement par 2, par 2, par 3 et par 3), on obtient :

$180x - 54y - 414 = 0$; $90x - 27y - 207 = 0$; $30x - 9y - 69 = 0$ et $10x - 3y - 23 = 0$.

L'équation « $10x - 3y - 23 = 0$ » est considérée comme « la plus simple », car il n'existe aucun nombre entier naturel (autre que 1) qui divise à la fois 10, 3 et 23.

♦ **Exercice n°12 p.68**

• $(D_1) : 5x - 3y + 2 = 0$, donc $y = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$.

• $(D_2) : 5y + 3 = 0$, donc $y = -\frac{3}{5}$.

• $(D_3) : -3x + 7y + 1 = 0$, donc $y = \frac{3}{7}x - \frac{1}{7}$.

• $(D_4) : 2x + 3y = 0$, donc $y = -\frac{2}{3}x$.

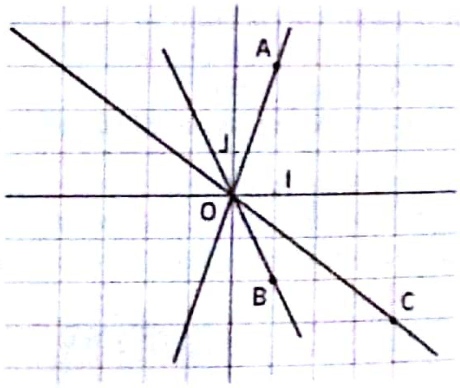
♦ **Exercice n°13 p.68**

$(D_1) : a = -5$ et $b = 2$; $(D_2) : a = 0$ et $b = -7$; $(D_3) : a = \frac{3}{4}$ et $b = -\frac{2}{3}$; $(D_4) : a = 3$ et $b = 0$.

♦ **Exercice n°14 p.69**

1) A(3 ; 5) et B(1 ; − 2) : $a = \frac{5-(-2)}{3-1} = \frac{7}{2}$; 2) $a = -1$; 3) $a = \frac{16}{3}$; 4) $a = -\frac{1}{8}$.

♦ **Exercice n°15 p.69**



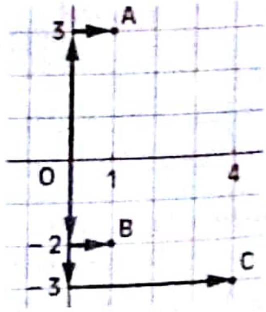
a) $a = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{y_A - 0}{x_A - 0} = \frac{y_A}{x_A} = 3 = \frac{3}{1}$, donc A(1 ; 3).

b) $a = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} = \frac{y_B - 0}{x_B - 0} = \frac{y_B}{x_B} = -2 = \frac{-2}{1}$, donc B(1 ; − 2).

c) $a = \frac{y_C - y_O}{x_C - x_O} = \frac{y_C - 0}{x_C - 0} = \frac{y_C}{x_C} = -\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$, donc C(4 ; − 3).

Commentaire

On montrera bien aux élèves comment placer rapidement les points A, B et C, à partir du coefficient directeur a de la droite (D) d'équation y = ax.



A) $a = 3 = \frac{3}{1} = \frac{y_A}{x_A}$; *B)* $a = -2 = \frac{-2}{1}$; *C)* $a = -\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$.

♦ **Exercice n°17 p.69**

1) (D) : $y = \frac{4}{3}x + b$; A(− 1 ; 1) appartient à (D) d'où $1 = \frac{4}{3}(-1) + b$, donc : $b = \frac{7}{3}$. (D) : $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$.

2) (D) : $y = ax - 2$; A(2 ; − 1) appartient à (D) d'où $-1 = 2a - 2$, donc : $a = \frac{1}{2}$. (D) : $y = \frac{1}{2}x - 2$.

3) (D) : $y = ax - \frac{3}{2}$; A(− 3 ; − 3) appartient à (D) d'où $-3 = -3a - \frac{3}{2}$, donc : $a = \frac{1}{2}$. (D) : $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

4) (D) : $y = b$; A(5 ; − 5) appartient à (D) d'où $-5 = b$, donc : $b = -5$. (D) : $y = -5$.

♦ **Exercice n°18 p.69**

• $(D_1) : a = 1$ et $b = 3$, donc $(D_1) : y = x + 3$

• $(D_2) : a = -\frac{2}{3}$ et $b = -2$, donc $(D_2) : y = -\frac{2}{3}x - 2$

• $(D_3) : a = 0$ et $b = 2$, donc $(D_3) : y = 2$

• $(D_4) : a = 3$ et $b = 0$, donc $(D_3) : y = 3x$.

♦ **Exercice n°19 p.69**

• Droite parallèle à l'axe des abscisses : (D_1), (D_3).
• Droite parallèle à l'axe des ordonnées : (D_2), (D_4).
• Droite passant par l'origine O du repère : (D_5), (D_6).

♦ **Exercice n°20 p.69**

a) $(D_1) : x = -3$; b) $(D_2) : y = 4$; c) $(D_3) : y + x = 0$; d) $(D_4) : y = \frac{3}{2}x - 3$; e) $(D_5) : 5x + 2y - 4 = 0$.

♦ **Exercice n°21 p.69**

$(D) : y = -\frac{3}{2}x + 2$. Le point $H(1 ; -\frac{1}{2})$ n'appartient pas à (D), car : $-\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$.
Le point $K(4 ; -4)$ appartient à (D), car : $-\frac{1}{2}(4) + 2 = -4$.

♦ **Exercice n°22 p.69**

a) $(D_1) : y = 2x + 1$; b) $(D_4) : y = -2x + 1$; c) $(D_2) : y = 2x - 1$; d) $(D_3) : y = -2x - 1$.

♦ **Exercice n°23 p.70**

• $(L_1) // (L)$ et (L_1) passe par le point $O(0 ; 0)$: $y = \frac{2}{5}x$.
• $(L_2) // (L)$ et (L_2) passe par le point $J(0 ; 1)$: $y = \frac{2}{5}x + 1$.
• $(L_3) // (L)$ et (L_3) a pour ordonnée à l'origine $\frac{3}{2}$: $y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{2}$.

♦ **Exercice n°24 p.70**

$(D_1) // (D_2)$; $(D_1) // (D_4)$; $(D_2) // (D_4)$; $(D_3) // (D_6)$.

♦ **Exercice n°25 p.70**

1) $A(3 ; 2)$; $(D) : 4x - 3y + 2 = 0$; $(L) : 4x - 3y - 6 = 0$.
2) $A(-3 ; 2)$; $(D) : y = -\frac{1}{3}x + 4$; $(L) : y = -\frac{1}{3}x + 1$.
3) $A(2 ; -5)$; $(D) : y = -\frac{5}{2}$; $(L) : y = -5$; 4) $A(-3 ; -1)$; $(D) : x = -1$; $(L) : x = -3$

♦ **Exercice n°26 p.70**

1) $\vec{BC}\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$ sont colinéaires *équivaut à* $-7(y-2) - 5(x-1) = 0$,
donc $(L) : y = -\frac{5}{7}x + \frac{19}{7}$.
2) $\vec{BC}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y+3\end{pmatrix}$ sont colinéaires *équivaut à* $4(y+3) - 0(x-5) = 0$, donc $(L) : y = -3$
3) $\vec{BC}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+1\end{pmatrix}$ sont colinéaires *équivaut à* $0(y+1) - 4(x-3) = 0$, donc $(L) : x = 3$.

♦ **Exercice n°27 p.70**

1) $(L_1) \perp (L)$ et (L_1) passe par le point $O(0 ; 0)$: $y = \frac{5}{2}x$.
2) $(L_2) \perp (L)$ et (L_1) passe par le point $I(1 ; 0)$: $y = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$.
3) $(L_3) \perp (L)$ et (L_1) a pour ordonnée à l'origine $-\frac{2}{3}$: $y = \frac{5}{2}x - \frac{2}{3}$.

♦ **Exercice n°28 p.70**

$(D_1) \perp (D_3)$; $(D_1) \perp (D_5)$;
$(D_2) \perp (D_4)$.

♦ **Exercice n°29 p.70**

1) $A(-3 ; 5)$; $(D) : 3x - 2y + 1 = 0$; $(L) : 2x + 3y - 9 = 0$.
2) $A(0 ; -2)$; $(D) : y = \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}$; $(L) : y = -\frac{4}{3}x - 2$.
3) $A(-2 ; -3)$; $(D) : y = \frac{5}{2}$; $(L) : x = -2$.
4) $A(\frac{2}{3} ; -1)$; $(D) : x = -3$; $(L) : y = -1$.

♦ **Exercice n°30 p.70**

1) $\vec{BC}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} \perp \vec{AM}\begin{pmatrix}x\\y+2\end{pmatrix}$ *équivaut à* $-3x + 1(y+2) = 0$; donc $(L) : y = 3x - 2$.

2) $\vec{BC}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, donc (BC)//(OI) ; d'où (L)//(OJ) or (L) passe par le point A d'abscisse 1. Donc (L)

3) $\vec{BC}\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$, donc (BC)//(OJ) ; d'où (L)//(OI) or (L) passe par le point A d'ordonnée -1.

Donc (L) : $y = -1$.

♦ **Exercice n°31 p.70**

$(D_1) \perp (D_3)$ car le produit des coefficients directeurs est égal à -1, le plan étant muni du repère orthonormé (O,I,J).

De même : $(D_2) \perp (D_5)$.

♦ **Exercice n°32 p.70**

1) A(-7 ; 0) et B(0 ; 3). 2) C(-7 ; 3).

☐ *Exercices d'approfondissement*

♦ **Exercice n°33 p.71**

1) (D) : $y = px + 2$ passe par le point A($\frac{2}{3}$; 1) d'où $1 = \frac{2}{3}p + 2$, donc : $p = -\frac{3}{2}$.

2) $p = \frac{3}{2}$. 3) $p = \frac{5}{2}$.

♦ **Exercice n°34 p.71**

1) $a = 0$; (D) : $y = 1$; 2) $a = -1$; (D) ; $x = -2$; 3) $a = 1$; (D) : $y = -\frac{1}{2}x$.

♦ **Exercice n°35 p.71**

1) $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $k = \frac{2}{5}$; 3) $k = 6$.

♦ **Exercice n°36 p.71**

1) $m = -\frac{3}{2}$; 2) $m = 0$; 3) $\vec{MN}\begin{pmatrix}-4\\m-\frac{7}{2}\end{pmatrix} \perp \vec{RS}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$; $m = -\frac{9}{2}$.

♦ **Exercice n°37 p.71**

(D) : $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ et (D') : $y = 2x - \frac{3}{2}$. (D) et (D') ne sont pas parallèles, car $\frac{1}{4} \neq 2$.

Au point d'intersection de (D) et (D') : $\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = 2x - \frac{3}{2}$. Donc : $x = \frac{9}{7}$, par conséquent $y = \frac{15}{14}$

Couple de coordonnées du point d'intersection : $(\frac{9}{7} ; \frac{15}{14})$

♦ **Exercice n°38 p.71**

1) (D) : $y = ax + \sqrt{2}$; le point A(1 ; 0) appartient à (D) donc $a = -\sqrt{2}$; (D) : $y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}$.

2) Pour $x = \sqrt{2} + 1$, $y = -\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = -2$, donc E($\sqrt{2} + 1$; -2).

3) (D') : $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + b$; le point E($\sqrt{2} + 1$; -2) appartient à (D') ; donc $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} + 1) + b = -2$,

par conséquent : $b = -3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc, (D') : $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

♦ **Exercice n°39 p.71**

1) H (2 ; 1). 2) Le point H est l'orthocentre du triangle ABC, donc la droite (HC) est la 3e hau
de ce triangle, par conséquent (HC) est perpendiculaire à (AB).

♦ **Exercice n°40 p.71**

1) K(x ; y) ; $\vec{KA}\begin{pmatrix}-1-x\\3-y\end{pmatrix}$; $\vec{KB}\begin{pmatrix}5-x\\-2-y\end{pmatrix}$

$3\vec{KA} + 4\vec{KB} = \vec{0}$ *équivaut à* $3(-1-x) + 4(5-x) = 0$ et $3(3-y) + 4(-2-y) = 0$.

Donc : $x = \frac{17}{7}$ et $y = \frac{1}{7}$.

Les points K, A et B sont alignés car : $\vec{KA} = -\frac{4}{3}\vec{KB}$

2) Équation de (AB) : $y = -\frac{5}{6}x + \frac{13}{6}$.

Le point $K(\frac{17}{7} ; \frac{1}{7})$ appartient bien à (AB) car : $-\frac{5}{6}(\frac{17}{7}) + \frac{13}{6} = \frac{1}{7}$.

♦ Exercice n°41 p.71

(D) : $y = ax + 4$ et (D') : $2x - 3y + 1 = 0$ ou $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

Le point A appartient à (D'), donc pour $x = -2$, $y = \frac{2}{3}(-2) + \frac{1}{3} = -1$, donc ; $A(-2 ; -1)$.

Le point $A(-2 ; -1)$ appartient à (D), donc : $a(-2) + 4 = -1$.

Par conséquent, $a = \frac{5}{2}$ et (D) : $y = \frac{5}{2}x + 4$.

♦ Exercice n°42 p.71

• Équation de (D) : $y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$; équation de (D') : $y = \frac{3}{4}x + 3$.

• Au point K, on a : $-\frac{4}{3}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}x + 3$. Donc : $x = -\frac{8}{5}$ et $y = \frac{9}{5}$. Donc : $K(-\frac{8}{5} ; \frac{9}{5})$.

♦ Exercice n°43 p.72

(D) : $y = px + \sqrt{3}$ et (D') : $y = 2x + q$ sont perpendiculaires d'où $2p = -1$. Donc : $p = -\frac{1}{2}$.

Par conséquent, (D) : $y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{3}$.

Les droites (D) et (D') se coupent en A appartenant à (OJ), donc en ce point $x = 0$, d'où $y = \sqrt{3}$.

Par conséquent, (D') : $y = 2x + \sqrt{3}$. Le point A a pour ordonnée $\sqrt{3}$.

♦ Exercice n°44 p.72

• $H(-2 ; -1)$

♦ Exercice n°45 p.72

• $K(1 ; -2)$

♦ Exercice n°46 p.72

1) • A' milieu de [BC] : $A'(3 ; -2)$; B' milieu de [AC] : $B'(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$.

(AA') : $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$; (BB') : $y = -\frac{3}{13}x + \frac{5}{13}$.

• Le point G est le point d'intersection de (AA') et (BB'), donc : $-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = -\frac{3}{13}x + \frac{5}{13}$.

Donc : $x = \frac{5}{3}$ et $y = 0$. Par conséquent : $G(\frac{5}{3} ; 0)$.

2) $\vec{GA}\begin{pmatrix}-8/3\\4\end{pmatrix}$; $\vec{GB}\begin{pmatrix}13/3\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{GC}\begin{pmatrix}-5/3\\-3\end{pmatrix}$. On constate que : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

$\vec{AG}\begin{pmatrix}8/3\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{AA'}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$, donc : $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$.

♦ Exercice n°47 p.72

On désigne par $A'(x ; y)$ et $B'(z ; t)$ les images respectives de A et B par la translation de vecteur $(2 ; -7)$,

on a : $\vec{AA'}\begin{pmatrix}x-2\\y-5\end{pmatrix}$ et $\vec{BB'}\begin{pmatrix}z-4\\t-3\end{pmatrix}$. Donc : $\begin{pmatrix}x-2\\y-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}z-4\\t-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$.

Par conséquent : $x = 4$, $y = -2$, $z = -2$ et $t = -4$. Donc : $A'(4 ; -2)$ et $B'(-2 ; -4)$.

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$, donc (A'B') a une équation de la forme : $y = \frac{1}{3}x + b$.

Le point $A'(4 ; -2)$ appartient à (A'B') d'où $\frac{1}{3}(4) + b = -2$, donc : $b = -\frac{10}{3}$. (A'B') : $y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$.

♦ Exercice n°48 p.72

L'image de (D) par la translation de vecteur $(4 ; 3)$ est une droite (D') parallèle à (D), elle a donc une équation de la forme : $y = -\frac{3}{2}x + b$.

Le point $A(0 ; -5)$ appartient à (D), donc son image A' par cette translation appartient à (D').

$\vec{AA'}\begin{pmatrix}x\\y+5\end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix}x\\y+5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$. Par conséquent : $x = 4$ et $y = -2$.

Le point $A'(4 ; -2)$ appartient à (D') d'où $-\frac{3}{2}(4) + b = -2$, donc : $b = 4$. (D') : $y = -\frac{3}{2}x + 4$.

♦ **Exercice n°49 p.72**

On désigne par $A'(x\ ;\ y)$ et $B'(z\ ;\ t)$ les images respectives de A et B par la symétrie de centre $C(-1\ ;\ -2)$.

$\overrightarrow{CA'} = -\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'} = -\overrightarrow{CB}$ *équivaut à* $\begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} z+1 \\ t+2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Par conséquent : $x = 0$, $y = -8$, $z = -6$ et $t = -1$. Donc : $A'(0\ ;\ -8)$ et $B'(-6\ ;\ -1)$.

$\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}$, donc (A'B') a une équation de la forme : $y = -\frac{7}{6}x + b$.

Le point $A'(0\ ;\ -8)$ appartient à (A'B') d'où $-\frac{7}{6}(0) + b = -8$, donc : $b = -8$. (A'B') : $y = -\frac{7}{6}x - 8$

♦ **Exercice n°50 p.72**

L'image de (D) par la symétrie de centre $K(3\ ;\ -1)$ est une droite (D') parallèle à (D), elle a donc son équation de la forme : $y = \frac{2}{5}x + b$.

Le point $A(1\ ;\ 1)$ appartient à (D), donc son image A' par cette symétrie centrale appartient à (D').

$\overrightarrow{KA'} = -\overrightarrow{KA}$ *équivaut à* $\begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Par conséquent : $x = 5$ et $y = -3$.

Le point $A'(5\ ;\ -3)$ appartient à (D') d'où $\frac{2}{5}(5) + b = -3$, donc : $b = -5$. (D') : $y = \frac{2}{5}x - 5$.

Exercices de recherche

♦ **Exercice n°51 p.72**

1) • Pour $x = 150$; $y = 50$. • Pour $x = 210$; $y = 95$.

2) • Pour $y = 65$; $x - 100 - \frac{x - 150}{4} = 65$ d'où $x = 170$. 3) (D) : $y = \frac{3}{4}x - \frac{125}{2}$.

4) • Pour $x = 160$; $y = \frac{3}{4}(160) - \frac{125}{2} = 57{,}5$. Donc le poids idéal est : $57{,}5 - 5{,}75 = 51{,}75$ (en kg).

5) • $y = \frac{3}{4}x - \frac{125}{2} - \frac{1}{10}\left(\frac{3}{4}x - \frac{125}{2}\right)$, donc : $y = \frac{27}{40}x - \frac{225}{4}$.

• $\frac{27}{40}x - \frac{225}{4} = 45$, donc : $x = 150$ (en cm).

♦ **Exercice n°52 p.72**

1) $H(13\ ;\ 3)$; $G(\frac{13}{3}\ ;\ 1)$; $P(0\ ;\ 0)$. 2) (D) : $3x - 13y = 0$.

6. Angles inscrits

(pages 73 à 80 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :

– calculer et comparer des mesures d'angles ;

– explorer les aspects angulaires de configurations du plan inscrites dans un cercle ;

– utiliser des angles inscrits pour résoudre des problèmes de géométrie.

Commentaires

La notion d'angle au centre est vue en classe de 4ᵉ.

La relation entre la mesure d'un angle inscrit aigu et celle de l'angle au centre associé n'est qu'un moyen d'arriver au résultat essentiel de ce chapitre : l'égalité des mesures de deux angles inscrits interceptant le même arc de cercle ou interceptant des arcs de même longueur.

Un angle obtus pourra être décomposé en deux angles aigus inscrits adjacents, ce qui permettra de calculer sa mesure par la propriété liant un angle inscrit aigu et l'angle au centre associé.
L'angle inscrit formé par une tangente et une corde sera étudié en classe de Seconde.
On ne parlera pas de secteur angulaire.
Ce chapitre utilisera quelques aspects angulaires de configurations inscrites dans un cercle pour en dégager des propriétés ou résoudre certains problèmes. (On notera, par exemple dans l'exercice 16, la relation simple reliant les mesures de l'angle au centre et de l'angle au sommet d'un polygone régulier)
La réciproque de la propriété des angles des quadrilatères inscriptibles n'ayant pas été abordée, on ne demandera pas à l'élève de reconnaître un quadrilatère inscriptible. Cette question fera l'objet d'une étude en classe de 2de.

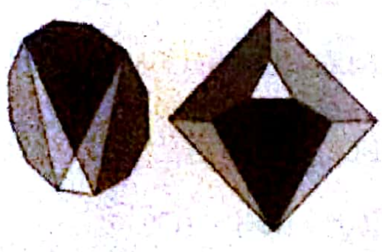
SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Angles inscrits dans un cercle	
• Vocabulaire Angle aigu inscrit , angle au centre associé, angle obtus inscrit. Angle inscrit. **• Propriété** Un angle aigu inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de la mesure de l'angle au centre associé : $\text{mes}\,\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\text{mes}\,\widehat{AOB}$. **• Formule** Mesure d'un angle obtus inscrit : $\text{mes}\,\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2}\text{mes}\,\widehat{AOB}$. **• Propriétés** - Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure. - Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent deux arcs de même longueur ont la même mesure.	• Reconnaître un angle inscrit, l'angle au centre aigu associé et l'arc de cercle intercepté. • Reconnaître des angles inscrits interceptant le même arc de cercle ou des arcs de même longueur. • Utiliser les propriétés des angles inscrits interceptant le même arc de cercle ou des arcs de même longueur pour déterminer : – la mesure d'un angle ; – l'égalité des mesures de deux angles.
Angles inscrits et configurations du plan	
• Propriété Si un quadrilatère est inscriptible dans un cercle, alors ses angles opposés sont supplémentaires.	• Calculer la mesure des angles d'un quadrilatère inscriptible dans un cercle. • Calculer la mesure des angles d'un polygone régulier de *n* côtés.

EXERCICES DU MANUEL

❑ *Exercices du cours*

♦ **Flash**



♦ **Exercice 1.c p.75**

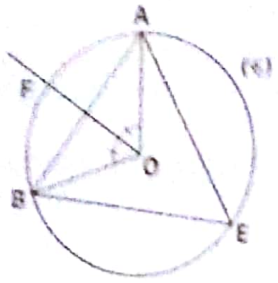
$\text{mes}\,\widehat{AOF}$ et $\text{mes}\,\widehat{AEB}$ sont égales à $\frac{1}{2}\text{mes}\,\widehat{AOB}$

♦ **Exercice 1.d p.75**

40° ; 70° ; 70°.

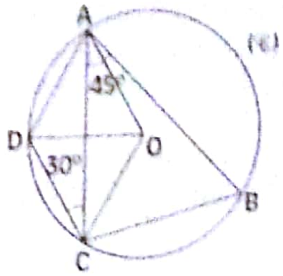
Exercices d'entraînement

♦ Exercice n°3 p.78



mes $\widehat{AEB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$ = mes $\widehat{AOF}$.

♦ Exercice n°4 p.78



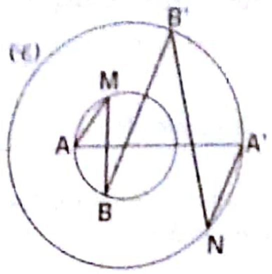
- mes $\widehat{DOA}$ = 2 mes $\widehat{DCA}$ = 60°
- mes $\widehat{BOC}$ = 2 mes $\widehat{CAB}$ = 90°
- mes $\widehat{ODA}$ = mes $\widehat{DAO}$ = 60°,

car le triangle ODA est équilatéral

- mes $\widehat{OCB}$ = mes $\widehat{OBC}$ = 45°,

car le triangle OBC est rectangle et isocèle.

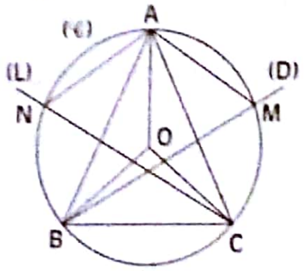
♦ Exercice n°5 p.78



mes $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{A'OB'}$ = mes $\widehat{A'NB'}$

car les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont opposés par le sommet.

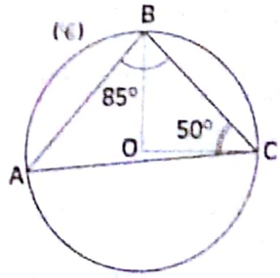
♦ Exercice n°6 p.78



- mes $\widehat{ANC}$ = mes $\widehat{ABC}$ et mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ACB}$ comme angles interceptant le même arc.
- Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ ont même mesure comme angles à la base d'un triangle isocèle ; donc :

mes $\widehat{ANC}$ = mes $\widehat{AMB}$.

♦ Exercice n°7 p.78

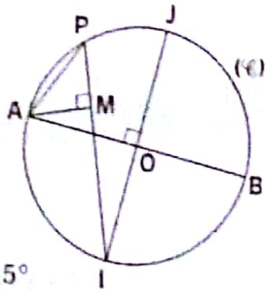


- mes $\widehat{BAC}$ = 180° − 85° − 50° = 45°.

mes $\widehat{BOC}$ = 2 mes $\widehat{BAC}$ = 90°.
Donc, BOC est rectangle et isocèle en O.

- Tracer deux rayons perpendiculaires [OB] et [OC. A étant un point de l'arc $\overset{\frown}{BC}$, tracer la corde [BA] telle que mes $\widehat{ABC}$ = 85°.

♦ Exercice n°8 p.78



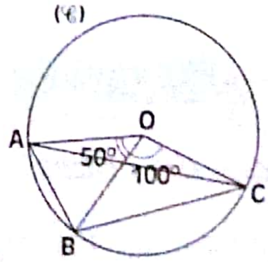
mes $\widehat{API} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOI}$ = 45°

donc : mes $\widehat{APM}$ = 45°.

- Le triangle APM est rectangle en M,

donc : mes $\widehat{PAM}$ = 90° − 45° = 45°.
Par conséquent, le triangle AMP est isocèle rectangle en M.

♦ Exercice n°9 p.78

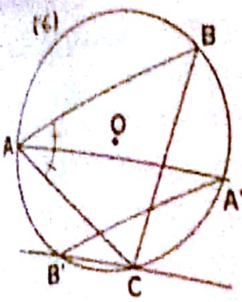


mes $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$ = 25°

mes $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{BOC}$ = 50°

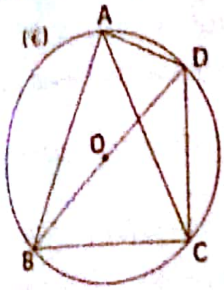
mes $\widehat{ABC}$ = 180° − (50° + 25°) = 105°

♦ Exercice n°10 p.78



mes $\widehat{AA'B'}$ = mes $\widehat{BAA'}$ car ce sont des angles alternes-internes formés par les droites parallèles (AB) et (A'B') coupées par (AA') ;
mes $\widehat{BAA'}$ = mes $\widehat{CAA'}$ car (AA') est la bissectrice de $\widehat{BAC}$
donc : mes $\widehat{AA'B'}$ = mes $\widehat{BAA'}$ = mes $\widehat{CAA'}$
d'où : longueur $\overset{\frown}{AB'}$ = longueur $\overset{\frown}{BA'}$ = longueur $\overset{\frown}{CA'}$.
Donc, mes $\widehat{AA'B'}$ = mes $\widehat{A'B'C}$,
car ces deux angles interceptent deux arcs de même longueur.
Les droites (AA') et (B'C) sont donc parallèles, les angles $\widehat{AA'B'}$ et $\widehat{A'B'C}$ étant deux angles alternes-internes de même mesure.

♦ Exercice n°11 p.78



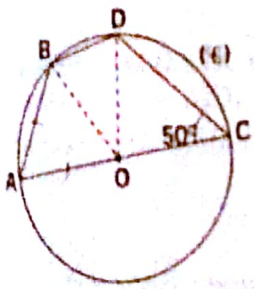
• mes $\widehat{ABC}$ = mes $\widehat{ACB}$ (1) ; car le triangle ABC est isocèle en A.
mes $\widehat{ADB}$ = mes $\widehat{ACB}$ (2) ; car ces angles inscrits interceptent l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
On a donc : mes $\widehat{ABC}$ = mes $\widehat{ADB}$.

• $$\text{mes}\,\widehat{DCA} + \text{mes}\,\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\text{mes}\,\widehat{DOA} + \frac{1}{2}\text{mes}\,\widehat{AOB}$$
$$= \frac{1}{2}\text{mes}\,\widehat{DOB} = 90°$$

♦ Exercice n°12 p.79

$\text{mes}\,\widehat{AMD} = \frac{1}{2}\text{mes}\,\widehat{AOD} = \frac{1}{2}\text{mes}\,\widehat{BOC} = \text{mes}\,\widehat{CNB}$.

