Collection
Inter
Africaine de
Mathématiques

sous la direction
de Saliou Touré
Professeur à l'Université
d'Abidjan

MATHÉMATIQUES

Terminale
SCIENCES
MATHÉMATIQUES

GUIDE PÉDAGOGIQUE

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen,
92178 Vanves Cedex

L'idée d'harmoniser les programmes de mathématiques entre les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien remonte à l'année 1983 où fut organisé par l'IRMA, à Abidjan, le premier séminaire d'harmonisation. Depuis, d'autres séminaires ont suivi : en 1985 à Cotonou, en 1988 à Conakry et en juin 1992 à Abidjan avec la participation de 20 pays.

PARTICIPATION DES DIFFÉRENTS PAYS

BÉNIN
BURKINA FASO
BURUNDI
CAMEROUN
CENTRAFRIQUE
COMORES
CONGO
COTE D'IVOIRE
DJIBOUTI
GABON
GUINÉE
MADAGASCAR
MALI
MAURITANIE
NIGER
RÉP. DÉM. CONGO
RWANDA
SÉNÉGAL
TCHAD
TOGO

La suite logique, souhaitée par tous les participants, est l'élaboration d'une Collection Inter-Africaine de manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Des rédacteurs de tous les pays participent à la réalisation de ce projet. Un comité de coordination travaille avec les cellules nationales mises en place dans chaque pays.

COMITÉ DE COORDINATION

Missa COULIBALY
Damase KAMANO
Isidore KOFFI
Soma TRAORÉ

D'autres séminaires de concertation ont réuni les responsables de ces cellules, à Libreville en 1993, à Ndjaména en 1994, à Yaoundé en 1995, à Antananarivo en 1996, à Dakar en 1997, à Niamey en 1998, à Nouakchott en 1999, à Ouagadougou en 2000, à Cotonou en 2001, à Bangui en 2002 et à Bamako en 2003.

ISBN 2-84-129923-6

SOMMAIRE

1 TABLEAU SYNOPTIQUE DES PROGRAMMES DU SECOND CYCLE SCIENTIFIQUE 4

2 COMMENTAIRES GÉNÉRAUX POUR LE SECOND CYCLE 14
- 2.1 Options académiques 14
- 2.2 Options pédagogiques 14
- 2.3 Aspects culturels 15
- 2.4 Utilisation du manuel 15

3 COMMENTAIRES SPÉCIFIQUES À LA CLASSE DE TERMINALE SM .. 17
- 3.1 Activités des élèves 17
- 3.2 Présentation du manuel 17
- 3.3 Points méthodes 18
- 3.4 Principes de démonstration 19
- 3.5 Travaux dirigés 20
- 3.6 Algèbre et géométrie 21
- 3.7 Analyse 25

4 ANALYSE DES CHAPITRES 26
- 4.1 Arithmétique 26
- 4.2 Calcul vectoriel 42
- 4.3 Nombres complexes 54
- 4.4 Isométries du plan – Applications affines 72
- 4.5 Similitudes 90
- 4.6 Applications de l'espace 105
- 4.7 Coniques 114
- 4.8 Probabilités 132
- 4.9 Limites et continuité 146
- 4.10 Dérivation – Études de fonctions 157
- 4.11 Primitives – Fonction logarithme népérien 175
- 4.12 Fonctions exponentielles – Fonctions puissances 198
- 4.13 Suites numériques 216
- 4.14 Intégration 231
- 4.15 Équations différentielles 245

1 TABLEAU SYNOPTIQUE DES PROGRAMMES DU SECOND CYCLE SCIENTIFIQUE

Les programmes du Second Cycle Scientifique ont été établis en juin 1992, lors du quatrième séminaire d'harmonisation des programmes de mathématiques des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien. Constitués d'un tronc commun en classe de seconde (S) et de deux séries à partir de la classe de première (SM et SE), ils sont ici présentés dans un tableau synoptique afin de faire apparaître :

- la cohérence des différents thèmes à un niveau donné ;
- l'évolution d'un thème d'un niveau à l'autre ;
- les différences de contenus entre les deux séries.

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
ENSEMBLE DE NOMBRES	♦ **Nombres réels** • Rationnels et irrationnels • Opérations • Ordre - propriétés - partie entière - encadrement et opérations - majorant, minorant, maximum, minimum d'un ensemble • Valeur absolue - définition - propriétés - distance de deux nombres réels - inéquations : $\lvert x-a\rvert < r$, $\lvert x-a\rvert > r$, $\lvert x-a\rvert \leq r$, $\lvert x-a\rvert \geq r$ • Calculs approchés - approximations décimales d'ordre n - encadrement et valeurs approchées - écriture scientifique, ordre de grandeur			♦ Corps des nombres complexes • Forme algébrique : égalité, opérations, conjugué et module • Affixe d'un point, d'un vecteur ; point image, vecteur image d'un complexe • Forme trigonométrique : - module, argument, - produit, quotient - notation exponentielle - formules de Moivre et d'Euler • Racines n-ièmes • Équations du 2nd degré • Utilisation en trigonométrie • Utilisation en géométrie : - écriture complexe de transformations - caractérisation complexe de configurations planes - lieux géométriques	♦ Nombres complexes • Forme algébrique égalité, opérations conjugué et module • Affixe d'un point, d'un vecteur ; point image, vecteur image d'un complexe • Forme trigonométrique : - module, argument, - produit, quotient - notation exponentielle - formules de Moivre et d'Euler • Racines n-ièmes • Équations du 2nd degré • Utilisation en trigonométrie • Utilisation en géométrie : - écriture complexe de transformations - caractérisation complexe de configurations planes

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
ARITHMÉTIQUE				• Division euclidienne • Numération (décimale et binaire) • Multiples et diviseurs d'un entier relatif ; notation $n\mathbb{Z}$ • Congruence modulo n et utilisation • PGCD et PPCM - algorithme d'Euclide - nombres premiers entre eux - théorèmes de Bézout et de Gauss • Nombres premiers	• **Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers**
CALCUL LITTÉRAL	♦ **Polynômes** • Racines • Factorisation • Différentes écritures • Signe ♦ **Fractions rationnelles** • Différentes écritures • Signe				
	♦ **Équations** • Équations se ramenant au 1^{er} degré • Équations du 2^{nd} degré (utilisation de la forme canonique) • Systèmes linéaires d'équations dans $\mathbb{R}^2$ (sans théorie) ; interprétation graphique	♦ **Équations** • Équations du 2^{nd} degré - discriminant - somme et produit des solutions • Équations se ramenant au 2^{nd} degré (bicarrées, irrationnelles) • Systèmes linaires d'équations dans $\mathbb{R}^3$ (pivot de Gauss)	♦ **Équations** • Équations du 2^{nd} degré - discriminant - somme et produit des solutions • Équations se ramenant au 2^{nd} degré (bicarrées, irrationnelles) • Systèmes linaires d'équations dans $\mathbb{R}^3$ (pivot de Gauss)	♦ **Équations** • Équations faisant intervenir les fonctions ln ou exp • Équations du 2^{nd} degré dans $\mathbb{C}$	♦ **Équations** • **Équations faisant intervenir les fonctions ln ou exp** • **Équations du 2^{nd} degré dans $\mathbb{C}$**
	♦ **Inéquations** • Inéquations se ramenant au 1^{er} degré • Inéquations du 2^{nd} degré (forme canonique) • Interprétation graphique d'une inéquation ou d'un système linéaire d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$	♦ **Inéquations** Inéquations du 2^{nd} degré ou s'y ramenant (bicarrées, irrationnelles) ♦ **Problèmes** se ramenant à la résolution d'équations, d'inéquations ou de systèmes (programmation)	♦ **Inéquations** Inéquations du 2^{nd} degré ou s'y ramenant (bicarrées, irrationnelles) ♦ **Problèmes** se ramenant à la résolution d'équations, d'inéquations ou de systèmes (programmation)	♦ **Inéquations** Inéquations faisant intervenir les fonctions ln ou exp	♦ **Inéquations** **Inéquations faisant intervenir les fonctions ln ou exp**

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
FONCTIONS	♦ **Généralités** • Notion de fonction • Ensemble de définition • Coïncidence de deux fonctions sur un ensemble	♦ **Généralités** • Restriction • Composition • Injection et surjection ; bijection et réciproque ; composée de bijections	♦ **Généralités** • Restriction • Composition • Injection et surjection ; bijection et réciproque ; composée de bijections		
	♦ **Fonctions numériques** • Représentation graphique • Image directe, image réciproque d'un intervalle (étude graphique) • Maximum, minimum d'une fonction sur un ensemble • Sens de variation	♦ **Fonctions numériques** • Opérations • Fonctions associées et représentations graphiques • Comparaison de fonctions ; fonctions majorées, minorées, bornées • Représentations graphiques de deux bijections réciproques • Parité, périodicité ; éléments de symétrie d'une courbe ; ensemble d'étude d'une fonction	♦ **Fonctions numériques** • Opérations • Fonctions associées et représentations graphiques • Comparaison de fonctions ; fonctions majorées, minorées, bornées • Représentations graphiques de deux bijections réciproques • Parité, périodicité ; éléments de symétrie d'une courbe ; ensemble d'étude d'une fonction		
ÉTUDE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES		♦ **Limites** • Notions • Limite à gauche, à droite • Limites de fonctions élémentaires • Propriétés de comparaison • Opérations • Limites à l'infini de fonctions polynôme ou rationnelle	♦ **Limites** • Limite en *a* • Limite à gauche, à droite en *a* • Limites de fonctions élémentaires • Opérations • Limite infinie en *a* • Limite à l'infini • Opérations • Limites à l'infini de fonctions polynôme ou rationnelle	♦ **Limites** • Composition • Fonction monotone sur un intervalle ouvert • Formes indéterminées	♦ **Limites** • Propriétés de comparaison • Composition • Formes indéterminées
		♦ **Continuité en un point** • Notion • Prolongement par continuité	♦ **Continuité en *a*** • Notion • Critère de continuité	♦ **Continuité sur un intervalle** • Opérations, composition • Image d'un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires • Fonction strictement monotone ; fonctions puissances d'exposant rationnel	♦ **Continuité sur un intervalle** • Prolongement par continuité • Opérations, composition • Image d'un intervalle, valeurs intermédiaires • Fonction strictement monotone ; fonctions puissances d'exposant rationnel

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
ÉTUDE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES		**♦ Dérivation** • Nombre dérivé en a • Interprétations - tangente, vitesse - approximation locale affine • Nombre dérivé à gauche, à droite • Dérivabilité sur un intervalle • Dérivées de fonctions élémentaires • Opérations, composition avec une fonction affine • Signe de la dérivée et sens de variation • Extremum relatif d'une fonction	**♦ Dérivation** • Nombre dérivé en a • Interprétation - tangente • Dérivabilité sur un intervalle • Dérivées de fonctions élémentaires • Opérations, composition avec une fonction affine • Signe de la dérivée et sens de variation • Extremum relatif d'une fonction	**♦ Dérivation** • Composition ; fonction réciproque • Dérivées successives, position relative d'une courbe et de ses tangentes • Dérivées de : u^r ($r \in \mathbf{Q}$), $\ln \circ u$, $\exp \circ u$ et u^α ($\alpha \in \mathbf{R}$) • Inégalité des accroissements finis	**♦ Dérivation** • Interprétations - vitesse - approximation locale affine • Dérivabilité à gauche, à droite • Composition ; fonction réciproque • Dérivées successives, notion de point d'inflexion • Dérivées de : u^r ($r \in \mathbf{Q}$), $\ln \circ u$, $\exp \circ u$ et u^α ($\alpha \in \mathbf{R}$) • Inégalité des accroissements finis
	♦ Étude de fonctions • Fonctions affines par intervalles • Fonctions élémentaires : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto x^3$ • Composées des fonctions précédentes avec une fonction linéaire	**♦ Étude de fonctions** • Fonctions polynômes (degré ≤ 3) • $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ • $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ • Fonctions sinus, cosinus, tangente et fonctions trigonométriques simples	**♦ Étude de fonctions** • Fonctions polynômes (degré ≤ 3) • $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ • $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ • Fonction tangente	**♦ Étude de fonctions** • Fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles et trigonométriques • $x \mapsto \ln x$; $x \mapsto e^x$ • $x \mapsto a^x$; $x \mapsto x^\alpha$ • Fonctions $\ln \circ u$, $\exp \circ u$ et u^α ($\alpha \in \mathbf{R}$) • Croissances comparées de $\ln x$, e^x et x^α	**♦ Étude de fonctions** • Fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles et trigonométriques • $x \mapsto \ln x$; $x \mapsto e^x$ • $x \mapsto a^x$; $x \mapsto x^\alpha$ • Fonctions $\ln \circ u$, $\exp \circ u$ et u^α ($\alpha \in \mathbf{R}$) • Croissances comparées de $\ln x$, e^x et x^α
	♦ Compléments • Résolution graphique d'équations et d'inéquations	**♦ Compléments** • Asymptote • Résolution d'équations par dichotomie	**♦ Compléments** • Asymptote • Résolution d'équations par dichotomie ou balayage	**♦ Compléments** • Branches infinies • Résolution d'équations par balayage	**♦ Compléments** • Branches infinies
SUITES NUMÉRIQUES		• Diverses façons de définir et représenter une suite • Suites définies par une formule de récurrence : détermination graphique des termes • Minoration, majoration ; sens de variation • Notion de convergence • Suites arithmétiques et géométriques	• Diverses façons de définir et représenter une suite • Suites définies par une formule de récurrence : détermination graphique des termes • Minoration, majoration ; sens de variation • Notion de convergence • Suites arithmétiques et géométriques	• Suites bornées ; suites monotones • Limite, convergence et divergence • Calculs de limites - limite de $u_n = f(n)$, lorsque f a une limite en $+\infty$; - opérations - croissances comparées de (a^n), (n^α) et $\ln n$; - propriétés de comparaison - image d'une suite par une fonction - suite monotone • Suite définie par récurrence : méthodes du point fixe et de Newton • Suites arithmétiques et géométriques	• Suites bornées ; suites monotones • Limite, convergence et divergence • Calculs de limites - limite de $u_n = f(n)$, lorsque f a une limite en $+\infty$; - opérations - propriétés de comparaison - suite monotone • Suite définie par récurrence ; notion de point fixe • Suites arithmétiques et géométriques

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
INTÉGRATION				♦ **Définitions** • Primitives et intégrale d'une fonction continue sur un intervalle • Interprétations graphique (aire) et cinématique	♦ **Définitions** • Primitives et intégrale d'une fonction continue sur un intervalle • Interprétation graphique (aire)
				♦ **Propriétés** • Chasles, linéarité, positivité • Inégalité de la moyenne, valeur moyenne	♦ **Propriétés** • Chasles, linéarité positivité • Inégalité de la moyenne, valeur moyenne
				♦ **Techniques de calcul** • Calculs de primitives • Intégration par parties • Changement de variable affine ♦ **Intégration de** • fonctions paires, impaires ou périodiques • « polynômes » trigonométriques • fonctions rationnelles ♦ **Calcul approché d'intégrale**	♦ **Techniques de calcul** • Calculs de primitives • Intégration par parties ♦ **Intégration de** • fonctions paires, impaires ou périodiques • « polynômes » trigonométriques • fonctions rationnelles ♦ **Calcul approché d'intégrale**
				♦ **Applications** • Aires et volumes • Fonction définie par une intégrale	♦ **Applications** • Aires et volumes • Fonction définie par une intégrale
				♦ **Équations différentielles** • $y' - ay = 0$ • $y'' + ay' + by = 0$	♦ **Équations différentielles** • $y' - ay = 0$ • $y'' + ay' + by = 0$
ORGANISATION DES DONNÉES	♦ **Statistiques** • Consolidation des acquis du 1er Cycle • Notation Σ • Séries non regroupées en classes : - effectifs et fréquences cumulées - caractéristiques de position (mode, moyenne, médiane) et de dispersion (écart moyen, variance, écart type) • Séries regroupées en classes : - histogramme	♦ **Statistiques** • Séries simples regroupées en classes : - courbes cumulatives - caractéristiques de position et de dispersion • Séries doubles : - nuage de points, point moyen - ajustement linéaire (moindres carrés) - droites de régression, covariance et coefficient de corrélation	♦ **Statistiques** • Séries simples regroupées en classes : - polygone des effectifs et courbes cumulatives - caractéristiques de position et de dispersion		• Séries doubles : - nuage de points, point moyen - ajustement linéaire (Mayer, moindres carrés) - droites de régression, covariance et coefficient de corrélation

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
ORGANISATION DES DONNÉES		**♦ Analyse combinatoire** • Ensemble - cardinal - ensemble des parties et partition - produit cartésien • p-uplets, arrangements (A_n^p), permutations ($n!$), combinaisons (C_n^p) • Nombre d'applications, d'injections et de bijections entre deux ensembles finis • Formule du binôme	**♦ Analyse combinatoire** • Ensemble - cardinal - parties - produit cartésien • p-uplets, arrangements (A_n^p), permutations ($n!$), combinaisons (C_n^p) • Nombre d'applications, d'injections et de bijections entre deux ensembles finis	**♦ Analyse combinatoire** • Consolidation des acquis de 1re • Formule du binôme et triangle de Pascal **♦ Probabilités** • Vocabulaire • Propriétés • Équiprobabilité • Indépendance • Épreuve de Bernoulli	**♦ Analyse combinatoire** • Consolidation des acquis de 1re • Formule du binôme et triangle de Pascal **♦ Probabilités** • Vocabulaire • Propriétés • Équiprobabilité • Probabilité conditionnelle, événements indépendants, probabilités totales
		♦ Dénombrement • Comptage, diagrammes, arbres • Tirages successifs (avec ou sans remise), tirages simultanés • Principes de la somme et du produit	**♦ Dénombrement** • Comptage, diagrammes, arbres • Tirages successifs (avec ou sans remise), tirages simultanés • Principes de la somme et du produit	**♦ Variable aléatoire** • Loi de probabilité • Fonction de répartition • Espérance mathématique, variance et écart type • Loi binomiale	**♦ Variable aléatoire** • Loi de probabilité • Fonction de répartition • Espérance mathématique, variance et écart-type • Épreuve de Bernoulli • Loi binomiale
ANGLES	**♦ Angles inscrits non orientés** • Arcs capables • Quadrilatères inscriptibles • Relations métriques dans un triangle : - $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$ - théorème des sinus **♦ Polygones réguliers**				
	♦ Angles orientés • Orientation du plan • Angle orienté de deux vecteurs ; mesure principale	**♦ Angles orientés** • Mesures • Somme • Propriétés : - Chasles, double d'un angle orienté - angles inscrits - points cocycliques	**♦ Angles orientés** • Mesures • Somme et différence • Chasles	**♦ Lignes de niveau** $M \longmapsto \mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$	
TRIGONOMETRIE	• Cercle trigonométrique • Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté	• Définition et propriétés des fonctions circulaires • Formules : addition, duplication, linéarisation ... • Équations, inéquations trigonométriques	• Définition et propriétés des fonctions circulaires • Formules : addition, duplication, linéarisation ... • Équations trigonométriques	**♦ Utilisation des complexes** • Expression de $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ • Linéarisation • Transformation de produit en somme et de somme en produit	**♦ Utilisation des complexes** • Expression de $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ • Linéarisation • Transformation de produit en somme et de somme en produit

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
CALCULS VECTORIELS DANS LE PLAN	◆ **Vecteurs** • Combinaison linéaire • Colinéarité • Mesure algébrique • Bases, repères • Déterminant de deux vecteurs • Caractérisation vectorielle de : - droite ou demi-droite - droites parallèles ou perpendiculaires - centre de gravité d'un triangle	◆ **Barycentre de 2, 3 ou 4 points pondérés** • Définition • Propriétés - homogénéité - réduction - barycentres partiels - conservation par projection • Construction • Ensemble des barycentres de deux points	◆ **Barycentre de 2, 3 ou 4 points pondérés** • Définition • Propriétés - homogénéité - réduction - barycentres partiels • Construction • Ensemble des barycentres de deux points	◆ **Barycentre de *n* points pondérés** • Définition • Propriétés - homogénéité - réduction - barycentres partiels • Construction • Ensemble des barycentres de trois points non alignés	
	◆ **Utilisation des vecteurs** Démonstration de propriété	◆ **Utilisation du barycentre** • Problèmes d'alignement et de concours • Lignes de niveau - $M \mapsto aMA^2 + bMB^2$ - $M \mapsto \frac{MA}{MB}$	◆ **Utilisation du barycentre** • Problèmes d'alignement et de concours • Ligne de niveau - $M \mapsto MA^2 + MB^2$	◆ **Utilisation du barycentre** • Lignes de niveau - $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$ - $M \mapsto \frac{MA}{MB}$	
	◆ **Produit scalaire** • Définition • Propriétés • Norme d'un vecteur • Expression analytique dans une base orthonormée • Relations métriques dans un triangle : théorèmes d'Al-Kashi et de la médiane	◆ **Utilisation du produit scalaire** • Ligne de niveau - $M \mapsto MA^2 - MB^2$	◆ **Utilisation du produit scalaire** • Lignes de niveau - $M \mapsto MA^2 - MB^2$ - $M \mapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$		
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE	◆ **Droites** Représentations paramétriques	◆ **Orthogonalité** • Équation normale d'une droite • Distance d'un point à une droite			
	◆ **Cercle** Équations cartésiennes	◆ **Cercle** • Représentation paramétrique • Tangente(s) issue(s) d'un point	◆ **Cercle** Représentation paramétrique		
		◆ **Expression analytique** • d'une translation • de symétries orthogonales particulières • d'une homothétie	◆ **Expression analytique** • d'une translation • de symétries orthogonales particulières	◆ **Expression analytique** • d'une application affine	

APPLICATIONS DU PLAN

Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
◆ **Rotations** [niveau 1 (*)] • Définition • Propriétés - point invariant - rotation réciproque - décomposition (symétries-droite) - propriété fondamentale - images de figures	◆ **Translations et rotations** [niveau 2 (*)] • Propriété caractéristique • Composée (deux translations, deux rotations ou deux symétries-droite) • Décomposition (symétries-droite) d'une translation ou d'une rotation	◆ **Translations et rotations** [niveau 2 (*)] • Composée (deux rotations ou une rotation et une translation) • Décomposition (rotation de centre donné et translation) d'une rotation		
	◆ **Isométries** [niveaux 1 et 2 (*)] • Définition • Propriétés - images de figures - conservations • Composition • Déplacements et antidéplacements • Critères d'isométrie de deux triangles • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété)	◆ **Isométries** [niveaux 1 et 2 (*)] • Définition • Propriété - conservations • Déplacements et retournements • Détermination par deux triangles superposables • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété)	◆ **Isométries** [niveaux 1 et 2 (*)] • Composition et décomposition ; symétrie glissée • Classifications - points invariants - déplacements et antidéplacements • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété)	
			◆ **Applications affines** • Définition • Propriétés - conservation du barycentre - composition - application vectorielle associée - détermination par l'image d'un repère - points invariants - images d'une droite, d'un plan - conservation du parallélisme • Affinités du plan	
◆ **Homothéties** [niveau 1 (*)] • Définition • Propriétés - point invariant - réciproque - propriété fondamentale - images de figures - conservations - longueurs et aires • Déterminations d'une homothétie - centre, un point et son image - rapport, un point et son image - deux points et leurs images	◆ **Homothéties** [niveau 2 (*)] • Propriété caractéristique • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété) ◆ **Composée d'isométrie et homothétie** • Images de figures • Critères de similitude de deux triangles	◆ **Homothéties** [niveau 2 (*)] • Composition : homothéties de même centre, homothétie et translation • Décomposition (homothétie de centre donné et translation) • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété) ◆ **Similitudes** • Définition (par les longueurs) • Images de figures • Détermination - deux triangles semblables	◆ **Similitudes directes** [niveaux 1 et 2 (*)] • Écriture complexe • Forme réduite • Composition • Propriété caractéristique • Images de figures • Déterminations - centre, un point et son image - rapport, angle, un point et son image - deux points et leurs images • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété)	◆ **Similitudes directes** [niveaux 1] • Écriture complexe • Forme réduite

	Seconde S	Première SM	Première SE	Terminale SM	Terminale SE
CONIQUES				• Définition - foyer et directrice - bifocale • Constructions point par point • Équations réduites et éléments caractéristiques • Courbes d'équation : $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$ • Étude analytique, équation de la tangente en un point • Représentation paramétrique de l'ellipse • Équation de l'hyperbole par rapport à ses asymptotes • Régionnement du plan par une conique	
GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE	♦ **Description de l'espace** • Positions relatives de droites et plans • Parallélisme (étude)	♦ **Description de l'espace** • Orthogonalité • Distance : point à une droite, à un plan	♦ **Description de l'espace** • Orthogonalité • Projections orthogonales	♦ **Orientation de l'espace** • Repère direct • Repère indirect	♦ **Orientation de l'espace** • Repère direct • Repère indirect
		♦ **Vecteurs de l'espace** • Définition • Calcul vectoriel • Base et repère ♦ **Produit scalaire** • Définition • Propriétés • Expression analytique • Utilisation : - équations d'une sphère - surfaces de niveau	♦ **Vecteurs de l'espace** • Définition • Vecteurs colinéaires, coplanaires • Base et repère	♦ **Produit vectoriel** • Définition • Propriétés • Expression analytique • Utilisation : - équation d'un plan - positions relatives de deux plans - distance (point à une droite, à un plan) - aires et volumes	♦ **Produit scalaire** • Définition • Propriétés • Expression analytique • Utilisation : équation d'un plan, d'une sphère ♦ **Produit vectoriel** • Définition • Propriétés • Expression analytique • Utilisation : alignement et aires
		♦ **Géométrie analytique** • Vecteur normal à un plan • Équations et représentations paramétriques (plan, droite) • Distance d'un point à un plan • Étude analytique du parallélisme et de l'orthogonalité		♦ **Applications de l'espace** • Projections sur un plan, sur une droite • Translations et homothéties • Symétries orthogonales : réflexion, demi-tour	

(*) Niveaux d'étude des transformations

Niveau 1	• Se familiariser avec les transformations • Reconnaître une transformation • Construire l'image d'un point, d'une figure usuelle par une transformation définie de diverses façons • Reconnaître deux figures « homologues » par une transformation (« figures clés »)
Niveau 2	• Propriété caractéristique • Composer des transformations • Utiliser des transformations (mais pas leurs composées) pour : – trouver un lieu géométrique ; – résoudre un problème de construction ; – démontrer une propriété.
Niveau 3	• Utiliser une composée de transformations pour : – trouver un lieu géométrique ; – résoudre un problème de construction ; – démontrer une propriété.

