

ASSOCIATION DE
MATHÉMATIQUES



Littéraire

MATHÉMATIQUES

GUIDE PÉDAGOGIQUE

Collection
I nter
Africaine de
M athématiques

sous la direction
de Saliou TOURÉ
Professeur à l'Université
d'Abidjan

MATHÉMATIQUES

Terminale L

GUIDE PÉDAGOGIQUE

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen
92178 Vanves Cedex

L'idée d'harmoniser les programmes de mathématiques entre les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien remonte à l'année 1983 où fut organisé par l'IRMA, à Abidjan, le premier séminaire d'harmonisation. Depuis, d'autres séminaires ont suivi : en 1985 à Cotonou, en 1988 à Conakry et en juin 1992 à Abidjan avec la participation de 20 pays.

PARTICIPATION DES DIFFÉRENTS PAYS

BÉNIN	COMORES	GUINÉE	RÉP. DÉM. DU CONGO
BURKINA FASO	CONGO	MADAGASCAR	RWANDA
BURUNDI	CÔTE D'IVOIRE	MALI	SÉNÉGAL
CAMEROUN	DJIBOUTI	MAURITANIE	TCHAD
CENTRAFRIQUE	GABON	NIGER	TOGO

La suite logique, souhaitée par tous les participants, est l'élaboration d'une Collection Inter-Africaine de manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Des rédacteurs de tous les pays participent à la réalisation de ce projet. Un comité de coordination travaille avec les cellules nationales mises en place dans chaque pays.

COMITÉ DE COORDINATION

Missa COULIBALY
Isidore KOFFI

Denis OUEHI
Soma TRAORÉ

D'autres séminaires de concertation ont réuni les responsables de ces cellules, à Libreville en 1993, à Ndjaména en 1994, à Yaoundé en 1995, à Antananarivo en 1996, à Dakar en 1997, à Niamey en 1998, à Nouakchott en 1999, à Ouagadougou en 2000, à Cotonou en 2001, à Bangui en 2002 et à Bamako en 2003.

ISBN 978-2-84129-921-8

© EDICEF 2003

Droits de reproduction, de traduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

En application de la loi du 11 mars 1957, il est interdit de reproduire intégralement ou partiellement le présent ouvrage sans autorisation de l'éditeur ou du Centre Français de l'Exploitation du Droit de Copie (3, rue Hautefeuille, 75006 Paris). Cette reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal

SOMMAIRE

1	TABEAU SYNOPTIQUE DES PROGRAMMES DU SECOND CYCLE LITTÉRAIRE	5
----------	--	----------

2	MATHÉMATIQUES DANS LES SECTIONS LITTÉRAIRES ET ÉCONOMIQUES	7
	2.1 Des difficultés didactiques	8
	2.2 Les thèmes que l'on peut aborder	8
	2.3 Catalogue pour choisir des curricula	10
	2.4 Que choisir ?	10

3	COMMENTAIRES GÉNÉRAUX POUR LE SECOND CYCLE	11
	3.1 Options académiques.....	11
	3.2 Options pédagogiques.....	12
	3.3 Aspects culturels.....	12
	3.4 Utilisation du manuel	12

4	COMMENTAIRES SPÉCIFIQUES À LA CLASSE DE TERMINALE L ...	14
	4.1 Activités des élèves.....	14
	4.2 Présentation du manuel.....	14
	4.3 Points méthodes.....	14
	4.4 Travaux dirigés.....	15

5	ANALYSE DES CHAPITRES	17
	5.1 Entiers naturels	17
	5.2 Fonctions.....	22
	5.3 Fonctions polynômes, fonctions rationnelles.....	30
	5.4 Fonctions logarithme et exponentielle	43
	5.5 Équations, inéquations, systèmes.....	54
	5.6 Suites numériques	62
	5.7 Statistiques	67
	5.8 Probabilités.....	83

ALPHABET GREC

Majuscule	Minuscule	Appellation
A	α	alpha
B	β	bêta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ε	epsilon
Z	ζ	dzêta
H	η	êta
Θ	θ	thêta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	ksi
O	ο	omicron
Π	π	pi
P	ρ	rhô
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	φ	phi
X	χ	khi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	oméga

1 TABLEAU SYNOPTIQUE DES PROGRAMMES DU SECOND CYCLE LITTÉRAIRE

Les programmes du Second Cycle Littéraire ont été établis en juin 1992, lors du quatrième séminaire d'harmonisation des programmes de mathématiques des pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien. Ils sont ici présentés dans un tableau synoptique afin de faire apparaître :

- la cohérence des différents thèmes à un niveau donné ;
- l'évolution d'un thème d'un niveau à l'autre.

Seconde L

Première L

Terminale L

LES NOMBRES

- ♦ Les nombres réels
 - Nombres rationnels
 - Nombres irrationnels
- ♦ Calculs dans $\mathbb{R}$
 - Sommes et produits
 - Quotients
 - Puissances
 - Racines carrées
- ♦ Proportionnalité
 - Tableaux de proportionnalité
 - Pourcentages
 - Échelles
 - Problèmes concrets
- ♦ Ordre et valeur absolue
 - Comparaison des nombres
 - Encadrement, approximations, ordre de grandeur
 - Valeur absolue, distance

- ♦ Divisibilité dans $\mathbb{N}$
 - Critères de divisibilité
 - Bases 10, 2 et 5
- ♦ Décimales successives d'un nombre rationnel
 - Application aux suites
- ♦ Calculs sur les grands nombres
 - Utilisation d'une calculatrice

ALGÈBRE

CALCUL LITTÉRAL

- ♦ Développements et factorisations
 - Égalités remarquables
 - Applications aux calculs numériques
- ♦ Calculs simples sur les polynômes
- ♦ Simplifications de fractions rationnelles

ÉQUATIONS

- ♦ Équations dans $\mathbb{R}$
 - Équations du type : $ax + b = 0$
 - Équations du type : $|x - a| = r$
 - Équations du type : $(ax + b)(cx + d) = 0$
 - Équations du type : $\frac{ax + b}{cx + d} = 0$
 - Problèmes concrets

- ♦ Équations dans $\mathbb{R}$
 - Équations du type : $\frac{ax + b}{cx + d} = 0$
 - Problèmes concrets
- ♦ Équations du second degré
 - Forme canonique
 - Discriminant
 - Somme et produit des racines
 - Problèmes concrets

- ♦ Équations dans $\mathbb{R}$
 - Méthodes graphique et numérique
 - Équations faisant intervenir $\ln$ ou $\exp$

INÉQUATIONS

SYSTÈMES LINÉAIRES

FONCTIONS

FONCTIONS USUELLES

LIMITES - CONTINUITÉ

DÉRIVÉE

Seconde L

- ♦ Inéquations dans $\mathbb{R}$
 - Inéquations du type : $ax + b \leq 0$
 - Inéquations du type : $|x - a| \leq r$
 - Inéquations du type : $(ax + b)(cx + d) \leq 0$
 - Inéquations du type : $\frac{ax + b}{cx + d} \leq 0$
 - Problèmes concrets
- ♦ Systèmes linéaires
 - Systèmes linéaires d'équations
 - Systèmes linéaires d'inéquations
 - Problèmes concrets

Première L

- ♦ Inéquations du second degré
 - Signe de $ax^2 + bx + c$
 - Inéquations du type : $ax^2 + bx + c \leq 0$
 - Problèmes concrets
- ♦ Inéquations dans $\mathbb{R}$
 - Inéquations du type : $\frac{ax + b}{cx + d} \leq 0$
 - Problèmes concrets

Terminale L

- ♦ Inéquations dans $\mathbb{R}$
 - Inéquations faisant intervenir $\ln$ ou $\exp$
- ♦ Systèmes linéaires
 - Systèmes linéaires d'équations
 - Systèmes linéaires d'inéquations
 - Problèmes de programmation

- ♦ Parité d'une fonction, éléments de symétrie d'une courbe
- ♦ Observation de courbes de fonctions périodiques
- ♦ Fonctions de la forme :
 - $x \mapsto f(x - a)$
 - $x \mapsto f(x) + b$
 - $x \mapsto |f(x)|$
 - $x \mapsto kf(x)$, où f est une fonction élémentaire

- ♦ Fonctions polynômes du second degré
- ♦ Fonctions homographiques

- ♦ Fonctions $\ln$ et $\exp$
- ♦ Fonctions simples faisant intervenir $\ln$ ou $\exp$

- ♦ Approche intuitive des notions de limite et de continuité

- ♦ Limites
 - Notions
 - Opérations
 - ♦ Notion d'asymptote

- ♦ Approche intuitive de la notion de nombre dérivé
 - Interprétation géométrique
 - Équation de la tangente en un point d'une courbe
- ♦ Fonctions dérivées
- ♦ Variations de fonctions
 - Fonction polynôme du second degré
 - Fonction homographique

- ♦ Dérivées usuelles
- ♦ Dérivées de fonctions composées
 - Dérivée de $\ln u$
 - Dérivée de $\exp u$
- ♦ Utilisation des dérivées pour étudier :
 - Fonctions polynômes de degré supérieur à 2
 - Fonctions rationnelles du type :

$$x \mapsto \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

♦ Notion de suite numérique

♦ Diverses déterminations d'une suite

- $u_n = f(n)$
- $u_{n+1} = g(u_n)$

♦ Représentations graphiques d'une suite

♦ Suites arithmétiques, suites géométriques

- Terme général
- Somme des n premiers termes
- Problèmes concrets

♦ Comportement d'une suite

- Sens de variation
- Convergence

♦ Applications

- Initiation au raisonnement par récurrence
- Approximation de nombres réels par des suites rationnelles
- Étude de la suite : $n \mapsto 2^n$
- Étude de la fonction : $x \mapsto 2^x$

♦ Organisation de données

- Caractère quantitatif
- Caractère qualitatif
- Fréquence
- Effectif cumulé, fréquence cumulée

♦ Traitement de données

- Mode
- Moyenne

♦ Représentations graphiques

- Diagramme circulaire
- Diagramme semi-circulaire
- Diagramme à bandes
- Diagramme en bâtons

♦ Caractères qualitatif, quantitatif

- Caractéristiques de position
- Caractéristiques de dispersion

♦ Regroupement des modalités en classes

- Histogrammes
- Caractéristiques de position
- Caractéristiques de dispersion
- ♦ Exemples de séries chronologiques

♦ Quartiles et déciles d'une série à un caractère

♦ Étude conjointe de deux caractères

- Nuage de points
- Point moyen
- Ajustement linéaire

♦ Outils élémentaires de dénombrement

- Comptage
- Diagrammes
- Arbres de choix
- Tableaux

♦ Résolution de problèmes concrets

♦ Produit cartésien

♦ Ensemble E^p

♦ Arrangements

♦ Permutations

♦ Combinaisons

♦ Notion de probabilité

$$p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

2 MATHÉMATIQUES DANS LES SECTIONS LITTÉRAIRES ET ÉCONOMIQUES

D'après une communication de Monsieur PIEDNOIR, Inspecteur Général de France, lors du sixième séminaire HPM (Niamey, 1998).

Quelles mathématiques enseigner dans les sections non scientifiques ?

Le problème n'est pas résolu d'une façon stable dans les différents systèmes éducatifs. Plusieurs philosophies s'affrontent :

- (1) L'important pour l'élève d'une section non scientifique est de se former à la rigueur, au raisonnement déductif. Le contenu de l'enseignement est second. Les mathématiques forment un tout et il ne faut pas trop s'inquiéter des techniques mathématiques que les élèves manipulent éventuellement lors de leurs études supérieures.
- (2) Il est inutile de vouloir faire boire un âne qui n'a pas soif. Pour ces élèves, les mathématiques sont au mieux inutiles. D'autres disciplines peuvent former à la rigueur, au raisonnement. Éventuellement, afin d'éviter l'illettrisme mathématique, entretenir les acquis antérieurs.
- (3) Les mathématiques font partie de la culture. En liaison avec la philosophie, il est intéressant de faire une certaine vulgarisation, de donner une idée de la place des mathématiques dans la culture.
- (4) L'économie, les sciences humaines utilisent des modèles, des techniques mathématiques spécifiques. Dès l'enseignement secondaire, mais surtout pour préparer les études ultérieures, il importe d'apporter à ces élèves une formation spécifique en mathématiques.

Pour la suite de cette note, on s'inspirera des points de vue (3) et (4).

2.1. DES DIFFICULTÉS DIDACTIQUES

De ses études dans les classes antérieures, l'élève s'orientant vers une section littéraire ou économique a souvent développé une allergie à la discipline, avec des discours définitifs du type : « je n'y comprends rien », « cela ne me servira à rien ». Les échecs antérieurs pèsent lourds. Cela veut dire que si on fait des mathématiques en section littéraire, il faut obtenir des élèves une certaine adhésion. Il y a donc nécessité, d'une certaine façon, de casser le jeu traditionnel, de présenter du neuf, ce qui est une justification des choix faits précédemment.

Aborder des thèmes nouveaux ne suffit évidemment pas à engendrer intérêt et réussite. Il faut prendre en compte les échecs antérieurs, les savoir-faire non acquis en les déterminant d'une façon précise à l'aide, par exemple, d'évaluations en début d'année. Mais pour y remédier, des séances de révisions sont vaines. Elles remettent l'élève devant son échec, ce qui est loin d'être agréable. Du coup il coupe la communication. C'est à propos de l'étude de thèmes nouveaux que l'on peut progressivement procéder aux réinvestissements des concepts vus au collège. Ainsi l'élève perçoit mieux la nécessité de maîtriser certaines notions.

Trop souvent dans ses apprentissages mathématiques, l'élève est freiné par la lenteur avec laquelle il effectue certaines manipulations de base, en particulier le calcul algébrique. Le temps passé à mettre au point un calcul fait perdre de vue l'objectif poursuivi. Il s'agit d'un phénomène analogue à celui de l'illettrisme. Celui qui lit trop lentement mobilise ses énergies pour déchiffrer le texte et en perd le sens. La lecture devient un exercice pénible et à la limite inutile, car en cours de route on a perdu le sens du texte. Il faut donc dans les exercices traités, dans les activités faites, éviter une technicité importante et/ou mettre en place, quand cela est possible, des béquilles : recours systématique à la calculatrice, utilisation des touches « fonctions », des représentations graphiques, usage de l'ordinateur.

Une formation n'a de sens que si on perçoit bien les relations qui existent entre les symboles que l'on manipule et les réalités qu'ils représentent. Quelles significations donnent ces élèves à %, $\sqrt{\quad}$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f' , proportion, projection, etc.

2.2. LES THÈMES QUE L'ON PEUT ABORDER

2.2.1. Les mathématiques du citoyen

Il faut montrer qu'un certain nombre de concepts mathématiques sont utilisés dans la vie courante et que leur maîtrise est indispensable à tout individu qui veut maîtriser sa vie, avoir un regard critique sur l'information chiffrée qu'il reçoit. Parmi eux, deux objets sont à manipuler en priorité : la proportionnalité et la lecture graphique.

La proportionnalité, la manipulation des pourcentages recèlent des pièges dans lesquels tombent des individus qui peuvent par ailleurs être de haute culture. La lecture de la presse, l'écoute des médias, permettent, sur ce thème, de se constituer un bêtisier dont l'analyse par les élèves peut être à la fois déculpabilisante et intéressante. À un autre niveau, l'interprétation des proportions représentant des fréquences empiriques, des probabilités, est l'occasion de montrer aux élèves qu'il ne faut pas se précipiter sur un chiffre mais qu'il est nécessaire de faire le va-et-vient entre celui-ci et la réalité qu'il est censé représenter.

Une lecture des graphiques existant dans les pages économiques des quotidiens, dans des publications spécialisées est une excellente introduction aux notions d'ordre, de croissance/décroissance d'une fonction, de continuité. Des exemples peuvent illustrer cela. Pour représenter graphiquement la répartition statistique des familles selon leur taille, faut-il utiliser un diagramme circulaire ou un diagramme semi-circulaire ? Comment réagit l'adulte ou l'élève devant un graphique représentant, année par année, le taux de croissance de l'économie ? En France, pour établir l'impôt sur le revenu des personnes physiques, on utilise des tranches. Beaucoup croient que le passage d'une tranche à l'autre fera baisser le revenu final disponible. Qu'en est-il ? D'autres exemples sont possibles.

2.2.2. Réflexion conceptuelle et historique sur la mathématique

La démarche mathématique est une des grandes conquêtes de l'esprit humain. Elle a aidé à mieux comprendre les choses, c'est l'aspect gratuit. Elle a été efficace, c'est l'aspect mathématique appliquée. On peut présenter cette aventure culturelle autour de deux pôles : la notion de modèle et le raisonnement déductif.

La géométrie euclidienne est le premier modèle que les enfants ont à appréhender. Il faut montrer comment on a remplacé des objets familiers par des abstractions, comment on a raisonné sur ces abstractions pour établir des relations entre les objets. L'efficacité de la démarche est facilement illustrable par des exemples issus de la vie courante, par des exemples historiques : comment les Anciens ont déterminé le rayon de la Terre, celui de la Lune, la distance Terre-Lune, Terre-Soleil, leurs réussites, leurs échecs.

On peut montrer aussi comment une intuition commune peut être un obstacle à la mise en place d'un modèle adéquat : Archimède a bien refusé le modèle selon lequel la Terre tourne autour du Soleil.

Le calcul des probabilités est un modèle simple qui permet de rendre compte d'une réalité complexe. On met en place des axiomes, on fait des observations, on montre (ou l'on suggère selon les cas) comment un théorème rend compte d'une réalité observable : la convergence en probabilité, le théorème central limite. Là aussi, la dimension historique est à présenter, du chevalier de Méré à Mendel, donc des jeux aux lois de l'hérédité.

En terminale, en lien avec la philosophie, il est possible d'aller plus loin.

De montrer par exemple, à l'aide de contradictions simples, que le concept d'ensemble n'est pas un concept premier, qu'il doit être exploité à l'aide d'axiomes sans toutefois aller jusqu'à développer l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel.

2.2.3. Des éléments de vulgarisation

Il est très difficile de vulgariser des champs mathématiques récents. Il est toutefois possible de parler d'un certain nombre de problèmes ayant un fondement historique : théorème de Fermat, résolution des équations algébriques par radicaux, quadrature du cercle, espace euclidien à n dimensions, géométries non euclidiennes etc. À l'aide d'exemples pris dans l'histoire, on peut rendre compte des rapports complexes entre mathématiques et mathématiques appliquées. Des développements théoriques purement gratuits trouvent une application parfois très longtemps après leur apparition. Inversement, des notions mathématiques utilisées sans fondement théorique suscitent chez les théoriciens des réflexions, d'où il sort qu'elles trouvent un statut mathématique correct et sont l'occasion de nouveaux développements théoriques.

L'apparition de nouveaux outils de calcul modifie l'approche des mathématiques. De vieilles théories retrouvent une nouvelle jeunesse car les calculs deviennent faisables. Des développements nouveaux sont nécessaires pour utiliser les nouveaux monstres. L'essentiel est de montrer aux jeunes que la mathématique n'est pas une science figée, qu'elle évolue, que de nouveaux problèmes apparaissent.

2.2.4. Préparation aux techniques mathématiques utilisées en sciences humaines et en économie

Ce point peut faire l'objet d'un développement important, au moins en option dans un certain nombre de filières non scientifiques. S'il est difficile à un élève de ces sections de faire des études d'économie mathématique, il est parfaitement possible de présenter des thèmes d'étude qui prépareront à la manipulation des objets mathématiques utiles dans ces sciences : économie d'abord et donc gestion, mais aussi sociologie, psychologie, géographie, voire histoire.

Le premier chapitre à étudier est celui des fonctions avec les quatre fonctions de base – linéaire, exponentielle, logarithme, puissance – utilisées dans de nombreux modèles : croissance à taux constant, fonction prix-demande, phénomène de saturation des marchés, etc.

Le second est l'étude graphique des fonctions empiriques les plus couramment utilisées : croissance, décroissance, extréma, limites (surtout infinies), continuité, notion de dérivée liée au taux d'accroissement. Par contre, l'intérêt d'études classiques de fonctions données par une expression algébrique plus ou moins farfelue est très limité. Sur le même registre, les suites arithmétiques et géométriques sont à étudier.

Le second chapitre doit préparer les futurs étudiants à bien comprendre l'algèbre linéaire et la statistique descriptive multidimensionnelle. Pour cela, il faut saisir intuitivement la notion d'espace vectoriel, de sous-espace vectoriel, d'espace euclidien à k dimensions. La difficulté conceptuelle lors des études supérieures de toute nature (université, BTS, IUT) est réelle. L'étude de la géométrie dans l'espace est l'outil privilégié pour cette initiation : notion de droite, de plan, intersection, parallélisme, orthogonalité, projection orthogonale. Voir dans l'espace est un atout important pour comprendre l'algèbre linéaire.

Un troisième chapitre est l'étude du calcul des probabilités qu'il ne faut pas lier systématiquement à l'analyse combinatoire. Ces deux parties des mathématiques ont leurs difficultés propres. À les étudier ensemble on rend l'accès aux probabilités difficiles. Successivement, au fil des années, il est possible d'introduire dans le cas fini uniquement les notions d'espace probabilisé, de variable aléatoire, d'espérance, de variance, d'indépendance et peut-être en travaux dirigés de démontrer la loi des grands nombres.

Certaines techniques mathématiques utilisées en statistiques, en gestion, ont des bases théoriques très simples, mais nécessitent des calculs longs qui dans tous les cas pratiques se font sur ordinateur. Elles ont un intérêt pratique considérable et il est facile sur des exemples simples mais artificiels de montrer comment cela fonctionne. Ainsi en est-il de la classification automatique, de l'utilisation des graphes pour trouver un chemin de longueur minimale, etc.

2.3. CATALOGUE POUR CHOISIR DES CURRICULA

2.3.1. Quelques points d'histoire

- La première démonstration : les lunules d'Anstarque
- Démontrer le théorème de Pythagore (ou celui de Thalès)
- La quadrature du cercle
- Le postulat d'Euclide
- Le théorème de Fermat
- L'abstraction : appeler x l'inconnu
- La recherche des décimales de π
- Calcul des dimensions de l'univers.

2.3.2. L'analyse

- Les fonctions de base
- Etudes graphiques des fonctions empiriques
- Notion de continuité, de dérivée
- Présentation de fonctions utilisées pour décrire les phénomènes économiques.

2.3.3. Géométrie

- Comment représenter l'espace : la méthode axiomatique depuis Euclide jusqu'à Hilbert en passant par Lobatchevsky
- La géométrie dans l'espace : droites, plans, relations d'incidence, parallélisme, orthogonalité, projection, notion d'angle.

2.3.4. Statistique descriptive

- En lien avec la géométrie : notion de moyenne, d'écart type, de coefficient de corrélation
- Rapport entre indicateur et réalité à décrire ou action à mener, introduction de la médiane, du mode, pertinence des regroupements en classe
- Exemple de classification automatique.

2.3.5. Calcul des probabilités

- Un modèle simple dans le cas fini : l'espace probabilisé
- Dépendance, indépendance
- Notion de variable aléatoire, l'espérance, la variance en lien avec la statistique descriptive
- La loi des grands nombres
- Acquisition d'une sensibilité au hasard.

2.3.6. Problèmes plaisants et délectables

- Graphes : combien de temps pour construire la maison
- Astronomie : Lune, le Zodiaque
- Arithmétique : corrige ton erreur
- Fractale : la longueur de la côte est infinie.

2.4. QUE CHOISIR ?

Dans la liste précédente, il faut bien sûr choisir. Il est hors de question sur un cursus de trois années de traiter l'intégralité du catalogue. L'idéal serait de décider en fonction de l'orientation future de l'élève, et alors de lui donner ce dont il a besoin et ce qu'il peut assimiler. Mais ce qui convient à celui qui fait le programme ne contente pas l'élève qui construit peu à peu son projet professionnel. Pour certains, un programme se réduisant aux mathématiques du citoyen et à quelques vulgarisations serait suffisant. À l'opposé, ceux qui sont attirés par l'économie devraient avoir quatre à cinq heures de mathématiques et un programme conséquent axé sur la géométrie dans l'espace, l'analyse, la statistique descriptive, le calcul des probabilités. Pour ceux attirés par les sciences humaines, une réflexion en lien avec la philosophie est intéressante ainsi qu'à un niveau moins élevé, le calcul des probabilités, la statistique descriptive plus les aspects historiques et quelques problèmes plaisants et délectables.

Comme il n'est pas possible ni souhaitable de trop spécialiser, des choix sont nécessaires. Ils dépendent du parti pris des concepteurs de programmes. Qu'ils se rassurent, un élève bien formé peut vite rattraper.

3 COMMENTAIRES GÉNÉRAUX POUR LE SECOND CYCLE

La Collection Inter-Africaine de Mathématiques (C.I.A.M.) est l'aboutissement d'une volonté, déjà ancienne, des pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien de mettre en place un cadre commun pour Harmoniser les Programmes de Mathématiques (H.P.M.) et leur enseignement.

Cette harmonisation vise essentiellement à améliorer la qualité de l'enseignement, à le rendre accessible à un plus grand nombre d'élèves et à prendre en compte les résultats des dernières recherches en didactique des mathématiques. Elle a, dans un premier temps, débouché sur une rénovation des programmes et des méthodes. Elle s'est par la suite accompagnée d'une formation adéquate des professeurs puis concrétisée par la rédaction de manuels-élève, au coût réduit, et de guides pédagogiques, à l'usage exclusif des professeurs.

Les contenus des manuels du second cycle littéraire peuvent être couverts en **25 semaines**, si les volumes horaires suivants sont retenus :

Classe	2 ^{de} L	1 ^{re} L	T L ₁ Économique	T L ₂ Littéraire	T L ₃ Beaux arts
Horaire hebdomadaire	3 h	3 h	4 h	3 h	3 h
Total	75 h	75 h	100 h	75 h	75 h

À noter que tous les livres ont un index et que ceux de terminales se terminent par un chapitre « Problèmes de synthèse », dont la plupart sont extraits des différents baccalauréats africains.

3.1. Options académiques

Le choix des contenus tient compte des objectifs suivants :

- l'aptitude à mathématiser un problème ;
- les approches numériques qui facilitent la compréhension de certaines notions mathématiques ;
- les activités graphiques qui développent les qualités de soin et de précision, et permettent une interprétation de nombreux phénomènes scientifiques (mathématique, physique, économique) ou sociaux.

Le programme s'articule autour de quatre rubriques :

- activités numériques ;
- calcul littéral ;
- fonctions numériques ;
- organisation des données.

Activités numériques

Le programme offre l'occasion de contrôler / développer les aptitudes des élèves aux techniques de calculs, d'encadrement et d'approximations.

Calcul littéral

Cette rubrique vise autant la maîtrise d'une (relative) virtuosité dans certains calculs sur les polynômes (développement, réduction, factorisation) et les fractions rationnelles, que celle des différentes méthodes de résolution des équations et inéquations, des systèmes d'équations ou d'inéquations.

La résolution de problèmes concrets, qui permet de donner du sens à des techniques abstraites, reste (au moment de la mise en équation) un exercice difficile pour l'élève.

Fonctions numériques

Les notions de fonction, d'ensemble de définition et de représentation graphique sont des thèmes nouveaux et délicats, promis à un grand avenir dans les classes ultérieures !

Ici encore, un support concret est privilégié, tant au niveau de la découverte des concepts que de leur exploitation : les représentations graphiques.

Organisation des données

Les statistiques jouent un rôle important comme outil d'aide à la prise de décision dans un contexte donné. Il est cependant important de savoir qu'à chaque étape du traitement allant de données obser-

vées à des conclusions statistiques, un gain en signification a pour prix la perte d'une partie des informations. Le meilleur moyen pour les élèves de s'en convaincre est d'avoir eu l'occasion de mener, au moins une fois, une étude statistique complète, c'est-à-dire allant du relevé de données à l'élaboration d'une réponse à une question posée au départ.

3.2. Options pédagogiques

Utilisation de la calculatrice

La calculatrice est un outil qui, avec ou sans instructions officielles, connaît une large diffusion. Il est de l'intérêt des enseignants d'en tenir compte. S'il ne peut être encore question, vu les coûts, d'imposer son usage par des mentions dans les programmes officiels, les manuels-élève recensent les points de programmes ou les activités motivant son emploi et favorisant chez l'élève l'habitude d'une utilisation intelligente.

Apprentissage du raisonnement

- Les démonstrations de certaines propriétés et les résolutions d'exercices permettent de dégager de nombreuses **méthodes** qui enrichissent la boîte à outils de l'élève. Ces points méthodes sont repérés par l'avertisseur **M**.
- Les éléments de **logique** (notion de proposition, connecteurs, quantificateurs, méthodes de raisonnement : contraposition, absurde, récurrence) ne font pas l'objet d'un cours, mais sont introduits et réinvestis chaque fois que le besoin s'en fait sentir. La rubrique **L** a été créée à cet effet.
- Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes. Pour répondre à cette nécessité, des **travaux dirigés** sont proposés en fin de leçon. Outre un renforcement de l'apprentissage du raisonnement, ces travaux dirigés constituent soit un inventaire des exercices types de la leçon, soit un prolongement non exigible à certaines notions, soit encore une ouverture interdisciplinaire. Lorsqu'ils semblent un peu difficiles et montrent une propriété intéressante ou un type de raisonnement inédit, les solutions sont intégralement données ; sinon les solutions sont guidées par un questionnement.

3.3. Aspects culturels

Les notes historiques

Traitant d'événements ou de mathématiciens qui ont marqué l'évolution des mathématiques, les notes historiques doivent convaincre les élèves que les mathématiques se sont construites peu à peu, à travers recherches, tâtonnements et découvertes, et leur permettre de prendre contact avec quelques problèmes célèbres.

Contextualisation des contenus

Autant que faire se peut, les auteurs ont voulu prendre en compte l'environnement socioculturel africain, aussi bien pour lutter contre le désintérêt des élèves pour une discipline réputée importée, que pour les convaincre que cette réputation est fallacieuse (il y a des mathématiques dans la vie de l'Africain, comme dans celle de l'Indien ou de l'Asiatique) et leur donner le goût d'œuvrer au développement de leur continent.

Les informations scientifiques

Il s'agit cette fois de convaincre les élèves et, si besoin est, leurs professeurs que les mathématiques sont en constante évolution, comme de rester en contact avec quelques récentes découvertes (rôle croissant, en particulier, de l'informatique).

3.4. Utilisation du manuel

Le manuel n'est pas un livre saint, mais un outil pédagogique précieux comme le tableau ou le rétroprojecteur, au service du professeur et de l'élève. En plus de ses fonctions classiques d'aide aux préparations de cours et de recueil d'exercices, il a de nombreuses autres fonctions avant, pendant et après le cours qu'il convient de préciser ici.

Utilisation du manuel	Le professeur	L'élève
<i>avant le cours</i>	• lit le programme • lit les instructions officielles • étudie la traduction des contenus du programme dans le manuel • choisit, en relation avec le manuel : – la présentation d'une notion – des démarches – des motivations – des activités – des traces écrites – des exercices à traiter en classe ou à la maison • repère les points précis d'utilisation du manuel pendant le cours	• apprend la leçon précédente sur son livre et son cahier • prépare sur le cahier de recherche un tableau, une activité du livre, une figure, un organigramme, un exercice • étudie les pages de révisions
<i>pendant le cours</i>	• fait analyser, commenter, identifier des planches, des tableaux, des figures, des textes du manuel • fait reconnaître une démarche, une construction, une démonstration déjà vue par l'élève • fait lire une définition, une propriété • fait critiquer cette lecture par la classe • fait reconnaître, rechercher dans le livre, recopier sur le cahier de cours : – des définitions ou propriétés – des notations de symboles, des figures, des schémas • fait analyser des énoncés d'exercices	• utilise le manuel selon les indications du professeur • exploite oralement ou sur le cahier de recherche des planches, des tableaux, des figures, des textes du manuel • recherche dans le manuel (utilisation de l'index, du sommaire) des définitions, propriétés, symboles, figures, schémas • analyse oralement des énoncés d'exercices • traite les exercices sur le cahier de recherche
<i>après le cours</i>		• relit le cours sur le cahier, le livre • traite les exercices

Il faut apprendre à l'élève à se servir du manuel où il trouvera les résultats essentiels, les méthodes de résolution de certains types de problèmes, des exercices d'entraînement et d'approfondissement qui lui permettront de contrôler ses acquis et de s'initier à la recherche.

Avant de proposer des exercices ou des travaux aux élèves, le professeur devra se poser les questions suivantes :

- font-ils partie des capacités requises dans cette classe ?
- constituent-ils des activités possibles en classe ou faut-il les réserver pour le travail à la maison ?
- leur contexte mathématique est-il compréhensible par un élève de ce niveau ?
- leur résolution relève-t-elle de l'entraînement, de l'approfondissement ? a-t-elle valeur de méthode ?

4 COMMENTAIRES SPÉCIFIQUES À LA CLASSE DE TERMINALE LITTÉRAIRE

La classe de terminale littéraire assure à la fois une continuité avec la classe de première littéraire et une préparation à l'examen du baccalauréat.

4.1. Activités des élèves

Il est très important de mettre l'élève en activité, car selon la formule bien dite de Vergnaud, l'action est source et critère de savoir.

En continuité avec les classes précédentes, on a voulu :

- faire précéder chaque notion ou propriété par une ou plusieurs activités de motivation ;
- mettre l'accent sur le raisonnement par la pratique des travaux dirigés ;
- proposer des problèmes concrets et leurs solutions complètes.

4.2. Présentation du manuel

Organisation des chapitres

Chaque chapitre est découpé en leçons, chaque leçon en paragraphes, et chaque paragraphe en sous-paragraphes.

Les leçons se terminent par des exercices de fixation des savoirs et les chapitres par des exercices d'entraînement et d'approfondissement, classés par thème.

Proposition de progression

3 heures hebdomadaires.

Semaine	Chapitres	Horaire
2	Entiers naturels	6 h
3	Fonctions	9 h
3	Fonctions polynômes, fonctions rationnelles	9 h
3	Fonctions logarithme et exponentielle	9 h
3	Équations, inéquations, systèmes	9 h
3	Suites numériques	9 h
4	Statistique	12 h
4	Probabilités	12 h
25	Total	75 h

4.3. Points méthodes

On relève dans le manuel de terminale littéraire les points méthodes suivants :

Chapitres	Points méthodes	Pages
1. Entiers naturels	Représenter un nombre dans le système de numération égyptienne	7
2. Fonctions	Justifier qu'une droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie d'une courbe	16
2. Fonctions	Justifier qu'un point est un centre de symétrie d'une courbe	17
2. Fonctions	Calculer la limite en x_0 d'une fonction du type $\frac{f}{g}$	23
3. Fonctions polynômes, fonctions rationnelles	Étudier la position relative de deux courbes dont on connaît des équations	37

Chapitres	Points méthodes	Pages
4. Fonctions logarithme et exponentielle	Résoudre une équation comportant des logarithmes	62
6. Suites numériques	Étudier le sens de variation d'une suite définie par une formule explicite	96
7. Statistique	Calculer la moyenne d'une série statistique à caractère quantitatif discret	111
7. Statistique	Calculer la moyenne d'une série statistique à caractère quantitatif continu	111
7. Statistique	Calculer la médiane d'une série statistique à caractère quantitatif discret	112
7. Statistique	Calculer la médiane d'une série statistique à caractère quantitatif continu	112
7. Statistique	Déterminer, par la méthode de Mayer, la droite d'ajustement d'un nuage	117
8. Probabilités	Utiliser, en probabilité, un tableau à double entrée	135
8. Probabilités	Calculer la probabilité d'un événement défini par la locution « au moins un »	136
8. Probabilités	Faire des tirages	136

4.4. Travaux dirigés

4.4.1. Objectifs généraux

- apprendre à chercher,
- faire fonctionner un outil,
- dégager des méthodes,
- donner un prolongement (non exigible) à certaines notions.

Apprendre à chercher

L'élève suit généralement deux étapes : la lecture de l'énoncé et la recherche d'une démarche.

Lecture de l'énoncé

Faite avec attention, elle permet à l'élève de bien distinguer :

- les données et contraintes (ce que l'on sait),
- les conclusions (ce que l'on cherche).

Recherche d'une démarche

L'élève dispose de connaissances minimales (définitions, propriétés). Il doit faire l'inventaire de celles qui ont un rapport avec les objets mathématiques entrant en jeu et sélectionner les plus opérationnelles.

Pour certains types de problèmes, la démarche est plus élaborée et donne lieu à des points méthodes :

- les problèmes de lieux,
- les problèmes de construction,
- les problèmes conduisant à une équation ou à une inéquation.

Les problèmes de modélisation et les problèmes ouverts sont des cadres appropriés pour mettre un élève en situation de recherche.

Exemple

- Nombre de pages d'une encyclopédie (page 11).

Faire fonctionner un outil

Il s'agit d'outils déjà formalisés dans le cours :

- propriétés,
- méthodes de résolution de problèmes,
- principes de démonstrations : utilisation d'un contre-exemple, raisonnement par l'absurde, implication, contraposition, équivalence.

Exemples

- Divisibilité par 2 et par 9 (page 10).
- Calcul de limites (page 101).

Dégager des méthodes

Certains travaux dirigés permettent de rappeler ou de mettre en place des points méthodes.

Exemples

- Utilisation d'un tableau (page 135).
- Tirages (pages 136).

Donner un prolongement à certaines notions

Certains travaux dirigés permettent de démontrer un résultat connu ou de donner un prolongement à une notion.

Exemple

- Écriture décimale illimitée (page 101).

4.4.2. Conduite d'une séance de travaux dirigés

Choix d'un problème

- Le professeur propose le travail dirigé adapté à l'objectif qu'il veut atteindre.
- Il précise alors aux élèves le temps de recherche, qui peut varier d'un travail dirigé à l'autre suivant la longueur ou la difficulté du problème.

Gestion de la classe

Après la phase de recherche, le professeur organise dans la classe un débat :

- les élèves sont invités à communiquer leurs idées, à partir desquelles on essaie de trouver une solution ;
- s'il n'y a aucune piste sérieuse, le professeur donne une, deux ou plusieurs indications suivant la réaction des élèves.

Rédaction d'une solution

Lorsqu'on a trouvé une solution, le professeur demande aux élèves de la rédiger.

Rédiger, en mathématique, c'est mettre en évidence les grandes lignes et les articulations du raisonnement. Si cela s'est fait souvent à l'aide d'un schéma ou d'un organigramme au premier cycle, l'accent sera mis au second cycle sur une rédaction en français. En effet, c'est d'après ses rapports et ses projets que l'élève, cadre de demain, sera jugé par ses collègues et ses supérieurs hiérarchiques. Le professeur lui apprendra donc à être précis, concis et clair.

1. Entiers naturels

(pages 5 à 14 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- présenter certaines propriétés classiques d'arithmétique ;
- initier l'élève au raisonnement par récurrence.

COMMENTAIRES

On s'appuiera sur l'histoire des nombres.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Systèmes de numération

- Bases.
- Numérations additive et positionnelle.