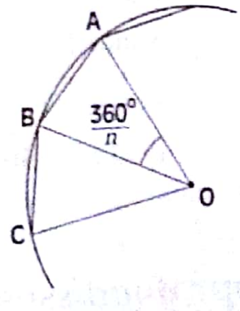
♦ Exercice n°15 p.79



• Le triangle OAB est équilatéral, car : OA = OB = AB = r.
Donc : mes $\widehat{OAB}$ = 60°. Par conséquent : mes $\widehat{CAB}$ = 60°.
• Le triangle OCD est isocèle en O, donc : mes $\widehat{ODC}$ = 50°. (1)
Par conséquent : mes $\widehat{DOC}$ = 180° – 50° – 50° = 80°.
D'où : mes $\widehat{BOD}$ = 180° – 80° – 60° = 40°.
• Le triangle OBD est isocèle en O,
donc : mes $\widehat{OBD}$ = mes $\widehat{ODB}$ = $\frac{180-40}{2}$ = 70°. (2)
• mes $\widehat{ABD}$ = 60° + 70° = 130° et mes $\widehat{BDC}$ = 70° + 50° = 120°

♦ Exercice n°16 p.79

Polygone	(n)	Angle au centre (en °)	Angle au sommet (en °)	Somme (en °)
Pentagone	(5)	72	108	180
Hexagone	(6)	60	120	180
Octogone	(8)	45	135	180
Ennéagone	(9)	40	140	180
Décagone	(10)	36	144	180
Dodécagone	(12)	30	150	180



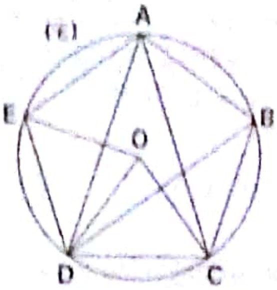
polygone régulier à n côtés.

ABO et BCO sont des triangles isocèles superposables : leurs angles à la base ont la même mesure.

$\text{mes}\,\widehat{ABO} = \frac{1}{2}(180° - \frac{360°}{n})$

$\text{mes}\,\widehat{ABC} = 2 \times \text{mes}\,\widehat{ABO}$ donc : $\text{mes}\,\widehat{ABC} = 180° - \frac{360°}{n}$;

♦ **Exercice n°17 p.79**



1) mes $\widehat{COD} = 72°$ et mes $\widehat{ODC}$ = mes $\widehat{OCD} = \frac{1}{2}(180° - 72°) = 54°$.

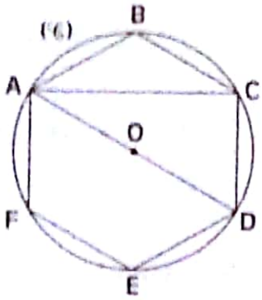
mes $\widehat{ABC} = 108°$ et mes $\widehat{CAB}$ = mes $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36°$.

mes $\widehat{DAC} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{DOC} = 36°$.

mes $\widehat{ACD}$ = mes $\widehat{ADC} = \frac{1}{2}(180° - 36°) = 72°$.

2) mes $\widehat{OCD}$ = mes $\widehat{DEO} = 54°$, mes $\widehat{CDE} = 108°$ et mes $\widehat{COE} = 144°$.
Le quadrilatère OCDE n'est pas un losange, car $OC \neq CD$ (le triangle OCD n'est pas équilatéral).
mes $\widehat{AED}$ = mes $\widehat{EAB} = 108°$, mes $\widehat{ABD} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOD} = 72°$ et mes $\widehat{BDE} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{BOE} = 72°$.
mes $\widehat{EAD}$ = mes $\widehat{ADB} = \frac{1}{2}(72°) = 36°$, donc (AE) est parallèle à (BD) ; les droites (AB) et (DE) sont sécantes et AB = DE. Par conséquent, le quadrilatère ABDE est un trapèze isocèle de bases [AE] et [BD].

♦ **Exercice n°18 p.79**

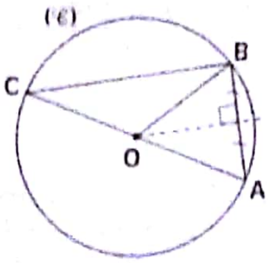


1°) • Le triangle ACD est rectangle en C, donc : mes $\widehat{ACD} = 90°$
mes $\widehat{CAD} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{COD} = 30°$, donc : mes $\widehat{ADC} = 90° - 30° = 60°$.
mes $\widehat{ABC} = 120°$, donc : mes $\widehat{BAC}$ = mes $\widehat{BCA}$
$= \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$.

2°) • mes $\widehat{ABC}$ = mes $\widehat{BCD} = 120°$, mes $\widehat{CDA} = 60°$
et mes $\widehat{DAB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{DOB} = \frac{1}{2}(120°) = 60°$.

• Les droites (BC) et (AD) sont parallèles, car les angles alternes-internes $\widehat{BCA}$ et $\widehat{CAD}$, interceptant des arcs de même longueur, ont donc la même mesure. Les droites (AB) et (CD) sont sécantes. Les angles à la base $\widehat{CDA}$ et $\widehat{DAB}$ ont pour mesure 60°. Par conséquent, le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle de bases [AD] et [BC].

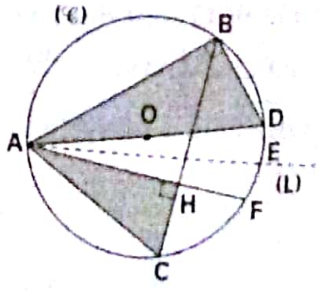
♦ **Exercice n°19 p.79**



• Le triangle ABC est rectangle en B, donc : mes $\widehat{CBA} = 90°$.
Le triangle AOB est équilatéral, car OA = OB = AB,
donc : mes $\widehat{CAB} = 60°$
Par conséquent : mes $\widehat{ACB} = 90° - 60° = 30°$.
• mes $\widehat{JBA} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{JOA} = \frac{1}{2} \times 30° = 15°$,
donc mes $\widehat{CBJ} = 90° + 15° = 105°$; mes $\widehat{CAJ} = 75°$;
d'où mes $\widehat{BJA} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB} = 180° - 30° = 150°$.

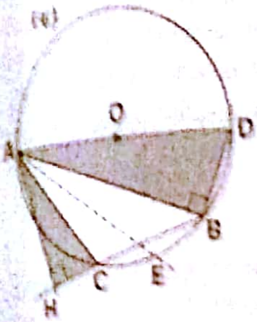
Exercices d'approfondissement

♦ **Exercice n°20 p.79**



Les triangles AHC et ABD sont rectangles respectivement en H et B,
donc : mes $\widehat{AHC}$ = mes $\widehat{ABD} = 90°$. (1)
Les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{ACH}$ interceptent l'arc $\overset{\frown}{AB}$,
donc : mes $\widehat{ADB}$ = mes $\widehat{ACH}$. (2)
De (1) et (2) on déduit : mes $\widehat{BAD}$ = mes $\widehat{CAH}$.

Les triangles ABD et AHC ont leurs angles deux à deux de même mesure ; ils sont donc semblables.
Or mes $\widehat{BAE}$ = mes $\widehat{CAE}$, car (L) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, et on a :
mes $\widehat{BAD}$ + mes $\widehat{DAE}$ = mes $\widehat{CAH}$ + mes $\widehat{HAE}$ (décomposition en somme de mesures d'angles adjacents). Donc : mes $\widehat{DAE}$ = mes $\widehat{HAE}$.
Par conséquent, (L) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DAH}$.



Attention, suivant les cas de figures :

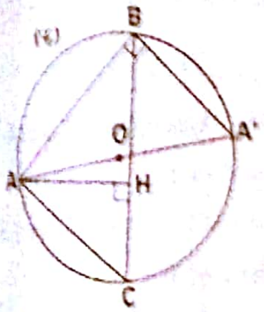
– D ∉ $\widehat{BC}$, dans ce cas, mes $\widehat{BAD}$ = mes $\widehat{CAH}$ car ces angles ont le même angle supplémentaire : $\widehat{ACB}$, donc :

mes $\widehat{DAE}$ = mes $\widehat{DAB}$ + mes $\widehat{BAE}$ = mes $\widehat{HCA}$ + mes $\widehat{CAE}$ = mes $\widehat{HAE}$.

– D est confondu avec B (resp. C), dans ce cas H est confondu avec C (resp. B).

– Les droites (AD), (AE) et (AH) sont confondues si ABC est isocèle en A.

♦ Exercice n°21 p.79



Les triangles AHC et ABA' sont rectangles respectivement en H et B,
donc : mes $\widehat{AHC}$ = mes $\widehat{ABA'}$ = 90°

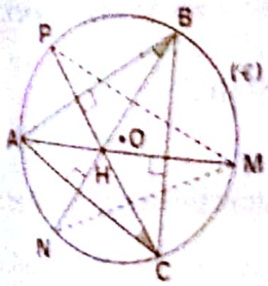
Les angles $\widehat{AA'B}$ et $\widehat{ACB}$ interceptent l'arc $\widehat{AB}$,
donc mes $\widehat{AA'B}$ = mes $\widehat{ACB}$.

Par conséquent les triangles ABA' et AHC sont semblables.

$\dfrac{A\ B\ A'}{A\ H\ C}$; donc : $\dfrac{AB}{AH} = \dfrac{AA'}{AC}$.

Cette égalité équivaut à $AB \times AC = AH \times AA'$.

♦ Exercice n°22 p.79



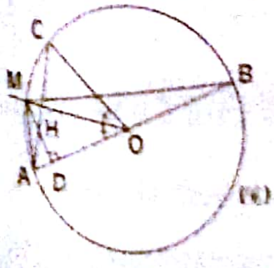
1) Les angles $\widehat{ABN}$ et $\widehat{PCA}$ ont le même angle complémentaire : $\widehat{CAB}$.
Donc : mes $\widehat{ABN}$ = mes $\widehat{PCA}$.

2) Les angles $\widehat{PCA}$ et $\widehat{PMA}$ interceptent l'arc $\widehat{AP}$
donc : mes $\widehat{PMA}$ = mes $\widehat{PCA}$.

Les angles $\widehat{ABN}$ et $\widehat{AMN}$ interceptent l'arc $\widehat{AN}$
donc : mes $\widehat{ABN}$ = mes $\widehat{AMN}$.

Par conséquent : mes $\widehat{PMA}$ = mes $\widehat{AMN}$; donc la droite (AM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PMN}$.

♦ Exercice n°23 p.80



mes $\widehat{MBA}$ = mes $\widehat{AMD}$ (1) car dans les triangles rectangles AMB et AND, ces angles ont le même angle complémentaire : $\widehat{MAD}$.

mes $\widehat{MBA} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{MOA}$; mes $\widehat{MAC} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{MOC}$,

or mes $\widehat{MOA}$ = mes $\widehat{MOC}$, donc mes $\widehat{MBA}$ = mes $\widehat{MAC}$. (2)

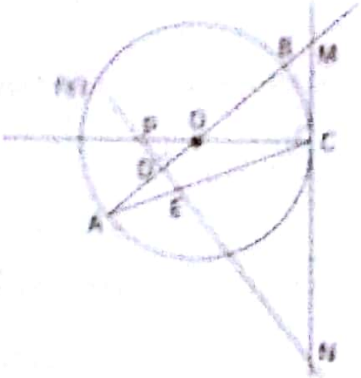
Des égalités (1) et (2), on déduit : mes $\widehat{AMD}$ = mes $\widehat{MAC}$.

Donc : le triangle AMH est isocèle en H .

♦ Exercice n°24 p.80

1) mes $\widehat{COB}$ = mes $\widehat{CNP}$ car dans les triangles rectangles CMO et DMN, ces angles ont le même angle complémentaire : $\widehat{CMO}$.

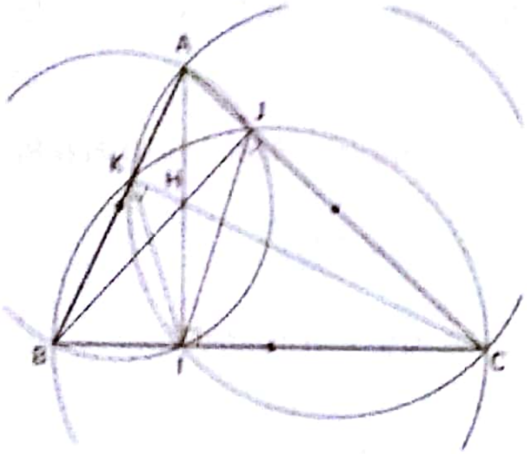
mes $\widehat{CAB} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{COB} = \dfrac{1}{2}$ mes $\widehat{CNP}$.



2) Le cercle de diamètre [ON] passe par les points C et D, car les triangles OCN et ODN sont rectangles respectivement en C et D, donc le quadrilatère OCND est inscriptible dans le cercle de diamètre [ON], par conséquent les angles opposés $\widehat{CND}$ et $\widehat{DOC}$ sont supplémentaires.

Le triangle CAB est rectangle en C, donc le triangle CEB est aussi rectangle en C, par conséquent le cercle de diamètre [EB] passe par les points C et D, car les triangles ECB et EDB sont rectangles respectivement en C et D. Le quadrilatère ECBD est inscriptible dans le cercle de diamètre [EB], par conséquent les angles opposés $\widehat{DEC}$ et $\widehat{DBC}$ sont supplémentaires.

♦ Exercice n°25 p.80



1) HIC est rectangle en I : il est inscriptible dans le cercle de diamètre [HC]. HJC est rectangle en J : il est inscriptible dans le même cercle.
De même, HIB et HKB sont des triangles rectangles respectivement en I et K, ils sont inscriptibles dans le cercle de diamètre [HB].

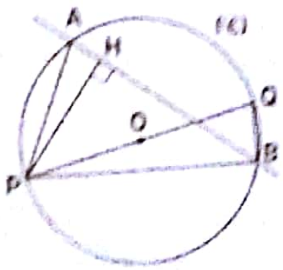
2) Le cercle de diamètre [AB] passe par I et J ;
mes $\widehat{HIJ}$ = mes $\widehat{KBH}$, (angles inscrits interceptant l'arc $\widehat{AJ}$)

Le cercle de diamètre [BC] passe par J et K ;
mes $\widehat{KBH}$ = mes $\widehat{HCA}$, (angles inscrits interceptant l'arc $\widehat{KJ}$)

Le cercle de diamètre [AC] passe par I et K ;
mes $\widehat{HCA}$ = mes $\widehat{KIH}$, (angles inscrits interceptant l'arc $\widehat{KA}$)

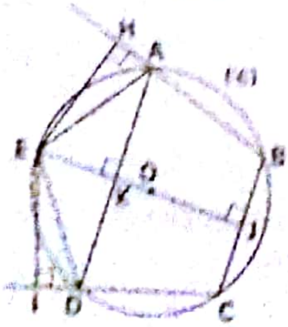
mes $\widehat{HIJ}$ = mes $\widehat{KBH}$ = mes $\widehat{HCA}$ = mes $\widehat{KIH}$.
Par conséquent, (AI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{KIJ}$.
On démontre de même que (BJ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{KJI}$ et que (KC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{IKJ}$;
donc leur point de concours H est le centre du cercle inscrit dans le triangle IJK.

♦ Exercice n°26 p.80



Les triangles AHP et PBQ sont rectangles respectivement en H et B,
donc : mes $\widehat{AHP}$ = mes $\widehat{PBQ}$ = 90°.
Les angles $\widehat{PQB}$ et $\widehat{PAH}$ interceptent l'arc $\widehat{PB}$,
donc mes $\widehat{PQB}$ = mes $\widehat{PAH}$.
Par conséquent les triangles PBQ et AHP sont semblables, $\dfrac{P\,B\,Q}{P\,H\,A}$;
donc : $\dfrac{PB}{PH} = \dfrac{PQ}{PA}$.
Cette égalité équivaut à $PA \times PB = PQ \times PH = 2r \times PH$

♦ Exercice n°27 p.80



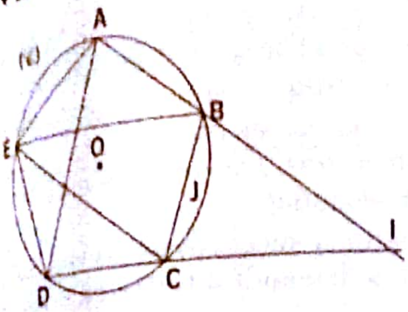
H, I, J et K sont les projetés orthogonaux de E sur, respectivement, (AB), (CD), (BC) et (AD).
EH est la distance de E à (AB), EI est la distance de E à (CD),
EJ est la distance de E à (BC) et EK est la distance de E à (AD).
En utilisant le résultat de l'exercice précédent :

$EA \times EB = 2r \times EH$ $\qquad$ $EC \times ED = 2r \times EI$,
$EB \times EC = 2r \times EJ$ $\qquad$ $EA \times ED = 2r \times EK$

Donc : $EH \times EI = \dfrac{EA \times EB \times EC \times ED}{4r^2}$ et $EJ \times EK = \dfrac{EB \times EC \times EA \times ED}{4r^2}$

Donc :
[distance de E à (AB)] × [distance de E à (CD)] = [distance de E à (BC)] × [distance de E à (AD)].

♦ **Exercice n°28 p.80**



1°) mes $\widehat{CBI} = 180° - \text{mes}\,\widehat{ABC} = 180° - 108° = 72°$.

De même : mes $\widehat{BCI} = 180° - \text{mes}\,\widehat{BCD} = 180° - 108° = 72°$.

Par conséquent, le triangle BIC est isocèle en I.

De plus : mes $\widehat{BIC} = 180° - (72° + 72) = 36°$.

2°) • Le quadrilatère EBIC est un parallélogramme, car :

– (EB) // (DC), donc : (EB) // (CI) ;

– (EC) // (AB), donc : (EC) // (BI).

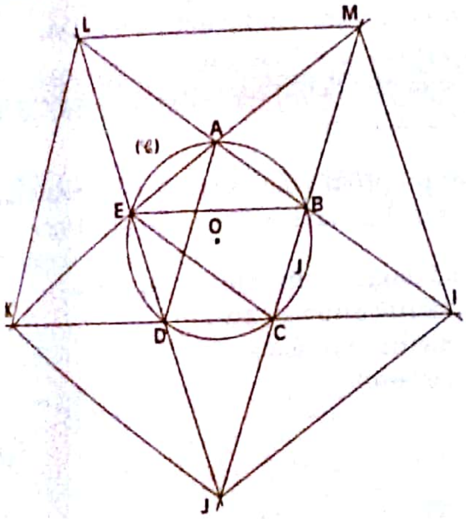
• Le parallélogramme EBIC est un losange, car : EB = EC.

D'où : EB = IB = IC = EC. Or, EB = AC = d, donc : IB = IC = d.

3°) (BC) // (AD), donc d'après la propriété de Thalès dans le triangle IAD : $\dfrac{ID}{IC} = \dfrac{AD}{BC}$.

Or, ID = IC + CD = $a + d$, donc, $\dfrac{ID}{IC} = \dfrac{AD}{BC}$ devient : $\dfrac{a+d}{d} = \dfrac{d}{a}$, ou encore $a^2 + ad = d^2$.

♦ **Exercice n°29 p.80**



1°) a) Le triangle ICJ est isocèle en C, car CI = CJ = d (ex précédent).

Donc : mes $\widehat{CJI}$ = mes $\widehat{CIJ}$ = 36° $\left(\dfrac{180° - 108°}{2} = 36°\right)$.

Le triangle IDJ est isocèle en I, car :

mes $\widehat{IDJ}$ = 180° - 108° = 72°

mes $\widehat{DJI}$ = mes $\widehat{DJC}$ + mes $\widehat{CJI}$ = 36° + 36° = 72°

Donc : ID = IJ. Or, ID = $a + d$ (ex. 28), donc : IJ = $a + d$.

b) De même : IJ = JK = KL = LM = MI = $a + d$.

Les triangles OAM et OAL sont superposables car ils ont un angle de même mesure (mes $\widehat{OAM}$ = mes $\widehat{OAL}$) compris entre deux côtés respectivement de même longueur.

On en déduit : OM = OL.

Par un même raisonnement, on démontre que OM = OL = OK = OJ = OI.

Par conséquent, le polygone IJKLM est inscriptible dans un cercle de centre O et ses cinq côtés ont la même longueur; c'est donc un pentagone régulier.

7. Symétries et translation

(pages 81 à 92 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à

- asseoir les connaissances des élèves sur les effets de la translation, de la symétrie orthogonale et de la symétrie centrale sur différentes configurations ;
- préparer l'utilisation des transformations du plan dans la résolution de problèmes par l'indication de l'application à utiliser dans chacun des exercices proposés.

COMMENTAIRES

Ce chapitre est avant tout un recueil d'activités comportant peu de savoirs nouveaux.
Pour que l'élève du second cycle puisse résoudre aisément les problèmes classiques de géométrie (démonstration de propriétés, construction de figures, recherche de lieux géométriques), il est essentiel que pour chacune des applications étudiées dans le premier cycle, aucune étape ne soit brûlée. Le professeur ne doit pas considérer comme inintéressantes les activités qui consistent à faire agir une application donnée sur une configuration. C'est par le moyen de ces activités que l'élève pourra se constituer la palette des savoirs et des savoir-faire qui lui permettront de trouver l'application qui convient le mieux pour résoudre un problème de géométrie dans le second cycle.
Il ne faut pas minimiser la difficulté des exercices dans lesquels on indique l'application du plan qu'il convient d'utiliser.
La rédaction correcte des programmes de construction avec justifications, constitue un excellent entraînement à la rédaction des démonstrations (qui sera exigée en seconde).
Il convient de remarquer que dans la leçon 3 (symétries et translations successives) les résultats des applications successives ne sont pas énoncés ; il est tout au plus demandé à l'élève de trouver une application qui aurait les mêmes effets.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Symétries, translations et configurations	
• **Propriétés** – Par une symétrie orthogonale, une symétrie centrale ou une translation : • des points alignés ont pour image des points alignés ; • un segment a pour image un segment de même longueur ; • le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment ; • une droite a pour image une droite ; • deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles ; • deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires ; • un cercle a pour image un cercle de même rayon ; • un angle a pour image un angle de même mesure ; • si un point appartient à deux lignes, alors son image appartient aux images de ces deux lignes ; • une figure a pour image une figure qui lui est superposable ; – Une droite (D) perpendiculaire à (L) est sa propre image par la symétrie orthogonale d'axe (L). – Une droite (D) passant par I est sa propre image par la symétrie centrale de centre I. – Une droite (D) de vecteur directeur $\vec{AB}$ est sa propre image par la translation $t_{\vec{AB}}$, de vecteur $\vec{AB}$.	• Reconnaître dans une configuration les effets : – d'une symétrie orthogonale ; – d'une symétrie centrale ; – d'une translation. • Utiliser les propriétés des symétries et des translations au travers d'un tableau de correspondance ; • Construire l'image d'une figure simple par : – une symétrie orthogonale ; – une symétrie centrale ; – une translation.

Utilisation des symétries et des translations

• **Méthode**

Pour démontrer que trois droites sont concourantes, on peut procéder comme suit :
– soit démontrer que le point commun à deux d'entre elles appartient aussi à la troisième ;
– soit démontrer que ces trois droites sont les images de trois droites concourantes par une symétrie orthogonale, une symétrie centrale ou une translation.

• Utiliser une symétrie orthogonale, une symétrie centrale ou une translation pour :
– démontrer ;
– construire.

Symétries et translations successives

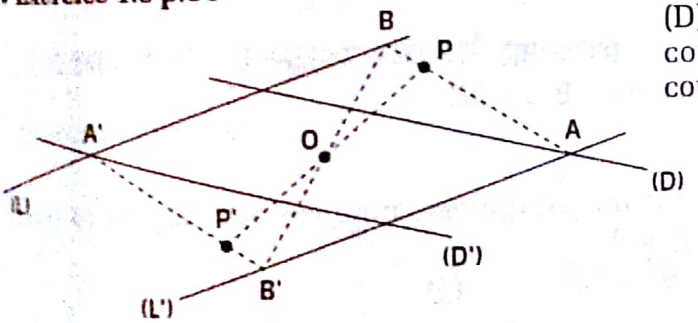
• Trouver sur une configuration donnée l'image d'un point par :
– deux symétries orthogonales successives d'axes parallèles ou perpendiculaires ;
– deux symétries centrales successives
– deux translations successives.

• Construire l'image d'un point par
– deux symétries orthogonales successives d'axes parallèles ou perpendiculaires ;
– deux symétries centrales successives
– deux translations successives.

EXERCICES DU MANUEL

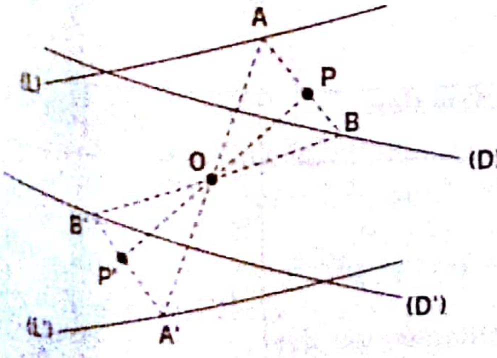
❑ *Exercices du cours*

♦ Exercice 1.c p.84



(D) coupe (L') en A; (D') coupe (L) en A'. (AP) coupe (L) en B; (OB) coupe (L') en B'; (A'B') coupe (OP) en P'.

La méthode ci-dessous est plus générale : elle permet de résoudre l'exercice même dans le cas de figure où les droites données (D) et (L) sont parallèles ; elle s'avère pratique pour résoudre des problèmes de géométrie de l'espace.



S_O

(L)	(L')
(OA)	OA
A	A'
(D)	(D')
(OB)	(OB)
B	B'
(OP)	(OP)
(AB)	(A'B')
P	P'

Une droite passant par P coupe (L) en A et (D) en B.

A', point d'intersection de (OA) avec (L') est l'image de A par S_O.

B', point d'intersection de (OB) avec (D') est l'image de B par S_O.

P', point d'intersection de (A'B') avec (OP) est l'image de P par S_O.

♦ **Exercice 2.a p.85**

1) Les propriétés de la droite (IJ) qui joint les milieux des côtés [AB] et [BC] du triangle ABC montrent que (IJ) // (AC) et donc (IJ) ⊥ (BH) ; d'autre part (IJ) // (BH) et (IJ) passe par le milieu de [BC] : (IJ) passe par le milieu de [AH]. Donc, (IJ) est la médiatrice de [BH].

2) Par la symétrie S(IJ), I et J sont leur propre image. B a pour image H. Donc, (BI) et (BJ), qui sont perpendiculaires, ont pour image (HI) et (HJ) qui sont également perpendiculaires.

$S_{(IJ)}$

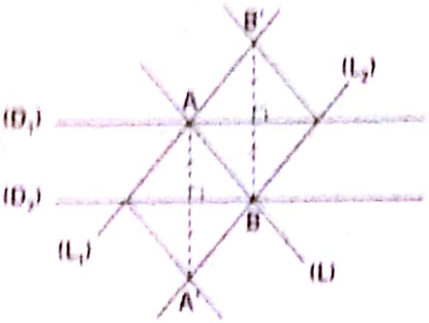
I	I
B	H
J	J

♦ **Exercice 2.b p.85**

MNPQ est un losange car ses diagonales se coupent en leur milieu et ont leurs supports perpendiculaires.

Exercices d'entraînement

♦ **Exercice n°2 p.91**

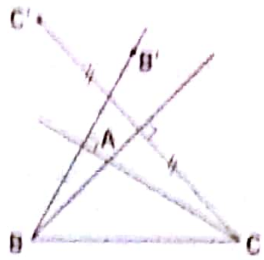


a) B' est l'image de B par $S_{(D1)}$, donc : $(L_1) = (AB')$.
A' est l'image de A par $S_{(D2)}$, donc : $(L_2) = (A'B)$.

b) (AA') // (B'B) et AA' = B'B, donc : $\vec{AA'} = \vec{B'B}$.
Par conséquent, AB'BA' est un parallélogramme, donc : (AB') // (A'B).

c) L'image de A par $t_{\vec{AB}}$ est le point B donc l'image de (L_1) par $t_{\vec{AB}}$ est la droite passant par B et parallèle à (L_1) ; c'est donc (L_2).

♦ **Exercice n°3 p.91**



$S_{(AC)}$

A	A
C	C
B	B'

$S_{(AB)}$

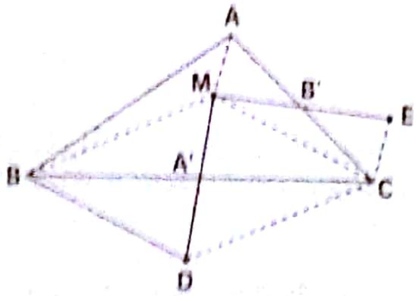
A	A
B	B
C	C'

Donc : B'C = BC

Donc : BC' = BC

Par conséquent : B'C = BC'

♦ **Exercice n°4 p.91**



• BDCM est un parallélogramme car ses diagonales ont le même milieu A'.

Donc : $\vec{BD} = \vec{MC}$ (1)

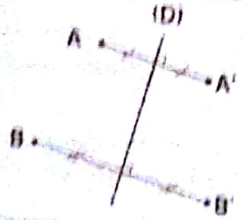
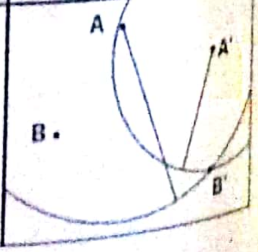
• AECM est un parallélogramme car ses diagonales ont le même milieu B'.

Donc : $\vec{AE} = \vec{MC}$ (2)

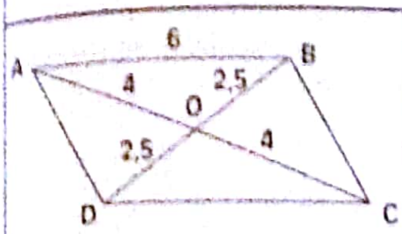
• Des égalités (1) et (2), on déduit : $\vec{BD} = \vec{AE}$.

Par conséquent : BDEA est un parallélogramme.

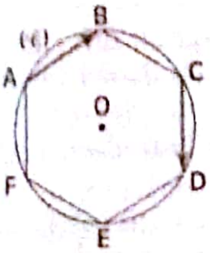
♦ **Exercice n°5 p.91**

Esquisse	Recherche d'une méthode de construction (compas seulement)	Construction
	• (D) est la médiatrice de [AA'] et de [BB'], donc : BA = B'A', par conséquent B' appartient à 𝒞(A';AB) ; BA' = B'A, par conséquent B' appartient à 𝒞'(A';A'B). • Donc, le point B' est un des points d'intersection des cercles (𝒞) et (𝒞').	