2 COMMENTAIRES GÉNÉRAUX POUR LE SECOND CYCLE

La Collection Inter-Africaine de Mathématiques (C.I.A.M.) est l'aboutissement d'une volonté, déjà ancienne, des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien de mettre en place un cadre commun pour Harmoniser les Programmes de Mathématiques (H.P.M.) et leur enseignement.

Cette harmonisation vise essentiellement à améliorer la qualité de l'enseignement, à le rendre accessible à un plus grand nombre d'élèves et à prendre en compte les résultats des dernières recherches en didactique des mathématiques. Elle a, dans un premier temps, débouché sur une rénovation des programmes et des méthodes. Elle s'est par la suite accompagnée d'une formation adéquate des professeurs puis concrétisée par la rédaction de manuels-élève, au coût réduit, et de guides pédagogiques, à l'usage exclusif des professeurs.

Les manuels-élève comprennent deux parties (géométrie / algèbre et analyse) mieux équilibrées en série Sciences Mathématiques (SM) qu'en série Sciences Expérimentales (SE), où la géométrie est moins développée. Les contenus de ces manuels peuvent être couverts en **25 semaines**, si les volumes horaires suivants sont retenus :

Classe	2^nde^ S	1^re^ SM	1^re^ SE	T SM	T SE
Horaire hebdomadaire	5 h	6 h	5 h	9 h	6 h
Total	125 h	150 h	125 h	225 h	150 h

À noter que tous les livres ont un index et que ceux de terminales se terminent par un chapitre « Problèmes de synthèse », dont la plupart sont extraits des différents baccalauréats africains.

2.1. Options académiques

Les auteurs des manuels CIAM, conscients du mouvement pendulaire des réformes successives des programmes de mathématiques entre :

- le tout conceptuel, tout abstrait, tout rigueur des années 70, à l'instar des programmes français (repris, parfois exagérément, dans les programmes africains),
- le tout concret, beaucoup (trop ?) de propriétés admises des années 90, toujours selon les programmes français (pas systématiquement repris cette fois en Afrique),

ont opté pour plus de mesure et sont délibérément restés dans un **juste milieu**, voulant ainsi stabiliser le mouvement.

C'est ainsi que l'on trouve (s'agissant des classes scientifiques du second cycle) des aperçus théoriques et des vraies démonstrations, un chapitre d'arithmétique et quelques structures (à dose homéopathique et en terminale SM uniquement), mais **aucune théorie des ensembles, aucun chapitre de logique théorique ... avec tables de vérité** !

2.2. Options pédagogiques

Utilisation de la calculatrice

La calculatrice est un outil qui, avec ou sans instructions officielles, connaît une large diffusion. Il est de l'intérêt des enseignants d'en tenir compte. S'il ne peut être encore question, vu les coûts, d'imposer son usage par des mentions dans les programmes officiels, les manuels-élève recensent les points de programmes ou les activités motivant son emploi et favorisant chez l'élève l'habitude d'une utilisation intelligente.

Apprentissage du raisonnement

- Les démonstrations de certaines propriétés et les résolutions d'exercices permettent de dégager de nombreuses **méthodes** qui enrichissent la boîte à outils de l'élève. Ces points méthodes sont repérés par l'avertisseur Ⓜ.
- Les éléments de **logique** (notion de proposition, connecteurs, quantificateurs, méthodes de raisonnement : contraposition, absurde, récurrence) ne font pas l'objet d'un cours, mais sont introduits et réinvestis chaque fois que le besoin s'en fait sentir. La rubrique Ⓛ a été crée à cet effet.

- Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes. Pour répondre à cette nécessité, des **travaux dirigés** sont proposés en fin de leçon. Outre un renforcement de l'apprentissage du raisonnement, ces travaux dirigés constituent soit un inventaire des exercices types de la leçon, soit un prolongement non exigible à certaines notions, soit enfin une ouverture interdisciplinaire. Lorsqu'ils semblent un peu difficiles et montrent une propriété intéressante ou un type de raisonnement inédit, les solutions sont intégralement données ; sinon, les solutions sont guidées par un questionnement.

2.3. Aspects culturels

Les notes historiques

Traitant d'événements ou d'hommes qui ont marqué l'évolution des mathématiques, les notes historiques doivent convaincre les élèves que les mathématiques se sont construites peu à peu, à travers recherches, tâtonnements et découvertes, et leur permettre de prendre contact avec quelques problèmes célèbres.

Contextualisation des contenus

Autant que faire se peut, les auteurs ont voulu mettre à profit l'environnement socioculturel africain, aussi bien pour lutter contre le désintérêt des élèves pour une discipline réputée importée, que pour les convaincre que cette réputation est fallacieuse (*il y a des mathématiques dans la vie de l'Africain, comme dans celle de l'Indien ou de l'Asiatique*) et leur donner le goût d'oeuvrer au développement de leur continent.

Les informations scientifiques

Il s'agit cette fois de convaincre les élèves et, si besoin est, leurs professeurs, que les mathématiques sont en constante évolution, comme de rester en contact avec quelques récentes découvertes (rôle croissant, en particulier, de l'informatique).

2.4. Utilisation du manuel

Le manuel n'est pas un livre saint, mais un outil pédagogique précieux comme le tableau ou le rétroprojecteur, au service du professeur et de l'élève. En plus de ses fonctions classiques d'aide aux préparations de cours et de recueil d'exercices, il a de nombreuses autres fonctions avant, pendant et après le cours qu'il convient de préciser ici.

Utilisation du manuel	Le professeur	L'élève
avant le cours	• lit le programme • lit les instructions officielles • étudie la traduction des contenus du programme dans le manuel • choisit, en relation avec le manuel : – la présentation d'une notion – des démarches – des motivations – des activités – des traces écrites – des exercices à traiter en classe ou à la maison • repère les points précis d'utilisation du manuel pendant le cours	• apprend la leçon précédente sur son livre et son cahier • prépare sur le cahier de recherche un tableau, une activité du livre, une figure, un organigramme, un exercice • étudie les pages de révisions
pendant le cours	• fait analyser, commenter, identifier des planches, des tableaux, des figures, des textes du manuel • fait reconnaître une démarche, une construction, une démonstration déjà vue par l'élève • fait lire une définition, une propriété • fait critiquer cette lecture par la classe • fait reconnaître, rechercher dans le livre, recopier sur le cahier de cours : – des définitions ou propriétés – des notations de symboles, des figures, des schémas • fait analyser des énoncés d'exercices	• utilise le manuel selon les indications du professeur • exploite oralement ou sur le cahier de recherche des planches, des tableaux, des figures, des textes du manuel • recherche dans le manuel (utilisation de l'index, du sommaire) des définitions, propriétés, symboles, figures, schéma • analyse oralement des énoncés d'exercices • traite les exercices sur le cahier de recherche
après le cours		• relit le cours sur le cahier, le livre • traite les exercices

Il faut apprendre à l'élève à se servir du manuel où il trouvera les résultats essentiels, les méthodes de résolution de certains types de problèmes, des exercices d'entraînement et d'approfondissement qui lui permettront de contrôler ses acquis et de s'initier à la recherche.

Avant de proposer des exercices ou des travaux aux élèves, le professeur devra se poser les questions suivantes :

– font-ils partie des capacités requises dans cette classe ?
– constituent-ils des activités possibles en classe ou faut-il les réserver pour le travail à la maison ?
– leur contexte mathématique est-il compréhensible par un élève de ce niveau ?
– leur résolution relève-t-elle de l'entraînement, de l'approfondissement ? a-t-elle valeur de méthode ?

3 COMMENTAIRES SPÉCIFIQUES À LA CLASSE DE TERMINALE SM

La classe de première Science Mathématique assure à la fois une continuité avec la classe de seconde S et une préparation à la classe de terminale SM, où l'élève devra passer l'examen du baccalauréat.

3.1. Activités des élèves

Énumérons quelques raisons qui militent en faveur de la mise en activités de l'élève :

- les instructions officielles le demandent ;
- on connaît bien les limites d'un enseignement fondé sur le principe « je leur apprends - ils appliquent - donc ils savent. » ;
- il convient de prendre en compte les recherches en psychologie cognitive et en didactique ;
- comme le dit si bien Vergnaud, **l'action est source et critère du savoir** ;
- **faire des mathématiques c'est avant tout :**
    - **déceler qu'il y a un problème,**
    - **(se) poser des questions à propos de ce problème,**
    - **(tenter de) résoudre ce problème ;**
- c'est un moyen - certes non exclusif - d'amener l'élève à s'investir personnellement.

Les nouvelles notions et les théorèmes sont, pour la plupart, précédés par une ou deux activités de motivation.

De plus, en continuité avec le premier cycle, on a voulu :

- mettre l'accent sur le raisonnement, la démonstration et sa rédaction ;
- proposer des exercices types ou donner des prolongements intéressants mais non exigibles. Pour cela, on a proposé des démonstrations complètes ou guidées de propriétés, des solutions complètes ou guidées de travaux dirigés.

3.2. Présentation du manuel

Organisation des chapitres

Chaque chapitre est découpé en leçons, chaque leçon en paragraphes et chaque paragraphe en sous-paragraphes.

Les leçons se terminent par des exercices **de fixation des savoirs** et les chapitres par des exercices **d'entraînement et d'approfondissement**, classés par thème.

Notation et vocabulaire

Dans la mesure du possible on a gardé les notations et le vocabulaire utilisés dans le manuel CIAM de seconde S.

Proposition de progression

9 heures hebdomadaires.

Algèbre et géométrie	Volume horaire	Analyse	Volume horaire
Arithmétique	18 h	Limites et continuité	15 h
Calcul vectoriel	9 h	Dérivation – Études de fonctions	15 h
Nombres complexes	18 h	Primitives Fonction logarithme népérien	15 h
Isométries du plan Applications affines	15 h	Fonctions exponentielles Fonctions puissances	15 h
Similitudes	15 h	Suites numériques	15 h
Applications de l'espace	15 h	Intégration	18 h
Coniques	18 h	Équations différentielles	9 h
Probabilités	15 h		
Total	**123 h**	**Total**	**102 b**

3.3. Points méthodes

On relève dans le manuel de Terminale Sciences Mathématiques les points méthodes suivants :

Algèbre et géométrie	Pages	Analyse	Pages
Déterminer le PGCD de deux entiers	20	Calculer la limite en l'infini d'une fonction contenant des radicaux	198
Étudier la primarité d'un entier naturel	26	Étudier les branches infinies d'une fraction rationnelle	200
Démontrer, à l'aide du barycentre, que deux droites sont sécantes	38	Faire la résolution approchée d'une équation	209
Démontrer, à l'aide du produit vectoriel, que trois points sont alignés	47	Démontrer une inégalité	220
Étudier la position relative de deux plans	48	Déterminer les primitives des fonctions du type : $x \mapsto \cos^n x \sin^m x$ $(n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N})$	238
Exprimer $\cos nx$ et $\sin mx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$	69	Résoudre une équation comportant des logarithmes	243
Linéariser $\cos^n x$ et $\sin^m x$	70	Résoudre une inéquation comportant des logarithmes	244
Déterminer la composée de deux rotations de centres distincts	84	Démontrer qu'une suite est bornée	277
Déterminer la composée d'une rotation et d'une translation de vecteur non nul	85	Démontrer qu'une suite est monotone	278
Détermiuer les éléments caractéristiques d'une similitude directe définie par une écriture complexe	107	Étudier la limite d'une suite (u_n) dont le terme général vérifie : $u_{n+1} = f(u_n)$	288
Déterminer l'écriture complexe d'une application du plan définie par une expression analytique	110	Calculer l'intégrale : $\int_a^b (\alpha t + \beta)dt \quad (\alpha \neq 0)$	303
Démontrer qu'une application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ est une symétrie orthogonale	140	Résoudre une équation différentielle du type : $y'' + ay' + by = 0$ $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$	328
Construire une tangente à une parabole de représentation graphique donnée	156	Résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre.	330
Construire un point d'une ellipse de représentation paramétrique donnée	160		
Construire une tangente à une ellipse de représentations graphique et bifocale données	161		
Construire une tangente à une hyperbole de représentations graphique et bifocale données	166		

3.4. Principes de démonstration

3.4.1. Implication directe

Le raisonnement mathématique le plus courant est *l'implication directe*, appelée également *raisonnement déductif*.

Principe

On suppose une propriété p vraie et on en déduit une propriété q vraie.
On note : $p \Rightarrow q$.

Exemples

P. 17, n° 2.e ; P. 30, n° 62 ; P. 50, n° 6 et n° 7 ; P. 279, n° 1.f.

3.4.2. Disjonction des cas

Principe

Pour démontrer une propriété, il est parfois nécessaire d'étudier cas par cas.
Au lieu de démontrer $p \Rightarrow q$, on décompose en n sous-cas et on démontre $p_1 \Rightarrow q$, $p_2 \Rightarrow q$.

Exemples

P. 28, n° 22 ; P. 76, n° 14 ; P. 169, n° 33 et n° 34 ; P. 291, n° 7.

3.4.3. Élimination des cas

Principe

Il est parfois utile, quand le nombre de cas est fini, d'étudier toutes les possibilités et de ne retenir que celles qui sont « bonnes ».
Ce raisonnement est une variante de la disjonction des cas.

Exemple

P. 12, n° 1.b.

3.4.4. Contraposée

Principe

Il est parfois plus facile de démontrer non $q \Rightarrow$ non p, plutôt que $p \Rightarrow q$.
Ces deux implications sont logiquement équivalentes.

Exemples

P. 32, n° 84, question 1°) ; p. 30, n° 65.

3.4.5. Raisonnement par l'absurde

Principe

Pour démontrer que $p \Rightarrow q$, il est parfois plus pratique de supposer que p est vrai et q est faux et d'aboutir à une contradiction.
Ces deux propositions sont logiquement équivalentes.

Exemples

P. 31, n° 77, question 2°) ; P. 80, n° 64, question 4° *a)*.

3.4.6. Raisonnement par récurrence

Principe

Pour démontrer qu'une proposition $P(n)$ qui concerne un nombre entier naturel n, est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0, on procède en deux étapes :

- on démontre que : $P(n)$ est vraie ;
- on démontre que : pour tout nombre entier k supérieur ou égal à n_0, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie.

Exemples

P. 28, n° 3 et n° 4 ; P. 279, n° 1.*c* ; P. 333, n° 23.

3.4.7. Utilisation d'un contre-exemple

Principe

Il s'agit de trouver un exemple qui contredit une affirmation, une règle.

Exemple

P. 27, n° 46.

3.4.8. Équivalence

Principe

Démontrer que deux propositions p et q sont équivalentes revient à démontrer les deux implications suivantes : $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$.

Exemples

P. 32, n° 83 ; P. 170, n° 44, question 1°.

3.5. Travaux dirigés

3.5.1. Objectifs généraux

- apprendre à chercher
- faire fonctionner un outil
- dégager des méthodes
- donner un prolongement (non exigible) à certaines notions.

Apprendre à chercher

L'élève suit généralement deux étapes : la lecture de l'énoncé et la recherche d'une démarche.

Lecture de l'énoncé

Faite avec attention, elle permet à l'élève de bien distinguer :

- les données et contraintes (ce que l'on sait) ;
- les conclusions (ce que l'on cherche).

Recherche d'une démarche

L'élève dispose de connaissances minimales (définitions, propriétés). Il doit faire l'inventaire de celles qui ont un rapport avec les objets mathématiques entrant en jeu et sélectionnner les plus opérationnnelles.

Pour certains types de problèmes, la démarche est plus élaborée et donne lieu à des points méthodes :

– les problèmes de lieux ;
– les problèmes de construction ;
– les problèmes conduisant à une équation ou une inéquation.

Les problèmes de modélisation et les problèmes ouverts sont des cadres appropriés pour mettre un élève en situation de recherche.

Exemples

– Démontrer (P. 51, n° 18 et n° 19).
– Conjecturer (P. 291, n° 9).

Faire fonctionner un outil

Il s'agit d'outils déjà formalisés dans le cours :

– propriétés ;
– méthodes de résolution de problèmes ;
– principes de démonstration.

Exemples

– Utiliser le raisonnement par récurrence (page 11).
– À l'aide des nombres complexes, résoudre des problèmes de configuration (page 75).
– À l'aide des isométries, résoudre des problèmes de lieux et de configuration (page 85).
– À l'aide des isométries, résoudre des problèmes de construction (page 90).
– Calculer des limites (page 259).
– Étudier une fonction du type u^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) (page 298).

Dégager des méthodes

Certains travaux dirigés et exercices résolus donnent l'occasion de rappeler ou de mettre en place des points méthodes.

Exemples

– À l'aide du barycentre, démontrer un alignement (page 37) ou uue concourance (page 38).
– Déterminer l'expression analytique d'une réflexion, d'un demi-tour (page 139).
– Étudier une application affine définie par son expression analytique (page 141).
– Calculer la limite en l'infini d'une fonction contenant des radicaux (page 197).
– Déterminer une valeur approchée des solutions d'une équation par les méthodes de balayage ou de dichotomie (page 209).
– Comparer deux fonctions (page 220).
– Déterminer les primitives de polynômes trigonométriques (page 238).
– Résoudre une équation comportant des logarithmes (page 243).
– Résoudre une inéquation comportant des logarithmes (page 243).

Donner un prolongement à certaines notions

Certains travaux dirigés permettent de démontrer un résultat connu ou de donner un prolongement à une notion.

Exemples

– Démontrer le petit théorème de Fermat (page 27).
– Résoudre une équation de 3^e degré par les méthodes de Cardan et de Bombeli (page 61).

– Etudier le groupe de transformations du triangle équilatéral (page 91).
– Étudier des fonctions non continues admettant ou n'admettant pas des primitives (page 237).
– Étudier une fonction du type u^v ($v \in \mathbb{R}$) (page 269).
– Déterminer une valeur approchée des solutions d'une équation par la méthode du point fixe (page 288), par la méthode de Newton (page 289).
– À l'aide du calcul intégral, calculer la longueur d'un arc (page 312), déterminer un centre d'inertie (page 313).
– Résoudre une équation différentielle avec second membre (page 329).
– Étudier le mouvement d'un oscillateur mécanique amorti (page 330).

3.5.2.Conduite d'une séance de travaux dirigés

Choix d'un problème
– Le professeur propose le travail dirigé adapté à l'objectif qu'il veut atteindre.
– Il précise alors aux élèves le temps de recherche qui peut varier d'un travail dirigé à l'autre suivant la longueur ou la difficulté du problème.

Gestion de la classe
Après la phase de recherche, le professeur organise dans la classe un débat :
– les élèves sont invités à communiquer leurs idées, à partir desquelles on essaie de trouver une solution ;
– s'il n'y a aucune piste sérieuse, le professeur donne une, deux, ou plusieurs indications suivant la réaction des élèves.

Rédaction d'une solution
Lorqu'on a trouvé une solution, le professeur demande aux élèves de la rédiger.
Rédiger, en mathématiques, c'est mettre en évidence les grandes lignes et les articulations du raisonnement. Si cela s'est fait souvent à l'aide d'un schéma ou d'un organigramme au premier cyclce, l'accent sera mis au second cycle sur une rédaction en français. En effet, c'est d'après ses rappports et ses projets que l'élève, cadre de demain, sera jugé par ses collègues et ses supérieurs hiérarchiques. Le professeur lui apprendra donc à être précis, concis et clair.

3.6. Algèbre et géométrie

Le tableau suivant énumère les principales activités de géométrie et les outils pour les aborder.

Objectifs	Activités	Outils
– Apprendre à lire, à travailler sur une figure – Développer la capacité à analyser des configurations – Renforcer les méthodes essentielles à travers la résolution de problèmes	– Démontrer des propriétés liées à des configurations – Construire une configuration respectant certaines contraintes – Rechercher des lieux géométriques	– Configurations – Vectoriel – Analytique – Complexes – Transformations

3.6.1. Les activités de la géométrie

Les problèmes d'études de configurations
- Un problème d'étude de configuration consiste à étudier une figure donnée et à en établir des propriétés :
– des égalités de distances, d'angles, ... ;
– des alignements de points, des parallélismes, des orthogonalités, des concourances de droites, etc.
Les démonstrations de propriétés de configurations occupent une place dominante dans notre enseignement.
- Il est pratique de faire réaliser par les élèves, au fur et à mesure, des fiches à thèmes :
– démontrer que trois points sout alignés,
– démontrer que quatre points sont coplanaires,
– démontrer que des droites (resp. deux plans) sont parallèles,
– démontrer que des droites (resp. deux plans) sont perpendiculaires,
– démontrer que des droites sont concourantes,
– démontrer que deux distances sont égales,
– démontrer que deux angles sont égaux,
– démontrer que deux vecteurs sont égaux,
– démontrer qu'un angle est nul, droit, plat,
– démontrer que quatre points sont cocycliques, etc.

Les problèmes de construction

Un problème de construction consiste à reconstituer une figure connaissant certains de ses éléments ou certaines de ses propriétés.

> Ⓜ Pour résoudre un problème de construction, on peut procéder en deux étapes : analyse et synthèse.
>
> – L'analyse consiste à supposer le problème résolu et à étudier une figure répondant à la question pour en dégager les propriétés permettant sa construction.
>
> – La synthèse consiste à construire la figure en utilisant les propriétés dégagées dans l'analyse, à justifier que la figure construite répond à la question et, éventuellement, à discuter le nombre de solutions du problème.

Les problèmes de lieu géométrique

Un problème de lieu a pour objet de rechercher un ensemble de points.

On considère une configuration dont certains éléments sont fixes et d'autres variables. On recherche l'ensemble des positions d'un des points variables, lorsqu'un autre point variable, auquel il est lié par la configuration, décrit une courbe donnée (droite, segment, cercle, ...).

Lieux définis par des conditions numériques

- Ces lieux sont définis par des équations, inéquations, lignes de niveaux, etc.
- Pour déterminer de tels lieux, on choisit un bon repère et on utilise une méthode analytique.