Divisibilité dans le système décimal

- Critères de divisibilité.
- Applications de la divisibilité dans $\mathbb{N}$.

Raisonnement par récurrence

savoir-faire

- Écrire un entier naturel dans une autre base que 10, en particulier en base 2.
- Écrire un nombre d'une base a ($a \neq 10$) à la base 10.

- Utiliser les critères de divisibilité en base 10.
- Utiliser les critères de divisibilité pour :
 - simplifier des fractions ;
 - résoudre des problèmes concrets.

- Résoudre des problèmes simples utilisant le raisonnement par récurrence.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 8

$x = 100111$.

♦ Exercice 1.b p. 8

1011100.

♦ Exercice 2.a p. 11

$(5,0) ; (4,1) ; (3,2) ; (2,3) ; (1,4)$

$(0,5) ; (8,6) ; (7,7) ; (6,8) ; (5,9)$.

♦ Exercice 3.a p. 12

Soit $p(n)$ la proposition : « $2^n > n$ ».

- On a : $2 > 1$; donc $p(1)$ est vraie.
- Soit k un entier naturel non nul.

Si $p(k)$ est vraie, on a : $2^k > k$.

Multiplions chaque membre par 2 : $2^{k+1} > 2k$.

Or : $2k \geq k+1$. Donc : $2^{k+1} > k+1$; c'est-à-dire : $p(k+1)$ est vraie.

On en déduit que : pour tout entier naturel non nul n , $2^n > n$.

♦ Exercice 3.b p. 12

Soit $p(n)$ la proposition : « 3 divise $n^3 - n$ ».

♦ Exercice 1.c p. 8

3 h 45 min 15 s = 13 515 s.

♦ Exercice 1.d p. 8

19 820 = 5 h 30 min 20 s.

♦ Exercice 2.b p. 11

15 et 24.

• On a : 3 divise $1^3 - 1$; donc $p(1)$ est vraie.

• Soit k un entier naturel non nul.

Si $p(k)$ est vraie, on a : 3 divise $(k^3 - k)$.

On a : $(k+1)^3 - (k+1) = (k^3 - k) + 3k(k+1)$.

Or : 3 divise $(k^3 - k)$ et 3 divise $3k(k+1)$.

Donc : 3 divise $(k+1)^3 - (k+1)$; c'est-à-dire : $p(k+1)$ est vraie.

On en déduit que : pour tout entier naturel non nul n , 3 divise $n^3 - n$.

Exercices d'apprentissage

SYSTÈMES DE NUMÉRATION

♦ Exercice n° 1 p. 13



♦ Exercice n° 2 p. 13

$x = 21\ 210$.

♦ Exercice n° 3 p. 13

On a : $1\ 250\ 000 = 7 \times 20^4 + 16 \times 20^3 + 5 \times 20^2 + 0 \times 20^1 + 0 \times 20^0$.

On déduit, ci-contre, la représentation du nombre 1 250 000 dans le système de numération maya.

Notons zéro par un petit cercle.

••	20^4
≡	20^3
—	20^2
○	20^1
○	20^0

♦ Exercice n° 4 p. 13

$x = 7 \times 20^2 + 10 \times 20^1 + 3 \times 20^0 = 3\ 003$.

♦ Exercice n° 5 p. 13

Dans le système décimal, le nombre x s'écrit : $2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 55$.

On a : $55 = 2 \times 20^1 + 15 \times 20^0$.

On déduit, ci-contre, la représentation du nombre x dans le système de numération maya.

••	20^1
≡	20^0

♦ Exercice n° 6 p. 13

1. 74 est noté LXXIV ; 90 est noté XC ; 462 est noté CDLXII ; 900 est noté CM ; 2 059 est noté MMLIX.

2. XXI représente 21 ; IX représente 9 ; CXXXII représente 132 ; CD représente 400.

3. C'est le nombre 888 qui s'écrit : DCCCLXXXVIII.

DIVISIBILITÉ DANS LE SYSTÈME DÉCIMAL

♦ Exercice n° 7 p. 13

$(0,2)$; $(1,0)$; $(1,9)$; $(2,7)$; $(3,5)$; $(4,3)$; $(5,1)$; $(6,8)$; $(7,6)$; $(8,4)$; $(9,2)$.

♦ Exercice n° 8 p. 13

a) $x \in \{1, 4\}$

b) $x \in \{0, 6, 9\}$

c) $x \in \{0, 3, 9\}$.

♦ Exercice n° 9 p. 13

Soit $19ab$ l'année de naissance de Bouba.

Son âge est : $2003 - 19ab = 103 - 10a - b$.

On a : $103 - 10a - b = 3 \times (a + b + 10) = 3a + 3b + 30$.

$$\text{Donc : } \begin{cases} 13a + 4b = 73 \\ 0 \leq a \leq 9 \\ 0 \leq b \leq 9 \end{cases}.$$

On en déduit : $13a \leq 73$; donc : $a \leq 5$. Par élimination des cas, on trouve : $a = 5$ et $b = 2$.
Bouba est né en 1952 ; donc, il a 51 ans.

♦ Exercice n° 10 p. 13

1.

x	1	2	4	5
y	40	20	10	8

2. $x = 5$ et $y = 8$.

♦ Exercice n° 11 p. 13

On a : $1\,512 = 2^3 \times 3^3 \times 7$ et $3\,150 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$. Donc : $\text{PGCD}(1\,512, 3\,150) = 2 \times 3^2 \times 7 = 126$.
 $\frac{1\,512}{3\,150} = \frac{126 \times 12}{126 \times 25} = \frac{12}{25}$.

♦ Exercice n° 12 p. 13

1. On a : $2\,002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13$ et $2\,015 = 5 \times 13 \times 31$. Donc : $\text{PGCD}(2\,002, 2\,015) = 13$.
2. $\frac{2\,002}{2\,015} = \frac{13 \times 154}{13 \times 155} = \frac{154}{155}$.

♦ Exercice n° 13 p. 13

1. On a : $108 = 2^2 \times 3^3$ et $135 = 3^3 \times 5$. Donc : $\text{PGCD}(108, 135) = 3^3 = 27$.
2. a) Le nombre maximal de paquets est : 27.
b) Chaque paquet contient 4 billes rouges et 5 billes noires.

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

♦ Exercice n° 14 p. 13

Soit $p(n)$ la proposition : « $n^2 > 2n + 1$ ».

- On a : $3^2 > 2 \times 3 + 1$; donc $p(3)$ est vraie.
- Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Si $p(k)$ est vraie, on a : $k^2 > 2k + 1$.

Ajoutons $(2k + 1)$ à chaque membre de l'inégalité : $k^2 + 2k + 1 > 4k + 2$; c'est-à-dire : $(k + 1)^2 > 4k + 2$.

Or : $4k + 2 > 2(k + 1) + 1$, car $2k > 1$.

Donc : $(k + 1)^2 > 2(k + 1) + 1$; c'est-à-dire : $p(k + 1)$ est vraie.

On en déduit que : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $n^2 > 2n + 1$.

♦ Exercice n° 15 p. 13

Soit $p(n)$ la proposition : « $2^n \geq n^2$ ».

- On a : $2^4 = 4^2$; donc $p(4)$ est vraie.
- Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 4.

Si $p(k)$ est vraie, on a : $2^k \geq k^2$.

Multiplions chaque membre de l'inégalité par 2 : $2^{k+1} \geq 2k^2$.

Or : $2k^2 > (k + 1)^2$; en effet, pour $k \geq 4$, le polynôme de second degré $(k^2 - 2k - 1)$ est positif.

Donc : $2^{k+1} \geq (k + 1)^2$; c'est-à-dire : $p(k + 1)$ est vraie.

On en déduit que : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, $2^n \geq n^2$.

♦ Exercice n° 16 p. 13

Soit $p(n)$ la proposition : « $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

- On a : $1 = \frac{1(1+1)}{2}$; donc $p(1)$ est vraie.

- Soit k un entier naturel.

Si $p(k)$ est vraie, on a : $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

$$\text{Donc : } 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} ;$$

c'est-à-dire : $p(k + 1)$ est vraie.

On en déduit que : pour tout entier naturel n , $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

♦ Exercice n° 17 p. 13

Soit $p(n)$ la proposition : « $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

• On a : $1^2 = \frac{1 \times (1+1)(2 \times 1 + 1)}{6}$; donc $p(1)$ est vraie.

• Soit k un entier naturel.

Si $p(k)$ est vraie, on a : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Donc : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$;

c'est-à-dire : $p(k+1)$ est vraie.

On en déduit que : pour tout entier naturel n , $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

♦ Exercice n° 18 p. 13

On peut utiliser le résultat de l'exercice n° 16 : pour tout entier naturel n , $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

♦ Exercice n° 19 p. 13

La démonstration est identique à celle de l'exercice n° 17.

♦ Exercice n° 20 p. 13

Soit $p(n)$ la proposition : « $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n-1) \times n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ ».

• On a : $1 \times 2 = \frac{(2-1) \times 2 \times (2+1)}{3}$; donc $p(1)$ est vraie.

• Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si $p(k)$ est vraie, on a : $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (k-1) \times k = \frac{(k-1)k(k+1)}{3}$.

Donc : $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (k-1) \times k + k \times (k+1) = \frac{(k-1)k(k+1)}{3} + k \times (k+1) = \frac{(k-1)[k(k-1) + 3k]}{3}$
 $= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$;

c'est-à-dire : $p(k+1)$ est vraie.

On en déduit que : pour tout entier naturel n , $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n-1) \times n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

♦ Exercice n° 21 p. 14

Soit $p(n)$ la proposition : « 5 divise $n^5 - n$ ».

• On a : 5 divise $0 = 0^5 - 0$; donc $p(0)$ est vraie.

• Soit k un entier naturel.

Si $p(k)$ est vraie, on a : 5 divise $k^5 - k$.

On a : $(k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - (k+1) = (k^5 - k) + 5k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1)$;

Or : $\begin{cases} 5 \text{ divise } (k^5 - k) \\ 5 \text{ divise } 5k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1). \end{cases}$

Donc : 5 divise $(k+1)^5 - (k+1)$; c'est-à-dire : $p(k+1)$ est vraie.

On en déduit que : pour tout entier naturel n , 5 divise $n^5 - n$.

♦ Exercice n° 22 p. 14

La démonstration est identique à celle de l'exercice précédent.

♦ Exercice n° 23 p. 14

Soit $p(n)$ la proposition : « 6 divise $n(n^2 + 5)$ ».

• On a : 6 divise $0 = 0(0^2 + 5)$; donc $p(0)$ est vraie.

• Soit k un entier naturel. Si $p(k)$ est vraie, on a : 6 divise $k(k^2 + 5)$.

Or : $(k+1)[(k+1)^2 + 5] = k(k^2 + 5) + 3k(k+1) + 6$.

Donc : 6 divise $(k+1)[(k+1)^2 + 5]$; c'est-à-dire : $p(k+1)$ est vraie.

On en déduit que : pour tout entier naturel n , 6 divise $n(n^2 + 5)$.

♦ Exercice n° 24 p. 14

On doit démontrer que : pour tout entier naturel n , $n^5 - n$ est divisible par 30.

Il suffit de démontrer que : pour tout entier naturel n , $n^5 - n$ est divisible par 5 et par 6.

• Nous avons démontré à l'exercice n° 21 que : pour tout entier naturel n , $n^5 - n$ est divisible par 5.

• Démontrons que : pour tout entier naturel n , $n^5 - n$ est divisible par 6.

On a : pour tout n de $\mathbb{N}$, $n^5 - n = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$.

Or : le produit de deux entiers consécutifs est divisible par 2 ;

le produit de 3 entiers consécutifs est divisible par 3.

Donc : $(n - 1)n(n + 1)$ est divisible par 2×3 , c'est-à-dire 6.

□ Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n° 25 p. 14

$$1. \begin{cases} x = 49a \\ y = 49b \\ a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \\ \text{PGCD}(a, b) = 1. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} a + b = 8 \\ \text{PGCD}(a, b) = 1 ; \text{ donc : } \\ a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \text{ et } b = 7 \\ a = 3 \text{ et } b = 5 \\ a = 5 \text{ et } b = 3 \\ a = 7 \text{ et } b = 1. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x = 49 \text{ et } y = 343 \\ x = 147 \text{ et } y = 245 \\ x = 245 \text{ et } y = 147 \\ x = 343 \text{ et } y = 49. \end{cases}$$

♦ Exercice n° 26 p. 14

1. $\text{PGCD}(1\,631, 932) = 233$.

Le philatéliste pourra former au maximum 233 lots.

2. On a : $1\,631 = 7 \times 233$ et $932 = 4 \times 233$.

Chaque lot contient 7 timbres africains et 4 timbres européens.

♦ Exercice n° 27 p. 14

$$1. \text{PGCD}(175, 84) = 7. \quad 2. \begin{cases} a + b = 42 \\ a - b = 4 \end{cases} ; \text{ donc : } a = 23 \text{ et } b = 19. \quad 3. \begin{cases} x = 7a = 161 \\ y = 7b = 133 \end{cases}$$

♦ Exercice n° 28 p. 14

1. On a : $10\,780 = 2^2 \times 5 \times 7^2 \times 11$ et $3\,520 = 2^2 \times 5 \times 11$. $\text{PGCD}(10\,780, 3\,520) = 2^2 \times 5 \times 11 = 220$.

$$2. F = \frac{220 \times 16}{220 \times 49} = \frac{16}{49}.$$

3. $n = 4$.

4. $p = 4$ ou $p = -4$.

♦ Exercice n° 29 p. 14

$$1. \text{ On a : } \begin{cases} n = b^3 + 2b^2 + 5b + 4 \\ 2n = 2b^3 + 5b^2 + 4b + 1. \end{cases} \text{ On en déduit : } \begin{cases} b^2 - 6b - 7 = 0 \\ b \geq 2 \end{cases} . \text{ Donc : } b = 7 \text{ et } n = 480.$$

2. 480 est divisible par 3, mais pas par 9.

♦ Exercice n° 30 p. 14

Soit $E_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un ensemble de n éléments et $\mathcal{P}(E_n)$ l'ensemble des parties de E_n .

On doit démontrer la proposition $p(n)$: « si $\text{card } E_n = n$, alors $\text{card } \mathcal{P}(E_n) = 2^n$ ».

• On a : $E_0 = \emptyset$ et $\mathcal{P}(E_0) = \{\emptyset\}$. Donc : $\text{card } \mathcal{P}(E_0) = 1 = 2^0$; $p(0)$ est vraie.

• Soit k un entier naturel. Supposons $p(k)$ vraie : si $\text{card } E_k = k$, alors $\text{card } \mathcal{P}(E_k) = 2^k$.

On a : $E_{k+1} = E_k \cup \{a_{k+1}\}$, a_{k+1} étant distinct de chaque éléments de E_k .

L'ensemble des parties de E_{k+1} est constitué de toutes les parties de E_k (cela fait 2^k parties) et des parties de E_k auxquelles on a adjoint a_{k+1} (cela fait également 2^k parties).

Donc : $\text{card } \mathcal{P}(E_{k+1}) = 2^k + 2^k = 2 \times 2^k = 2^{k+1}$; c'est-à-dire : $p(k + 1)$ est vraie.

On en déduit que : tout ensemble de n éléments possède 2^n parties.

♦ Exercice n° 31 p. 14

Soit $p(n)$ la proposition : « si n tiroirs contiennent $(n + 1)$ objets, alors l'un d'entre eux contient au moins 2 objets ».

• Si 1 tiroir contient 2 objets, alors l'un d'entre eux (en fait l'unique tiroir) contient au moins 2 objets (en l'occurrence exactement 2) ; donc $p(1)$ est vraie.

• Supposons $p(k)$ vraie : si k tiroirs contiennent $(k + 1)$ objets, alors l'un d'entre eux contient au moins 2 objets.

On ajoute 1 tiroir aux k tiroirs précédents et 1 objet supplémentaire. L'objet supplémentaire peut être placé soit dans le tiroir supplémentaire, soit dans l'un des k tiroirs précédents.

Dans les deux cas, l'un des $(k + 1)$ tiroirs contient nécessairement au moins 2 objets ;

donc : $p(k + 1)$ est vraie.

On en déduit que le principe de Dirichlet est vrai.

2. Fonctions

(pages 15 à 34 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- consolider l'étude des limites ;
- introduire la notion de continuité ;
- compléter les propriétés de la dérivation.

COMMENTAIRES

Ce chapitre sera traité uniquement à l'aide d'exemples.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Généralités

- Parité.
- Éléments de symétrie :
 - axe de symétrie ;
 - centre de symétrie.

Notions de limite et de continuité

- Limite d'une fonction en l'infini.
- Limite d'une fonction en x_0 .
- Limite et opérations sur les fonctions.

Dérivation

- Calculs de dérivées.
- Applications de la dérivation :
 - dérivée et tangente ;
 - dérivée et sens de variation ;
 - dérivée et extremum.
- Dérivation et continuité.

savoir-faire

- Étudier la parité d'une fonction.
- Justifier qu'une droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie d'une courbe.
- Justifier qu'un point est un centre de symétrie d'une courbe.
- Étant données une partie de la représentation graphique d'une fonction et un élément de symétrie, compléter cette courbe.
- Calculer la limite en x_0 de fonctions simples.
- Calculer la limite en l'infini de fonctions polynômes.
- Calculer la limite en l'infini de fonctions rationnelles.
- Reconnaître, graphiquement, une situation de continuité ou de discontinuité d'une fonction.
- Déterminer la fonction dérivée d'une fonction.
- Déterminer une équation de la tangente en un point.
- Étudier le sens de variation d'une fonction.
- Déterminer les extremums d'une fonction.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 17

a) f est paire

c) f n'est ni paire, ni impaire

e) f est paire

b) f n'est ni paire, ni impaire

d) f est impaire

f) f est impaire.

♦ Exercice 1.b p. 17

a) $D_f = \mathbb{R}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(2-x) = x^2 - 5 = f(2+x)$.

Donc la droite (Δ) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C})$.

b) $D_f = \mathbb{R}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-1-x) = -x^2 + 2 = f(-1+x)$.

Donc la droite (Δ) d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C})$.

c) $D_f = \mathbb{R}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-2-x) = |x| = f(-2+x)$.

Donc la droite (Δ) d'équation $x = -2$ est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C})$.

d) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $1-x \in \mathbb{R} - \{1\}$ équivaut à $1+x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\text{et } f(1-x) = \frac{1}{x^2} = f(1+x).$$

Donc la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C})$.

♦ Exercice 1.c p. 17

a) $D_f = \mathbb{R}$.

$$\text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}, \frac{f(-1-x) + f(-1+x)}{2} = \frac{-x^3 + 1 + x^3 + 1}{2} = 1.$$

Donc le point $\Omega(-1; 1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

b) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $1-x \in \mathbb{R} - \{1\}$ équivaut à $1+x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

$$\text{et } f(1-x) = -\frac{1}{x} = -f(1+x).$$

$$\text{Donc : } \frac{f(1-x) + f(1+x)}{2} = 0.$$

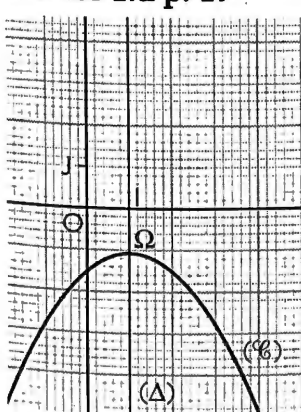
On en déduit que le point $\Omega(1; 0)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

$$\text{c) } \frac{f(1-x) + f(1+x)}{2} = -2.$$

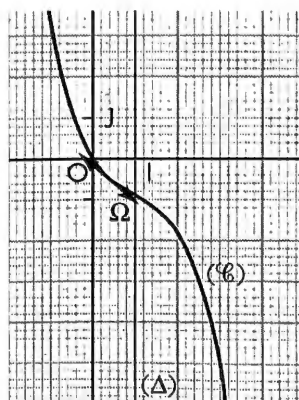
$$\text{d) } \frac{f(1-x) + f(1+x)}{2} = 2.$$

♦ Exercice 1.d p. 17

a)



b)



♦ Exercice 2.a p. 26

a) -1

b) -1.

♦ Exercice 2.b p. 26

a) $-\infty$; $+\infty$

b) $-\infty$; $+\infty$.

♦ Exercice 2.c p. 26

a) 6

b) $-\frac{1}{2}$

c) $+\infty$

d) $-\infty$.

♦ Exercice 2.d p. 26

a) $+\infty$; $+\infty$

b) $-\infty$; $+\infty$

c) 2 ; 2

d) 0 ; 0

e) $+\infty$; $-\infty$.

♦ Exercice 2.e p. 26

a) 1

b) $\sqrt{3}$

c) 1

d) $\frac{1}{2}$.

♦ Exercice 3.a p. 29

a) $D = \mathbb{R}$; $f'(x) = 1$

c) $D = \mathbb{R}$; $f'(x) = 2x + 3$

e) $D = \mathbb{R}$; $f'(x) = 9x^2 - 3$

b) $D = \mathbb{R}$; $f'(x) = -2$

d) $D = \mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2 + 6x$

f) $D = \mathbb{R}$; $f'(x) = 6x - 3x^2$.

♦ Exercice 3.b p. 29

a) $D = \mathbb{R} - \{2\}$; $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$

c) $D = \mathbb{R}^*$; $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$

e) $D = \mathbb{R} - \{2\}$; $f'(x) = 2 - \frac{1}{(x-2)^2}$

b) $D = \mathbb{R}^*$; $f'(x) = -\frac{5}{x^2}$

d) $D = \mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2 + 6x$

f) $D = \mathbb{R}^*$; $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

♦ Exercice 3.c p. 29

a) $D =]-1 ; +\infty[$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

b) $D =]-\infty ; \frac{1}{2}[$; $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

♦ Exercice 3.d p. 29

a) $y = x - 3$

b) $y = -5x - 4$

c) $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $y = -x$.

♦ Exercice 3.e p. 29

a)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$

c)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$		2		$+\infty$	2

e)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$		$+\infty$

b)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		1		$+\infty$

d)

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		4		0		$+\infty$

f)

x	$-\infty$				1		
$f'(x)$				-			
$f(x)$	$+\infty$						0

Exercices d'apprentissage

GÉNÉRALITÉS

♦ Exercice n° 1 p. 30

1. a) $D = [-4 ; 4]$ b) $D = [-2 ; 4]$

2. a) f est paire

c) f est paire et impaire

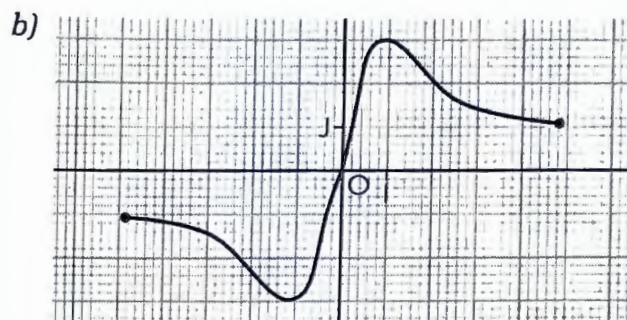
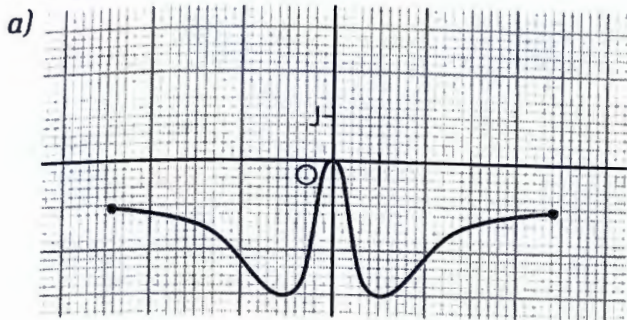
c) $D = [-3 ; 3]$

d) $D = [-4 ; 4]$.

b) f n'est ni paire, ni impaire

d) f est impaire.

♦ Exercice n° 2 p. 30



♦ Exercice n° 3 p. 30

a) f n'est ni paire, ni impaire

c) f est impaire

e) f est impaire

b) f est paire

d) f n'est ni paire, ni impaire

f) f est paire.

♦ Exercice n° 4 p. 30

a) Axe de symétrie : $(\mathcal{D}) : x = 2$

c) Centre de symétrie : $\Omega(-1 ; 1)$

e) Centre de symétrie : O

b) Centre de symétrie : $\Omega(-1 ; 1)$

d) Axe de symétrie : $(\mathcal{D}) : x = 1$

f) Axe de symétrie : (OJ) .

♦ Exercice n° 5 p. 30

a) $f(-2-x) = f(-2+x) = x^2 - 1$

c) $f(3-x) = f(3+x) = |x|$

b) $f(1-x) = f(1+x) = -x^2 + 4$

d) $f(-1-x) = f(-1+x) = \left| \frac{2}{x} \right|$.

♦ Exercice n° 6 p. 31

a) $f(-1-x) + f(-1+x) = \left(\frac{3}{x} + 3\right) + \left(\frac{-3}{x} + 3\right) = 6$

c) $f(-2-x) + f(-2+x) = \left(\frac{-4}{x} - 4 - x\right) + \left(\frac{4}{x} - 4 + x\right) = -8$

b) $f(1-x) + f(1+x) = (-x^3 + 1) + (x^3 + 1) = 2$

d) $f(1-x) + f(1+x) = \left(\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x}\right) + \left(\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2-x}\right) = 0$.

♦ Exercice n° 7 p. 31

$(\mathcal{D}) : x = -1$.

♦ Exercice n° 8 p. 31

$\Omega(1 ; -2)$.

NOTIONS DE LIMITE ET DE CONTINUITÉ

♦ Exercice n° 9 p. 31

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

♦ Exercice n° 10 p. 31

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{4}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{4}$

♦ Exercice n° 11 p. 31

a) -2 b) 0 c) -2 d) 5 e) -∞ f) +∞.

♦ Exercice n° 12 p. 31

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

♦ Exercice n° 13 p. 31

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$.

♦ Exercice n° 14 p. 31

a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$

♦ Exercice n° 15 p. 32

a) -∞ b) $\frac{100}{9}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

c) +∞ d) +∞.

♦ Exercice n° 16 p. 32

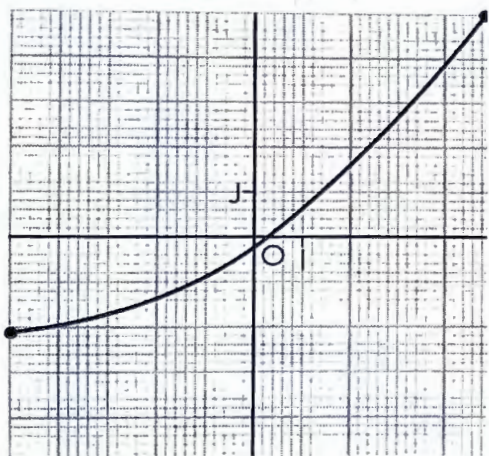
a) f est continue sur K.

c) O est un point de discontinuité.

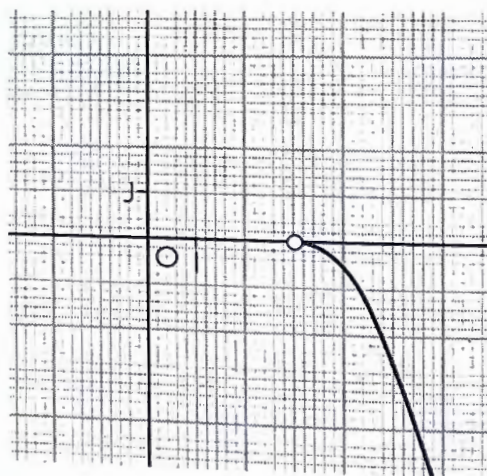
b) A(2 ; 1) est un point de discontinuité.

d) f est continue sur K.

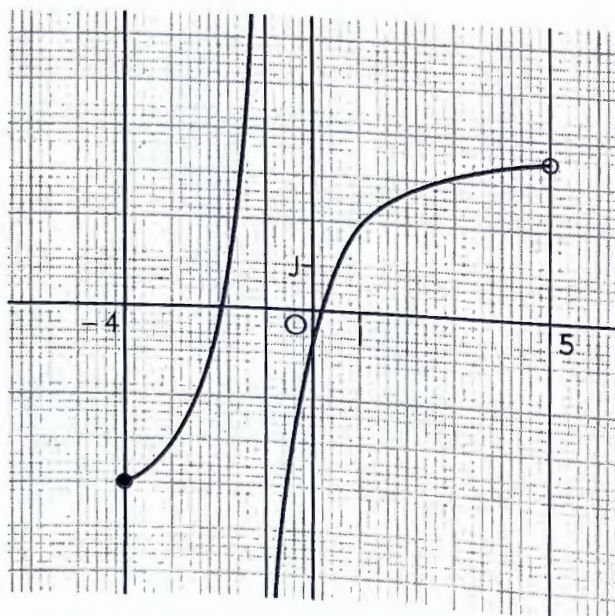
♦ Exercice n° 17 p. 32



♦ Exercice n° 18 p. 32



♦ Exercice n° 19 p. 32



DÉRIVATION

◆ Exercice n° 20 p. 32

a) $D = \mathbb{R} ; f'(x) = -2x + 4$

c) $D = \mathbb{R} ; f'(x) = -12x + 12$

e) $D = \mathbb{R} ; f'(x) = -3x^2 + 2x$

◆ Exercice n° 21 p. 32

a) $D =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[; f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2}$

c) $D =]-\infty ; -3[\cup]-3 ; +\infty[; f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 4}{(x+3)^2}$

e) $D =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[; f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

b) $D = \mathbb{R} ; f'(x) = 6x - 2$

d) $D = \mathbb{R} ; f'(x) = 3x^2 - 8x$

f) $D = \mathbb{R} ; f'(x) = 6x^2 + 6x - 8$

b) $D =]-\infty ; -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2} ; +\infty[; f'(x) = \frac{5}{(2x+3)^2}$

d) $D =]-\infty ; -4[\cup]-4 ; +\infty[; f'(x) = \frac{3x^2 + 24x - 4}{(x+4)^2}$

f) $D =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[; f'(x) = \frac{2x^2 - 8x - 1}{(x-2)^2}$

◆ Exercice n° 22 p. 32

a) $D = \mathbb{R} ; f'(x) = 6(2x - 1)^2$

b) $D =]-\infty ; \frac{5}{4}[; f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{5-4x}}$

◆ Exercice n° 23 p. 32

x	-7	-4	0	4
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	-1	1	-3	5

◆ Exercice n° 24 p. 33

a) Pour tout x de $[-2 ; 6]$, $f'(x) = 2(x - 2)$.

x	-2	2	6
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	12	-4	12

b) Pour tout x de $[-1 ; 4]$, $f'(x) = -2x + 3$.

x	-1	$\frac{3}{2}$	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-6	$\frac{1}{4}$	-6

c) Pour tout x de $[-1 ; 3]$, $f'(x) = 3x(x - 2)$.

x	-1	0	2	3
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	-1	3	-1	3

d) Pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = (x - 2)^2$.

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	-3		$+\infty$

◆ Exercice n° 25 p. 33

a) Pour tout x de $]-\infty ; \frac{3}{2}[$, $f'(x) = -\frac{1}{(2x-3)^2}$.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$-\infty$

b) Pour tout x de $]-2 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{9}{(x+2)^2}$.

x	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	4

c) Pour tout x de $]-1 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}$.

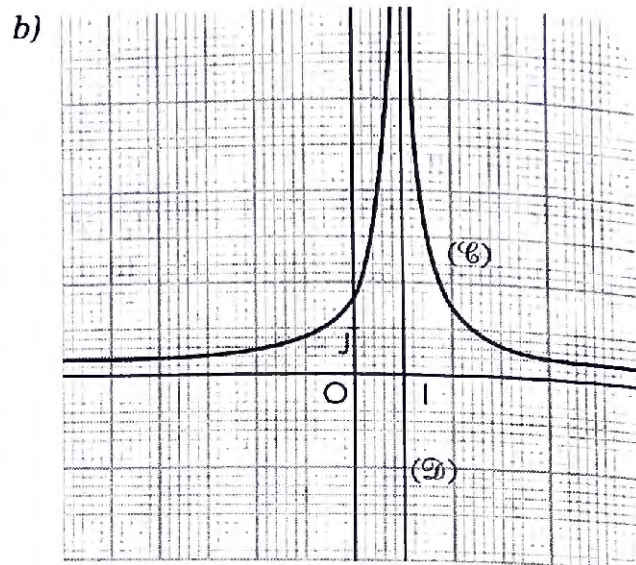
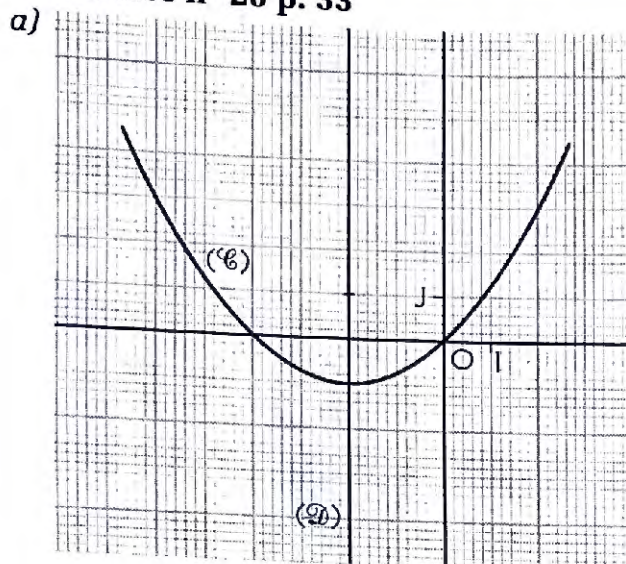
x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

d) Pour tout x de $]-\infty ; 0[$, $f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$.

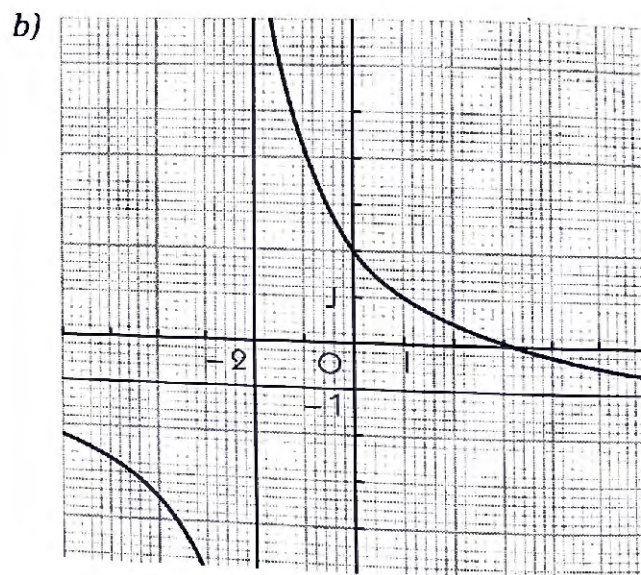
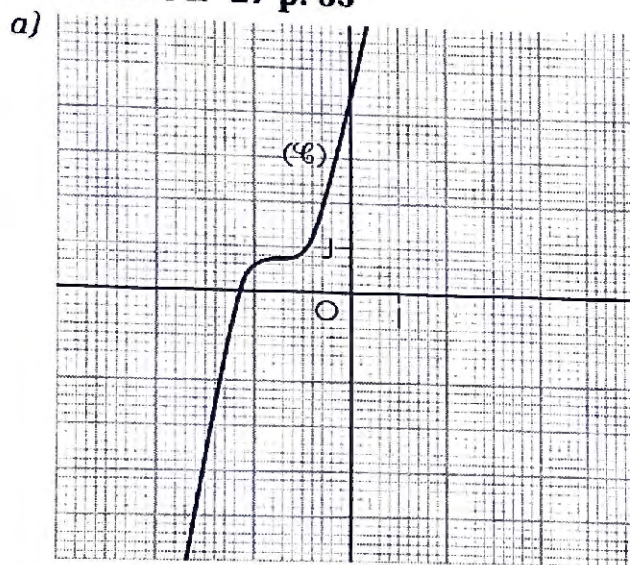
x	$-\infty$	-2	0
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	-5	$-\infty$

Exercices d'approfondissement

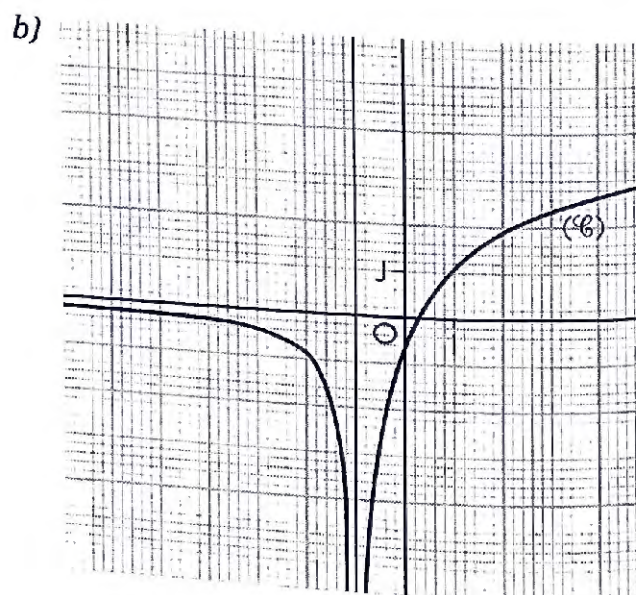
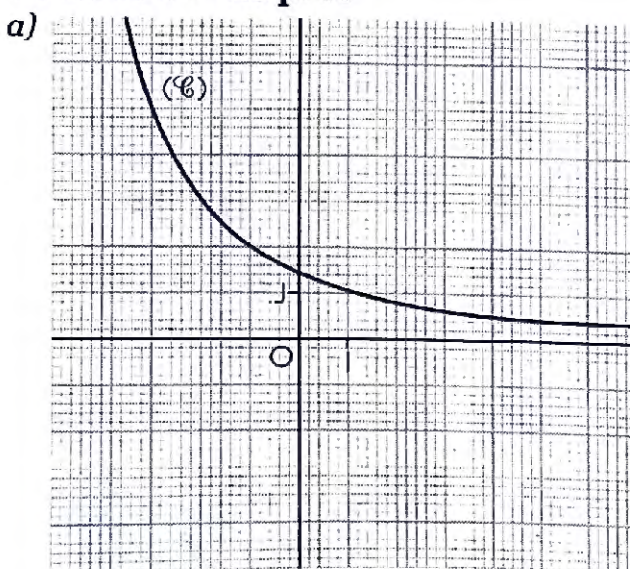
♦ Exercice n° 26 p. 33



♦ Exercice n° 27 p. 33



♦ Exercice n° 28 p. 33



♦ Exercice n° 29 p. 33

a) $g'(x) = \frac{18x}{9x^2 + 1}$

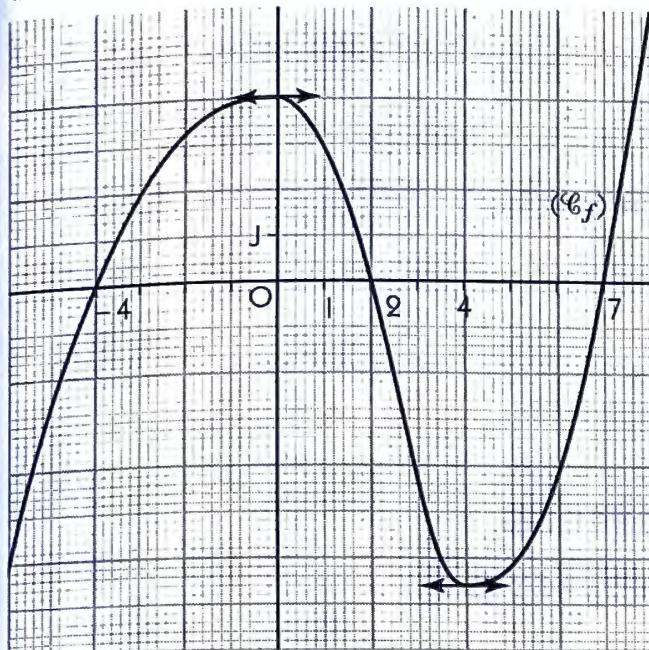
c) $g'(x) = \frac{8x - 16}{x^2 - 4x + 8}$

b) $g'(x) = \frac{8x}{4x^2 + 1}$

d) $g'(x) = \frac{2x - 8}{x^2 - 8x + 17}$

♦ Exercice n° 30 p. 33

3.