♦ **Exercice n°6 p.91**

Esquisse	Recherche d'une méthode de construction (règle et compas seulement)
	• Le point O est le centre du parallélogramme, donc : OA = OC = 4 et OB = OD = 2,5. • Par conséquent pour construire le parallélogramme ABCD, on construit : – le triangle OAB tel que AB = 6, OA = 4 et OB = 2,5 ; – les points C et D, symétriques respectifs de A et B par rapport à O.

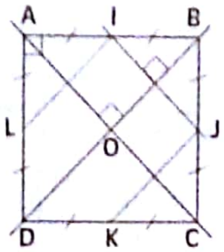
♦ **Exercice n°7 p.91**



f	
O	D
A	O
B	C
F	E

g	
O	F
B	A
C	O
D	E

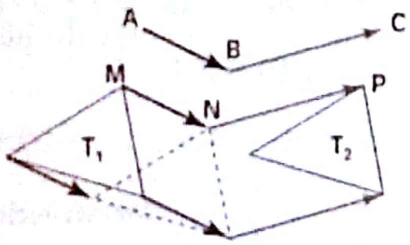
♦ **Exercice n°8 p.91**



f	
O	O
A	C
B	D
C	A
D	B

g	
O	B
D	O
L	I
K	J

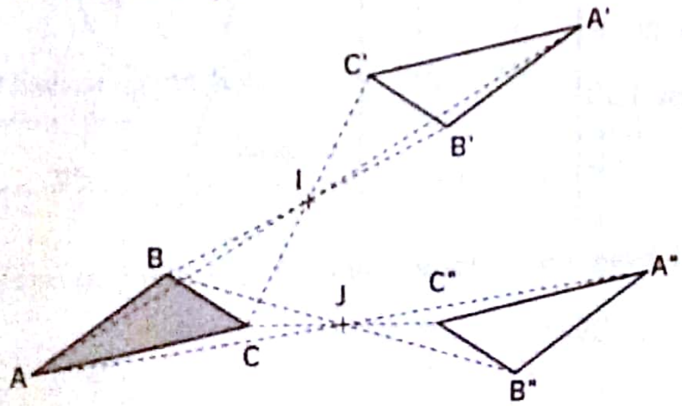
♦ **Exercice n°9 p.91**



• Construire l'image N du sommet M de T1 par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$.
• Construire le point C tel que : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NP}$.

☐ *Exercices d'approfondissement*

♦ **Exercice n°10 p.92**



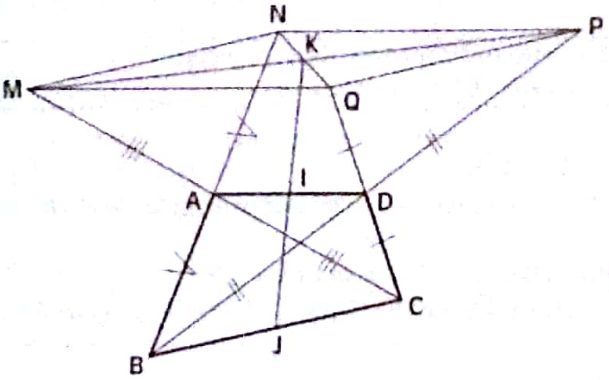
• Dans chacun des triangles AA'A", BB'B" et CC'C", I, (resp. J), est milieu des côtés [AA'], [BB'] et [CC'], (resp. [AA"], [BB"] et [CC"]),

donc on a : $2\,\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{B'B''} = \overrightarrow{C'C''}$

Par conséquent le triangle A"B"C" est l'image du triangle A'B'C' par la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{IJ}$.

♦ **Exercice n°11 p.92**

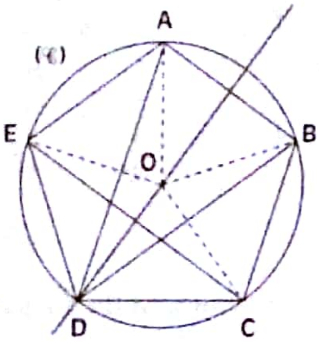
a) MNCB est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu A.
QPCB est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu D.
Donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.
Donc, le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.
b) c) Dans le triangle BCP, D et J sont les milieux respectifs de [BP] et [BC], donc $2\,\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{PC}$.
De même, dans le triangle MCP, A et K sont les milieux respectifs de [CM] et [MP],
donc $2\,\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{PC}$.



On a : $2\,\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{PC} = 2\,\overrightarrow{AK}$, donc DJKA est un parallélogramme, on en déduit :

- (KA) // (DJ) ;
- K est l'image de J par la symétrie de centre I, centre du parallélogramme.

♦ **Exercice n°12 p.92**



$S_{(OD)}$

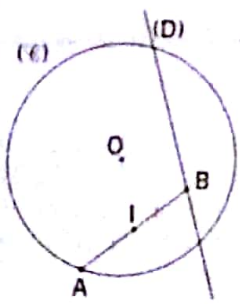
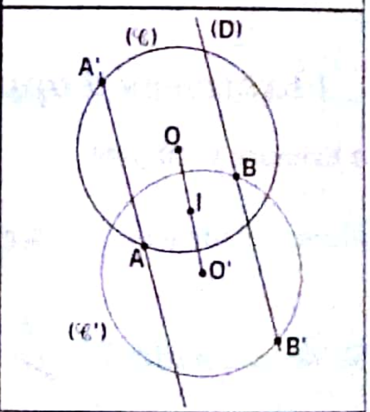
A	B
E	C
D	D

- Les triangles EAD et CBD sont isocèles, ont des angles au sommet de même mesure et ED = CD. Ils sont donc superposables et AD = BD.

AD = BD et OA = OB (rayons du cercle (𝒞)), donc (OD) est la médiatrice de [AB].

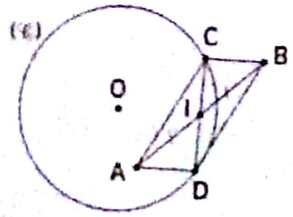
- OC = OE (rayons du cercle (𝒞)) et DC = DE (côtés du pentagone régulier), donc (OD) est la médiatrice de [CE].
- Le tableau ci-contre montre que (OD) est un axe de symétrie du pentagone régulier.
- Les axes de symétrie d'un pentagone régulier sont les médiatrices de chacun des cinq côtés du pentagone, donc : (OA), (OB), (OC), (OD) et (OE).

♦ **Exercice n°13 p.92**

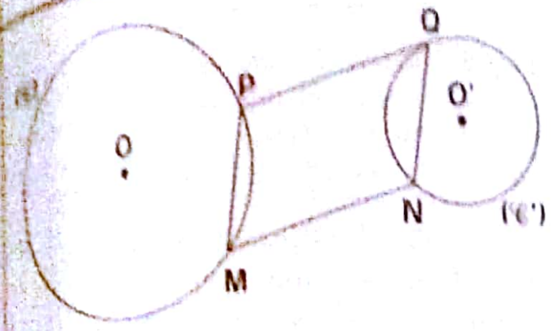
Esquisse	**Recherche d'une méthode de construction**		**Construction**
	• A est le symétrique de B par rapport à I. • B ∈ (D) donc A ∈ (D'), (D') étant symétrique de (D) par rapport à I. • Or A ∈ (𝒞). Par conséquent, A est un point d'intersection de (D') et (𝒞). Il y a deux solutions, car (D') coupe (𝒞) aux points A et A', donc il y a deux points B et B' correspondants.	S_I I I B A (D) (D')	

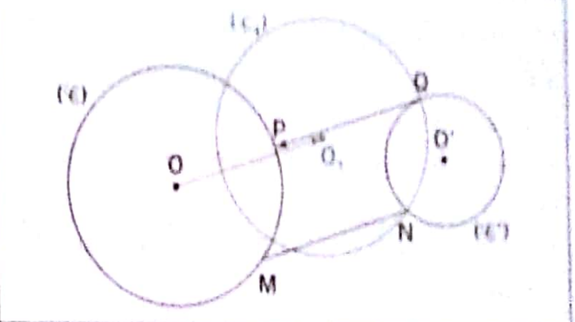
Remarque : Le point B est le symétrique de A par rapport au point I, donc B appartient au cercle (𝒞') symétrique de (𝒞) par rapport à I.
Par conséquent, B est le point d'intersection de (𝒞') et (D).

♦ **Exercice n°14 p.92**

Esquisse	**Recherche d'une méthode de construction**
	• ACBD est un parallélogramme, par conséquent le milieu I de [AB] est aussi le milieu de [CD]. • Les points C et D appartiennent à (𝒞) et sont symétriques par rapport au point I, donc ils appartiennent aussi au cercle (𝒞') image de (𝒞) par S_I. Par conséquent, C et D sont les points d'intersection de (𝒞) et (𝒞').

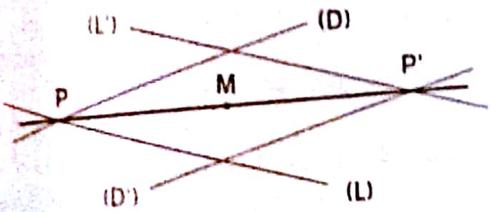
♦ Exercice n°15 p.92

Esquisse	Recherche d'une méthode de construction
	• MNQP est un parallélogramme, donc : $\vec{MN} = \vec{PQ}$. Par conséquent Q est l'image de P par la translation de vecteur $\vec{MN}$. • Le point P appartient à $(\mathscr{C})$, donc le point Q appartient au cercle $(\mathscr{C}_1)$, image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{MN}$. Par conséquent, Q est l'autre point d'intersection de $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}')$.

Programme de construction	Construction
• Construire le point O_1, image de O par la translation de vecteur $\vec{MN}$. • Tracer le cercle $(\mathscr{C}_1)$ de centre O_1 et de rayon OM. • Marquer Q, intersection de $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}')$. • Construire le point P, image de Q par la translation de vecteur $\vec{NM}$. *Ce qui peut arriver : $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}')$ sont tangents en N, il n'y a pas de solution.*	

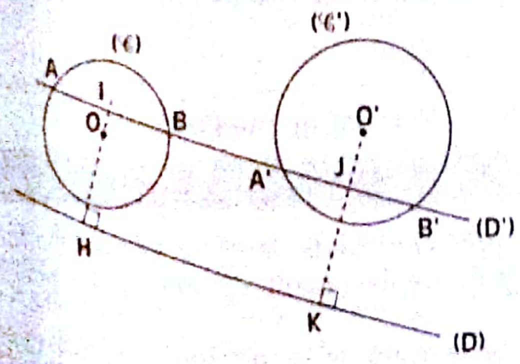
Exercices de recherche

♦ **Exercice n°16 p.92**

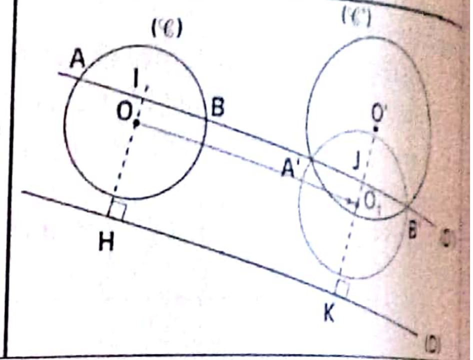


On construit les droites (D') et (L'), images respectives de (D) et (L) par la symétrie de centre M.
Les droites (D') et (L') se coupent au point P', symétrique de P par rapport à M.
Donc, la droite (P'M) est aussi la droite (PM).

♦ **Exercice n°17 p.92**

Esquisse	Recherche d'une méthode de construction
	• Les points A, B, A' et B' sont alignés et AB = A'B', donc : $\vec{AB} = \vec{A'B'}$. Par conséquent : $\vec{AA'} = \vec{BB'}$ (1). • (OH) est la médiatrice de [AB], donc le point I est le milieu de [AB] ; par suite : $\vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ (2) ; (O'K) est la médiatrice de [A'B'], donc le point J est le milieu de [A'B'], donc : $\vec{A'J} = \frac{1}{2}\vec{A'B'}$ (3).

Recherche d'une méthode de construction (suite)
En utilisant l'égalité de Chasles et les égalités (1), (2) et (3), on a :
• En utilisant l'égalité de Chasles et les égalités (1), (2) et (3), on a : $\vec{U} = \vec{IB} + \vec{BA'} + \vec{A'J} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BA'} + \frac{1}{2}\vec{A'B'}$ $= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BA'} + \frac{1}{2}\vec{BA'} + \frac{1}{2}\vec{A'B'} = \frac{1}{2}\vec{AA'} + \frac{1}{2}\vec{BB'} = \vec{AA'}$. Or, le quadrilatère IJKH est un rectangle, donc : $\vec{U} = \vec{HK}$. Par conséquent : $\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{HK}$. Donc, les points A' et B' sont les images respectives de A et B par la translation de vecteur $\vec{HK}$. • Les points A et B appartiennent à $(\mathscr{C})$, donc les points A' et B' appartiennent au cercle $(\mathscr{C}_1)$, image de $(\mathscr{C})$ par la translation de vecteur $\vec{HK}$. Or, A' et B' appartiennent à $(\mathscr{C}')$, par conséquent A' et B' sont les points d'intersection de $(\mathscr{C}')$ et $(\mathscr{C}_1)$.

Programme de construction	Construction
• Construire le point O_1, image de O par la translation de vecteur $\vec{HK}$. • Tracer le cercle $(\mathscr{C}_1)$ de centre O_1 et de même rayon que $(\mathscr{C})$. • Marquer A' et B', points d'intersection de $(\mathscr{C}')$ et $(\mathscr{C}_1)$. • Tracer la droite (A'B'). • Marquer A et B, points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (A'B').	

8. Rotation et homothétie

(pages 93 à 100 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à
– donner une approche expérimentale de la rotation ;
– présenter l'homothétie en utilisant la multiplication d'un vecteur par un nombre réel.

COMMENTAIRES

La démarche utilisée pour présenter la rotation est celle adoptée en classe de 4^e pour la translation : sens de déplacement sur les cercles pour la rotation, sens de déplacement sur une droite pour la translation.

La rotation est déterminée par un triangle isocèle OAA' ; on parlera de la rotation de centre O qui applique A sur A'. Cette présentation permet de faire l'économie de l'étude préalable des angles orientés, comme la présentation en classe de 4^e permettait d'aborder les translations sans étude préalable des vecteurs.

Le programme de construction de l'image d'un point M par une rotation r de centre O qui applique A sur A', se présente, grâce à deux activités, comme la combinaison de la construction de l'image d'un point dans deux cas particuliers :

- le point M appartient au cercle de centre O et de rayon OA ;
- le point M appartient à la demi-droite [OA).

La démarche utilisée pour présenter l'homothétie est différente : elle est basée sur la définition du produit d'un vecteur par un nombre réel. Elle pourrait donc être étudiée de façon plus approfondie, toutefois comme pour les autres applications du plan, il est préférable de respecter une certaine progressivité en étudiant les effets de cette application sur des figures simples : il s'agit là en effet de la découverte par l'élève d'une première application qui ne conserve pas la distance.

Les propriétés de ces deux transformations seront essentiellement utilisées, en classe de 3e, pour faciliter les reproductions, pour trouver des programmes de construction plus performants et exceptionnellement pour établir des résultats.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Rotations • **Vocabulaire** Sens direct, sens indirect, sens de déplacement, rotation r de centre O qui applique A sur A'. • **Méthode** Pour construire l'image d'un point M par la rotation de centre O qui applique A sur A', OAA' étant un triangle isocèle en O, on peut procéder comme suit : - tracer le cercle ($\mathscr{C}$) de centre O qui passe par A et A', - tracer le cercle ($\mathscr{C}'$) de centre O qui passe par M, - noter sur ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) le sens de déplacement de A vers A', - placer sur ($\mathscr{C}'$) le point M' tel que : • mes $\widehat{MOM'}$ = mes $\widehat{AOA'}$ • le sens de déplacement sur ($\mathscr{C}'$) de M vers M' est celui de A vers A' sur ($\mathscr{C}$). • **Propriété** L'image d'un segment par une rotation est un segment de même longueur.	• Construire l'image d'un point, d'une figure simple par une rotation. • Justifier une égalité de distance à l'aide d'une rotation. • Reconnaître, dans une configuration, les effets d'une rotation.
Homothéties • **Définition** O est un point du plan et k un nombre réel différent de 0. On appelle homothétie de centre O et de rapport k, l'application du plan dans le plan qui à chaque point M, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. • **Propriétés** Par une homothétie de rapport k, - une droite a pour image une droite qui lui est parallèle, - le segment [AB] a pour image le segment [A'B'] de longueur $\lvert k \rvert$AB (A' et B' étant les images respectives de A et B par cette homothétie). • **Vocabulaire** Agrandissement, réduction.	• Reconnaître, dans une configuration, les effets d'une homothétie. • Construire l'image d'un point M par une homothétie connaissant son centre et son rapport. • Agrandir ou réduire une figure simple par une homothétie.

Exercices du cours

♦ **Exercice 1.c p.97**

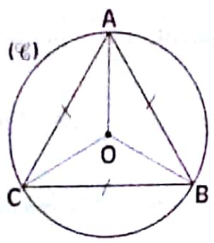
Par la rotation r, $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ et $C'A' = CA$.
Puisque ABC est rectangle en A, $BC^2 = BA^2 + AC^2$,
donc : $B'C'^2 = B'A'^2 + A'C'^2$.
Par conséquent, le triangle A'B'C' est rectangle en A'.

r	
O	O
A	A'
B	B'
C	C'

ABC est un triangle rectangle en A *équivaut à* $BC^2 = BA^2 + AC^2$

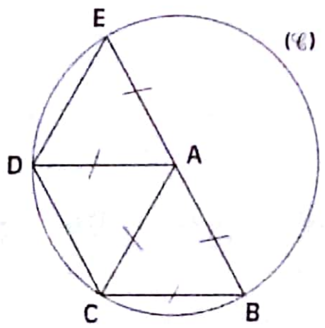
Exercices d'entraînement

♦ **Exercice n°1 p.100**



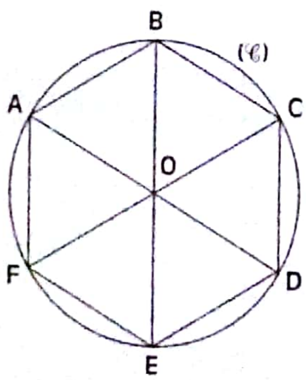
a) Le point O est sa propre image par r.
Par la rotation r, B est l'image de A, C est l'image de B et A est l'image de C.
b) Le triangle ABC est sa propre image par r.
Le triangle OBC est l'image du triangle OAB par r.

♦ **Exercice n°2 p.100**



a) Construction des points D et E
– Tracer le cercle (𝒞) de centre A et de rayon AB (le sens de déplacement de B vers C sur (𝒞) est le sens indirect) ;
– Marquer sur (𝒞), le point D tel que CD = CB ;
– Marquer sur (𝒞), le point E tel que DE = DC.
b) • Le quadrilatère ABCD est un losange, car : AB = BC = CD = DA.
• Le quadrilatère BCDE est un trapèze isocèle, car :
– les côtés [BC] et [ED] ont leurs supports sécants ;
– les côtés [BE] et [CD] ont leurs supports parallèles (les points B, A et E sont alignés, car mes $\widehat{BAE} = 3 \times 60° = 180°$ et (CD) // (BA))
– BC = ED, car les triangles ABC, ACD et ADE sont équilatéraux.

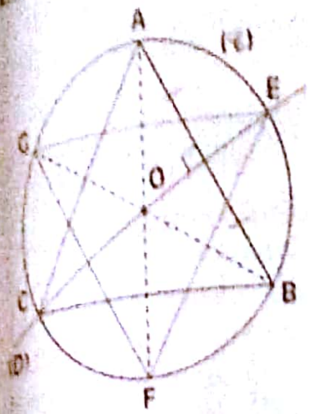
♦ **Exercice n°3 p.100**



r_1	
O	O
A	B
B	C
C	D
D	E
E	F
F	A

r_2	
O	O
A	E
B	F
C	A
D	B
E	C
F	D

• Exercice n°4 p.100



r

O	O
A	E
B	F
C	G

• $\text{mes}\,\widehat{AOE} = 2\,\text{mes}\,\widehat{ACE} = 2 \times 30° = 60°$,
donc : $\text{mes}\,\widehat{BOF} = \text{mes}\,\widehat{COG} = 60°$.
Par conséquent : $\text{mes}\,\widehat{AOF} = 3 \times 60° = 180°$.
De même : $\text{mes}\,\widehat{BOG} = 180°$.

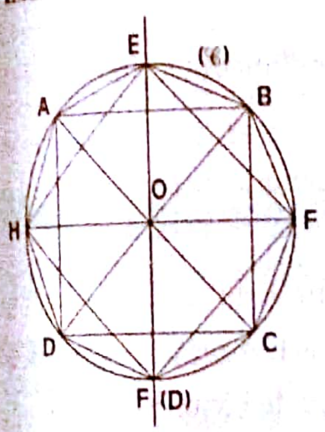
• Construction de F et G

– Tracer (OA) et marquer F, point d'intersection de (𝒞) et (OA) ;

– Tracer (OB) et marquer G, point d'intersection de (𝒞) et (OB).

• Par la rotation r de centre O qui applique A sur E,
[AB] a pour image [EF], [BC] a pour image [FG] et [CA] a pour image [GE].
Le triangle ABC est équilatéral, donc AB = BC = CA, par conséquent : EF = FG = GE.
Donc, le triangle EFG est aussi équilatéral.
• Le polygone AEBFCG est inscrit dans le cercle (𝒞) et AE = EB = BF = FC = CG = GA.
AEBFCG est donc un hexagone régulier.

• Exercice n°5 p.100

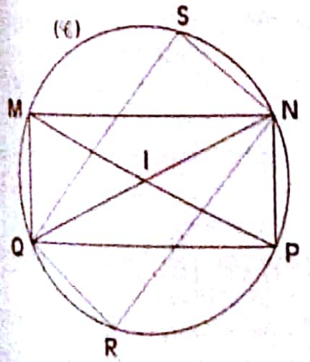


r

O	O
A	E
B	F
C	G
D	H

a) Par la rotation de centre O qui applique A sur E, A a pour image E, B a pour image F, C a pour image G et D a pour image H.
Les points E et G sont les points d'intersection de (L) et (𝒞) ; les points F et H sont les points d'intersection de (L') et (𝒞). (L') est la perpendiculaire à (L) passant par O.
b) AEBFCGDH est un octogone régulier, car il est inscrit dans le cercle (𝒞) et ses côtés ont la même longueur.

• Exercice n°6 p.100



a) • Par la rotation r de centre I qui applique M sur N, I est sa propre image, N est l'image de M et Q est l'image de P.
b) Construction de R et S
– Tracer le cercle (𝒞) de centre I qui passe par M, N ,P et Q ;
– Marquer sur (𝒞), le point R tel que NR = NM ;
– Marquer sur (𝒞), le point S tel que QS = QP.
c) L'image du rectangle MNPQ par r est le quadrilatère NRQS.
On établit le tableau de correspondance suivant :

r

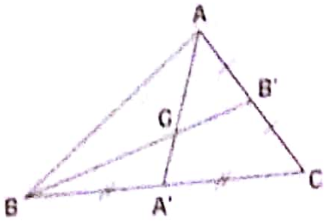
M	N
N	R
P	Q
Q	S
I	I

On a :
MN = QP et MQ = NP

Donc :
NR = SQ et NS = RQ

• Par conséquent, le quadrilatère NRQS est un parallélogramme.
Le triangle NRQ est inscrit dans le cercle (𝒞) de diamètre [NQ], donc : $\text{mes}\,\widehat{NRQ} = 90°$.
Par conséquent, NRQS est un rectangle.
On peut démontrer de même que les diagonales de NRQS se coupent en leur milieu I et qu'elles ont la même longueur.

♦ **Exercice n°7 p.100**



h	
A	A
A'	G

h'	
B	B
G	B'

a) Le point G, point d'intersection des médianes (AA') et (BB') est le centre de gravité du triangle ABC,

donc : $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$.

Par conséquent, G est l'image de A' par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.

De même, $\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BB'}$, ce qui équivaut à $\vec{BB'} = \frac{3}{2}\vec{BG}$.

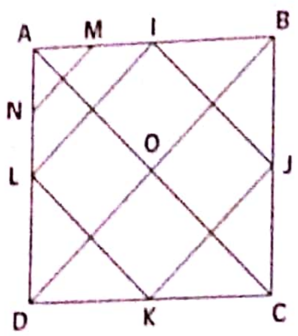
Par conséquent, B' est l'image de G par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.

b) C' image de C par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ équivaut à $\vec{GC'} = -\frac{1}{2}\vec{GC}$.

Or $\vec{GC'} = -\frac{1}{2}\vec{GC}$ équivaut à $2(\vec{GC} + \vec{CC'}) = \vec{CG}$ ou encore à $\vec{CC'} = \frac{3}{2}\vec{CG}$.

Donc, [CC'] est la médiane passant par C, par conséquent, C' est le point d'intersection de (AB) et (CG).

♦ **Exercice n°8 p.100**



a) $\vec{IM} = -\frac{1}{2}\vec{IB}$, donc M, image de B par l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{2}$.

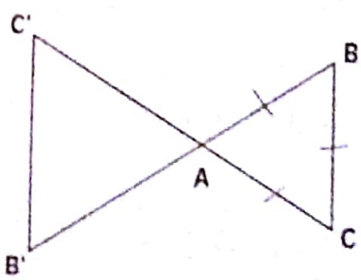
$\vec{DN} = \frac{3}{4}\vec{DA}$, donc N, image de A par l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{3}{4}$.

b) L'image du triangle BIJ par l'homothétie h de centre B et de rapport 2 est le triangle BAC, car par h : B est sa propre image, A est l'image de I (car $\vec{BA} = 2\vec{BI}$) et C est l'image de J (car $\vec{BC} = 2\vec{BJ}$).

c) $k = \frac{1}{4}$, car par l'homothétie h' de centre A qui applique le triangle ABD sur le triangle AMN, on a :

$\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ et $\vec{AN} = \frac{1}{4}\vec{AD}$.

♦ **Exercice n°9 p.100**



L'unité est le centimètre.

a) Par h, l'image de [AB] (resp. [BC], [CA]) est [AB'] (resp. [B'C'], [C'A]), donc :

AB' = $\frac{4}{3}$ AB ; B'C' = $\frac{4}{3}$ BC et C'A = $\frac{4}{3}$ CA.

Le triangle ABC est équilatéral, donc : AB = BC = CA = 3.

Par conséquent, AB' = B'C' = C'A = $\frac{4}{3}$ AB = 4.

Donc, le triangle AB'C' est un triangle équilatéral.

b) $\mathcal{A}_{AB'C'} = \frac{1}{2}\left(4 \times \frac{4\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3}$.

9. Pyramides et cônes

(pages 101 à 116 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- représenter en perspective certains solides simples.
- apprendre à extraire une sous figure plane d'une représentation de l'espace et y appliquer les propriétés propres aux configurations planes.
- réinvestir les propriétés de Pythagore et de Thalès pour des calculs de distances, d'aires, de volumes dans une pyramide régulière, dans un cône de révolution ou dans un solide obtenu par une section (par un plan parallèle au plan de la base d'une pyramide régulière, d'un cône de révolution).

COMMENTAIRES

La mesure d'un secteur circulaire, abordée au chapitre 16 est utilisée pour résoudre certains exercices concernant les surfaces latérales de cônes de révolution.

L'étude des configurations de l'espace portera essentiellement sur les pyramides régulières et les cônes de révolution ; on y verra une propriété de la hauteur, les formules donnant l'aire latérale et le volume.

Une section du solide par un plan parallèle à celui de sa base mettra en évidence une réduction de pyramide ou de cône et un tronc de pyramide ou de cône.

On pourra pratiquer l'extraction de figures planes afin d'expliciter des calculs d'aires ou de distances.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Pyramides et cônes **• Vocabulaire** - Pyramide, sommet de la pyramide, arête, faces latérales, base. - pyramide régulière, cône de révolution, axe de révolution d'un cône ; génératrice - secteur circulaire **• Définition** - On appelle hauteur d'une pyramide la droite qui passe par son sommet et qui est perpendiculaire au plan de sa base. - On dit qu'une pyramide est régulière lorsque : * sa base est un polygone régulier ; * ses faces latérales sont des triangles isocèles. - On appelle hauteur d'un cône la droite qui passe par son sommet et qui est perpendiculaire au plan de sa base. **• Propriété** - Si une pyramide est régulière, alors sa hauteur passe par le centre du cercle circonscrit à sa base. - La base d'un cône de révolution est un cercle, son axe est la hauteur du cône. **• Formules** - Pyramide régulière : $\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{B}\,h}{3}$ - Cône de révolution : $\mathcal{A} = \dfrac{a\,\mathcal{P}}{2}$; $\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{B}\,h}{3}$	• Reconnaître une pyramide et la décrire en utilisant le vocabulaire adéquat. • Réaliser un patron de pyramide à partir de la pyramide réelle ou d'une esquisse. • Réaliser une pyramide à partir d'un patron. • Représenter (en perspective) une pyramide régulière à base carrée. • Calculer le volume, l'aire latérale, l'aire totale d'une pyramide dans des cas simples. • Reconnaître un cône et le décrire en utilisant le vocabulaire approprié. • Réaliser un patron de cône à partir du cône réel ou d'une esquisse. • Réaliser un cône à partir d'un patron. • Calculer le volume, l'aire latérale, l'aire totale d'un cône.