Lieux liés à des configurations

> Ⓜ Pour chercher le lieu géométrique des points vérifiant une propriété (p), on peut procéder de la façon suivante :
>
> – on démontre que tout point M qui vérifie (p) appartient à un certain ensemble (E) ;
>
> – réciproquement, on cherche à savoir si tout point de (E) vérifie (p).
>
> Si tel est le cas, le lieu cherché est (E) ;
> sinon, le lieu cherché est une partie de (E).

Lieux obtenus par des transformations

L'intérêt de ces lieux est que leur étude ne nécessite pas de réciproque.

> Ⓜ Pour résoudre un problème de lieu géométrique à l'aide des transformations, on se ramène à la situation suivante : le point M dont on cherche le lieu, est l'image par une transformation d'un point N, décrivant un ensemble connu(droite, segment, cercle, ...)
>
> La résolution se fait en deux étapes :
>
> – reconnaître une transformation f qui, au point N, associe le point M ;
>
> – déterminer l'image par f de l'ensemble (E) décrit par le point N.

Lieux classiques à savoir en Terminale SM

A et B sont deux points donnés distincts.

– Ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

– Ensemble des points M tels que : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.

– Ensemble des points M tels que : MA + MB = AB.

– Ensemble des points équidistants de A et B.

– Ensemble des points équidistants de A.

– Ensemble des points équidistants de deux droites (parallèles, sécantes).

– Ensemble des points situés à une distance donnée d'une droite.

– Ensemble des points M tels que : $a\text{MA}^2 + b\text{MB}^2 = k$.

– Ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB} = k$.

– Ensemble des points M tels que : $\frac{MA}{MB} = k$.

– Ensemble des points M tels que : Mes $\widehat{AMB} = \alpha$.

– Ensemble des points M tels que : Mes $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \alpha$.

– Ensemble des points du plan dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite est constant.

3.6.2. Les outils de la géométrie

On doit apprendre à l'élève à effectuer le choix des outils pour résoudre un problème.
Aucun outil n'est à privilégier ni à exclure.

L'outil des configurations

L'outil des configurations, présent dans toutes les classes du secondaire, est absolument indispensable ; les élèves doivent reconnaître, visualiser et maîtriser un certain nombre de configurations-clés enrichies tout au long de leur progression scolaire.

Le tableau ci-dessous résume les configurations étudiées jusqu'en classe de Terminale SM.

	2^e S	1^{re} SM	T^{le} SM
Droites	• Caractérisation vectorielle d'une droite (ou d'une demi-droite) • Caractérisation de droites parallèles ou perpendiculaires : – par des vecteurs directeurs ou normaux – par les équations réduites • Représentation paramétrique d'une droite	• Équation normale d'une droite • Distance d'un point à une droite • Image d'une droite par une isométrie, par une homothétie • Caractérisation paramétrique d'une droite	• Caractérisation barycentrique d'une droite • Caractérisation d'une droite par les nombres complexes • Image d'une droite par : – une similitude directe – une application affine – une projection
Segments	• Caractérisation vectorielle d'un segment	• Image d'un segment par une isométrie, par une homothétie	• Caractérisation barycentrique d'un segment • Image d'un segment par : – une similitude directe – une application affine – une projection • Plan médiateur d'un segment
Angles	• Angle orienté de deux vecteurs : – mesure principale – cosinus, sinus et tangente	• Angles orientés – mesure d'un angle orienté – relation de Chasles • Image d'un angle non orienté par une isométrie	• Image d'un angle orienté par une similitude directe
Cercles	• Extension de la notion d'angle inscrit (corde et demi–tangente) : – relation avec l'angle au centre associé (mesures) – angles interceptant le même arc • Arcs capables • Équation d'un cercle • Cercle trigonométrique	• Caractérisation d'un cercle – par les angles orientés : $M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ – par une représentation paramétrique • Images d'un cercle par une isométrie, par une homothétie	• Lignes de niveau k ($k > 0$ et $k \neq 1$) de $M \mapsto \frac{MA}{MB}$ • Caractérisation d'un cercle par les nombres complexes • Image d'un cercle par : – une similitude directe – une affinité • Cercles principal et secondaire d'une ellipse
Triangles	• Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle • Relations métriques dans un triangle : – $\mathscr{A} = \frac{1}{2} bc\sin\widehat{A}$ – théorème des sinus • Relations métriques caractérisant un triangle rectangle – théorème d'Al Kashi – théorème de la médiane	• Triangles isométriques	• Intérieur d'un triangle • Caractérisation de triangles particuliers par les nombres complexes • Triangles semblables • Image d'un triangle par une similitude directe • Groupe de transformations d'un triangle équilatéral
Quadrilatères	• Caractérisation par les angles : – d'un quadrilatère croisé inscriptible – d'un quadrilatère convexe inscriptible	• Points cocycliques	• Caractérisation de points cocycliques par les nombres complexes • Caractérisation d'un parallélogramme par les nombres complexes
Polygones	Construction d'un pentagone régulier	• Images des solutions d'une équation trigonométrique • Image d'un polygone par une isométrie, par une homothétie	• Images des racines n-ième d'un nombre complexe • Image d'un polygone par une similitude directe

Espace	• Positions relatives de droites et de plans • Sections planes – d'un pavé droit – d'un tétraèdre • Étude du parallélisme	• Droites et plans orthogonaux : – propriétés – distance d'un point à un plan – plan médiateur d'un segment • Plans perpendiculaires • Représentation d'un point de l'espace • Vecteur normal • Équations cartésiennes d'un plan, d'une droite • Représentation paramétrique d'un plan, d'une droite	• Produit vectoriel : – orientation de l'espace – distance d'un point à une droite, à un plan – calcul d'aires et de volumes • Positions relatives de droites et de plans • Éléments de symétrie du cube, du tétraèdre régulier

L'outil vectoriel

Les vecteurs sont connus depuis la classe de quatrième, mais les notations $\vec{u}$, $\vec{v}$, $a\vec{u} + b\vec{v}$ sont nouvelles en classe de Seconde S. Ils ne constituent pas un objet d'étude mais un outil.

• Cet outil permet de caractériser certaines configurations :
- parallélogramme,
- milieu et point d'un segment,
- points alignés (éléments d'une droite ou d'une demi-droite),
- droites parallèles ou perpendiculaires,
- centre de gravité d'un triangle,
- configuration de Thalès.

• Il permet également de faire le lien entre les vecteurs et certaines transformations :
- translations,
- symétries centrales,
- homothéties.

L'outil analytique

Le recours systématique aux méthodes analytiques est exclu. Toutefois, l'utilisation d'un « bon repère » ou des nombres complexes permettent parfois de trouver une solution rapide.

L'outil des transformations

Outre le fait de donner des solutions souvent plus rapides et élégantes, cet outil permet, en relation avec certaines configurations, des raisonnements plus riches.

Les symétries centrales, symétries orthogonales et translations ont été étudiées au premier cycle, les homothéties et les rotations en classse de seconde S.

En classe de première SM, on renforcera ces acquis et on les utilisera pour résoudre des problèmes.

Le tableau ci-dessous résume le niveau d'utilisation des différentes transformations rencontrées.

Transformations	3^{e}	2nde S	1re SM	Term. SM
Symétrie centrale	niveau 2		niveau 3	
Symétrie orthogonale	niveau 2		niveau 3	
Translation	niveau 2		niveau 3	
Rotation	* niveau 1	niveau 1	niveau 2	niveau 3
Homothétie	* niveau 1	niveau 1	niveau 2	niveau 3
Isométrie			niveau 2	niveau 3
Similitude directe			niveau 2	niveau 3

* pour certains pays seulement.

Niveau 1 : familiarisation avec la transformation
- Image d'un point par la transformation définie de diverses façons.
- Image de figures simples.
- Reconnaissance de figures homologues par la transformation.

Niveau 2 : utilisation de transformations pour résoudre des problèmes
- Démonstrations de propriétés.
- Constructions.
- Recherche de lieux géométriques.

Niveau 3 : utilisation de compositions de transformations pour résoudre des problèmes

Ⓜ Pour résoudre un problème de géométrie, une transformation peut s'avérer utile. Le choix de cette transformation est suggéré par la configuration géométrique existante ou à construire :

- Points alignés, droites concourantes : toutes isométries et homothétie.
- Orthogonalité, parallélisme : toutes isométries et homothétie.
- Triangle isocèle : symétrie orthogonale.
- Triangle rectangle isocèle : symétrie orthogonale, quart de tour, similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- Triangle équilatéral : symétrie orthogonale, rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$.
- Demi-triangle équilatéral : similitude directe de rapport $\frac{1}{2}\left(\text{resp. } \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}\left(\text{resp. } \frac{\pi}{6}\right)$.
- Parallélogramme : symétrie centrale, translation.
- Rectangle, losange : symétrie centrale, symétrie orthogonale.
- Carré : symétrie centrale, symétrie orthogonale, quart de tour.
- Configuration de Thalès : homothétie.

3.7. Analyse

Quatre thèmes généraux se dégagent en classe de Terminale SM :

- *fonctions,*
- *suites numériques,*
- *intégration,*
- *équations différentielles.*

Ces thèmes permettront de résoudre de nombreux problèmes concrets et/ou historiques.

Fonctions

De nouvelles fonctions classiques font leur apparition : logarithmes, exponentielles, puissances, irrationnelles.

Une bonne maîtrise de leur étude est nécessaire pour mieux appréhender les problèmes qui les mettent en jeu. Ces problèmes pourront être d'origine mathématique, physique, biologique, économique ou autre.

Suites numériques

L'étude des suites numériques n'est pas une fin en soi ; elle doit être motivée par l'étude de phénomènes pouvant être étudiés en temps discret.

Intégration

L'intégration permet d'établir l'existence des primitives des fonctions continues et d'en donner des méthodes numériques de calcul ; inversement, la connaissance d'une primitive d'une fonction continue donne une formule explicite pour le calcul des intégrales. Les élèves devront percevoir l'intérêt de cette double démarche.

On illustrera l'intérêt de l'intégrale par diverses situations, entre autres :

- les calculs d'aires et de volumes ;
- l'expression intégrale de la distance parcourue sur une droite par un point mobile dont on connaît la vitesse instantanée ;
- la détermination de centres d'inertie.

Équations différentielles

L'étude des équations différentielles occupe une bien modeste place dans les programmes HPM.

Toutefois, elle est fondamentale pour amener l'élève à percevoir la puissance des mathématiques pour la modélisation. Un travail conjoint avec d'autres disciplines favorisera cet objectif.

4 ANALYSE DES CHAPITRES

1. Arithmétique

(pages 5 à 32 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :
- consolider les acquis en arithmétique :
  - division euclidienne ;
  - multiples et diviseurs d'un entier relatif ;
  - PGCD, PPCM ;
- installer des notions et résultats nouveaux :
  - congruence ;
  - algorithme d'Euclide ;
  - théorèmes de Bézout et de Gauss ;
  - théorème fondamental de l'arithmétique ;
- présenter et mettre en œuvre certains algorithmes :
  - recherche d'un PGCD ;
  - reconnaissance de la primalité d'un entier ;
  - décomposition d'un entier en facteurs premiers ;
- renforcer le raisonnement par récurrence introduit en classe de première.

COMMENTAIRES

On s'appuiera sur l'histoire des nombres.
À l'aide d'exercices bien choisis, on familiarisera l'élève à :
- la recherche d'une conjecture ;
- différents types de raisonnement : disjonction des cas, élimination des cas, contraposée, absurde, récurrence.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ • L'ensemble $\mathbb{N}$: – propriétés de l'addition et de la multiplication ; – ordre ; – raisonnement par récurrence.	• Établir une propriété à l'aide d'un raisonnement par récurrence. • Résoudre des problèmes simples utilisant le raisonnement par récurrence.
• L'ensemble $\mathbb{Z}$: – propriétés de l'addition et de la multiplication ; – ordre ; – division euclidienne.	• Effectuer la division euclidienne d'un entier a donné par un entier b ($a > b$).
• Numération : – bases de numération ; – systèmes binaire, hexadécimal, ...	• Écrire un entier naturel dans une autre base que 10, en particulier en base 2. • Écrire un nombre d'une base a ($a \neq 10$) à la base 10.
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ • Multiples et diviseurs d'un entier relatif.	• Déterminer les multiples d'un entier. • Déterminer les diviseurs d'un entier. • Utiliser les critères de divisibilité : – pour justifier qu'un nombre est divisible par 2, 3, 4, 5, 9 ou 11 ; – pour simplifier des fractions ; – pour résoudre des problèmes concrets.

savoirs	savoir-faire
• Congruence modulo n	• Montrer que deux nombres sont congrus modulo n ($n \in \mathbb{N}$). • Utiliser les congruences : – pour déterminer le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b ($a > b$) ; – pour démontrer une propriété simple.
PPCM et PGCD de deux entiers relatifs • PPCM de deux entiers relatifs : – définition ; – propriétés.	• Déterminer le PPCM de deux entiers.
• PGCD de deux entiers relatifs : – définition ; – propriétés.	• Déterminer le PGCD de deux entiers.
• Nombres premiers entre eux : – définition ; – théorème de Bézout ; – théorème de Gauss.	• Utiliser l'algorithme d'Euclide : – pour justifier que deux nombres sont premiers entre eux ; – pour déterminer le PGCD de deux entiers ; – pour déterminer, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, une solution particulière de l'équation : $ax + by = 1$ (a et b donnés). • Résoudre une équation du premier degré dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. • Utiliser le théorème de Bézout pour justifier que deux nombres sont premiers entre eux. • Utiliser le théorème de Gauss.
Nombres premiers • Généralités : – définition et propriétés ; – Crible d'Eratosthène.	• Justifier qu'un nombre est premier.
• Décomposition en produits de facteurs premiers.	

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ **Exercice 1.a p. 12**

$S = \{ (0,4) ; (2,2) ; (3,1) ; (4,0)\}$.

♦ **Exercice 1.b p. 12**

$S = \{(-1, -1)\}$.

♦ **Exercice 1.c p. 12**

Soit $p(n)$ la proposition : « $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

On a : $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$; donc $p(1)$ est vrai.

Soit k un entier naturel non nul.

Si $p(k)$ est vraie, alors : $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

On a : $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$;

donc : $p(k+1)$ est vraie.

On en déduit que : pour tout entier naturel non nul n, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

♦ **Exercice 1.d p. 12**

Soit $p(n)$ la proposition : « $n\,! \geq 2^{n-1}$ ».

- On a : $1\,! = 2^{1-1}$; donc p(1) est vraie.
- Soit k un entier naturel non nul.

Si p(k) est vraie, alors : $k\,! \geq 2^{k-1}$.

On a : $(k+1)\,! = (k+1)\,k\,!$ et $k+1 \geq 2$;

donc : $(k+1)\,! \geq 2 \times 2^{k-1}$; ou : $(k+1)\,! \geq 2^{k}$; c'est-à-dire : p($k+1$) est vraie.

On en déduit que : pour tout entier naturel non nul n, $n\,! \geq 2^{n-1}$.

♦ Exercice 1.e p. 12

$59 = 3 \times 18 + 5$ $\qquad -59 = (-4) \times 18 + 13$ $\qquad 59 = (-3) \times (-18) + 5$

$-59 = 4 \times (-18) + 13$ $\qquad 6941 = 19 \times 358 + 139$ $\qquad 358 = 0 \times 6941 + 358$.

♦ Exercice 1.f p. 12

Désignons par n l'entier naturel cherché et par q son quotient par 23 (ou par 17).
On a : $n = 23q + 1 = 17q + 13$. Donc : $q = 2$ et $n = 47$.

♦ Exercice 1.g p. 12

$9 = \overline{1001}^2$; $17 = \overline{10001}^2$; $205 = \overline{11001101}^2$; $864 = \overline{1101100000}^2$.

♦ Exercice 1.h p. 12

$\overline{1011}^2 = 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11$; $\overline{1101101}^2 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 109$.

♦ Exercice 2.a p. 17

$$\begin{cases} -1\,000 \leq 11\,k \leq 1\,000 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -90 \leq k \leq 90 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Il y a 181 multiples de 11 compris entre – 1 000 et 1 000.

♦ Exercice 2.b p. 17

On a : $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.
Les diviseurs positifs de 60 sont les termes du développement de $(1 + 2 + 4)(1 + 3)(1 + 5)$;
c'est-à-dire : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60.
$\mathfrak{D}(60)$ est la réunion des nombres précédents et de leurs opposés.

♦ Exercice 2.c p. 17

On a : $(n-p)(n+p) = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7$.
Il y a trois cas posssibles :

$$\begin{cases} n-p=1 \\ n+p=28 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n-p=2 \\ n+p=14 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n-p=4 \\ n+p=7 \end{cases}.$$

Les 1$^{\text{er}}$ et 3$^{\text{e}}$ cas n'ont pas de solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Le 2$^{\text{e}}$ cas a pour solution : $n = 8$ et $p = 6$.

♦ Exercice 2.d p. 17

On a : $2^4 \equiv 1$ [modulo 5].

Or : $2^{32} = (2^4)^8$; donc : $2^{32} \equiv 1$ [modulo 5].

♦ Exercice 2.e p. 17

On a : $\begin{cases} n = qd,\ q \in \mathbb{Z} \\ a - b = kn,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Donc : $a - b = (kq)d$, $kq \in \mathbb{Z}$; c'est-à-dire : $a \equiv b$ [modulo d].

♦ Exercice 2.f p. 17

La somme des chiffres du nombre 23 157 est 18 qui est divisible par 9 ; donc 23 157 est divisible par

♦ Exercice 2.g p. 17

On doit avoir : $x + y + 4 \equiv 0$ [modulo 9].
Si $x = 0$, $y = 5$; on trouve : 72 405 ; Si $x = 1$, $y = 4$; on trouve : 72 414 ;

Si $x = 2$, $y = 3$; on trouve : 72 423 ; Si $x = 3$, $y = 2$; on trouve : 72 432 ;
Si $x = 4$, $y = 1$; on trouve : 72 441 ; Si $x = 5$, $y = 0$; on trouve : 72 450 ;
Si $x = 6$, $y = 8$; on trouve : 72 468 ; Si $x = 7$, $y = 7$; on trouve : 72 477 ;
Si $x = 8$, $y = 6$; on trouve : 72 486 ; Si $x = 9$, $y = 5$; on trouve : 72 495.

♦ Exercice 2.h p. 17

1. $bc / a \Leftrightarrow a = kbc, k \in \mathbb{Z}$.
On a : $a = (kc)b$, avec $kc \in \mathbb{Z}$; donc : b / a ;
$a = (kb)c$, avec $kb \in \mathbb{Z}$; donc : c / a.

2. La réciproque de la propriété est fausse. En effet, 6 divise 30 et 15 divise 30, mais 90 ne divise pas 30.
Si de plus PGCD$(b, c) = 1$, alors la réciproque est vraie.

♦ Exercice 3.a p. 24

PPCM(48, 12) = 48 ; PPCM(– 3, 8) = 24 ; PPCM(15, 21) = 105 ; PPCM(160, 200) = 800.

♦ Exercice 3.b 24

PGCD(24, 24) = 24 ; PGCD(14, 31) = 1 ; PGCD(– 75, – 25) = 25 ; PGCD(132, – 96) = 12.

♦ Exercice 3.c p. 24

Le tableau ci-contre regroupe les résultats des divisions successives.
On a : PGCD(3 431, 2 867) = 47.

Dividende	3 431	2 867	564
Diviseur	2 867	564	47
Reste	564	47	0

♦ Exercice 3.d p. 24

Soit $x = 2n + 1$ et $y = 2n + 3$ ($n \in \mathbb{Z}$) deux nombres entiers impairs et consécutifs.
Démontrons que x et y sont premiers entre eux.
Soit d un diviseur commun à x et y.
d est un diviseur $y - x$; donc : $d \in \{-2, -1, 1, 2\}$.
On a : d différent de -2 et 2, sinon x et y seraient pairs ; donc : $d \in \{-1, 1\}$.
On en déduit que x et y sont premiers entre eux.

♦ Exercice 3.e p. 24

Posons : $x = 2n + 1$ et $y = 3n + 1$ ($n \in \mathbb{Z}$).
On a : $3x - 2y = 1$; donc, d'après le théorème de Bézout, x et y sont premiers entre eux.

♦ Exercice 3.f p. 24

Démontrons que le produit de deux nombres entiers consécutifs est divisible par 2.

- Si $n \equiv 0$ [modulo 2], alors : $(n - 1)n \equiv 0$ [modulo 2].
- Si $n \equiv 1$ [modulo 2], alors : $n - 1 \equiv 0$ [modulo 2] ; donc : $(n - 1)n \equiv 0$ [modulo 2].

De même on démontre que le produit de trois nombres entiers consécutifs est divisible par 3.

Considérons maintenant le produit $(n - 1)n(n + 1)$ de trois nombres entiers consécutifs.
D'après ce qui précède, ce produit est à la fois divisible par 2 et par 3, donc il est divisible par 6.

♦ Exercice 3.g p. 24

PGCD(24, 56) = 8 ; donc : PPCM(24, 56) = $\dfrac{24 \times 56}{8} = 168$.

PGCD(300, 750) = 150 ; donc : PPCM(300, 750) = 1 500.
PGCD(1 386, 546) = 42 ; donc : PPCM(1 386, 546) = 18 018.
PGCD(– 3 015, 3 975) = 15 ; donc : PPCM(– 3 015, 3 975) = 798 975.

♦ Exercice 4.a p. 27

- On a : $\sqrt{103} \approx 10{,}14$.

Les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{103}$ sont : 2, 3, 5 et 7.
Aucun de ces nombres ne divise 103 ; donc 103 est un nombre premier.

- On a : $119 = 7 \times 17$; donc 119 n'est pas un nombre premier.
- 137 et 211 sont des nombres premiers.

♦ Exercice 4.b p. 27

a) Pour $n = 12$, on a : $6n + 5 = 77 = 7\times 11$; ce nombre n'est pas premier.
Pour $n = 36$, on a : $6n + 5 = 221 = 13 \times 17$; ce nombre n'est pas premier.

b) Pour $n = 41$, on a : $n^2 - n + 41 = 41^2$; ce nombre n'est pas premier.

♦ Exercice 4.c p. 27

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$; $126 = 2 \times 3^2 \times 7$; $336 = 2^4 \times 3 \times 7$; $735 = 3 \times 5 \times 7^2$.

♦ Exercice 4.d p. 27

$$\frac{495}{315} = \frac{3^2 \times 5 \times 11}{3^2 \times 5 \times 7} = \frac{11}{7}\ ;\ \frac{780}{204} = \frac{2^2 \times 3 \times 5 \times 13}{2^2 \times 3 \times 17} = \frac{5 \times 13}{17} = \frac{65}{17}\ ;\ \frac{918}{1\,242} = \frac{2 \times 3^3 \times 17}{2 \times 3^3 \times 23} = \frac{17}{23}.$$

♦ Exercice 4.e p. 27

Diviseurs de 90

On a : $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.
Les diviseurs positifs de 90 sont les termes du développement de $(1 + 2)(1 + 3 + 9)(1 + 5)$;
c'est-à-dire : 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.
$\mathscr{D}(90)$ est la réunion des nombres précédents et de leurs opposés.

Diviseurs de 120

$\mathscr{D}(120)$ est la réunion des nombres suivants et de leurs opposés : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 60, 120.

Diviseurs de 240

$\mathscr{D}(240)$ est la réunion des nombres suivants et de leurs opposés : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240.

♦ Exercice 4.f p. 27

- On a : $4\,312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$ et $6\,776 = 2^3 \times 7 \times 11^2$.

Donc : $\text{PGCD}(4\,312, 6\,776) = 2^3 \times 7 \times 11 = 616$; $\text{PPCM}(4\,312, 6\,776) = 2^3 \times 7^2 \times 11^2 = 47\,432$.

- On a : $28\,665 = 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 13$ et $412\,375 = 5^3 \times 3\,299$.

Donc : $\text{PGCD}(28\,665, 412\,375) = 5$; $\text{PPCM}(28\,665, 412\,375) = 2\,364\,145\,875$.

♦ Exercice 4.g p. 27

On a : $1\,925 = 5^2 \times 7 \times 11$ et $6\,860 = 2^2 \times 5 \times 7^3$.

Donc : $\dfrac{51}{1\,925} + \dfrac{3}{6\,860} = \dfrac{51 \times 2^2 \times 7^2 + 3 \times 5 \times 11}{2^2 \times 5^2 \times 7^3 \times 11} = \dfrac{10\,161}{377\,300}$.