1. et 2.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	4	$-\frac{20}{3}$	$+\infty$	

4. $S =]-\infty ; -4[\cup]2 ; 7[.$

♦ Exercice n° 31 p. 33

1. et 2.

x	-2	-1	1	2	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	2	-2	2	-2	

3. a) Pour tout x de $[-2 ; 2]$, $f'(x) = 3ax^2 + b$.

b) $f(-1) = -a - b$;

$f(1) = a + b$;

$f'(-1) = f'(1) = 3a + b$.

c) On a : $\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$.

On en déduit : $a = -1$ et $b = 3$; donc : $f(x) = -x^3 + 3x$.

♦ Exercice n° 32 p. 34

1. $s : \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = y \end{cases}$.

2. a) On a : $\begin{cases} x = -x' + 2 \\ y = y' \end{cases}$.

($\mathcal{C}$) a pour équation : $y = -x^2 + 2x + 3$.

Donc $s(\mathcal{C})$ a pour équation : $y' = -(-x' + 2)^2 + 2(-x' + 2) + 3$; ou $s(\mathcal{C}) : y' = -x'^2 + 2x' + 3$.

b) On a : $s(\mathcal{C}) = (\mathcal{C})$; donc ($\mathcal{D}$) est un axe de symétrie de ($\mathcal{C}$).

♦ Exercice n° 33 p. 34

1. $s : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y - 2 \end{cases}$.

2. a) On a : $\begin{cases} x = -x' \\ y = -y' - 2 \end{cases}$.

($\mathcal{C}$) a pour équation : $y = x^3 - 4x - 1$.

Donc, $s(\mathcal{C})$ a pour équation : $-y' - 2 = -x'^3 + 4x' - 1$; ou $s(\mathcal{C}) : y' = x'^3 - 4x' - 1$.

b) On a : $s(\mathcal{C}) = (\mathcal{C})$; donc Ω est un centre de symétrie de ($\mathcal{C}$).

♦ Exercice n° 34 p. 34

1. $D_f =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +2[\cup]2 ; +\infty[.$

2. On peut conjecturer que f est une fonction paire.

3. a) On peut faire les conjectures suivantes :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

b)

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+ 0 -		-
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$		↘ $-\frac{1}{2}$ ↗ $+\infty$		↘ 0

3. Fonctions polynômes Fonctions rationnelles

(pages 35 à 56 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- étudier, sur des exemples, certaines fonctions polynômes de degré 3 ou de degré 4 ;
- étudier, sur des exemples, des fonctions rationnelles du type

$$x \mapsto \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'} \text{ ou du type } x \mapsto \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} ;$$

- résoudre des problèmes conduisant à une fonction polynôme ou à une fonction rationnelle.

COMMENTAIRES

Ce chapitre sera traité essentiellement à l'aide d'exemples.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Fonctions polynômes

Fonctions rationnelles

- Notion d'asymptote :
 - asymptote parallèle aux axes ;
 - asymptote oblique.

- Fonctions du type $x \mapsto \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$.
- Fonctions du type $x \mapsto \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$.

Résolution de problèmes

savoir-faire

- Étudier la position relative de deux courbes dont on connaît les équations.
- Construire la représentation graphique de certaines fonctions polynômes de degré 3 ou 4.
- Reconnaître une fonction rationnelle.
- Donner différentes écritures d'une fonction rationnelle.
- Justifier qu'une droite donnée est asymptote à la représentation graphique d'une fonction.
- Construire la représentation graphique d'une fonction du type $x \mapsto \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$,
ou du type $x \mapsto \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$.
- Résoudre un problème conduisant à une fonction polynôme.
- Résoudre un problème conduisant à une fonction rationnelle.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

◆ Exercice 1.a p.40

1. a) Pour tout x de $[-2 ; 2]$, $f'(x) = 3x^2 + 3$.
Donc, f est strictement croissante sur $[-2 ; 2]$.

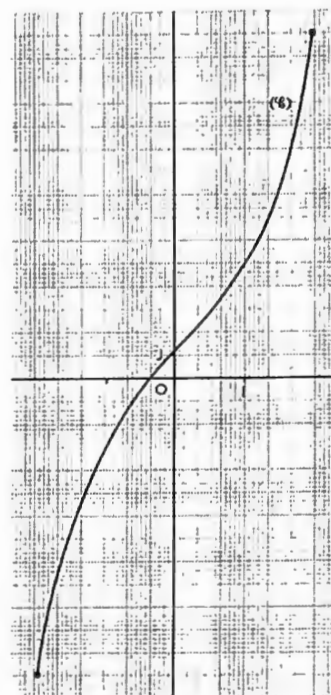
b)

x	-2	2
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-13	15

2. a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-13	-3	1	5	15

b) Voir courbe ci-contre.



◆ Exercice 1.b p.40

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et
 $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$.

Donc, f est une fonction paire.
L'ensemble d'étude est $[0 ; +\infty[$.

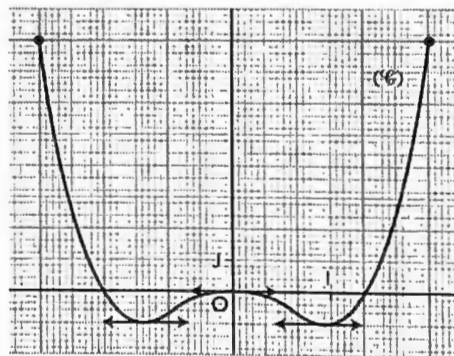
2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = 4x(x+1)(x-1)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

4. Table de valeurs

x	0	1	2
$f(x)$	0	-1	8



◆ Exercice 1.c p.40

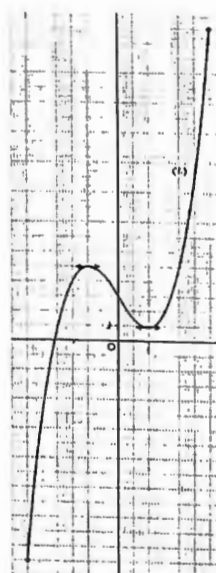
1. Pour tout x de $[-3 ; 3]$, $f'(x) = 3(x+1)(x-1)$.

x	-3	-1	1	3
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	-15	5	1	21

2. a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-15	1	5	3	1	5	21

b) Voir courbe ci-contre.



◆ Exercice 1.d p.40

1. f est une fonction paire.

a) L'ensemble d'étude est $[0 ; 1]$.

Pour tout x de $[0 ; 1]$, $f'(x) = 4x(x^2 + 1)$.

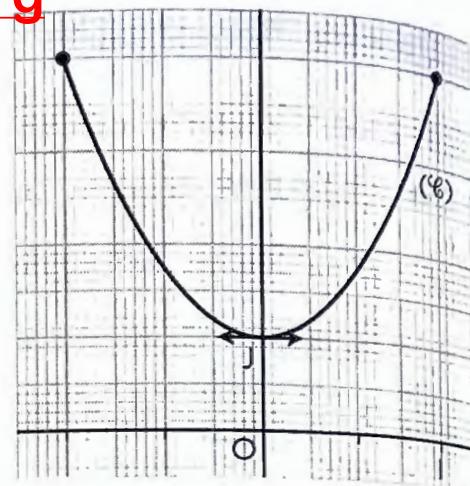
Donc, f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

b)

x	0	1
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	1	4

2. On construit la représentation graphique de f sur $[0 ; 1]$.

On complète, en faisant la symétrie orthogonale par rapport à (OJ) .



◆ Exercice 2.a p.47

1. a) $D_f =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$.

2. a) Pour tout x de D_f , $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$.

Donc, f est strictement croissante sur $]-\infty ; 2[$ et $]2 ; +\infty[$.

b)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

3. Pour tout x de D_f , $f(x) - (x-1) = -\frac{1}{x-2}$.

a) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$;

donc, la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) Pour tout x de $]-\infty ; 2[$, $f(x) - (x-1) > 0$;

pour tout x de $]2 ; +\infty[$, $f(x) - (x-1) < 0$.

Donc : sur $]-\infty ; 2[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$;

sur $]2 ; +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$.

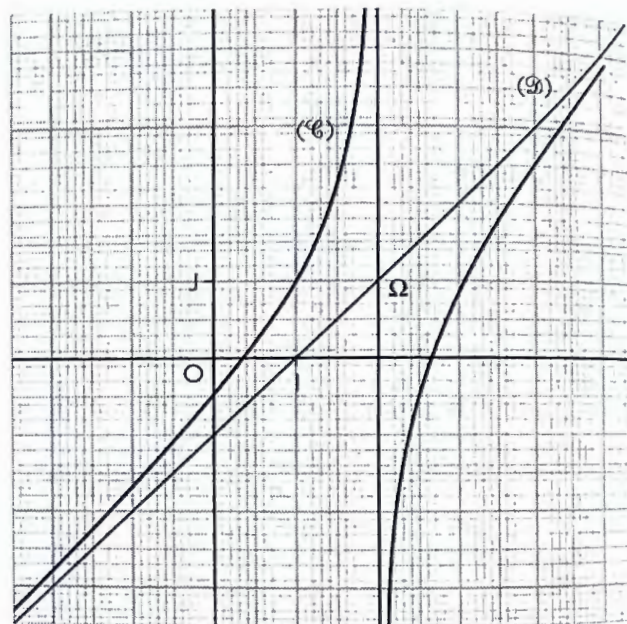
4. a) Pour tout x réel, $2-x \in D_f$ équivaut à $2+x \in D_f$.

$f(2-x) + f(2+x) = (1-x + \frac{1}{x}) + (1+x - \frac{1}{x}) = 2$.

Donc, $\Omega(2 ; 1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

Table de valeurs

x	-2	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	4
$f(x)$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$



◆ Exercice 2.b p.47

1. a) $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

2. a) Pour tout x de D_f , $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

- f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et $]2; +\infty[$;
- f est strictement décroissante sur $]0; 1[$ et $]1; 2[$.

b)

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	4	$+\infty$	

3. a) Pour tout x de D_f , $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

b) Pour tout x de D_f , $f(x) - (x + 1) = \frac{1}{x-1}$.

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0 ;$$

donc, la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

c) Pour tout x de $]-\infty; 1[$, $f(x) - (x + 1) < 0$;

pour tout x de $]1; +\infty[$, $f(x) - (x + 1) > 0$.

Donc : sur $]-\infty; 1[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$;

sur $]1; +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$.

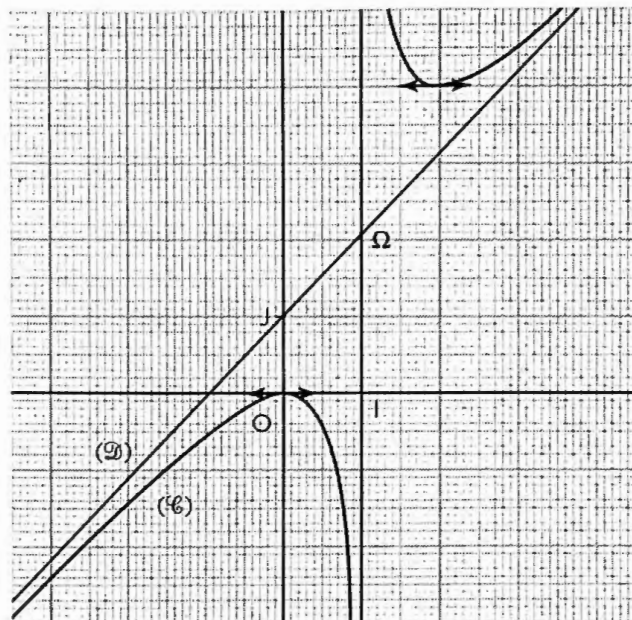
4. a) Pour tout x réel, $1 - x \in D_f$ équivaut à $1 + x \in D_f$.

$$f(1-x) + f(1+x) = (2-x-\frac{1}{x}) + (2+x+\frac{1}{x}) = 4.$$

Donc, $\Omega(1; 2)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

b) Table de valeurs

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	4	$\frac{9}{2}$



Exercices d'apprentissage

FONCTIONS POLYNÔMES

◆ Exercice n°1 p.53

1. a) Pour tout nombre réel x , $(x-2)(x^2-4x-8) = x^3 - 4x^2 - 8x - 2x^2 + 8x + 16$
 $= x^3 - 6x^2 + 16$.

b) $f(x) = 0$ équivaut à $x - 2 = 0$ ou $x^2 - 4x - 8 = 0$.

L'équation du second degré $x^2 - 4x - 8 = 0$ a deux solutions : $2 - 2\sqrt{3}$ et $2 + 2\sqrt{3}$.

Donc, $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $2, 2 - 2\sqrt{3}$ et $2 + 2\sqrt{3}$.

2. a) $D_f = \mathbb{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. a) Pour tout nombre réel x , $f'(x) = 3x(x-4)$.

- f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et $]4; +\infty[$;
- f est strictement décroissante sur $]0; 4[$.

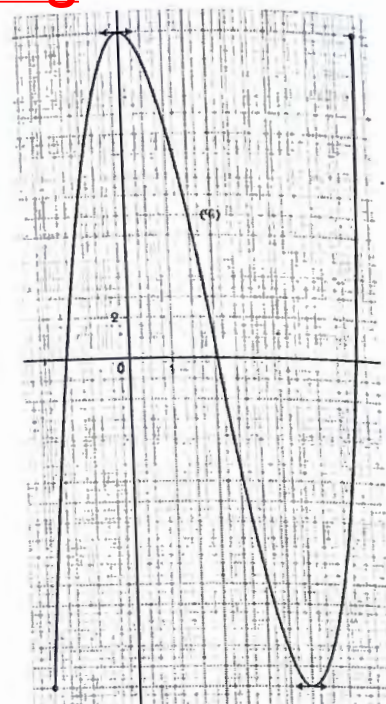
b)

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	16	-16	$+\infty$	

4. a)

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-16	9	16	11	0	-11	-16	-9

b)



♦ Exercice n°2 p.53

1. a) $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$.

b) Pour tout nombre réel, $f(x) = (x-1)^2(x+2)$.

c) $f(x) = 0$ équivaut à $x = 1$ ou $x = -2$.

2. a) $D_f = \mathbb{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

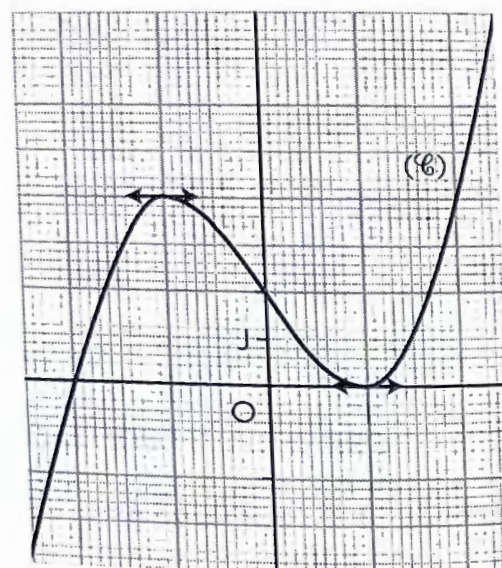
3. a) Pour tout nombre réel x , $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$.

• f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$;

• f est strictement décroissante sur $]-1; 1[$.

b)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 4$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	



4. a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-16	0	4	2	0	4	20

♦ Exercice n°3 p.53

1. a) $D_f = \mathbb{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Pour tout nombre réel x , $f'(x) = 3x^2 + 2$.

On a : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$; donc, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

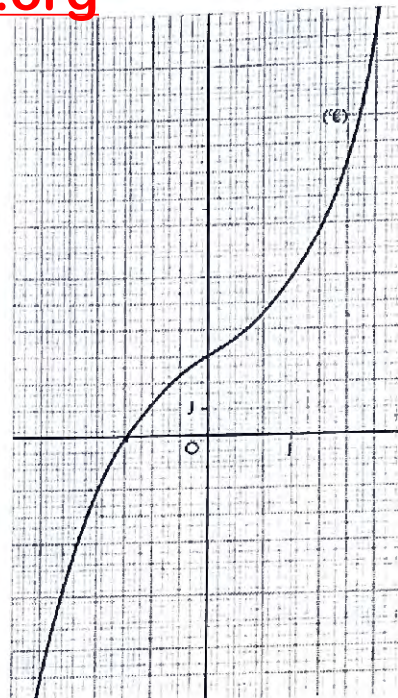
b)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-9	0	3	6	15

b) Voir courbe ci-contre.



♦ Exercice n° 4 p.53

1. a) $D_f = \mathbb{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3(x+3)(1-x)$.

- f est strictement croissante sur $]-3; 1[$;
- f est strictement décroissante sur $]-\infty; -3[$ et $]1; +\infty[$.

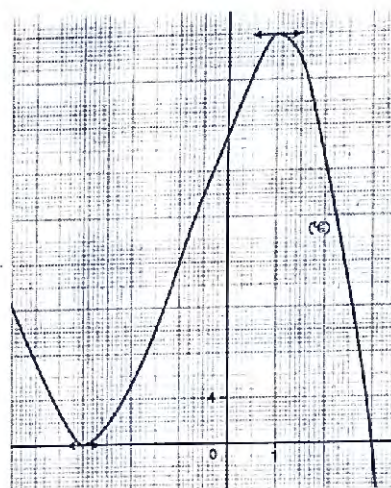
b)

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	32	$-\infty$	

3. a) $(\mathcal{C})$ coupe (OI) aux points d'abscisses -3 et 3 .

b) Table de valeurs

x	-4	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	7	5	16	27	32	25	0



♦ Exercice n°5 p.53

1. a) $D_f = \mathbb{R}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)$
 $= -x^3 + 3x$
 $= -f(x)$.

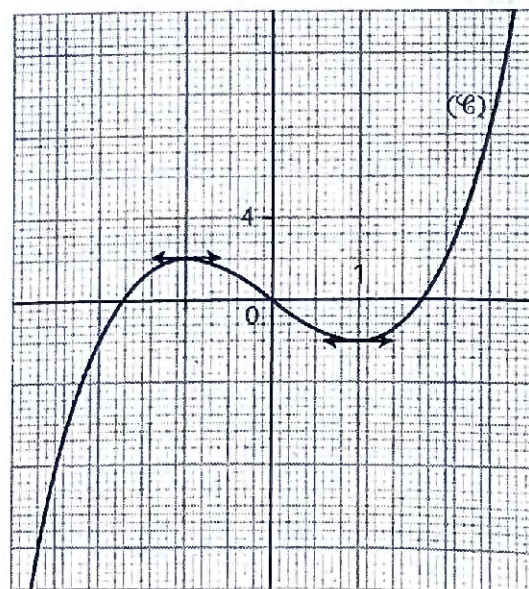
f est une fonction impaire. L'ensemble d'étude est $[0; +\infty[$.

3. a) Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$.

- f est strictement décroissante sur $[0; 1[$;
- f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

b)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	-2	$+\infty$



2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

4. Table de valeurs

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	-2	2	18

$f(x) = 0$ équivaut à $x \in \{-\sqrt{3} ; 0 ; \sqrt{3}\}$.

($\mathcal{C}$) coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$.

5. a) (T) : $y = -3x$.

b) $f(x) + 3x = x^3$.

- Si $x > 0$, ($\mathcal{C}$) est au-dessus de (T) ;
- si $x < 0$, ($\mathcal{C}$) est au-dessous de (T) ;
- ($\mathcal{C}$) et (T) se coupent en l'origine du repère.

♦ Exercice n°6 p.53

1. a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 6(x-1)(x+2)$.

- f est strictement croissante sur $[-3 ; -2[$ et $]1 ; 3]$;
- f est strictement décroissante sur $] -2 ; 1[$.

b)

x	-3	-2	1	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	10	21	-6	46	

2. Pour tout $x \in [-3 ; -2]$, $10 \leq f(x) \leq 21$;

pour tout $x \in [-2 ; 2]$, $-6 \leq f(x) \leq 21$;

pour tout $x \in [0 ; 2]$, $-6 \leq f(x) \leq 5$.

♦ Exercice n°7 p.53

1. a) $f(-3) = 11$; $f(-1) = -9$; $f(1) = -5$; $f(2) = -9$.

b)

x	-3	-1	1	2	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	11	-9	-5	-9	

2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 3x - 7$.

a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -3(x-1)(x+1)$.

b) On a : $f(-3) = 11$; $f(-1) = -9$; $f(1) = -5$; $f(2) = -9$.

♦ Exercice n° 8 p.54

1. a) $D_f = \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = (-x)^4 + 4(-x)^2 - 5 = x^4 + 4x^2 - 5 = f(x)$.

Donc, f est une fonction paire.

b) $f(1) = 1 + 4 - 5 = 0$.

c) $f(-1) = f(1) = 0$.

2. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+5)$.

b) ($\mathcal{C}$) coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 1 .

3. a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4x(x^2+2)$.

f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-5	$+\infty$

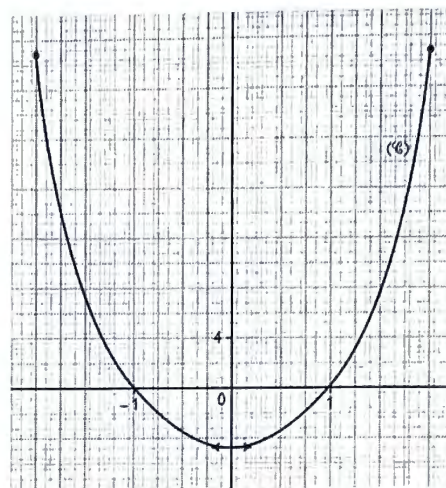
c) Voir courbe ci-contre.

4. a) • L'équation $f(x) = 2$ a deux solutions distinctes.

• L'équation $f(x) = -5$ a une solution double : 0 .

• L'équation $f(x) = -7$ n'a pas de solution.

b) L'inéquation $f(x) > 0$ a pour solution : $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$.



FONCTIONS RATIONNELLES

◆ Exercice n°9 p.54

1. $D_f =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.

Pour tout x de D_f , $f(x) - (2x - 3) = \frac{1}{x - 2}$.

a) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 3)] = 0$;

donc, la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) • Sur $]-\infty ; 2[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$;

• sur $]2 ; +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$.

2. L'asymptote verticale a pour équation : $x = 2$.

◆ Exercice n°10 p.54

1. a) $D_f =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$.

2. a) Pour tout x de D_f , $f'(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$.

• f est croissante sur $]-\infty ; -3[$ et $]-1 ; +\infty[$;

• f est décroissante sur $]-3 ; -2[$ et $]-2 ; -1[$.

b)

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-3	$+\infty$	1	$+\infty$	

3. Pour tout x de D_f , $f(x) - (x + 1) = \frac{1}{x + 2}$.

a) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$;

donc, la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) • Sur $]-\infty ; -2[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$;

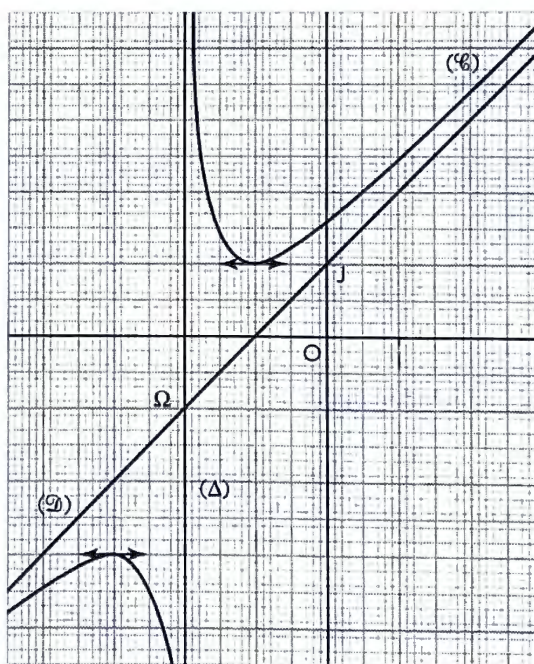
• sur $]-2 ; +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$.

c) $(\Delta) : x = -2$.

4. a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-2 - x \in D_f$ équivaut à $-2 + x \in D_f$ et $f(-2 - x) + f(-2 + x) = -2$;

donc, Ω est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

b) Voir courbe ci-dessus.



♦ Exercice n°11 p.54

1. a) $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

2. a) Pour tout x de D_f , $f'(x) = -\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.

- f est croissante sur $]-1; 0[$ et $]0; 1[$;
- f est décroissante sur $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$.

b)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$	0		$-\infty$

3. a) Pour tout x de D_f , $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{-x} = -x + 2 - \frac{1}{x}$.

Pour tout x de D_f , $f(x) - (-x + 2) = -\frac{1}{x}$.

b) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 2)] = 0$;

donc, la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

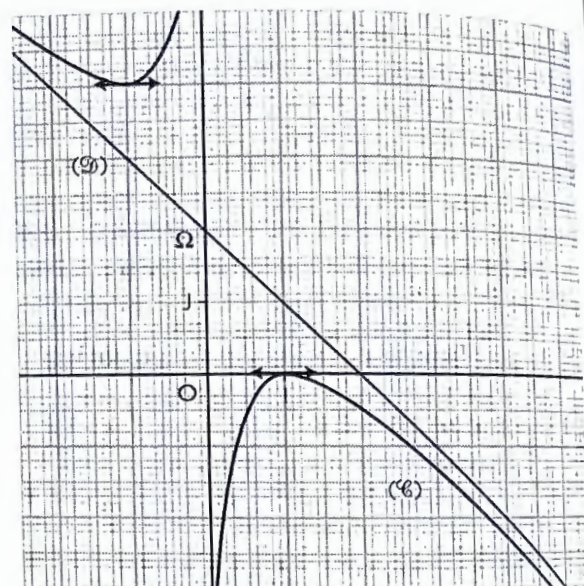
c) Sur $]-\infty; 0[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$;

sur $]0; +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$.

d) La droite (OJ) est asymptote à $(\mathcal{C})$.

4. a) Table de valeurs

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$



Voir la courbe $(\mathcal{C})$, ci-contre.

b) Le point $\Omega(0; 2)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

♦ Exercice n°12 p.54

1. a) $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

2. a) Pour tout x de D_f , $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)^2}$.

f est croissante sur $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$.

b)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

3. a) Pour tout x de D_f , $f(x) = x - 1 - \frac{3}{x+1}$.

b) La droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$.

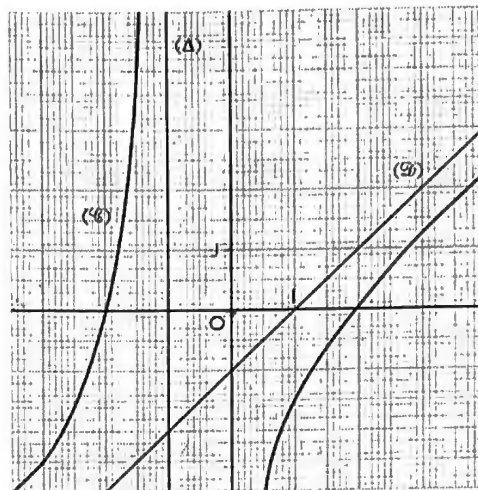
4. a) Pour tout x de D_f , $f(x) - (x - 1) = -\frac{3}{x+1}$.

- Sur $]-\infty; -1[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\mathcal{D})$;
 - sur $]-1; +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$.
- La droite (Δ) d'équation $x = -1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.
- c) $(\mathcal{C})$ coupe (OI) aux points d'abscisses -2 et 2 .

d) Table de valeurs

x	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	0	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	-4	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{4}$

Voir courbe $(\mathcal{C})$ ci-contre.



◆ Exercice n°13 p. 54

1. a) $D_f = \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x)$.

f est une fonction paire.

L'ensemble d'étude est $[0; +\infty[$. Posons : $D = [0; +\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

2. a) Pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$.

f est croissante sur $[0; +\infty[$.

b)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	-1	1

3. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{2}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x)$.

b) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - 1] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x^2 + 1}\right) = 0$.

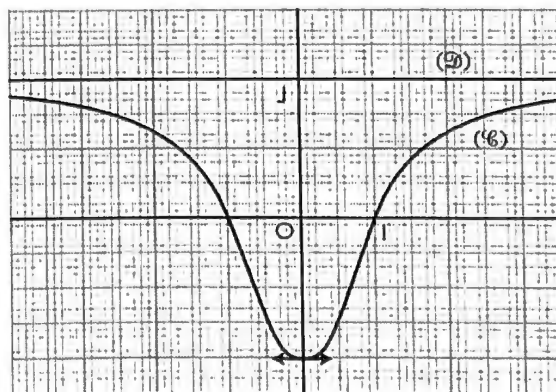
Donc, la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 1 < 0$; donc, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$.

d) Table de valeurs

x	0	1	2	3
$f(x)$	-1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

Voir courbe $(\mathcal{C})$ ci-contre.



RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

◆ Exercice n°14 p. 54

1. $f(80) = 1760$ l.

2. a) Pour tout $x \in [0; 80]$, $f'(x) = \frac{x}{20} + 20$.

f est croissante sur $[0; 80]$.

b)

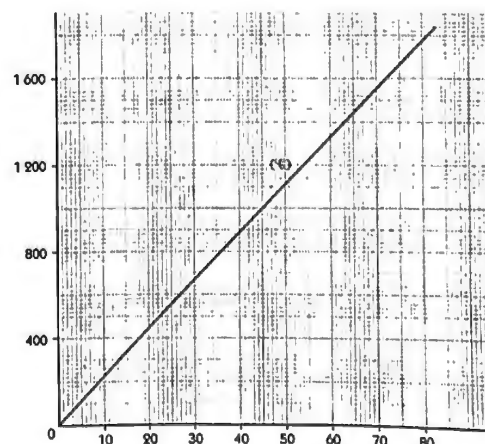
x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$f(x)$	0	202,5	410	622,5	840	1062,5	1290	1522,5	1760

c) Voir courbe $(\mathcal{C})$ ci-contre.

3. $f(40) = 840$ l. Donc, chaque vache dispose de 84 l.

◆ Exercice n°15 p. 55

1. a) Pour tout $x \in [0; 10]$, $f'(x) = 3x^2 - 14x + 20$.



b) Le polynôme du second degré $3x^2 - 14x + 20$ a pour discriminant -44 .
Donc, pour tout $x \in [0 ; 10]$, $f'(x) > 0$; f est croissante sur $[0 ; 10]$.

2. a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0	14	20	24	32	50	84	140	224	342	500

b) Voir courbe (C) ci-contre.

3. a) $h(x) = g(x) - f(x)$.

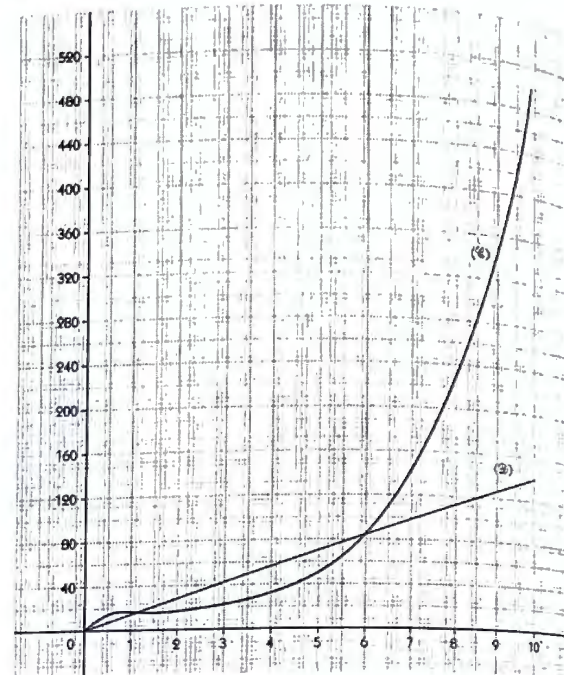
$$\begin{aligned} b) h(x) &= -x^3 + 7x^2 - 6x \\ &= -x(x^2 - 7x + 6) \\ &= -x(x-1)(x-6). \end{aligned}$$

4. a) (D) est la représentation graphique de g .

b) L'entreprise réalise des bénéfices lorsque (D) est au-dessus de (C) ; c'est-à-dire : $x \in]1 ; 6[$.

c) $h(x) > 0$ équivaut à $-(x-1)(x-6) > 0$.

Donc : $x \in]1 ; 6[$.



◆ Exercice n°16 p. 55

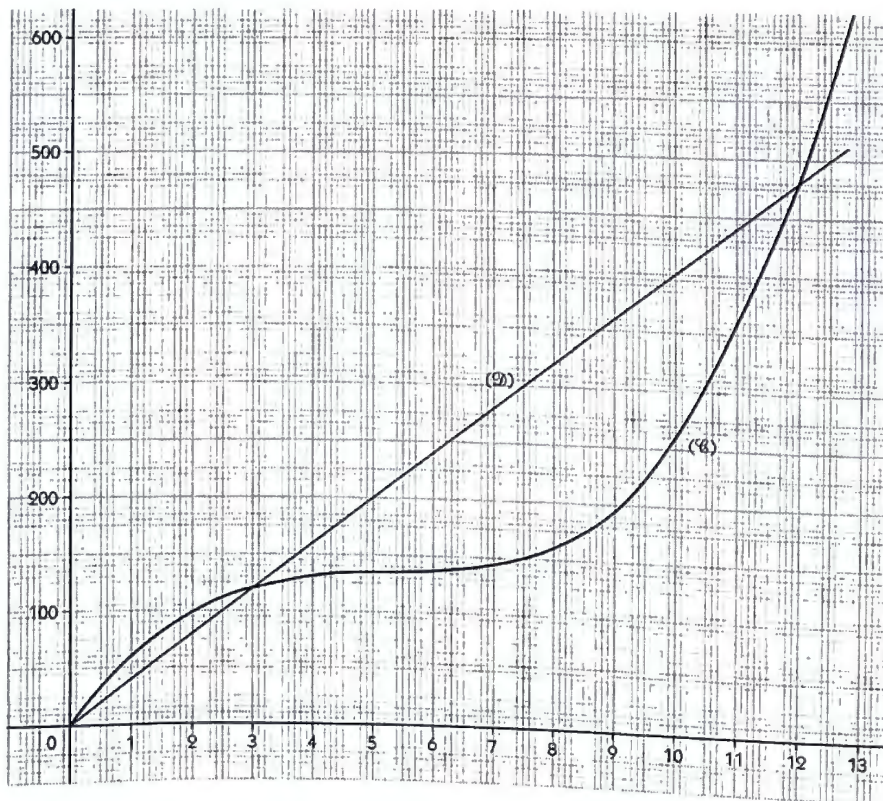
1. a) Pour tout x de $[0 ; 13]$, $f'(x) = 3x^2 - 30x + 76$.

b) Le polynôme du second degré $3x^2 - 30x + 76$ a pour discriminant -12 ; donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
 f est croissante sur $[0 ; 13]$.

2. a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(x)$	0	62	100	120	128	130	132	140	160	198	260	352	480	650

b) Voir courbe (C) ci-dessous.



3. a) (D) est la représentation graphique de g .

b) L'entreprise réalise un bénéfice lorsque (D) est au-dessus de (C) ; c'est-à-dire : $x \in]3 ; 12[$.

♦ Exercice n°17 p.55

1. Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $\frac{0,5x^2 + x + 4}{x} = 0,5x + 1 + \frac{4}{x}$.

2. a) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [C_m(x) - (0,5x + 1)] = 0$.

b) La droite d'équation $y = 0,5x + 1$ est asymptote à la représentation graphique de la fonction C_m .

c) Pour de grandes valeurs de x , le coût unitaire moyen varie comme la fonction $x \mapsto 0,5x + 1$.

♦ Exercice n°18 p.55

1. Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $C_m(x) = x - 20 + \frac{400}{x}$.

Donc, $C'_m(x) = \frac{(x-20)(x+20)}{x^2}$.

On doit fabriquer 20 objets pour minimiser le coût unitaire moyen.

2. a) $B(x) = 10x - (x^2 - 20x + 400) = -x^2 + 30x - 400$.

b) Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $B'(x) = -2x + 30$.

Le bénéfice est maximal pour $x = 15$.

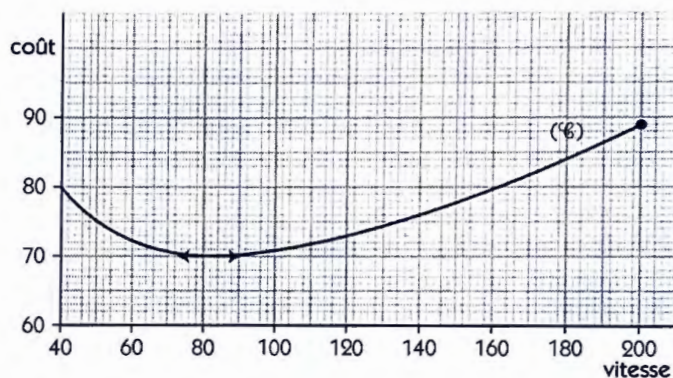
♦ Exercice n°19 p.55

1. a) Pour tout $x \in [40 ; 200]$, $C'(x) = \frac{(x-80)(x+80)}{4x^2}$.

x	40	80	200
$C'(x)$	-	0	+
$C(x)$	80	70	88

b)

x	40	50	80	100	160	200
$C(x)$	80	74,5	70	71	80	88



2. Avec une vitesse moyenne de 80 km/h, le coût du voyage est minimal.

☐ Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n°20 p.56

1. a) Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.

• Sur $]0 ; 1[$, f est décroissante ;

• sur $]1 ; +\infty[$, f est croissante.

b)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x}$.

Donc, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

♦ Exercice n°21 p.56

1. a) $E(0 ; -x) ; F(1-x ; 1)$

b) Soit $M(t ; y)$.