Sections planes

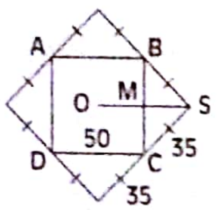
• **Vocabulaire** – Section plane – Tronc de pyramide, tronc de cône. • **Propriétés** – La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même nature que cette base. Les côtés de ces polygones sont parallèles deux à deux. – Lorsqu'on coupe une pyramide régulière par un plan parallèle au plan de sa base, on obtient une réduction de cette pyramide. Si l'échelle de la réduction est k, alors : $\dfrac{\text{aires de la pyramide réduite}}{\text{aires homologues de la pyramide}} = k^2$; $\dfrac{\text{volume de la pyramide réduite}}{\text{volume de la pyramide}} = k^3$. – La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un cercle. – Lorsqu'on coupe un cône de révolution par un plan parallèle au plan de sa base, on obtient une réduction de ce cône de révolution. Si l'échelle de la réduction est k, alors : $\dfrac{\text{aires du cône réduit}}{\text{aires homologues du cône}} = k^2$; $\dfrac{\text{volume du cône réduit}}{\text{volume du cône}} = k^3$.	• Déterminer des distances, des aires, des volumes relatifs à une section plane de pyramide. (pyramide en réduction, tronc de pyramide) • Déterminer des distances, des aires, des volumes relatifs à une section plane d'un cône de révolution (cône en réduction, tronc de cône).

Exercices du Manuel

Exercices du cours

♦ **Exercice 1.a p.102**

Le premier dessin ne peut visiblement pas être un patron de pyramide car une pyramide à base triangulaire a un total de quatre faces et non cinq.



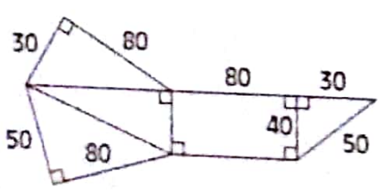
Considérer le dernier dessin ; imaginer qu'il existe une pyramide de sommet S, à base carrée dont une face latérale est le triangle SBC.

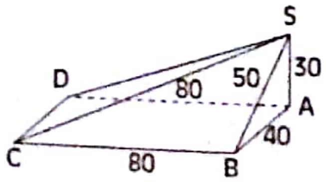
SO serait la hauteur de cette pyramide. M désignant le projeté orthogonal de S sur (BC), on aurait :

$SM^2 = 35^2 - 25^2 = 600$. Donc $SM < 25$.

Or dans le triangle SMO rectangle en O, l'hypoténuse SM est le plus grand des côtés. On ne peut donc pas construire de pyramide avec le dernier dessin ; ce dessin n'est donc pas un patron de pyramide.

♦ **Exercice 1.b p.102**



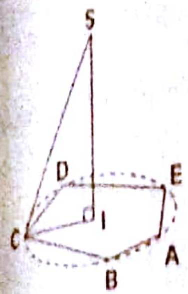


Cette pyramide à base rectangulaire a pour hauteur 30. On le remarque en simulant la reconstitution du solide à partir de l'esquisse du patron.

Donc $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}(80 \times 40) \times 30$

$= 32\,000$

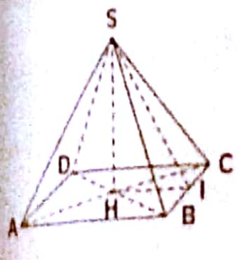
♦ **Exercice 1.c p.105**



Les triangles SAB, SBC, SCD, SDE, SEA sont isocèles de sommet S, donc :
$SA = SB = SC = SD = SE$ (1)
On extrait la figure du plan (SIC). Comme hauteur, (SI) est perpendiculaire au plan de la base donc à toute droite de ce plan passant par I : $(SI) \perp (IC)$.
Une propriété de Pythagore appliquée au triangle rectangle SIC donne :
$IC^2 = SC^2 - SI^2$
On démontre de même que $IA^2 = SA^2 - SI^2$; $IB^2 = SB^2 - SI^2$; etc.
Compte tenu des égalités (1), on a : $IA = IB = IC = ID = IE$.

Les points A, B, C, D, E étant des points du plan de la base de la pyramide, ils sont donc situés sur le cercle de centre I et de rayon IA.
Le pentagone ABCDE est inscriptible dans un cercle de centre I, mais il n'est pas nécessairement un polygone régulier ; on ne peut donc pas affirmer que la pyramide est régulière.

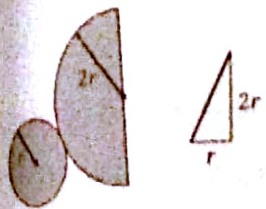
♦ **Exercice 1.d p.105**



L'unité de longueur est le cm.

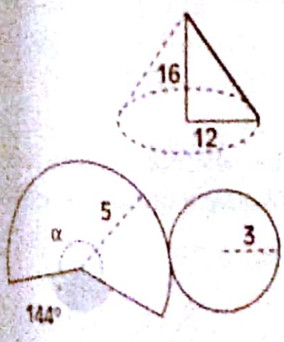
- $AB = 4$; donc $\mathcal{V} = \dfrac{4 \times 4 \times 8}{3} = \dfrac{128}{3}$ (en cm³).
- $SI^2 = SH^2 + HI^2 = 64 + 4$; donc $SI = 2\sqrt{17}$ et $\mathcal{A} = \dfrac{16 \times 2\sqrt{17}}{2} = 16\sqrt{17}$ (en cm²).
- $SB^2 = SI^2 + IB^2 = 68 + 4$; donc $SB = 6\sqrt{2}$ (en cm).

♦ **Exercice 1.e p.107**



Le périmètre du disque de rayon r est égal au demi-périmètre du disque de rayon $2r$.
Un disque de rayon r et un demi-disque de rayon $2r$ constituent donc le patron d'un cône ayant pour base le disque de rayon r et pour génératrice : $2r$.
La hauteur du cône est donc : $\sqrt{(2r)^2 - r^2}$ c'est-à-dire : $r\sqrt{3}$.

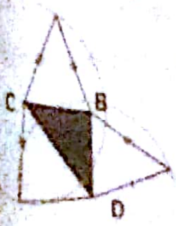
♦ **Exercice 1.f p.107**



L'unité de longueur est le cm.
Longueur de la génératrice, (rayon du cercle dans lequel on va découper la surface latérale) : $\sqrt{16^2 + 12^2} = 20$.
Périmètre de ce cercle : $2\pi \times 20 = 40\pi$.
Périmètre de la base (longueur de l'arc) : $2\pi \times 12 = 24\pi$.
On désigne par α° la mesure du secteur circulaire correspondant à la surface latérale du cône. On a : $\dfrac{\alpha}{360} = \dfrac{24\pi}{40\pi}$; d'où : $\alpha = \dfrac{3}{5} \times 360 = 216$.
D'où *l'esquisse du patron*, donnée ci-contre à l'échelle $\dfrac{1}{4}$.

Exercices d'entraînement

♦ **Exercice n°1 p.111**



♦ **Exercice n°2 p.111**

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{(20 + 30) \times 15}{2} \times 45,$$

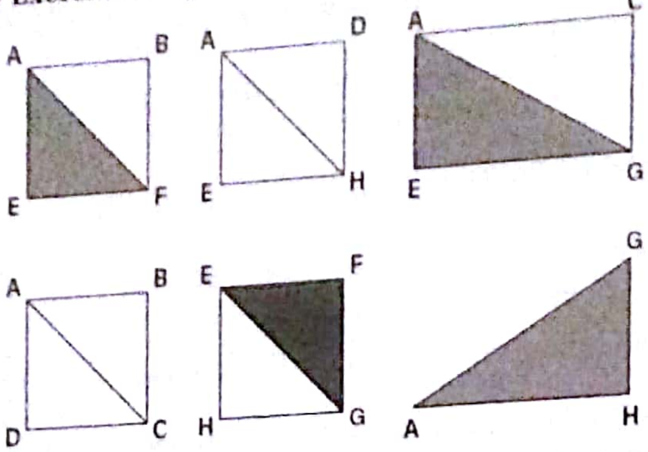
$\mathcal{V} = 5\,625$ (en mm³).

♦ **Exercice n°3 p.111**

$$\mathcal{A}_{\text{base}} = \frac{3 \times 9{,}375}{4{,}5} = 6{,}25.$$

Donc : $c^2 = 6{,}25$.
Par conséquent : $c = 2{,}5$ (en cm).

♦ **Exercice n°4 p.111**



b) Les triangles AEF et AEH sont isocèles et rectangles en E ; les triangles AEG, AFG et AHG sont rectangles.

c) $\mathcal{A}_{EFG} = 200$ (en mm²) ; la pyramide AEFG a pour hauteur [AE] :

$\mathcal{V}_{AEFG} = \frac{1}{3} \times 200 \times 20 = \frac{4\,000}{3}$ (mm³).

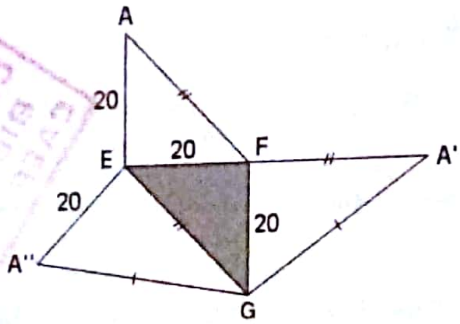
d) $\mathcal{A}_{EFGH} = 400$ (en mm²) ; la pyramide AEFGH a pour hauteur [AE] ;

$\mathcal{V}_{AEFGH} = \frac{1}{3} \times 400 \times 20 = \frac{8\,000}{3}$ (mm³).

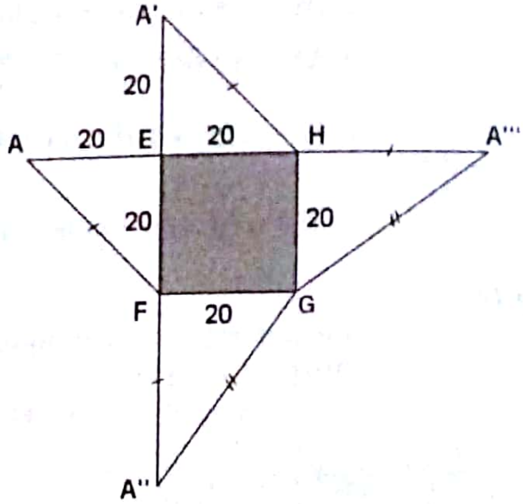
e) $EG = \sqrt{20^2 + 20^2} = 20\sqrt{2}$;

$AG = \sqrt{20^2 + (20\sqrt{2}^{\,2})} = 20\sqrt{3}$.

f) *Patron de la pyramide AEFG*



Patron de la pyramide AEFGH



♦ **Exercice n°5 p.111**

$\mathcal{V}_{AEFGH} = 2 \times 27 = 54$, or $\mathcal{V}_{AEFGH} = \frac{1}{3}\ \mathcal{A}_{EFGH} \times AE = \frac{1}{3}\ (AE)^3 = \frac{1}{3}\ \mathcal{V}_{ABCDEFGH}$

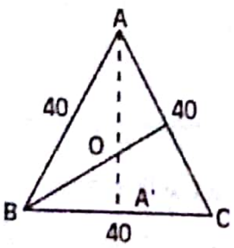
Donc $\mathcal{V}_{ABCDEFGH} = 3 \times \mathcal{V}_{AEFGH} = 162$ (en cm³).

♦ **Exercice n°6 p.111**

OABCD, OABFE, OCBFG, ODCGH, OADHE et OEFGH sont les six pyramides régulières à base carrée tracées sur le dessin : elles ont pour sommet le centre O du cube et pour base chacune des faces du cube.

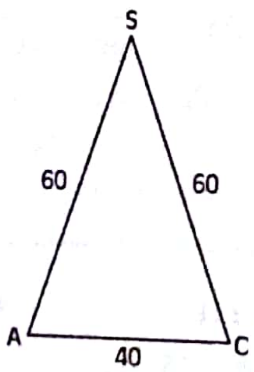
♦ **Exercice n°7 p.111**

a) Échelle : 60%

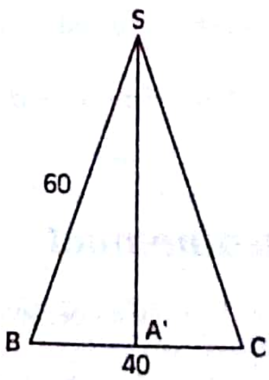


(ABC)

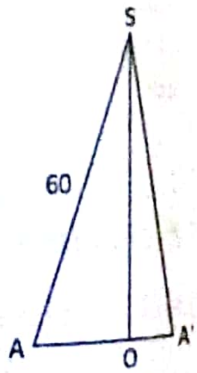
Cette construction permet de trouver AA' et AO en dimensions réelles



(SAC)



Cette construction permet de trouver SA' en dimensions réelles



(SOA)

L'unité de longueur est le millimètre.

b) • SABC est une pyramide régulière : sa base est le triangle équilatéral ABC, dont le centre du cercle circonscrit est O ; (AA') est donc la médiatrice du côté [BC] de ce triangle ; par conséquent :
$AA' = AB \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$.

• Le point O est aussi le centre de gravité du triangle ABC, par conséquent :
$AO = \dfrac{2}{3}\ AA' = 40\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $OA' = \dfrac{1}{3}\ AA' = 20\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

• Le triangle SOA est rectangle en O, car la hauteur d'une pyramide est perpendiculaire au plan de sa base, donc : $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 20\dfrac{\sqrt{69}}{3}$.

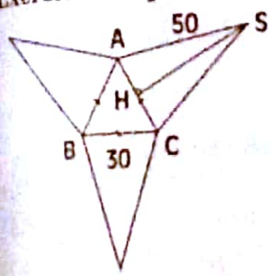
De même, le triangle SOA' est rectangle en O, donc : $SA' = \sqrt{SO^2 + OA'^2} = 40\sqrt{2}$.

c) • $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{40 \times 20\sqrt{3}}{2} = 400\sqrt{3}$.

• $\mathcal{A}_{SBC} = \dfrac{40 \times 40\sqrt{2}}{2} = 800\sqrt{2}$, donc : $\mathcal{A}_{\text{latérale}} = 3 \times \mathcal{A}_{SBC} = 2\,400\sqrt{2}$.

• $\mathcal{V}_{SABC} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times SO = 8\,000\dfrac{\sqrt{23}}{3}$.

♦ Exercice n°8 p.111



• $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2} \times 30 \times 30\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 225\sqrt{3}$.

• $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 5\sqrt{91}$. Donc : $\mathcal{A}_{SAB} = \dfrac{1}{2} \times 30 \times 5\sqrt{91} = 75\sqrt{91}$.

D'où : $\mathcal{A}_{\text{latérale}} = 3 \times 75\sqrt{91} = 225\sqrt{91}$ et $\mathcal{A}_{\text{totale}} = 225(\sqrt{3} + \sqrt{91})$.

• O désigne le centre du cercle circonscrit au triangle de base ABC.

Le point O est aussi le centre de gravité du triangle ABC, donc : $AO = \dfrac{2}{3} \times 30\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

Le triangle AOS est rectangle en O, donc : $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 10\sqrt{22}$.

Par conséquent : $\mathcal{V}_{SABC} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times SO = 750\sqrt{66}$.

♦ Exercice n°9 p.112

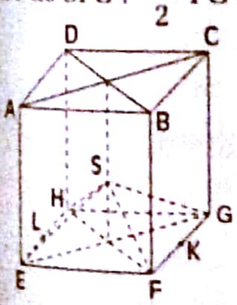
a) L désigne le milieu de [EH], M le centre du carré EFGH.

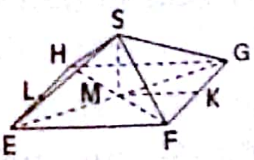
On a : (TK) ⊥ (FG) et (TK) ⊥ (KL). D'où [TK] est la hauteur de la pyramide TEFGH, donc TK = 10.

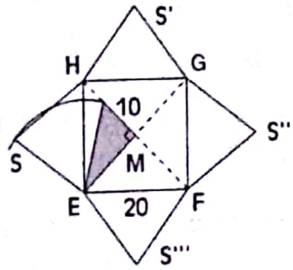
$\mathcal{V}_{TEFGH} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{EFGH} \times TK = \dfrac{4\,000}{3}$ (en mm³).

b) Dans le triangle SMK, rectangle en M, $SK = \sqrt{SM^2 + MK^2} = 10\sqrt{2}$.

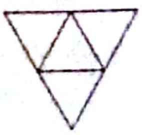
Aire de SFG : $\dfrac{1}{2}\ FG \times SK = 100\sqrt{2}$. Aire latérale de SEFGH : $400\sqrt{2}$.



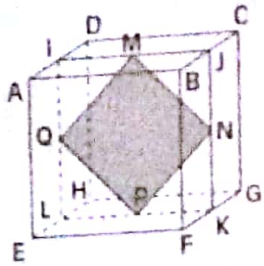




♦ Exercice n°10 p.112



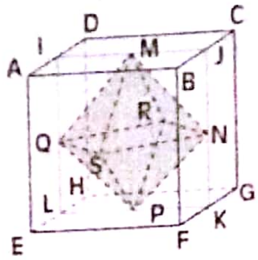
♦ **Exercice n°11 p.112**



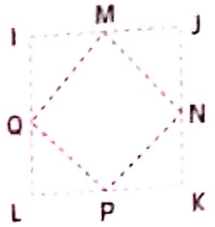
• I, J, K et L étant les milieux respectifs des arêtes [AD], [BC], [FG] et [EH], démontrer que IJKL est un carré ; M, N, P et Q étant les milieux des côtés de ce carré, démontrer que MNPQ est un carré.

• Pour démontrer que QRNS est un carré, on peut procéder de même.

♦ **Exercice n°12 p.112**



Dans le plan $(\mathcal{P}_1)$:



a) MNPQ, QRNS et MRPS sont trois carrés.

b) SMNPQ et RMNPQ sont deux pyramides régulières de base le carré MNPQ. La justification est la même que pour la pyramide MNRQS.

La pyramide MNRQS est une pyramide régulière car sa base QRNS est un carré

$(QR = RN = NS = SQ = 2\sqrt{2})$.

Ses quatre faces MSN, MNR, MRQ et MQS sont des triangles équilatéraux de côté $2\sqrt{2}$ (en cm).

La hauteur est 2 cm et un côté de la base a pour longueur $2\sqrt{2}$ cm, donc :

$\mathcal{V}_{MNRQS} = \frac{1}{3} \times (2\sqrt{2})^2 \times 2 = \frac{16}{3}$ (en cm³).

♦ **Exercice n°13 p.112**

• $\mathcal{V}_{PABCD} = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 6 = 72$ (en cm³).

• $\mathcal{V}_{QABCD} = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 3 = 36$ (en cm³).

♦ **Exercice n°14 p.112**

• $\mathcal{V}_{cylindre} \approx 3{,}14 \times 12^2 \times 3$; $\mathcal{V}_{cône} \approx \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 12^2 \times 9$;

$\mathcal{V}_{air} \approx 2\,712{,}96$ (m³). La quantité d'air est de 2 712 960 litres.

♦ **Exercice n°15 p.112**

$\mathcal{V}_C = \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times h = \frac{1}{3}\pi \times (\frac{1}{9} r^2 \times 9h) = \frac{1}{3}\pi \times ((\frac{r}{3})^2 \times 9h)$

Ainsi, en multipliant le rayon par $\frac{1}{3}$ et la hauteur par 9, le volume reste le même.

♦ **Exercice n°16 p.112**

25 cl = 250 cm³, donc : $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times h = 250$. Par conséquent : $h \approx 15$ (en cm).

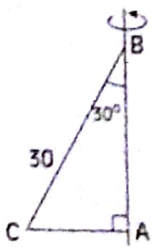
♦ **Exercice n°17 p.112**

a) $\mathcal{V}_C = \frac{1}{3}\pi \times 2{,}5^2 \times 12 \approx 78{,}5$ (en cm³). 78,5 cm³ = 7,85 cl.

b) Volume de la demi boule : $\mathcal{V}_B = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 2{,}53 \times 12 \approx 32{,}7$ (en cm³). 32,7 cm³ = 3,27 cl.

$\mathcal{V} = \mathcal{V}_C + \mathcal{V}_B = 7{,}85 + 3{,}27 = 11{,}12$ (en cl). Or 2,5 l = 250 cl, donc, on peut vendre 22 cornets, car 250 : 11,12 ≈ 22,48.

♦ **Exercice n°18 p.113**



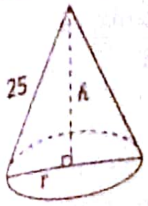
• BC = 30 et cos 30° = $\frac{AB}{BC}$, or cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, par conséquent : $AB = h = 15\sqrt{3}$.

• BC = 30 et cos 30° = $\frac{AC}{BC}$, or sin 30° = $\frac{1}{2}$, donc : $AC = r = 15$.

• $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times h$, donc, $\mathcal{V} \approx \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 15^2 \times 15\sqrt{3} \approx 6111{,}2$ (en cm³)

(avec $\sqrt{3} \approx 1{,}73$)

♦ **Exercice n°19 p.113**



- $2\pi\, r = 44$, donc $r = \dfrac{44}{2 \times \dfrac{22}{7}} \approx 7$.
- $r^2 + h^2 = 25^2$, donc : $h \approx 24$.
- $\mathcal{V}_{\text{cône}} \approx \dfrac{1}{3} \times \dfrac{22}{7} \times 7^2 \times 24$; donc : $\mathcal{V}_{\text{cône}} \approx 1\,232$ (en cm^3).

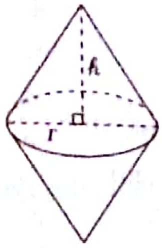
Remarque : le calcul de h peut fournir une occasion de calcul rapide ; en effet :
$h^2 = 25^2 - 7^2 = (25 - 7)(25 + 7) = 18 \times 32 = 9 \times 2 \times 2 \times 16$. D'où $h = 3 \times 2 \times 4 = 24$.

♦ **Exercice n°20 p.113**

- $h = r = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, donc :

$\mathcal{V} = 2 \times \left(\dfrac{1}{3} \times 3{,}14 \times \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^3\right)$

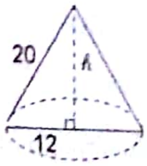
$\mathcal{V} \approx 91{,}7$ (en cm^3).



♦ **Exercice n°21 p.113**

- $h = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ (en cm).
- $\mathcal{V} \approx \dfrac{1}{3} \times 3{,}14 \times 12^2 \times 16$

$\mathcal{V} \approx 2\,411{,}52$ (cm^3).



♦ **Exercice n°22 p.113**

$\mathcal{A} = \dfrac{\mathcal{P}a}{2}$

$\mathcal{A} \approx \dfrac{1}{2} \times 2 \times 3{,}14 \times 15 \times 45$

$\mathcal{A} \approx 2\,119{,}5$ (cm^2).

♦ **Exercice n°23 p.113**

r désignant le rayon de la base de ce cône, on a :

$2 \times \pi \times 35 \times \dfrac{135}{360} = 2 \times \pi \times r$.

Donc : $r = \dfrac{135 \times 35}{360} = 13{,}125$ (en cm).

♦ **Exercice n°24 p.113**

- $\mathcal{A} \approx 3{,}14 \times r \times 75$, donc : $r \approx 50$ (en cm).
- $h \approx \sqrt{75^2 - 50^2}$; donc : $h \approx 25\sqrt{5}$ (en cm).
- $\mathcal{V} \approx \dfrac{1}{3} \times 3{,}14 \times 50^2 \times 25\sqrt{5}$, donc : $\mathcal{V} \approx 146\,276{,}1$ (en cm^3).

♦ **Exercice n°25 p.113**

$\mathcal{A}_1 = \dfrac{\mathcal{P}_1 a}{2}$. Donc $\dfrac{\pi a^2 \times 120}{360} = \dfrac{2\pi r_1 a}{2}$ c'-à-d : $\dfrac{a}{3} = r_1$. D'où : $r_1 = 2$

De plus, $h_1{}^2 = a^2 - r_1{}^2$. Donc : $h_1 = 4\sqrt{2}$.

Par conséquent : $\mathcal{V}_1 \approx \dfrac{1}{3} \times 3{,}14 \times 4 \times 4\sqrt{2}$; donc : $\mathcal{V}_1 \approx 23{,}7$ (en cm^3).

- L'autre cône est tel que la mesure du secteur circulaire est 240° ; comme $a = 6$, on a : $r^2 = 4$.

Donc : $h^2 = 2\sqrt{5}$.

Par conséquent : $\mathcal{V}_2 \approx \dfrac{1}{3} \times 3{,}14 \times 16 \times 2\sqrt{5}$; donc $\mathcal{V}_2 \approx 74{,}9$ (en cm^3).

♦ **Exercice n°26 p.113**

- $\mathcal{A}_{ABCD} = 144$ (en cm^2) et $\mathcal{V}_{SABCD} = \dfrac{1}{3} \times 144 \times 18 = 864$ (en cm^3).
- $\mathcal{A}_{KLMN} = \dfrac{1}{4} \times \mathcal{A}_{ABCD} = 36$ (en cm^2) et $\mathcal{V}_{SKLMN} = \dfrac{1}{8} \times \mathcal{V}_{SABCD} = 108$ (en cm^3).

♦ **Exercice n°27 p.113**

- $\mathcal{V}_{P'} = \dfrac{1}{8} \times \mathcal{V}_P = \dfrac{984}{8} = 123$ (en cm^3) et $\mathcal{V}_T = 984 - 123 = 861$ (en cm^3).
- $\dfrac{\text{volume P'}}{\text{volume P}} = \dfrac{1}{8}$ et $\dfrac{\text{volume T}}{\text{volume P}} = \dfrac{7}{8}$.

♦ **Exercice n°28 p.113**

• $\mathcal{A}_{ABCD} = 324$ et $\mathcal{A}_{EFGH} = 64$, donc : $\dfrac{\mathcal{A}_{EFGH}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \dfrac{64}{324} = \dfrac{16}{81} = \dfrac{4}{9}$. Par conséquent : $k = \dfrac{4}{9}$

D'où la hauteur h de la pyramide SEFGH : $h = \dfrac{4}{9} \times 27 = 12$ (en cm).

• $\mathcal{V}_{ABCDEFGH} = \dfrac{1}{3} \times (324 \times 27 - 64 \times 12) = 2\,660$ (en cm^3).

♦ **Exercice n°29 p.113**

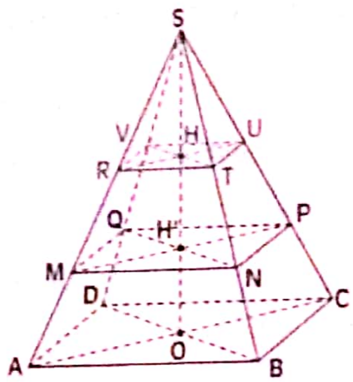
• $k = \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{30}{40} = \dfrac{3}{4}$, donc : $\dfrac{SO'}{SO} = k$. Par conséquent : $SO' = \dfrac{3}{4}$ (SO' + 25).

D'où : SO' = 75 et SO = 100 (en cm).

• $\mathcal{V}_{SABCD} = \dfrac{1}{3} \times 1\,600 \times 100 = \dfrac{160\,000}{3}$ (en cm^3) et $\mathcal{V}_{SEFGH} = \dfrac{1}{3} \times 900 \times 75 = 22\,500$ (en cm^3)

Par conséquent : $\mathcal{V}_{ABCDEFGH} = \dfrac{160\,000}{3} - 22\,500 = \dfrac{92\,500}{3}$ (en cm^3).

♦ **Exercice n°30 p.113**



• $\mathcal{V}$ est le volume de la pyramide SABCD :

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times 6^2 \times 10 = 120$ (en cm^3).

• On cherche à exprimer le volume du tronc de pyramide MNPQRTUV en fonction de $\mathcal{V}$.

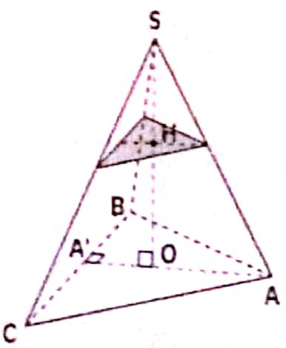
$\mathcal{V}_{SRTUV} = (\dfrac{3}{10})^3\,\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_{SMNPQ} = (\dfrac{7}{10})^3\,\mathcal{V}$.

Or, $\mathcal{V}_{MNPQRTUV} = \mathcal{V}_{SMNPQ} - \mathcal{V}_{SRTUV}$, donc :

$\mathcal{V}_{MNPQRTUV} = \dfrac{316}{1\,000}\,\mathcal{V} = 0{,}316\,\mathcal{V}$.

Donc : $\mathcal{V}_{MNPQRTUV} = 37{,}92$ (en cm^3).

♦ **Exercice n°31 p.114**



a) • $AA' = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$, donc : $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}\,(5 \times \dfrac{5\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$.

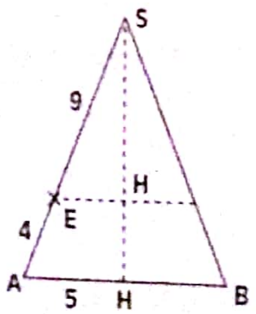
• $OA = \dfrac{2}{3}\,AA' = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$, donc : $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{5^2 - (\dfrac{5\sqrt{3}}{3})^2} = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}$.

Donc : $\mathcal{V}_{SABC} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{25\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{5\sqrt{6}}{3} = \dfrac{125\sqrt{2}}{12}$ (en cm^3).

b) $\mathcal{V}_{tronc} = \dfrac{125\sqrt{2}}{12} - \dfrac{1}{8} \times \dfrac{125\sqrt{2}}{12} = \dfrac{7}{8} \times \dfrac{125\sqrt{2}}{12} = \dfrac{875\sqrt{2}}{96}$ (en cm^3).

c) $\dfrac{\mathcal{V}_{tronc}}{\mathcal{V}_{SABC}} = \dfrac{7}{8}$.

♦ **Exercice n°32 p.114**



a) • $SH^2 = SA^2 - AH^2 = 144$; d'où : SH = 12.