Exercices d'apprentissage

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

♦ Exercice 1 p. 28

a) Soit p(n) la proposition : « $1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ».

- On a : $1 \times 2 = \dfrac{1(1+1)(1+2)}{3}$; donc p(1) est vraie.
- Soit k un entier naturel non nul.

Si p(k) est vraie, alors : $1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + k(k + 1) = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$.

On a :
$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}\ ;$$

donc : p($k + 1$) est vraie.
On en déduit que : pour tout entier naturel non nul n, $1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

b) Le raisonnement est analogue au précédent.

♦ Exercice 2 p. 28

a) On a : $S_n = 1 \times (n-1) + 2 \times (n-2) + 3 \times (n-3) + \ldots + (n-1)[n-(n-1)] + n(n-n)$

$= (n + 2n + 3n + \ldots + n \times n) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + n^2)$

$= n(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + n^2)$.

Or, on démontre par récurrence, pour tout entier naturel non nul n, les égalités suivantes :

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *(cf. page 12 n° 1c).*

Donc : $S_n = \dfrac{n^2(n+1)}{2} - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

b) Soit p(n) la proposition : « $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ ».

- On a : $\dfrac{1}{1 \times 2} = \dfrac{1}{2}$; donc p(1) est vraie.
- Soit k un entier naturel non nul.

Si p(k) est vraie, alors : $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \ldots + \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{k}{k+1}$.

On a : $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \ldots + \dfrac{1}{k(k+1)} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k}{k+1} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k+1}{k+2}$;

donc : p(k + 1) est vraie.

On en déduit que : pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

c) Soit p(n) la proposition : « $1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \ldots + n \times 2^{n-1} = (n-1) \times 2n + 1$ ».

- On a : $1 \times 2^0 = (1-1) \times 2^0 + 1$; donc : p(1) est vraie.
- Soit k un entier naturel non nul.

Si p(k) est vraie, alors : $1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \ldots + k \times 2^{k-1} = (k-1) \times 2^k + 1$.

On a : $1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \ldots + k \times 2^{k-1} + (k+1) \times 2^k = (k-1) \times 2^k + 1 + (k+1) \times 2^k$

$= (k - 1 + k + 1)\ 2^k + 1 = 2k \times 2^k + 1$

$= k \times 2^{k+1} + 1$;

donc : p(k + 1) est vraie.

On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \ldots + n \times 2^{n-1} = (n-1) \times 2^n + 1$.

♦ Exercice 3 p. 28

Soit p(n) la proposition : « $2^n > 5(n+1)$ ».

- On a : $2^5 > 5/(5+1)$; donc : p(5) est vraie.
- Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 5.

Si p(k) est vraie, alors : $2^k > 5(k+1)$.

On a : $2 \times 2^k > 10(k+1)$ et $10(k+1) > 5(k+2)$.

Donc : $2^{k+1} > 5(k+2)$; c'est-à-dire : p(k + 1) est vraie.

On en déduit que : pour tout entier naturel supérieur ou égal à 5, $2^n > 5(n+1)$.

♦ Exercice 4 p. 28

Soit p(n) la proposition : « n droites du plan déterminent au maximum $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ régions du plan ».

- Une droite du plan détermine au maximum $\dfrac{1 \times (1+1)}{2} + 1$ régions du plan ; donc p(1) est vraie.
- Soit k un entier naturel non nul.

Si p(k) est vraie, alors k droites du plan déterminent au maximum $\dfrac{k(k+1)}{2} + 1$ régions du plan.

Une (k + 1)-ième droite augmente le nombre de régions de (k + 1).

Alors le nombre maximal de régions est : $\dfrac{k(k+1)}{2} + 1 + (k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$;

donc : p(k + 1) est vraie.

On en déduit que : n droites du plan déterminent au maximum $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ régions du plan.

LES ENSEMBLES ℕ ET ℤ

♦ Exercice 6 p. 28

On trouve : $x = 1$ et $y = -1$.

♦ Exercice 7 p. 28

$-2\,372 = 44 \times (-54) + 4$; $735 = -412 \times (-1) + 323$; $-235 = -17 \times 14 + 3$; $50\,764 = 327 \times 155 + 79$.

♦ Exercice 8 p. 28

On a : $900 = 14b + r$, avec $0 \leq r < b$.

$$0 \leq r < b \Leftrightarrow 0 \leq 900 - 14b < b \Leftrightarrow 14b \leq 900 < 15b \Leftrightarrow 60 < b \leq 64.$$

Si $b = 61$, alors $r = 46$; si $b = 62$, alors $r = 32$; si $b = 63$, alors $r = 18$; si $b = 64$, alors $r = 4$.

♦ Exercice 9 p. 28

Soit q le quotient de la division euclidienne de l'entier naturel n par 16.

On a : $n = 16q + q^2$, avec $q^2 < 16$. Or : $q^2 < 16 \Rightarrow q \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Si $q = 0$, alors $n = 0$; si $q = 1$, alors $n = 17$; si $q = 2$, alors $n = 36$; si $q = 3$, alors $n = 57$.

♦ Exercice 10 p. 28

On a : $a = 50b + r$, avec $0 \leq r < b$.

$$a + b + r = 3\,025 \Leftrightarrow 51b + 2r = 3\,025$$

$$0 \leq r < b \Rightarrow 0 \leq 2r < 2b \Rightarrow 0 \leq 3\,025 - 51b < 2b \Rightarrow 51b \leq 3\,025 < 53b \Rightarrow 57 < b \leq 59.$$

- Si $b = 58$, alors : $51 \times 58 + 2r = 3\,025$; donc : $r = 33{,}5$. Ceci est impossible.
- Si $b = 59$, alors : $51 \times 59 + 2r = 3\,025$; donc : $r = 8$ et $a = 50 \times 59 + 8 = 2\,958$.

En résumé : $a = 2\,958$, $b = 59$, $q = 50$ et $r = 8$.

♦ Exercice 11 p. 28

$85 = \overline{1010101}^2$; $104 = \overline{1101000}^2$; $3\,607 = \overline{111000010111}^2$.

♦ Exercice 12 p. 28

$\overline{10110}^2 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 23$; $\overline{111000}^2 = 2^5 + 2^4 + 2^3 = 56$;

$\overline{10101010}^2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 = 170$; $\overline{110100011}^2 = 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^1 + 2^0 = 419$.

♦ Exercice 13 p. 28

$2^6 - 1 = \overline{111111}^2$.

♦ Exercice 14 p. 28

Si $b = 2$, alors $(b + 1)^2 = 9 = \overline{1001}^2$; si $b > 2$, alors $(b + 1)^2 = b^2 + 2b + 1 = \overline{121}^b$.

MULTIPLES ET DIVISEURS

♦ Exercice 15 p. 28

On distingue 5 cas consignés dans le tableau de congruence ci-contre.

L'équation est équivalente à : $x^2 \equiv 4$ [modulo 5].

Les solutions de l'équation sont les entiers de la forme :

$x = 5k + 2$ ou $x = 5k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$.

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1

♦ Exercice 16 p. 28

On distingue 7 cas consignés dans le tableau de congruence ci-contre.

Les solutions de l'équation sont les entiers de la forme :

$x = 7k + 5$, $k \in \mathbb{Z}$.

x	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 - 3x + 4$	4	2	2	4	1	0	1

♦ Exercice 17 p. 28

On doit montrer que : pour tout entier n, $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \equiv 0$ [modulo 9].

Le tableau de congruence modulo 9 permet de conclure.

♦ Exercice 18 p. 28

1. On distingue 7 cas consignés dans le tableau de congruence ci-contre.

n	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 - n + 1$	1	1	3	0	6	0	4

2. Le nombre A est divisible par 7 pour les entiers de la forme : $n = 7k + 3$ ou $n = 7k + 5$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $B = (2\,753)^2 - 2\,753 + 1$.
Posons : $n = 2\,753$. On a : $n \equiv 2$ [modulo 7] ; donc : $B \equiv 3$ [modulo 7].

♦ Exercice 19 p. 28
Étudions les restes de la division euclidienne de x^3 par 7 à l'aide du tableau de congruence suivant.

x	0	1	2	3	4	5	6
x^3	0	1	1	6	1	6	6

Les restes possibles sont : 0, 1 et 6.
La congruence $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0$ [modulo 7] est vérifiée dans l'un des cas suivants :
(1) chacun des trois nombres est congru à 0 modulo 7 ;
(2) l'un des trois nombres est congru à 0 modulo 7,
le second est congru à 1 modulo 7,
et le troisième est congru à 6 modulo 7.
Dans chacun de ces deux cas, on a : $abc \equiv 0$ [modulo 7].

♦ Exercice 20 p. 28
1. On a : $11^0 \equiv 1$ [modulo 7] ; $11^1 \equiv 4$ [modulo 7] ; $11^2 \equiv 2$ [modulo 7] ; $11^3 \equiv 1$ [modulo 7].
Donc : $(11^3)^{666} \times 11 \equiv 11$ [modulo 7] ; c'est-à-dire : $11^{1999} \equiv 4$ [modulo 7].
2. On a : $11^{3k} \equiv 1$ [modulo 7] ; $11^{3k+1} \equiv 4$ [modulo 7] ; $11^{3k+2} \equiv 2$ [modulo 7].

♦ Exercice 21 p. 28
Pour tout entier différent de 1, le reste de la division euclidienne de $n + 17$ par $n - 1$ est 18.
Donc, $\dfrac{n+17}{n-1}$ est un entier relatif si et seulement si $n - 1$ divise 18 ;
c'est-à-dire : $n - 1 \in \{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}$;
ou : $n \in \{-17, -8, -5, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 7, 10, 19\}$.

♦ Exercice 22 p. 28
Un utilise des tableaux de congruence.

♦ Exercice 23 p. 28
On a : $10^0 \equiv 1$ [modulo 7] ; $10^1 \equiv 3$ [modulo 7] ; $10^2 \equiv 2$ [modulo 7] ;
$10^3 \equiv 6$ [modulo 7] ; $10^4 \equiv 4$ [modulo 7] ; $10^5 \equiv 5$ [modulo 7].
On en déduit les résultats suivants :
a) $\overline{qqppqp}^{10} = 10^5q + 10^4q + 10^3p + 10^2p + 10q + p$; donc : $\overline{qqppqp}^{10} \equiv 5q + 2p$ [modulo 7].
b) $\overline{qqqppp}^{10} = 10^5q + 10^4q + 10^3q + 10^2p + 10p + p$; donc : $\overline{qqqppp}^{10} \equiv q + 6p$ [modulo 7].
c) $\overline{qpqqpp}^{10} = 10^5q + 10^4p + 10^3q + 10^2q + 10p + p$; douc : $\overline{qpqqpp}^{10} \equiv 6q + p$ [modulo 7].
d) $\overline{qpqpqp}^{10} = 10^5q + 10^4p + 10^3q + 10^2p + 10q + p$; donc : $\overline{qpqpqp}^{10} \equiv 0$ [modulo 7].

♦ Exercice 24 p. 28
1. On doit avoir : $x \neq 0$.
$\overline{x43y}$ est divisible par 2 si et seulement si : $y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$;
$\overline{x43y}$ est divisible par 9 si et seulement si : $x + y + 7$ est divisible par 9.
Ces deux conditions sont réunies pour les couples (x, y) suivants : (2,0) ; (9, 2) ; (7, 4) ; (5, 6) ; (3, 8).
2. On doit avoir :
$$\begin{cases} x + y + 1 \equiv 0 \text{ [modulo 3]} \\ y - x + 8 \equiv 0 \text{ [modulo 11]}. \\ 0 \leq x \leq 9 \text{ et } 0 \leq y \leq 9. \end{cases}$$
On trouve les couples (x, y) suivants : (1, 4) ; (4, 7) et (8, 0).
3. $\overline{1x1yxy}$ est divisible par 63 si et seulement si il est à la fois divisible par 7 et par 9.
On trouve les couples (x, y) suivants : (7, 1) ; (0, 8) et (9, 8).

♦ Exercice 25 p. 29
1. Soit p(n) la proposition : « $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0$ [modulo 7] ».
• On a : $3^{0+1} + 2^{0+2} = 7$; donc p(0) est vraie.

- Soit k un entier naturel.

Si p(k) est vraie, alors : $3^{2k+1} + 2^{k+2} \equiv 0$ [modulo 7].
On a : $3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2} = 9 \times 3^{2k+1} + 2 \times 2^{k+2}$;
$3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2} \equiv 2 \times 3^{2k+1} + 2 \times 2^{k+2}$ [modulo 7] ;
$3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2} \equiv 2 \times (3^{2k+1} + 2^{k+2})$ [modulo 7] ;
$3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2} \equiv 0$ [modulo 7] ; donc p(k + 1) est vraie.
On en déduit que : pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

b) et *c)* se résolvent de la même façon que précédemment.

♦ Exercice 26 p. 29
a) On a : $5^2 \equiv 3$ [modulo 11] ; donc pour tout entier naturel n, $5^{2n} \equiv 3^n$ [modulo 11].

b) On a : $7 \equiv 1$ [modulo 6] ; donc pour tout entier naturel n, $7^n \equiv 1$ [modulo 6].

c) On a : $3^2 \equiv 2$ [modulo 7] ; donc pour tout entier naturel n, $3^{2n} \equiv 2^n$ [modulo 7].

d) On a : $5^2 \equiv 8$ [modulo 17] ;
donc pour tout entier naturel n, $5^{2n} \equiv 8^n$ [modulo 17] ;
$3 \times 5^{2n+1} \equiv 15 \times 8^n$ [modulo 17].

Or pour tout entier naturel n, $2^{3n+1} = 2 \times 8^n$.

Donc pour tout entier naturel n, $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 17 \times 8^n \equiv 0$ [modulo 17].

♦ Exercice 27 p. 29
Par hypothèse, on a : $n \not\equiv 0$ [modulo 7].
Étudions les restes des divisions euclidiennes de $n^3 - 1$ et $n^3 + 1$ par 7 à l'aide d'un tableau de congruence.
Donc pour tout entier naturel n, l'un des nombres $n^3 - 1$ et $n^3 + 1$ est divisible par 7.

n	1	2	3	4	5	6
$n^3 - 1$	0	0	5	0	5	5
$n^3 + 1$	2	2	0	2	0	0

♦ Exercice 28 p. 29
1. Le tableau de congruence ci-contre donne les restes de la division euclidienne de n^4 par 5.

n	0	1	2	3	4
n^4	0	1	1	1	1

2. - Si $n \equiv 0$ [modulo 5], alors : $n^5 - n \equiv 0$ [modulo 5].
   - Si $n \not\equiv 0$ [modulo 5], alors, d'après la question précédente : $n^4 - 1 \equiv 0$ [modulo 5] ; donc : $n(n^4 - 1)$; 0 [modulo 5] ; c'est-à-dire : $n^5 - n \equiv 0$ [modulo 5].

♦ Exercice 29 p. 29
1. On a, pour tout entier naturel k : $7^{4k} \equiv 1$ [modulo 10] ; $7^{4k+1} \equiv 7$ [modulo 10] ;
$7^{4k+2} \equiv 9$ [modulo 10] ; $7^{4k+3} \equiv 3$ [modulo 10].

2. On remarque que : A = $\dfrac{7^{n+1} - 1}{6}$.

Si $n = 4k - 1$, alors : A $\equiv 0$ [modulo 10] ; si $n = 4k$, alors : A $\equiv 1$ [modulo 10] ; si $n = 4k + 1$, alors : A $\equiv 8$ [modulo 10] ; si $n = 4k + 2$, alors : A $\equiv 7$ [modulo 10].

♦ Exercice 30 p. 29
On a : $15 \times 3^n - 3 \equiv 3^n - 3$ [modulo 7].
15×3^n est divisible par 7 si et seulement $3^n \equiv 3$ [modulo 7]. On trouve : $n = 6k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

♦ Exercice 31 p. 29
Les restes possibles de la division euclidienne d'un entier par 3 sont : 0, 1 et 2.
On répartit les 5 nombres entiers dans 3 tiroirs T_0, T_1 et T_2 tels que le tiroir T_i contient les nombres entiers dont le reste de la division euclidienne par 3 est i.

- Si un tiroir contient exactement 3 nombres, on choisit les trois nombres de ce tiroir.
- Si aucun tiroir ne contient 3 nombres, c'est que deux tiroirs contiennent chacun exactement 2 entiers et un tiroir contient exactement 1 nombre.

On choisit alors un entier dans chaque tiroir.

PGCD ET PPCM

NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

♦ Exercice 32 p. 29
PPCM(24, 56) = 168 ; PPCM(180, 450) = 900.

♦ Exercice 33 p. 29
PGCD(48, 32) = 16 ; PGCD(1 640, 492) = 164 ; PGCD(168, 2 160) = 24 ; PGCD(343, 1 225) = 49.

♦ Exercice 34 p. 29
On a : $\begin{cases} a = 7a' \\ b = 7b' \\ \text{PGCD }(a', b') = 1 \end{cases}$; donc : $\begin{cases} a' + b' = 15 \\ \text{PGCD }(a', b') = 1 \end{cases}$.
Les valeurs des couples (a', b') sont : (1, 14) ; (2, 13) ; (4, 11) ; (7, 8) ; (14, 1) ; (13, 2) ; (11, 4) et (8, 7).
D'où les couples (a, b) : (7, 98) ; (14, 91) ; (28, 77) ; (49, 56) ; (98, 7) ; (91, 14) ; (77, 28) et (56, 49).

♦ Exercice 35 p. 29
On utilise l'algorithme d'Euclide ou la décomposition en produits de facteurs premiers.
PGCD(1 455, 335) = 5 ; PGCD(3 604, 4 452) = 212 ; PGCD(13 860, 4 438) = 14 ;
PGCD(323 232, 232 323) = 10 101.

♦ Exercice 36 p. 29
PPCM(162, 252) = 2 268 ; PPCM(6 974, 9 287) = 64 767 538.

♦ Exercice 37 p. 29
a) Les valeurs des couples (x, y) sont : (354, 5 310) ; (1 062, 4 602) ; (1 770, 3 894) ; (2 478, 3 186) ; (5 310, 354) ; (4 602, 1 062) ; (3 894, 1 770) et (3 186, 2 478).

b) On a : $\text{PGCD}(x, y) = \dfrac{1\,008}{168} = 6$.
$\begin{cases} x = 6x' \\ y = 6y' \\ \text{PGCD }(x', y') = 1 \end{cases}$; donc : $\begin{cases} x'y' = \dfrac{1\,008}{36} = 28 \\ \text{PGCD }(x', y') = 1 \end{cases}$.
Les valeurs des couples (x', y') sont : (1, 28) ; (4, 7) ; (28, 1) ; (7, 4).
On en déduit les valeurs des couples (x, y) : (6, 168) ; (24, 42) ; (168, 6) ; (42, 24).

♦ Exercice 38 p. 29
1. *Équation* 2m + 3d = *11*
δ divise 3δ et 2μ ; donc δ divise 11 et par suite : $\delta \in \{1, 11\}$. De plus, $3\delta \leq 11$; donc : $\delta \leq 3$.
On en déduit que : $\delta = 1$ et $\mu = 4$. Donc : $\begin{cases} ab = \mu\delta = 4 \\ \text{PGCD }(a, b) = 1 \end{cases}$.
On obtient les couples : (4, 1) et (1, 4).
2. On a : $108 = 2^2 \times 3^3$; on en déduit les diviseurs positifs de 108 : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54 et 108.
Équation* m – 3d = *108* et *10* < d < *15
On a : $\delta \in \{11, 12, 13, 14\}$. De plus, δ divise 108 ; donc : $\delta = 12$ et $\mu = 144$.
On en déduit que : $\begin{cases} ab = \mu\delta = 12^3 \\ \text{PGCD }(a, b) = 12 \end{cases}$.
Posons : $\begin{cases} a = 12a' \\ b = 12b' \\ \text{PGCD }(a', b') = 1 \end{cases}$; on a : $\begin{cases} a'b' = 12 = 2^2 \times 3 \\ \text{PGCD}(a', b') = 1 \end{cases}$.
Les diviseurs positifs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6 et 12.
Les valeurs des couples (a', b') sont : (1, 12) ; (3, 4) ; (12, 1) ; (4, 3).
On en déduit les valeurs des couples (a, b) : ((12, 144) ; (36, 48) ; (144, 12) ; (48, 36).

♦ Exercice 39 p. 29

1. On a : $1\,998 = 2 \times 3^2 \times 37$.

Les diviseurs positifs de 1 993 sont : 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 37, 54, 74, 111, 222, 333, 666, 999 et 1 998.
d^2 divise 1 998 si et seulement si $d^2 = 1$ ou $d^2 = 9$; c'est-à-dire : $d = 1$ ou $d = 3$.

2. • Si $\delta = 1$, alors $\mu^2 = 1\,998 + 3 = 2\,001$; donc : $\mu = 44,73$ ce qui est impossible.
   • Si $\delta = 3$, alors $\mu^2 = 1\,998 + 27 = 2\,025$; donc : $\mu = 45$.

On a : $\begin{cases} ab = \mu\delta = 3^3 \times 5 \\ \text{PGCD}\,(a, b) = 3 \end{cases}$. On trouve les couples (a, b) suivants : (3, 45) ; (9, 15) ; (15, 9) ; (45, 3).

♦ Exercice 40 p. 29

Divisibilité par 12

À l'aide de tableaux de congruences, on montre que :
$n^2(n^2 - 1) \equiv 0$ [modulo 3] et $n^2(n^2 - 1) \equiv 0$ [modulo 4].
Comme de plus 3 et 4 sont premiers entre eux, on en déduit que : $n^2(n^2 - 1) \equiv 0$ [modulo 12].

Divisibilité par 60

On a : $n^2(n^4 - 1) = n^2(n^2 - 1)(n^2 + 1)$.

- D'après ce qui précède : $n^2(n^2 - 1) \equiv 0$ [modulo 12] ; donc : $n^2(n^4 - 1) \equiv 0$ [modulo 12].
- À l'aide d'un tableau de congruence, on montre que : $n^2(n^4 - 1) \equiv 0$ [modulo 5].

Comme de plus 12 et 5 sont premiers entre eux, on en déduit que : $n^2(n^4 - 1) \equiv 0$ [modulo 60].

Divisibilité par 42

- On a : $n(n^6 - 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$.

D'après l'exercice p. 24 n° 3.f, on a : $(n - 1)n(n + 1) \equiv 0$ [modulo 6].

- À l'aide d'un tableau de congruence, on montre que : $n(n^6 - 1) \equiv 0$ [modulo 7].

Comme de plus 6 et 7 sont premiers entre eux, on en déduit que : $n(n^6 - 1) \equiv 0$ [modulo 42].

♦ Exercice 41 p. 29

a) D'après l'algorithme d'Euclide, PGCD$(2n + 1, n)$ = PGCD$(n, 1) = 1$.

b) Posons : $a = 7n + 3$ et $b = 5n + 2$. Soit d un diviseur commun à a et b.
d divise $5a - 7b$; c'est-à-dire : d divise 1. Donc : PGCD$(a, b) = 1$.

c) D'après l'algorithme d'Euclide, PGCD$(n^2, n + 1)$ = PGCD$(n + 1, 1) = 1$.

d) D'après l'algorithme d'Euclide, PGCD$(2n^2 + 2n, 2n + 1)$ = PGCD$(2n + 1, n)$ = PGCD$(n, 1) = 1$.

♦ Exercice 42 p. 29

Soit d un diviseur commun à $(a + b)$ et ab.
D'une part : d divise $a(a + b) - ab = a^2$; donc d divise a.
D'autre part : d divise $b(a + b) - ab = b^2$; donc d divise b.
On a : d divise a et d divise b ; donc : d divise PGCD(a, b) ; ou $d \in \{-1, 1\}$.

On en déduit que la fraction $\dfrac{a + b}{ab}$ est irréductible.

On montre de même que les deux autres fractions sont irréductibles.

♦ Exercice 43 p. 29

1. On a : $n \in \{-7, -3, -1, 3\}$.
2. D'après l'algorithme d'Euclide, PGCD$(2n^2 + 3n - 1, n + 2)$ = PGCD$(n + 2, 1) = 1$.
3. Les entiers cherchés sont : -3 et -1.