$M \in (EF)$ équivaut à $(1+x)t - (1-x)y = x - x^2$.

c) $\begin{cases} I \in (AB) \\ I \in (EF) \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} (1+x)t - (1-x)y = x - x^2 \\ y = 0 \end{cases}$. Donc, $I(\frac{x-x^2}{x+1} ; 0)$.

2. a) $AI = \left| \frac{x-x^2}{x+1} \right| = \frac{x-x^2}{x+1}$.

b) Posons : $f(x) = \frac{x-x^2}{x+1}$.

Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f'(x) = -\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$.

L'équation du second degré $x^2 + 2x - 1 = 0$ a pour solution positive $-1 + \sqrt{2}$.

La distance AI est donc maximale pour : $x = -1 + \sqrt{2}$.

◆ Exercice n°22 p.56

1. a) Pour tout $x \in [0 ; 30]$, $F(x) = 15x + 450$.

b) Voir courbe (D) ci-contre.

2. a) Pour tout $x \in [0 ; 30]$, $R'(x) = -\frac{3}{5}x(x-20)$.

• f est croissante sur $]0 ; 20[$;

• f est décroissante sur $]20 ; 30[$.

b)

x	0	20	30
$R'(x)$	+	0	-
$R(x)$	200	1 000	200

c)

x	0	5	10	15	20	25	30
$R(x)$	200	325	600	875	1000	825	200

d) Voir courbe (C) ci-contre.

e) La recette est maximale pour 20 jours de publicité.

3. a) $B(x) = R(x) - F(x)$.

b) Pour tout $x \in [0 ; 30]$, $B(x) = -\frac{1}{5}x^3 + 6x^2 - 15x - 250$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } -\frac{1}{5}(x+5)(x-10)(x-25) &= -\frac{1}{5}(x+5)(x^2-35x+250) \\ &= -\frac{1}{5}(x^3-30x^2+75x+1250) = B(x). \end{aligned}$$

c) Le promoteur réalise des bénéfices pour : $x \in]10 ; 25[$.

◆ Exercice n°23 p.56

1.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

2. a) (Δ) : $x = -1$. ($\mathcal{D}$) : $y = x + 2$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $f(x) = x + 2 + \frac{c}{x+1}$. $f(0) = 1$ équivaut à $2 + c = 1$. Donc : $c = -1$.

Pour tout $x \in]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$, $f(x) = x + 2 - \frac{1}{x+1}$.

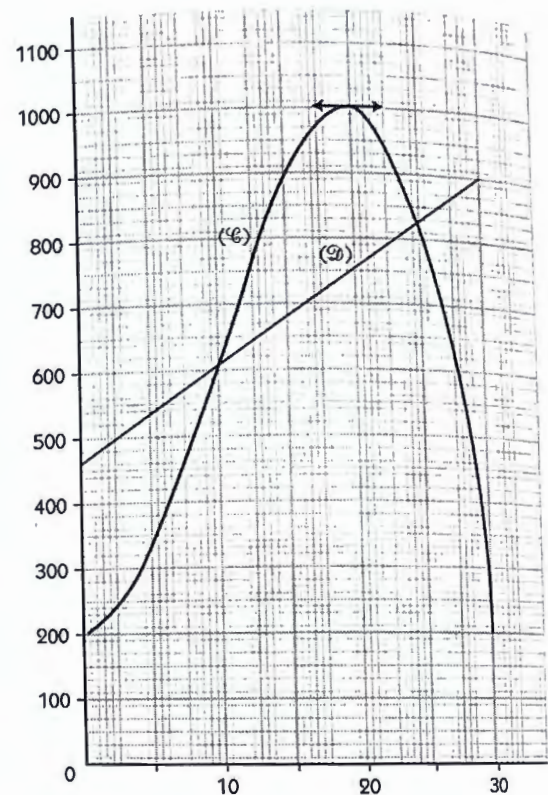
3. a) Pour tout $x \in]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$.

La fonction f est bien croissante sur $]-\infty ; -1[$ et $]-1 ; +\infty[$.

b) On a : $\Omega(-1 ; 1)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-1-x) + f(-1+x) = (1-x+\frac{1}{x}) + (1+x-\frac{1}{x}) = 2$. Donc, Ω est un centre de symétrie de ($\mathcal{C}$).

c) $f(x) = 0$ équivaut à $x^2 + 3x + 1 = 0$.
équivaut à $x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.



4. Fonctions logarithme et exponentielle

(pages 57 à 76 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- mettre en place deux nouvelles fonctions de référence ;
- utiliser ces fonctions comme outils de calculs ou de résolution de problèmes.

COMMENTAIRES

On mettra en évidence l'aspect historique de ces fonctions et leurs applications dans divers domaines.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Fonction logarithme népérien

- Définition et conséquences :

- définition

- propriétés immédiates :

ensemble de définition : $]0 ; +\infty[$;

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} ;$$

$$\ln 1 = 0.$$

- Propriétés algébriques :

($a > 0, b > 0, n \in \mathbb{Z}$).

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b ;$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a ;$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b ;$$

$$\ln a^n = n \ln a ;$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a.$$

- Propriétés analytiques :

- limites remarquables

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

- dérivée et sens de variation de la fonction $\ln$

- représentation graphique de la fonction $\ln$.

- Résolutions d'équations et d'inéquations.

- Applications du logarithme.

Fonction exponentielle népérienne

- Définition et conséquences :

- définition ;

- notation e^x ;

- propriétés immédiates :

pour tout réel a , $e^a > 0$;

pour tout réel a , $\ln(e^a) = a$;

pour tout $a > 0$, $e^{\ln a} = a$.

savoir-faire

- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction comportant $\ln$.

- Utiliser les propriétés algébriques de la fonction $\ln$ pour transformer des écritures.

- Utiliser les limites remarquables pour déterminer des limites de fonctions comportant $\ln$.

- Savoir représenter graphiquement la fonction $\ln$.

- Résoudre des équations et des inéquations comportant $\ln$.

- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction comportant $\exp$.

savoirs

savoir-faire

• Propriétés algébriques :

$(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q})$

$$e^{a+b} = e^a \times e^b ;$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a} ;$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} ;$$

$$(e^{ra}) = (e^a)^r.$$

• Propriétés analytiques :

– limites remarquables

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

– dérivée et sens de variation de la fonction exp

– représentation graphique de la fonction exp.

• Résolutions d'équations et d'inéquations.

• Applications de l'exponentielle.

Fonctions comportant ln ou exp

• Dérivée de la fonction

$$x \mapsto \ln(ax + b) \ (a \neq 0).$$

• Dérivée de la fonction

$$x \mapsto e^{ax+b} \ (a \neq 0).$$

• Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exp pour transformer des écritures.

• Utiliser les limites remarquables pour déterminer des limites de fonctions comportant exp.

• Savoir représenter graphiquement la fonction exp.

• Résoudre des équations et des inéquations comportant exp.

• Déterminer la dérivée d'une fonction du type :

$$x \mapsto \ln(ax + b) \ (a \neq 0).$$

• À partir de la représentation graphique de la fonction ln, construire la représentation graphique d'une fonction du type : $x \mapsto \ln(x - a) + b$.

• Déterminer la dérivée d'une fonction du type :

$$x \mapsto e^{ax+b} \ (a \neq 0).$$

• À partir de la représentation graphique de la fonction exp, construire la représentation graphique d'une fonction du type : $x \mapsto e^{x-a} + b$.

EXERCICES DU MANUEL

 Exercices du cours

♦ **Exercice 1.a p.64**

$$\ln(1, 1) > 0 ; \ln(0, 7) < 0 ; \ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0 ; \ln(\sqrt{2} + 1) > 0.$$

♦ **Exercice 1.b p.64**

a) $D_f =]1 ; +\infty[$

b) $D_f =]0 ; +\infty[$

c) $D_f =]-\infty ; 0[$

d) $D_f = \mathbb{R}^*.$

♦ **Exercice 1.c p.64**

a) Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x-1}{x}$.

b) Pour tout $x \in]\frac{3}{2} ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2}{2x-3}$.

c) Pour tout $x \in]-\infty ; 0[$, $f'(x) = \ln(-x) + 1$.

d) Pour tout $x \in]0 ; 2[$, $f'(x) = -\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x}$.

♦ **Exercice 1.d p.64**

a) $S = \{3\}$

b) $S = \{\frac{3}{2}\}$

c) $S = \{-1 ; 1\}$

d) $S = \{2\}.$

♦ Exercice 1.e p.64

a) $S =]\frac{1}{2}; 3[$ b) $S = [e - 1; +\infty[$ c) $S = [-2; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; 2]$ d) $S =]2; +\infty[$.

♦ Exercice 2.a p.68

On a : $-2 < -0,7 < 0 < 0,4 < \frac{1}{2} < 1$;

Or : la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc : $0 < e^{-2} < e^{-0,7} < 1 < e^{0,4} < \sqrt{e} < e$.

♦ Exercice 2.b p.68

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		-1	

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1+x)e^x$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$-e^{-1}$	

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0,5 e^{0,5x-1}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - e^{-x+1}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		-2	

♦ Exercice 2.c p.68

a) $S = \{4\}$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \{0\}$ d) $S = \{\ln 4\}$.

♦ Exercice 2.d p.68

a) $S =]-\infty; \frac{15}{4}[$ b) $S = [-3; +\infty[$
 c) $S =]-\infty; 0]$ d) $S =]0; +\infty[$.

☐ Exercices d'apprentissage

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

♦ Exercice n°1 p.73

$a = 2 \ln 2$ $b = 5 \ln 2$ $c = -3 \ln 2$
 $d = -\ln 2$ $e = 2 \ln 2$ $f = 5 \ln 2$.

♦ Exercice n°2 p.73

$a = 2 \ln 2 + \ln 3$ $b = \ln 2 + 2 \ln 3$ $c = 3 \ln 2 - 2 \ln 3$ $d = 3 \ln 3 - 5 \ln 2$.

♦ Exercice n°3 p.73

$a = \ln(24)$ $b = \ln(27\sqrt{2})$ $c = \ln(\frac{32}{81})$ $d = \ln(\frac{16}{\sqrt{3}})$.

♦ Exercice n°4 p.73

$\ln 8 = 3 \ln 2$; donc : $\ln 8 \approx 2,1$ $\ln \frac{1}{16} = -4 \ln 2$; donc : $\ln \frac{1}{16} \approx -2,8$
 $\ln 27 = 3 \ln 3$; donc : $\ln 27 \approx 3,3$ $\ln \frac{1}{9} = -2 \ln 3$; donc : $\ln \frac{1}{9} \approx -2,2$
 $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$; donc : $\ln 6 \approx 1,8$ $\ln(4,5) = 2 \ln 3 - \ln 2$; donc : $\ln(4,5) \approx 1,5$.

♦ Exercice n°5 p.73

$a = 1 + \ln 2$ $b = -3$ $c = 2 + 3 \ln 2$ $d = 2$.

◆ Exercice n°6 p.73

- a) Pour tout $x \in]1 ; +\infty[$, $f(x) = 4 + \ln(x-1)$.
 b) Pour tout $x \in]3 ; +\infty[$, $f(x) = \ln(x+3) + \ln(x-3)$.
 c) Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = 1 - \ln x$.
 d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3 \ln 2 - \ln(1+x^2)$.

◆ Exercice n°7 p.73

- a) Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = \ln(3x^2)$.
 b) Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = \ln\left(\frac{e}{\sqrt{x}}\right)$.
 c) Pour tout $x \in]-2 ; 2[$, $f(x) = \ln(4-x^2)$.
 d) Pour tout $x \in]-1 ; 1[$, $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)$.

◆ Exercice n°8 p.73

- a) $D_f =]-\infty ; 6[$ b) $D_f =]-2 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
 c) $D_f =]-1 ; 1[$ d) $D_f =]-1 ; 1[$.

◆ Exercice n°9 p.73

- a) Pour tout $x \in]-\infty ; 4[$, $f'(x) = \frac{1}{x-4}$. f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 4[$.
 b) Pour tout $x \in]1 ; +\infty[$, $f'(x) = -\frac{2}{x^2-1}$. f est strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[$.
 c) Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{4x^2-1}{x}$.
 • f est décroissante sur $]0 ; \frac{1}{2}[$;
 • f est croissante sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$.
 d) Pour tout $x \in]2 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{(1-x)(x+2)}{x^2(x-2)}$. f est strictement décroissante sur $]2 ; +\infty[$.

◆ Exercice n°10 p.73

- a) $S = \{\frac{1}{e} - 2\}$ b) $S = \{1 + e^3\}$ c) $S = \{10\}$ d) $S = \{\frac{e}{2}\}$.

◆ Exercice n°11 p.73

- a) $S = \emptyset$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \{\frac{1}{25}\}$ d) $S = \{1\}$.

◆ Exercice n°12 p.73

- a) $S =]0 ; \frac{4}{e}[$ b) $S =]0 ; 2[\cup]3 ; +\infty[$ c) $S =]\frac{1}{2} ; +\infty[$ d) $S =]0 ; 2[$.

◆ Exercice n°13 p.73

- a) $S =]\frac{5}{e} ; +\infty[$ b) $S =]0 ; 1[$.

FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

◆ Exercice n°14 p.73

- $a = -4$; $b = 8$; $c = \frac{1}{6}$; $d = 0,7$; $e = 25$; $f = \frac{1}{8}$; $g = \frac{9}{e}$; $h = 2e$.

◆ Exercice n°15 p.73

- $a = e^8$; $b = e^{-3}$; $c = e^4$; $d = e^4$; $g = e^{-6}$; $h = e^8$.

◆ Exercice n°16 p.73

- $a = e - \frac{16}{e}$; $b = 1 - 4e$; $c = 3e$; $d = 1 + e^2$.

◆ Exercice n°17 p.73

- a) $e^2 e^x$ b) $e^{-3} e^x$ c) $\frac{e^4}{e^x}$ d) $\frac{1}{e e^x}$.

♦ Exercice n°18 p.73

Les vérifications sont immédiates.

♦ Exercice n°19 p.74

$$a) S = \left\{ \frac{4 - \ln 2}{5} \right\} \quad b) S = \emptyset \quad c) S = \{0\} \quad d) S = \{-\ln 3\}.$$

♦ Exercice n°20 p.74

$$a) S = \{e\} \quad b) S = \left\{ \frac{1}{e} \right\} \quad c) S = \{e^{1,2}\} \\ d) S = \{e^{\frac{2}{3}}\} \quad e) S = \{\sqrt{e}\} \quad f) S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{e}} \right\}.$$

♦ Exercice n°21 p.74

$$a) S = \{-e^2; e^2\} \quad b) S = \left\{ \frac{1}{e} \right\}.$$

♦ Exercice n°22 p.74

$$1. (e^x - 3)(e^x - 2) = e^{2x} - 2e^x - 3e^x + 6 = e^{2x} - 5e^x + 6.$$

$$2. \text{L'équation équivaut à : } e^{2x} - 5e^x + 6 = 0.$$

$$\text{Donc : } e^x = 3 \text{ ou } e^x = 2; \text{ c'est-à-dire : } x = \ln 3 \text{ ou } x = \ln 2.$$

$$S = \{\ln 2; \ln 3\}.$$

♦ Exercice n°23 p.74

$$a) S =]\frac{2}{5}; +\infty[\quad b) S =]-\infty; \ln \frac{3}{2}] \quad c) S =]\ln 2; +\infty[\quad d) S =]-\infty; \ln 3].$$

♦ Exercice n°24 p.74

$$a) S =]\ln 2; \ln 3[\quad b) S =]-\infty; 0] \\ c) S =]\ln 2; +\infty[\quad d) S =]-\infty; \ln 2] \cup [1; +\infty[.$$

FONCTIONS COMPORTANT LN OU EXP

♦ Exercice n°25 p.74

$$a) -\infty \quad b) +\infty \quad c) -\infty \quad d) +\infty.$$

♦ Exercice n°26 p.74

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty. \\ b) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \\ c) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \\ d) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \\ e) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty. \\ f) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

♦ Exercice n°27 p.74

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \\ b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \\ c) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \\ d) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

♦ Exercice n°28 p.74

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

b) (O) est asymptote à (C).

2. a) Pour tout $x \in]0 ; 5[$, $f'(x) = \frac{4x-1}{x}$.

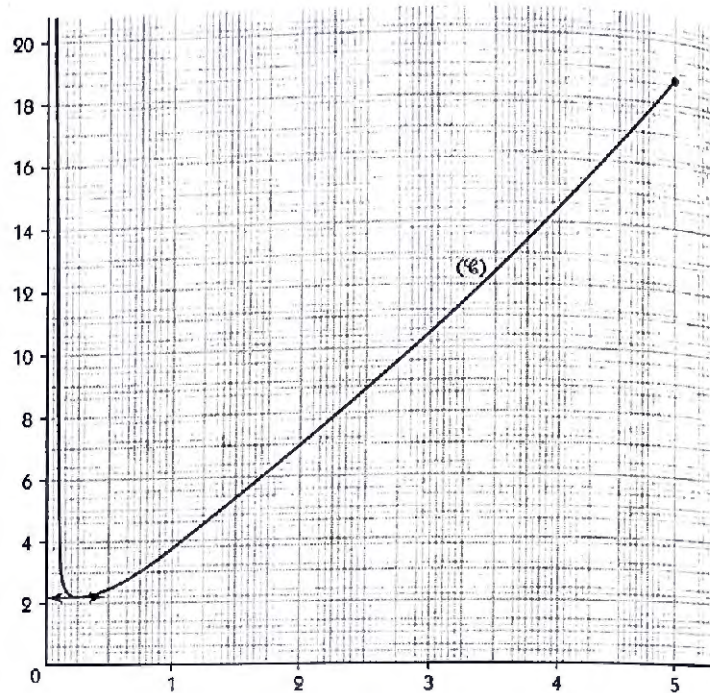
- f est strictement croissante sur $]\frac{1}{4} ; 5[$.
- f est strictement décroissante sur $]0 ; \frac{1}{4}[$.
- $f'(\frac{1}{4}) = 0$ et $f(\frac{1}{4}) = 1 + \ln 4$.

b)

x	0	$\frac{1}{4}$	5
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	$1 + \ln 4$	$20 - \ln 5$

3. a)

x	0,5	1	2	3	4	5
f(x)	2,69	4	7,31	10,90	14,61	18,39



♦ Exercice n°29 p.74

1. a) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$.

b) La droite (D) d'équation $x = -3$ est asymptote à (C).

2. a) Pour tout $x \in]-3 ; 7[$, $f'(x) = -\frac{x+2}{x+3}$.

- f est décroissante sur $]-2 ; 7[$.
- f est croissante sur $]-3 ; -2[$.
- $f'(-2) = 0$ et $f(-2) = 2 + \ln 2$.

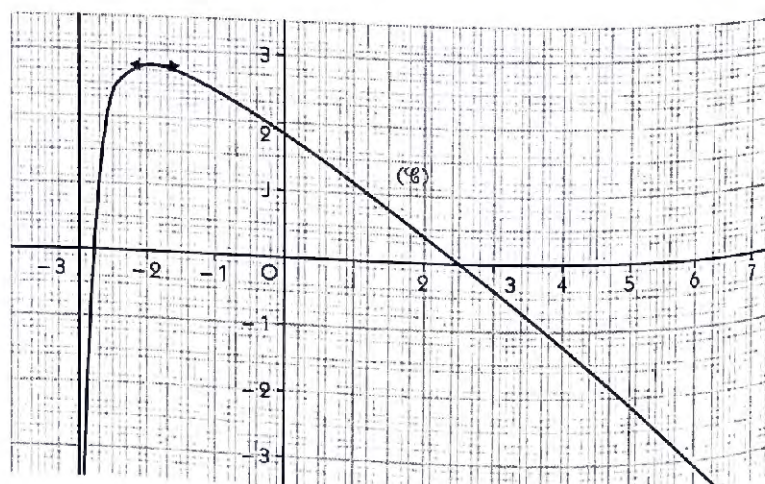
Tableau de variation

x	-3	-2	7
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$	$2 + \ln 2$	$-7 + \ln 20$

3. a)

x	-2,5	-2,2	-2	-1	0	1
f(x)	2,5	2,67	2,69	2,38	1,79	1,08

x	2	3	4	5	6	7
f(x)	0,30	-0,51	-1,36	-2,23	-3,11	-4,004



Exercice n°30 p.74

- On trouve :
1. $A = 698,84 \text{ cm}^2$.
 2. $P = 5,70 \text{ g}$.

Exercice n°31 p.74

- a) $S = \emptyset$ b) $S =]\frac{2}{3}; 1[$ c) $S = [-1; 4]$ d) $S =]0; \frac{1}{e}]$.

Exercice n°32 p.74

1. On a : $N \approx -8\,310 \ln(0,05) \approx 24\,894,535$.
2. On a : $4\,400\,000 \approx -8\,310 \ln p$; donc : $\ln p \approx -529,482\,551$.
À l'aide de la calculatrice, on trouve : $p \approx 0$.
La méthode du carbone 14 ne peut être raisonnablement utilisée dans ce cas.
3. On a : $\left|p - \frac{52,8}{100}\right| \leq \frac{1}{100}$; c'est-à-dire : $0,518 \leq p \leq 0,538$.
On en déduit : $-0,657780036 \leq \ln p \leq -0,619896718$;
donc : $5\,151,341 \leq N \leq 5\,466,152$.

Exercice n°33 p.74

1. $f(0) = 2,5$ entraîne $A = 2,5$.
 $f(40) = 5,2$ entraîne $a = \frac{\ln(2,08)}{40}$.
On a : $A = 2,5$ et $a \approx 0,0183$.
2. Avec le modèle proposé, on a : $f(t) = 2,5 e^{0,018t}$.
Donc : $f(20) \approx 3,58$ et $f(49) \approx 6,04$.
Le modèle est en accord avec les données : $f(20) = 3,7$ et $f(49) = 6$.

Exercice n°34 p.75

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.
- b) (OJ) est asymptote à $(\mathcal{C})$.
2. a) Pour tout x de $]0; 5]$, $f'(x) = \frac{2(x+2)(x-2)}{x}$.
 - f est strictement croissante sur $]2; 5]$.
 - f est strictement décroissante sur $]0; 2]$.
 - $f'(2) = 0$; $f(2) = 4 - 8 \ln 2$.

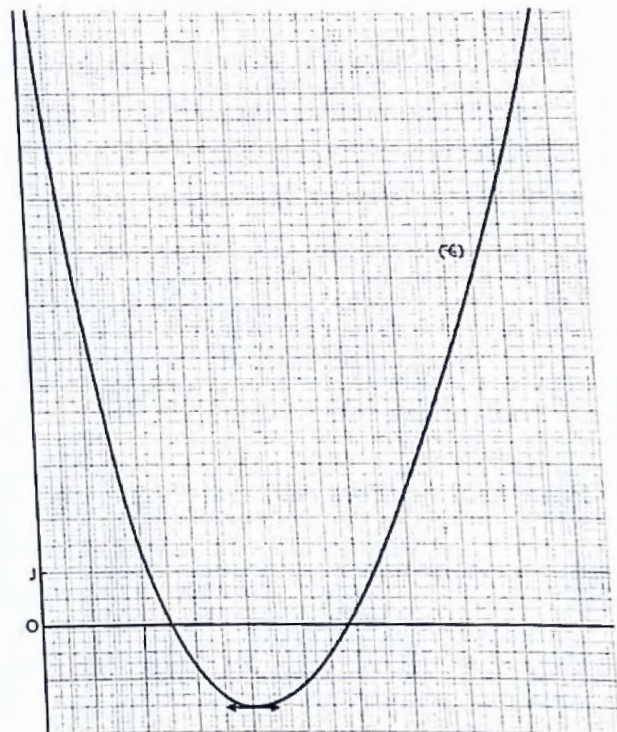
b)

x	0	2	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$4 - 8 \ln 2$	$25 - 8 \ln 5$

3. a)

x	0,5	1	2	3	4	5
$f(x)$	5,79	1	-1,54	0,21	4,91	12,12

- b) Voir courbe ci-contre.



Exercice n°35 p.75

1. a) $D_f =]0; +\infty[$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$.

- f est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$.
- f est strictement décroissante sur $]0 ; 1]$.
- $f'(1) = 0$; $f(1) = -1$.

b)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$

3. $f(x) = 0$ équivaut à $\ln x = 1$ ou $\ln x = -1$.

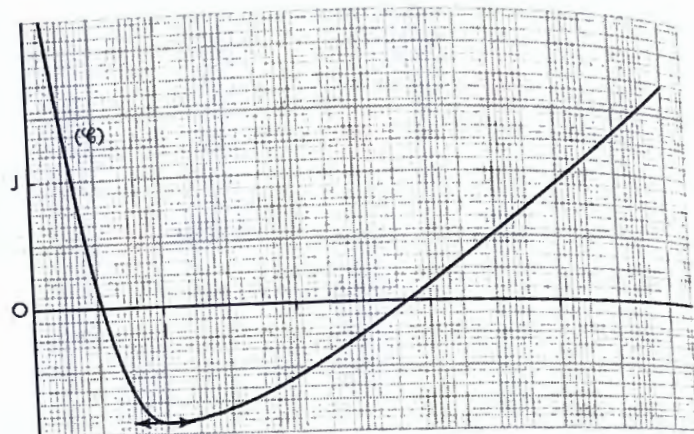
équivaut à $x = e$ ou $x = \frac{1}{e}$.

(C) et (OI) se coupent aux points d'abscisses e et $\frac{1}{e}$.

4. a)

x	0,2	1	2	3	4	5
$f(x)$	1,59	-1	-0,52	0,20	0,92	1,59

b) Voir courbe ci-contre.



◆ Exercice n°36 p.75

1. a) $D_f = \mathbb{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$.

Donc, la droite (D) d'équation $y = -2$ est asymptote à (C).

c) Pour tout nombre réel x , $e^x(e^x - 1) - 2 = e^{2x} - e^x - 2 = f(x)$.

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Pour tout nombre réel x , $f'(x) = 2e^{2x} - e^x = e^x(2e^x - 1)$.

b) • f est strictement croissante sur $]-\ln 2 ; +\infty[$.

• f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -\ln 2]$.

• $f'(-\ln 2) = 0$; $f(-\ln 2) = -\frac{9}{4}$.

c)

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	-2	$-\frac{9}{4}$	$+\infty$

3. a) Pour tout nombre réel x , $(e^x - 2)(e^x + 1) = e^{2x} - 2e^x + e^x - 2 = e^{2x} - e^x - 2 = f(x)$.

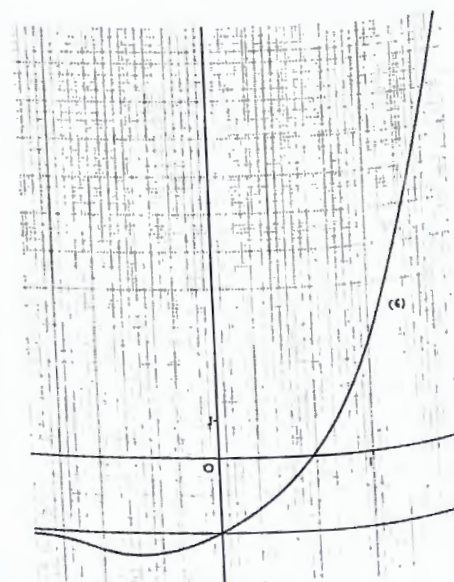
b) $f(x) = 0$ équivaut à $e^x = 2$
équivaut à $x = \ln 2$.

(C) et (OI) se coupent au point d'abscisse $\ln 2$.

4. a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2,12	-2,23	-2	2,67	45,21

b) Voir courbe ci-contre.



♦ Exercice n°37 p.75

1. a) On a : $D_f = \mathbb{R}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{1-e^x}{1+e^x} = -f(x)$.

Donc, f est une fonction impaire.

b) L'ensemble d'étude est : $[0 ; +\infty[$.

2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1$;

donc, la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) - 1 = -\frac{2}{e^x + 1}$; donc, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de $(\mathcal{D})$.

3. a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$.

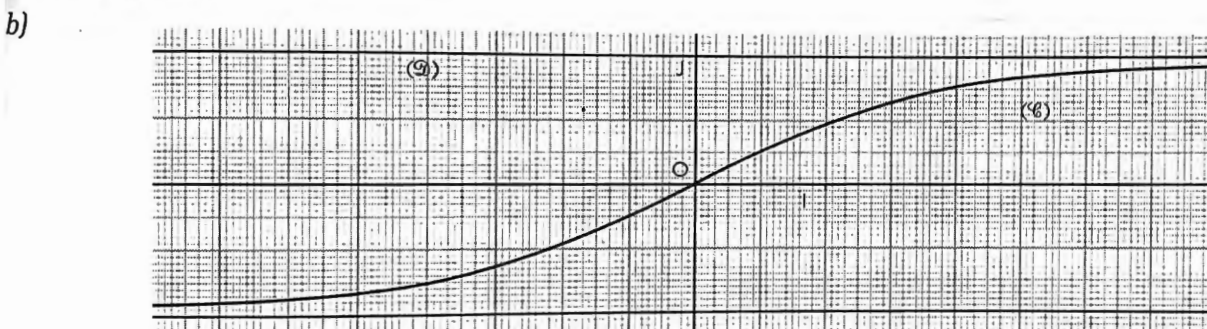
Donc, la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$;

b)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	1

4. a)

x	0	0,5	1	2
$f(x)$	0	0,24	0,46	0,76



♦ Exercice n°38 p.75

1. a) Pour tout x de $]0 ; 5]$, $f(x) = \frac{1}{x} (1 + \ln x)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$; donc, la droite (OJ) est une asymptote à $(\mathcal{C})$.

2. a) Pour tout x de $]0 ; 5]$, $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$.

• f est strictement croissante sur $]0 ; 1[$.

• f est strictement décroissante sur $]1 ; 5]$.

• $f'(1) = 0$; $f(1) = 1$.

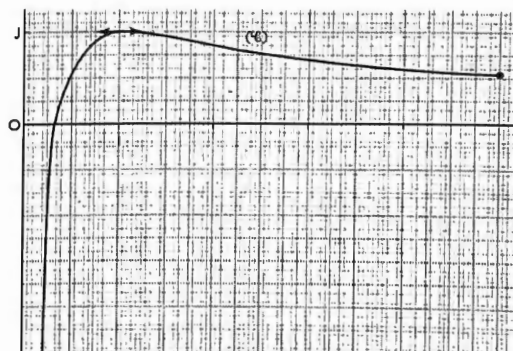
b)

x	0	1	5
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	1	$\frac{1 + \ln 5}{5}$

3. a)

x	0,2	0,5	1	2	3	4	5
$f(x)$	-3,05	0,61	1	0,85	0,70	0,60	0,52

b) Voir courbe ci-contre.



4. a) On a : $f(x) > 0$ équivaut à $x > \frac{1}{e}$; $\frac{1}{e} \approx 0,3678$.

L'entreprise aura un bénéfice si elle produit au minimum 368 articles.

b) L'entreprise aura un bénéfice maximal pour $q = 1$ (en milliers d'articles).

On a : $B(1) = 10$.

Le bénéfice maximal est 10 000 F CFA.

♦ Exercice n° 39 p.76

1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$.

b) La droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à ($\mathcal{C}$).

2. a) $S = \{1\}$.

b) $S = [1 ; +\infty[$.

3. a) Pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = 1 - e^{1-x}$.

- f est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$.
- f est strictement décroissante sur $[0 ; 1[$.
- $f'(1) = 0$; $f(1) = 2$.

b)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	e	2	$+\infty$

4. a)

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2,72	2	2,37	3,13	4,05	5,02	6

b) Voir courbe ci-contre.

5. a) Pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $V(x) = 1,2 x$.

b) Voir courbe ci-contre.

c) • ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{C}$) se coupent au point qui a approximativement pour abscisse 2.

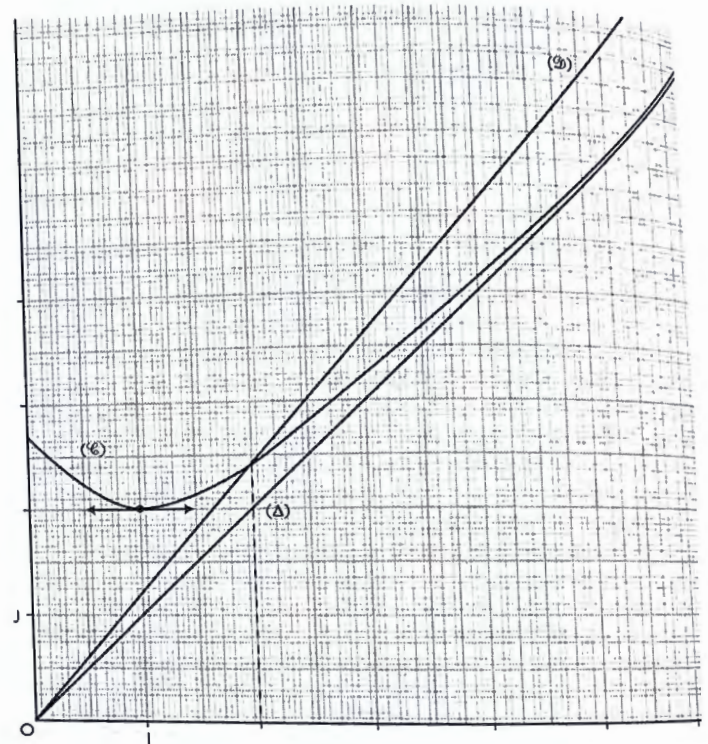
- Sur $[0 ; 2[$, ($\mathcal{D}$) est au-dessous de ($\mathcal{C}$).
- Sur $]2 ; +\infty[$, ($\mathcal{D}$) est au-dessus de ($\mathcal{C}$).

d) L'entreprise réalisera des bénéfices pour un nombre minimal de 200 articles.

♦ Exercice n°40 p.76

1. Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = 20 \log x = 20 \frac{\ln x}{\ln 10}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in]0 ; +\infty[, f(10x) &= 20 \frac{\ln(10x)}{\ln 10} \\ &= 20 \frac{\ln 10 + \ln x}{\ln 10} \\ &= 20 \left(1 + \frac{\ln x}{\ln 10}\right) \\ &= 20 + 20 \frac{\ln x}{\ln 10} \\ &= 20 + f(x). \end{aligned}$$



2.

Niveau (dB)	Description	Puissance réelle
0	plus petit son audible par l'homme	1
10	Respiration normale	$10^{0,5}$
20	Bruissement des feuilles d'un arbre	10
30	Chuchotement très léger	$10^{1,5}$
40	Quartier résidentiel tranquille	10^2
50	À l'intérieur d'un magasin	$10^{2,5}$
60	Voix de quelqu'un parlant normalement	10^3
70	Intérieur d'une voiture en marche	$10^{3,5}$
80	Radio écoutée fort	10^4
90	Trafic urbain	$10^{4,5}$
100	Train souterrain (métro)	10^5
110	Coup de tonnerre	$10^{5,5}$
120	Groupe de rock	10^6
130	Tir de mitrailleuse	$10^{6,5}$
140	Réacteur d'un avion au décollage	10^7
180	Fusée spatiale à son lancement	10^9

3. 88 dB correspond à une puissance réelle de $10^{4,4}$.

90 dB correspond à une puissance réelle de $10^{4,5}$.

5. Équations, inéquations, systèmes

(pages 77 à 92 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- consolider les acquis sur la résolution des équations, des inéquations et des systèmes ;
- résoudre des problèmes concrets.

COMMENTAIRES

Ce chapitre sera traité uniquement à l'aide d'exemples.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Problèmes du premier ou du second degré à une inconnue

- Équations du premier ou du second degré à une inconnue.
- Inéquations du premier ou du second degré à une inconnue.

Systèmes d'équations et d'inéquations

- Systèmes d'équations.
- Systèmes d'inéquations.

Équations et inéquations comportant ln et exp

- Équations comportant ln et exp.
- Systèmes d'équations comportant ln et exp.
- Inéquations comportant ln et exp.

savoir-faire

• Résoudre des problèmes se ramenant aux équations ou aux inéquations du premier degré ou du second degré.

- Résoudre un problème se ramenant à un système d'équations.
- Résoudre un problème se ramenant à un système d'inéquations.
- Résoudre un problème de programmation linéaire.

- Résoudre des équations ou des systèmes d'équations comportant ln et exp.
- Résoudre des inéquations comportant ln et exp.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 82

a) $-\frac{2}{3}$

b) 2

c) $\frac{8}{3}$

d) $-\frac{29}{22}$

♦ Exercice 1.b p.82

Désignons par x l'héritage du benjamin.

L'héritage du cadet est : $x + 800\ 000$.

L'héritage de l'aîné est : $x + 1\ 300\ 000$.

On a : $x + (x + 800\ 000) + (x + 1\ 300\ 000) = 15\ 000\ 000$.

On en déduit que : $x = 4\ 300\ 000$.

L'héritage du benjamin est : 4 300 000 F ;

L'héritage du cadet est : 5 100 000 F ;

L'héritage de l'aîné est : 5 600 000 F.

♦ Exercice 1.c p. 82

Désignons par x l'âge de Kodjo.

On a : $100 - x = \frac{3}{2}x$. On en déduit que : $x = 40$. Donc Kodjo a 40 ans.

♦ Exercice 1.d p. 82

a) L'équation a deux solutions : -1 et $\frac{3}{2}$.

b) L'équation a deux solutions : -5 et $\frac{4}{3}$.

♦ Exercice 1.e p. 82

Les deux paraboles se coupent en $A(-1; 2)$ et $B(2; 11)$.

Sur les intervalles $]-\infty; -1[$ et $]2; +\infty[$, $(\mathcal{P})$ est au-dessus de $(\mathcal{P}')$.

Sur l'intervalle $]-1; 2[$, $(\mathcal{P})$ est au-dessous de $(\mathcal{P}')$.

♦ Exercice 1.f p. 82

a) $S =]3; +\infty[$

b) $S =]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{5}{3}; +\infty[$.

♦ Exercice 2.a p. 85

a) $S = \emptyset$

b) $S = \{(1 - 5\lambda; \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$

c) $S = \{(4; 2)\}$

d) $S = \{(\frac{2}{5}; \frac{18}{5})\}$.

♦ Exercice 2.b p. 85

Désignons par x le prix d'un coca et y le prix d'un croissant.