• $\mathcal{A}_{latérale} = \dfrac{\mathcal{P}a}{2} = \dfrac{2\pi \times 5 \times 13}{2} = 65\,\pi$, donc : $\mathcal{A}_{latérale} \approx 204{,}1$ (en cm^2).

Échelle de réduction : $k = \dfrac{SE}{SA} = \dfrac{9}{13}$.

b) On désigne par $\mathcal{A}_r$ l'aire latérale du cône réduit et par $\mathcal{A}$ celle du cône.

On a : $\dfrac{\mathcal{A}_r}{\mathcal{A}} = k^2 = (\dfrac{9}{13})^2$. D'où $\mathcal{A}_r = \dfrac{81}{169}$ $\mathcal{A} \approx 97{,}82$ (en cm^2).

c) $\mathcal{A}_{\text{Tronc}} = \pi \left(\frac{9 \times 5}{13} \right) + (204{,}1 - 97{,}82) + \pi\,(5)^2 = \pi\,(11{,}982 + 106{,}28 + 25)$; donc : $\mathcal{A}_{\text{Tronc}} \approx 210{,}3$ (en cm²).

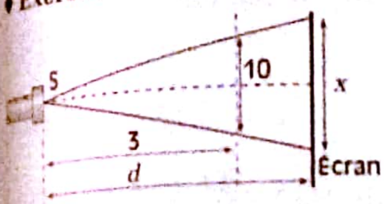
$\mathcal{V}_{\text{Tronc}} = \mathcal{V}_{\text{Cône}} - \mathcal{V}_{\text{p.Cône}} = \mathcal{V}_{\text{Cône}} - \left(\frac{9}{13}\right)^3 \times \mathcal{V}_{\text{Cône}} = \frac{1\,468}{2\,197} \times \mathcal{V}_{\text{Cône}}$

$= \frac{1\,468}{2\,197} \times \frac{1}{3} \times \pi\,(5)^2 \times 12$; donc : $\mathcal{V}_{\text{Tronc}} \approx 209{,}8$ (en cm³).

♦ Exercice n°33 p.114

- $\mathcal{V}_P = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \mathcal{V}_{\text{cône}} = \frac{1}{8} \times 9\,400 = 1\,175$ (en cm³) et $\mathcal{V}_T = 9\,400 - 1\,175 = 8\,225$ (en cm³).
- Aire de la base de P : $\mathcal{A} = \frac{1}{4} \times 705 = 176{,}25$ (en cm²).
- $\mathcal{V}_P = \frac{1}{3} \times 176{,}25 \times h = 1\,175$, donc : $h = 20$ (en cm).

♦ Exercice n°34 p.114

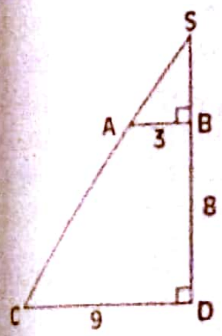


d est la distance de S à l'écran et x le diamètre du disque lumineux.

a) $\frac{3}{d} = \frac{10}{x}$ et $x = 18$; donc : $d = 5{,}4$ (en cm).

b) $\frac{3}{d} = \frac{10}{x}$ et $d = 7{,}5$; donc : $x = 25$ (en cm).

♦ Exercice n°35 p.114



$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{P} \times a}{2} = \frac{2\,\pi\,r\,a}{2} = \pi\,r\,a$, où r est le rayon de la base et a une génératrice.

Donc, l'aire de l'abat-jour est : $\mathcal{A} = \pi \times CD \times SC - \pi \times AB \times SA = 9\pi\,SC - 3\pi\,SA$.

En utilisant la propriété de Thalès dans le triangle SCD,

$\frac{SB}{SD} = \frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Donc : SC = 3 SA (1) et SD = 3 SB (2).

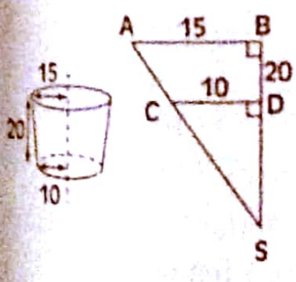
D'après l'égalité (2) : SB + 8 = 3 SB, donc : SB = 4.

Par conséquent : SA = 5 (propriété de Pythagore dans le triangle rectangle SAB).

D'où : SC = 15 (d'après l'égalité (1)).

Donc : $\mathcal{A} = 120\,\pi$; $\mathcal{A} \approx 376{,}8$ (en cm²).

♦ Exercice n°36 p.114



- SB = SD + 20.

(AB) // (CD). La propriété de Thalès est appliquée dans le triangle SCD :

$\frac{SD}{SB} = \frac{CD}{AB}$

Donc : $\frac{SD}{SD + 20} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$. D'où : SD = 40 et SB = 60.

- $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\,\pi \times 15^2 \times 60 - \frac{1}{3}\,\pi \times 10^2 \times 40 = \frac{9\,500\,\pi}{3}$; $\mathcal{V} \approx 9\,943{,}3$ (en cm³).

☐ Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n°37 p.114

a) Le triangle ACF est équilatéral, car $AC = AF = CF = 6\sqrt{2}$ (diagonales de carrés de côté 6), donc :

$\mathcal{A}_{ACF} = \frac{1}{2} \times \left(6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 18\sqrt{3}$.

Les triangles BAC, BAF et BCF sont isocèles et rectangles en B, ayant pour côté de l'angle droit 6, donc :

$\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABF} = \mathcal{A}_{CBF} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$. Donc l'aire totale de la pyramide FABC est :

$\mathcal{A}_{FABC} = \mathcal{A}_{ACF} + \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ABF} + \mathcal{A}_{CBF} = 18\sqrt{3} + 3 \times 18$; donc : $\mathcal{A}_{FABC} \approx 85{,}14$ (en cm²).

b) $\mathcal{V}_{DEFH} = \mathcal{V}_{FABC}$ car ces deux pyramides ont des hauteurs de même longueur (l'arête du cube) et leurs bases ont la même aire (la moitié de l'aire d'une face du cube).

♦ Exercice n°38 p.114

$\mathcal{V}_1 = \pi r^3$ $\quad \mathcal{V}_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$ $\quad \mathcal{V}_3 = \frac{1}{3} \pi r^3$.

Donc : $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3$; $\mathcal{V}_2 = \frac{1}{2} (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_3)$.

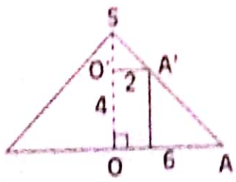
♦ Exercice n°39 p.114

$\mathcal{V}_{Cylindre} = \pi r^2 h$; $\mathcal{V}_{Cône} = \frac{1}{3} \pi r^2 \frac{h}{2}$, donc : $\mathcal{V}_{Solide} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. Par conséquent : $\mathcal{V}_{Solide} = \frac{1}{3} \mathcal{V}_{Cylindre}$

Donc le volume non rempli de sable est égal aux deux tiers du volume du cylindre.

Volume $\mathcal{V}$ non rempli de sable : $\frac{2}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi (4)^2 \times 15$; donc : $\mathcal{V} \approx 502{,}40$ (en cm³).

♦ Exercice n°40 p.114



(échelle 25%)

b) O'O = 4, O'A' = 2 et OA = 6. On pose SO' = x.

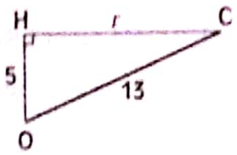
En utilisant la propriété de Thalès dans le triangle SOA : $\frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OA}$.

Donc : $\frac{x}{x+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Par conséquent : $x = 2$; d'où SO = 6.

c) $\mathcal{V}_{Cône} = \frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 6 = 72\pi$; $\quad V_{Cône} \approx 226{,}1$ cm³

$\mathcal{V}_{Cylindre} = \pi \times 2^2 \times 4 = 16\pi$; $\quad \mathcal{V}_{Cylindre} \approx 50{,}24$ cm³

♦ Exercice n°41 p.115



a) • Rayon du disque $(\mathcal{D})$: $r = 12$, car $12^2 + 5^2 = 13^2$.

$\mathcal{A}_{(\mathcal{D})} = 3{,}14 \times 12^2$; donc : $\mathcal{A}_{(\mathcal{D})} \approx 452{,}16$ (en cm²).

b) Volume des cônes de sommet A et de sommet B :

$\mathcal{V}_A = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{(\mathcal{D})} \times AH$ et $\mathcal{V}_B = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{(\mathcal{D})} \times BH$.

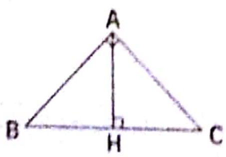
$\mathcal{V} = \mathcal{V}_A + \mathcal{V}_B = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{(\mathcal{D})} \times AB$; donc $\mathcal{V} \approx 3\,918{,}72$ (en cm³).

♦ Exercice n°42 p.115

• $\mathcal{V}_{cube} = 5^3 = 125$ et $\mathcal{V}_{pyramide} = \frac{1}{3} \times 5^2 \times 9 = 75$.

• $\mathcal{V}_{étoile} = 125 + 6 \times 75 = 575$ (en cm³) et $m = 575 \times 0{,}8 = 460$ (en g).

♦ Exercice n°43 p.115



Le triangle ABC est isocèle et rectangle en A et AH = 1 (en m).

donc : $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 1 + 1 = 2$, car BH = AH.

Par conséquent : $AB = \sqrt{2}$.

♦ Exercice n°44 p.115

a) a est l'arête du cube. On a : $r = \frac{a}{2}$ et $h = \frac{a}{2}$.

Donc : $\mathcal{V}_{cube} = a^3$ et $\mathcal{V}_{cône} = \frac{1}{3} \pi \times (\frac{a}{2})^2 \times (\frac{a}{2}) = \frac{\pi a^3}{24}$.

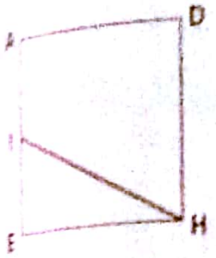
Volume du cube évidé : $\mathcal{V} = a^3 - 6 \times \frac{\pi a^3}{24} = (\frac{4-\pi}{4}) \times a^3$.

b) On désigne par x la masse du cube évidé.

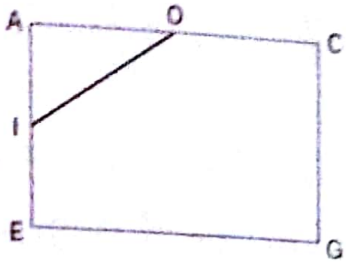
La masse est proportionnelle au volume, donc : $\frac{a^3}{8} = \left(\frac{\left(\frac{4-\pi}{4}\right) \times a^3}{x} \right) \times a^3 x$. Donc : $x = 2(4-\pi)$.

D'où : $x \approx 1,72$ (en kg).

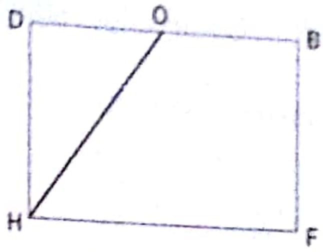
• Exercice n°45 p.115



Plan (ADE)



Plan (ACE)



Plan (BDF)

a) $AC = AH = 5\sqrt{2}$; $OA = \frac{AC}{2}$

b) $IH^2 = IE^2 + EH^2 = 2,5^2 + 5^2 = 31,25$; $OI^2 = OA^2 + AI^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2,5^2 = 18,75$;

$OH^2 = OD^2 + DH^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 5^2 = 37,5$.

Par conséquent, le triangle OIH n'est pas rectangle.

c) La pyramide OAIHD a pour sommet O et pour base le trapèze rectangle AIHD.

d) $MH^2 = 2,5^2 + 5^2 = 31,25$; $OM^2 = 2,5^2 = 6,25$; $OH^2 = 37,5$. Donc : $OH^2 = OM^2 + MH^2$.

OMH est un triangle rectangle en M. Donc, $(OM) \perp (MH)$.

Or $(OM) \perp (MD)$, donc (OM) est perpendiculaire au plan (MDH), et également à toute droite de ce plan qui passe par M. D'où $(OM) \perp (MN)$.

[OM] est la hauteur de la pyramide OAIHD, et sa longueur est 2,5 cm.

$\mathcal{A}_{AIHD} = \frac{AI + DH}{2} \times AD = \frac{2,5 + 5}{2} \times 5 = 18,75$.

e) $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 18,75 \times 2,5 = 15,625$ (en cm³).

• Exercice n°46 p.115

a) $BC^2 = 5^2 - 3^2 = 16 = 4^2$, donc : $BC = 4$.

$\mathcal{A}_{DEF} = \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$; $\mathcal{A}_{ABED} = 3 \times 2 = 6$; $\mathcal{A}_{BCFE} = 4 \times 2 = 8$; $\mathcal{A}_{ACFD} = 5 \times 2 = 10$.

Par conséquent : $\mathcal{A}_{ABCDEF} = 36$ (en cm²) et $\mathcal{V}_{ABCDEF} = \mathcal{A}_{ABC} \times AD = 12$ (en cm³).

b) • Aires CABF et FABED

$BF^2 = BC^2 + CF^2 = 20$, donc : $BF = 2\sqrt{5}$.

$\mathcal{A}_{CABF} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACF} + \mathcal{A}_{BCF} + \mathcal{A}_{ABF} = \frac{1}{2}\ (3 \times 4 + 5 \times 2 + 4 \times 2 + 3 \times 2\sqrt{5}) = 15 + 3\sqrt{5}$ (en cm²).

$\mathcal{A}_{FABED} = \mathcal{A}_{ABED} + \mathcal{A}_{ABF} + \mathcal{A}_{BEF} + \mathcal{A}_{DEF} + \mathcal{A}_{ADF} = 6 + \frac{1}{2}(3 \times 2\sqrt{5} + 2 \times 4 + 3 \times 4 + 2 \times 5)$

$= 21 + 3\sqrt{5}$ (en cm²).

• Volumes CABF et FABED

$\mathcal{V}_{FABED} = \frac{1}{3}\ \mathcal{A}_{ABED} \times EF = 8$ (en cm³) et $\mathcal{V}_{CABF} = 12 - 8 = 4$ (en cm³).

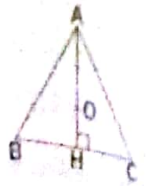
• Exercice n°47 p.116

1) • La pyramide SABC est régulière, donc sa hauteur [SO] passe par le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

Le triangle ABC est équilatéral, donc le point O est aussi le centre de gravité du triangle ABC, par conséquent : $OA = \frac{2}{3}\ AH$.

La droite (AH) est à la fois la médiane et la hauteur du triangle ABC passant par A,

donc : $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. D'où : $OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

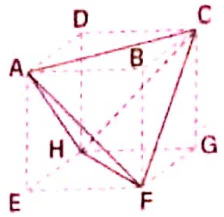


- Le triangle AOS est rectangle en O, donc : $AS^2 = OS^2 + OA^2$, donc : $\ell^2 = h^2 + \dfrac{a^2}{3}$.

b) Cas où $\ell = a$.

$h^2 = \ell^2 - \dfrac{a^2}{3} = a^2 - \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{2a^2}{3}$. D'où ; $h = a\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

♦ Exercice n°48 p.116



a) $\mathcal{V}_{GCFH} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4 \times 4}{2} \times 4 = \dfrac{32}{3}$ (en cm³).

b) • $\mathcal{V}_{ACFH} = 64 - 4 \times \dfrac{32}{3} = \dfrac{64}{3}$ (en cm³).

- ACFH est une pyramide telle que toutes ses arêtes ont la même longueur que la diagonale du carré ABCD : $4\sqrt{2}$.
- Le triangle ACF étant équilatéral, de côté $4\sqrt{2}$, sa hauteur est $2\sqrt{6}$.

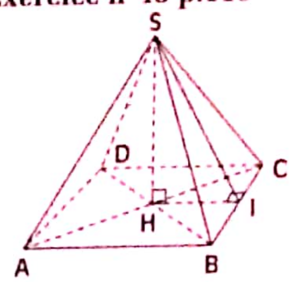
Par conséquent : $\mathcal{A}_{ACF} = \dfrac{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6}}{2} = 8\sqrt{3}$.

h étant la hauteur de la pyramide ACFH, on a : $\mathcal{V}_{ACFH} = \dfrac{1}{3}\,\mathcal{A}_{ACF} \times h$. Donc, $\dfrac{64}{3} = \dfrac{1}{3} \times 8\sqrt{3}\,h$,

d'où : $h = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Exercice de recherche

♦ Exercice n°49 p.116



SH = 146 et AB = 230.

- Dans le triangle SIH rectangle en H : $SI^2 = SH^2 + IH^2$

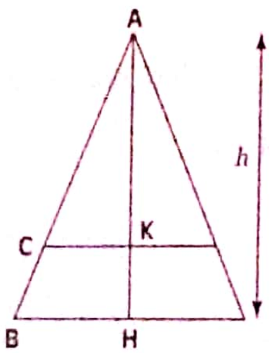
$SI^2 = 146^2 + 115^2$, donc : $SI \approx 185{,}85$ (en m).

Par conséquent, $\mathcal{A}_{SBC} \approx \dfrac{230 \times 185{,}55}{2}$; donc $\mathcal{A}_{SBC} \approx 21\,373$.

- $SH^2 = 21\,316$.

Donc, compte tenu de la relative précision des mesures, on peut considérer que l'affirmation est correcte.

♦ Exercice n°50 p.116



a) (CK) // (BH). La propriété de Thalès est appliquée au triangle ABH :

$\dfrac{h-7}{h} = \dfrac{5}{6}$. Donc $h = 42$

$\mathcal{V}_{\text{grand cône}} \approx \dfrac{1}{3} \times 3{,}14 \times 32 \times 42$

$\mathcal{V}_{\text{petit cône}} \approx \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 \times \mathcal{V}_{\text{grand cône}}$

Par conséquent : $\mathcal{V}_{\text{pot}} \approx 395{,}64 - 228{,}95$; donc : $\mathcal{V}_{\text{pot}} \approx 166{,}69$ (en cm³).

La contenance du pot est voisine de 16,7 cl.

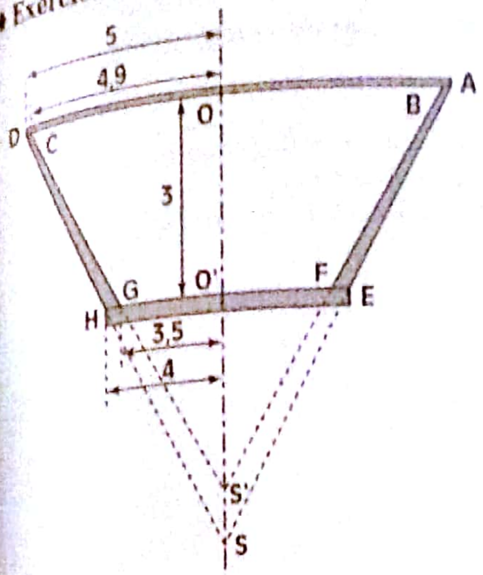
b) • 10 ℓ équivalent à 10 000 cm³.

On désigne par h la hauteur du grand cône, donc la hauteur du petit cône est : $\dfrac{10}{13}\,h$.

- $\mathcal{V}_{\text{seau}} = \mathcal{V}_{\text{grand cône}} - \mathcal{V}_{\text{petit cône}}$, donc : $\dfrac{1}{3} \times \pi \times 13^2 \times h - \dfrac{1}{3} \times \pi \times 10^2 \times \dfrac{10}{13}\,h = 10\,000$.

Par conséquent : $h \approx 103{,}762\ldots$; or : $h - \dfrac{10}{13}\,h = \dfrac{3h}{13}$ La hauteur du seau est voisine de 24 cm.

• Exercice n°51 p.116



a) (OC) // (O'G). La propriété de Thalès est appliquée au triangle S'O'G :

$\frac{S'O'}{S'O} = \frac{O'G}{OC}$; $\frac{S'O'}{S'O'+3} = \frac{3,5}{4,9}$;

d'où : S'O' = 7,5 et S'O = 10,5.

(O'H) // (OD). La propriété de Thalès est appliquée au triangle SO'H :

$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'H}{OD}$; $\frac{SO'}{SO'+3} = \frac{4}{5}$;

d'où : SO' = 12 et SO = 15.

b) • Volume intérieur du réservoir :

$\mathcal{V}_1 = 4,9^2 \times 3,14 \times 10,5 \times \frac{1}{3} - 3,5^2 \times 3,14 \times 7,5 \times \frac{1}{3}$

Donc : $\mathcal{V}_1 = 167,7$ (en m³).

• Masse volumique de l'eau : 1T / m³.

La masse de l'eau contenue dans le réservoir est : 167,7 T.

c) • Volume de la paroi latérale = volume tronc de cône ADHE - volume tronc de cône BCGF :

$(5^2 \times \pi \times 15 \times \frac{1}{3} - 4^2 \times \pi \times 12 \times \frac{1}{3}) - (4,9^2 \times \pi \times 10,5 \times \frac{1}{3} - 3,5^2 \times \pi \times 7,5 \times \frac{1}{3})$

$= \frac{1}{3}\pi\,[(5^2 \times 15 - 4^2 \times 12) - (4,9^2 \times 10,5 - 3,5^2 \times 7,5)] = 7,59\,\pi$

• Volume de la dalle de la grande base : $5^2 \times \pi \times 0,1 = 2,5\,\pi$ (en m³).

• Volume de la dalle de la petite base : $4^2 \times \pi \times 0,5 = 8\,\pi$ (en m³).

• Volume $\mathcal{V}$ total de l'ouvrage en béton : $\mathcal{V} = 7,59\,\pi + 2,5\,\pi + 8\,\pi = 18,09\,\pi$.

Donc : $\mathcal{V} = 56,803$ (en m³).

d) • Masse du réservoir vide : $56,803 \times 2,5 = 142,008$ (en T).

• Masse du réservoir plein : $142,008 + 167,707 = 309,715$ (en T).

10. Calcul littéral

(pages 119 à 130 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
- consolider les acquis concernant le calcul littéral.
- présenter les polynômes et les fractions rationnelles.

Commentaires

Ce chapitre doit être traité avant le chapitre 1 : Propriété de Thalès.

On trouvera dans la première leçon de ce chapitre différentes façons de transformer des égalités de quotients en égalités de quotients ou de produits. Ces propriétés auraient pu être démontrées dès la Quatrième, mais n'auraient pas eu une utilité évidente à ce niveau.

La deuxième leçon vise à compléter les techniques de calcul littéral et à les utiliser dans des situations plus complexes qu'en Quatrième (exposants négatifs, factorisations non triviales, ...).

La troisième leçon traite des polynômes et fractions rationnelles. Ce sont des expressions littérales et elles sont utilisées comme telles. Leur introduction en classe de 3e complète le calcul littéral du premier cycle et prépare l'étude des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles du second cycle.

Ainsi, on ne parlera pas « d'ensemble de définition » d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle mais « de condition d'existence de valeur numérique » de ces expressions littérales.

savoirs	savoir-faire

Quotients

• Propriétés

a, b, c, d sont des nombres réels différents de 0.

$\begin{array}{|c|c|}\hline a & c \\ \hline b & d \\ \hline\end{array}\ \times k$ $\qquad \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & c & a+c \\ \hline b & d & b+d \\ \hline\end{array}\ \times k$ $\qquad \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & c & hc \\ \hline b & d & hd \\ \hline\end{array}\ \times k$ $\qquad \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{hc}{hd}$

• Propriétés

a, b, c, d sont des nombres réels différents de 0.

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ *équivaut à* $ad = bc$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ *équivaut à* $\dfrac{d}{b} = \dfrac{c}{a}$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ *équivaut à* $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

• Règles

a, b, c, d sont des nombres réels différents de 0.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Savoir-faire

• Traduire des situations de proportionnalité par des égalités de quotients.

• Transformer des égalités de quotients.

Calcul littéral

• Notation

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

• Propriétés

– Propriétés des puissances

a et b sont des nombres différents de 0, m et n sont des nombres entiers relatifs.

$a^n \times b^n = (a \times b)^n \qquad a^m \times a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{mn} \qquad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

– Suppression de parenthèses

$a + (b - c) = a + b - c$;
$a - (b + c) = a - b - c$;
$a - (b - c) = a - b + c$.

– Règles de priorité

* La multiplication est prioritaire sur l'addition et sur la soustraction.
* L'élévation à une puissance est prioritaire sur la multiplication.

– Développement d'un produit, factorisation

$x(y + z) = xy + xz$
$x(y - z) = xy - xz$

Savoir-faire

• Développer, réduire ou factoriser des expressions littérales

– Égalités remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

– Produit nul

a et b sont des nombres,

$a \times b = 0$ *équivaut à* $[a = 0$ ou $b = 0]$

$a \times b \neq 0$ *équivaut à* $[a \neq 0$ et $b \neq 0]$

– Nombres de même carré

* a et b sont des nombres,

$a^2 = b^2$ *équivaut à* $a = b$ ou $a = -b$

* a et b sont des nombres positifs.

$a^2 = b^2$ *équivaut à* $a = b$

Exemples d'expressions littérales

- **Vocabulaire**

– monôme en x,
coefficient du monôme,
degré du monôme,
– polynôme,
degré du polynôme,
valeurs numériques d'un polynôme,
– fraction rationnelle,
valeur numérique d'une fraction rationnelle,
condition d'existence d'une valeur numérique,
simplifier une fraction rationnelle.

- Trouver le coefficient ou le degré d'un monôme.
- Trouver le degré d'un polynôme.
- Ordonner un polynôme suivant les puissances croissantes ou décroissantes de x.
- Trouver la condition d'existence d'une valeur numérique d'une fraction rationnelle.
- Simplifier une fraction rationnelle dans les cas simples.
- Utiliser les expressions simplifiées pour le calcul de valeurs numériques.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 3.a p.127

La valeur numérique de A existe pour tout nombre x.

Condition d'existence d'une valeur numérique de B : $x \neq \frac{7}{2}$ et $x \neq -\frac{7}{2}$

♦ Exercice 3.b p.127

– Pour $(x \neq 0$ et $x \neq \frac{5}{2})$, $A = \frac{2x-5}{x}$; pour $x = 5$, $A = 1$; pour $x = -\frac{5}{2}$, $A = 4$.

– Pour $(x \neq \frac{1}{3}$ et $x \neq -\frac{1}{3})$, $B = \frac{3x+1}{1-3x}$.

– Pour $(x \neq 0$ et $x \neq -6)$, $C = \frac{24-4x}{x+6}$; pour $x = 6$, $C = 0$; pour $x = 0{,}01$, $C \approx 3{,}9867$.

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n°15 p.129

$(10d+5)^2 = 100d^2 + 2 \times (10d) \times 5 + 25 = 100d\,(d+1) + 25$ d'où la méthode suivante : écrire côte à côte le produit « $d\,(d+1)$ » puis 25.

Par exemple, pour calculer 85^2 : 1) penser $d\,(d+1) = 8 \times 9 = 72$; 2) écrire $85^2 = 7\ 225$

♦ Exercice n°16 p.129

$2n - 2$: nombre pair qui précède $2n$; $2n + 2$: nombre pair qui suit $2n$.

$2n - 1$: nombre impair qui précède $2n + 1$; $2n + 3$: nombre impair qui suit $2n + 1$.

♦ Exercice n°17 p.129

- $2n + 2p = 2(n + p) = 2a$
- $2n + 1 + 2p + 1 = 2(n + p + 1) = 2b$
- $2n + 2p + 1 = 2(n + p) + 1 = 2c + 1$
- $2n \times 2p = 2(n \times 2p) = 2d$
- $(2n + 1) \times (2p + 1) = 2(2np + n + p) + 1 = 2e + 1$
- $2n \times 2p + 1 = 2(2 \times n \times (2p + 1)) = 2f$

+	pair	impair
pair	pair	impair
impair	impair	pair

×	pair	impair
pair	pair	pair
impair	pair	impair

♦ Exercice n°18 p.129

1) $2n + (2n + 2) = 138$; $4n = 136$; $n = 34$; les nombres sont : 68 et 70. On vérifie : $68 + 70 = 138$.

2) $(2n - 1) + (2n + 1) = 136$; $4n = 136$; $n = 34$; les nombres sont : 67 et 69. On vérifie : $67 + 69 = 136$.

3) $2n + (2n + 1) = 157$; $4n = 156$; $n = 39$; les nombres sont : 78 et 79. On vérifie : $78 + 79 = 157$.

♦ Exercice n°19 p.129

1) $2n \times (2n - 2) = 168$; $n \times (n - 1) = 42$; or 42 est le produit de 7 et 6. Les nombres recherchés : 12 et 14.

2) $(2n - 1)(2n + 1) = 323$; $4n^2 - 1 = 323$; $4n^2 = 324$; $n^2 = 81$; $n = 9$. Les nombres recherchés : 17 et 19.

♦ Exercice n°20 p.129

1) $(2p - 1)$; $(2p + 1)$; $(2p + 3)$ avec $p \in \mathbb{N}$; $p \geq 1$

2) $2p - 1 + 2p + 1 + 2p + 3 = 1\,071$; $6p = 1\,068$; $p = 178$ d'où $355 + 357 + 359 = 1\,071$.

♦ Exercice n°22 p.130

$3m + \frac{1}{4}$; $2m - \frac{3}{7}$; $m^2 - 1$; $m^2 + 3$.

♦ Exercice n°23 p.130

$3m - \frac{1}{4} > \frac{2}{3}$; $2m + \frac{3}{7} < \frac{3}{7}$ où m est un nombre entier naturel.

On remarquera toutefois qu'aucun nombre entier naturel m ne vérifie cette dernière contrainte.

♦ Exercice n°24 p.130

1re partie du programme : $n^2 - 1$; 2e partie du programme : $(n - 1)(n + 1)$.

Constatation : le résultat de la 1re partie du programme est égal au résultat de la 2e partie du programme.

Conjecture : $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$.