♦ Exercice 44 p. 29

1. Les solutions de l'équation (E') sont les couples $(3k, 2k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Le couple (6, 3) est une solution de l'équation (E).
3. Les solutions de l'équation (E) sont les couples $(3k + 6, 2k + 3)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

♦ Exercice 45 p. 29

Le couple (5, 18) est une solution de l'équation.
Les solutions de l'équation sont les couples $(11k + 5, 18 - k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

♦ Exercice 46 p. 29

1. On obtient : $45 \times 5 - 28 \times 8 = 1$.
2. Les solutions de l'équation (E) sont les couples $(28k + 5, 45k + 8)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. Les solutions de l'équation (E') sont les couples $(28k + 30, 45k + 48)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

♦ Exercice 47 p. 29

On obtient : $n \equiv 37$ [modulo 88].

♦ Exercice 48 p. 29

Les solutions du système sont les entiers de la forme : $21k - 5$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

♦ Exercice 49 p. 30

- Seul 1 999 est un nombre premier.
- On a : $649 = 11 \times 59$; $1\,001 = 7 \times 143$; $71\,487 = 3 \times 23\,829$; $257\,323 = 11 \times 23\,393$.

♦ Exercice 50 p. 30

Pour tout entier naturel n, on a : $n^2 + 4n - 5 = (n - 1)(n + 5)$.
Donc, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $(n^2 + 4n - 5)$ est un nombre composé.

♦ Exercice 51 p. 30

1. A est divisible par 2^{97}.
2. A se termine par 24 zéros.

♦ Exercice 52 p. 30

a) $n \in \{32, 96\}$

b) $n \in \{27, 54, 108, 216\}$.

♦ Exercice 53 p. 30

$n = 3 \times 5 \times 7^2 = 735$.

♦ Exercice 54 p. 30

$n = 2^4 \times 3^2 = 144$.

♦ Exercice 55 p. 30

Les nombres cherchés sont de la forme : $A = 2^a \times 3^b$, avec $1 \leq a \leq 6$ et $1 \leq b \leq 4$.
Par disjonction des cas, on trouve : $A = 2^3 \times 3^2 = 72$ ou $A = 2^5 \times 3 = 96$.
Chacun de ces nombres a 12 diviseurs.

♦ Exercice 56 p. 30

- Pour se forger une opinion, on prend des exemples.
- Remarquons que n doit être un nombre impair.
- Pour $n > 5$, tous les nombres sont supérieurs à 5, et au moins l'un d'eux est divisible par 5, car les nombres 0, 2, 6, 8, 12 et 14 ont respectivement pour restes modulo 5 : 0, 2, 1, 3, 2 et 4.

n	$n + 2$	$n + 6$	$n + 8$	$n + 12$	$n + 14$	solution
0	2	6	8	12	14	non
1	3	7	9	13	15	non
2	4	8	10	14	16	non
3	5	9	11	15	17	non
4	6	10	12	16	18	non
5	7	11	13	17	19	**oui**

♦ Exercice 57 p. 30

On a : $39\,818 = nq + 37 \Rightarrow nq = 39\,781 = 5\,683 \times 7$;
$62\,566 = nq' + 53 \Rightarrow nq' = 62\,513 = 5\,683 \times 11$;
5 683 est un nombre premier ayant 4 chiffres.
Donc : $n = 5\,683$; $q = 7$ et $q' = 11$.

♦ Exercice 58 p. 30

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
D'après le théorème fondamental, il existe des nombres premiers $P_1, P_2, ..., P_k$ et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ tels que : $n = {P_1}^{\alpha_1} \times {P_2}^{\alpha_2} \times ... \times {P_k}^{\alpha_k}$.

Le nombre de diviseurs positifs de l'entier naturel n est : $N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) ... (\alpha_k + 1)$.

Le nombre N est impair si et seulement si chaque facteur du produit est impair ; c'est-à-dire si et seulement si chacun des nombres $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ est pair.

Donc, N est impair si et seulement si l'entier naturel n est un carré parfait.

♦ Exercice 59 p. 30

Posons : $\delta = \text{PGCD}(a, b)$. On a : $\begin{cases} a = \delta a' \\ b = \delta b' \\ \text{PGCD}(a', b') = 1 \end{cases}$.

On a : $\text{PPCM}(a, b) = 504 \Rightarrow \delta a'b' = 504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$;
$a + b = 135 \Rightarrow \delta(a' + b') = 135 = 3^3 \times 5$.

δ est un diviseur commun à 504 et 135 ; donc : $\delta \in \{3, 9\}$.

Seule la valeur 9 de δ convient ; on a alors : $a'b' = 56$ et $a' + b' = 15$.

On trouve les couples $(a', b'$: $(7, 8)$ et $(8, 7)$. On en déduit les couples (a, b) : $(63, 72)$ et $(72, 63)$.

♦ Exercice 60 p. 30
Posons : $a = 42a'$ et $b = 42b'$, avec PGCD$(a', b') = 1$. On a : PPCM$(a, b) = 1\,680 \Rightarrow a'b' = \frac{1\,680}{42} = 40$.

On trouve les couples (a', b') : (5, 8) et (8, 5). On en déduit les couples (a, b) : (210, 336) et (336, 210).

♦ Exercice 61 p. 30
1. On a : $469 = 7 \times 67$.
2. On a : $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 7 \times 67 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 67 \end{cases}$.

Ce système n'ayant pas de solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, l'équation $x^3 - y^3 = 469$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 62 p. 30
Remarquons que dans $\mathbb{N}$: $a + b \leq c \Leftrightarrow a + b < c + 1$.
Or : pour tous entiers naturels non nuls a et b, $0 \leq (a - 1)(b - 1)$; c'est-à-dire : $a + b \leq ab + 1$.
Donc : $ab < c \Rightarrow a + b \leq ab + 1 < c + 1$; par suite : $ab < c \Rightarrow a + b \leq c$.

♦ Exercice 63 p. 30
1. $x^2 \equiv -1$ [modulo 25] $\Leftrightarrow x^2 \equiv -1 + 50$ [modulo 25] $\Leftrightarrow x^2 \equiv 49$ [modulo 25].
2. Les solutions de l'équation (E) sont les entiers de la forme : $x = -7 + 25k$ ou $x = 7 + 25k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

♦ Exercice 64 p. 30
Posons : $x = 13a + 8b$ et $y = 5a + 3b$.

Tout diviseur commun à a et b est diviseur commun à $(13a + 8b)$ et $(5a + 3b)$, c'est-à-dire x et y.
Donc : $\mathcal{D}(a\,;b) \subset \mathcal{D}(x\,;y)$ (1).

Des égalités précédentes, on déduit : $a = -3x + 8y$ et $b = 5x - 13y$.
Tout diviseur commun à x et y est diviseur commun à $(-3x + 8y)$ et $(5x - 13y)$, c'est-à-dire a et b.

Donc : $\mathcal{D}(x\,;y) \subset \mathcal{D}(a\,;b)$ (2).
De (1) et (2), on déduit : $\mathcal{D}(x\,;y) = \mathcal{D}(a\,;b)$; donc : PGCD$(x\,;y)$ = PGCD$(a\,;b)$.

♦ Exercice 65 p. 30
Démontrons que : si $(2n + 3)$ et $(n + 7)$ ne sont pas premiers entre eux, alors 11 divise $(n - 4)$.
Supposons que $(2n + 3)$ et $(n + 7)$ admettent un diviseur commun d autre que -1 et 1.
On a : d divise $2(n + 7) - (2n + 3) = 11$; donc : $d = -11$ ou $d = 11$.

- Si $d = -11$, alors il existe un entier relatif p tel que : $n + 7 = -11p$.
On en déduit : $n = -11p - 7$; donc : $n - 4 = 11(-p - 1)$ et 11 divise $(n - 4)$.
- De même si $d = 11$, alors 11 divise $(n - 4)$.

♦ Exercice 66 p. 30
Désignons par : x la distance entre deux arbres ;
a le nombre d'arbres sur le côté de 132 m ;
b le nombre d'arbres sur le côté de 156 m ;
c le nombre d'arbres sur le côté de 204 m.

On a les égalités : $(a - 1)x = 132 = 2^2 \times 3 \times 11$; $(b - 1)x = 156 = 2^2 \times 3 \times 13$; $(c - 1)x = 204 = 2^2 \times 3 \times 17$.

L'entier x est un diviseur positif commun aux nombres 132, 156 et 204 ; donc : $x \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
Le nombre d'arbres est minimal si et seulement si la distance entre deux arbres est maximale ; c'est-à-dire : $x = 12$. On a alors : $a = 12$, $b = 14$ et $c = 18$.
Pour calculer le nombre total N d'arbres, il faut corriger le fait que les arbres des sommets ont été plusieurs fois comptés : $N = 12 + (14 - 1) + (18 - 2) = 41$.

♦ Exercice 68 p. 30
1. Si $C_1 = 7$ et $C_2 = 4$, alors : $2 \times 4 + (-1) \times 7 = 1$.

Donc, pour mettre un litre d'eau dans la citerne, il suffit d'y mettre deux fois le contenu du seau de capacité C_2 et d'en ôter le contenu du seau de capacité C_1.

Si $C_1 = 6$ et $C_2 = 4$, alors : C_1 et C_2 ne sont pas premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout on ne peut pas remplir la citerne avec deux seaux de capacités respectives C_1 et C_2.

2. D'après Bézout, le problème a une solution si et seulement si C_1 et C_2 sont premiers entre eux.

♦ Exercice 70 p. 30

On a : $60 = 3 \times 4 \times 5$. Soit a, b et c trois entiers naturels.

Démontrons que : si $a^2 + b^2 = c^2$, alors l'un au moins des nombres a, b et c st divisible par 3 (1).

Les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 3 sont : 0 et 1.
Les seules additions vraies modulo 3 avec 0 et 1 comportent forcément le nombre 0 ;
donc, l'un au moins des nombres a, b et c st divisible par 3.

On démontre de même les propriétés :
si $a^2 + b^2 = c^2$, alors l'un au moins des nombres a, b et c st divisible par 4 **(2)**
si $a^2 + b^2 = c^2$, alors l'un au moins des uombres a, b et c st divisible par 5 **(3)**

D'après ce qui précède, abc est divisible par $3 \times 4 \times 5 = 60$.

♦ Exercice 71 p. 30

La fonction φ définie sur $\mathbb{N}$ est appelée fonction d'Euler ou indicateur d'Euler.

1. On a : $\varphi(5) = 4$; $\varphi(13) = 12$; $\varphi(15) = 8$; $\varphi(36) = 12$.

2. Soit p et q deux nombres premiers distincts. $\varphi(p) = p - 1$; $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$; $\varphi(p^2) = p(p-1)$.

♦ Exercice 72 p. 30

1. La démonstration est immédiate.

2. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 2x_n - 1$; $\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = 2y_n + 3$.

3. On peut démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \geq 3$; $\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n \geq 1$.

4. *a)* Démontrons que : $x_n \equiv 0$ [modulo 5] $\Leftrightarrow$ $y_n \equiv 0$ [modulo 5]. On a : $M_n \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow 2x_n - y_n - 5 = 0$.

Propriété directe
$2x_n - y_n - 5 = 0 \ \Rightarrow\ y_n = 2x_n - 5$.
Si $x_n \equiv 0$ [modulo 5], alors : $2x_n \equiv 5$ [modulo 5] ; donc : $2x_n - 5 \equiv 0$ [modulo 5] ; ou : $y_n \equiv 0$ [modulo 5].

Propriété réciproque
$2x_n - y_n - 5 = 0 \ \Rightarrow\ 2x_n = y_n + 5$.
Si $y_n \equiv 0$ [modulo 5], alors : $y_n + 5 \equiv 0$ [modulo 5] ; ou : $2x_n \equiv 0$ [modulo 5].
Or : PGCD(2,5) = 1 ; donc, d'après le théorème de Gauss : $x_n \equiv 0$ [modulo 5].

b) Supposons que x_n et y_n ne sont pas premiers entre eux .
Désignons alors par δ leur PGCD ; le nombre δ est différent de 1.
On a : $x_n = \delta a_n$, $y_n = \delta b_n$, PGCD $(a_n, b_n) = 1$.
Or : $2x_n - y_n = 5 \ \Rightarrow\ \delta(2a_n - b_n) = 5$; donc : 5 divise δ.
Par suite : $\delta = 5$, ce qui contredit le fait que x_n et y_n soient divisibles par 5.

5. *a)* La démonstration est immédiate.

b) On a : $x_n = 2^{n+1} + 1$ et $x_{n+4} = 2^{n+5} + 1$.
Il suffit de démontrer que : $2^{n+1} \equiv 4$ [modulo 5] $\Leftrightarrow 2^{n+5} \equiv 4$ [modulo 5].
On a : $2^{n+5} \equiv 4$ [modulo 5] $\Leftrightarrow 2^4 \times 2^{n+1} \equiv 4$ [modulo 5] $\Leftrightarrow 2^{n+1} \equiv 4$ [modulo 5].

c) x_n et y_n sont divisibles par 5 pour : $n = 4m + 1$, avec $m \in \mathbb{N}$.

♦ Exercice 73 p. 31

1. Ou a : $10^3 - 1 = 999 = 9 \times 111$ **(i)** et $10^3 + 1 = 1\,001 = 7 \times 11 \times 13$ **(ii)**.

2. On a : $A = 100 \times 10^{6n} + 10 \times 10^{3n} + 1$.

Divisibilité de A par 111
D'après l'égalité **(i)** : $10^3 \equiv 1$ [modulo 111] ; donc : $10^{3n} \equiv 1$ [modulo 111] et $10^{6n} \equiv 1$ [modulo 111].
On en déduit que : $A \equiv 100 + 10 + 1$ [modulo 111] ; c'est-à-dire : $A \equiv 0$ [modulo 111].

Divisibilité de A par 7 et par 13
- D'après l'égalité **(ii)** : $10^3 \equiv -1$ [modulo 7].

Si n est impair, alors : $10^{3n} \equiv -1$ [modulo 7] et $10^{6n} \equiv 1$ [modulo 7].
On en déduit que : $A \equiv 100 - 10 + 1$ [modulo 7] ; c'est-à-dire : $A \equiv 0$ [modulo 7].
- De même, on montre que si n est impair, alors : $A \equiv 0$ [modulo 13].

3. On a : $B = 10^{9n} + 10^{6n} + 10^{3n} + 1$.

a) On a : $10^3 \equiv -1$ [modulo 7].

- Si n est impair, alors : $10^{3n} \equiv -1$ [modulo 7], $10^{6n} \equiv 1$ [modulo 7] et $10^{9n} \equiv -1$ [modulo 7].
Donc : $B \equiv -1 + 1 - 1 + 1$ [modulo 7] ; c'est-à-dire : $B \equiv 0$ [modulo 7].
- De même, on montre que si n est impair, alors : $B \equiv 0$ [modulo 11] et $B \equiv 0$ [modulo 13].

b) • Si n est pair, alors : $10^{3n} \equiv 1$ [modulo 7] ; $10^{6n} \equiv 1$ [modulo 7] et $10^{9n} \equiv 1$ [modulo 7].
Donc : $B \equiv 4$ [modulo 7].

- De même, on montre que : $B \equiv 4$ [modulo 11] et $B \equiv 4$ [modulo 13].

♦ Exercice 74 p. 31

1. Le couple (3,2) est une solution de l'équation.
Les solutions générales de l'équation sont les couples $(991k + 3, 661k + 2)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. Pour tout entier naturel n, : $u_n = 991n + 3$ et $v_n = 661n + 2$.
On a : $u_p = v_q \Leftrightarrow 661q - 991p = 1 \Leftrightarrow p = 661k + 2$ et $q = 991k + 3$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Or : $0 \leq p < 2\,000$ et $0 \leq q < 2\,000 \Rightarrow 0 \leq k \leq 2$.

Si $k = 0$, $p = 2$ et $q = 3$; si $k = 1$, $p = 663$ et $q = 994$; si $k = 2$, $p = 1\,324$ et $q = 1\,985$.

On trouve les couples : (2, 3) ; (663, 994) et (1 324, 1 985).

♦ Exercice 75 p. 31

1. *a)* On a : $(10a + b)^2 = 10(10a^2 + 2ab) + b^2$; donc : $(10a + b)^2 \equiv b^2$ [modulo 10].
Donc, le dernier chiffre d'un carré est : 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

b) Le dernier chiffre de $(7y^2 + 9)$ est : 1, 2, 4, 6, 7 ou 9 ; donc ce nombre n'est pas divisible par 5.

2. 5 divise $15x^2$ et 5 ne divise pas $(7y^2 + 9)$; donc, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

♦ Exercice 76 p. 31

1. L'équation (E) est équivalente à : $3x^2 + 3x + 6 = y^3 - 1$; ou : $3(x^2 + x + 2) = y^3 - 1$.

2. On doit avoir : $y^3 - 1 \equiv 0$ [modulo 3].

1^er^ cas : $y \equiv 0$ [modulo 3]

On a : $y^3 - 1 \equiv 2$ [modulo 3] ; donc, l'équation (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2^e^ cas : $y \equiv 1$ [modulo 3]

On a : $y^3 - 1 \equiv 0$ [modulo 3].
Remplaçons y par sa valeur $3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) dans l'équation : $x^2 + x + 2 = 3(3k^3 + 3k^2 + k)$.

On doit avoir : $x^2 + x + 2 \equiv 0$ [modulo 3]. L'équation (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3^e^ cas : $y \equiv 2$ [modulo 3]

On a : $y^3 - 1 \equiv 1$ [modulo 3] ; donc, l'équation (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

♦ Exercice 79 p. 31

On trouve : $k \in \{-1 ; 0 ; 3\}$.

♦ Exercice 80 p. 31

1. • Soit d un diviseur commun à p et q^n.
d divide p et q ; donc d divise leur PGCD qui est 1 ; par suite : $d \in \{-1, 1\}$.
On en déduit que : PGCD$(p ; q^n) = 1$; c'est-à-dire que p et q^n sont premiers entre eux.

- De la même façon, on montre que p^n et q sont premiers entre eux.

2. $P(\frac{p}{q}) = 0 \Leftrightarrow a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$.

Donc : $p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + \ldots + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1}) = -a_0q^n$ et p divise a_0q^n.

Or : p et q^n sont premiers entre eux ; donc, d'après le théorème de Gauss p divise a_0.
On montre de même que q divise a_n.

3. Posons : $P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 7x + 4$. D'après la question **2.**, $p \in \{1, 2, 4\}$ et $q \in \{-1, -3, 1, 3\}$.

On vérifie que $-\frac{4}{3}$ est la seule racine de $P(x)$. Donc : pour tout x, $P(x) = (3x + 4)(x^2 + x + 1)$.

4. L'équation $x^5 + 127x^4 - 12x^3 + x^2 + 7x - 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

♦ Exercice 82 p. 31

1. Si $n = \frac{a^2 + a}{2} + \frac{b^2 + b}{2}$, ($a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$), alors : $4n + 1 = (a + b + 1)^2 + (a - b)^2$.

2. Si $4n + 1 = x^2 + y^2$, alors x et y sont de parité différente, $(x + y - 1)$ et $(x - y - 1)$ sont pairs.

Posons : $a = \frac{x+y-1}{2}$ et $b = \frac{x-y-1}{2}$. On a : $\frac{a^2+a}{2} + \frac{b^2+b}{2} = \frac{x^2+y^2-1}{4} = n$. La réciproque est vraie.

♦ Exercice 83 p. 32

1. On a : $220 = 2^2 \times 5 \times 11$; donc, les diviseurs stricts de 220 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 et 110.

2. On a : $284 = 2^2 \times 71$; donc, les diviseurs stricts de 284 sont : 1, 2, 4, 71 et 142.
- On a : $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$; $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$.

Donc, les nombres 220 et 284 sont amiables.

- On montre de façon analogue que les nombres 17 296 et 18 416 sont amiables.

3. *a)* On a : $28 = 2^2 \times 7$; donc, les diviseurs stricts de 28 sont : 1, 2, 4, 7 et 14.
$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$; donc, 28 est un nombre parfait.

b) Les diviseurs stricts de 2^4p sont : 1, 2, 4, 8, 16, p, $2p$, $4p$ et $8p$.

2^4p est un nombre parfait si et seulement si : $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + p + 2p + 4p + 8p = 16$; ou : $p = 31$.

c) Les diviseurs stricts de 2^np sont : $1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}, 2^n, p, 2p, 4p \ldots, 2^{n-1}p$.

2^np est un nombre parfait si et seulement si : $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n + p(1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1}) = 2^np$;
c'est-à-dire : $2^{n+1} - 1 + p(2^n - 1) = 2^np$; ou : $p = 2^{n+1} - 1$.

Posons : $N = 2^np$. Déterminons les valeurs de N pour $n < 10$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1 023
N	1	6	28	▨	496	▨	8 128	▨	130 816	▨

Les nombres 15, 63, 255 et 1 023 ne sont pas premiers ;
donc, les nombres parfaits de la forme 2^np sont : 1, 6, 28, 496, 8 128 et 130 816.

♦ Exercice 84 p. 32

1. On a : $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$.
Si $(a^n - 1)$ est premier, alors : $a - 1 = 1$; donc : $a = 2$.
Démontrons que : si $(2^n - 1)$ est premier, alors n est premier.
Démontrons la contraposée : n est composé $\Rightarrow$ $(2^n - 1)$ est composé.
Supposons que : $n = pq$, avec $1 < p < n$ et $1 < q < n$.

Alors, on a : $2^n - 1 = (2^p - 1)\sum_{k=0}^{q-1} 2^{kp}$.

Aucun des facteurs $(2^p - 1)$ et $\sum_{k=0}^{q-1} 2^{kp}$ n'étant égal à 1, le nombre $(2^n - 1)$ est composé.

2. *a)* On a : $M_2 = 3$; $M_3 = 7$; $M_5 = 31$ et $M_7 = 127$. Ces nombres sont bien premiers.
b) On a : $M_{11} = 2\,047 = 23 \times 89$; donc, M_{11} n'est pas premier.

♦ Exercice 85 p. 32

1. a) On a : $F_0 = 3$; $F_1 = 5$; $F_2 = 17$ et $F_3 = 257$. Ces nombres sont bien premiers.
b) On a : $F_4 = 65\,537$ et $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$.

2. On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(F_n - 1)^2 + 1 = (2^{2^n} + 1 - 1)^2 + 1 = 2^{2\times 2^n} + 1 = 2^{2^{n+1}} + 1 = F_{n+1}$.

3. Soit p(n) la proposition : « $F_n \equiv 7$ [modulo 10] ».
- On a : $F_2 = 17$; donc p(2) est vraie.
- Soit k un entier naturel stictement supérieur à 1.

Si p(k) est vraie, alors : $F_k \equiv 7$ [modulo 10]. Donc : $F_k - 1 \equiv 6$ [modulo 10] et $(F_k - 1)^2 + 1 \equiv 7$ [modulo 10] ;
c'est-à-dire : $F_{k+1} \equiv 7$ [modulo 10] ; donc : p(k + 1) est vraie.

On en déduit que : pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, $F_n \equiv 7$ [modulo 10].

4. *a)* On a : $\frac{F_{n+k} - 2}{F_n} = \frac{2^{2^{n+k}} - 1}{2^{2^n} + 1} = \frac{2^{2^n\times 2^k} - 1}{2^{2^n} + 1} = \frac{a^{2^k} - 1}{a + 1}$, avec $a = 2^{2^n}$.

b) On a : $F_{n+k} - 2 = F_n(a^{2^k-1} - a^{2^k-2} + a^{2^k-3} + \ldots + 1)$; donc : F_n divise $(F_{n+k} - 2)$.

2. Calcul vectoriel

(pages 33 à 54 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- Étendre la notion de barycentre à un nombre quelconque de points (dans le plan et dans l'espace).
- Mettre en oeuvre le barycentre dans la résolution de problèmes d'incidence et de lieux.
- Introduire la notion de produit vectoriel et l'utiliser en géométrie analytique.