On a : $\begin{cases} 3x + 4y = 1\,450 \\ 5x + 2y = 1\,600 \end{cases}$

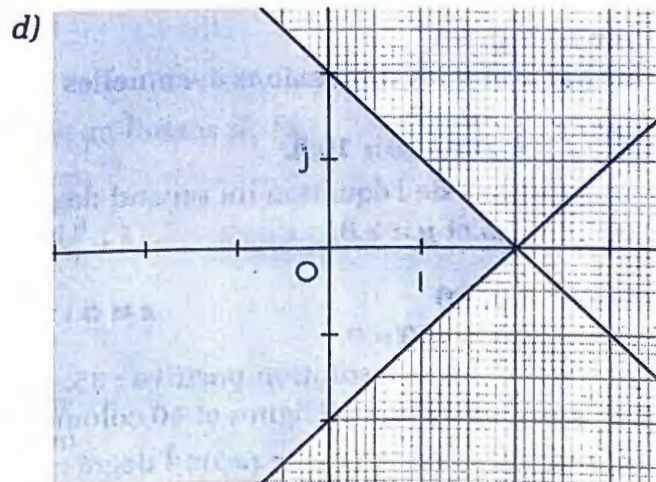
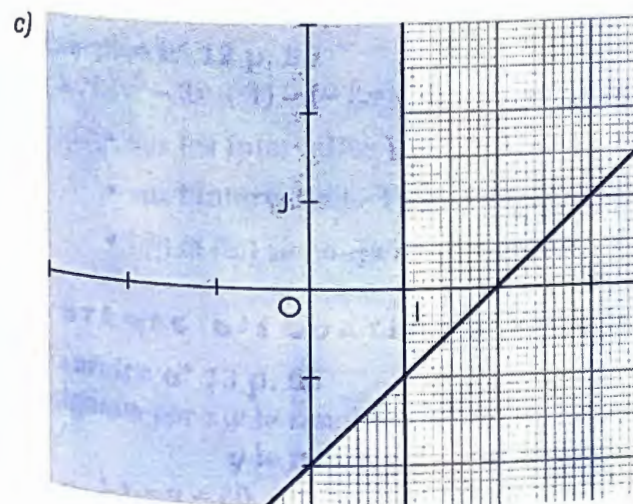
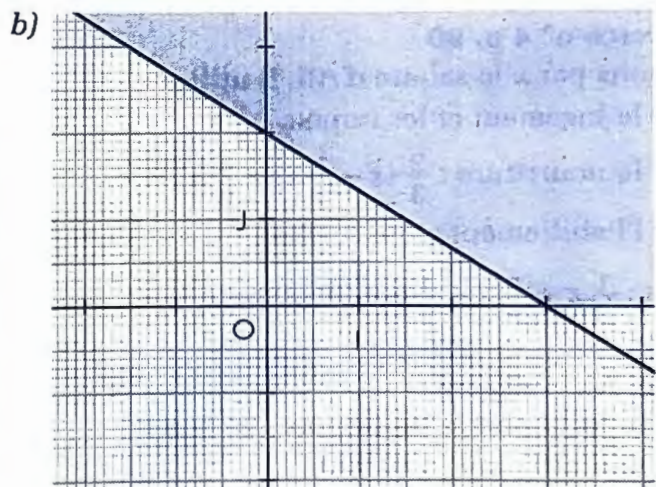
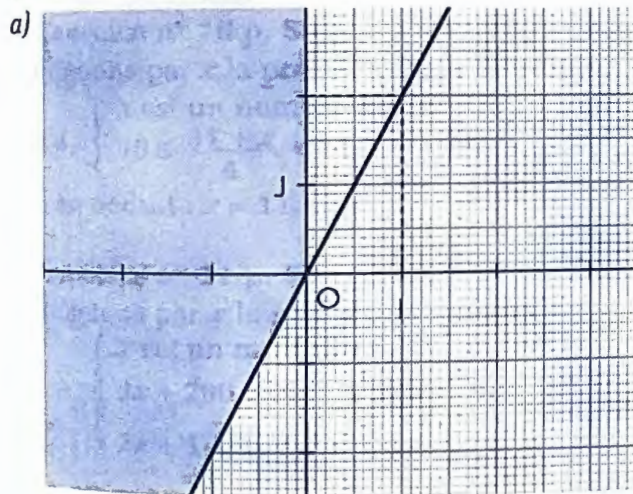
On trouve : $x = 250$ et $y = 175$.

♦ Exercice 2.c p. 85

a) La partie coloriée a pour système d'inéquations : $-2 \leq y \leq 0$.

b) La partie coloriée a pour système d'inéquations : $-2 \leq x \leq 2$.

♦ Exercice 2.d p. 85



Exercices d'apprentissage

PROBLÈMES DU PREMIER OU DU SECOND DEGRÉ À UNE INCONNUE

♦ Exercice n° 1 p. 90

Désignons par x le nombre de litres d'essence vendue le premier jour. Le pompiste a vendu successivement :

- le 1^{er} jour : x ;
- le 2^e jour : $x - 100$;
- le 3^e jour : $x - 200$;
-
- le 9^e jour : $x - 800$.

Le nombre de litres d'essence vendue en 9 jours est donc : $9x - 3\,600$.

On a : $9x - 3\,600 = 4\,500$.

On trouve : $x = 900$.

♦ Exercice n° 2 p. 90

On obtient l'équation : $(n - 2)^2 + (n - 1)^2 = n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2$; ou $n(n + 12) = 0$.

On en déduit les nombres cherchés : $(-2, -1, 0, 1 \text{ et } 2)$ ou $(-14, -13, -12, -11 \text{ et } -10)$.

♦ Exercice n° 3 p. 90

Désignons par x le nombre d'enfants qui ont cotisé et y le prix du ballon.

On a : $\begin{cases} 250x = y \\ 200(x + 3) = y. \end{cases}$

On trouve : $x = 12$ et $y = 3\,000$.

♦ Exercice n° 4 p. 90

Désignons par x le salaire d'Ali. Il utilise :

- pour le logement et les impôts : $\frac{1}{3}x$;
- pour la nourriture : $\frac{2}{3}(x - \frac{1}{3}x) = \frac{4}{9}x$;
- pour l'habillement et les loisirs : $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}x) = \frac{1}{9}x$.

1. On a : $\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}x + 30\,000 = x$.

On en déduit : $x = 270\,000$.

2. Donc, Ali consacre :

- pour le logement et les impôts : 90 000 F ;
- pour la nourriture : 120 000 F ;
- pour l'habillement et les loisirs : 30 000 F.

♦ Exercice n° 5 p. 90

Désignons par x et y les dimensions éventuelles d'un tel rectangle.

On doit avoir : $\begin{cases} xy = 7 \\ 2(x + y) = 10,6. \end{cases}$

x et y sont solutions de l'équation du second degré : $10x^2 - 53x + 70 = 0$.

On trouve : $x = 2,5$ et $y = 2,8$.

♦ Exercice n° 6 p. 90

1. On a : $n^2 + 5n - 1\,400 = 0$.

Cette équation admet une solution positive : 35.

Le tableau comprend donc 35 lignes et 40 colonnes.

2. On doit résoudre l'équation du second degré : $n^2 + 5n - 80 = 0$.

Son discriminant est : $\Delta = 345 = 3 \times 5 \times 23$.

Δ n'étant pas un carré exact, le tableau ne peut pas avoir 80 cases.

♦ Exercice n° 7 p. 90

Désignons par x et y les deux nombres.

$$\text{On a : } \begin{cases} xy = 15 \\ 2x + 3y = 21. \end{cases}$$

On en déduit l'équation du second degré : $2x^2 - 21x + 45 = 0$.

Cette équation a une seule solution entière : $x = 3$.

On en déduit : $y = 5$.

Les deux nombres cherchés sont 3 et 5.

♦ Exercice n° 8 p. 90

On doit avoir : $-\frac{4}{(x-1)^2} = -4$; c'est-à-dire : $(x-1)^2 = 1$.

On en déduit : $(x = 2 \text{ et } y = 7)$ ou $(x = 0 \text{ et } y = -1)$; d'où les points : $A(2 ; 7)$ et $B(0 ; -1)$.

♦ Exercice n° 9 p. 90

On peut résumer la situation dans un tableau.

	Nombre de femmes	Nombre d'hommes
Avant l'embauche	3	18
Après l'embauche	x	y
Embauchés	$x - 3$	$y - 18$

$$\text{On a : } \begin{cases} x - 3 = y - 18 \\ y \geq 3x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = x + 15 \\ y \geq 3x \end{cases}.$$

On en déduit : $x_{\max} = 7$ et $y_{\max} = 22$.

♦ Exercice n° 10 p. 90

Désignons par x la première note de Kodjo.

$$\text{On a : } \begin{cases} x \text{ est un nombre } 1^{\text{er}} \\ 10 \leq \frac{31+x}{4} < 11 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \text{ est un nombre } 1^{\text{er}} \\ 9 \leq x < 13 \end{cases}.$$

On en déduit : $x = 11$.

♦ Exercice n° 11 p. 90

Désignons par x le prix d'une igname.

$$\text{On a : } \begin{cases} x \text{ est un multiple de 3} \\ 3x + 200 > 2x + 1\,200 \\ 2x + 1\,200 < x + 2\,500 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \text{ est un multiple de 3} \\ 1\,000 < x < 1\,300 \end{cases}.$$

Le prix d'une igname est 1 200 F.

♦ Exercice n° 12 p. 90

$$\text{On a : } (2x^2 - 3x + 1) - (-2x + 4) = (x + 1)(2x - 3).$$

Donc : • sur les intervalles $]-\infty ; -1[$ et $]\frac{3}{2} ; +\infty[$, $(\mathcal{P})$ est au-dessus de $(\mathcal{Q})$.

• sur l'intervalle $]-1 ; \frac{3}{2}[$, $(\mathcal{P})$ est au-dessous de $(\mathcal{Q})$.

• $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ se coupent aux points $A(-1 ; 6)$ et $B(\frac{3}{2} ; 1)$.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

♦ Exercice n° 13 p. 90

Désignons par : x le nombre de parties gagnées par Yapi

y le nombre de parties gagnées par Yapo.

$$\text{On a : } \begin{cases} x + y = 26 \\ 5x = 8y \end{cases}.$$

On trouve : $x = 16$ et $y = 10$.

♦ Exercice n° 14 p. 91

Désignons par : x le prix d'une noix de coco.

y le prix d'un ananas.

$$\text{On a : } \begin{cases} 10x + 10y + 100 = 2\,000 \\ 12x + 10y - 70 = 2\,000 \end{cases} \quad \text{ou : } \begin{cases} 10x + 10y = 1\,900 \\ 12x + 10y = 2\,070 \end{cases}$$

On trouve : $x = 85$ et $y = 105$.

♦ Exercice n° 15 p. 91

Désignons par : l le nombre d'élèves littéraires.

s le nombre d'élèves scientifiques.

• Nombre d'élèves littéraires se croyant scientifiques : $\frac{10}{100} l$.

• Nombre d'élèves scientifiques se croyant littéraires : $\frac{10}{100} s$.

• Nombre d'élèves se sachant littéraires : $l - \frac{10}{100} l = \frac{90}{100} l$.

• Nombre d'élèves se sachant scientifiques : $\frac{90}{100} s$.

$$\text{On a : } \begin{cases} l + s = 1\,000 \\ \frac{26}{100} (l + s) = \frac{10}{100} l + \frac{90}{100} s \end{cases} \quad \text{ou : } \begin{cases} l + s = 1\,000 \\ l = 4s \end{cases}$$

On trouve : $s = 200$ et $l = 800$.

♦ Exercice n° 16 p. 91

1. On trouve : $x = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{1}{6}$.

2. On trouve : $\frac{1}{v} = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{v'} = \frac{1}{6}$. Donc : $v = 3$ et $v' = 6$.

♦ Exercice n° 17 p. 91

a) On pose : $X = x^2$ et $Y = y^2$. On trouve : $X = 4$ et $Y = 3$.

Donc : $x = 2$ ou $x = -2$; $y = \sqrt{3}$ ou $y = -\sqrt{3}$.

On obtient 4 solutions : $(2 ; \sqrt{3})$; $(2 ; -\sqrt{3})$; $(-2 ; \sqrt{3})$; $(-2 ; -\sqrt{3})$.

b) On pose : $X = \frac{1}{x}$ et $Y = \frac{1}{y}$. On trouve : $X = -1$ et $Y = \frac{7}{3}$. Donc : $x = -1$ et $y = \frac{3}{7}$.

♦ Exercice n° 18 p. 91

a) On pose : $X = x - 3$ et $Y = y - 1$. On trouve : $X = -14$ et $Y = 10$. Donc : $x = -11$ et $y = 11$.

b) On pose : $X = \frac{1}{x+1}$ et $Y = \frac{1}{y+2}$. On trouve : $X = 4$ et $Y = 3$. Donc : $x = -\frac{3}{4}$ et $y = -\frac{5}{3}$.

♦ Exercice n° 19 p. 91

$$a) \begin{cases} -x + y - 2 \leq 0 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -4x + 3y - 12 \leq 0 \\ x \leq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

♦ Exercice n° 20 p. 91

1. Soit x le nombre de gâteaux de type 1 (en forme de cylindre)

et y le nombre de gâteaux de type 2 (en forme de tronc de cône).

	Temps de cuisson en min.	Poids de garniture en g.
Gâteaux de type 1	$3x$	$50x$
Gâteaux de type 2	$5y$	$150y$
Total	$3x + 5y$	$50x + 150y$

• x et y sont des nombres entiers ; donc $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$.

• 6 heures = 360 minutes, donc $3x + 5y \leq 360$, car le four n'est utilisable que 6 heures par jour au maximum.

• $9 \text{ kg} = 9\,000 \text{ g}$, donc $50x + 150y \leq 9\,000$, soit $x + 3y \leq 180$ (en divisant par 50), car le pâtissier dispose de 9 kg de garniture au maximum.

• $x + y \leq 100$, car le pâtissier vend au maximum 100 gâteaux par jour.

Par conséquent le système de contraintes est :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \\ 3x + 5y \leq 360 \\ x + 3y \leq 180 \\ x + y \leq 100. \end{cases}$$

2. a) Soit (D_1) la droite d'équation $3x + 5y = 360$

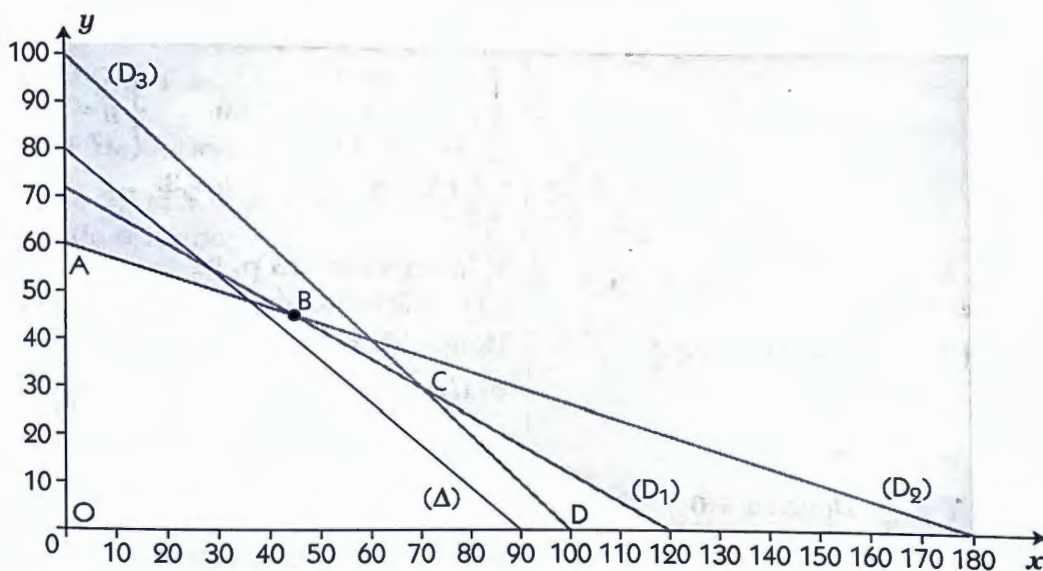
(D_2) la droite d'équation $x + 3y = 180$

(D_3) la droite d'équation $x + y = 100$.

Pour (D_1) , on place les points de coordonnées : $x = 0$ $y = 72$
 $y = 0$ $x = 120$.

Pour (D_2) , on place les points de coordonnées : $x = 0$ $y = 60$
 $x = 60$ $y = 40$.

Pour (D_3) , on place les points de coordonnées : $x = 0$ $y = 100$
 $y = 0$ $x = 100$.



Les solutions du système sont les points à coordonnées entières situés sur et à l'intérieur du polygone OABCD.

b) Le pâtissier ne peut vendre 60 gâteaux de type 1 et 80 du type 2, car le point de coordonnées $(60 ; 80)$ est à l'extérieur du polygone OABCD. Par contre il peut vendre 40 gâteaux de type 1 et 30 de type 2, car le point de coordonnées $(40 ; 30)$ est à l'intérieur du polygone OABCD.

Dans ce cas le bénéfice réalisé est de $400 \times 40 + 450 \times 30 = 29\,500 \text{ F CFA}$.

3. a) Le bénéfice réalisé est : $b = 400x + 450y$.

b) La droite (Δ) a pour équation : $400x + 450y = 36\,000$, soit $8x + 9y = 720$.

Pour $x = 0$, $y = \frac{720}{9} = 80$ et pour $y = 0$, $x = \frac{720}{8} = 90$.

4. a) L'équation de (Δ) est équivalente à $y = -\frac{8}{9}x + 80$.

D'autre part : $b = 400x + 450y$ équivaut à $y = -\frac{8}{9}x + \frac{b}{450}$ où $\frac{b}{450}$, est l'ordonnée à l'origine de cette droite.

Les droites d'équation $y = -\frac{8}{9}x + 80$ et $y = -\frac{8}{9}x + \frac{b}{450}$ sont parallèles, car elles ont le même coefficient directeur $-\frac{8}{9}$.

Pour réaliser un bénéfice b maximum, il faut que l'ordonnée à l'origine $\frac{b}{450}$ soit maximum tout en restant sur le polygone OABCD.

On constate que $\frac{b}{450}$ sera maximum lorsque la droite d'équation $y = -\frac{8}{9}x + \frac{b}{450}$ passe par le point C, point d'intersection de (D_1) et (D_3) .

Les coordonnées de C sont solutions du système :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 360 \\ x + y = 100 \end{cases} ; \text{ c'est-à-dire : } x = 70 \text{ et } y = 30.$$

b) Par conséquent le bénéfice maximal est : $b = 400 \times 70 + 450 \times 30 = 41\,500$ F CFA.

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS COMPORTANT LN ET EXP

◆ Exercice n° 21 p. 91

On pose : $X = \ln x$.

a) On obtient : $X = 1$ ou $X = -2$. Donc : $x = e$ ou $x = e^{-2}$.

b) On obtient : $X = -1$ ou $X = \frac{3}{2}$. Donc : $x = e^{-1}$ ou $x = e^{\frac{3}{2}}$.

◆ Exercice n° 22 p. 91

On pose : $X = e^x$. On a : $X > 0$.

a) On obtient : $X = 1$. Donc : $x = 0$.

b) On obtient : $X = \frac{1}{2}$. Donc : $x = -\ln 2$.

◆ Exercice n° 24 p. 91

a) On pose : $X = e^x$ et $Y = e^y$.

On trouve : $X = \frac{3}{2}$ et $Y = 4$. Donc : $x = \ln \frac{3}{2}$ et $y = \ln 4$.

b) On pose : $X = e^{-x}$ et $Y = e^{-y}$.

On trouve : $X = 1$ et $Y = \frac{2}{3}$. Donc : $x = 0$ et $y = \ln \frac{3}{2}$.

◆ Exercice n° 23 p. 91

a) On pose : $X = \ln(x-2)$ et $Y = \ln(y-1)$.

On trouve : $X = 3$ et $Y = 2$.

Donc : $x = 2 + e^3$ et $y = 1 + e^2$.

b) Le système équivaut à :

$$\begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x - y = 1 \\ xy = 12 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ y = x - 1 \\ x^2 - x - 12 = 0. \end{cases}$$

On trouve : $x = 4$ et $y = 3$.

◆ Exercice n° 25 p. 91

a) L'inéquation équivaut à : $(\ln x - 1)(\ln x + 2) \leq 0$.

Donc : $\ln x \in [-2; 1]$ ou : $x \in [e^{-2}; e]$.

b) L'ensemble des solutions est : $]e^{-1}; e^{\frac{3}{2}}]$.

◆ Exercice n° 26 p. 92

a) $S = \mathbb{R}^*$

b) $S =]-\infty; -\ln 2]$.

◆ Exercice n° 27 p. 92

a) $] \ln 2; \ln 3[$

c) $S =] \ln 2; +\infty[$

b) $S =]-\infty; 0]$

d) $S =]-\infty; \ln 2] \cup [1; +\infty[$.

Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n° 28 p. 92

Désignons par x et y les dimensions du jardin.

$$\text{On a : } \begin{cases} xy = 300 \\ (x+5)(y+5) = 500 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} xy = 300 \\ x + y = 35 \end{cases} \quad \text{Donc : } \begin{cases} y = 35 - x \\ x^2 - 35x + 300 = 0 \end{cases}$$

L'équation du second degré a pour solutions 15 et 20.

Le jardin a pour longueur 20 et pour largeur 15.

◆ Exercice n° 29 p. 92

1. L'équation a pour solutions : -3 ; 0 et 8 .

2. L'équation a pour solutions : e^{-3} ; 1 et e^8 .

◆ Exercice n° 30 p. 92

L'inéquation équivaut à : $(e^x + 2)(e^x - 3) \geq 0$.

L'ensemble des solutions est : $[\ln 3; +\infty[$.

♦ Exercice n° 31 p. 92

1. On trouve : $x = \frac{1}{12}$ et $y = \frac{1}{60}$.

2. a) Désignons par : t_{ABC} le temps mis pour parcourir le trajet ABC ;
 t_{CBA} le temps mis pour parcourir le trajet CBA.

On a : $\begin{cases} t_{ABC} + t_{CBA} = 300 \\ t_{CBA} = t_{ABC} + 40 \end{cases}$.

On en déduit : $t_{ABC} = 130$ min et $t_{CBA} = 170$ min.

b) On a, en exprimant le temps en heures : $t_{ABC} = \frac{130}{60} = \frac{13}{6}$ et $t_{CBA} = \frac{170}{60} = \frac{17}{6}$.

On a : $t_{ABC} = t_{AB} + t_{BC} = \frac{20}{v} + \frac{30}{v'} = \frac{13}{6}$.

$t_{CBA} = t_{CB} + t_{BA} = \frac{30}{v} + \frac{20}{v'} = \frac{17}{6}$.

On obtient le système : $\begin{cases} \frac{20}{v} + \frac{30}{v'} = \frac{13}{6} \\ \frac{30}{v} + \frac{20}{v'} = \frac{17}{6} \end{cases}$.

c) D'après la question 1., on a : $\frac{1}{v} = \frac{1}{12}$ et $\frac{1}{v'} = \frac{1}{60}$. Donc : $v = 12$ et $v' = 60$.

♦ Exercice n° 32 p. 92

a) On pose : $X = \frac{1}{x+3}$ et $Y = \frac{1}{2y-1}$.

On trouve : $X = 2$ et $Y = 3$. Donc : $x = -\frac{5}{2}$ et $y = \frac{2}{3}$.

b) On pose : $X = (x+3)^2$ et $Y = y^2$. On a : $X \geq 0$ et $Y \geq 0$.

Le système n'a pas de solution.

♦ Exercice n° 33 p. 92

a) On pose : $X = x^2$ et $Y = \frac{1}{y}$.

On trouve : $X = 4$ et $Y = 1$.

Donc, le système a pour solutions : $(2 ; 1)$ et $(-2 ; 1)$.

b) On pose : $X = \sqrt{x}$.

On trouve : $X = 3$ et $y = -4$.

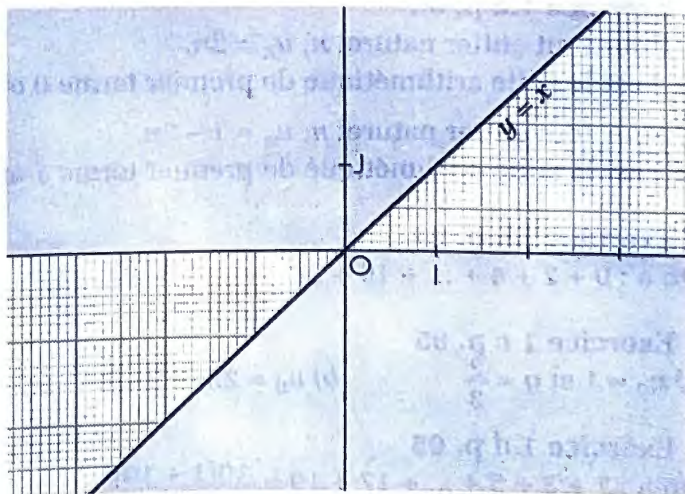
Donc, le système a pour solution : $(9 ; -4)$.

♦ Exercice n° 34 p. 92

Le système équivaut à :

$\begin{cases} y \geq 0 \\ y - x \geq 0 \end{cases}$ (1) ou $\begin{cases} y \leq 0 \\ y - x \leq 0 \end{cases}$ (2).

La représentation graphique du système est la réunion des représentations graphiques des systèmes (1) et (2).



6. Suites numériques

(pages 93 à 106 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à renforcer les connaissances sur les suites numériques par l'étude des variations et la notion de limite.

COMMENTAIRES

La calculatrice sera un outil privilégié pour aborder cette notion.
En liaison avec la philosophie, on pourra traiter de la notion d'infini.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Suites arithmétiques, suites géométriques

Variation d'une suite numérique

- Sens de variation d'une suite numérique.
- Sens de variation d'une suite arithmétique.
- Sens de variation d'une suite géométrique.

Notion de limite d'une suite numérique

- Approche de la notion de limite.
- Limites de suites particulières.

Applications des suites

savoir-faire

- Résoudre des problèmes faisant intervenir une suite arithmétique ou une suite géométrique.
- Conjecturer le sens de variation d'une suite numérique :
 - à l'aide d'une calculatrice ;
 - à l'aide d'une représentation graphique.
- Étudier le sens de variation d'une suite numérique.
- Conjecturer la limite d'une suite numérique :
 - à l'aide d'une calculatrice ;
 - à l'aide d'une représentation graphique.
- Déterminer la limite d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 95

a) Pour tout entier naturel n , $u_n = 2n$.

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2.

b) Pour tout entier naturel n , $u_n = 1 - 2n$.

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison -2 .

♦ Exercice 1.b p. 95

On a : $0 + 2 + 4 + \dots + 16 + 18 = \frac{10(0 + 18)}{2} = 90$.

♦ Exercice 1.c p. 95

a) $u_0 = 1$ et $q = \frac{2}{3}$ b) $u_0 = 25$ et $q = 5$ c) $u_0 = 1$ et $q = 9$ d) $u_0 = 5$ et $q = 10$.

♦ Exercice 1.d p. 95

On a : $1 + 3 + 5 + \dots + 17 + 19 = \frac{10(1 + 19)}{2} = 100$.

♦ Exercice 2.a p. 98

Les aires des triangles sont de plus en plus grandes.

La suite (d_n) semble croissante.

♦ Exercice 2.b p. 98

Suite	(a_n)	(b_n)	(c_n)	(d_n)
Raison	- 2	$\frac{1}{8}$	1	1
Sens de variation	décroissante	croissante	croissante	croissante

♦ Exercice 2.c p. 98

Suite	(a_n)	(b_n)	(c_n)	(d_n)
Raison	100	$\frac{1}{8}$	2	0,5
Sens de variation	croissante	décroissante	croissante	décroissante

♦ Exercice 3.a p. 102

a) $\lim u_n = -\infty$

b) $\lim v_n = 3$.

♦ Exercice 3.b p. 102

a) $\lim u_n = +\infty$

b) $\lim v_n = -\infty$.

♦ Exercice 3.c p. 102

a) $\lim u_n = +\infty$

b) $\lim v_n = 0$.

♦ Exercice 3.d p. 102

a) $\lim u_n = -\infty$

b) $\lim v_n = +\infty$.

☐ Exercices d'apprentissage

SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

♦ Exercice n° 1 p. 104

1. Pour tout n de $\{1, 2, \dots, 23, 24\}$, $T_n = T_1 - 10\,000(n-1)$.

2. $S = 24 T_1 - 2\,760\,000$.

3. $24 T_1 - 2\,760\,000 = 3\,000\,000$; donc : $T_1 = 240\,000$.

On en déduit : $T_2 = 230\,000$; ... ; $T_{23} = 20\,000$; $T_{24} = 10\,000$.

♦ Exercice n° 2 p. 104

1. $u_1 = 2\,500$; $u_2 = 3\,000$; $u_3 = 3\,500$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = 2\,500 + 500(n-1) = 2\,000 + 500n$.

3. $u_n = 4\,500$ équivaut à $2\,000 + 500n = 4\,500$. Donc : $n = 5$.

Au bout de 5 semaines, Salif gagnera 4 500 F.

4. Salif travaille pendant 12 semaines.

On a : $u_1 + u_2 + \dots + u_{12} = 12 \times 2\,000 + 500(1 + 2 + \dots + 12) = 63\,000$.

♦ Exercice n° 3 p. 104

1. $u_0 = 10\,000\,000$; $u_1 = 8\,000\,000$; $u_2 = 6\,400\,000$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 10\,000\,000 \times \left(\frac{8}{10}\right)^n$.

3. $u_4 = 10\,000\,000 \times \left(\frac{8}{10}\right)^4 = 4\,096\,000$.

$u_{10} = 10\,000\,000 \times \left(\frac{8}{10}\right)^{10}$; $u_{10} \approx 1\,073\,741,824$.

$u_{12} = 10\,000\,000 \times \left(\frac{8}{10}\right)^{12}$; $u_{12} \approx 687\,194,767$.

♦ Exercice n° 4 p. 104

1. $b_0 = 6\,000\,000$; $b_1 = 6\,300\,000$; $b_2 = 6\,615\,000$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_n = 6\,000\,000 \times \left(\frac{105}{100}\right)^n$.

3. $b_n \geq 2 \times 6\,000\,000$ équivaut à $\left(\frac{105}{100}\right)^n \geq 2$. On trouve l'année 2015.

4. $b_0 + b_1 + \dots + b_9 = 6 \times 10^6 \times \frac{(1,05)^{10} - 1}{1,05 - 1} = 12 \times 10^7 \times [(1,05)^{10} - 1]$; $b_0 + b_1 + \dots + b_9 \approx 75\,467\,355$.

VARIATION D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

◆ Exercice n° 5 p. 104

a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -n$.
Donc, la suite (u_n) est décroissante.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{1+2^{n+1}}{2^{n+1}}$.
Donc, la suite (u_n) est décroissante.

c) La fonction $x \mapsto x^2 - 8x - 5$ est croissante sur $[4; +\infty[$.

Donc, la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

d) La fonction $x \mapsto \frac{2x+3}{x+1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Donc, la suite (u_n) est décroissante.

◆ Exercice n° 6 p. 104

Suite	a)	b)	c)	d)
Raison	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	-2	10
Sens de variation	décroissante	croissante	décroissante	croissante

◆ Exercice n° 7 p. 104

Suite	a)	b)	c)	d)
Raison	3	$\frac{1}{2}$	$1,5$	$0,5$
Sens de variation	croissante	décroissante	croissante	décroissante

◆ Exercice n° 8 p. 104

1. Les aires des carrés deviennent de plus en plus petites.

On peut conjecturer que la suite (a_n) est décroissante.

2. a) Soit c_n le côté du carré construit à l'étape n . On a : $a_{n+1} : c_{n+1}^2 = (\frac{1}{2} c_n)^2 = \frac{1}{4} c_n^2 = \frac{1}{4} a_n$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{4^n}$.

c) (a_n) est une suite géométrique de raison appartenant à $]0; 1[$. Donc, la suite (a_n) est décroissante.

NOTION DE LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

◆ Exercice n° 9 p. 104

a) $\lim u_n = -\infty$

b) $\lim u_n = +\infty$

c) $\lim u_n = 1$

d) $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

◆ Exercice n° 10 p. 104

On a des suites géométriques.

a) $\lim u_n = +\infty$

b) $\lim u_n = 0$

c) $\lim u_n = 0$

d) $\lim u_n = +\infty$.

◆ Exercice n° 11 p. 104

a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{25} \times (\frac{7}{5})^n$. Donc : $\lim u_n = +\infty$. b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = (\frac{2}{3})^n - 1$. Donc : $\lim u_n = -1$.

◆ Exercice n° 12 p. 104

1. Les périmètres des triangles deviennent de plus en plus petits. On peut conjecturer que : $\lim P_n = 0$.

2. a) Soit c_n le côté du triangle à l'étape n . On a : $P_{n+1} = 3c_{n+1} = 3(\frac{1}{2} c_n) = \frac{1}{2} (3c_n) = \frac{1}{2} P_n$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $P_n = \frac{1}{2^n}$.

c) (P_n) est une suite géométrique de raison appartenant à $]0; 1[$. Donc : $\lim P_n = 0$.

Exercices d'approfondissement

◆ Exercice n° 13 p. 104

1. a) On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante.

b) On peut conjecturer que : $\lim u_n = +\infty$.

2. a) On a $(\mathcal{D}) : y = \frac{1}{3} (5x - 4)$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{5}{3} u_n - \frac{4}{3}$.

3. a) $u_0 = \frac{16}{5}$; $u_1 = 4$; $u_2 = \frac{16}{3}$.

b) On a : $u_1 - u_0 = \frac{4}{5}$ et $u_2 - u_1 = \frac{4}{3}$. Donc : $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$; (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

On a : $\frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{4}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{3}$. Donc : $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$; (u_n) n'est pas une suite géométrique.

4. a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{5}{3}(u_n - 2) = \frac{5}{3}v_n$.

Donc, (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{3}$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \frac{6}{5} \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$;

$$u_n = 2 + \frac{6}{5} \times \left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5} \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$. Donc, la suite (u_n) est croissante.

On a : $\lim \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$; donc : $\lim u_n = +\infty$.

♦ Exercice n° 14 p. 105

1.	Effectif de 2 ^e	Effectif de 1 ^{re}	Effectif de T ^{le}	Effectif du lycée
Année 0	500	500	500	1 500
Année 1	520	500	500	1 520
Année 2	540	520	500	1 560
...	...	...	...	...
Année n	$500 + 20n$	$500 + 20(n-1)$	$500 + 20(n-2)$	$S_0 = 1\,500$; $S_1 = 1\,520$ Pour $n \geq 2$, $S_n = 1\,500 + 60(n-1)$

2. On doit avoir : $1\,500 + 60(n-1) > 2\,000$ et $n \in \mathbb{N}$. Donc : $n \geq 10$.

Au bout de 10 ans, l'effectif du lycée dépassera 2 000 élèves.

3. $\begin{cases} 1\,500 + 60(n-1) = 3\,000 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ entraîne $n = 26$.

L'effectif du lycée va doubler au bout de 26 années.

♦ Exercice n° 15 p. 105

1. $u_1 = 3$; $u_2 = \frac{9}{2}$; $u_3 = \frac{21}{4}$.

2. a) $v_0 = 6$; $v_1 = 3$; $v_2 = \frac{3}{2}$; $v_3 = \frac{3}{4}$.

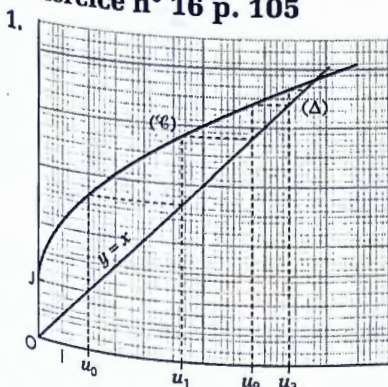
b) $v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - \left(\frac{1}{2}u_n + 3\right) = -\frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2}(6 - u_n) = \frac{1}{2}v_n$.

(v_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 6 et de raison $\frac{1}{2}$.

c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \frac{6}{2^n}$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 6 - \frac{6}{2^n}$.

d) $\lim v_n = 0$ et $\lim u_n = 6$.

♦ Exercice n° 16 p. 105



2. a) On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante.

b) Soit $p(n)$ la propriété : pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$.

• On a : $u_0 \leq u_1$; donc $p(0)$ est vraie.

• Supposons $p(k)$ vraie : $u_k \leq u_{k+1}$.

La fonction $x \mapsto 2\sqrt{x} + 1$ est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Donc : $2\sqrt{u_k} + 1 \leq 2\sqrt{u_{k+1}} + 1$; c'est-à-dire : $u_{k+1} \leq u_{k+2}$.

Donc $p(k+1)$ est vraie.

On en déduit que : pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$;

c'est-à-dire que la suite (u_n) est croissante.

♦ Exercice n° 17 p. 106

1. $u_0 = 4,5$; $u_1 = 4,68$; $u_2 = 4,8672$.

$v_0 = 5$; $v_1 = 5,15$; $v_2 = 5,3045$.

2. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,04 u_n$.

(u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 4,5 et de raison 1,04.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1,03 v_n$.

(v_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 5 et de raison 1,03.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 4,5 \times (1,04)^n$.
 $v_n = 5 \times (1,03)^n$.

3. On doit avoir : $4,5 \times (1,04)^n > 5 \times (1,03)^n$. On trouve : $n > 10$; c'est-à-dire : l'année 2011.

♦ Exercice n° 18 p. 106

1. $u_0 = 20\,000$; $u_1 = 21\,200$; $u_2 = 22\,472$.

2. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,06 u_n$.

Donc, (u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 20 000 et de raison 1,06.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 20\,000 \times (1,06)^n$.

3. a) L'inéquation a pour solution : $\{16, 17, 18, \dots\}$.

b) On doit avoir : $20\,000 \times (1,06)^n \geq 50\,000$; c'est-à-dire : $(1,06)^n \geq 2,5$.

On trouve : $n \geq 16$; c'est-à-dire : l'année 2016.

4. a) $u_0 + u_1 + \dots + u_9 = 20\,000 \times \frac{(1,06)^{10} - 1}{1,06 - 1} = 263\,615,89$.

b) L'économie réalisée serait : $263\,615,89 - 250\,000 = 13\,615,89$.

♦ Exercice n° 19 p. 106

1. 1^{er} cas

On peut conjecturer que (u_n) est une suite décroissante. On a : $\lim u_n = -\infty$.

2^e cas

On peut conjecturer que (u_n) est une suite décroissante. On a : $\lim u_n = 0$.

2. a) 1^{er} cas

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 2$.

2^e cas

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n$.

b) 1^{er} cas

(u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme 5 et de raison -2 .

Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 5 - 2n$.

(u_n) est décroissante et $\lim u_n = -\infty$.

2^e cas

(u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 9 et de raison $\frac{1}{3}$.

Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{9}{3^n}$.

(u_n) est décroissante et $\lim u_n = 0$.

♦ Exercice n° 20 p. 106

1. Le nombre de tuyaux empilés est :

$1 + 2 + 3 + \dots + 29 + 30 = \frac{30 \times (1 + 30)}{2} = 465$.

2. Soit n le nombre de tuyaux posés au sol.

On a : $1 + 2 + 3 + \dots + n = 153$; c'est-à-dire : $\frac{n(n+1)}{2} = 153$.

On en déduit : $(n-17)(n+18) = 0$; donc : $n = 17$.

♦ Exercice n° 21 p. 106

1. $u_0 = 20\,000$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = u_{n-1} + 10\,000 + 1\,000n$.