♦ Exercice n°25 p.130

$(10n + 1)(10p + 1) = 100np + 10(n + p) + 1$

- $41 \times 51 = 100(4 \times 5) + 10(4 + 5) + 1 = 2\,091$ • $61 \times 81 = 100(6 \times 8) + 10(6 + 8) + 1 = 4\,941$.
- $31 \times 91 = 100(3 \times 9) + 10(3 + 9) + 1 = 2\,821$ • $71 \times 21 = 100(7 \times 2) + 10(7 + 2) + 1 = 1\,491$.

♦ Exercice n°26 p.130

1) $(10n + 1)(10p + 1) = 100np + 10(n + p) + 1 = 10[10np + (n+p)] + 1$.

$(10n + 5)(10p + 5) = 100np + 50(n + p) + (20 + 5) = 10(10np + 5(n+p) + 2) + 5$.

$(10n + 6)(10p + 6) = 100np + 60(n + p) + 30 + 6 = 10(10np + 6(n+p) + 3) + 6$.

2) $(100n + 76)(100p + 76) = 100[100np + 76(n+p)] + 5776 = 100[100np + 76(n+p) + 57] + 76$

♦ Exercice n°27 p.130

n étant un nombre entier naturel non nul, $2n - 2$, $2n$ et $2n + 2$ désignent trois nombres entiers naturels pairs consécutifs. Condition pour que ces nombres désignent les mesures des côtés d'un triangle rectangle :

$(2n-2)^2 + (2n)^2 = (2n+2)^2$.

On obtient : $n = 4$. Les trois nombres sont : 6, 8 et 10.

♦ **Exercice n°28 p.130**

$100c + 10d + u - 100u - 10d - c = 99\,(c-u)$ or, $1 < (c-u) < 9$ et selon la différence $c - u$

$c-u$	2	3	4	5	6	7	8
Troisième nombre	198	297	396	495	594	693	792
Quatrième nombre	891	792	693	594	495	369	297
Somme	1 089	1 089	1 089	1 089	1 089	1 089	1 089

On trouve toujours 1 089.

♦ **Exercice n°29 p.130**

$996^2 = (996-4)(996+4) + 4^2$

$996^2 = 992 \times 1\,000 + 4^2 = 992\,016$

$988^2 = (988-12)(988+12) + 12^2$

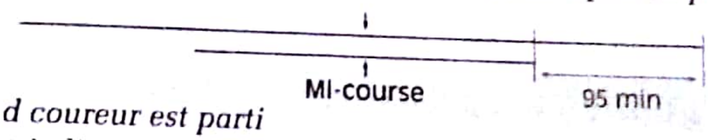
$988^2 = 976 \times 1\,000 + 12^2 = 976\,144$

♦ **Exercice n°30 p.130**

• d et a sont les heures de départ et d'arrivée du premier cycliste, d' et a' sont les heures de départ et d'arrivée du second cycliste, h est l'heure à laquelle le second cycliste rattrape le premier.

Puisque cela se produit à mi-parcours, on a : $h = \dfrac{a+d}{2} = \dfrac{a'+d'}{2}$;

d'où $a + d = a' + d'$ ou bien : $a - a' = d - d'$; il y a la même durée entre les heures de départ et d'arrivée des cyclistes, soit 95 min. Donc le second coureur est parti 95 min après le premier c'est à dire à 10 h 10 min.



Par symétrie, il est clair que le second coureur est parti 95 min après le premier coureur c'est-à-dire à 10 h 10 min.

Exercice de recherche

♦ **Exercice n°33 p.**

En utilisant la table des carrés :

1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 + 144 + 169 + 196 + 225 + 256 + 289	= 1 785
1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64	= 204
1 + 4 + 9	= 14
	= 2 003

Il y a 3 pyramides, de « hauteurs » respectives : 17 cubes, 8 cubes et 3 cubes.

Il n'est pas possible de construire une tour avec 18 étages complets, en effet, 1 785 + 182 = 2 109, or on ne dispose que de 2 003 cubes.

11. Racines carrées

(pages 131 à 140 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
– introduire la racine carrée d'un nombre,
– apprendre à utiliser des nombres avec radicaux dans les calculs.

Commentaires

Ce chapitre est à étudier avant le chapitre 2 : Triangle rectangle - Trigonométrie.

Le calcul exact ou l'approximation décimale de la racine carrée d'un nombre seront traités dans le chapitre suivant. Ce chapitre se limite d'une part, à la présentation des racines carrées, d'autre part, à utiliser des nombres avec radicaux dans les opérations usuelles.

La présentation des racines carrées est faite par une construction géométrique. On notera que les justifications de certaines constructions font appel aux propriétés des triangles semblables, vues à la fin du premier chapitre des Activités Géométriques.

On ne donnera pas la démonstration de : « Il n'existe pas de fraction égale à $\sqrt{2}$ »

On s'assurera que les règles de calcul (avec des radicaux) sont bien assimilées.

Dans les calculs, notamment ceux avec radicaux au dénominateur d'un quotient, on ne compliquera pas à plaisir les exercices donnés aux élèves.

L'introduction de la racine carrée d'un nombre permet l'utilisation de la propriété de Pythagore dans des cas plus généraux qu'en 4^e^.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Racine carrée	
• **Propriétés** On appelle racine carrée du nombre positif a, le nombre positif dont le carré est a. • **Notations** $\sqrt{a}$; $\mathbb{R}$ • **Propriétés** a et b sont des nombres réels positifs $\sqrt{a} = b$ *équivaut à* $a = b^2$ $\sqrt{a} \geq 0$; $(\sqrt{a})^2 = a$; $\sqrt{0} = 0$ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ • **Vocabulaire** nombre irrationnel ; nombre réel ; ensemble des nombres réels.	• Construire un segment de longueur $\sqrt{a}$ – en utilisant la propriété de Pythagore, – en utilisant des triangles semblables.
Opérations et racines carrées	
• **Propriétés** a et b sont des nombres réels plus grands que zéro $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ $(a \neq 0)$ $\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. n est un nombre entier relatif $\sqrt{a^{2n}} = a^n$; $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n\sqrt{a}$	• Utiliser les propriétés des radicaux pour – les multiplier – les diviser – réduire l'écriture de sommes, différences, produits et quotients contenant des radicaux.

Calculs avec des racines carrées

• Vocabulaire	
Expressions conjuguées	• Développer, réduire ou factoriser des écritures contenant des radicaux. • Écrire un dénominateur sans radical. • Utiliser les tables de carrés

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

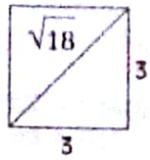
♦ Exercice 1.a p.133

Utilisation de la remarque : 18 = 9 + 9.

• Construire un carré de côté 3.

$\sqrt{18}$ est la longueur commune de ses diagonales. (9 + 9 = 18)

Esquisse



Utilisation de la remarque : 18 = 3 × 6.

• Marquer A, B et C alignés dans cet ordre, tels que AB = 6 et BC = 3 ;

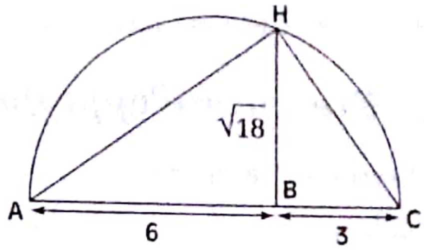
• Tracer le demi-cercle de diamètre [AC] et l'intersection H de ce demi-cercle avec la perpendiculaire à (AC) en B.

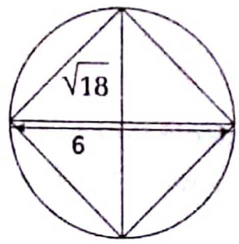
Justification : dans le triangle rectangle AHC, la hauteurs [HB] détermine des triangles semblables.

Les triangles BAH et BHC sont semblables ; $\frac{BAH}{BHC}$.

D'où : $\frac{AB}{HB} = \frac{HB}{BC}$. Donc $HB^2 = AB \times BC$.

Construction





Utilisation de la remarque : 18 + 18 = 36.

• Construire un carré dont la diagonale a 6 pour longueur.

$\sqrt{18}$ est la longueur commune de ses côtés. (18 + 18 = 36).

♦ Exercice 1.b p.133

• Tracer un segment [AB] de longueur $n+1$, tracer un demi-cercle de diamètre [AB] et la corde [AC] de longueur n. ABC étant un triangle rectangle en C, on démontre que : $BC = \sqrt{2^{n+1}}$.

Exercices d'entraînement

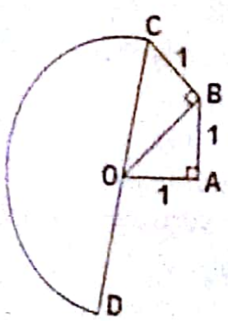
♦ Exercice n°6 p.138

$AB^2 - AH^2 = BH^2$ d'où $BH = \sqrt{3}$;

$OB = \frac{2}{3}\,BH = 2\,\frac{\sqrt{3}}{3}$.

En effet, dans le triangle équilatéral ABC, O est à la fois orthocentre, centre de gravité, centre du cercle circonscrit et centre du cercle inscrit.

♦ Exercice n°7 p.138



1) OAB est un triangle rectangle isocèle en A tel que : OA = AB = 1. D'où, $OB = \sqrt{2}$

OBC est un triangle rectangle en B tel que :

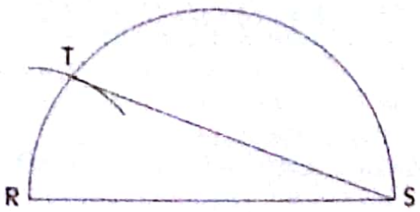
BC = 1. Or $OB = \sqrt{2}$; d'où : $OC = \sqrt{3}$.

D est le symétrique de C par rapport à O. D'où $DC = 2\sqrt{3}$.

2) EFG est un triangle rectangle en F tel que :

EF = 1 et FG = 3.

D'où, $EG = \sqrt{10}$.



3) RST est un triangle rectangle en T inscrit dans le demi-cercle de diamètre [RS], tel que : $RS = 5$ et $RT = 2$. D'où, $TS = \sqrt{21}$.
4) On remarquera que : $37 = 6^2 + 1^2$; $32 = 6^2 - 2^2$

♦ **Exercice n°9 p.138**
$AB = 2\sqrt{3}$; $BC = 3\sqrt{2}$; $AC = \sqrt{30}$.

♦ **Exercice n°23 p.139**
$(3 - \sqrt{2})^2 = 11 - 6\sqrt{2}$
$x^2 - (11 - 6\sqrt{2}) = (x - 3 + \sqrt{2})(x + 3 - \sqrt{2})$.

♦ **Exercice n°24 p.139**
$AC^2 = AB^2 + BC^2$ est vrai ; le triangle ABC est donc rectangle en B.

♦ **Exercice n°25 p.139**
$AC^2 + AB^2 = BC^2$ est vrai ; le triangle ABC est donc rectangle en A.

❑ *Exercices d'approfondissement*

♦ **Exercice n°30 p.139**

$$\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{3}}{7} - 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - \frac{3}{8}(\sqrt{10}-\sqrt{2})$$

$$= \frac{133\sqrt{2} - 13\sqrt{10} - 104\sqrt{3}}{56}.$$

♦ **Exercice n°34 p.140**
$AB \times AC = AM \times BC$ d'où : $AM = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

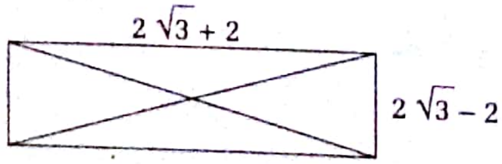
♦ **Exercice n°35 p.140**
$605a = 11 \times 11 \times 5 \times a$; donc $a = 5$.

♦ **Exercice n°36 p.140**
$6x^2 = 12y^2$ d'où $x = y\sqrt{2}$.

♦ **Exercice n°37 p.140**
$\dfrac{90\,000}{100} = 900$. Il y a 900 pièces à partager de façon que chacun des n neveux reçoive n pièces.
$900 = n^2$ donc $n = 30$.
Arra a 30 petits-enfants qui recevront chacun 3 000 F CFA en pièces de 100 F.

♦ **Exercice n°38 p.140**
1) $\sqrt{275} \neq \sqrt{176} + \sqrt{99}$. Les points A, B et C ne sont pas alignés.
Remarquons de plus que $AC^2 = AB^2 + BC^2$; donc ABC est un triangle rectangle en B.
2) $MP = 4\sqrt{17}$; $PS = 5\sqrt{17}$; $MS = 9\sqrt{17}$; $MP + PS = MS$: les points M, P et S sont alignés.

♦ **Exercice n°39 p.140**



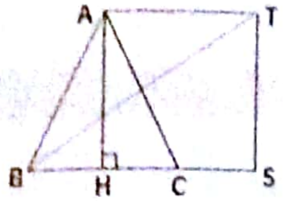
$d^2 = (2\sqrt{3} + 2)^2 + (2\sqrt{3} - 2)^2$
$= 2(2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2^2 = 32.$

• $\mathcal{P} = 8\sqrt{3}$; $\mathcal{A} = 8$; $d = 4\sqrt{2}$.

◆ **Exercice n°40 p.140**

1^re^ Construction

1)



Côté du carré : $AH = HS = ST = AT = \sqrt{3}$

$BS = 1 + \sqrt{3}$

2) $\tan a° = \dfrac{ST}{BS} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}634$; $32 < a < 33$

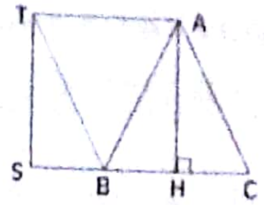
3) mes $\widehat{TAB} = 90° + 30° = 120°$

mes $\widehat{ATB}$ = mes $\widehat{TBS}$ car $\widehat{ATB}$ et $\widehat{TBS}$ sont des angles alternes internes formés par les droites parallèles (AT) et (BS) coupées par la droite (BT) ;

donc : $32° <$ mes $\widehat{ATB} < 33°$

2^e^ Construction

1)



$BS = \sqrt{3} - 1$

2) $\tan a° = \dfrac{ST}{BS} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}366$; $67 < a < 68$

3) mes $\widehat{TAB} = 60°$

mes $\widehat{ATB}$ = mes $\widehat{TBS}$ car $\widehat{ATB}$ et $\widehat{TBS}$ sont des angles alternes internes formés par les droites, parallèles (AT) et (BS) coupées par la droite (BT) ;

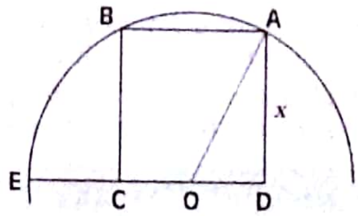
donc : $67° <$ mes $\widehat{ATB} < 68°$

◆ **Exercice n°41 p.140**

$OA = \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{x}{2}\sqrt{5}$.

$ED = EO + OD = \dfrac{x}{2}\sqrt{5} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2}(\sqrt{5}+1)$.

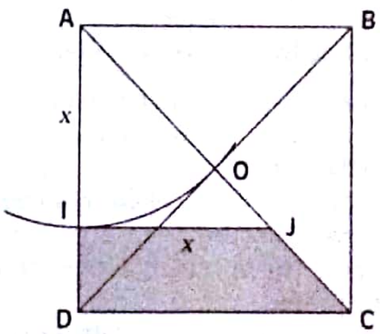
$\dfrac{ED}{DA} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.



◆ **Exercice n°42 p.140**

1) $\dfrac{(x+3)\times(3-x)}{2} = \dfrac{1}{4}\times 9$ d'où $x = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

2) Marquer O, le point d'intersection de (AC) et (BD).
Le cercle ($\mathscr{C}$) de centre A et de rayon AO coupe [AD] au point I tel que : $AI = AO = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.



Remarque : Puisque l'aire du trapèze IJCD est égale au quart de l'aire du carré ABCD, l'aire du triangle AIJ est aussi égale au quart de l'aire du carré.

Or l'aire de AIJ est égale à $\dfrac{x^2}{2}$. D'où : $\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{4}\times 9$.

◆ **Exercice n°43 p.140**

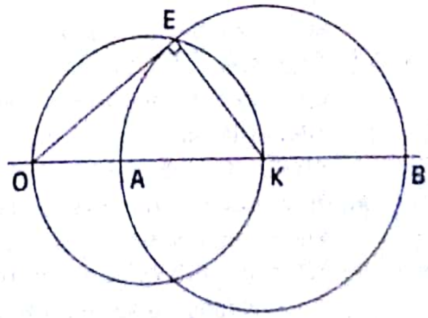
1) KOE est rectangle en E car [OK] est diamètre du cercle circonscrit.

$OK = \dfrac{a+b}{2}$; $KB = KE = \dfrac{b-a}{2}$ donc, d'après la propriété de Pythagore :

$OE = \sqrt{ab}$.

2) Si $a = 1$ alors $OE = \sqrt{b}$.

3) Tracer une demi-droite [OA) telle que OA = 1.
Placer le point L tel que $OL = \ell$ et le point K milieu de [OL].
Tracer les cercles de diamètres respectifs [OK] et [AL].
Ils se coupent aux points C et D. On a $OC = OD = \sqrt{\ell}$.



12. Calcul numérique

(pages 141 à 158 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
- présenter la valeur absolue sous son aspect géométrique,
- présenter les intervalles de nombres réels,
- parfaire le calcul avec des nombres décimaux, rationnels et à manipuler d'autres nombres que les nombres rationnels ;
- utiliser des tables numériques,
- garder le contact avec les techniques de dénombrement.

Commentaires

Les notions ensemblistes d'intersection et de réunion d'ensembles ont pour objectif l'écriture (éventuellement) plus simple de l'intersection ou de la réunion de deux intervalles, qui interviendra dans le chapitre suivant.

Les tables numériques et les calculettes ne devront être ni ignorées, ni privilégiées.

L'élève devra réaliser qu'encadrer un nombre, c'est trouver un intervalle qui le contient, l'amplitude de l'intervalle étant aussi celui de l'encadrement.

Pour le calcul d'une valeur numérique, le choix d'une forme appropriée de l'expression littérale peut rendre le calcul beaucoup plus simple.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Valeur absolue	
• **Notations** $a \geq b$ équivaut à $a = b$ ou $a > b$ $a \geq b$ se lit : a est supérieur ou égal à b $a \leq b$ équivaut à $a = b$ ou $a < b$ $a \leq b$ se lit : a est inférieur ou égal à b • **Définition** On appelle valeur absolue d'un nombre la distance à zéro de ce nombre. On note $\lvert a \rvert$ la valeur absolue de a. • **Propriété** La racine carrée du carré d'un nombre est égale à la valeur absolue de ce nombre. $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$.	• Déterminer : – la valeur absolue d'un nombre ; – la distance de deux nombres. • Trouver un nombre à égale distance de deux autres nombres
Intervalles	
• **Définitions et notations** $[a ; b]$ intervalle a, b, fermé : ensemble des nombres x tels que : $a \leq x \leq b$ $[a ; b[$ intervalle a, b, fermé en a, ouvert en b : ensemble des nombres x tels que : $a \leq x < b$ $]a ; b]$ intervalle a, b, ouvert en a, fermé en b : ensemble des nombres x tels que : $a < x \leq b$ $]a ; b[$ intervalle ouvert a, b : ensemble des nombres x tels que : $a < x < b$ $]\leftarrow ; b[$ intervalle des nombres plus petits que b : ensemble des nombres x tels que : $x < b$ $]\leftarrow ; b]$ intervalle des nombres inférieurs ou égaux à b : ensemble des nombres x tels que : $x \leq b$	• Caractériser un intervalle par sa notation. • Caractériser les éléments d'un intervalle par une inégalité ou une double inégalité. • Représenter graphiquement un intervalle. • Déterminer et représenter l'intersection de deux intervalles. • Déterminer et représenter l'union de deux intervalles. • Écrire un ensemble de nombres sous forme d'intervalles. • Trouver des nombres appartenant à un intervalle. • Calculer l'amplitude d'un intervalle.

Intervalles (suite)

$[a ; \to[$ intervalle des nombres plus grands que a : ensemble des nombres x tels que : $x > a$ $[a ; \to[$ intervalle des nombres supérieurs ou égaux à a : ensemble des nombres x tels que : $x \geq a$. **• Vocabulaire** Bornes d'un intervalle, amplitude d'un intervalle. Intersection, réunion de deux intervalles.	

Comparaison de nombres réels

• Propriétés – Lorsqu'on ajoute membre à membre des inégalités de même sens, on obtient une nouvelle inégalité de même sens. – Lorsqu'on multiplie membre à membre des inégalités de même sens entre nombres positifs, on obtient une nouvelle inégalité de même sens. **• Propriétés** – Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés. – Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés. – Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées. – Deux nombres de même signe et différents de zéro sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.	• Ajouter membre à membre des inégalités de même sens. • Multiplier membre à membre des inégalité de même sens entre nombres positifs. • Comparer des nombres réels, leurs carrés, leurs inverses, leurs racines carrées. • Trouver le signe d'une différence de nombres réels.

Calcul approché

	• Calculer la racine carrée d'un nombre : – à l'aide d'une calculatrice, – à l'aide d'une table des carrés, – par approximations successives. • Encadrer une somme, une différence de nombres réels, • Encadrer un produit, un quotient de nombres réels positifs.

Problèmes de dénombrement

	• Utiliser (pour dénombrer) : des diagrammes, des tableaux, des arbres de choix.

EXERCICES DU MANUEL

❑ *Exercices du cours*

♦ **Exercice 1.e p.143**

C'est la même distance : $|x - y|$.

♦ **Exercice 3.a p.149**

$(3\sqrt{2})^2 = 18$; $4^2 = 16$; les nombres à comparer étant positifs, on a : $4 < 3\sqrt{2}$.

$(5\sqrt{2})^2 = 50$; $(4\sqrt{3})^2 = 48$; les nombres à comparer étant positifs, on a : $5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}$.

♦ **Exercice 3.b p.148**

Après comparaison des nombres positifs $5\sqrt{2}$ et $4\sqrt{3}$, on obtient : $5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} > 0$.

Après comparaison des nombres positifs $4\sqrt{5}$ et 9, on obtient : $4\sqrt{5} - 9 < 0$.

♦ **Exercice 3.c p.149**

$(\sqrt{5} - 1) - 2 = \sqrt{5} - 3$; or $3^2 = 9$ et $(\sqrt{5})^2 = 5$; d'où $\sqrt{5} - 3 < 0$. Donc $\sqrt{5} - 1 < 2$.

On sait que $\dfrac{1}{\sqrt{69\,000}} < 1$; par conséquent, $\dfrac{1}{\sqrt{69\,000}} - 198 < 0$. Or $164 > 0$.

Donc $\dfrac{1}{\sqrt{69\,000}} - 198 < 164$.

♦ **Exercice 4.b p.151**

- $72^2 < 5\,273 < 73^2$ d'où $720^2 < 527\,300 < 730^2$ $720 < \sqrt{527\,300} < 730$.
- $3{,}7 = 370 \times 10^{-2}$; $19^2 < 370 < 20^2$ d'où $19^2 \times 10^{-2} < 3{,}7 < 20^2 \times 10^{-2}$.

Donc $1{,}9 < \sqrt{3{,}7} < 2$.

♦ **Exercice 4.c p.153**

$164 < \mathcal{P} < 168$; $1\,485 < \mathcal{A} < 1\,568$.

♦ **Exercice 4.d p.153**

Consommation C (en litres) par jour, pour la famille : $20 < C < 25$.

$\dfrac{200}{25}$ (en jours) < durée d'approvisionnement < $\dfrac{240}{20}$ (en jours).

8 jours < durée d'approvisionnement < 12 jours.

♦ **Exercice 5.a p.155**

	1	2	3	4	5	6
1			(1 ; 3)			
2						
3				(3 ; 4)		
4						
5		(5 ; 2)				
6					(6 ; 5)	

Il y a autant de couples que de cases dans le tableau ci-contre ; donc 36 couples.

♦ **Exercice 5.b p.155**

1) 13 ; 17 ; 18 ; 12.

2) $b - a + 1$; $b - a - 1$; $b - a$; $b - a$.

♦ **Exercice 5.c p.155**

27.

☐ *Exercices d'entraînement*

♦ **Exercice n°11 p.156**

$1 < 2 < 3 < 4$ donc $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$; d'où $\sqrt{2} - 1 > 0$ et $2 - \sqrt{3} > 0$.

$\dfrac{1}{a} = \sqrt{2} + 1$; $\dfrac{1}{b} = \sqrt{3} + 2$; or $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ et $1 < 2$: donc $\sqrt{2} + 1 < \sqrt{3} + 2$, d'où : $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.

Par conséquent, $b < a$.

♦ **Exercice n°13 p.156**

Des nombres positifs sont rangés dans le même sens que leurs carrés.

On a : $\sqrt{17} < 3\sqrt{2} < \sqrt{19} < 2\sqrt{5}$, car $17 < 18 < 19 < 20$.

2) Les nombres négatifs $-5\sqrt{2}$ et $-3\sqrt{5}$ sont rangés dans le sens inverse de leurs carrés, et sont plus petits que les nombres positifs $\sqrt{8}$, $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{3}$ qui, eux, sont rangés dans le même sens que leurs carrés.

On a : $-5\sqrt{2} < -3\sqrt{5} < \sqrt{8} < 2\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$.

♦ **Exercice n°21 p.157**

• On a : $2 < \sqrt{7} < 3$.

2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
4,41	4,84	5,29	5,76	6,25	6,76	7,29

donc $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$

2,61	2,62	2,63	2,64	2,65
6,8121	6,8644	6,9169	6,9696	7,0225

donc $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$

• On a : $3 < \sqrt{11} < 4$.

3,1	3,2	3,3	3,4
9,61	10,24	10,89	11,56

donc $3{,}3 < \sqrt{11} < 3{,}4$

3,31	3,32	3,33
10,956	11,022	11,089

donc $3{,}31 < \sqrt{11} < 3{,}32$

♦ **Exercice n°24 p.157**

$1{,}25 < a - b < 1{,}4$; $0{,}0945 < ab < 0{,}147$; $2{,}77 < 2a + b < 3{,}04$; $4{,}9 < 4a - 5b < 5{,}53$.

♦ **Exercice n°27 p.157**

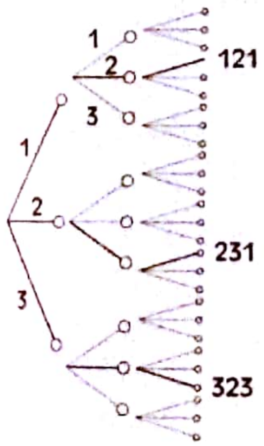
$\dfrac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5} - 2$ donc $0{,}236 < \sqrt{5} < 0{,}237$. Par conséquent, $0{,}23 < \sqrt{5} < 0{,}24$.

♦ **Exercice n°33 p.157**

$\sqrt{140} = 2\sqrt{5}\ \sqrt{7}$ d'où : $2 \times 2{,}23 \times 2{,}64 < \sqrt{140} < 2 \times 2{,}24 \times 2{,}65$.

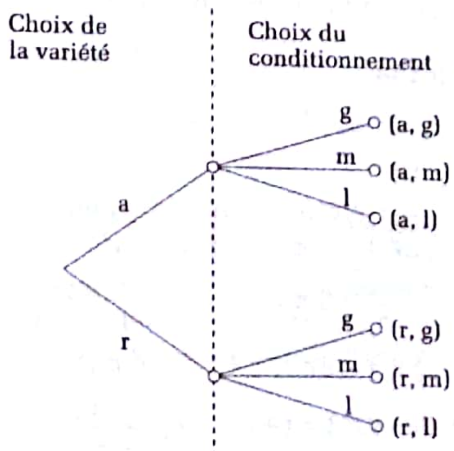
$11{,}77 < 11{,}7744 < \sqrt{140} < 11{,}872 < 11{,}88$ donc : $11{,}77 < \sqrt{140} < 11{,}88$.

♦ **Exercice n°34 p.157**



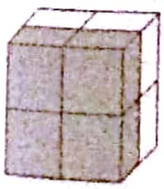
$3 \times 3 \times 3 = 27$

♦ **Exercice n°35 p.157-158**

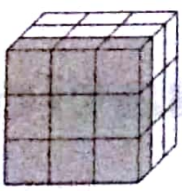


2 $\quad$ 2×3

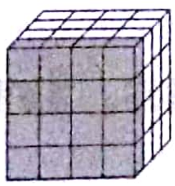
♦ **Exercice n°36 p.158**



$2 \times 2 \times 2 = 8$;



$3 \times 3 \times 3 = 27$;



$4 \times 4 \times 4 = 64$.

Exercices d'approfondissement

♦ **Exercice n°39 p.158**

$m = \dfrac{x+y}{2} = 15\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $g = \sqrt{xy} = 6\sqrt{3}$; $h = \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{18}{5}\sqrt{2}$.

Les nombres m, g et h étant positifs, ils sont rangés dans le même ordre que leurs carrés. D'où : $h < g < m$.

♦ **Exercice n°40 p.158**

$259 < (n-1) + n + (n+1) < 266$; $\dfrac{259}{3} < n < \dfrac{266}{3}$. Or n est un nombre entier.

Donc $n = 87$ (les 3 nombres sont alors : 86, 87, 88) ou $n = 88$ (les 3 nombres sont alors : 87, 88, 89).

♦ **Exercice n°41 p.158**

$\mathscr{A} = \pi r^2 = \dfrac{\pi c^2}{2}$.

$0{,}5 \times 3{,}14 \times 5{,}2^2 < \mathscr{A} < 0{,}5 \times 3{,}15 \times 5{,}3^2$

$42{,}45 < \mathscr{A} < 44{,}25$.