COMMENTAIRES

La notion de barycentres, utile en sciences physiques et en statistiques, illustre l'efficacité du calcul vectoriel. On évitera à ce sujet toute technicité.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Barycentre de n points pondérés • Théorème et définition. • Propriétés : – homogénéité ; – réduction de la somme ; – coordonnées du barycentre ; – propriété des barycentres partiels. • Ensemble des barycentres de points pondérés.	• Réduire une expression de la forme : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$. • Construire le barycentre de plusieurs points pondérés. • Déterminer les coordonnées du barycentre de n points pondérés. • Utiliser l'outil barycentre pour résoudre des problèmes d'alignement, de parallélisme et de concours de droites.
Lignes de niveau • Lignes de niveau de : $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$. • Lignes de niveau de : $M \mapsto \frac{MA}{MB}$. • Lignes de niveau de : $M \mapsto \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$.	• Déterminer et construire les lignes de niveau de : – $M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$; – $M \mapsto \frac{MA}{MB}$; – $M \mapsto \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$.
Produit vectoriel • Orientation de l'espace : – règle du bonhomme d'Ampère ; – orientation d'un plan de l'espace. • Produit vectoriel : – définition ; – propriétés ; – expression analytique.	• Préciser si une base donnée est directe ou indirecte. • Déterminer les coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs donnés. • Déterminer une équation cartésienne d'un plan défini par trois points. • Étudier la position relative de deux plans. • Calculer la distance d'un point à une droite, à un plan. • Calculer l'aire d'un triangle dont on connaît les coordonnées des sommets. • Calculer le volume d'un tétraèdre dont on connaît les coordonnées des sommets.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 38

a) A = bar {(B,1), (C,3)}

b) A = bar {(B,5), (C, – 1)}

c) A = bar {B,2), (C,1)}

d) A = bar {(B,3), (C, – 1)}

♦ Exercice 1.b p. 38

$3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$; donc : A = bar {(B,5), (C,– 2)} ; B = bar {(A,3), (C,2)} ; C = bar {(A,– 3), (B,5)}.

♦ Exercice 1.c p. 38

Soit G le barycentre de (A,3), (B,1) et (C,– 2). On a : $\vec{u} = 2\overrightarrow{MG}$; $\vec{v} = 3\overrightarrow{DB}$; $\vec{w} = \vec{0}$.

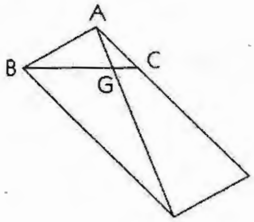
♦ Exercice 1.d p. 38

a) $I(-2 ; \frac{7}{5} ; \frac{2}{5})$ *b)* $J(\frac{1}{2} ; -\frac{13}{10} ; \frac{6}{5})$.

c) Le milieu de [AI] a pour coordonnées les coordonnées de J.

♦ Exercice 1.e p. 38

a) On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC})$

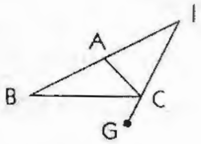


b) Posons : I = bar {(A,– 2), (B,I)}.

On a : $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB}$;

G = bar {(I,– 1), (C,4)} ;

$\overrightarrow{CG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CI}$.



♦ Exercice 1.f p. 38

On numérote les figures 1, 2, 3 et 4 de la gauche vers la droite. On obtient :

1) G = bar {(A,– 12), (B,2), (C,1)} 2) G = bar {(A,3), (C,1)}

3) G = Bar {(A,2), (B,1), (C,3)} 4) G = bar {(A,6), (B,3), (C,2)}.

♦ Exercice 1.g p. 38

C = bar {(A,1), (B,– 1), (D,– 1)} = bar {(P,– 3), (Q,2)} ; donc les points P, Q et C sont alignés.

On a : $\overrightarrow{CQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CP}$.

♦ Exercice 1.h p. 38

Posons : G = bar {(A,2), (B,1), (C,2), (D,1)}.

P = bar {(A,2), (B,1)} et S = bar {(C,2), (D,1)} ; donc : G = bar {(P,3), (S,3)} et G ∈ (PS).

On montre de même que : G ∈ (QR) et G ∈ (IJ).

Donc, les droites (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes en G.

♦ Exercice 2.a p. 43

1. On a : $\|3\overrightarrow{MG}\| = 12 \Leftrightarrow GM = 4$.

L'ensemble cherché est le cercle ($\mathscr{C}$) de centre G et de rayon 4.

2. On a : $-2AM^2 + BM^2 + CM^2 = 98 - 4\,\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}$.

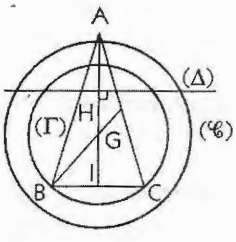
Soit H le projeté orthogonal de M sur (AI) ; on doit avoir : $\overline{AH} = \frac{1}{3}\overline{AI}$.

L'ensemble cherché est la droite (Δ), perpendiculaire à (IA) en H.

3. *a)* $AG = 2\sqrt{5}$; BG = 3.

b) $AB^2 + BB^2 + CB^2 = 65$; donc, B appartient à l'ensemble cherché (Γ).

(Γ) est le cercle de centre G et de rayon BG = 3.



♦ Exercice 2.b p. 43

Posons : I = bar {(A,3), (B,5)} et J = bar {(A,3), (B,– 5)}. On a : $\overrightarrow{AI} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.

L'ensemble cherché est le cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre [IJ].

♦ Exercice 2.c p. 43

Posons : G_1 = bar {(G...

L'ensemble cherché est le cercle (𝒞) de diamètre [IJ].

On remarque que : I = bar {(A,3), (C,2)} ; donc : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$;

J = bar {(A,3), (B,2), (C,– 2)} ; donc : $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.

♦ Exercice 2.d p. 43

1. *a)* Soit O le point de la médiatrice de [AB] tel que : Mes$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = -\frac{\pi}{2}$.

Le triangle OAB est isocèle en O et Mes $\widehat{A}$ = Mes $\widehat{B} = \frac{\pi}{4}$.
Soit (𝒞) le cercle de centre O et de rayon OA.
L'ensemble cherché est le grand arc de (𝒞) de corde [AB], privé des points A et B.

b) Soit O le point de la médiatrice de [AB] tel que : Mes$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{4\pi}{3}$.

On a : Mes$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Le triangle OAB est isocèle en O et Mes $\widehat{A}$ = Mes $\widehat{B}$ = 20°.
Soit (Γ) le cercle de centre O et de rayon OA.
L'ensemble cherché est le petit arc de (Γ) de corde [AB], privé des points A et B.

2. *a)* On a : Mes$(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = -\frac{\pi}{3}$ ou Mes$(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \frac{2\pi}{3}$.

L'ensemble cherché est le cercle (Γ) du **1.** *b)* privé des points A et B.

b) On a : Mes$(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \frac{5\pi}{6}$ ou Mes$(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = -\frac{\pi}{6}$.

Soit O le point tel que OAB est de sens indirect, (Σ) le cercle de centre O et de rayon OA.
L'ensemble cherché est le cercle (Σ) privé des points A et B.

♦ Exercice 3.a p. 49
Bases directes : *a)* et *d)* ; bases indirectes *b)* et *c)*.

♦ Exercice 3.b p. 49

a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$ *b)* $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EA}$ *c)* $\overrightarrow{GC} \wedge \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{BA}$

d) $\overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ *e)* $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{FH} = 2\overrightarrow{AE}$ *f)* $\overrightarrow{HG} \wedge \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DA}$.

♦ Exercice 3.c p. 49

On a : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2.\|\vec{v}\|^2 \sin^2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ et $|\vec{u}\ \vec{v}|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \cos^2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$;

donc : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + |\vec{u}.\vec{v}|^2 = \|\vec{u}\|^2\ \|\vec{v}\|^2$.

♦ Exercice 3.d p. 49

a) $-\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ *b)* $-2\vec{i} - 14\vec{j} - 3\vec{k}$ *c)* $-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ *d)* $-2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

♦ Exercice 3.e p. 49

a) (P) : $2x - 5y - z - 6 = 0$ *b)* (P) : $3x + 4y - 5z + 20 = 0$.

♦ Exercice 3.f p. 49

1. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{\sqrt{467}}{2}$ 2. $\mathcal{V} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AO}| = 6$.

Exercices d'apprentissage

BARYCENTRES

♦ Exercice 1 p. 50

On a : A' = bar {(B,1), (C,1), (D,1)} ; B' = bar {(C,1), (D,1), (A,1)} ;
C' = bar {(D,1), (A,1), (B,1)} ; D' = bar {A,1), (B,1), (C,1)}.

1. bar {(A',1), (B',1), (C',1), (D',1)} = bar {(A,3), (B,3), (C,3), (D,3)}
= bar {(A,1), (B,1), (C,1), (D,1)}.

2. Si ABCD et A'B'C'D' ont le même centre de gravité G, alors :
$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GD}=\vec{0}$ **(1)** et $\vec{GA'}+\vec{GB'}+\vec{GC'}+\vec{GD'}=\vec{0}$ **(2)**.

(2) − (1) $\Rightarrow \vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{CC'}+\vec{DD'}=\vec{0}$.

Réciproquement, supposons que : $\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{CC'}+\vec{DD'}=\vec{0}$ **(3)**.

Soit G le centre de gravité de ABCD : $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GD}=\vec{0}$.

On a : **(3)** $\Rightarrow \vec{GA'}-\vec{GA}+\vec{GB'}-\vec{GB}+\vec{GC'}-\vec{GC}+\vec{GD'}-\vec{GD}=\vec{0}$
$\Rightarrow \vec{GA'}+\vec{GB'}+\vec{GC'}+\vec{GD'}=\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GD}=\vec{0}$;

donc, G est le centre de gravité de A'B'C'D'.

♦ Exercice 2 p. 50

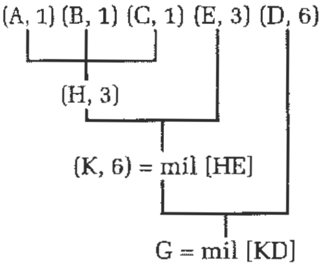
On a : $A_1=\mathcal{A}(BAM)=\frac{1}{2}AH\times MB$ et $A_2=\mathcal{A}(CAM)=\frac{1}{2}AH\times MC$.

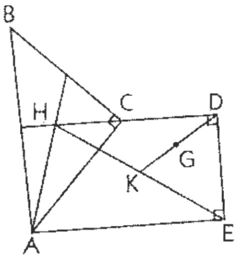
Donc : $A_1\times MC = A_2\times MB$.

$\vec{MC}$ et $\vec{MB}$ étant de sens opposé, $A_2\vec{MB}+A_1\vec{MC}=\vec{0}$.

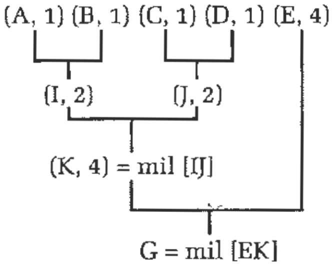
Donc : M = bar {(B, A_2), (C, A_1)} = bar {(B, aire (CAM)), (C, aire (BAM))}.

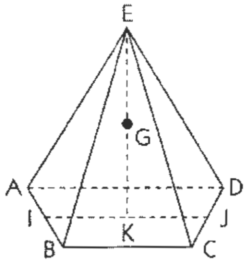
♦ Exercice 3 p. 50





♦ Exercice 4. p. 50

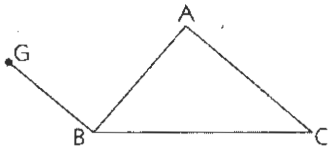




Les points I, J, K et G sont les milieux respectifs de [AB], [CD], [IJ] et [EK].

♦ Exercice 5 p. 50

1. Voir figure ci-contre.
2. On trouve : G = bar {(A,2), (B,3), (C,− 2)}.
3. $\vec{MG}=\frac{2}{3}\vec{MA}+\vec{MB}-\frac{2}{3}\vec{MC}$.



♦ Exercice 6 p. 50

• Soit M un point du segment [AB].

Alors, il existe $t\in[0\,;1]$, tel que : $\vec{AM}=t\,\vec{AB}$.

Donc : $(1-t)\vec{MA}+t\vec{MB}=\vec{0}$; ou : M = bar {(A,$1-t$), (B, t)}, avec $t\geq 0$ et $1-t\geq 0$.

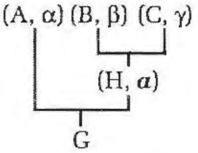
• Réciproquement, soit : G = bar {(A,a), (B,b)}, avec $a\geq 0$ et $b\geq 0$.

Alors : $\vec{AG}=\frac{b}{a+b}\vec{AB}$, avec $0\leq\frac{b}{a+b}\leq 1$; donc : G ∈ [AB].

♦ Exercice 7 p. 50

On a : $\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}+\gamma\vec{GC}=\vec{0}$.

1. Si $\beta+\gamma=0$, alors : $\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}-\beta\vec{GC}=\vec{0}$; ou : $\alpha\vec{AG}=\beta\vec{CB}$.
Donc, G appartient à la droite parallèle à (BC) passant par A.

2. 

Le point H décrit la droite (BC) et $\overrightarrow{AG} = \frac{a}{\alpha + a}\overrightarrow{AH}$;

donc, G est l'image de H par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{a}{\alpha + a}$.

Ainsi, G décrit la droite (B'C'), image de (BC) par h. On a : (B'C') // (BC).

♦ Exercice 8 p. 50

On trouve : G $(-\frac{7}{3} ; \frac{7}{3} ; 0)$.

♦ Exercice 9 p. 50

1. I = bar {(A,2), (B,1)} ; J = bar {(A,1), (B,2)} ; K = bar {(C,2), (D,1)} ; L = bar {(C,1), (D,2)}.

2. M = bar {(A,1), (D,1)} ; N = bar {(I,1), (L,1)} ; O = bar {(J,1), (K,1)} ; P = bar {(B,1), (C,1)}.
Donc : O = bar {(J,3), (K,3)} = bar {(A,1), (B,2), (C,2), (D,1)} = bar {(M,2), (P,4)} et O ∈ (MP).
Par suite, les points M, N, O et P sont alignés.

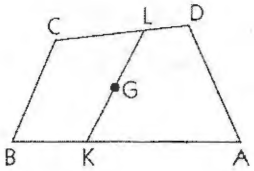
♦ Exercice 10 p. 50

On a : G = bar {(A,1), (B,2), (C,1), (D,2)} ;
K = bar {(A,1), (B,2)} ;
L = bar {(C,1), (D,2)}.

1. Voir figure ci-contre.

2. G = bar {(K,3), (L,3)} = mil [KL].

3. Voir figure ci-contre.



♦ Exercice 11 p. 50

1. I = bar{(A,1), (D,1)} ; J = bar{(B,1), (C,1)} ; K = bar{(A,2), (B,1)} ; L = bar{(C,1), (D,2)}.
I = bar{(A,2), (D,2)} et J = bar{(B,1), (C,1)} ; donc : G = bar{(I,4), (J,2)}.
K = bar{(A,2), (B,1)} et L = bar{(C,1), (D,2)} ; donc : G = bar{(K,3), (L,3)}.

2. Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en G ; donc, les points I, J, K et L sont coplanaires.

♦ Exercice 12 p. 50

1. Soit H = bar {(A,1), (C,2)}. On a : G = bar{(H,3), (B,2)} ; donc : H ∈ (AC) ∩ (BG).

Par suite : H = B' et $2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GB'} = \vec{0}$ **(1)**

Soit K = bar{(A,1), (B,2)}. On a : G = bar{(K,3), (C,2)} ; donc : K ∈ (AB) ∩ (CG).

Par suite : K = C' et $2\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GC'} = \vec{0}$ **(2)**

2. **(1) – (2)** ⇒ $2\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{C'B'} = \vec{0}$; donc : (BC) // (B'C').

♦ Exercice 13 p. 50

1. On a : A' = bar {(B,2), (C, – 3)} et B' = bar {(C, – 3), (A,1)}.
Donc : $\overrightarrow{AA'} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$;
$2\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'}$.
Par suite : (AA') // (BB').

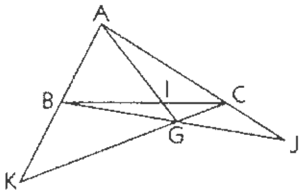
2. On a : C' = bar {A,a), (B,b)} ; donc : $\overrightarrow{CC'} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
(AA') // (CC') ⇔ $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ colinéaires ⇔ $b = 2a$.

♦ Exercice 14 p. 50

On a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ **(1)** et $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = \vec{0}$ **(2)**.

(1) $\Leftrightarrow (\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HG}) + (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HG}) + (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HG}) = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HD} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{DB}$. Donc : (GH) // (BD).

♦ Exercice 15 p. 50



1. Voir figure ci-contre.

2. On a : $I = \text{bar}\,\{(B,2),\ (C,3)\}$;
$J = \text{bar}\,\{(A,-1),\ (C,3)\}$;
$K = \text{bar}\,\{(A,-1),\ (B,2)\}$.

Posons : $G = \text{bar}\,\{(A,-1),\ (B,2),\ (C,3)\}$.

On a : $G = \text{bar}\,\{(I,5),\ (A,-1)\} \Rightarrow G \in (AI)$;
$G = \text{bar}\,\{(J,2),\ (B,2)\} \Rightarrow G \in (BJ)$;
$G = \text{bar}\,\{(K,1),\ (C,3)\} \Rightarrow G \in (CK)$.

Donc : (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en G.

♦ Exercice 16 p. 51

1. On a : $\overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

2. Soit $A' = \text{bar}\,\{(B,4),\ (C,5)\}$. On a : $G = \text{bar}\{(A,3),\ (A',9)\}$; donc : $A' \in (BC) \cap (AG)$.

Par suite : $A' = I$ et $4\,\overrightarrow{IB} + 5\,\overrightarrow{IC} = \vec{0}$; ou : $\overrightarrow{IB} = -\dfrac{5}{4}\,\overrightarrow{IC}$.

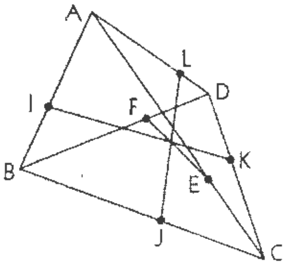
Soit : $B' = \text{bar}\,\{(A,3),\ (C,5)\}$. On a : $G = \text{bar}\,\{(B,4),\ (B',8)\}$; donc : $B' \in (AC) \cap (BG)$.

Par suite : $B' = J$ et $3\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JC} = \vec{0}$; ou : $\overrightarrow{JC} = -\dfrac{3}{5}\,\overrightarrow{JA}$.

Soit : $C' = \text{bar}\,\{(A,3),\ (B,4)\}$. On a : $G = \text{bar}\,\{(C,5),\ (C',7)\}$; donc : $C' \in (AB) \cap (CG)$.

Par suite : $C' = K$ et $3\,\overrightarrow{KA} + 4\,\overrightarrow{KB} = \vec{0}$; ou : $\overrightarrow{KA} = -\dfrac{4}{3}\,\overrightarrow{KB}$.

♦ Exercice 17 p. 50



1. $E = \text{bar}\,\{(A,1),\ (C,2)\}$; $F = \text{bar}\,\{(B,1),\ (D,2)\}$;
$I = \text{bar}\,\{(A,2),\ (B,3)\}$; $J = \text{bar}\,\{(B,3),\ (C,4)\}$;
$K = \text{bar}\,\{(C,2),\ (D,3)\}$; $L = \text{bar}\,\{(A,1),\ (D,3)\}$.

2. Posons : $G = \text{bar}\,\{(A,2),\ (B,3)\ (C,4),\ (D,6)\}$.
$E = \text{bar}\{(A,2),\ (C,4)\}$ et $F = \text{bar}\{(B,3),\ (D,6)\}$; donc : $G = \text{bar}\{(E,6),\ (F,9)\}$.
$I = \text{bar}\{(A,2),\ (B,3)\}$ et $K = \text{bar}\{(C,4),\ (D,6)\}$; donc : $G = \text{bar}\{(I,5),\ (K,10)\}$.
$L = \text{bar}\{(A,2),\ (D,6)\}$ et $J = \text{bar}\{(B,3),\ (C,4)\}$; donc : $G = \text{bar}\{(L,8),\ (J,7)\}$.

Par suite, les droites (EF), (IK) et (JL) sont concourantes en G.

♦ Exercice 18 p. 51

On a : $E = \text{bar}\,\{(B,1),\ (C,1),\ (D,1)\}$; $F = \text{bar}\,\{(C,1),\ (D,1),\ (A,1)\}$;
$G = \text{bar}\,\{(D,1),\ (A,1),\ (B,1)\}$; $H = \text{bar}\,\{(A,1),\ (B,1),\ (C,1)\}$.

Posons : $K = \text{bar}\,\{(A,1),\ (B,1),\ (C,1),\ (D,1)\}$.

On a : $K = \text{bar}\,\{(A,1),\ (E,3)\} \Rightarrow K \in (AE)$; $K = \text{bar}\,\{(B,1),\ (F,3)\} \Rightarrow K \in (BF)$;
$K = \text{bar}\,\{(C,1),\ (G,3)\} \Rightarrow K \in (CG)$; $K = \text{bar}\,\{(D,1),\ (H,3)\} \Rightarrow K \in (DH)$.

Donc, les droites (AE), (BF), (CG) et (DH) sont concourantes en G.

♦ Exercice 19 p. 51

On a : $I = \text{bar}\,\{A,1),\ (B,1)\}$; $J = \text{bar}\,\{(B,1),\ (C,1)\}$; $K = \text{bar}\,\{(C,1),\ (D,1)\}$; $L = \text{bar}\,\{(A,1),\ (D,1)\}$;
$M = \text{bar}\,\{(A,1),\ (C,1)\}$; $N = \text{bar}\,\{(B,1),\ (D,1)\}$; $G_1 = \text{bar}\,\{(B,1),\ (C,1),\ (D,1)\}$; $G_2 = \text{bar}\,\{(C,1),\ (D,1),\ (A,1)\}$;
$G_3 = \text{bar}\,\{(A,1),\ (B,1),\ (D,1)\}$; $G_4 = \text{bar}\,\{(A,1),\ (B,1),\ (C,1)\}$.

Posons : $G = \text{bar}\,\{(A,1),\ (B,1),\ (C,1),\ (D,1)\}$

On a : $G = \text{bar}\,\{(I,2),\ (K,2)\} \Rightarrow G \in (IK)$; $G = \text{bar}\,\{(J,2),\ (L,2)\} \Rightarrow G \in (JL)$;
$G = \text{bar}\,\{(M,2),\ (N,2)\} \Rightarrow G \in (MN)$; $G = \text{bar}\,\{(A,1),\ (G_1,3)\} \Rightarrow G \in (AG_1)$;
$G = \text{bar}\,\{(B,1),\ (G_2,3)\} \Rightarrow G \in (BG_2)$; $G = \text{bar}\,\{(C,1),\ (G_3,3)\} \Rightarrow G \in (CG_3)$;
$G = \text{bar}\,\{(D,1),\ (G_4,3)\} \Rightarrow G \in (DG_4)$.

Par suite, les sept droites (AG_1), (BG_2), (CG_3), (DG_4), (IK), (JL) et (MN) sont concourantes en G.

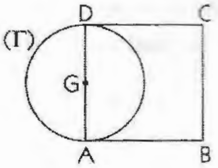
LIGNES DE NIVEAU

♦ Exercice 20 p. 51

1. $A = \text{bar}\{(B,1), (C,-1), (D,1)\}$.

2. On a : $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = 0$. L'ensemble des points M est le cercle de diamètre [AC].

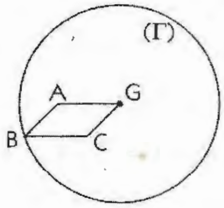
♦ Exercice 21 p. 51



1. On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

2. $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MG = \frac{1}{2}AB$. (Γ) est le cercle de centre G et de rayon $\frac{AB}{2}$.

♦ Exercice 22 p. 51

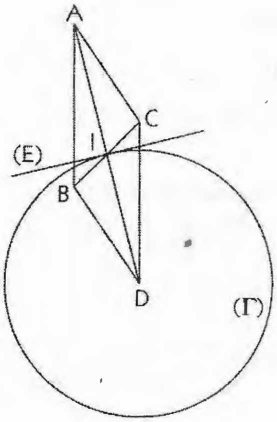


1. On a : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC}$.

2. *a)* On a bien : $B \in (\Gamma)$.

b) $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MG = BG$. (Γ) est le cercle de centre G et de rayon BG.

♦ Exercice 23 p. 51



1. On a : $2AI^2 + \frac{BC^2}{2} = AB^2 + AC^2$; donc : $AI = \sqrt{33}$.

2. $M \in (E) \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = 58$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.(2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} = 0$.