2. a)
$$\begin{aligned} u_1 - u_0 &= 10\,000 + 1\,000 \times 1 \\ u_2 - u_1 &= 10\,000 + 1\,000 \times 2 \\ u_3 - u_2 &= 10\,000 + 1\,000 \times 3 \\ &\dots\dots\dots \\ u_n - u_{n-1} &= 10\,000 + 1\,000 \times n \end{aligned}$$

b) En faisant la somme membre à membre, on obtient :

$$u_n - u_0 = 10\,000n + 1\,000(1 + 2 + \dots + n) = 10\,000n + 1\,000 \times \frac{n(n+1)}{2}.$$

Donc : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 20\,000 + 10\,500n + 500n^2$.

c) $u_{10} = 20\,000 + 105\,000 + 50\,000 = 175\,000$.

♦ Exercice n° 22 p. 106

1. On a :

$$\begin{aligned} u_0 &= 4 \\ u_1 &= 4^2 \\ u_2 &= 4^4 = 4^{2^2} \\ u_3 &= 4^8 = 4^{2^3} \\ &\dots\dots\dots \\ u_n &= 4^{2^n} \end{aligned}$$

2. Soit $p(n)$ la propriété : pour tout entier naturel n , $u_n = 4^{2^n}$.

• On a : $u_0 = 4 = 4^{2^0}$; donc $p(0)$ est vraie.

• Supposons $p(k)$ vraie : $u_k = 4^{2^k}$.

On a : $u_{k+1} = (4^{2^k})^2 = 4^{2^{k+1}}$ et $p(k+1)$ est vraie.

Donc : pour tout entier naturel n , $u_n = 4^{2^n}$.

3. La suite (u_n) est croissante.

4. $\lim u_n = +\infty$.

7. Statistiques

(pages 107 à 124 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- entretenir et renforcer les concepts acquis en classe de première, concernant les indicateurs des séries statistiques et leurs représentations graphiques.
- représenter les séries à deux caractères quantitatifs et aborder l'ajustement linéaire.

COMMENTAIRES

• Ce chapitre donne l'occasion de faire fonctionner les concepts acquis en classes de seconde et première, tant pour l'organisation des données que pour leurs représentations graphiques.

Les points nouveaux sont :

- la présentation de nouvelles caractéristiques d'une série statistique (quartiles et déciles) ;
- le nuage de points d'une série double ;
- l'ajustement linéaire.

• Comme souvent en statistiques, le cours comportera essentiellement des exercices bien choisis.

Quand l'occasion se présente, on pourra :

- interpréter les caractéristiques en terme de répartition des éléments d'une série ;
- à partir de la droite d'ajustement, estimer l'une des grandeurs connaissant l'autre d'une série double.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Représentations graphiques de séries statistiques

- Caractère qualitatif :
 - diagramme circulaire ;
 - diagramme à bandes.
- Caractère quantitatif discret :
 - diagrammes en bâtons ;
 - polygones des effectifs (ou fréquences).
- Caractère quantitatif continu :
 - histogramme ;
 - polygones des fréquences cumulées.

Indicateurs d'une série statistique

- Indicateurs de position.
Mode(s), moyenne, médiane, quartiles, déciles.

- Indicateurs de dispersion.
Variance et écart type.

Séries statistiques à deux caractères

- Organisation des données :
 - série statistique à deux caractères (ou série double) ;
 - effectif d'une modalité ($x ; y$) ;
 - séries statistiques marginales ;
 - nuages de points d'une série double ;
 - point moyen d'un nuage de points.
- Ajustement linéaire.
Ajustement linéaire par la méthode de Mayer.

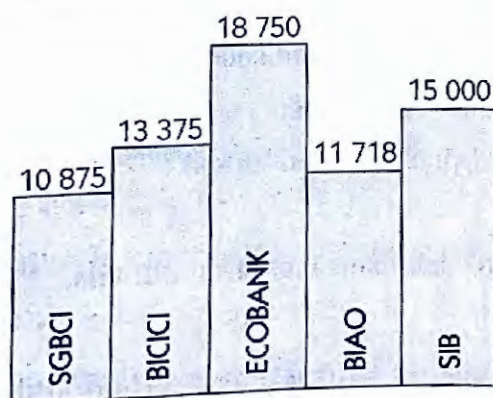
savoir-faire

- Représenter une série à caractère qualitatif par un diagramme circulaire ou par un diagramme à bandes.
- Représenter une série à caractère quantitatif discret par un diagramme en bâtons, construire éventuellement son polygone des effectifs.
- Représenter une série à caractère quantitatif continu par un histogramme, par un polygone des effectifs cumulés (ou fréquences cumulées).
- Établir le tableau des effectifs ou des fréquences à partir d'une représentation graphique d'une série.
- Déterminer le(s) mode(s), la moyenne, la médiane, les premier et troisième quartiles, les premier et neuvième déciles d'une série statistique à caractère quantitatif.
- Calculer la variance, l'écart type d'une série statistique à caractère quantitatif.
- Déterminer les deux séries statistiques marginales d'une série double.
- Représenter une série double par un nuage de points.
- Déterminer le point moyen d'un nuage de points
- Déterminer la droite d'ajustement linéaire d'un nuage de points par la méthode de Mayer.
À partir de la droite d'ajustement, estimer l'une des grandeurs connaissant l'autre.

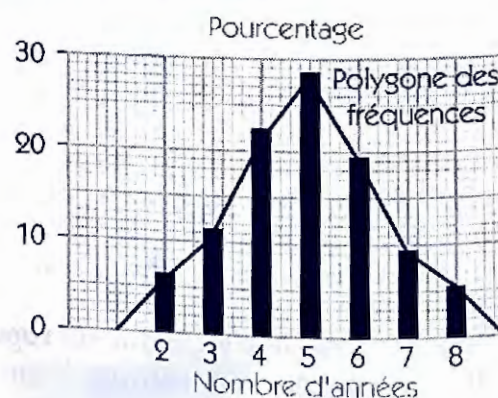
EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 110

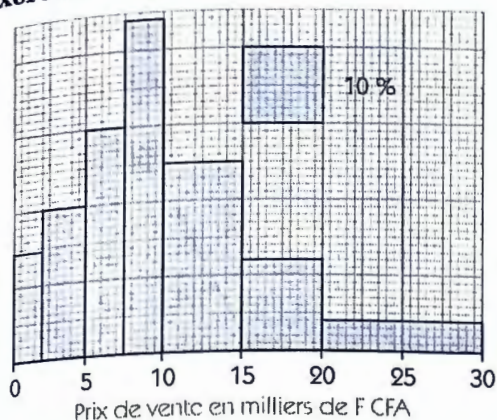


♦ Exercice 1.b p. 110



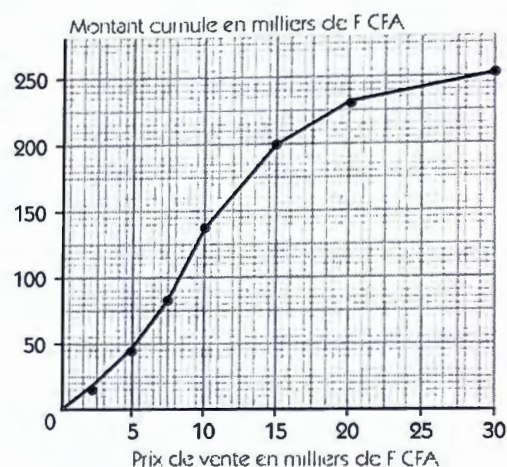
♦ Exercice 1.c p. 110

1.



2. a)

Prix en milliers de F CFA	Fréquence	Montant des ventes	Montant cumulé croissant
[0 ; 2[	6	15 000	15 000
[2 ; 5[	12	30 000	45 000
[5 ; 7,5[	15	37 500	82 500
[7,5 ; 10[	22	55 000	137 500
[10 ; 15[	25	62 500	200 000
[15 ; 20[	12	30 000	230 000
[20 ; 30[	8	20 000	250 000



b) Ci-contre le polygone des montants cumulés.

♦ Exercice 2.a p. 115

1.

Nombre d'années	1	2	3	4	5	6	7
Pourcentage	8	10	23	26	18	9	6

Le pourcentage de « sages » du comité dont le terme d'acquisition du statut de « sage » :

– est compris entre 3 et 5 ans : $23 + 26 + 18 = 67 \%$;

– est supérieur à 3 ans : $26 + 18 + 9 + 6 = 59 \%$;

– est inférieur à 5 ans : $8 + 10 + 23 + 26 = 67 \%$.

2.

Nombre d'années	Pourcentage	Produit du nombre d'années par le pourcentage	Écart à la moyenne	Produit du carré de l'écart à la moyenne par le pourcentage
1	8	8	-2,87	65,895 2
2	10	20	-1,87	34,969
3	23	69	-0,87	17,408 7
4	26	104	0,13	0,439 4
5	18	90	1,13	22,984 2
6	9	54	2,13	40,832 1
7	6	42	3,13	58,781 4
Total	100	387		241,731

La moyenne est :

$$m = \frac{387}{100} = 3,87.$$

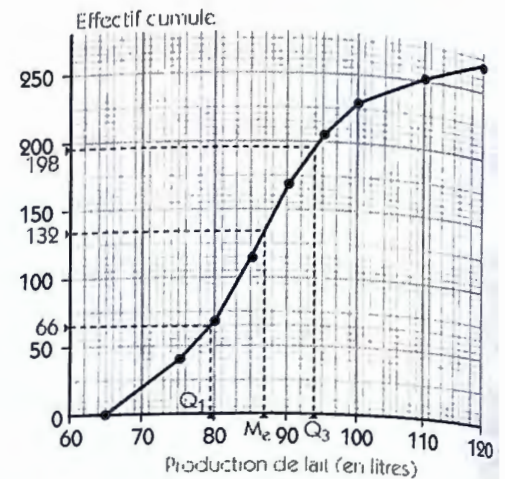
L'écart-type est :

$$\sigma = \sqrt{\frac{241,31}{100}} ; \sigma \approx 1,55.$$

♦ Exercice 2.b p. 115

1. a)

Production de lait (en litres)	Nombre de vaches laitières	Effectif cumulé croissant
[65 ; 75[	40	40
[75 ; 80[	30	70
[80 ; 85[	45	115
[85 ; 90[	58	173
[90 ; 95[	33	206
[95 ; 100[	24	230
[100 ; 110[	20	250
[110 ; 120[	14	264



b) Ci-contre le polygone des effectifs cumulés.

2. On a : $\frac{N}{2} = \frac{264}{2} = 132$;

la médiane M_e est comprise entre 85 et 90 ;

l'effectif cumulé croissant de 85 est 115 et celui de 90 est 173 ;

$$\frac{M_e - 85}{132 - 115} = \frac{90 - 85}{173 - 115} \text{ ou } M_e \approx 86,47.$$

3. On a : $\frac{N}{4} = \frac{264}{4} = 66$;

• le premier quartile Q_1 est compris entre 75 et 80 ;

l'effectif cumulé croissant de 75 est 40 et celui de 80 est 70 ;

$$\frac{Q_1 - 75}{66 - 40} = \frac{80 - 75}{70 - 40} \text{ ou } Q_1 \approx 79,33 ;$$

• le troisième quartile Q_3 est compris entre 90 et 95 ;

l'effectif cumulé croissant de 90 est 173 et celui de 95 est 206 ;

$$\frac{Q_3 - 90}{198 - 173} = \frac{95 - 90}{206 - 173} \text{ ou } Q_3 \approx 93,79.$$

Centre de la classe	Nombre de vaches laitières	Produit du centre de la classe par le nombre de vaches	Écart à la moyenne	Produit du carré de l'écart à la moyenne par le nombre de vaches
70	40	2 800	- 17,178	11 803,347 36
77,5	30	2 325	- 9,678	2 809,910 52
82,5	45	3 712,5	- 4,678	984,765 78
87,5	58	5 075	0,322	6,013 672
92,5	33	3 052,5	5,322	934,681 572
97,5	24	2 340	10,322	2 557,048 416
105	20	2 100	17,822	6 352,473 68
115	14	1 610	27,822	10 836,891 58
Total	264	23 015		36 265,132 58

La moyenne est :

$$m = \frac{23\,015}{264} ; m \approx 87,178.$$

L'écart-type est :

$$\sigma = \sqrt{\frac{36\,265,13258}{264}} ; \sigma \approx 11,72.$$

♦ Exercice 3.a p. 118

1. Ci-après le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$.

2. Sous-nuage E_1

x_i	18	23	30	45	50
y_i	84	100	128	180	192

G_1 a pour coordonnées $(x; y)$:

$$x = \frac{18 + 23 + 30 + 45 + 50}{5};$$

$$y = \frac{84 + 100 + 128 + 180 + 192}{5};$$

c'est-à-dire : (33,2 ; 136,8).

Sous-nuage E_2

x_i	68	78	100	120	130
y_i	260	292	380	440	560

G_2 a pour coordonnées $(x; y)$:

$$x = \frac{68 + 78 + 100 + 120 + 130}{5};$$

$$y = \frac{260 + 292 + 380 + 440 + 560}{5};$$

c'est-à-dire : (103,2 ; 386,4).

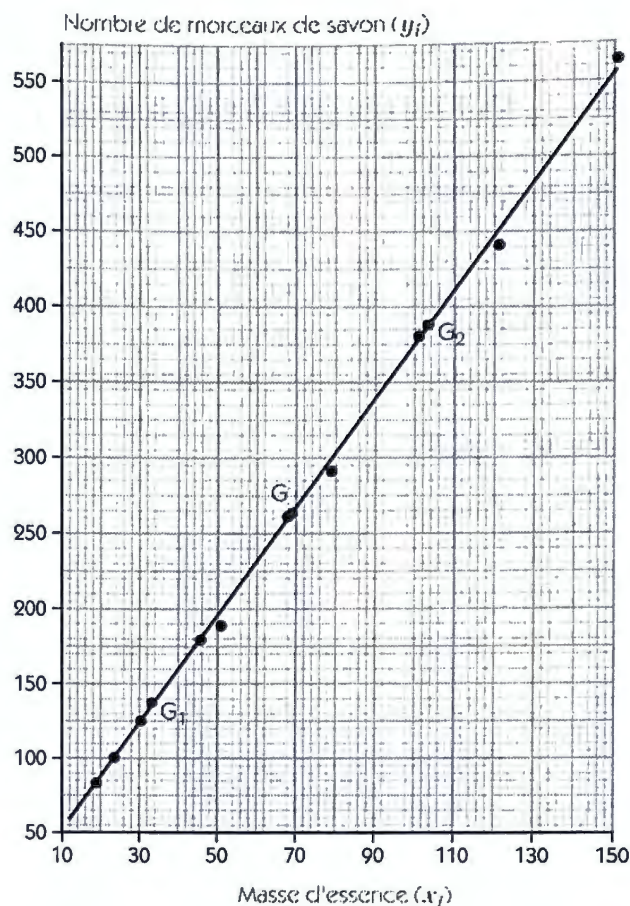
On en déduit une équation de la droite (G_1G_2) :

$$y = 3,5657x + 18,4183.$$

On vérifie que la droite (G_1G_2) passe par le point moyen $G(68,2 ; 261,6)$.

3. On peut estimer la masse d'essence nécessaire pour produire 1 000 morceaux de savon à :

$$\frac{1\,000 - 18,4183}{3,5657} = 275,28 \text{ grammes.}$$



◆ Exercice 3.b p. 118

Soit m_v le prix moyen de vente, on a : $504 = -5,9 m_v + 1\,271$.

Donc, le prix moyen de vente d'un exemplaire est : $m_v = \frac{504 - 1\,271}{-5,9} = 130 \text{ F CFA.}$

◆ Exercice 3.c p. 118

1. Ci-contre le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$.

2. Sous-nuage E_1

x_i	1	2	3
y_i	53	50	44

G_1 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{1+2+3}{3}; \frac{53+50+44}{3} \right);$$

c'est-à-dire : (2 ; 49).

Sous-nuage E_2

x_i	4	5	6
y_i	35	30	22

G_2 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{4+5+6}{3}; \frac{35+30+22}{3} \right);$$

c'est-à-dire : (5 ; 29).

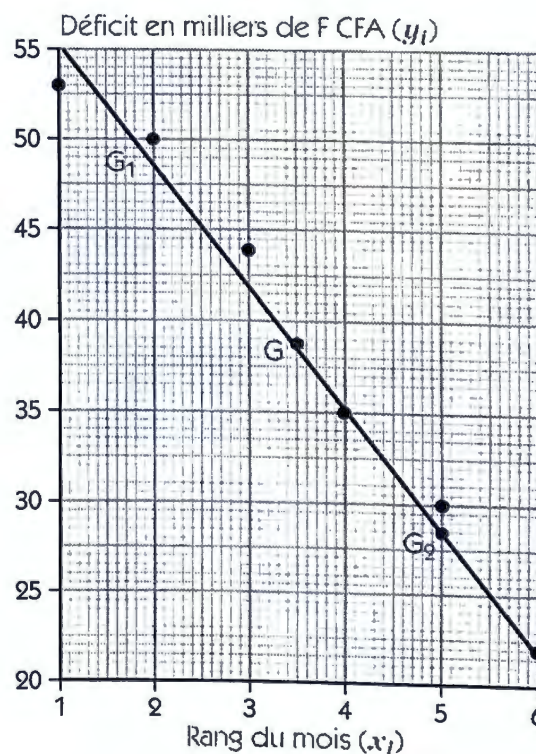
On en déduit une équation de la droite (G_1G_2) :

$$y = -6,666x + 62,333.$$

On vérifie que la droite (G_1G_2) passe par le point moyen $G(3,5 ; 39)$.

3. On peut estimer le nombre de mois au bout desquels le déficit est nul à : $\frac{0 - 62,333}{-6,666} = 9,35 \text{ mois ;}$

soit environ 9 mois 11 jours.



Exercices d'apprentissage

REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES DE SÉRIES STATISTIQUES

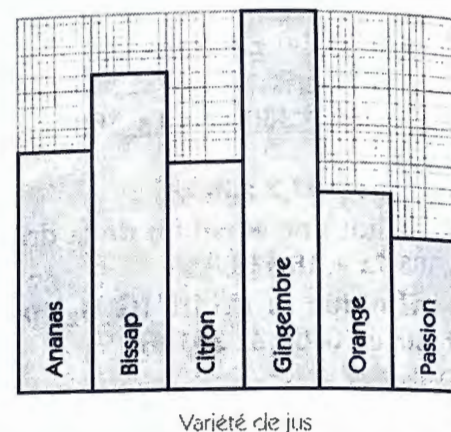
♦ Exercice n° 1 p. 119

Prix en F CFA du litre d'huile	600	625	650	700	725
Nombre de magasins	15	35	55	40	20

2. • Le mode est : 650 F CFA. • La médiane est : 650 F CFA.

♦ Exercice n° 2 p. 97

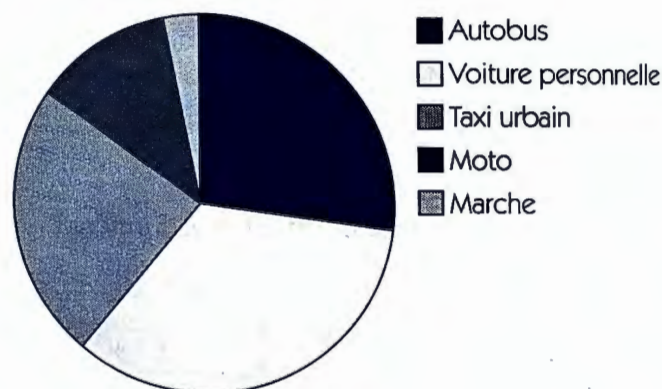
Variété de jus	Pourcentage	Nombre de litres
Ananas	16	80
Bissap	21	105
Citron	15	75
Gingembre	25	125
Orange	13	65
Passion	10	50



2. Ci-contre le diagramme à bandes.

♦ Exercice n° 3 p. 119

Moyen de transport utilisé	Effectif	L'angle associé en degrés
Autobus	270	97
Voiture personnelle	340	122
Taxi urbain	240	86
Moto	120	43
Marche	30	11
Total	1 000	360

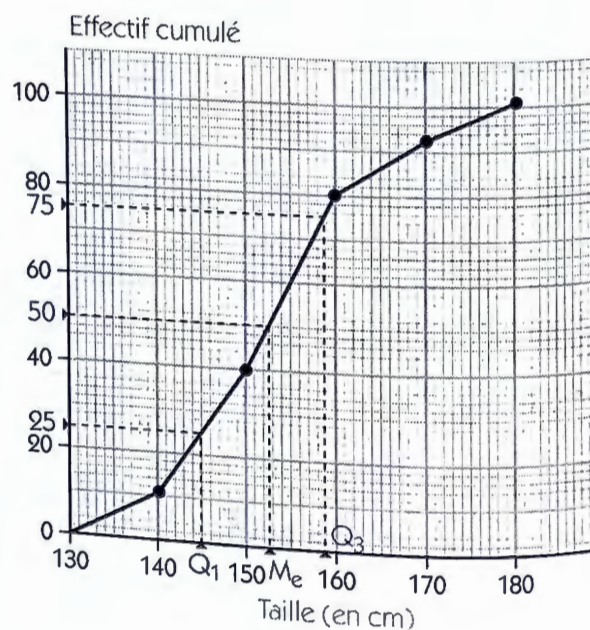


2. Ci-contre le diagramme circulaire.

♦ Exercice n° 4 p. 97

Taille en cm	Nombre de membres	Effectif cumulé croissant
[130 ; 140[	12	12
[140 ; 150[	28	40
[150 ; 160[	40	80
[160 ; 170[	12	92
[170 ; 180[	8	100

2. Ci-contre le polygone des effectifs cumulés.
 3. La classe modale est [150 ; 160[.
 4. La lecture graphique donne :
 – la médiane $M_e \approx 152,5$;
 – le premier quartile $Q_1 \approx 144,5$;
 – le troisième quartile $Q_3 \approx 159$.



♦ Exercice n° 5 p. 97

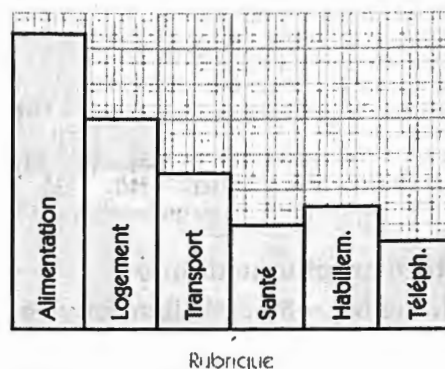
Durée (en min)	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[	[5 ; 6[
Effectif cumulé croissant	10	40	65	80	100	110
Effectif cumulé décroissant	110	100	70	45	30	10

2. La lecture graphique donne :

- Le nombre de communications dont la durée est supérieure à 4 min : 30 ;
- Le nombre de communications dont la durée est inférieure à 3 min : 65 ;
- Le nombre de communications dont la durée est comprise entre 2 et 5 min : 60.

♦ Exercice n° 6 p. 120

- Ci-contre le diagramme à bandes.
- Le mode est : Alimentation.



♦ Exercice n° 7 p. 120

- Ci-contre le diagramme à bâtons.
- Le mode est : 27 500 F CFA.

On a : $\frac{N}{2} = \frac{84}{2} = 42$;

- le premier effectif cumulé croissant supérieur à 42 est 48 et la modalité correspondante est 30 000 ;
- le premier effectif cumulé décroissant supérieur à 42 est 54 et la modalité correspondante est 30 000.

Donc, la médiane de la série est :

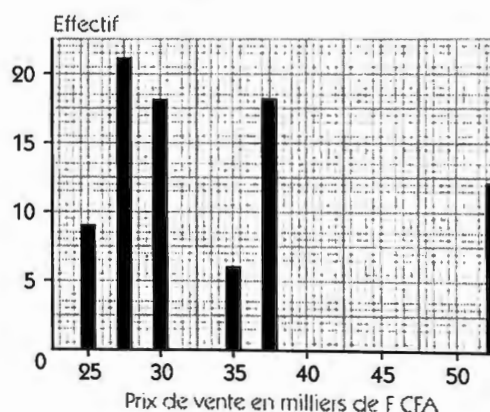
$$M_e = \frac{30\,000 + 30\,000}{2} = 30\,000 \text{ F CFA.}$$

- Le coût moyen d'une paire de chaussures est :

$$m = \frac{25\,000 \times 9 + \dots + 55\,000 \times 12}{84} = \frac{2\,977\,500}{84} ; m \approx 35\,446 \text{ F CFA.}$$

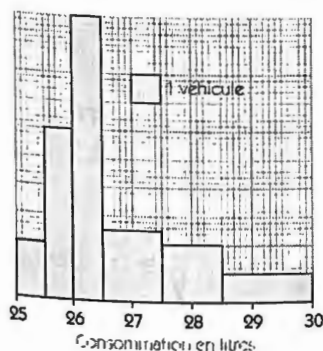
- Le coût moyen d'une paire de chaussures serait :

$$m' = \frac{25\,000 \times 9 + \dots + 55\,000 \times 12 + 32\,500 \times 25}{109} = \frac{3\,790\,000}{109} ; m \approx 34\,771 \text{ F CFA.}$$

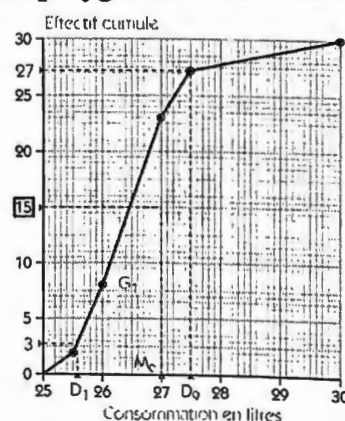


♦ Exercice n° 8 p. 120

- Ci-dessous l'histogramme.



- Ci-dessous le polygone des effectifs cumulés.



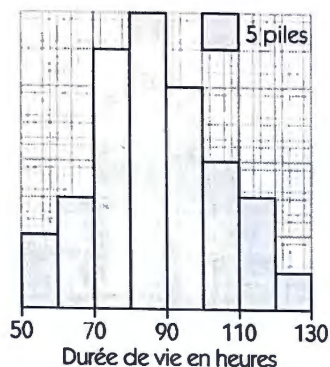
3. La lecture graphique donne :

- la médiane $M_e \approx 26$; vérification : 26,35 ;
- le premier décile $D_1 \approx 25,6$; vérification : 25,58 ;
- le neuvième décile $D_9 \approx 28,5$; vérification : 28,5.

4. La consommation maximale du dixième des véhicules consommant le moins de carburant est : $D_1 \approx 25,6$ litres.

♦ Exercice n° 9 p. 120

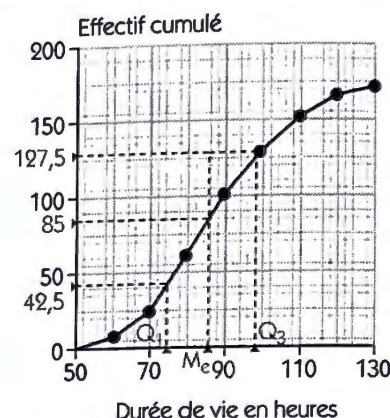
1. Ci-dessous l'histogramme.



3. La lecture graphique donne :

- la médiane $M_e \approx 86$; vérification : 86,25 ;
- le premier décile $Q_1 \approx 75$; vérification : 75 ;
- le neuvième décile $Q_3 \approx 99$; vérification : 99,16.

2. Ci-dessous le polygone des effectifs cumulés.



4. a) La durée de vie d'une pile sur deux est : $M_e = 86,25$ heures (ou 86 h 15 min).

b) La durée de vie minimale du quart des piles de ce lot vivant le plus longtemps est : $Q_3 \approx 99,16$ heures (ou 99 h 10 min).

INDICATEURS D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

♦ Exercice n° 10 p. 120

1. a) Le nombre de familles dont la consommation mensuelle est moins de 150 kg est :

$$7 + 11 + 42 + 17 + 24 \times \frac{150 - 145}{155 - 145} = 89.$$

b) Le nombre de familles dont la consommation mensuelle est plus de 140 kg est : $17 + 24 + 9 = 50$.

c) Le nombre de familles dont la consommation mensuelle est comprise entre 140 et 150 kg est :

$$17 + 24 \times \frac{150 - 145}{155 - 145} = 29.$$

2. On a : $\frac{N}{2} = \frac{110}{2} = 55$;

la médiane M_e est comprise entre 130 et 140 ;

l'effectif cumulé croissant de 130 est 18 et celui de 140 est 60 ;

$$\frac{M_e - 130}{55 - 18} = \frac{140 - 130}{60 - 18} \text{ ou } M_e \approx 138,81 \text{ kg.}$$

3. On a : $\frac{N}{4} = \frac{110}{4} = 27,5$;

• le premier quartile Q_1 est compris entre 130 et 140 ;

l'effectif cumulé croissant de 130 est 18 et celui de 140 est 60 ;

$$\frac{Q_1 - 130}{27,5 - 18} = \frac{140 - 130}{60 - 18} \text{ ou } Q_1 \approx 132,26 \text{ kg. ;}$$

• le troisième quartile Q_3 est compris entre 145 et 155 ;

l'effectif cumulé croissant de 145 est 77 et celui de 155 est 101 ;

$$\frac{Q_3 - 145}{82,5 - 77} = \frac{155 - 145}{101 - 77} \text{ ou } Q_3 \approx 147,29 \text{ kg.}$$

4. • La consommation moyenne est :

$$m = \frac{122,5 \times 7 + 127,5 \times 11 + \dots + 150 \times 24 + 157,5 \times 9}{110} \approx 139,727 \text{ kg.}$$

• L'écart type est : $\sigma = \sqrt{\frac{10\ 166,818\ 19}{110}}$; $\sigma \approx 9,614 \text{ kg.}$

♦ Exercice n° 11 p. 121

1. Si l'on ne tient pas compte des rémunérations du directeur et du stagiaire :

• on a : $\frac{N}{2} = \frac{64}{2} = 32$;

le salaire médian M_e est compris entre 145 000 et 160 000 F CFA ;

l'effectif cumulé croissant de 145 000 est 28 et celui de 160 000 est 45 ;

$$\frac{M_e - 145\,000}{32 - 28} = \frac{160\,000 - 145\,000}{45 - 28} \text{ ou } M_e \approx 148\,529 \text{ F CFA.}$$

• Le salaire moyen est :

$$m = \frac{107\,500 \times 4 + 122\,500 \times 9 + \dots + 182\,500 \times 5 + 196\,250 \times 2}{64} ; m \approx 148\,477 \text{ F CFA.}$$

2. Si l'on tient compte des rémunérations du directeur et du stagiaire :

• on a : $\frac{N}{2} = \frac{66}{2} = 33$;

le salaire médian M_e' est compris entre 145 000 et 160 000 F CFA ;

l'effectif cumulé croissant de 145 000 est 28 et celui de 160 000 est 45 ;

$$\frac{M_e' - 145\,000}{33 - 28} = \frac{160\,000 - 145\,000}{45 - 28} \text{ ou } M_e' \approx 149\,412 \text{ F CFA.}$$

• Le salaire moyen est :

$$m' = 1\,000 \times \frac{60 \times 1 + 107,5 \times 4 + 122,5 \times 9 + \dots + 182,5 \times 5 + 196,25 \times 2 + 380 \times 1}{66} ; m' \approx 150\,644 \text{ F CFA.}$$

♦ Exercice n° 12 p. 121

1. On a : $\frac{N}{2} = \frac{200}{2} = 100$;

la médiane M_e est comprise entre 200 000 et 250 000 ;

l'effectif cumulé croissant de 200 000 est 80 et celui de 250 000 est 180 ;

$$\frac{M_e - 200\,000}{100 - 80} = \frac{250\,000 - 200\,000}{180 - 80} \text{ ou } M_e = 210\,000 \text{ F CFA.}$$

Donc, un crédit sur deux des crédits accordés est d'un montant inférieur (ou supérieur) à 210 000 F CFA.

2. On a : $\frac{N}{4} = \frac{200}{4} = 50$;

• le premier quartile Q_1 est compris entre 100 000 et 150 000 ;

l'effectif cumulé croissant de 100 000 est 20 et celui de 150 000 est 64 ;

$$\frac{Q_1 - 100\,000}{50 - 20} = \frac{150\,000 - 100\,000}{64 - 20} \text{ ou } Q_1 \approx 134\,091 \text{ F CFA ;}$$

• le troisième quartile Q_3 est compris entre 200 000 et 250 000 ;

l'effectif cumulé croissant de 200 000 est 80 et celui de 250 000 est 180 ;

$$\frac{Q_3 - 200\,000}{150 - 80} = \frac{250\,000 - 200\,000}{180 - 80} \text{ ou } Q_3 = 235\,000 \text{ F CFA.}$$

Donc, un quart des crédits accordés est d'un montant inférieur à 134 091 F CFA, un autre quart des crédits accordés est d'un montant supérieur à 235 000 F CFA.

De plus la moitié des crédits accordés est d'un montant compris entre 134 091 et 235 000 F CFA.

3. • Le crédit moyen accordé est :

$$m = \frac{75\,000 \times 20 + 125\,000 \times 44 + \dots + 225\,000 \times 100 + 275\,000 \times 20}{200} = 189\,000 \text{ F CFA.}$$

• L'écart type est : $\sigma = \sqrt{\frac{720\,800 \times 1\,000^2}{200}} = 60\,033 \text{ F CFA.}$

♦ Exercice n° 13 p. 121

1. Ci-contre le polygone des fréquences cumulées.

2. La lecture graphique donne :

a) La médiane $M_e = 50$ kg ; vérification : 50 kg.

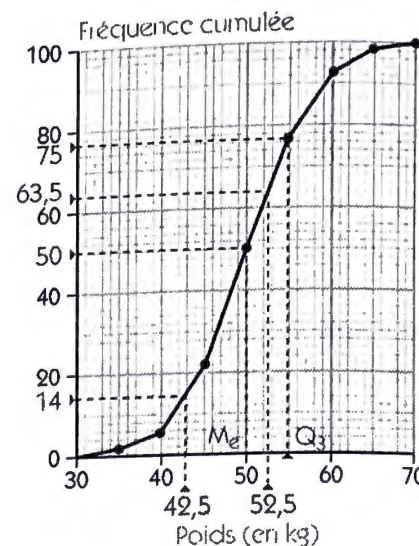
b) Le poids minimal des 10 % d'élèves les plus lourds est le troisième quartile $Q_3 \approx 54,5$ kg ; vérification : 54,57 kg.

c) Le pourcentage des élèves dont le poids est compris entre 42,5 et 52,5 kg est : $63,5 - 14 = 49,5$ % ;
vérification : $8 + 27,35 + \frac{27,35}{2} = 49,025$ %.

3. • La moyenne est :

$$m = \frac{32,5 \times 1,15 + 37,5 \times 5,50 + \dots + 67,5 \times 1,35}{100} = 50,015.$$

• L'écart type est : $\sigma = \sqrt{\frac{4\,604}{100}}$; $\sigma \approx 6,786$.



♦ Exercice n° 14 p. 121

1.

Dactylographe A

Nombre de fautes	16	17	18	20
Effectif	1	1	2	1
Nombre de fautes	22	23	24	25
Effectif	1	1	1	1

• La médiane $M_e = 20$ fautes.

• La moyenne est :

$$m = \frac{16 \times 1 + 17 \times 4 + \dots + 25 \times 1}{9} = 20,333.$$

• L'écart type est : $\sigma = \sqrt{\frac{96}{6}}$; $\sigma \approx 3,99$.

Dactylographe B

Nombre de fautes	6	7	18	20
Effectif	1	1	2	1
Nombre de fautes	21	22	34	37
Effectif	1	1	1	1

• La médiane $M_e = 20$ fautes.

• La moyenne est :

$$m = \frac{6 \times 1 + 7 \times 1 + 1 \dots + 37 \times 1}{9} = 20,333.$$

• L'écart type est : $\sigma = \sqrt{\frac{862}{9}}$; $\sigma \approx 9,79$.

2. L'écart type de la série de fautes de la dactylographe B est trois fois supérieur à celui de A ; A a la série de fautes la moins dispersée, donc A est le meilleur choix des deux.

SÉRIES STATISTIQUES À DEUX CARACTÈRES

♦ Exercice n° 15 p. 121

1. Ci-contre le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$.

2. • G_1 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{60\,000 + 64\,000}{2} ; \frac{11 + 17}{2} \right) ;$$

c'est-à-dire : (62 000 ; 14).

• G_2 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{68\,000 + 72\,000}{2} ; \frac{20 + 25}{2} \right) ;$$

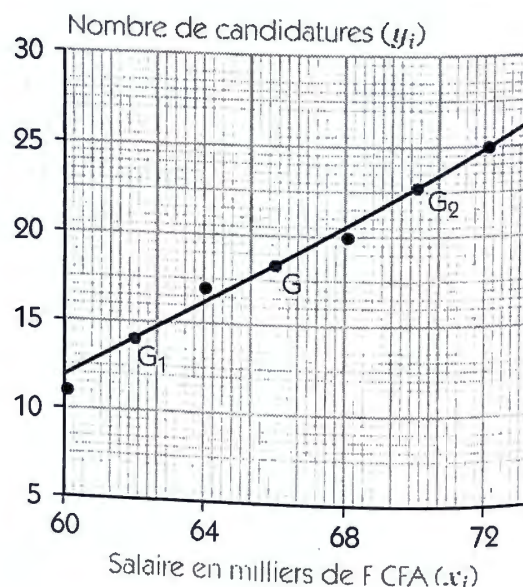
c'est-à-dire : (70 000 ; 22,5).

On en déduit une équation de la droite (G_1G_2) :

$$y = 0,001\,062\,5x - 51,875.$$

3. Pour recruter 30 ouvriers l'on pourrait proposer un salaire d'environ :

$$x = \frac{30 + 51,875}{0,001\,062\,5} \approx 77\,059 \text{ F CFA.}$$



♦ Exercice n° 16 p. 121

1. Ci-contre le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$.
2. • G_1 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{200 + 300 + 600 + 700}{4} ; \frac{21 + 22 + 15 + 14}{4} \right);$$

c'est-à-dire : (450 ; 18).

- G_2 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{900 + 1\,000 + 1\,100 + 1\,200}{4} ; \frac{10 + 8 + 4 + 2}{4} \right);$$

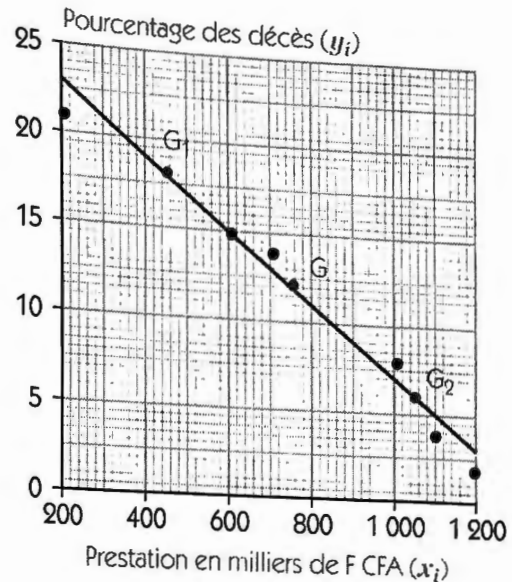
c'est-à-dire : (1 050 ; 6).