♦ **Exercice n°42 p.158**

Différentes positions relatives de a, b et 0 et comparaison de a^2 et b^2 dans chaque cas.

a 0 b	$a^2 \leq b^2$	b 0 a	$a^2 \geq b^2$
a 0 b	$a^2 \geq b^2$	b 0 a	$a^2 \leq b^2$
a b 0	$a^2 \geq b^2$	b a 0	$a^2 \leq b^2$
0 a b	$a^2 \leq b^2$	0 b b	$a^2 \geq b^2$

♦ **Exercice n°43 p.158**

A'B' = B'C' = C'D' = D'A' = $\sqrt{5}$ et $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$.

(Par exemple, A'B'B est un triangle rectangle en B, A'B = 1, B'B = 2 et $A'B^2 + B'B^2 = A'B'^2 = 5$).

A'B'C'D' est un carré. (4 côtés égaux et un angle droit : A'B'B et D'A'A sont semblables, leurs angles homologues ont même mesure donc $\widehat{BA'B'}$ et $\widehat{D'A'A}$ sont complémentaires...).

♦ **Exercice n°44 p.158**

$\mathscr{A}_5 < \mathscr{A}_2 < \mathscr{A}_3 < \mathscr{A}_4 < \mathscr{A}_1$.

♦ **Exercice n°45 p.158**

	rayon	périmètre	aire (disque)
$(\mathscr{C}_1)$	r	$(\mathscr{P}_1) = 2\pi r$	$(\mathscr{D}_1) = \pi r^2$
$(\mathscr{C}_2)$	$\dfrac{3}{2} r$	$(\mathscr{P}_2) = 3\pi r$	$(\mathscr{D}_2) = \dfrac{9}{4}\pi r^2$
$(\mathscr{C}_3)$	$2r$	$(\mathscr{P}_3) = 4\pi r$	$(\mathscr{D}_3) = 4\pi r^2$

Aire de la couronne : $(\mathscr{D}_4) = (\mathscr{D}_2) - (\mathscr{D}_1) = \dfrac{5}{4}\pi r^2$

$(\mathscr{D}_1) < (\mathscr{D}_4) < (\mathscr{D}_2) < (\mathscr{D}_3)$

13. Équations, inéquations dans $\mathbb{R}$

(pages 159 à 170 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :
- approfondir les notions, abordées en Quatrième, relatives à la résolution d'équations du premier degré à une inconnue.
- faire découvrir et assimiler des techniques de résolution d'inéquations ou de systèmes d'inéquations.
- utiliser des équations ou des inéquations dans la résolution de problèmes concrets et variés.

COMMENTAIRES

Ce chapitre présente peu de difficultés.

L'utilisation d'une droite numérique, avec ou sans graduation, permet de déterminer rapidement l'intersection de deux intervalles.

Dans les situations concrètes, on soulignera les différentes étapes de la recherche des solutions :

1) analyse du problème
2) mise en équation
3) résolution des contraintes
4) interprétation des solutions trouvées.

Il est clair qu'une bonne analyse des données permettra un choix judicieux de l'inconnue, et une interprétation correcte des solutions mathématiques.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Équations du 1er degré dans ℝ	
• **Propriété** a et b étant des nombres réels, $ab = 0$ *équivaut à* $a = 0$ ou $b = 0$ • **Vocabulaire** - singleton - paire	• Résoudre les équations du premier degré • Résoudre les équations du type : $(ax + b)(cx + d) = 0$ $\lvert x - b \rvert = a$ $x^2 = a$, • **Méthodes** – Pour résoudre une équation (E) d'inconnue x du type $(ax + b)(cx + d) = 0$, on résout séparément les équations (E_1) $ax + b = 0$ et (E_2) $cx + d = 0$. L'ensemble des solutions de l'équation (E) est constitué des solutions de chacune des équations (E_1) et (E_2). – Pour résoudre une équation d'inconnue x du type $x^2 = a$, on peut procéder comme suit : * lorsque a est positif, on transforme cette équation pour la ramener à la forme $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$; * lorsque a est négatif, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution ; * l'équation $x^2 = 0$ a une solution unique : 0.
Inéquations du 1er degré dans ℝ	
• **Vocabulaire** - Système de deux inéquations - Ensemble vide • **Notation d'un système** (avec accolade) $\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 4x + 5 \geq 0 \end{cases}$	• Résoudre les inéquations du premier degré dans ℝ. • Résoudre les systèmes d'inéquations du premier degré dans ℝ. • Représenter graphiquement les solutions d'une inéquation ou d'un système d'inéquations.
Problèmes du premier degré	
	• Utiliser la démarche suivante dans la recherche des solutions d'un problème concret : 1) analyse de l'énoncé du problème 2) interprétation mathématique et mise en équation 3) résolution des contraintes 4) interprétation des solutions trouvées.

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p.160

4	$-\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{10}{3}$	$2(\sqrt{3}+1)$	pas de solution	$3+2\sqrt{2}$

♦ Exercice 1.b p.163

0	$-1/3$	0 ; -1	$-5/3$	0	$-3-\sqrt{7}$
$3/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$5/3$	-2	$-3+\sqrt{7}$

♦ Exercice 1.c p.162

$[-3\,;+3]$

$[-3/2+\sqrt{3}\,;3/2+\sqrt{3}\,]$

$[-2\,;12]$

♦ Exercice 2.a p.163

$[\,2\,;\rightarrow[\;;\;[\,1/3\,;\rightarrow[\;;$

$]\leftarrow;11/4\,[\;;\;[\,11/4\,;\rightarrow[\;;$

$]\leftarrow;3/2\,]\,;\,]\leftarrow;6\,[$

♦ Exercice 2.b p.164

pas de solution ;

pas de solution ;

$[-2\,;3\,[$

♦ Exercice 3.a p.165

$\dfrac{48+N}{5}=13$; d'où $N=17$

♦ Exercice 3.b p.165

$\text{mes }\widehat{A}+\text{mes }\widehat{B}+\text{mes }\widehat{C}=180°$;

$33°+2\text{mes }\widehat{C}+\text{mes }\widehat{C}=180°$

$\text{mes }\widehat{C}=49°$; $\text{mes }\widehat{B}=98°$

♦ Exercice 3.c p.166

$135\,000+\dfrac{2{,}5}{100}V\geq 150\,000$

$V\times 0{,}025\geq 15\,000$;

$V\geq\dfrac{15\,000}{0{,}025}$; $V\geq 600\,000$

$S=[\,600\,000\,;\rightarrow[$

Exercices d'entraînement

♦ Exercice n°4 p.167

Premier élève (une erreur)
– Il soustrait 21 à chaque membre.
– Il *multiplie* par 1/7 dans le premier membre et il *soustrait* 7 dans le second

Deuxième élève (deux erreurs)
– Il factorise 7 dans le premier membre.
– Il commet la même erreur que le premier élève.
– Il *soustrait* 3 au premier membre et il *soustrait* 6 au second.

Troisième élève
Il utilise correctement les propriétés, et trouve le bon résultat.

♦ Exercice n°7 p.167

Premier élève (faux) : il *multiplie le premier membre par* – 1/5 et *soustrait* – 5 dans le second membre.
Deuxième élève : il utilise correctement les propriétés, et trouve le bon résultat.
Troisième élève (faux) : il *multiplie chaque membre par* – 1/5 *sans changer* le sens de l'inégalité.

♦ Exercice n°9 p.167

Seul l'intervalle $]-7/2\,;11/3\,[$ est ouvert, il correspond aux deux inégalités strictes.

♦ Exercice n°10 p.168

Le premier système admet $]-5/3\,;1\,[$ comme ensemble de solutions.

Le deuxième système admet $[-1/2\,;5/3\,]$ comme ensemble de solutions.

♦ Exercice n°11 p.168

$x^2-20=(x-2)^2$; on développe, et $x=6$.

♦ Exercice n°12 p.168

$(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=345.$

$5n=345 \qquad n=69$

d'où les cinq nombres : 67, 68, 69, 70, 71.

♦ **Exercice n°13 p.168**

$3(x + 3) - 3(x - 3) = x$.

♦ **Exercice n°14 p.168**

$4 \times 14 + 3 \times 13 + 4x = 11 \times 15$ d'où $x = 17{,}5$

♦ **Exercice n°15 p.168**

Poids total max. : 8 000 kg (resp 10 500 kg)
Charge max : 5 500 kg (resp. 7 000 kg),
d'où le nombre de caisses : 100 (resp.127).
Remarque : $127 \times 55 < 7\,000 < 128 \times 55$.

♦ **Exercice n°16 p.168**

Soit x l'âge du père :
$x + 6 = 2[(x - 27) + 6]$ d'où $x = 30$.

♦ **Exercice n°17 p.168**

Soit x le prix initial de l'article.
Prix après la 1re augmentation : $x + 0{,}4\,x$
c-à-d $1{,}4\,x$.
Prix après la 2^{e} augmentation : $1{,}4x + 0{,}5 \times 1{,}4\,x$
c-à-d $2{,}1\,x$.
D'où : $2{,}1\,x = 46\,410$.
Prix de l'article avant dévaluation : 22 100 F CFA

♦ **Exercice n°18 p.168**

8 pièces de 5 F et 16 pièces de 10 F.

♦ **Exercice n°19 p.168**

$4 \times 320 < 12x + 240 + 110 < 5 \times 320$;
$77{,}5 < x < 104{,}1$;
d'où les valeurs possibles de x : 80, 90 ou 100.

♦ **Exercice n°20 p.168**

$$\begin{cases} 2(12 + \ell) < 44 \\ 12\,\ell > 60 \end{cases}$$

♦ **Exercice n°22 p.168**

$1939 < 4n + 6 < 1945$ donc $n = 484$
et les nombres sont 484, 485, 486 et 487.

♦ **Exercice n°23 p.168**

Total des notes obtenues : $13{,}5 \times 7$;
soit N la note au dernier devoir.

On a : $\dfrac{13{,}5 \times 7 + N}{8} \geq 14$

1) $N \geq 17{,}5$

2) Non, puisque les notes sont « sur 20 » :
l'inéquation $\dfrac{13{,}5 \times 7 + N}{8} \geq 15$
n'a pas de solution inférieure à 20

♦ **Exercice n°24 p.168**

$$\begin{cases} 12\,x < 1\,440 \\ 24\,x > 2\,640 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 120 \\ x > 110 \end{cases}$$

Les valeurs possibles sont : 111, 112, ..., 118, 119

♦ **Exercice n°25 p.169**

1) x : nombre de pagnes à 2 500 F

$$\begin{cases} 2\,500\,x < 53\,000 \\ 2\,500\,x > 37\,000 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 21{,}2 \\ x > 14{,}8 \end{cases}$$

Les valeurs possibles sont : 15, 16,..., 20 et 21.

2) x : nombre de pagnes à 3 750 F
Les valeurs possibles sont : 10, 11, 12, 13 et 14.

Exercices d'approfondissement

♦ **Exercice n°29 p.169**

Soit x le salaire d'un ouvrier.
Salaire d'un contremaître : $x + 30\,000$. Salaire du directeur : $4(x + 30\,000) + 50\,000$
D'où l'équation : $54x + 3(x + 30\,000) + 4(x + 30\,000) + 50\,000 = 3\,493\,000$. On obtient : $x = 53\,000$.

♦ **Exercice n°30 p.169**

Soit $n - 2$ le plus petit des nombres; les autres sont alors : $(n - 1)$, n, $(n + 1)$ et $(n + 2)$ avec $n \geq 2$.
D'où l'équation : $(n + 1)^2 + (n + 2)^2 = (n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2$. Les nombres recherchés sont : 10, 11, 12, 13 et 14.

♦ **Exercice n°31 p.169**

$x = 12 - x + \dfrac{4}{5}$ – Réponse : 10 h

♦ **Exercice n°32 p.169**

$$4\left(x - 20 + \frac{4}{5}(x + 20)\right) = \frac{x + 20}{3}$$

♦ **Exercice n°33 p.170**

• Achat des 4 clients :

1er client : $\dfrac{1}{2}(x - 1)$; 2^{e} client : $\dfrac{1}{4}(x - 1)$;

3^{e} client : $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}(x - 1) - 1\right)$;

4^{e} client : $\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{4}(x - 1) - 1\right)$;

• d'où l'équation : $\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{4}(x - 1) - 1\right) = 9$.

Bieme avait 53 avocats au début de la journée.

♦ Exercice n°34 p.170

V désigne le montant total des ventes.

$S_1 = V \times 10\%$ et $S_2 = 90\,000 + V \times 5\%$

$S_2 < S_1$ si $V < 1\,800\,000$ F.

♦ Exercice n°35 p.170

x exprime la récolte (en sacs de mil).

$I_1 = x/2$; $I_2 = x/3 + 3$; $I_3 = x/6 + 18$

$I_1 < I_2$ si $x < 18$; $I_1 < I_3$ si $x < 54$;

$I_2 < I_3$ si $x < 90$; d'où le tableau :

Récolte	$x \leq 18$	$18 \leq x \leq 90$	$90 \leq x$
Impôt	I_1	I_2	I_3

Exercice de recherche

♦ Exercice n°36 p.170

On désigne par S la superficie totale, T_g ou M_g les superficies terrestres ou maritimes avec gaz, T_s ou M_s les superficies terrestres ou maritimes sans gaz.

Traduction des données :

$T_g + T_s + M_g + M_s = S$; $T_g = 3\,M_s$;

$T_g + T_s = 3(M_g + M_s)$; $T_s + M_s = 7\,M_s$

On en déduit, d'une part , $M_g = 2\,M_s$,

d'autre part $S = 12M_s$. $\dfrac{M_g}{S} = \dfrac{2\,M_s}{12\,M_s} = \dfrac{1}{6}$

♦ Exercice n°37 p.170

Séry a fait la moyenne des vitesses.

La vitesse moyenne est égale au quotient de la distance totale par la durée nécessaire au parcours de cette distance.

On note d la distance maison-école, T_1 la durée de l'aller, T_2 la durée du retour et V la vitesse moyenne.

$d = 12\,T_1 = 8\,T_2$; donc : $T_2 = 1{,}5\,T_1$

$$V = \frac{2d}{T_1 + T_2} = \frac{2d}{2{,}5\,T_1} = \frac{4}{5} \times 12 = 9{,}6 \text{ km/h}$$

♦ Exercice n°38 p.170

On note x la distance Ndjaména – Bangui, V_1 la vitesse du 1[er] avion et V_2 la vitesse du 2[e] avion.

Avant le premier croisement, le premier avion parcourt $x - 423$ km en un temps T_1.

Avant le premier croisement, le deuxième avion parcourt 325 km dans le même temps T_1.

$V_1T_1 = x - 423$; et $V_2T_1 = 423$

Entre le premier et le deuxième croisement, le temps écoulé s'exprime de deux façons différentes :

$$T_2 = \frac{423}{V_1} + 2 + \frac{x-325}{V_1}\ ;\ T_2 = \frac{x-423}{V_2} + 2 + \frac{325}{V_2}$$

Des deux premières égalités, on tire :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{x-423}{423}$$

Des deux égalités suivantes, on tire :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{x+98}{x-98}$$

On compare les deux expressions obtenues :

$x^2 - 944x = 0$

donc Banguí est à 944 km de Ndjaména

14. Équations, inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(pages 171 à 184 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :

– faire acquérir les techniques de résolutions des systèmes d'équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et de représentations graphiques des solutions d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

– réinvestir ces techniques dans la résolution de problèmes concrets.

COMMENTAIRES

Il est nécessaire d'avoir traité le chapitre 5 (Équations de droites) avant d'aborder ce chapitre.

Les équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sont relativement rares dans le Premier Cycle. On les interprète aisément en termes d'ensembles de points définis par une contrainte sur les coordonnées.

Les systèmes d'équations et d'inéquations sont beaucoup plus fréquents.

Une des difficultés qui peuvent se poser à l'élève est l'identification d'un tel système, lorsque les inconnues ne sont pas « traditionnelles » : d et t en lieu et place de x et y, par exemple, ou bien encore a et b, lors de la recherche de l'équation d'une droite passant par deux points dont on connaît les coordonnées.

Les méthodes de résolution par substitution ou par combinaison sont fondées sur l'interprétation géométrique de chacune des deux équations ; la position relative des droites ainsi considérées permet de trouver le nombre de solutions du système ; la vérification finale amène à la conclusion correcte.

On n'oubliera pas de représenter l'ensembles des solutions d'inéquations « incomplètes » du type $ax + b > 0$ ou $cy + d > 0$.

On ne donnera pas inutilement des systèmes « trop abondants » en inéquations, un ou deux exemples caractérisant, par exemple, l'intérieur d'un triangle, éventuellement d'un quadrilatère, suffiront à montrer le mécanisme de la résolution.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

Systèmes d'équations du 1[er] degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

savoirs	savoir-faire
• **Vocabulaire** – Système de deux équations à deux inconnues x et y – solution du système – résolution par substitution – résolution par combinaison	• Mettre en équation un problème se ramenant à une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. • Résoudre graphiquement un système de deux équations. **Méthode** Pour résoudre graphiquement le système de deux équations : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ – on trace les droites (D) d'équation $ax + by + c = 0$, (D') d'équation $a'x + b'y + c' = 0$. – Il y a trois cas de figure : * (D) et (D') sont sécantes en M(m ; n) on conclut : (m ; n) est la solution du système ; * (D) et (D') n'ont pas de point commun on conclut : le système n'a pas de solution ; * Les droites (D) et (D') sont confondues on conclut : le couple de coordonnées de chacun des points de (D) est solution du système. • Résoudre par substitution un système de deux équations. • Résoudre par combinaison un système de deux équations.

Inéquations du 1[er] degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

savoirs	savoir-faire
• **Propriété** Le plan est muni d'un repère. (D) est la droite d'équation $ax + by + c = 0$. – la droite (D) partage le plan en trois régions : – deux demi-plans de frontière (D) – la droite (D).	• Représenter graphiquement les solutions d'une inéquation. • Représenter graphiquement les solutions d'un système d'inéquations. • Trouver graphiquement des solutions d'un système d'inéquations.

Inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (suite)

- Les couples de coordonnées des points d'un demi-plan vérifient $ax + by + c < 0$.
- Les couples de coordonnées des points de (D) vérifient $ax + by + c = 0$.
- Les couples de coordonnées des points de l'autre demi-plan vérifient $ax + by + c > 0$.

• **Vocabulaire**

frontière d'un demi-plan

Problèmes du 1er degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

• Utiliser la démarche suivante dans la recherche des solutions d'un problème concret :

1) analyse de l'énoncé du problème
2) traduction mathématique et mise en équation
3) résolution des contraintes
4) interprétation des solutions trouvées.

Exercices du Manuel

Exercices d'entraînement

♦ Flash

Soit x le nombre de timbres à 135 F

y le nombre de timbres à 180 F

On a : $135\,x + 180\,y = 540$.

Le rappel des propriétés (ch 5 p 60) permet d'écrire :

$$3\,x + 4\,y = 12.$$

x et y étant des nombres entiers naturels, on trouve facilement les deux seules réponses possibles :

$x = 4$ et $y = 0$; $x = 0$ et $y = 3$.

♦ Exercice n°14 p.182

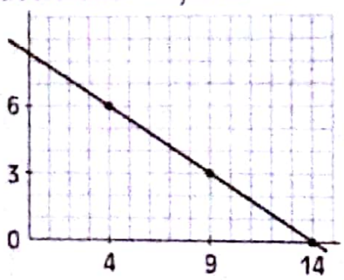
4 étapes pour résoudre ce problème :

– traduire l'énoncé par une équation (E) ;

– tracer la droite d'équation (E) dans le plan muni d'un repère ;

– conjecturer les solutions ;

– vérifier les solutions conjecturées.



$60x + 100y = 840$; parmi les solutions de cette équation, il y a trois couples de nombres entiers naturels : (4 ; 6), (9 ; 3), (14 ; 0).

Après vérification, on obtient les trois solutions :

4 timbres à 60 F et 6 timbres à 100 F ; 9 timbres à 60F et 3 timbres à 100 F ; 14 timbres à 60 F et aucun timbre à 100 F.

♦ Exercice n°15 p.182

Même méthode que l'exercice 14.

$5x + 3y = 41$; parmi les solutions de cette équation, il y a trois couples de nombres entiers naturels : (1 ; 12), (4 ; 7), (7 ; 2).

♦ Exercice n°16 p.182

$\begin{cases} x + y = 619 \\ x - y = 73 \end{cases}$ donc $x = 346$ et $y = 273$

♦ Exercice n°17 p.182

$\begin{cases} x = 7\,y \\ x - y = 72 \end{cases}$ donc $y = 12$ et $x = 84$

♦ Exercice n°18 p.182

$\begin{cases} x + y = 23 \\ 1\,500x + 2\,800\,y = 46\,200 \end{cases}$

(14 ; 9) est l'unique solution de ce système ; comme c'est un couple de nombres entiers naturels, c'est la solution du problème.

♦ Exercice n°19 p.182

$\begin{cases} Y = 3\,D \\ Y + 3\,000 = 2\,(D + 3\,000) \end{cases}$

donc Djéni avait 3 000 F et Yao 9 000F

♦ Exercice n°20 p.182

$\begin{cases} -a + 3b = 1 \\ 2a - 5b = 1 \end{cases}$ donc $b = 3$ et $a = 8$

♦ Exercice n°21 p.182

$\begin{cases} 5x + 10y = 165 \\ x + y = 26 \end{cases}$ donc $y = 7$ et $x = 19$

♦ Exercice n°22 p.182

$$\begin{cases} x + y = 304 \\ x - 6y = 17 \end{cases}$$ donc $y = 41$ et $x = 263$

Remarque : 6 est bien le quotient de 263 par 41 car le reste 17 est plus petit que le diviseur 41.

♦ Exercice n°23 p.183

$$\begin{cases} C - S = 1\,200 \\ C - 3\,600 = 2(S - 3\,600) \end{cases}$$

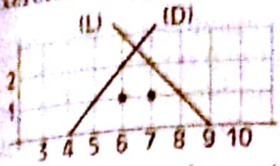
donc Clémence avait 6 000 F et Solange 4 800 F.

♦ Exercice n°24 p.183

$$\begin{cases} (L - 10)(\ell + 10) = L\ell \\ (L + 10)(\ell + 10) = L\ell + 800 \end{cases}$$

donc $L = 40$ et $\ell = 30$.

♦ Exercice n°25 p.183



Représentation graphique de l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x + y < 9 \\ x - y > 4 \end{cases}$$

(D) : $x + y = 9$; (L) : $x - y = 4$.

Parmi les solutions du système, il y a seulement deux couples de nombres entiers naturels non nuls ; ce sont les solutions du problème : $(6 ; 1)$ et $(7 ; 1)$.

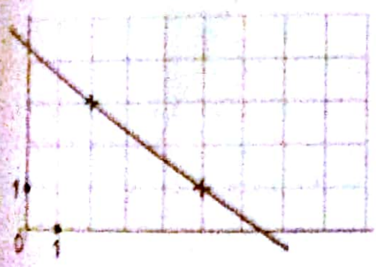
Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n°27 p.183

Désignons par x le nombre de beignets mangés par l'aîné ; c'est aussi le nombre de beignets mangés par le troisième. Désignons par y le nombre de beignets mangés par le deuxième. Le nombre de beignets mangés par le petit dernier est donc : $(2x + y)$.

Puisque y représente la moitié de la part initiale du deuxième, y désigne aussi le nombre de beignets qu'il reste à chacun des enfants.

La part de l'aîné était donc : $x + y$; la part du deuxième était donc : $2y$; la part du troisième était : $x + y$; la part du petit dernier était : $y + (2x + y)$.



On obtient l'équation :

$(x + y) + 2y + (x + y) + [y + (2x + y)] = 26$.

C'est-à-dire : $4x + 6y = 26$ ou encore $2x + 3y = 13$.

Parmi les solutions, on trouve deux couples de nombres entiers naturels : $(2 ; 3)$ et $(5 ; 1)$. Ce dernier couple ne convient pas car chaque enfant a mangé plusieurs beignets, donc y est plus grand que 1.

$(5 ; 6 ; 5 ; 10)$ est la seule répartition convenable, les enfants ramenant chacun 3 beignets.

♦ Exercice n°28 p.183

Rang de la fille	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de cavaliers	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nombre d'enfants nécessaires	8	10	12	14	1	18	20	22	24	26	28	30

♦ Exercice n°29 p.183

1) Un tel nombre s'écrit : $10a + (a + 3)$, avec $0 < a < 7$.

Écrit en sens inverse, cela devient le nombre $10(a + 3) + a$.

La différence $[10(a + 3) + a] - [10a + (a + 3)]$ est toujours égale à 27.

La seconde condition est donc inutile.

Les solutions sont : 14 ; 25 ; 36 ; 47 ; 58 et 69.

2) Un tel nombre s'écrit : $10a + (a + 4)$, avec $0 < a < 6$.

Écrit en sens inverse, cela devient le nombre $10(a + 4) + a$.

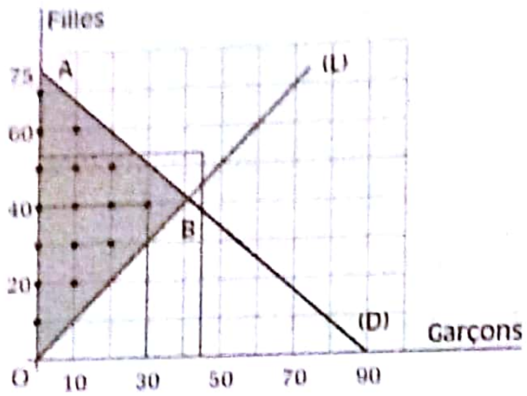
La différence $[10(a + 4) + a] - [10a + (a + 4)]$ est toujours égale à 36 : il n'y a pas de solution dans ce deuxième cas.

♦ **Exercice n°30 p.183**

L'unité de longueur est le mètre. $\ell > 7$; $L = \ell + 10$; $B = h = 2\ell$; $b > 1$

L'aire du rectangle et celle du trapèze sont égales : $10\ell + \ell^2 = b\ell + 2\ell^2$ d'où $\ell = 10 - b$, et compte tenu des contraintes, $\ell = 8$ et $b = 2$; l'aire des parcelle est donc 144 m².

♦ **Exercice n°31 p.183**



x désigne le nombre de garçons, y désigne le nombre de filles.

On obtient le système : $\begin{cases} 5x + 6y < 450 \\ y > x \end{cases}$

(D) est la droite d'équation : $5x + 6y - 450 = 0$;

(L) est la droite d'équation : $y = x$.

1) Chaque point à coordonnées entières situé à l'intérieur du triangle OAB ou sur son côté [OA] est une solution du problème, l'abscisse de ce point étant le nombre de garçons et son ordonnée le nombre de filles membres du club.

2) Il peut y avoir 30 garçons et 40 filles, mais pas 45 garçons et 52 filles.

Le nombre maximal de garçons est 40 ; il y aurait alors exactement 41 filles.

♦ **Exercice n°32 p.184**

On désigne par x la note en mathématiques et par y la note en sciences physiques.

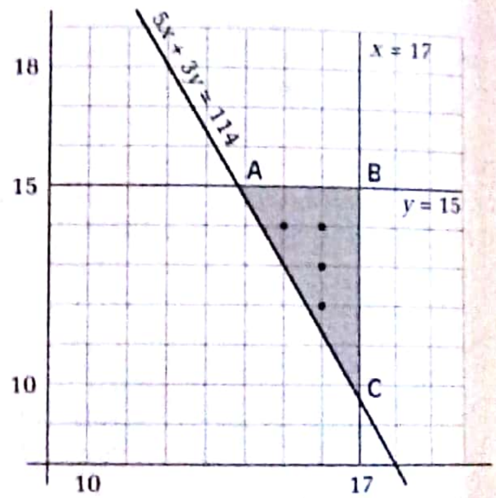
La moyenne sur l'ensemble des trois matières est :

$\dfrac{5x + 3y + 3 \times 6}{11}$.

Les solutions du problèmes sont des solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{5x + 3y + 18}{11} > 12 \\ x < 17 \\ y < 15 \end{cases} \quad \text{c'-à-d} \quad \begin{cases} 5x + 3y > 114 \\ x < 17 \\ y < 15 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont représentées par l'intérieur du triangle ABC ; des solutions du système, on ne conservera que les couples de nombres entiers naturels : (15 ; 14), (16 ; 14), (16 ; 13) et (16 ; 12).



♦ **Exercice n°33 p.184**

m désigne le nombre de mangues, a le nombre d'ananas.

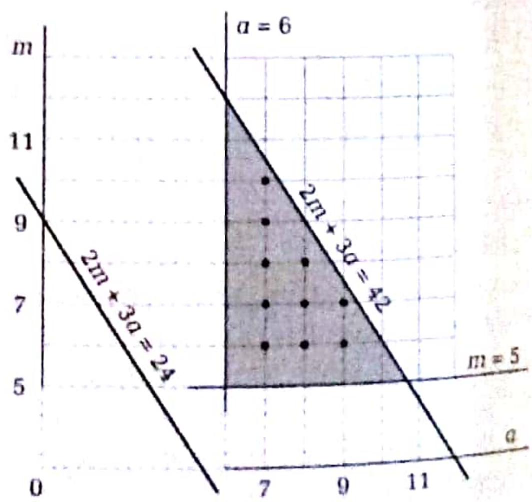
La dépense pour l'achat des fruits est alors :

$100m + 150a$.

Les solutions du problème sont des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 6 < a \\ 5 < m \\ 1\,200 < 100m + 150a \\ 2\,500 - (100m + 150a) > 400 \end{cases}$$

ou bien $\begin{cases} 6 < a \\ 5 < m \\ 24 < 2m + 3a \\ 2m + 3a < 42 \end{cases}$



Des solutions du système, on ne conservera que les 10 couples de nombres entiers naturels.

On pourra remarquer l'inutilité de l'inéquation : $24 < 2m + 3a$.