(E) est la perpendiculaire à (IA) passant par I.

3. *a)* $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$; donc, ABDC est un parallélogramme.

b) $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 - MC^2 = 25$

$\Leftrightarrow -MD^2 + DA^2 - DB^2 - DC^2 = 25$

$\Leftrightarrow MD = AI$.

(Γ) est le cercle de centre D et de rayon AI.

♦ Exercice 24 p. 51

$\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ sont deux angles inscrits dans $(\mathscr{C})$ interceptant le même arc ;
donc : $\text{Mes}\,\widehat{BAC} = \text{Mes}\,\widehat{ABC}$.

$\widehat{AOB}$ étant l'angle au centre associé, on a : $\text{Mes}\,\widehat{BAC} = \text{Mes}\,\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\text{Mes}\,\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$.
Donc ABC est un triangle équilatéral.

♦ Exercice 25 p. 51

$\widehat{(\overrightarrow{MA}, \vec{u})} = \widehat{(\overrightarrow{MB}, \vec{v})} \Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$. Posons : $\hat{\alpha} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

On utilise les propriétés **1** et **2** de la page **42** pour conclure.

- Si $\alpha = 0$, alors : (E) = (AB) – [AB] ;
- si $\alpha = \pi$, alors : (E) =]AB[;
- si $\alpha \in]-\pi\,;0[\, \cup\,]0\,;\pi[$, on désigne par O le point de la médiatrice de [AB] tel que $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = 2\,\hat{\alpha}$, et $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O passant par A et B.

(E) est l'un des deux arcs du cercle $(\mathscr{C})$ de corde [AB], privé des points A et B.

PRODUIT VECTORIEL

♦ Exercice 28 p. 51

a) c) et *d)* sont des bases directes.

b) $(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{HD})$ n'est pas une base. En remplaçant $\overrightarrow{HD}$ par $\overrightarrow{CD}$, on obtient une base directe.

♦ Exercice 29 p. 51

a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD}$ *b)* $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA}$ *c)* $\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

♦ Exercice 30 p. 51

$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\|\overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{GC}\| = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$; $\|\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{BC}\| = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

♦ Exercice 31 p. 51

$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = a^2$; $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\| = a^2$; $\|\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{BC}\| = a^2$; $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AI}\| = \dfrac{a^2}{2}$.

♦ Exercice 32 p. 51

a) $\vec{w}$ *b)* $3\,\vec{w}$ *c)* $-5\,\vec{w}$ *d)* $-15\,\vec{w}$.

♦ Exercice 33 p. 51

a) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe *b)* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée indirecte.

♦ Exercice 34 p. 52

a) $\vec{w}\,(\frac{8}{9} ; \frac{1}{9} ; \frac{4}{9})$ *b)* $\vec{w}(\frac{1}{\sqrt{6}} ; -\frac{1}{\sqrt{6}} ; -\frac{2}{\sqrt{6}})$.

♦ Exercice 35 p. 52

a) $(\mathcal{P}) : x + y + z - 1 = 0$ *b)* $(\mathcal{P}') : 7x + 9y + 22z - 23 = 0$.

♦ Exercice 36 p. 52

a) $\vec{u}(-1, -5, -7)$ *b)* $\vec{u}'(0, 2, 2)$.

♦ Exercice 37 p. 52

1. On a : $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AC} \wedge (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$;
$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = -(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \wedge \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2. $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \times AC \times \sin\widehat{BAC}$ **(1)**
$\|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\| = AC \times BC \times \sin\widehat{ACB}$ **(2)**
$\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\| = BC \times AB \times \sin\widehat{ABC}$ **(3)**

On a : (1) = (2) $\Leftrightarrow \dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{ACB}}$ et (1) = (3) $\Leftrightarrow \dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{AC}{\sin\widehat{ABC}}$.

Donc : $\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{CA}{\sin\widehat{CBA}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{ACB}}$.

♦ Exercice 38 p. 52

Soit (E) l'ensemble cherché.
a) (E) est la droite (AB)
b) (E) est la droite passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.
c) (E) est la droite passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

♦ Exercice 39 p. 52

On a : $\overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{MJ} = \vec{0}$. Donc, l'ensemble cherché est la droite (IJ).

♦ Exercice 40 p. 52

- Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, alors : il existe deux nombres réels α et β tels que : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Donc : $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{v}).(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{u} + \beta(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{v} = 0$.

- Réciproquement, si $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = 0$, alors : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{w}$;

donc, $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Par suite, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Application

a) A, B, C et D coplanaires *b)* A, B, C et D non coplanaires *c)* A, B, C et D coplanaires.

♦ Exercice 41 p. 52

1. $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{15}{2}$.

2. ABCD est un parallélogramme. $\mathcal{A}(ABCD) = 2\mathcal{A}(ABC) = 15$.

♦ Exercice 42 p. 52

1. *a)* $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ *b)* $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 2\mathcal{A}(ABC)$.

2. Si A, B et C sont alignés, alors : $\vec{u} = \vec{0}$.

♦ Exercice 43 p. 52

$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AI} = \vec{0}$. L'ensemble cherché est la droite (AI).

♦ Exercice 44 p. 52

$\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = 24 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}\| = 24 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| \times \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = 24$;

c'est-à-dire : $\begin{cases} AB \times MH = 24 \\ \text{H projeté orthogonal de M sur (AB)} \end{cases} \Leftrightarrow MH = 4 \Leftrightarrow d(M,(AB)) = 4$.

L'ensemble cherché est un cylindre de révolution : - d'axe (AB) ;
- de cercle directeur le cercle de centre A et de rayon 4 ;
- de hauteur AB = 6.

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 45 p. 52

On a : I = bar {(B,1), (D,1), (E,1)} ; G = bar {(C,1), (D,– 1), (H,1)}.

Donc : $3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

Par suite : $3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AG}$. On en déduit que : I ∈ (AG) ∩ (BDE).

♦ Exercice 46 p. 52

1. D'après le théorème d'Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$; donc : $\cos\widehat{BAC} = \frac{7}{9}$.

2. *a)* $\cos\widehat{BAB'} = \frac{B'A}{AB} = \frac{7}{9} \Rightarrow B'A = \frac{7}{9}AB = \frac{7}{3}$ et $B'C = AC - B'A = \frac{2}{3}$; donc : $\frac{B'A}{B'C} = \frac{7}{2}$.

b) $\frac{B'A}{B'C} = \frac{7}{2} \Rightarrow 2\overrightarrow{B'A} + 7\overrightarrow{B'C} = \vec{0}$; donc : B' = bar{(A,2), (C,7)}.

3. On a : C' = bar{(A,2), (B,7)}. Posons : G = bar{A,2), (B,7), (C,7)}.
On a : G = bar{(C',9), (C,7)} ⇒ G ∈ (CC') ; G = bar{B',9), (B,7)} ⇒ G ∈ (BB').
Donc : G = H ; par suite : H = bar{(A,2), (B,7), (C,7)}.

♦ Exercice 47 p. 53

Deux angles inscrits dans un cercle ($\mathcal{C}$) qui interceptent deux arcs de même longueur ont la même mesure.

Donc : Mes $\widehat{ABB'}$ = Mes $\widehat{CBB'}$ ⇒ (BB') bissectrice de $\widehat{CBA}$.

De même : (CC') est bissectrice de $\widehat{ACB}$ et (AA') est bissectrice de $\widehat{BAC}$.
Or, le centre du cercle (Γ) inscrit dans ABC est le point d'intersection des bissectrices du triangle ; donc, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

♦ Exercice 48 p. 53

1. Soit ($\mathcal{C}_1$), ($\mathcal{C}_2$) et ($\mathcal{C}_3$) les cercles respectivement circonscrits à AQR, BRP et CPQ.
Désignons par I, le point d'intersection autre que P de ($\mathcal{C}_2$) et ($\mathcal{C}_3$).

On a : $2(\widehat{\overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{IP}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$; $2(\widehat{\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IR}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$; $2(\widehat{\overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{IR}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})$.

Or : A, Q et C sont alignés ; de même : A, R et B sont alignés.

Donc : $2\widehat{(\overrightarrow{IQ}, \overrightarrow{IR})} = 2\widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})} = 2\widehat{(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AR})}$ et $I \in (\mathscr{C}_1)$.

Ainsi, les cercles $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_3)$ passent par un même point I.

2. A, B, C et I cocycliques $\Leftrightarrow 2\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI})} = 2\widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI})}$.

Or : $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI})} = \widehat{(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BI})}$, car B, P et C sont alignés

$= \widehat{(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RI})}$, car B, I, P et R sont cocycliques ;

$\widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI})} = \widehat{(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AI})}$, car A, C et Q sont alignés

$= \widehat{(\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RI})}$, car A, I, Q et R sont cocycliques.

Donc : A, B, C et I cocycliques $\Leftrightarrow 2\widehat{(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RI})} = 2\widehat{(\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RI})}$

$\Leftrightarrow 2\widehat{(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ})} = \hat{0}$

$\Leftrightarrow$ P, Q et R sont alignés.

♦ Exercice 49 p. 53

1. Posons : $G = \text{bar}\{(B,2), (C,-1), (D,1)\}$.

On a : $2\overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$; donc, G est le milieu de [AB].

2. *a)* $G_k = \text{bar}\{(A,k), (B,2), (C,k-1), (D,1-2k)\}$

$= \text{bar}\{(G,2), (A,k), (C,k), (D,-2k)\}$

$= \text{bar}\{(G,2), (O,2k), (D,-2k)\}$.

Donc : $2\overrightarrow{GG_k} = 2k\overrightarrow{GO} - 2k\overrightarrow{GD} = 2k\overrightarrow{DO}$; ou : $\overrightarrow{GG_k} = -k\overrightarrow{OD}$.

Par suite : (E_1) est la droite parallèle à (BD) passant par G.

b) $G_k \in (AC) \Leftrightarrow G_k \in (E_1) \cap (AC) \Leftrightarrow \overrightarrow{GG_k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} = -k\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$.

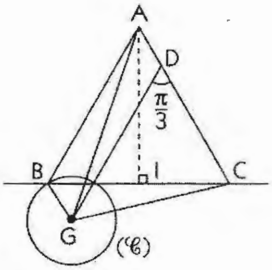
3. On a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DB}$; $2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MG}$.

a) $2\overrightarrow{MG} = \lambda\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow M \in \mathscr{D}(G, \overrightarrow{DB}) \Leftrightarrow M \in (E_1) = (E_2)$.

b) $\|2\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{DB}\| \Leftrightarrow MG = \frac{BD}{2} = OB \Leftrightarrow M \in \mathscr{C}(G, OB)$.

(E_3) est le cercle de centre G et de rayon OB.

♦ Exercice 50 p. 53



1. L'ensemble des points cherchés est la droite (BC).

2. *a)* $G = \text{bar}\{(A,-1), (B,4), (C,1)\}$.

On a : $4\overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; donc : $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Soit D le point tel que : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$; ABGD est un parallélogramme.

Donc : Mes $\widehat{GDC}$ = Mes $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$ et Mes $\widehat{ABG}$ = Mes $\widehat{ADG} = \frac{2\pi}{3}$.

b) On a : $-MA^2 + 4MB^2 + MC^2 = 4MG^2 - GA^2 + 4GB^2 + GC^2$

Or : $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Rightarrow BG = \frac{a}{4} \Rightarrow BG^2 = \frac{a^2}{16}$;

$AG^2 = AB^2 + BG^2 - AB \times BG \times \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{19a^2}{16}$ (Al-Kashi dans ABG).

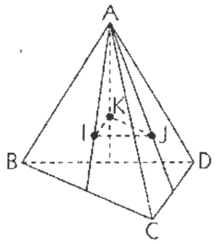
Donc : $-MA^2 + 4MB^2 + MC^2 = 4MG^2 + \frac{a^2}{4}$;

$-MA^2 + 4MB^2 + MC^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow MG = \frac{a}{4}$.

L'ensemble cherché est le cercle $(\mathscr{C})$ de centre G et de rayon $\frac{a}{4}$ passant par B.

♦ Exercice 51 p. 53

1. $I = \text{bar}\{(A,1), (B,1), (C,1)\}$;
$J = \text{bar}\{(A,1), (C,1), (D,1)\}$;
$K = \text{bar}\{(A,1), (D,1), (B,1)\}$.



2. On a : $3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ **(1)** ;

$3\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$ **(2)** ;

$3\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}$ **(3)**.

(2) – (1) $\Rightarrow$ $3\,\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BD}$ $\Rightarrow$ (IJ) // (BD).

(IJ) est parallèle à une droite de (BCD) ; donc (IJ) est parallèle à (BCD).

(3) – (2) $\Rightarrow$ $3\,\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{BC}$ $\Rightarrow$ (KJ) // (BC).

(KJ) est parallèle à une droite de (BCD) ; donc (KJ) est parallèle à (BCD).

(IJ) et (KJ) sont deux droites sécantes du plan (IJK) qui sont parallèles au plan (BCD) ; donc, le plan (IJK) est parallèle au plan (BCD).

3. On a : G = bar{(B,1), (C,1), (D,1)} = bar {(B,2), (C,2), (D,2)} ;

O = bar{(A,1), (B,1), (C,1), (D,1)} = bar{(A,2), B,2), (C,2), (D,2)} ;

H = bar{(I,1), (J,1), (K,1)}.

On a : H = bar{(A,3), (G,6)} $\Rightarrow$ G $\in$ (AH) et $9\overrightarrow{GH} = 3\overrightarrow{GA}$;

H = bar{(A,1), (O,8)} $\Rightarrow$ O $\in$ (AH) et $9\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}$.

On en déduit que : A, H, O et G sont alignés et $\overrightarrow{GH} = -\frac{4}{9}\overrightarrow{AO}$.

4. H = bar{(A,3), (B,2), (C,2), (D,2)}.

◆ **Exercice 52 p. 53**

1. Posons : $\vec{u} = \overrightarrow{B'A} \wedge \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{C'B} \wedge \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{A'C} \wedge \overrightarrow{AC'}$.

On a : $\vec{u} = \overrightarrow{B'A} \wedge \overrightarrow{BA'} + (\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AB}) \wedge (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB'}) + \overrightarrow{A'C} \wedge \overrightarrow{AC'}$

$= \overrightarrow{B'A} \wedge \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{C'A} \wedge \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C'A} \wedge \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{A'C} \wedge \overrightarrow{AC'}$

$= \overrightarrow{C'A} \wedge (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{A'C}) + \overrightarrow{AB'} \wedge (\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BA})$

$= \overrightarrow{C'A} \wedge \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{C'A} \wedge \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AB'} \wedge \overrightarrow{A'A}$

$= \overrightarrow{C'B'} \wedge \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{C'A} \wedge \overrightarrow{AB'}$

$= \overrightarrow{C'B'} \wedge (\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'A}) + \overrightarrow{C'A} \wedge \overrightarrow{AB'}$

$= \overrightarrow{C'B'} \wedge \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{C'A} \wedge \overrightarrow{AB'} = (\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'A}) \wedge \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{B'A} \wedge \overrightarrow{AB'} = \vec{0}$.

2. Si A, B et C sont alignés ainsi que A', B' et C', alors : $\overrightarrow{B'A} \wedge \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{C'B} \wedge \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{A'C} \wedge \overrightarrow{AC'} = \vec{0}$.

Donc : $\overrightarrow{B'A} \wedge \overrightarrow{BA'} = \vec{0}$. On en déduit que : (AB') // (A'B).

◆ **Exercice 54 p. 53**

G = bar{(A,α), (B,β), (C,γ)} ; G_1 = bar{(A,$-\alpha$), (B,β), (C,γ)} ;

G_2 = bar{(A,α), (B,$-\beta$), (C,γ)} ; G_3 = bar{(A,α), (B,β), (C,$-\gamma$)}.

1. G = bar {(A,2α), (G_1,$-\alpha + \beta + \gamma$)} $\Rightarrow$ G $\in$ (AG_1) ;

G = bar {(G_2,$\alpha - \beta + \gamma$), (B,2β)} $\Rightarrow$ G $\in$ (BG_2) ;

G = bar {G_3,$\alpha + \beta - \gamma$), (C,2γ)} $\Rightarrow$ G $\in$ (CG_3).

Par suite, (AG_1), (BG_2) et CG_3) sont concourantes en G.

2. G_3 = bar{(A,2α), (G_2,$-\alpha - \beta + \gamma$)} $\Rightarrow$ A $\in$ ($G_2\,G_3$) ;

G_2 = bar{(G_1,$-\alpha + \beta + \gamma$), (C,2γ)} $\Rightarrow$ C $\in$ ($G_1\,G_2$) ;

G_1 = bar{(B,2β), (G_3,$\alpha - \beta - \gamma$)} $\Rightarrow$ B $\in$ ($G_1\,G_3$).

◆ **Exercice 55 p. 54**

1. *a)* On a : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = OA \times \sin\widehat{OAB}$; or : $\sin\widehat{OAB} = \cos\widehat{BOB_1} = \frac{OB_1}{OB}$.

Donc : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = OA \times OB_1$.

De plus : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont de même sens ; donc : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \lambda\overrightarrow{OB'}$, ($\lambda > 0$).

On en déduit que : $OA \times OB_1 = \lambda OB' \Rightarrow \lambda = \frac{OA \times OB_1}{OB'} = OA$.

Par suite : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \text{OA} \times \overrightarrow{\text{OB}'}$.

b) On a : $\overrightarrow{\text{OC}} = k\overrightarrow{\text{OB}} \Rightarrow \overrightarrow{\text{OC}_1} = k\overrightarrow{\text{OB}_1} \Rightarrow \overrightarrow{\text{OC}'} = k\overrightarrow{\text{OB}'}$.

Donc : $\vec{u} \wedge (k\vec{v}) = \overrightarrow{\text{OA}} \wedge \overrightarrow{\text{OC}} = \text{OA} \times \overrightarrow{\text{OC}'} = \text{OA} \times k\overrightarrow{\text{OB}'} = k(\text{OA} \times \overrightarrow{\text{OB}'}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

2. On a : $\overrightarrow{\text{OE}} = \overrightarrow{\text{OB}} + \overrightarrow{\text{OD}} \Rightarrow \overrightarrow{\text{OE}_1} = \overrightarrow{\text{OB}_1} + \overrightarrow{\text{OD}_1} \Rightarrow \overrightarrow{\text{OE}'} = \overrightarrow{\text{OB}'} + \overrightarrow{\text{OD}'}$.

Donc : $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{\text{OA}} \wedge (\overrightarrow{\text{OB}} + \overrightarrow{\text{OD}}) = \overrightarrow{\text{OA}} \wedge \overrightarrow{\text{OE}} = \text{OA} \times \overrightarrow{\text{OE}'}$

$$= \text{OA} \times (\overrightarrow{\text{OB}'} + \overrightarrow{\text{OD}'}) = \text{OA} \times \overrightarrow{\text{OB}'} + \text{OA} \times \overrightarrow{\text{OD}'}$$

$$= \overrightarrow{\text{OA}} \wedge \overrightarrow{\text{OB}} + \overrightarrow{\text{OA}} \wedge \overrightarrow{\text{OD}} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}.$$

♦ Exercice 56 p. 54

1. $\overrightarrow{\text{MA}} \wedge \overrightarrow{\text{MB}} - \overrightarrow{\text{MC}} \wedge \overrightarrow{\text{MD}} = (\overrightarrow{\text{MO}} + \overrightarrow{\text{OA}}) \wedge (\overrightarrow{\text{MO}} + \overrightarrow{\text{OB}}) - (\overrightarrow{\text{MO}} + \overrightarrow{\text{OC}}) \wedge (\overrightarrow{\text{MO}} + \overrightarrow{\text{OD}})$

$$= \overrightarrow{\text{MO}} \wedge \overrightarrow{\text{OB}} - \overrightarrow{\text{MO}} \wedge \overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{MO}} \wedge \overrightarrow{\text{OD}} + \overrightarrow{\text{MO}} \wedge \overrightarrow{\text{OC}}$$

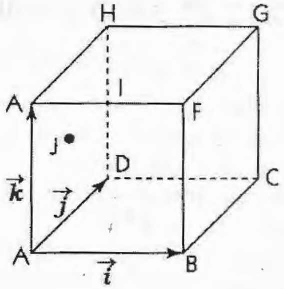
$$= \overrightarrow{\text{MO}} \wedge \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{MO}} \wedge \overrightarrow{\text{DC}}$$

$$= \overrightarrow{\text{MO}} \wedge (\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{DC}})$$

2. On doit avoir : $\overrightarrow{\text{MO}} \wedge (\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{DC}}) = \vec{0}$; c'est-à-dire : $\overrightarrow{\text{OM}}$ et $\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{DC}}$ colinéaires.

L'ensemble des points cherchés est la droite $(\mathcal{D})$ de repère $(\text{O}, \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{DC}})$.

♦ Exercice 57 p. 54



1. $\overrightarrow{\text{IG}} = \overrightarrow{\text{IF}} + \overrightarrow{\text{FG}} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$;

$\overrightarrow{\text{IA}} = \overrightarrow{\text{IE}} + \overrightarrow{\text{EA}} = -\frac{1}{2}\vec{i} - \vec{k}$;

$\overrightarrow{\text{BJ}} = \overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{AJ}} = -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$.

On vérifie que :

$\overrightarrow{\text{IG}} \wedge \overrightarrow{\text{IA}} = \overrightarrow{\text{BJ}}$. Donc : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{\text{IG}} \wedge \overrightarrow{\text{IA}}\| = \frac{1}{2}\text{BJ} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

2. $\mathcal{V} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{\text{IG}} \wedge \overrightarrow{\text{IA}}).\overrightarrow{\text{IB}}| = \frac{1}{6}|\overrightarrow{\text{BJ}}.\overrightarrow{\text{IB}}|$.

Or : $\overrightarrow{\text{IB}} = \overrightarrow{\text{IF}} + \overrightarrow{\text{FB}} = \frac{1}{2}\vec{i} - \vec{k}$; donc : $\overrightarrow{\text{BJ}}.\overrightarrow{\text{IB}} = -1$ et $\mathcal{V} = \frac{1}{6}$.

Déduction

$$\text{d(B, (IGA))} = \frac{|\overrightarrow{\text{BI}}.(\overrightarrow{\text{IG}} \wedge \overrightarrow{\text{IA}})|}{\|\overrightarrow{\text{IG}} \wedge \overrightarrow{\text{IA}}\|} = \frac{6\mathcal{V}}{2\mathcal{A}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

♦ Exercice 58 p. 54

Soit (Γ) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{\text{AM}} \wedge \overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{AC}}$.

On a : $\overrightarrow{\text{AM}} \wedge \overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{AC}} \Rightarrow \overrightarrow{\text{AM}} \perp \overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{AB}} \perp \overrightarrow{\text{AC}}$.

a) $(\Gamma) = \varnothing$.

b) (Γ) est le plan passant par A et perpendiculaire à (AC). Ce plan contient (AB).

3. Nombres complexes

(pages 55 à 80 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- Définir l'ensemble des nombres complexes et en dégager les règles de calcul.
- Mettre en valeur les aspects algébrique et géométrique d'un nombre complexe.
- Utiliser les nombres complexes pour étudier certaines configurations et transformations planes.

COMMENTAIRES

$\mathbb{C}$ est introduit comme extension de $\mathbb{R}$ dans laquelle des équations sans solution dans $\mathbb{R}$ ont des racines. La structure de corps de $\mathbb{C}$ sera indiquée après un bilan des propriétés de l'addition et de la multiplication.