On en déduit une équation de la droite (G_1G_2) :

$$y = -0,02x + 27.$$

3. a) Une estimation pour réduire les décès à 0,1 % est :
 $x = \frac{0,1 - 27}{-0,02} = 1\,345$; c'est-à-dire : 1 345 000 F CFA.

- b) Pour 800 000 F CFA de prestation, l'on pourrait obtenir :
 $y = -0,02 \times 800 + 27 = 11$ % de décès.



♦ Exercice n° 17 p. 122

1. Ci-contre le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$.

2. • G_1 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{36 + 42 + 48}{3} ; \frac{11,8 + 14 + 12,6}{3} \right);$$

c'est-à-dire : (42 ; 12,8).

- G_2 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{54 + 60 + 66}{3} ; \frac{15 + 15,5 + 15,1}{3} \right);$$

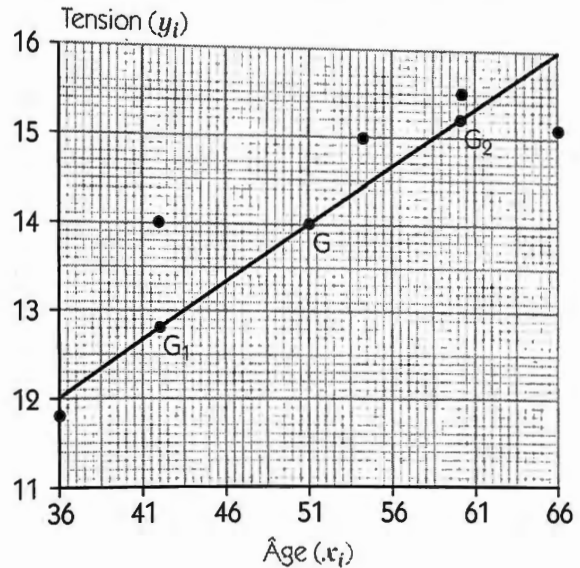
c'est-à-dire : (60 ; 15,2).

On en déduit une équation de la droite (G_1G_2) :

$$y = 0,133\,3x + 7,2.$$

3. Pour une personne de 70 ans, l'on pourrait obtenir une tension : $y = 0,133\,3 \times 70 + 7,2 = 16,5$.

Donc 16,2 de tension est assez « normale ».



♦ Exercice n° 18 p. 122

1. Ci-contre le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$.

2. • G_1 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{122 + 130 + 135}{3} ; \frac{10 + 11 + 12}{3} \right);$$

c'est-à-dire : (129 ; 11).

- G_2 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{144 + 150 + 153}{3} ; \frac{13 + 14 + 15}{3} \right);$$

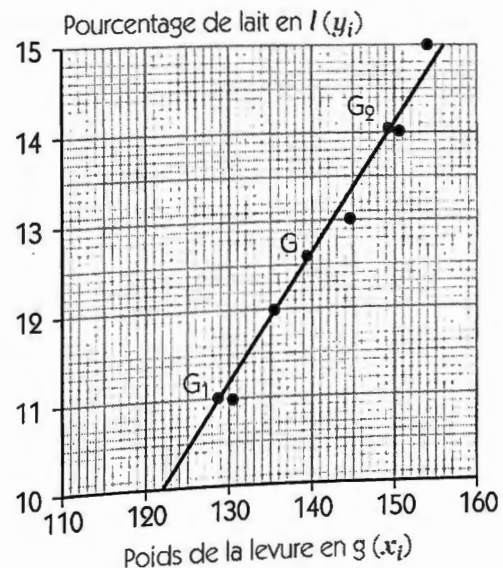
c'est-à-dire : (149 ; 14).

On en déduit une équation de la droite (G_1G_2) :

$$y = 0,15x - 8,35.$$

3. Pour produire 20 litres de lait caillé, l'on pourrait

utiliser : $x = \frac{20 + 8,35}{0,15} = 189$ g.



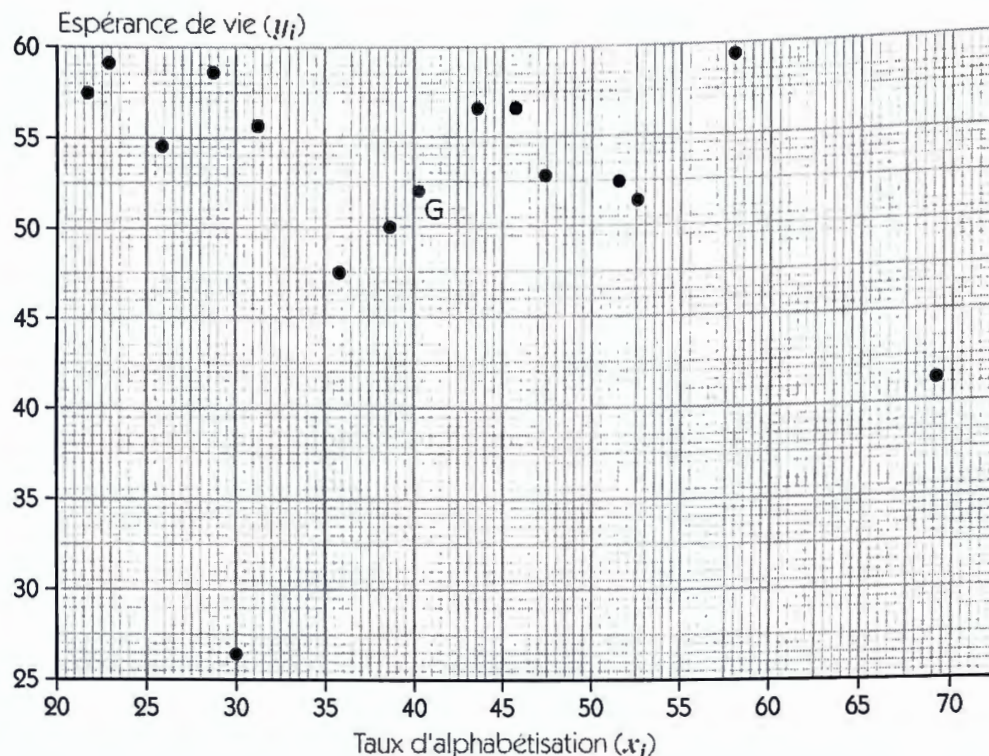
♦ Exercice n° 19 p. 122

2. • G a pour coordonnées $(x; y)$:

$$x = \frac{30,2 + 57,8 + \dots + 37,7 + 25,8}{15} ; y = \frac{26,6 + 59,4 + \dots + 47,5 + 54,6}{15}$$

c'est-à-dire : $(\frac{601}{15} ; \frac{779,9}{15})$ ou $(40,067 ; 51,993)$.

2. Ci-dessous le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$.



Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n° 20 p. 122

Entreprise A

• La médiane $M_e = 140\ 000$ F CFA.

• La moyenne est :

$$m = \frac{60\ 000 \times 20 + \dots + 180\ 000 \times 10}{200} = 120\ 000 \text{ F CFA.}$$

• L'écart type est :

$$\sigma = \sqrt{\frac{176 \times 10^9}{200}} ; \sigma \approx 29\ 664,79 \text{ F CFA.}$$

Entreprise B

• La médiane $M_e = 120\ 000$ F CFA.

• La moyenne est :

$$m = \frac{80\ 000 \times 5 + \dots + 140\ 000 \times 50}{245} = 120\ 000 \text{ F CFA.}$$

• L'écart type est :

$$\sigma = \sqrt{\frac{44 \times 10^9}{245}} ; \sigma \approx 13\ 401,18 \text{ F CFA.}$$

• Un employé sur deux de l'entreprise A gagne au moins (ou au plus) 140 000 F CFA, tandis que celui de B gagne 120 000 F CFA.

• Si la masse salariale était répartie équitablement entre les employés de chaque entreprise, alors chaque employé gagnerait 120 000 F CFA dans les deux entreprises.

• L'écart type de la série des salaires de A est trois fois supérieur à celui de B ; les écarts de salaires sont plus faibles entre les employés de B.

♦ Exercice n° 21 p. 122

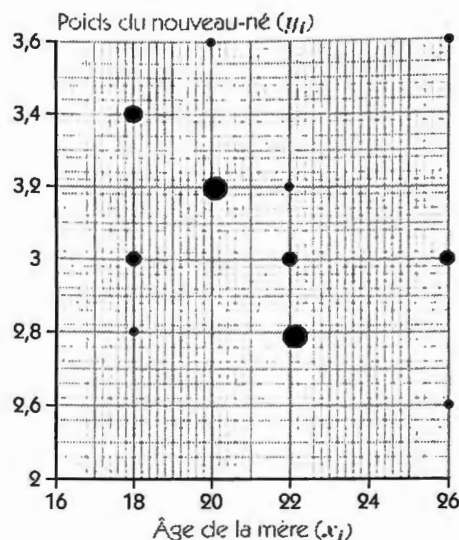
1. Ci-dessous le tableau à double entrée.

Âge de la mère Poids du nouveau-né	16	18	20	22	26	Total
2,6	0	0	0	0	1	1
2,8	1	1	0	3	0	5
3	0	2	0	2	2	6
3,2	0	0	3	1	0	4
3,4	0	2	0	0	0	2
3,6	0	0	1	0	1	2
Total	1	5	4	6	4	20

2. • La moyenne d'âge des mères est :

$$m = \frac{16 \times 1 + 18 \times 5 + \dots + 26 \times 4}{20} = 21,1 \text{ ans.}$$
- Le poids moyen des nouveau-nés est :

$$m' = \frac{2,6 \times 1 + 2,8 \times 5 + \dots + 3,6 \times 2}{20} = 3,07 \text{ kg.}$$
3. Ci-contre le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) .



◆ Exercice n° 22 p. 122

1. Ci-contre le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) .

2. • G_1 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{60 + 80 + 100 + 120}{4} ; \frac{952 + 805 + 630 + 522}{4} \right) ;$$

c'est-à-dire : (90 ; 727,25).

- G_2 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{140 + 160 + 180 + 200}{4} ; \frac{510 + 324 + 205 + 84}{4} \right) ;$$

c'est-à-dire : (170 ; 280,75).

On en déduit une équation de la droite (G_1G_2) :

$$y = -5,58x + 1\,229,45.$$

3. a) • Le coût de fabrication de y exemplaires est :

$$C = 25x + 28\,000.$$

- Le montant de la vente de y exemplaires à x F CFA l'unité est : $V = xy = x(-5,58x + 1\,229,45)$.

Donc, le bénéfice est :

$$B = V - C ; B \approx -5,58x^2 + 1\,369x + 58\,736.$$

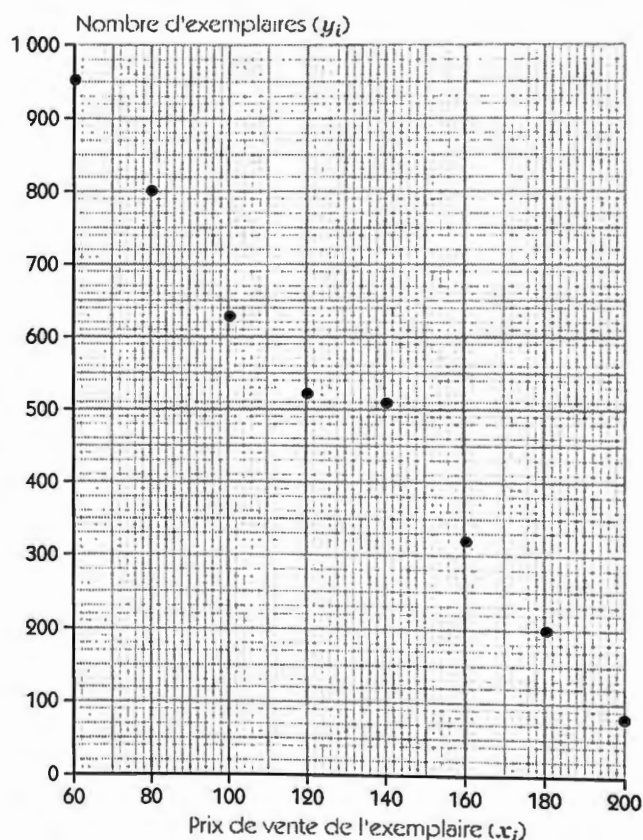
- b) Le bénéfice est maximal pour la valeur x , abscisse du sommet de la parabole d'équation :

$$y = -5,58x^2 + 1\,369x + 58\,736.$$

c'est-à-dire : $-22,8 \times 5,58x + 1\,369$; ou $x = 122,67$.

À 1 F CFA près on a : $x = 122$ ou $x = 123$.

123 F CFA est le prix de vente de l'unité qui réalise le plus grand bénéfice, et qui vaut 226 436 F CFA avec 543 exemplaires.



◆ Exercice n° 23 p. 123

1. Ci-contre le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) .

2. G a pour coordonnées $(x ; y)$:

$$x = \frac{1 + 2 + \dots + 7 + 8}{8} ;$$

$$y = \frac{27 + 42 + \dots + 89 + 95}{8} ;$$

c'est-à-dire : $\left(\frac{36}{8} ; \frac{528}{8} \right)$ ou (4,5 ; 66).

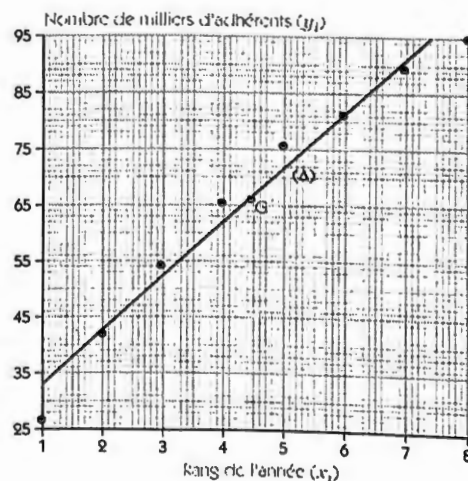
3. a) On a : $9,56 \times 4,5 + 22,98$; donc : $G \in (\Delta)$.

- b) Ci-contre (Δ) .

4. Pour l'année de rang 10, l'on pourrait espérer :

$$y = 9,56 \times 10 + 22,98 = 118,58 ;$$

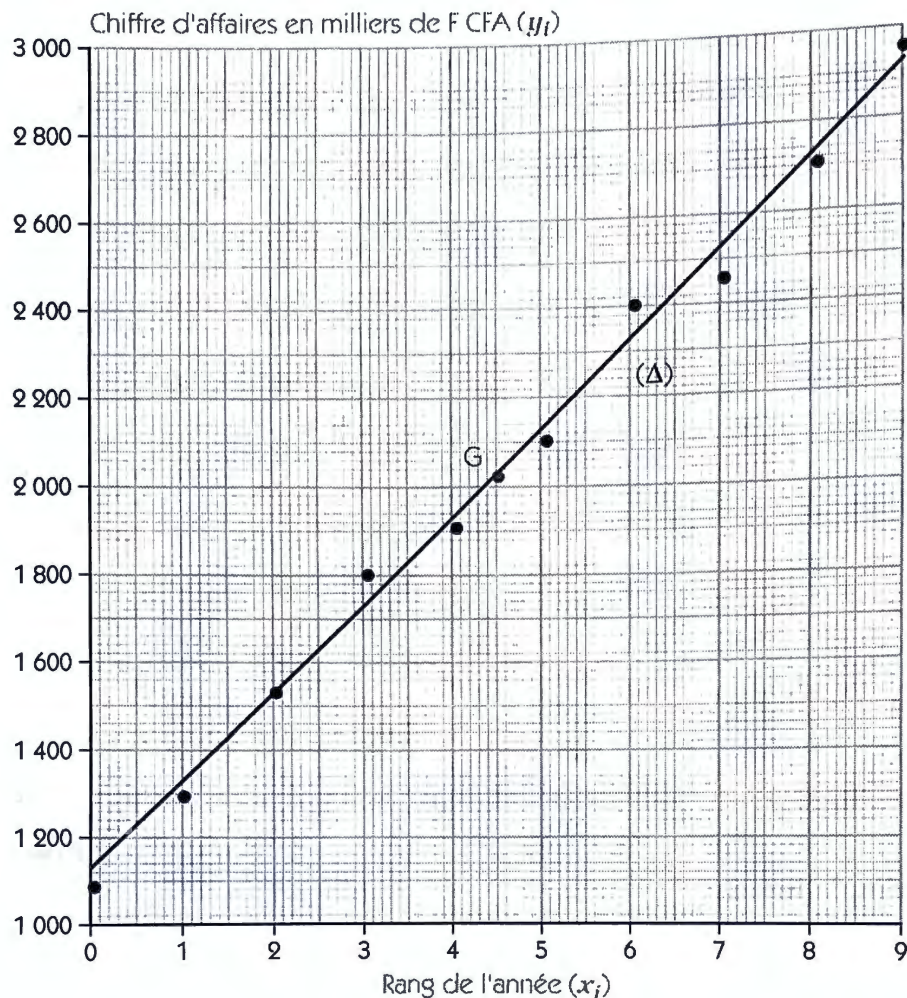
c'est-à-dire : 118 ou 119 adhérents.



♦ Exercice n° 24 p. 123

Évolution d'un chiffre d'affaires

1. Ci-dessous le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$.



2. Le pourcentage de l'augmentation entre l'année de rang 0 et celle de rang 9 est :

$$t = \frac{2\,950 - 1\,100}{1\,100} \times 100 = 168,18 ; t \approx 169 \% \text{ à } 1 \% \text{ près par excès.}$$

3. G a pour coordonnées $(x ; y)$:

$$x = \frac{0 + 1 + 2 + \dots + 7 + 8 + 9}{10} = \frac{45}{10} ;$$

$$y = \frac{1\,100 + 1\,300 + \dots + 2\,700 + 2\,950}{10} = \frac{20\,250}{10} ;$$

G a pour coordonnées (4,5 ; 2 025).

4. a) On a : $198 \times 4,5 + 1\,134 = 2\,025$; donc : $G \in (\Delta)$.

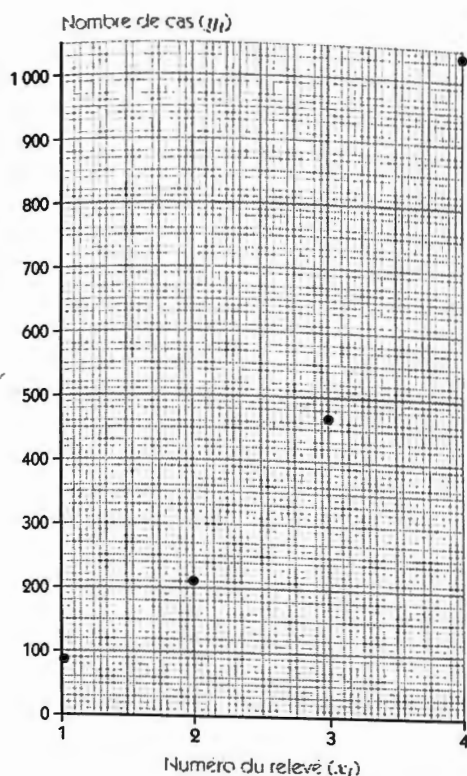
b) Ci-dessus (Δ).

5. Pour l'année de rang 12 , l'on pourrait attendre : $y = 198 \times 12 + 1\,134 = 3\,510$; c'est-à-dire : 3 510 000 F CFA.

◆ Exercice n° 25 p. 123

Épidémie

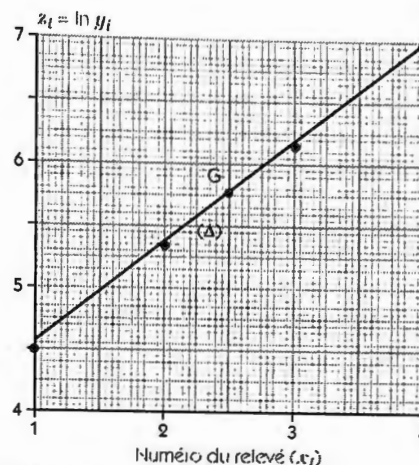
1. a) Ci-dessous le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$.



2. a)

x_i	1	2	3	4
$z_i = \ln y_i$	4,54	5,36	6,14	6,95

b) Ci-dessous le nuage de points de coordonnées $(x_i ; z_i)$.



3. a) Ci-dessus (Δ)

b) On a : $z_i = \ln y_i \Leftrightarrow y_i = e^{z_i}$.

Donc : $y = e^{0,79x + 3,8} = e^{3,8} \times e^{0,79x}$; $y \approx 44,7 e^{0,79x}$.

c) Au 5^e relevé le nombre de cas prévisibles est :
 $y = 44,7 e^{0,79 \times 5} = 2\,321$ cas par défaut.

b) Un ajustement affine ne paraît pas justifié.

◆ Exercice n° 26 p. 123

Datation au carbone 14

1. a)

$x_i = \ln q_i$	3,87	3,40	3,13	2,77	2,39
y_i	6	10	12	15	18

b) Ci-contre le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$.

2. G a pour coordonnées $(x ; y)$:

$$x = \frac{3,87 + 3,40 + 3,13 + 2,77 + 2,39}{5} = \frac{15,56}{5} ;$$

$$y = \frac{6 + 10 + 12 + 15 + 18}{5} = \frac{61}{5} ;$$

G a pour coordonnées $(3,112 ; 12,2)$.

4. a) Ci-contre (Δ).

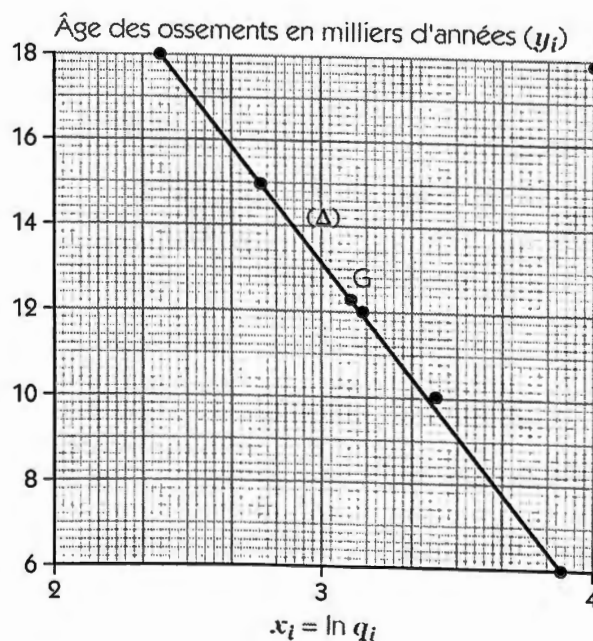
b) Une équation de la droite (GA) = (Δ) :

$$y = -8,09x + 37,38.$$

5. Pour 40 de teneur en carbone, l'on pourrait estimer à :

$$y = -8,09 \times \ln 40 + 37,38 = 7,536 ;$$

c'est-à-dire : 7 536 années, soit environ 7 500 ans à 500 ans près.



♦ Exercice n° 27 p. 124

1. Ci-contre le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$.

2. a) Ci-contre (Δ) .

b) • G a pour coordonnées $(x; y)$:

$$x = \frac{1 + 2 + \dots + 7 + 8}{8} = \frac{36}{8};$$

$$y = \frac{930 + 985 + \dots + 1\,140 + 1\,155}{8} = \frac{8\,440}{8};$$

G a pour coordonnées $(4,5; 1\,055)$.

• On a : $30 \times 4,5 + 920 = 1\,055$; donc : $G \in (\Delta)$.

• Les points du nuage sont tous assez proches de (Δ) .

Donc, (Δ) peut ajuster ce nuage de points.

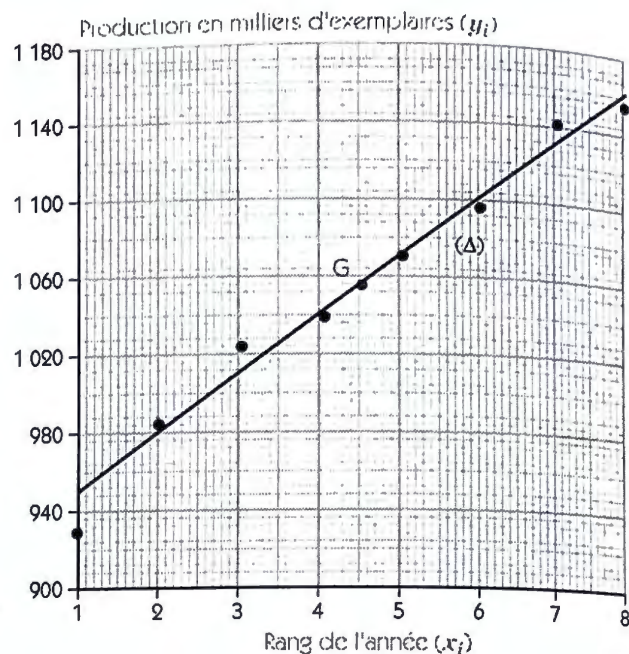
3. Pour l'année de rang 9, l'on pourrait espérer :

$$y = 30 \times 9 + 920 = 1\,190;$$

c'est-à-dire : 1 190 000 exemplaires.

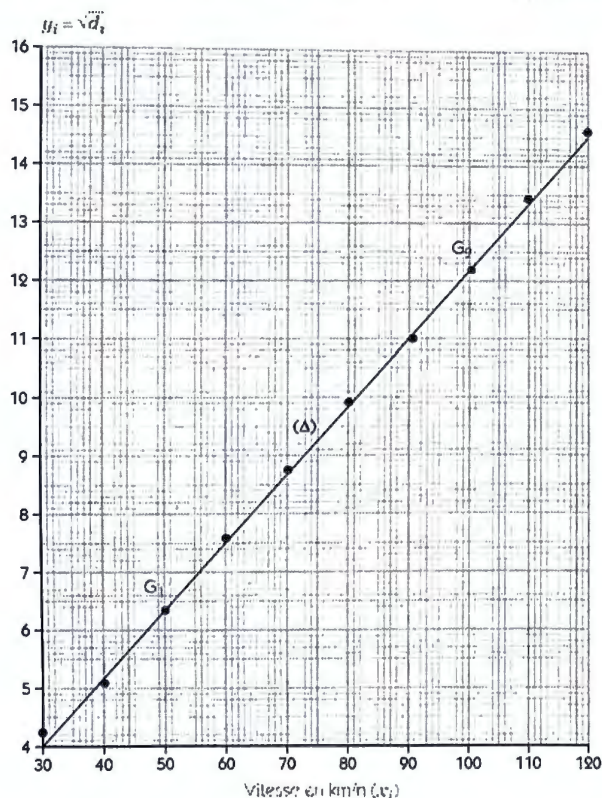
4. Pour produire plus de 1,22 million d'exemplaires, l'on pourrait attendre après l'année de rang :

$$x = \frac{1\,220 - 920}{30} = 10.$$



♦ Exercice n° 28 p. 124

1. Ci-dessous le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$.



2. a) • G_1 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{30+40+50+60+70}{5}; \frac{4,24+5,10+6,32+7,62+8,72}{5} \right);$$

c'est-à-dire : $(50; 6,396)$.

• G_2 a pour coordonnées :

$$\left(\frac{80+90+100+110+120}{5}; \frac{9,90+10,95+12,17+13,42+14,56}{5} \right);$$

c'est-à-dire : $(100; 12,2)$.

b) On a : $0,116 \times 50 + 0,6 = 6,4$; donc : $G_1 \in (\Delta)$;

$$0,116 \times 100 + 0,6 = 12,2; \text{ donc : } G_2 \in (\Delta).$$

Donc : $(G_1 G_2) = (\Delta)$.

3. a) Pour 140 km/h, une estimation est :

$$y = 0,116 \times 140 + 0,6 = 16,84.$$

$$\text{Donc : } d = y^2 = (16,84)^2 = 283,5853; d \approx 284 \text{ m à } 1 \text{ m près.}$$

b) Avec la droite d'ajustement de la figure, la lecture graphique donne : $d \approx 245 \text{ m}$.

8. Probabilités

(pages 125 à 142 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- initier les élèves aux calculs de probabilités dans le cas d'équiprobabilité.
- réinvestir les connaissances acquises sur le dénombrement dans le calcul de probabilités.

COMMENTAIRES

- L'utilisation de situations concrètes et/ou historiques pour la mise en place des différentes notions est plus motivante pour l'élève.
- On se limitera à des cas où l'univers des éventualités est fini.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs

Notion de probabilité

- Aperçu historique.
- Vocabulaire des événements :
 - expérience aléatoire (ou épreuve) ;
 - événements liés à une expérience aléatoire.

- Approche intuitive et expérimentale :
 - notion d'équiprobabilité ;
 - notion de probabilité d'un événement.

Calculs de probabilités

- Propriétés des probabilités :
 - probabilité d'un événement et propriétés ;
 - formule de LAPLACE (ou d'équiprobabilité) ;
 - propriété : $P(A) + P(\bar{A}) = 1$;
 - propriété : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

- Lois de probabilité.
- Présentation de la notion de loi de probabilité.

Résolution de problèmes

savoir-faire

- À l'aide des outils de dénombrement, décrire l'univers associé à une expérience aléatoire.
- Définir une éventualité associée à une expérience aléatoire.
- Étant donnés deux événements A et B, décrire les événements : $A \cup B$ et $A \cap B$.
- Reconnaître deux événements incompatibles, deux événements contraires.
- Étant donné un événement A, décrire l'événement contraire $\bar{A}$.

- Traduire en terme de probabilité une fréquence ou un pourcentage.
- Utiliser les propriétés d'une probabilité pour calculer la probabilité de certains événements.
- Passer du langage des probabilités au langage des ensembles et vice-versa.
- Étant donné la probabilité d'un événement A, calculer la probabilité de l'événement contraire $\bar{A}$.
- Calculer la probabilité de la réunion de deux événements.
- Utiliser les techniques de dénombrement pour calculer les probabilités dans des problèmes de tirage, de lancer de dés.
- Résoudre des problèmes (simples) de calcul de probabilités en utilisant les techniques de dénombrement ou les propriétés des probabilités.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

◆ Exercice 1.a p. 129

a) L'univers est : $\Omega = \{AB, AC, BA, BC, CA, CB\}$.

b) On a : $L = \{AB, AC, BA, CA\}$; $M = \{CA, CB\}$; $N = \{AB, AC, BA, BC, CA, CB\} = \Omega$.

◆ Exercice 1.b p. 129

a) On a : $\bar{L} = \{BC, CB\}$.

b) On a : $M \cap N = \{CA, CB\} = M$; donc, M et N ne sont pas incompatibles.

c) On a : $M \cup N = \{AB, AC, BA, BC, CA, CB\} = N = \Omega$.

d) On a : $M \cup N = N = \Omega$; donc, c'est l'événement « le mot contient la lettre A ou la lettre C » ; c'est aussi l'événement certain.

◆ Exercice 2.a p. 132

Chacune des 12 souris a la même probabilité d'être tirée ; on est dans une situation d'équiprobabilité.

1. On a : $P(B) = \frac{5}{12}$; $P(G) = \frac{7}{12}$; $P(M) = \frac{7}{12}$; $P(F) = \frac{5}{12}$.

2. a) L'événement correspond à l'événement : $B \cap M$; donc : $P(B \cap M) = \frac{3}{12}$.

b) L'événement correspond à l'événement : $B \cup M$;

donc : $P(B \cup M) = P(B) + P(M) - P(B \cap M) = \frac{5}{12} + \frac{7}{12} - \frac{3}{12} = \frac{9}{12}$.

◆ Exercice 2.b p. 133

Chacun des 45 élèves a la même probabilité d'être rencontré à la sortie de la classe ; on est dans une situation d'équiprobabilité.

Désignons par : A l'événement « l'élève pratique la natation » ;

B l'événement « l'élève pratique le judo ».

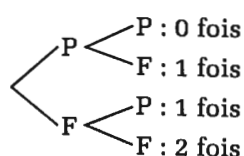
L'événement « l'élève pratique au moins un des deux sports » est : $A \cup B$;

donc : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{24}{45} + \frac{32}{45} - \frac{15}{45} = \frac{41}{45}$.

◆ Exercice 2.c p. 133

Éventualité	rouge	vert	bleu
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{5}{8}$

◆ Exercice 2.d p. 133



Éventualité	0	1	2
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Exercices d'apprentissage

NOTION DE PROBABILITÉ

◆ Exercice n° 1 p. 139

1. L'univers est : $\Omega = \{\{N_1, N_2\} ; \{N_1, N_3\} ; \{N_1, B_1\} ; \{N_1, B_2\} ; \{N_2, N_3\} ; \{N_2, B_1\} ; \{N_2, B_2\} ; \{N_3, B_1\} ; \{N_3, B_2\} ; \{B_1, B_2\}\}$.

2. a) On a :
 • $A = \{\{N_1, B_1\} ; \{N_1, B_2\} ; \{N_2, B_1\} ; \{N_2, B_2\} ; \{N_3, B_1\} ; \{N_3, B_2\}\}$;
 • $B = \{\{N_1, B_1\} ; \{N_1, B_2\} ; \{N_2, B_1\} ; \{N_2, B_2\} ; \{N_3, B_1\} ; \{N_3, B_2\} ; \{B_1, B_2\}\}$;
 • $C = \{\{N_1, N_2\} ; \{N_1, N_3\} ; \{N_2, N_3\}\}$;
 • $D = \{\{N_1, N_2\} ; \{N_1, N_3\} ; \{N_2, N_3\} ; \{B_1, B_2\}\}$.

b) On a : $\bar{A} = D$; donc, les événements A et D sont contraires.

c) On a : $A \cap C = \emptyset$; donc, les événements A et C sont incompatibles.

◆ Exercice n° 2 p. 139

1. L'univers est : $\Omega = \{(F, F, F) ; (F, F, P) ; (F, P, F) ; (F, P, P) ; (P, F, F) ; (P, F, P) ; (P, P, F) ; (P, P, P)\}$.

2. On a :
 • $A = \{(F, F, F) ; (P, P, P)\}$;
 • $B = \{(F, F, P) ; (F, P, F) ; (P, F, F)\}$;
 • $C = \{(F, P, P) ; (P, F, P) ; (P, P, F)\}$.

a) On a :
 • $\bar{C} = A \cup B$; $\bar{C} \neq B$; donc, les événements B et C ne sont pas contraires ;
 • $B \cap C = \emptyset$; donc, les événements B et C sont incompatibles.

b) On a : $\bar{A} = B \cup C$. $\bar{A}$ est l'événement « obtenir exactement 2 fois le même côté. »

◆ Exercice n° 3 p. 139

1. a) L'ensemble des voyelles est : $\{a, e, i, o, u, y\}$;

l'ensemble des chiffres du système décimal est : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Composition du code	Choix de la lettre	Choix du 1 ^{er} chiffre	Choix du 2 ^e chiffre	Choix du 3 ^e chiffre
Nombre de possibilités	6	10	9	8

Le nombre de façons de composer un code est : $6 \times 10 \times 9 \times 8 = 4\,320$.

b) Le nombre de cas possibles est : 4 320.

2. a) On a : $\bar{B}$: « il y a au moins un chiffre impair ».

b) • Pour réaliser l'événement A, il faut choisir 1 voyelle parmi 6 et faire une permutation des 3 chiffres 4, 1, 7 ; donc, le nombre de cas favorables est : $6 \times 3! = 36$.

• Pour réaliser l'événement B, il faut choisir 1 voyelle parmi 6 et faire un arrangement des 3 chiffres parmi les 5 chiffres pairs ; donc, le nombre de cas favorables est : $6 \times (5 \times 4 \times 3) = 360$.

CALCULS DE PROBABILITÉS

◆ Exercice n° 4 p. 139

Chacun des individus a la même probabilité d'être choisi ; on est dans une situation d'équiprobabilité.

On a : $P(E) = \frac{32,8 + 7,2}{100} = 0,40$; $P(F) = \frac{32,8 + 8,1 + 4,15 + 36}{100} = 0,810\,5$; $P(G) = \frac{32,8}{100} = 0,328$.

◆ Exercice n° 5 p. 139

Chacun des élèves a la même probabilité d'être choisi ; on est dans une situation d'équiprobabilité.

1. Désignons par : A l'événement « l'élève aime les mathématiques » ;

B l'événement « l'élève aime la philosophie » ;

C l'événement « l'élève est paresseux ».

L'événement « l'élève aime les mathématiques ou la philosophie » est : $A \cup B$;

donc : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{20 + 70 - 15}{100} = \frac{75}{100} = 0,75$.

2. L'événement « l'élève aime les mathématiques ou est paresseux » est : $A \cup C$;

de plus A et C sont incompatibles ; donc : $P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{20 + 10}{100} = \frac{30}{100} = 0,30$.

3. L'événement « l'élève n'aime ni les mathématiques, ni la philosophie » est : $\overline{A \cup B}$;

donc : $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,75 = 0,25$.

◆ Exercice n° 6 p. 139

Le nombre de cas possibles est : 100.

Calcul de $P(A)$

Pour réaliser l'événement A, il faut choisir u parmi 10 chiffres ; le nombre de cas favorables est : 10.

Donc : $P(A) = \frac{10}{100} = 0,10$.

Calcul de $P(B)$

Pour réaliser l'événement B, il faut choisir u parmi 9 chiffres autres que 2 et choisir d parmi les 10 chiffres ; le nombre de cas favorables est : $9 \times 10 = 90$.

Donc : $P(B) = \frac{90}{100} = 0,90$.

Calcul de $P(C)$

Pour réaliser l'événement C, il faut choisir u parmi les 10 chiffres et choisir d parmi 9 chiffres autres que u ; le nombre de cas favorables est : $10 \times 9 = 90$.

$$\text{Donc : } P(C) = \frac{90}{100} = 0,90.$$

Calcul de $P(D)$

Pour réaliser l'événement D, il faut choisir d parmi les 10 chiffres et choisir u parmi les chiffres inférieurs à d ; le nombre de cas favorables est : $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.

$$\text{Donc : } P(D) = \frac{45}{100} = 0,45.$$

Calcul de $P(E)$

Pour réaliser l'événement E, il faut choisir $d = 5$; le nombre de cas favorables est : 10.

$$\text{Donc : } P(E) = \frac{10}{100} = 0,1.$$

Calcul de $P(F)$

Pour réaliser l'événement F, il faut choisir d parmi les 5 chiffres de 5 à 9 et choisir u parmi les 2 chiffres 0 et 1 ; le nombre de cas favorables est : $5 \times 2 = 10$.

$$\text{Donc : } P(F) = \frac{10}{100} = 0,1.$$

♦ Exercice n° 7 p. 139

Le nombre de cas possibles est : $6 \times 6 = 36$.

Calcul de $P(A)$

Pour réaliser l'événement A, il faut obtenir les couples de la forme (x, x) , x variant de 1 à 6 ; le nombre de cas favorables est : 6.

$$\text{Donc : } P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Calcul de $P(B)$

Pour réaliser l'événement B, il faut obtenir ou bien un 6 ou bien deux 6 ; le nombre de cas favorables est : $5 \times 2 + 1 = 11$.

$$\text{Donc : } P(B) = \frac{11}{36}.$$

Calcul de $P(C)$

On a : $5 = 1 + 4 = 2 + 3$.