♦ **Exercice n°34 p.184**

Ligne du temps	avant	maintenant	après
Age du plus vieux	$x-(x-y)=y$	x	$x+(x-y)$
Age du plus jeune	$y-(x-y)$	y	$y+(x-y)=x$

$$\begin{cases} x = 2(y-(x-y)) \\ (x+(x+y)) + (y+(x-y)) = 180 \end{cases}$$

donc $y = 60$ et $x = 80$.

♦ **Exercice n°35 p.184**

On désigne par a le nombre de sacs portés par l'âne et par c le nombre de sacs portés par le cheval.

Traduction de l'énoncé par des équations :

• L'âne prend un sac du fardeau du cheval et sa charge est deux fois plus lourde que celle du cheval » :

$$a+1 = 2(c-1)$$

« Le cheval prend un sac du fardeau de l'âne et son fardeau est égal à celui de l'âne » :

$$a-1 = c+1$$

De la résolution du système formé de ces deux équations, on trouve la réponse : l'âne porte 7 sacs et le cheval, 5.

♦ **Exercice n°36 p.184**

$$\begin{cases} x+y=105 \\ x^2-y^2 = 1\,995 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=105 \\ (x-y)(x+y) = 1\,995 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=105 \\ 105\,(x-y) = 1\,995 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=105 \\ x-y = 19 \end{cases}$$

donc $x = 62$ et $y = 43$.

Exercices de recherche

♦ **Exercice n°37 p.184**

Quantité d'herbe fournie par un pré

- de 60 ares en 12 jours : $60\,x + 12 \times 60y$.
- de 72 ares en 15 jours : $72\,x + 15 \times 72y$.

Quantité d'herbe mangée par

• 75 boeufs en 12 jours : $8 \times 75 \times 12$

• 81 boeufs en 15 jours : $8 \times 81 \times 15$

D'où le système :

$$\begin{cases} 8 \times 75 \times 12 = 60x + 12 \times 60y \\ 8 \times 81 \times 15 = 72x + 15 \times 72y \end{cases}$$

donc $x = 60$ et $y = 5$

Quantité d'herbe fournie par un pré de 96 ares en 18 jours : $96 \times 60 + 18 \times 96 \times 5$ c'est-à-dire : 14 400.

Quantité d'herbe mangée par n boeufs en 18 jours : $8 \times n \times 18$. D'où l'équation : $8 \times n \times 18 = 14\,400$.

Donc $n = 100$

♦ **Exercice n°38 p.184**

d désigne la distance séparant la ville et le village.

v est la vitesse propre du pagayeur et f celle du fleuve.

$$v+f = \frac{d}{30} \quad \text{et} \quad v-f = \frac{d}{80}$$

$$2f = d\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{80}\right) ; 2f = d\left(\frac{1}{48}\right)$$

donc $\frac{d}{f} = 96$.

Il faudrait donc 96 minutes pour effectuer le trajet sans pagayer.

15. Applications affines

(pages 185 à 200 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
– présenter la notion d'application abordée en Quatrième sous son aspect géométrique
– intégrer les aspects numériques et graphiques d'une application affine
– introduire la notion d'application affine par intervalles par l'exploitation de graphiques.

Commentaires

Le vocabulaire « antécédent » ne devrait pas être utilisé, il ne figure pas dans le manuel.
On interprétera quelques situations concrètes illustrées par des fonctions affines par intervalles.
Le tracé de courbes représentatives de fonctions affines par intervalles ne devra pas être demandé à l'élève : il sera fourni lors d'exercices concernant ce thème.

Savoirs et savoir-faire

savoirs

Applications affines

• Définitions

A et B sont des ensembles.
– On appelle application de l'ensemble A dans l'ensemble B, toute correspondance qui, à chaque élément de A, associe un élément et un seul de B.
– On appelle bijection de l'ensemble A dans l'ensemble B, toute application f de l'ensemble A dans l'ensemble B telle que chaque élément de B est l'image par f d'un élément de A et d'un seul.

a et b sont des nombres réels.
– On appelle application affine de coefficient a et de terme constant b la correspondance qui à chaque nombre réel x associe le nombre réel $ax + b$.

Le plan est muni d'un repère. A et B sont des ensembles de nombres réels. f est un application de A dans B.
– On appelle représentation graphique de l'application f l'ensemble des points du plan de couple de coordonnées $(x ; f(x))$, x étant un élément de A.

• Vocabulaire

– application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ – image – bijection ;
– application affine f définie par $f(x) = ax + b$:
– sens de variation d'une application – application croissante, décroissante, constante.

• Notation

$f(x) = ax + b$

• Propriétés

– Le plan est muni du repère (O, I, J).
a et b sont des nombres réels donnés.
f est l'application affine définie par $f(x) = ax + b$
Elle a pour représentation graphique la droite d'équation $y = ax + b$.

f est l'application affine définie par : $f(x) = ax + b$.
f est croissante lorsque $a > 0$
f est constante lorsque $a = 0$
f est décroissante lorsque $a < 0$

savoir-faire

• reconnaître une application affine,
• calculer l'image d'un nombre par une application affine,
• calculer le nombre x tel que $f(x) = m$, m étant un nombre et f une application affine donnés,
• déterminer le coefficient et le terme constant d'une application affine connaissant les images de deux nombres donnés,
• tracer la représentation graphique d'une application affine définie par $f(x) = ax + b$,
• déterminer si une application affine est croissante, décroissante, constante,
• exploiter la représentation graphique d'une application affine pour :
déterminer son coefficient, son terme constant
déterminer l'image d'un nombre
déterminer un nombre dont l'image est connue.

Applications linéaires

• Définition On appelle application linéaire, une application affine définie par : $f(x) = ax$. (a étant un nombre réel) **• Propriétés** $f(a+b) = f(a) + f(b)$ $f(ka) = kf(a)$	• reconnaître une application linéaire ; • déterminer une application linéaire permettant de traduire une situation de proportionnalité ; • utiliser les propriétés d'une application linéaire pour étudier une situation de proportionnalité ; • déterminer graphiquement le coefficient d'une application linéaire.

Résolution graphique de problèmes

	• interpréter la représentation graphique d'une fonction affine par intervalle – trouver l'ordonnée d'un point d'abscisse donnée – trouver les abscisses de points d'ordonnée donnée – calculer le coefficient directeur de la droite support d'un segment donné

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.e p.190

Les nombres -3 et 1 sont rangés dans le même ordre que leurs images, donc l'application affine f est croissante et $f(0) < f(3)$.

♦ Exercice 1.f p.190

Le coefficient de l'application affine f est négatif, donc f est décroissante et $f(29\,708) < f(1\,526)$.

♦ Exercice 2.e p.191

$f(3) = \frac{1}{3}\ f(9) = 8{,}25$; $f(18) = 3f(6) = 2f(9) = 6f(3) = 49{,}5$; $f(15) = f(18) - f(3) = 41{,}25$.

♦ Exercice 2.f p.191

$f(3) - f(4) = f(-1) = -f(1)$. Donc l'application linéaire f est définie par $f(x) = -72\,x$.

Exercices d'entraînement

♦ Exercice n°28 p.197

1) La fin de l'autoroute se trouve à 140 km du lieu de départ.
Hassine arrive à 11 h 50 et Kokou arrive à 12 h 30.

2) Hassine a parcouru les 140 km en 1 h 10 sans s'arrêter à la vitesse moyenne de 120 km/h.
Kokou a parcouru les 60 premiers km en 20 mn à la vitesse de 180 km/h, puis il s'est arrêté 30 mn de 11 h à 11 h 30. Il a repris la route à 11 h 30 et a parcouru les 80 km restant en 1 h à la vitesse moyenne de 80 km/h.

3) Hassine dépasse Kokou à 11 h 10 à 60 km du lieu de départ pendant qu'il était à l'arrêt.

4) À 12 h, Hassine a parcouru 140 km et Kokou a parcouru 100 km. La distance qui les sépare est donc : 40 km.

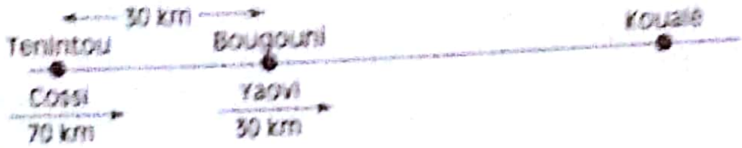
♦ Exercice n°29 p.197

1) 1^er^ tour : 50 s — vitesse moyenne ($\frac{400}{50}$) de 8 m/s ou 28,8 km/h.

2) 300 derniers mètres : 40 s — vitesse moyenne ($\frac{300}{40}$) de 7,5 m/s ou 27 km/h.

3) Les 1 000 m en 2 min 27 s 5/10 : record battu.

♦ Exercice n°30 p.197



On désigne par

t le temps en heures au bout duquel Cossi rejoint Yaovi.

d la distance en km séparant Tenintou du point de rencontre.

On obtient le système :

$$\begin{cases} d = 70t \\ d = 30 + 30t \end{cases}$$

Donc $t = \frac{3}{4}$ (en h) c'est-à-dire 45 min.

$d = 52,5$ (en km).

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n°32 p.198

1) Si $f(x) = ax$, alors $f(2) = 5$ équivaut à $a = \frac{5}{2}$. Par conséquent, $f(\sqrt{3}) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \neq 4$. Donc, f n'existe pas.

2) Oui, $f(x) = \sqrt{2}\,x$.

♦ Exercice n°34 p.198

1) $y_1 = 1,15\,x$ 2) $y_2 = 1,38\,x$. 3) $y_1 = 1,25\,x$ et $y_2 = 1,5\,x$; $y_1 = 1,5\,x$ et $y_2 = 1,8\,x$.

♦ Exercice n°35 p.198

Après 30 min, l'avance est de $\frac{1}{6}$ min.

x	30
y	$\frac{1}{6}$

$\times \frac{1}{180}$

1) $y = \frac{1}{180}\,x$

2) Pour 1h, l'avance est de 20 s ; pour 12h, elle est de 4 min ; pour 24h, 8 min ; pour 3 jours, 24 min.

3) Pour $y = 60$, $x = 10\,800$, soit 7,5 jours.

♦ Exercice n° 36 p.198

1) $T_K = T_C + 273$

2)

T_K	0	100	122	203	273	373	456
T_C	− 273	− 173	− 155	− 70	0	100	183

♦ Exercice n°37 p.198-199

1) $T_F = \frac{9}{5}\,T_C + 32$ et $T_C = \frac{5}{9}\,T_F - \frac{160}{9}$

2)

T_F	− 67	− 31	14	59	122	248
T_C	− 55	− 35	− 10	15	50	120

3) La température de congélation de l'eau est 32 °F et la température d'ébullition de l'eau est 212 °F.

4) 37 °C.

♦ Exercice n°38 p.199

1) 975 FF ; 2 437,50 FF 2) $y = 0,00975x$; f définie par $f(x) = 0,00975x$ est linéaire donc affine.

3) 512 825 F CFA.

♦ Exercice n°39 p.199

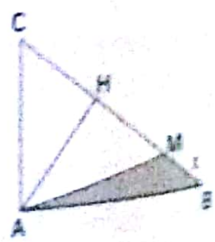
h désigne la distance de A à (BC). On a : $5h = 12$, donc $h = 2,4$ et :

1) aire (ABM) : $y_1 = 1,2\,x$; (application linéaire donc affine)

2) aire (ACM) : $y_2 = 1,2\,(5 - x) = -1,2\,x + 6$ (application affine non linéaire)

3) $1,2\,x = \frac{1}{4} \times 6$ $(x = 1,25)$; $1,2\,x = \frac{1}{2} \times 6$ $(x = 2,5)$; $1,2\,x = 6 \times \frac{2}{3}$ $(x = 3,33)$

4) $6 - 1,2\,x = \frac{4}{5} \times 1,2\,x$ $(x = 2,77)$



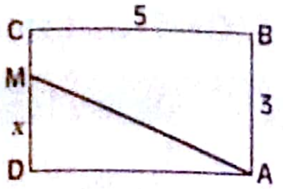
Exercice n°40 p.199

Il y a deux cas de figure : $DC = 3$ ou $DC = 5$.

1) $y_1 = \frac{5}{2}(6 - x)$

2) $y_2 = \frac{5}{2}x$

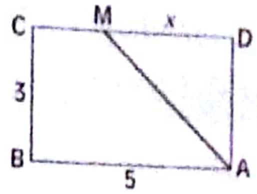
3) $x = 2$



1) $y_1 = \frac{3}{2}(10 - x)$

2) $y_2 = \frac{3}{2}x$

3) $x = \frac{10}{3}$



Exercice n°42 p.199

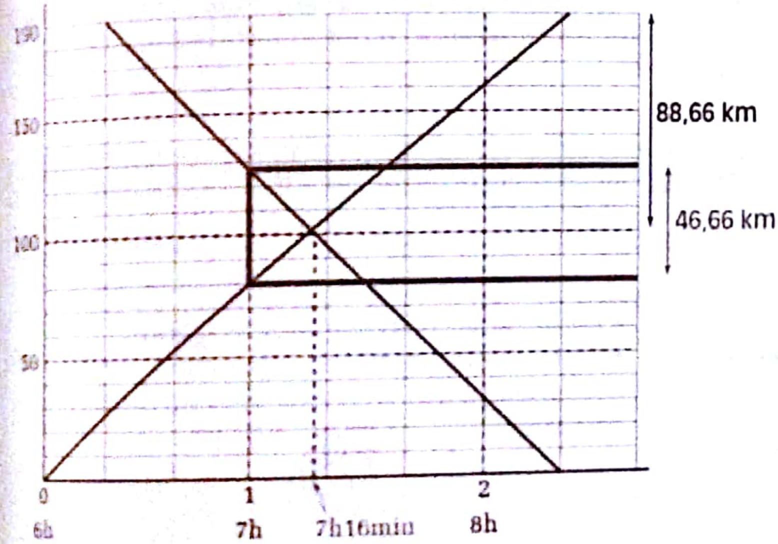
Aire (ABC) $= \frac{AH \times BC}{2}$; Aire (AMN) $= \frac{AH' \times MN}{2}$; $\frac{\text{Aire (ABC)}}{\text{Aire (AMN)}} = \frac{AH \times BC}{AH' \times MN}$.

Or, dans le triangle ABC, (MN) // (BC) ; d'après la conséquence de la propriété de Thalès, $\frac{AH}{AH'} = \frac{BC}{MN}$.

Donc : $\frac{\text{Aire (ABC)}}{\text{Aire (AMN)}} = \frac{AH}{AH'} \times \frac{AH}{AH'} = \frac{x^2}{y^2}$. Or Aire (ABC) = 2 × Aire (AMN). D'où : $\frac{x^2}{y^2} = 2$.

Expression de y en fonction de x : $y = x\,\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice n°43 p.199-200



x désigne la durée (en h) écoulée à partir de 6 h ;

y_1 désigne la distance qui sépare N'Diaye de Dakar après x h ;

y_2 désigne la distance qui sépare Gueye de Dakar après x h.

On a : $y_1 = 80\,x$

$y_2 = -95\,x + \frac{665}{3}$.

Au point de rencontre, $y_1 = y_2$.

D'où l'équation :

$80\,x = -95\,x + \frac{665}{3}$.

$x = \frac{19}{15}$ ($\frac{19}{15}$ d'heure c'est-à-dire : 76 min)

Les deux véhicules se rencontrent à 7 h 16 min.

À ce moment, N'Diaye a parcouru $\frac{80 \times 19}{15}$ km ; le point de rencontre se trouve donc à $(190 - \frac{80 \times 19}{15})$ km de Kaolak, c'est-à-dire à 88,66 km de cette ville.

À 7 h, N'Diaye se trouve à 80 km de Dakar et Gueye se trouve à $(\frac{665}{3} - 95)$ km de Dakar.

À 7 heures les deux véhicules sont donc à 46,66 km l'un de l'autre.

Exercice n°45 p.200

1) $(100\,000) \times (1{,}05)$ c-à-d : 105 000 ; $(100\,000) \times (1{,}05)^2$ c-à-d : 110 250 ; $(100\,000) \times (1{,}05)^3$ c-à-d : 115 762,5 ;

2) $x \times (1{,}05)$; $x \times (1{,}05)^2$; $x \times (1{,}05)^n$.

Exercice n°47 p.200

1) $y_1 = 1\,950 - 350\,x$ pour $x = 0{,}7$ kg, on a : $y_1 = 1\,705$ FCFA.

2) $y_2 = 2\,535 - 455\,x$ pour $x = 0{,}7$ kg, on a : $y_2 = 2\,216{,}5$ FCFA.

pour $x = 0{,}5$ kg, on a : $y_2 = 2\,307{,}5$ FCFA.

16. Statistiques

(pages 201 à 214 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :
– consolider et compléter les notions concernant le cas discret.
– effectuer une première approche du cas continu par des regroupements en classes d'égale amplitude.

COMMENTAIRES

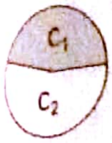
Le cas discret est vu en quatrième. Des exercices appropriés peuvent servir à réactualiser ces connaissances pour ensuite introduire les notions nouvelles telles que le mode, les effectifs et fréquences cumulés. Il convient de remarquer que, pour étudier les effectifs et fréquences cumulés, il est nécessaire que l'ensemble des modalités soit totalement ordonné (ce qui est le cas lorsque le caractère est quantitatif). Les effectifs cumulés donnent l'occasion d'utiliser correctement les locutions « au moins, plus de, au plus, moins de ». Il faut attirer l'attention sur la signification de ces locutions. Effectifs et fréquences cumulés sont traités ici uniquement dans le cas croissant : il est inutile donc d'adjoindre le terme « croissant ».
Le cas continu et le cas discret où les modalités sont très nombreuses seront vus sous forme de regroupements en classes d'égale amplitude. L'histogramme est alors avant tout un diagramme à bandes, celles-ci étant accolées et de même largeur. La moyenne, dans le cas d'un regroupement en classes ne sera abordée que dans le second cycle.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Étude d'un caractère qualitatif	
• **Vocabulaire** – Secteur circulaire, série statistique, diagramme circulaire. • **Définition** On appelle mode d'une série statistique toute modalité dont l'effectif est maximal.	• Présenter les résultats dans un tableau. • Tracer les diagrammes circulaires. • Représenter une série statistique par un diagramme circulaire.
Étude d'un caractère quantitatif	
• **Définition** – On appelle effectif cumulé de la modalité *n*, la somme des effectifs de chaque modalité inférieure ou égale à *n*. – On appelle fréquence cumulée de la modalité *n*, le quotient de l'effectif cumulé de la modalité *n* par l'effectif total • **Vocabulaire** – Tableaux des effectifs et fréquences cumulés – Diagrammes cumulatifs.	• Lire et exploiter des données statistiques : – mises sous forme de tableaux. – mises sous forme de diagrammes en bâtons, à bandes, semi-circulaires, circulaires, cumulatifs.
Regroupement en classes	
• **Vocabulaire** – Classe, amplitude, effectif et fréquence d'une classe, classe modale.	• Tracer les diagrammes à bandes. • Regrouper une population en classe d'égale amplitude. • Calculer les effectifs et les fréquences d'une classe donnée.

Exercices du cours

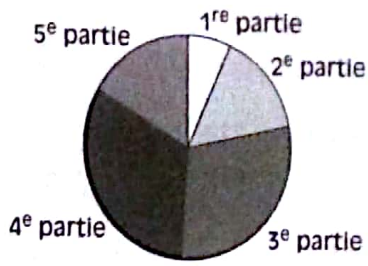
Exercice 1.a p.204



Mesure du secteur circulaire C_1 : 162°
Mesure du secteur circulaire C_2 : 198°
Mesure de l'angle au centre qui définit ces deux secteurs circulaires : 162°.

Exercice 1.b p.204

durée	% de la durée totale	mes. du secteur circulaire
1 min	6,67	24°
2 min 15 s	15,00	54°
4 min 25 s	29,44	106°
4 min 50 s	32,22	116°
2 min 30 s	16,67	60°

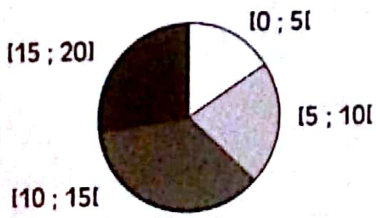


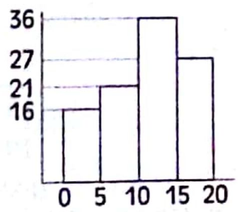
Exercice 2.a p.206

Modalités	18	26	28	30	32	35	40	45	50	55	60
Effectifs	1	1	3	2	3	2	4	2	6	6	15
Eff. cumulés	1	2	5	7	10	12	16	18	24	30	45

Nombre de classes ayant moins de 48 élèves : 18.

Exercice 3.c p.211





Classe modale : [10 ; 15 [

Exercices d'entraînement

Exercice n°1 p.212

FDL : 13,67 % ; SIGA : 16,25 % ; CFC : 16,86 %

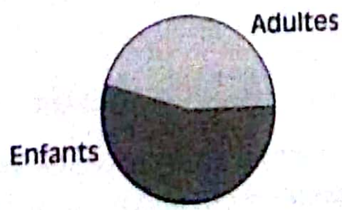
Exercice n°2 p.212

$127\,754 \times (100 - 16{,}3)\% = 106\,930$

Exercice n°3 p.212

Adultes	Enfants	Total
112	138	250
161,28°	198,72°	360°

$\times \frac{360}{250}$



Mesures des secteurs circulaires :

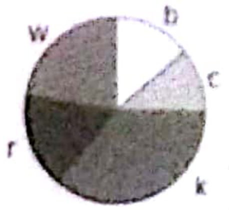
$\frac{112 \times 360}{112 + 138} \approx 161{,}28°$; $360 - 161{,}28 = 198{,}72°$.

♦ **Exercice n°4 p.212**

1) Asie et Europe : 2) Océanie.

On demande une interprétation visuelle plutôt qu'un calcul précis basé sur des mesures de secteurs circulaires.

♦ **Exercice n°5 p.212**



Modalités	b	c	k	r	w	Totaux
Effectifs	5	4	13	6	8	36
Fréquences	0,14	0,11	0,36	0,17	0,22	1
Mes. du secteur circ.	50°	40°	130°	60°	80°	360°

La modalité « Batik » est le mode de la série.

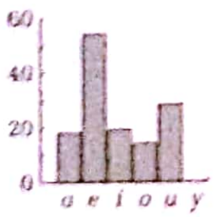
♦ **Exercice n°6 p.212**

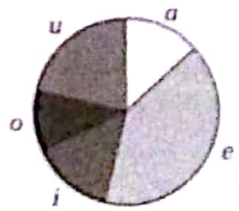
1) Le mode est le signe *e*. La consonne la plus utilisée est *s*. Il n'y a pas de *j, k, w, y, z*.

2)

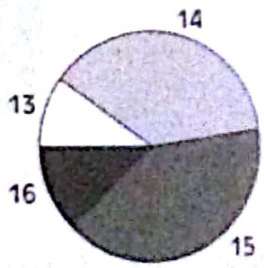
Lettres	*a*	e	i	o	u	y
Effectifs	18	54	19	14	28	0
Fréquences (en %)	13,53	40,60	14,28	10,52	21,05	0
Mes. du secteur circ.	48,7°	146,1°	51,4°	37,9°	75,9°	0°

Le mode est le signe *e*





♦ **Exercice n°7 p.213**



Modalités (m_i)	13	14	15	16	Totaux
Effectifs (x_i)	5	19	20	6	50
Fréquences	0,1	0,38	0,4	0,12	1
$x_i \times m_i$	65	266	300	96	727
Mes. du secteur circ.	36°	136,8°	144°	43,2°	360°

Age moyen : $\frac{727}{50} = 14{,}54$.

♦ **Exercice n°8 p.213**

Prix (p_i)	2 000	3 500	4 500	5 000	7 000	9 000
Effectifs (x_i)	25	38	25	25	50	29
Effectifs cumulés	25	63	88	113	163	192
Fréquences cumulées	0,13	0,32	0,46	0,59	0,85	1
$x_i \times p_i$ (en milliers de F)	50	133	112,5	125	350	261

Prix moyen : $\frac{1\,031\,500}{192} \approx 5\,372$ F Mode : 7 000

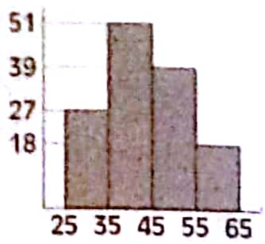
59% de montres ont un prix plus petit que 7 000 F. (58,85%)

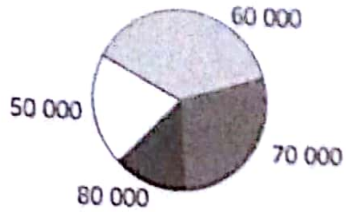
68% de montres ont un prix supérieur ou égal à 4 500 F. (61,98%)

♦ Exercice n°11 p.213

Poids	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 65[
Prix en F	50 000	60 000	70 000	80 000
Effectif	27	51	39	18
Fréquence (en %)	20	37,78	28,89	13,33

La classe modale est la classe [35 ; 45[. 20% des moutons ont un prix plus petit que 60 000 F.





♦ Exercice n°13 p.214

Classes	]0 ; 500]	]500 ; 1000]	]1000 ; 1500]	]1500 ; 2000]	]2000 ; 2500]	]2500 ; 3000]
Effectifs	17	20	39	27	13	24
Fréquences	0,12	0,14	0,28	0,19	0,09	0,17

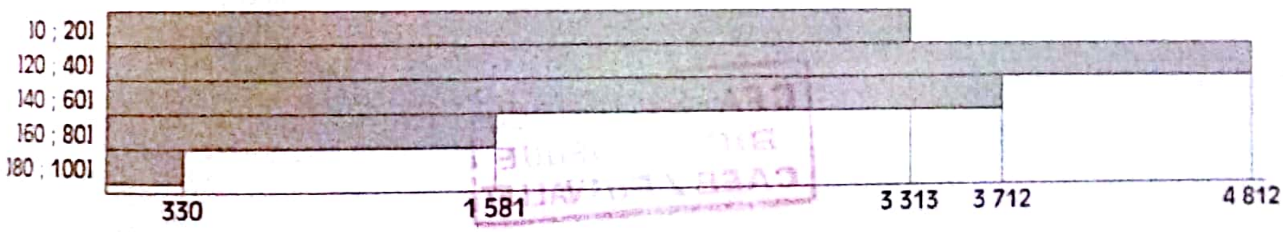
]1 000 ; 1 500] est la classe modale.

♦ Exercice n°14 p.214

Classes	]0 ; 20]	]20 ; 40]	]40 ; 60]	]60 ; 80]	]80 ; 100]	
Fréquences (%)	24,1	35	27	11,5	2,4	
Effectifs	3 313	4 812	3 712	1 581	330	13 748

13 748 × 2,4% = 329,95 ; c'est à dire 330 personnes. …

Classe modale :]20 ; 40].

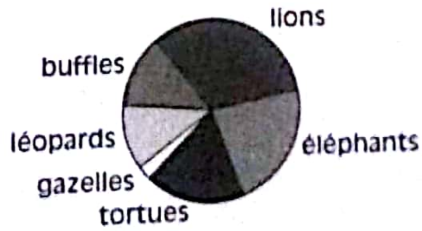


♦ Exercice n°17 p.214

Catégories	gazelles	léopards	buffles	lions	éléphants	tortues	
Durées (min)	]30 ; 40]	]40 ; 50]	]50 ; 60]	]60 ; 70]	]70 ; 80]	]80 ; 90]	
Effectifs	51	231	252	658	445	363	2 000
Fréquences (en %)	2,55	11,55	12,6	32,9	22,25	18,15	100

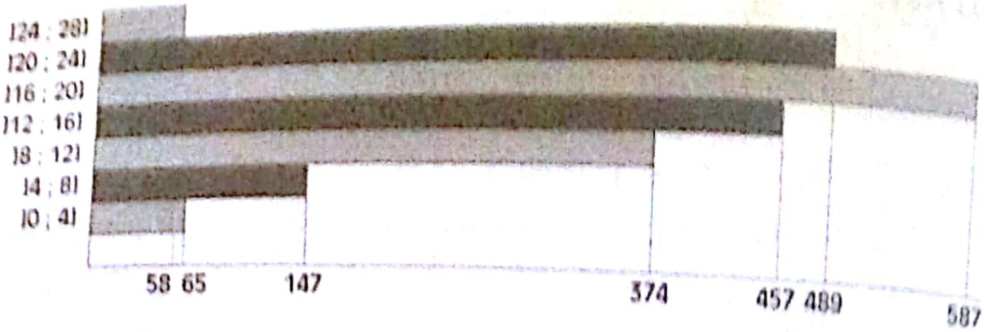
Pourcentage des coureurs ayant couru pendant une durée plus grande que 50 minutes :

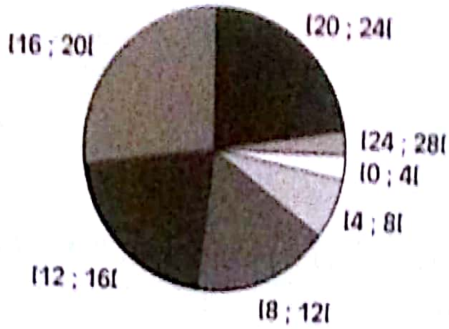
(2000 – 282)/2000 = 85,9 %



♦ Exercice n°18 p.214

Ancienneté	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[	[20 ; 24[	[24 ; 28[	Total
Nb. de prof.	65	147	374	457	587	489	58	2 177





65 + 147 + 374 + 457 = 1 043 ; 1 043 professeurs n'ont pas atteint 16 ans d'ancienneté.

457 + 587 + 489 + 58 = 1 591 ; 1 591 professeurs ont atteint ou dépassé 12 ans d'ancienneté.

Imprimé en France par I.M.E. - 25110 Baume-les-Dames
Dépôt légal n° 57454-05/2005
Collection n° 61 - Édition n° 05
59/4617/3

Scanned by CamScanner

DIFUSIÓN