Pour réaliser l'événement C, il faut obtenir les couples $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(2, 3)$ ou $(3, 2)$; le nombre de cas favorables est : 4.

$$\text{Donc : } P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Calcul de $P(D)$

Pour réaliser l'événement D, il faut obtenir les couples de la forme $(2, x)$, x variant de 1 à 6 ; le nombre de cas favorables est : 6.

$$\text{Donc : } P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Calcul de $P(E)$

Pour réaliser l'événement E, il faut obtenir le couple $(2, 3)$; le nombre de cas favorables est : 1.

$$\text{Donc : } P(E) = \frac{1}{36}.$$

Calcul de $P(F)$

L'événement F est : $C \cup D$.

$$\text{Donc : } P(F) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{4 + 6 - 1}{36} = \frac{9}{36} = 0,25.$$

♦ Exercice n° 8 p. 139

Distribuer 10 copies à 10 élèves revient à réaliser une permutation de 10 éléments ; donc, le nombre de cas possibles est : $10! = 3\,628\,800$.

1. Il y a un seul cas favorable à l'événement U : « chaque élève reçoit sa copie ».

$$\text{Donc : } P(U) = \frac{1}{10!} = 275 \times 10^{-9}.$$

2. Pour réaliser l'événement V : « l'élève A reçoit sa copie », il faut donner à A sa copie puis effectuer une permutation sur les 9 copies restantes ; le nombre de cas favorables est : $1 \times 9! = 9!$.
Donc : $P(V) = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10} = 0,10$.

3. Pour réaliser l'événement W : « les élèves C et E reçoivent chacun sa copie », il faut donner à chacun sa copie puis effectuer une permutation sur les 8 copies restantes ; le nombre de cas favorables est : $1 \times 8! = 8!$.
Donc : $P(W) = \frac{8!}{10!} = \frac{1}{10 \times 9} = \frac{1}{90}$.

4. Pour réaliser l'événement X : « l'élève C ou E reçoit sa copie », il faut donner à au moins un des deux sa copie.
Désignons par : Y l'événement « l'élève C reçoit sa copie » ; on a : $P(Y) = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$;

Z l'événement « l'élève E reçoit sa copie » ; on a : $P(Z) = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$.

De plus, on a : $X = Y \cup Z$ et $W = Y \cap Z$.

Donc : $P(X) = P(Y) + P(Z) - P(W) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{90} = \frac{17}{90}$.

◆ Exercice n° 9 p. 139

Chacune des 5 personnes A, B, C, D et E choisit au hasard un des 5 restaurants numérotés 1, 2, 3, 4 et 5.
Donc, cela revient à réaliser un 5-uplet de {1, 2, 3, 4, 5}.

Par exemple, le 4-uplet (1, 3, 2, 2, 5) traduit que :

- la personne A choisit le restaurant numéroté 1 ;
- la personne B choisit le restaurant numéroté 3 ;
- la personne C choisit le restaurant numéroté 2 ;
- la personne D choisit le restaurant numéroté 2 ;
- la personne E choisit le restaurant numéroté 5.

Le nombre de cas possibles est : $5^5 = 3\,125$.

1. Pour réaliser l'événement U : « chacune des 5 personnes choisit un restaurant différent », il faut effectuer une permutation sur les 5 restaurants ; le nombre de cas favorables est : $5! = 120$.

Donc : $P(U) = \frac{5!}{5^5} = 0,038\,4$.

2. L'événement V : « les 5 personnes se retrouvent dans le même restaurant », est réalisé lorsque les 5 numéros sont identiques : (1,1,1,1,1) ; (2,2,2,2,2) ; (3,3,3,3,3) ; (4,4,4,4,4) ; (5,5,5,5,5) ; le nombre de cas favorables est : 5.

Donc : $P(V) = \frac{5}{5^5} = 0,001\,6$.

3. L'événement « au moins 2 personnes se retrouvent dans le même restaurant » est : $\bar{U}$;
donc : $P(\bar{U}) = 1 - P(U) = 1 - 0,038\,4 = 0,961\,6$.

◆ Exercice n° 10 p. 140

Sur le diagramme ci-après, sont représentés respectivement :

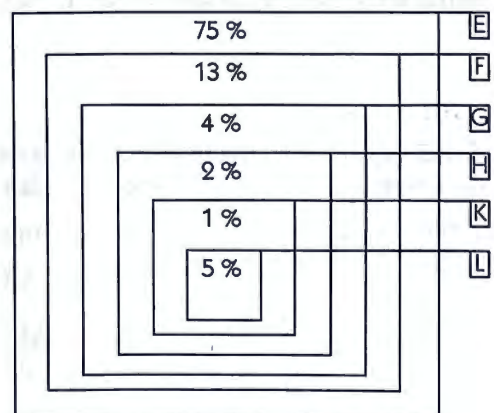
- E l'ensemble des élèves de la classe ;
- F l'ensemble des élèves ayant été absents au moins 1 jour ;
- G l'ensemble des élèves ayant été absents au moins 2 jours ;
- H l'ensemble des élèves ayant été absents au moins 3 jours ;
- K l'ensemble des élèves ayant été absents au moins 4 jours ;
- L l'ensemble des élèves ayant été absents au moins 5 jours ;

On a : $P(A) = \frac{75}{100} = 0,75$;

$P(B) = \frac{25}{100} = 0,25$;

$P(C) = \frac{4}{100} = 0,04$;

$P(D) = \frac{2 + 4 + 13 + 75}{100} = 0,94$.



RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

♦ Exercice n° 11 p. 140

Un résultat est une combinaison de 2 parmi 7 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_7^2 = 21$.

1. Pour réaliser l'événement A : « les deux boules sont blanches », il faut choisir les 2 boules parmi les 4 blanches ; le nombre de cas favorables est : $C_3^0 \times C_4^2 = 1 \times 6 = 6$.

$$\text{Donc : } P(A) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

2. Pour réaliser l'événement B : « les deux boules sont noires », il faut choisir les 2 boules parmi les 3 noires ; le nombre de cas favorables est : $C_3^2 \times C_4^0 = 3 \times 1 = 3$.

$$\text{Donc : } P(B) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}.$$

3. Pour réaliser l'événement C : « les deux boules sont de couleurs différentes », il faut choisir 1 boule parmi les 3 noires et 1 boule parmi les 4 boules blanches ;

le nombre de cas favorables est : $C_3^1 \times C_4^1 = 3 \times 4 = 12$.

$$\text{Donc : } P(C) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

♦ Exercice n° 12 p. 140

Un jury est une combinaison de 4 parmi 15 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_{15}^4 = 1\,365$.

1. Pour réaliser l'événement A : « le jury comprend 2 hommes et 2 femmes », il faut choisir 2 hommes parmi les 9 hommes et 2 femmes parmi les 6 femmes ;

le nombre de cas favorables est : $C_9^2 \times C_6^2 = 36 \times 15 = 540$.

$$\text{Donc : } P(A) = \frac{540}{1\,365} = \frac{36}{91} ; P(A) \approx 0,396.$$

2. Pour réaliser l'événement B : « le jury ne comprend aucune femme », il faut choisir les 4 membres parmi les 9 hommes ; le nombre de cas favorables est : $C_9^4 \times C_6^0 = 126 \times 1 = 126$.

$$\text{Donc : } P(B) = \frac{126}{1\,365} = \frac{6}{65} ; P(B) \approx 0,092.$$

3. L'événement C : « le jury comprend au moins une femme » est : $\bar{B}$.

$$\text{Donc : } P(C) = 1 - P(B) = \frac{59}{65} ; P(C) \approx 0,908.$$

♦ Exercice n° 13 p. 140

Une prise est une combinaison de 4 parmi 10 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_{10}^4 = 210$.

Calcul de $P(A)$

Pour réaliser l'événement A : « le cambrioleur a emporté les trois montres », il faut prendre les 3 montres et 1 bijoux parmi les 7 bijoux qui ne sont pas des montres ;

le nombre de cas favorables est : $C_3^3 \times C_7^1 = 1 \times 7 = 7$.

$$\text{Donc : } P(A) = \frac{7}{210} = \frac{1}{30} ; P(A) \approx 0,033.$$

Calcul de $P(B)$

L'événement B : « le cambrioleur a emporté au moins un collier » a pour événement contraire $\bar{B}$ « le cambrioleur n'a emporté aucun collier »

Pour réaliser l'événement $\bar{B}$, il faut prendre 4 bijoux parmi les 8 bijoux qui ne sont pas des colliers ;

le nombre de cas favorables est : $C_8^4 \times C_2^0 = 70 \times 1 = 70$ et $P(\bar{B}) = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Donc : } P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{2}{3} ; P(B) \approx 0,667.$$

Calcul de $P(C)$

Pour réaliser l'événement C : « le cambrioleur a emporté exactement deux bagues », il faut prendre les 2 parmi les 5 bagues et 2 bijoux parmi les 5 bijoux qui ne sont pas des bagues ;

le nombre de cas favorables est : $C_5^2 \times C_5^2 = 10 \times 10 = 100$.

$$\text{Donc : } P(C) = \frac{100}{210} = \frac{10}{21} ; P(C) \approx 0,476.$$

◆ Exercice n° 14 p. 140

Un tirage est une combinaison de 3 parmi 12 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_{12}^3 = 220$.

1. Pour réaliser l'événement A : « les trois bâtons sont de même couleur », il faut tirer soit 3 bâtons parmi les 5 bâtons blancs, soit 3 bâtons parmi les 4 bâtons rouges, soit les 3 bâtons verts ;
le nombre de cas favorables est : $C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 10 + 4 + 1 = 15$.
Donc : $P(A) = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$; $P(A) \approx 0,068$.

2. L'événement B : « l'un au moins des trois bâtons est rouge » a pour événement contraire $\bar{B}$ « aucun des trois bâtons n'est rouge ».
Pour réaliser l'événement $\bar{B}$, il faut tirer 3 bâtons parmi les 8 bâtons qui ne sont pas rouges ;
le nombre de cas favorables est : $C_8^3 \times C_4^0 = 56 \times 1 = 56$ et $P(\bar{B}) = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$.
Donc : $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{41}{55}$; $P(B) \approx 0,745$.

3. Pour réaliser l'événement C : « deux au moins des trois bâtons sont verts », il faut tirer soit 2 bâtons parmi les 3 bâtons verts et 1 bâton parmi les 9 qui ne sont pas verts, soit les 3 bâtons verts ;
le nombre de cas favorables est : $C_3^2 \times C_9^1 + C_3^3 \times C_9^0 = 27 + 1 = 28$.
Donc : $P(C) = \frac{28}{220} = \frac{7}{55}$; $P(C) \approx 0,127$.

◆ Exercice n° 15 p. 140

Une main est une combinaison de 8 parmi 32 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_{32}^8 = 10\,518\,300$.

1. Pour réaliser l'événement A : « une main comprenant le roi de pique », il faut tirer le roi de pique et 7 cartes parmi les 31 cartes restantes ; le nombre de cas favorables est : $C_{31}^7 = 2\,629\,575$.
Donc : $P(A) = \frac{2\,629\,575}{10\,518\,300} = \frac{1}{4}$; $P(A) = 0,25$.

2. Pour réaliser l'événement B : « une main comprenant exactement un roi », il faut tirer 1 roi parmi les 4 rois et 7 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas rois ;
le nombre de cas favorables est : $C_4^1 \times C_{28}^7 = 4 \times 1\,840\,400 = 7\,361\,600$.
Donc : $P(B) = \frac{7\,361\,600}{10\,518\,300} = \frac{2\,024}{4\,495}$; $P(B) \approx 0,450$.

3. Pour réaliser l'événement C : « une main comprenant exactement deux piques », il faut tirer 2 piques parmi les 8 piques et 6 cartes parmi les 24 cartes qui ne sont pas des piques ;
le nombre de cas favorables est : $C_8^2 \times C_{24}^6 = 28 \times 134\,596 = 3\,768\,688$.
Donc : $P(C) = \frac{3\,768\,688}{10\,518\,300} = \frac{942\,172}{2\,629\,575}$; $P(C) \approx 0,358$.

◆ Exercice n° 16 p. 140

Un tirage est une combinaison de 4 parmi 32 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_{32}^4 = 35\,960$.

Calcul de $P(A)$

Pour réaliser l'événement A : « obtenir une carte de chaque couleur », il faut tirer 1 carte parmi les 8 cartes de chacune des 4 couleurs ; le nombre de cas favorables est : $C_8^1 \times C_8^1 \times C_8^1 \times C_8^1 = 8^4 = 4\,096$.
Donc : $P(A) = \frac{4\,096}{35\,960} = \frac{512}{4\,495}$; $P(A) \approx 0,114$.

Calcul de $P(B)$

Pour réaliser l'événement B : « obtenir exactement un as », il faut tirer 1 carte parmi les 4 as et 3 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as ; le nombre de cas favorables est : $C_4^1 \times C_{28}^3 = 4 \times 3\,276 = 13\,104$.
Donc : $P(B) = \frac{13\,104}{35\,960} = \frac{1\,638}{4\,495}$; $P(B) \approx 0,364$.

Calcul de $P(C)$

Pour réaliser l'événement C : « n'obtenir aucun as », il faut tirer 4 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as ; le nombre de cas favorables est : $C_{28}^4 = 1 \times 3\,276 = 20\,475$.
Donc : $P(C) = \frac{20\,475}{35\,960} = \frac{4\,095}{7\,192}$; $P(C) \approx 0,569$.

Calcul de P(D)

L'événement D « obtenir au moins un as » a pour événement contraire C : « n'obtenir aucun as ».

$$\text{Donc : } P(D) = 1 - P(C) = \frac{3\,097}{7\,192} ; P(D) \approx 0,431.$$

Calcul de P(E)

Pour réaliser l'événement E : « obtenir deux cœurs et deux piques », il faut tirer 2 cartes parmi les 8 cœurs et 2 cartes parmi les 8 piques ;

$$\text{le nombre de cas favorables est : } C_8^2 \times C_8^2 = 28 \times 28 = 784.$$

$$\text{Donc : } P(E) = \frac{784}{35\,960} = \frac{98}{4\,495} ; P(E) \approx 0,021.$$

Calcul de P(F)

Pour réaliser l'événement F : « obtenir exactement deux cœurs et un as », il faut tirer :

- soit 1 carte parmi les 7 cœurs qui ne sont pas des as, l'as de cœur et 2 cartes parmi les 21 cartes qui ne sont ni cœurs, ni as ;
- soit 2 cartes parmi les 7 cœurs qui ne sont pas as, 1 as parmi les 3 as qui ne sont pas cœurs et 1 carte parmi les 21 cartes qui ne sont ni cœurs, ni as.

$$\text{Le nombre de cas favorables est : } (C_7^1 \times C_1^1 \times C_{21}^2) + (C_7^2 \times C_3^1 \times C_{21}^1) = (7 \times 1 \times 210) + (21 \times 3 \times 21) = 1\,596.$$

$$\text{Donc : } P(F) = \frac{1\,596}{35\,960} = \frac{399}{8\,990} ; P(F) \approx 0,044.$$

◆ Exercice n° 17 p. 140

Un résultat est une combinaison de 5 parmi 25 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_{25}^5 = 53\,130$.

Ci-contre le diagramme représentant la répartition des 25 élèves.

1. Pour réaliser l'événement A : « chacun des cinq étudie au moins une langue », il faut choisir les 5 élèves parmi les 20 (14 + 12 - 6) qui étudient l'allemand ou l'espagnol ;

le nombre de cas favorables est : $C_{20}^5 = 15\,504$.

$$\text{Donc : } P(A) = \frac{15\,504}{53\,130} = \frac{2\,584}{8\,855} ; P(A) \approx 0,292.$$

2. L'événement B : « trois élèves étudient l'espagnol et deux l'allemand », il faut choisir :

- soit 2 élèves parmi les 6 qui étudient les deux langues, 1 élève parmi les 8 qui étudient uniquement l'espagnol et 2 élèves parmi les 5 qui n'étudient aucune des deux langues ;
- soit 2 élèves parmi les 6 qui étudient uniquement l'allemand et 3 élèves parmi les 8 qui étudient uniquement l'espagnol ;
- soit 2 élèves parmi les 8 qui étudient uniquement l'espagnol, 1 élève parmi les 6 qui étudient les deux langues, 1 élève parmi les 6 qui étudient uniquement l'allemand et 1 élève parmi les 5 qui n'étudient aucune langue.

$$\text{Le nombre de cas favorables est : } (C_6^2 \times C_8^1 \times C_5^2) + (C_6^2 \times C_8^3) + (C_8^2 \times C_6^1 \times C_6^1 \times C_5^1) = 7\,080.$$

$$\text{Donc : } P(B) = \frac{7\,080}{53\,130} = \frac{236}{1\,771} ; P(B) \approx 0,133.$$

3. Pour réaliser l'événement C : « trois élèves au moins étudient l'espagnol », il faut choisir :

- soit 3 élèves parmi les 14 qui étudient l'espagnol et 2 élèves parmi les 11 qui n'étudient pas l'espagnol ;
- soit 4 élèves parmi les 14 qui étudient l'espagnol et 1 élève parmi les 11 qui n'étudient pas l'espagnol ;
- soit les 5 élèves parmi les 14 qui étudient l'espagnol.

$$\text{Le nombre de cas favorables est : } (C_{14}^3 \times C_{11}^2) + (C_{14}^4 \times C_{11}^1) + (C_{14}^5 \times C_{11}^0) = 33\,033.$$

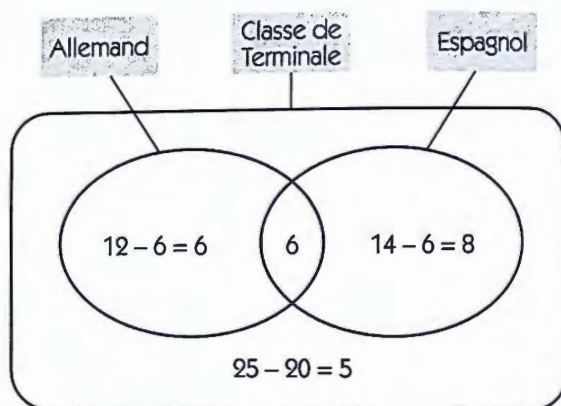
$$\text{Donc : } P(C) = \frac{33\,033}{53\,130} = \frac{143}{230} ; P(C) \approx 0,622.$$

4. Pour réaliser l'événement D : « un élève au plus étudie l'allemand », il faut choisir :

- soit 5 élèves parmi les 13 qui n'étudient pas l'allemand ;
- soit 4 élèves parmi les 13 qui n'étudient pas l'allemand et 1 élève parmi les 12 qui étudient l'allemand.

$$\text{Le nombre de cas favorables est : } (C_{13}^5 \times C_{12}^0) + (C_{13}^4 \times C_{12}^1) = 9\,867.$$

$$\text{Donc : } P(D) = \frac{9\,867}{53\,130} = \frac{13}{70} ; P(D) \approx 0,186.$$



♦ Exercice n° 18 p. 140

Un résultat est une combinaison de 3 parmi 20 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_{20}^3 = 1\,140$.

Calcul de $P(A)$

Pour réaliser l'événement A : « ni Saliou, ni Julie ne font partie des trois représentants », il faut choisir les 3 représentants parmi les 18 personnes qui ne sont ni Saliou, ni Julie ;

le nombre de cas favorables est : $C_{18}^3 = 816$. Donc : $P(A) = \frac{816}{1\,140} = \frac{68}{95}$; $P(A) \approx 0,716$.

Calcul de $P(B)$

Pour réaliser l'événement B : « Saliou et Julie font partie des trois représentants », il faut choisir Saliou, Julie et 1 représentant parmi les 18 personnes qui ne sont ni Saliou, ni Julie ;

le nombre de cas favorables est : $C_2^2 \times C_{18}^1 = 18$. Donc : $P(B) = \frac{18}{1\,140} = \frac{3}{190}$; $P(B) \approx 0,016$.

Calcul de $P(C)$

Pour réaliser l'événement C : « Seule Julie fait partie des trois représentants », il faut choisir Julie et 2 représentants parmi les 18 personnes qui ne sont ni Saliou, ni Julie ;

le nombre de cas favorables est : $C_1^1 \times C_{18}^2 = 1 \times 153 = 153$. Donc : $P(C) = \frac{153}{1\,140} = \frac{51}{380}$; $P(C) \approx 0,134$.

♦ Exercice n° 19 p. 140

Un résultat est un arrangement de 2 parmi 10 ; donc, le nombre de cas possibles est : $A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$.

1. Pour réaliser l'événement A : « les deux boules tirées sont de même couleur », il faut tirer :

– soit 2 boules parmi les 6 blanches ;

– soit 2 boules parmi les 4 rouges.

Le nombre de cas favorables est : $(6 \times 5) + (4 \times 3) = 42$.

Donc : $P(A) = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$; $P(A) \approx 0,467$.

2. On a : $P(B) = 1 - P(A) = \frac{8}{15}$; $P(B) \approx 0,533$.

♦ Exercice n° 20 p. 140

1. Désignons par : x la probabilité de chacun des numéros impairs 1, 3 et 5 ;

y la probabilité de chacun des numéros pairs 2, 4 et 6.

On a : $y = 2x$ et $3(x + y) = 1$; c'est-à-dire : $x = \frac{1}{9}$ et $y = \frac{2}{9}$.

Éventualité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

2. • Pour réaliser l'événement A : « le numéro tiré est un nombre pair », il faut tirer 2, 4 ou bien 6.

$P(A) = 3 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$.

• Pour réaliser l'événement B : « le numéro tiré est un nombre impair », il faut tirer 1, 3 ou bien 5.

$P(B) = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

• Pour réaliser l'événement C : « le numéro tiré est un nombre premier », il faut tirer 2, 3 ou bien 5.

$P(C) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

☐ Exercices d'approfondissement

♦ Exercice n° 21 p. 141

Un résultat est une combinaison de 2 parmi 5 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_5^2 = 10$.

1. Pour réaliser l'événement A : « ne rien gagner », il faut tirer les 2 enveloppes vides ;

le nombre de cas favorables est : $C_2^2 \times C_3^0 = 1 \times 1 = 1$.

Donc : $P(A) = \frac{1}{10} = 0,10$.

2. Pour réaliser l'événement B : « gagner exactement 500 F », il faut tirer 1 enveloppe parmi les 2 qui contiennent 500 F chacune et 1 enveloppe parmi les 2 vides ;

le nombre de cas favorables est : $C_2^1 \times C_2^1 = 2 \times 2 = 4$.

Donc : $P(B) = \frac{4}{10} = 0,40$.

3. Pour réaliser l'événement C : « gagner exactement 1 000 F », il faut tirer :

– soit les 2 enveloppes qui contiennent 500 F chacune ;

– soit l'enveloppe qui contient 1 000 F et 1 enveloppe parmi les 2 vides.

Le nombre de cas favorables est : $(C_2^2 \times C_2^0) + (C_1^1 \times C_2^1) = (1 \times 1) + (1 \times 2) = 3$.

Donc : $P(C) = \frac{3}{10} = 0,30$.

♦ Exercice n° 22 p. 141

Un résultat est une combinaison de 4 parmi 42 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_{42}^4 = 111\,930$.

Calcul de $P(A)$

Pour réaliser l'événement A : « les quatre représentants sont de la même promotion », il faut choisir 1 promotion parmi les 7 et 4 représentants parmi les 6 élèves de cette promotion ;

le nombre de cas favorables est : $7 \times C_6^4 = 1 \times 15 = 105$.

Donc : $P(A) = \frac{105}{111\,930} = \frac{1}{1\,066}$; $P(A) \approx 0,000\,9$.

Calcul de $P(\bar{B})$

Pour réaliser l'événement B : « il n'y a aucun élève de Sixième parmi les quatre représentants », il faut choisir les 4 représentants parmi les 36 élèves qui ne sont pas de la Sixième ;

le nombre de cas favorables est : $C_6^0 \times C_{36}^4 = 1 \times 58\,905 = 58\,905$.

Donc : $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{58\,905}{111\,930} = \frac{53\,025}{111\,930} = \frac{505}{1\,066}$; $P(\bar{B}) \approx 0,473$.

Calcul de $P(\bar{C})$

Pour réaliser l'événement C : « il y a un seul élève de Terminale parmi les quatre représentants », il faut choisir 1 représentant parmi les 6 élèves de la Terminale et 3 représentants parmi les 36 élèves qui ne sont pas de la Terminale ; le nombre de cas favorables est : $C_6^1 \times C_{36}^3 = 6 \times 7\,140 = 42\,840$.

Donc : $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{42\,840}{111\,930} = \frac{329}{533}$; $P(\bar{C}) \approx 0,617$.

Calcul de $P(D)$

Pour réaliser l'événement $\bar{D}$: « il n'y a aucun élève de Troisième parmi les quatre représentants », il faut choisir les 4 représentants parmi les 36 élèves qui ne sont pas de la Troisième ;

le nombre de cas favorables est : $C_6^0 \times C_{36}^4 = 1 \times 58\,905 = 58\,905$.

Donc : $P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - \frac{58\,905}{111\,930} = \frac{53\,025}{111\,930} = \frac{505}{1\,066}$; $P(D) \approx 0,474$.

♦ Exercice n° 23 p. 141

Une répartition au hasard des 7 pions (indiscernables) sur les 16 cases du damier, à raison d'un pion au plus par case est une combinaison de 7 parmi 16 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_{16}^7 = 11\,440$.

1. • Pour réaliser l'événement A : « quatre pions sont placés sur une même rangée horizontale ».

On peut choisir successivement :

– 1 rangée horizontale parmi les 4, où l'on place 4 pions dans les 4 cases :

$C_4^1 \times C_4^4 = 4$ possibilités.

– 3 cases parmi les 12 cases restantes, où l'on place 3 pions :

$C_{12}^3 \times C_3^3 = 220 \times 1 = 220$ possibilités.

Le nombre de cas favorables à A est : $4 \times 220 = 880$.

Donc : $P(A) = \frac{880}{11\,440} = \frac{1}{13}$.

• Pour réaliser l'événement B : « aucune rangée horizontale ne contient trois pions », on a les configurations suivantes.



Configuration 1 : 3 rangées horizontales (ou lignes) à 2 pions et 1 rangée horizontale à 1 pion.

On peut choisir successivement :

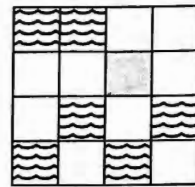
- 3 lignes parmi les 4, où l'on place 2 pions dans 2 des 4 cases par ligne :

$$C_4^3 \times (C_4^2)^3 = 4 \times 216 = 864 \text{ possibilités.}$$

- la ligne restante, où l'on place 1 pion dans 1 des 4 cases :

$$C_4^1 \times C_4^1 = 4 \text{ possibilités.}$$

Le nombre de cas favorables pour la **configuration 1** est : $= 864 \times 4 = 3\,456$.



Configuration 2 : 1 rangée horizontale (ou ligne) à 4 pions, 1 rangée horizontale à 2 pions et 1 rangée horizontale à 1 pion.

On peut choisir successivement :

- 1 ligne parmi les 4, où l'on place 4 pions dans les 4 cases :

$$C_4^1 \times C_4^4 = 4 \times 1 = 4 \text{ possibilités.}$$

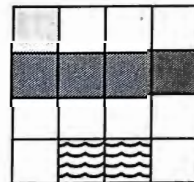
- 1 ligne parmi les 3 restantes, où l'on place 2 pions dans 2 des 4 cases :

$$C_3^1 \times C_4^2 = 3 \times 6 = 18 \text{ possibilités.}$$

- 1 ligne parmi les 2 restantes, où l'on place 1 pion dans 1 des 4 cases :

$$C_2^1 \times C_4^1 = 2 \times 4 = 8 \text{ possibilités.}$$

Le nombre de cas favorables pour la **configuration 2** est : $= 4 \times 18 \times 8 = 576$.



Configuration 3 : 1 rangées horizontales (ou lignes) à 4 pions, 3 rangées horizontales à 1 pion.

On peut choisir successivement :

- 1 ligne parmi les 4, où l'on place 4 pions dans les 4 cases par ligne :

$$C_4^1 \times C_4^4 = 4 \times 1 = 4 \text{ possibilités.}$$

- les 3 lignes restantes, où l'on place 1 pion dans 1 des 4 cases par ligne :

$$C_3^3 \times (C_4^1)^3 = 1 \times 64 = 64 \text{ possibilités.}$$

Le nombre de cas favorables pour la **configuration 3** est : $4 \times 64 = 256$.

Le nombre de cas favorables à B est : $3\,456 + 576 + 256 = 4\,288$.

$$\text{Donc : } P(B) = \frac{4\,288}{11\,440} = \frac{268}{715}.$$

• Pour réaliser l'événement C : « une rangée horizontale et une seule contient exactement trois pions », on a les configurations suivantes.

Configuration 1 : 1 rangée horizontale (ou ligne) à 3 pions et 2 rangées horizontales à 2 pions.

On peut choisir successivement :

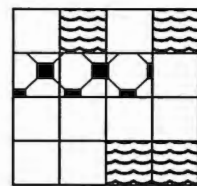
- 1 ligne parmi les 4, où l'on place 3 pions dans 3 des 4 cases :

$$C_4^1 \times C_4^3 = 4 \times 4 = 16 \text{ possibilités.}$$

- 2 lignes parmi les 3 restantes, où l'on place 2 pions dans 2 des 4 cases par ligne :

$$C_3^2 \times (C_4^2)^2 = 3 \times 36 = 108 \text{ possibilités.}$$

Le nombre de cas favorables pour la **configuration 1** est : $16 \times 108 = 1\,728$.



Configuration 2 : 1 rangée horizontale (ou ligne) à 3 pions, 1 rangée horizontale à 2 pions et 2 rangées horizontales à 1 pion.

On peut choisir successivement :

- 1 ligne parmi les 4, où l'on place 3 pions dans 3 des 4 cases :

$$C_4^1 \times C_4^3 = 4 \times 4 = 16 \text{ possibilités.}$$

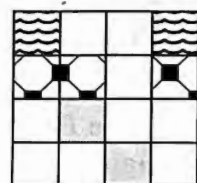
- 1 ligne parmi les 3 restantes, où l'on place 2 pions dans 2 des 4 cases :

$$C_3^1 \times C_4^2 = 3 \times 6 = 18 \text{ possibilités.}$$

- les 2 lignes restantes, où l'on place 1 pion dans 1 des 4 cases par ligne :

$$C_2^2 \times (C_4^1)^2 = 1 \times 16 = 16 \text{ possibilités.}$$

Le nombre de cas favorables pour la **configuration 2** est : $16 \times 18 \times 16 = 4\,608$.



Configuration 3 : 1 rangée horizontale (ou ligne) à 4 pions, 1 rangée horizontale à 3 pions.

On peut choisir successivement :

- 1 ligne parmi les 4, où l'on place 4 pions dans les 4 cases par ligne :

$$C_4^1 \times C_4^4 = 4 \times 1 = 4 \text{ possibilités.}$$

- 1 ligne parmi les 3 lignes restantes, où l'on place 3 pions dans 3 des 4 cases par ligne :

$$C_3^1 \times C_4^3 = 3 \times 4 = 12 \text{ possibilités.}$$

Le nombre de cas favorables pour la **configuration 3** est : $4 \times 12 = 48$.

Le nombre de cas favorables à C est : $1\,728 + 4\,608 + 48 = 6\,384$.

$$\text{Donc : } P(C) = \frac{6\,384}{11\,440} = \frac{399}{715}.$$

- Pour réaliser l'événement D : « deux rangées horizontales contiennent exactement trois pions ».

On a la configuration suivante : 2 rangées horizontales (ou lignes) à 3 pions et 1 rangée horizontale à 1 pion.

On peut choisir successivement :

- 2 lignes parmi les 4, où l'on place 3 pions dans 3 des 4 cases par ligne :

$$C_4^2 \times (C_4^3)^2 = 6 \times 16 = 96 \text{ possibilités.}$$

- 1 ligne parmi les 2 restantes, où l'on place 1 pion dans 1 des 4 cases :

$$C_2^1 \times C_4^1 = 2 \times 4 = 8 \text{ possibilités.}$$

Le nombre de cas favorables à D est : $96 \times 8 = 768$.

$$\text{Donc : } P(D) = \frac{768}{11\,440} = \frac{48}{715}.$$

2. On vérifie que : $P(B) + P(C) + P(D) = 1$.

♦ Exercice n° 24 p. 141

1. a) Un résultat est une combinaison de 3 parmi 12 ; donc, le nombre de choix possibles est : $C_{12}^3 = 220$.

b) Calcul de $P(A)$

Pour réaliser l'événement A : « l'enfant mange un gâteau de chaque variété », il faut choisir 1 gâteau de chaque variété ; le nombre de cas favorables est : $C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

$$\text{Donc : } P(A) = \frac{60}{220} = \frac{3}{11} ; P(A) \approx 0,272.$$

Calcul de $P(B)$

Pour réaliser l'événement B : « l'enfant mange trois gâteaux identiques », il faut choisir les 3 gâteaux d'une même variété ; le nombre de cas favorables est : $C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 10 + 4 + 1 = 15$.

$$\text{Donc : } P(B) = \frac{15}{220} = \frac{3}{44} ; P(B) \approx 0,068.$$

Calcul de $P(C)$

L'événement C : « l'enfant mange exactement deux variétés de gâteaux » est : $\overline{A \cup B}$;

$$\text{donc : } P(C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{60 + 15}{220} = \frac{29}{44} ; P(C) \approx 0,659.$$

2. a) Un résultat est un tirage successif sans remise de 3 parmi 12 (il mange les 3 gâteaux l'un après l'autre) ; donc, le nombre de choix possibles est : $A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1\,320$.

b) Désignons respectivement par v , c et b les variétés vanille, chocolat et banane.

Calcul de $P(D)$

L'événement D : « l'enfant mange un gâteau à la vanille le matin, un à la banane à midi et un au chocolat le soir » est le triplet (v, b, c) ; le nombre de cas favorables est : $5 \times 4 \times 3 = 60$.

$$\text{Donc : } P(D) = \frac{60}{1\,320} = \frac{1}{22} ; P(D) \approx 0,045.$$

Calcul de $P(E)$

Pour réaliser l'événement E : « l'enfant mange un gâteau de chaque variété », il faut effectuer une permutation des 3 variétés ; le nombre de cas favorables est : $3! \times (5 \times 4 \times 3) = 360$.

$$\text{Donc : } P(E) = \frac{360}{1\,320} = \frac{3}{11} ; P(E) \approx 0,273.$$



Calcul de $P(F)$

L'événement F : « l'enfant mange deux gâteaux à la banane et un au chocolat » se réalise pour les triplés : (b, b, c) , (b, c, b) et (c, b, b) ; le nombre de cas favorables est : $3 \times (3 \times 2 \times 4) = 72$.
Donc : $P(F) = \frac{72}{1\ 320} = \frac{1}{22}$; $P(F) \approx 0,045$.

◆ Exercice n° 25 p. 141

1. Ci-dessous le tableau à double entrée.

Coloris	vert	rouge	bleu	jaune	Total
Taille					
1	0	10	10	10	30
2	10	30	25	10	75
3	0	15	20	10	45
Total	10	55	55	30	150

2. On a : $P(A) = \frac{55}{150} = \frac{11}{30}$;

$P(B) = \frac{10}{150} = \frac{1}{15}$;

$P(C) = \frac{10 + 30}{150} = \frac{4}{15}$.

3. Pour réaliser l'événement D : « prendre un pull qui coûte plus de 11 000 F CFA », il faut prendre un pull de taille 2 ou 3.

Donc : $P(D) = \frac{75 + 45}{150} = \frac{4}{5}$.

◆ Exercice n° 26 p. 141

1. Un passage dans l'ordre de sortie des 5 noms est une permutation de 5 éléments ; donc, le nombre de représentations possibles des cinq groupes est : $5! = 120$.

2. Calcul de $P(A)$

Pour réaliser l'événement A : « Diamant est le 1^{er} orchestre à se produire », il faut effectuer une permutation des 4 restants ; le nombre de cas favorables est : $1! \times 4! = 24$.

Donc : $P(A) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.

Calcul de $P(B)$

Pour réaliser l'événement B : « Ange et Best sont les deux derniers à se produire », il faut effectuer une permutation des 3 premiers, puis une permutation des 2 derniers.

Le nombre de cas favorables est : $3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$.

Donc : $P(B) = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$.

Calcul de $P(C)$

Pour réaliser l'événement C : « Élite et Cigale se produisent l'un après l'autre », il faut que Élite et Cigale se produisent selon les couples de passage (1, 2), (2, 3), (3, 4) ou (4, 5) et pour chaque couple, effectuer une permutation des 2, puis une permutation des 3 autres.

Le nombre de cas favorables est : $4 \times 2! \times 3! = 4 \times 2 \times 6 = 48$.

Donc : $P(C) = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$.

Calcul de $P(D)$

Pour réaliser l'événement D : « Ange est le 1^{er} ou le 3^e orchestre à se produire », il faut effectuer une permutation des 4 restants pour chaque ordre de Ange ; le nombre de cas favorables est : $2 \times 4! = 48$.

Donc : $P(D) = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$.

◆ Exercice n° 27 p. 141

1. S'il ignore tout des deux derniers chiffres, alors il compose son code en entrant : $45xy$ où x et y varient chacun de 1 à 9 ; le nombre de codes possibles est : $9 \times 9 = 81$.

La probabilité pour qu'il puisse retirer de l'argent en un essai est : $\frac{1}{81}$.

2. S'il se souvient que le code se termine par un 9 et que ses chiffres sont en ordre strictement croissant, alors il compose son code en entrant : $45x9$ où x varie de 6 à 8 ; le nombre de codes possibles est : 3.

La probabilité pour qu'il puisse retirer de l'argent en un essai est : $\frac{1}{3}$.

3. S'il se souvient que les chiffres de son code sont en ordre strictement croissant, alors il compose son code en entrant : 45xy où les couples (x, y) sont (6, 7), (6, 8), (6, 9), (7, 8), (7, 9) et (8, 9) ; le nombre de codes possibles est : 6.

La probabilité pour qu'il puisse retirer de l'argent en un essai est : $\frac{1}{6}$.

3. S'il se souvient que les chiffres de son code sont en ordre croissant (sens strict ou large), alors il compose son code en entrant : 45xy où les couples (x, y) sont (5, 5), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (6, 6), (6, 7), (6, 8), (6, 9), (7, 7), (7, 8), (7, 9), (8, 8), (8, 9) et (9, 9) ; le nombre de codes possibles est : 6.

La probabilité pour qu'il puisse retirer de l'argent en un essai est : $\frac{1}{15}$.

♦ Exercice n° 28 p. 142

1. Ci-contre l'histogramme des effectifs (ou fréquences).

2. a) Si l'histogramme des fréquences du lot des 10 000 lampes fabriquées est le même que celui relatif à l'échantillon étudié, alors la probabilité que la durée de vie de cette lampe soit supérieure ou égale à 1 500 heures est :

$$\frac{80 + 10 + 8 + 2}{220} = \frac{100}{220} = \frac{5}{11} \approx 0,454\ 545.$$

b) Cette probabilité est le quotient de l'aire relative d'intervalle [1 500 ; 1 900] par l'aire totale de l'histogramme.