Un nombre complexe non nul peut s'écrire sous différentes formes : algébrique, trigonométrique ou exponentielle.
Il faut savoir passer d'une forme à une autre et calculer avec ces nouveaux nombres en choisissant l'écriture la mieux adaptée.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Étude algébrique	
• Notion de nombre complexe : – définition et propriétés ; – représentation géométrique d'un nombre complexe.	• Représenter un vecteur ou un point connaissant son affixe.
• Opérations dans $\mathbb{C}$: – addition et multiplication dans $\mathbb{C}$; – soustraction et division dans $\mathbb{C}$;	• Effectuer des opérations et les interpréter géométriquement dans certains cas.
– produits remarquables ; – affixes de vecteurs ; – affixe du barycentre de n points pondérés.	• Interpréter géométriquement un module et un argument. • Déterminer l'affixe : – de la somme de deux vecteurs ; – du produit d'un vecteur par un nombre réel ; – du vecteur $\overrightarrow{MN}$, connaissant les affixes des points M et N. • Déterminer l'affixe du barycentre de n points pondérés dont on connaît les affixes respectives.
• Conjugué et module d'un nombre complexe : – conjugué d'un nombre complexe ; – module d'un nombre complexe.	• Déterminer le conjugué d'un nombre complexe. • Déterminer le module d'un nombre complexe.
Étude trigonomérique	
• Forme trigonométrique d'un nombre complexe : – argument d'un nombre complexe non nul ; – écriture trigonométrique ; – égalité de deux nombres complexes ; – arguments d'un produit et d'un quotient ; – formule de Moivre.	• Déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe.
• Notation exponentielle d'un nombre complexe : – définition et propriétés ; – formules d'Euler.	• Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe.
• Racines n-ièmes d'un nombre complexe.	• Déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe.
Utilisations des nombres complexes	
• Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$: – racines carrées d'un nombre complexe ; – équations du second degré.	• Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe. • Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.

savoirs	savoir-faire
• Trigonométrie et nombres complexes. • Géométrie et nombres complexes. – configurations du plan et nombres complexes ; – transformations et nombres complexes ; – lieux géométriques et nombres complexes.	• Utiliser les formules de Moivre et d'Euler pour transformer des expressions trigonométriques. • Caractériser des configurations planes à l'aide de nombres complexes. • Reconnaître une transformation plane dont on connaît l'expression complexe. • Déterminer l'expression complexe d'une transformation donnée. • Rechercher des lieux géométriques à l'aide de nombres complexes.

EXERCICES DU MANUEL

☐ Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 62

a) $-1+8i$ *b)* $4-3i$ *c)* $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ *d)* $6+8i$ *e)* $-5-12i$ *f)* $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

♦ Exercice 1.b p. 62

a) $-\frac{4}{25}-\frac{3}{25}i$ *b)* $-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i$ *c)* $-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$ *d)* $-i$.

♦ Exercice 1.c p. 62

a) $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$ *b)* $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$ *c)* $\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i$ *d)* $4-3i$.

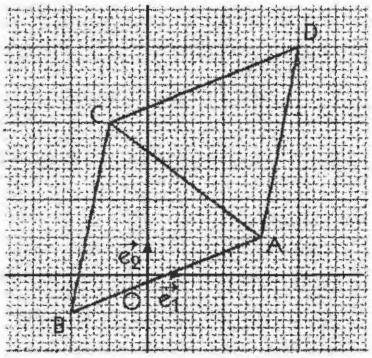
♦ Exercice 1.d p. 62

1.

Vecteurs	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$	$2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$
Affixes	$-5-2i$	$-4+3i$	$-9+i$	$2-13i$

2. On a : $z_G = \frac{4}{3}i$.

3. On a : $z_D = 4+6i$.



♦ Exercice 1.e p. 62

a) $5-i$ *b)* $3-2i$ *c)* $3-2i$ *d)* 9.

♦ Exercice 1.f p. 62

a) 2 *b)* 10 *c)* $\sqrt{\frac{5}{2}}$ *d)* 32.

♦ Exercice 2.a p. 67

a) $|z|=2$ et $\arg z \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *b)* $|z|=2\sqrt{3}$ et $\arg z \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

c) $|z|=2\sqrt{2}$ et $\arg z \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ *d)* $|z|=5$ et $\arg z \equiv \pi\ [2\pi]$.

♦ Exercice 2.b p. 67

a) $z=[4,0]$ *b)* $z=[\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}]$ *c)* $z=[1,-\frac{\pi}{4}]$ *d)* $z=[1,-\frac{5\pi}{6}]$ *e)* $z=[4,\pi]$ *f)* $z=[2,-\frac{5\pi}{6}]$.

♦ Exercice 2.c p. 67

a) $z_1=[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}]$ et $z_2=[2,\frac{\pi}{3}]$

b) $z_1 z_2 = 1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}) = [2\sqrt{2},\frac{7\pi}{12}]$.

c) $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

♦ Exercice 2.d p. 67

a) $z = [1\ ,\ -\alpha]$

b) $z = [1\ ,\ \frac{\pi}{2} + \alpha]$

c) Si $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $z = [\ \frac{1}{\cos\alpha}, \alpha]$; si $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right[$, $z = [-\frac{1}{\cos\alpha}, \alpha - \pi]$

d) $z = [1, 2\alpha]$.

♦ Exercice 2.f p. 67

1. $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z' = \sqrt{2}\ e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

2. $(\overline{z}z')^2 = 8\ e^{-i\frac{5\pi}{6}}$; $\frac{z^2}{z'} = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

♦ Exercice 2.g p. 67

1. $z_0 = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_1 = \sqrt{2}\ e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $z_2 = \sqrt{2}\ e^{-i\frac{5\pi}{6}}$; $z_3 = \sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2. $z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$; $z_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$.

♦ Exercice 3.a p. 75

a) $z_1 = 4 - i$ et $z_2 = -4 + i$

b) $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -1 - i$

c) $z_1 = 2\sqrt{3} + i$ et $z_2 = -2\sqrt{3} - i$

d) $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

♦ Exercice 3.b p. 75

a) $\delta = (3 + 2i)^2$; $z_1 = -1 + 2\ i$ et $z_2 = 1 - i$.

b) $\delta = (6 - 5i)^2$; $z_1 = -\frac{1}{5}(2 + i)$ et $z_2 = 1 + 3i$.

♦ Exercice 3.c p. 75

(E) : $z^3 + (1 - i)z^2 + (4 - i)z - 4i = 0$.

1. $i^3 + (1 - i)i^2 + (4 - i)i - 4i = -i - 1 + i + 4i + 1 - 4i = 0$; donc, i est solution de (E).

2. On a : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (1 - i)z^2 + (4 - i)z - 4\ i = (z - i)(z^2 + z + 4)$.

3. L'équation $z^2 + z + 4 = 0$ a pour solutions : $\frac{-1 - i\sqrt{15}}{2}$ et $\frac{-1 + i\sqrt{15}}{2}$.

Donc, l'équation (E) a pour solutions : i, $\frac{-1 - i\sqrt{15}}{2}$ et $\frac{-1 + i\sqrt{15}}{2}$.

♦ Exercice 3.d p. 75

1. $\cos 4x + i\sin 4x = (\cos x + i\sin x)^4 = (\cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x) + i(4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x)$

Donc : $\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

2. On obtient : $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$.

♦ Exercice 3.e p. 75

a) $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{3}{4}$

b) $\sin^4 x + \sin^2 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \cos 2x + \frac{7}{8}$

c) $\cos^3 x\sin^3 x = -\frac{1}{32}(\sin 6x - 3\sin 2x)$

d) $\cos^3 x\ x\ \sin^2 x = -\frac{1}{16}(\cos 5x + \cos 3x - 2\cos x)$.

♦ Exercice 3.f p. 75

Posons : $A(x) = \cos 5x + 2\cos 3x + \cos x$. On a : $\mathbf{A(x) = 2\cos 3x\,(1 + \cos 2x)}$.

Donc, les solutions de l'équation $A(x) = 0$ sont les nombres de la forme :

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$; $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$; $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$; $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Il s'agit, module 2π, des nombres suivants : $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

Posons : $B(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 7x + \sin 8x$. On a : $\mathbf{B(x) = 4\sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos 3x}$.

Donc les solutions de l'équation $B(x) = 0$ sont les nombres de la forme :

$x = \frac{2k\pi}{9}$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; $x = (2k + 1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

c) L'équation équivaut à : $\mathbf{-4\cos 4x(\sin x - 1)(\sin x + \frac{1}{2}) = 0}$.
Les solutions sont les nombres de la forme :

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

d) L'équation équivaut à : $\mathbf{4\sin x\,(\cos x + \frac{1}{2})(\cos x - 1) = 0}$.

Les solutions sont les nombres de la forme : $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

♦ Exercice 3.g p. 75

a) f est la symétrie de centre $\Omega(1 ; \frac{1}{2})$.

b) f est la rotation de centre $\Omega(1 ; -1 + \sqrt{2})$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

c) f est l'homothétie de centre $\Omega(\frac{3}{2} ; -\frac{3}{4})$ et de rapport $-\frac{1}{3}$.

d) f est la rotation de centre $\Omega(1 ; 0)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

♦ Exercice 3.h p. 75

a) L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega(1 ; 2)$ et de rayon 3.
b) L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega(3 ; -1)$ et de rayon 3.
c) Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
L'ensemble cherché est la droite de repère $(O, \vec{e_2})$ privée du point $A(0 ; 3)$.
d) La congruence est équivalente à : $\arg(z + 1) \equiv \pi\ [2\pi]$.
Soit $A(-1 ; 0)$. L'ensemble cherché est la demi-droite de repère $(A, -\vec{e_1})$ privée du point A.

♦ Exercice 3.i p. 75

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
a) Soit $A(2 ; -1)$ et $B(0 ; -1)$. L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AB].
b) L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [OA].
c) L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AC], avec $C(0 ; 3)$.
d) L'ensemble cherché est le cercle d'équation : $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 8$.

♦ Exercice 3.j p. 75

a) L'ensemble cherché est la droite d'équation $3x + 5y - 1 = 0$ privée du poin $A(2 ; -1)$.
b) L'ensemble cherché est le cercle d'équation $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{17}{2}$ privé du point A.

☐ *Exercices d'apprentissage*

ÉTUDE ALGÉBRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

♦ Exercice 1 p. 76

a) $z = 1$ *b)* $z = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{14} + i\,\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{6}}{14}$ *c)* $z = \frac{4}{5}$ *d)* $z = i$ *e)* $z = -\frac{11}{4} - \frac{1}{2}i$ *f)* $z = 2i$.

♦ Exercice 2 p. 76

a) $\text{Re}(z) = -117$ et $\text{Im}(z) = 44$ *b)* $\text{Re}(z) = 2$ et $\text{Im}(z) = -11$
c) $\text{Re}(z) = -\frac{8}{5}$ et $\text{Im}(z) = \frac{4}{5}$ *d)* $\text{Re}(z) = -119$ et $\text{Im}(z) = 55$.

♦ Exercice 3 p. 76

On a : $z = -x^2 + 11x + 2 + i(x^2 + 3x - 10)$.
Donc : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -5$ ou $x = 2$; $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{11 + \sqrt{129}}{2}$ ou $x = \frac{11 - \sqrt{129}}{2}$.

♦ Exercice 4 p. 76

On a : $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} - 1 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} + \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} - 1 = 0.$

♦ Exercice 5 p. 76

1. On a : $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$ et $i^5 = i$.
Plus généralement, on a : $i^{4k} = 1$; $i^{4k+1} = i$; $i^{4k+2} = -1$; $i^{4k+3} = -i$. Donc : $i^{18} = -1$ et $i^{19} = -i$.

2. On a : $1 + i + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$; $i^{199} + i^{200} + i^{201} + i^{202} = i^{199}(1 + i + i^2 + i^3) = 0$.

3. Posons : $S = \sum\limits_{k=0}^{2000} i^k$ et $T = \sum\limits_{k=0}^{2002} (-i)^k$.

On a : $S = \dfrac{1-i^{2001}}{1-i} = \dfrac{1-i}{1-i} = 1$ et $T = \dfrac{1+i^{2003}}{1+i} = \dfrac{1+(-i)}{1+i} = -i.$

♦ Exercice 6 p. 76

a) $\overline{z} = 4 + \sqrt{3} + i(-4 + \sqrt{3})$ *b)* $\overline{z} = -\dfrac{7}{10} - \dfrac{1}{10}i$ *c)* $\overline{z} = -\dfrac{1}{2}i$ *d)* $\overline{z} = \dfrac{19}{25} - \dfrac{17}{25}i.$

♦ Exercice 7 p. 76

On a : $\overline{z_1} = -z_2$; donc : $z_1 - z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2\text{Re}(z_1)$ et $z_1 + z_2 = z_1 - \overline{z_1} = 2i\text{Im}(z_1)$.

♦ Exercice 8 p. 76

a) $|z| = \sqrt{2}$ *b)* $|z| = \dfrac{1}{4}$ *c)* $|z| = 2$ *d)* $|z| = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ *e)* $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *f)* $|z| = 2\sqrt{2}.$

♦ Exercice 9 p. 76

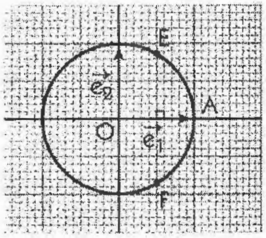
On a : $|z| = 1$ et $|z| = |z - 1|$.

Le plan complexe étant rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, soit M l'image de z.

Notons : A(1 ; 0). On a : OM = 1 et OM = AM.

Donc, M Appartient à la fois au cercle de centre O et de rayon 1, et à la médiatrice du segment [OA].

Il y a deux points solutions : $E(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{\sqrt{3}}{2})$ et $F(\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.



♦ Exercice 10 p. 76

a) $z = 3 - i$ et $z' = 1 - 2i$ *b)* $z = \dfrac{270}{89} - \dfrac{102}{89}i$ et $z' = -\dfrac{79}{89} + \dfrac{16}{89}i.$

ÉTUDE TRIGONOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

♦ Exercice 11 p. 76

a) $z = (e^{-i\frac{\pi}{3}})^3 = e^{-i\pi} = -1$ *b)* $z = e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1$ *c)* $z = e^{i\frac{\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1$ *d)* $z = (\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$

e) $z = (\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}})^4 = 4\, e^{-i\pi} = -4$ *f)* $z = \dfrac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ *g)* $z = \left(\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right)^3 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = -2 + 2i.$

♦ Exercice 12 p. 76

a) $|z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_1) \equiv -\dfrac{\pi}{6}\,[2\pi]$; $|z_2| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_2) \equiv -\dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\dfrac{z_1}{z_2} = \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}.$

c) $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

♦ Exercice 13 p. 76

a) $z = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ *b)* $z = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ *c)* $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$ *d)* $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$

e) $z = \dfrac{1}{2}\, e^{-i\frac{11\pi}{12}}$ *f)* $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$ *g)* $z = 32\, e^{-i\frac{\pi}{6}}.$

♦ Exercice 14 p. 76

$z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta \Leftrightarrow z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$.

L'équation du second degré $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$ a pour discriminant : $\delta = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta = (i\sin\theta)^2$.

L'équation a deux solutions : $z' = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et $z'' = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$.

Si $z = e^{i\theta}$, alors : $z^n + \frac{1}{z^n} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos n\theta$; si $z = e^{-i\theta}$, alors : $2^n + \frac{1}{z^n} = e^{-in\theta} + e^{in\theta} = 2\cos n\theta$.

♦ Exercice 15 p. 76

a) $z_1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

b) $z_1z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{3\pi}{2}} = \frac{i}{2}$; $(z_1)^3 = e^{-i2\pi} = 1$; $\frac{z_2^6}{z_1^3} = 64e^{i\pi} = -64$.

♦ Exercice 16 p. 77

1. On a : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc : $1 + j + j^2 = 0$.

2. $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^{6k} = 1$; $u^{6k+1} = -j^2 = -\bar{j}$; $u^{6k+2} = j$; $u^{6k+3} = -1$; $u^{6k+4} = j^2 = \bar{j}$; $u^{6k+5} = -j$.

♦ Exercice 17 p. 77

1. $i = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}j$.

Soit $z = x + iy$. On a : $z = (x + y\frac{\sqrt{3}}{3}) + 2y\frac{\sqrt{3}}{3}j$.

2. $\alpha + j\beta = \alpha + \beta(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = (\alpha - \frac{\beta}{2}) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\beta$.

$|\alpha + j\beta|^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 1$.

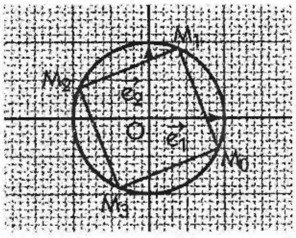
♦ Exercice 18 p. 77

1. $z = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Les racines 4^e^ de $(-i)$ sont : $z_k = \cos(-\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4})$ $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

On a : $z_0 = \cos(-\frac{\pi}{8}) + i\sin(-\frac{\pi}{8})$; $z_1 = \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}$; $z_2 = \cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}$; $z_3 = \cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}$.

2. Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Soit M_0, M_1, M_2 et M_3 les images respectives des nombres complexes z_0, z_1, z_2 et z_3. Ce sont les sommets d'un carré.



3. On a : $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 0$; $z_0z_1z_2z_3 = i$.

♦ Exercice 19 p. 77

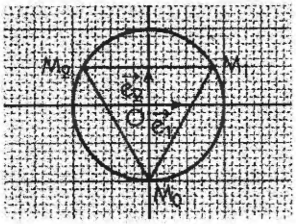
1. $(2 + i)^3 = 2 + 11i$.

2. $z^3 = 2 + 11i$ et $(2 + i)^3 = 2 + 11i \Rightarrow (\frac{z}{2 + i})^3 = 1$.

Or les racines cubiques de 1 sont : 1, j, j^2. Donc, les racines cubiques de $2 + 11i$ sont : $z_0 = (2 + i) \times 1 = 2 + i$; $z_1 = (2 + i)j = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + i(-\frac{1}{2} + \sqrt{3})$; $z_2 = (2 + i)j^2 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + i(-\frac{1}{2} - \sqrt{3})$.

♦ Exercice 20 p. 77

On obtient : $z_0 = \sqrt[3]{4}\,e^{i\frac{3\pi}{2}}$; $z_1 = \sqrt[3]{4}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_2 = \sqrt[3]{4}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$.



Soit M_0, M_1 et M_2 les images respectives des nombres complexes z_0, z_1 et z_2. Les points M_0, M_1 et M_2 sont les sommets d'un triangle équilatéral.

♦ Exercice 21 p. 77

1. $(|z_n|)$ est la suite géométrique de premier terme $\sqrt{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

2. $\arg(z_n) \equiv n\pi + \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{z_0}{2^n}e^{in\pi}$.

♦ Exercice 22 p. 77

1. $A + iB = 1 + e^{ix} + e^{i2x} + \ldots + e^{i(n-1)x}$.

2. $A + iB = \dfrac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \dfrac{e^{i\frac{nx}{2}}(e^{-i\frac{nx}{2}} - e^{i\frac{nx}{2}})}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{-\frac{ix}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} = e^{i\frac{(n-1)x}{2}} \times \dfrac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, (x \neq 2k\pi).$

D'où : si $x \not\equiv 0\ [2\pi]$, $A = \dfrac{\sin \frac{nx}{2} \cos (\frac{n-1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}$ et $B = \dfrac{\sin \frac{nx}{2} \sin (\frac{n-1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}$.

Si $x \equiv 0\ [2\pi]$, $A = n$ et $B = 0$.

RÉSOLUTIONS D'ÉQUATIONS

♦ Exercice 23 p. 77

a) $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = -3 + 2i$ *b)* $z_1 = 2 - 2i$ et $z_2 = -2 + 2i$ *c)* $z_1 = 4 + 3i$ et $z_2 = -4 - 3i$.

♦ Exercice 24 p. 77

1. $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = -1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

2. $2z_1 + 3z_2 = -1 + 5i$; $(z_1 - z_2)^2 = 4$; $(z_1)^8 = 16e^{i2\pi} = 16$; $(z_2)^{10} = 32e^{i\frac{3\pi}{2}} = -32i$.

♦ Exercice 25 p. 77

1. $(1 + 8i)^2 = -63 + 16i$. 2. $\Delta = (1 + 8i)^2$. L'équation a deux solutions : $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = 3 + i$.

♦ Exercice 26 p. 77

1. L'équation (1) a deux solutions : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 3 - 2i$.

(2) $\Leftrightarrow$ (1) ou $z^2 - (4 + i)z + 5 - i = 0$ (3).

L'équation (3) a deux solutions : $z_3 = 1 - i = \overline{z_1}$ et $z_4 = 3 + 2i = \overline{z_2}$.

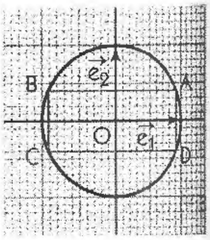
2. $(x^2 - 4x + 5)^2 + (x + 1)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 6x + 13)$.

♦ Exercice 27 p. 77

a) $z^4 - \sqrt{2}\, z^2 + 1 = 0$.

Posons : $Z = z^2$. On a : $Z^2 - \sqrt{2}\, Z + 1 = 0$ et $\Delta = 2\, i^2$.

L'équation a deux solutions : $Z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - i) = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $Z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) = e^{i\frac{\pi}{4}}$.



Les racines carrées de Z_1 sont : $e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et $e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

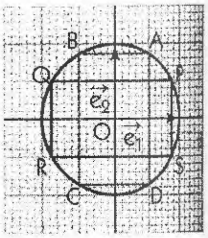
Les racines carrées de Z_2 sont : $e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $e^{i\frac{9\pi}{8}}$.

Désignons par A, B, C et D les images respectives des nombres complexes $e^{i\frac{\pi}{8}}$, $e^{i\frac{7\pi}{8}}$, $e^{i\frac{9\pi}{8}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{8}}$.

b) $z^8 + z^4 + 1 = 0$.

Posons : $Z = z^4$. On a : $Z^2 + Z + 1 = 0$ et $\Delta = 3\, i^2$.

L'équation a deux solutions : $Z_1 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ et $Z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.



Les racines 4^e de Z_1 sont : $e^{i\frac{\pi}{3}}$; $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, et $e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Les racines 4^e de Z_2 sont : $e^{i\frac{\pi}{6}}$; $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Désignons par A, B, C, et D les images respectives des nombres complexes $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Désignons par P, Q, R et S les images respectives des nombres complexes $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

♦ Exercice 28 p. 77

1. $P(z) = (z - 2)(z^2 - z + 1 - i)$.

2. $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z^2 - z + 1 - i = 0$

L'équation du second degré $z^2 - z + 1 - i = 0$ a deux solutions : $-i$ et $1 + i$.

Donc, l'équation $P(z) = 0$ a trois solutions : 2, $-i$ et $1 + i$.

♦ Exercice 29 p. 77

1. On a bien : $P(2i) = P(-3) = 0$.

2. $P(z) = [z^2 + (3 - 2i)z - 6i\ ](z^2 + 2z + 2) = (z - 2i)(z + 3)(z^2 + 2z + 2)$.

L'équation du second degré $z^2 + 2z + 2 = 0$ a deux solutions : $-1 - i$ et $-1 + i$.
Donc, l'équation $p(z) = 0$ a quatre solutions : $2i, -3, -1 - i$ et $-1 + i$.

♦ Exercice 30 p. 77

1. $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha^3 - 11\alpha^2 + 34\alpha - 42) + i\,(-2\alpha^2 + 14\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(\alpha^3 - 11\alpha^2 + 34\alpha - 42) = 0 \\ -2\alpha(\alpha - 7) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 7.$

2. $P(z) = (z - 7)[z^2 - 2\,(2 + i)z + 6]$.

3. L'équation du second degré $z^2 - 2(2 + i)z + 6 = 0$ a deux solutions : $1 - i$ et $3 + 3\,i$.
Donc, l'équation $P(z) = 0$ a trois solutions : 7, $1 - i$ et $3 + 3i$.

♦ Exercice 31 p. 77

1. $P(3\,i) = 0$

2. $P(z) = (z - 3i)\,[z^2 - (2 + i)z + 3 + i]$.

3. Résolvons l'équation du second degré : $z^2 - (2 + i)z + 3 + i = 0$. On a : $\Delta = -9 = (3i)^2$.
Donc, l'équation a deux solutions : $1 - i$ et $1 + 2i$.
Par suite, l'équation $P(z) = 0$ a trois solutions : $3i$, $1 - i$ et $1 + 2i$.

TRANSFORMATIONS ET NOMBRES COMPLEXES

♦ Exercice 32 p. 77

a) $z' = -z - 4 + 2i$ *b)* $z' = -\frac{1}{2}z - 3 + \frac{3}{2}i$ *c)* $z' = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + i(\frac{1}{2} + \sqrt{3})$.

♦ Exercice 33 p. 77

1. *a)* Expression analytique de S : $\begin{cases}x' = -x - 4 \\ y' = y\end{cases}$; expression complexe de S : $z' = -\bar{z} - 4$.

b) Expression analytique de S' : $\begin{cases}x' = x \\ y' = -y + 2\end{cases}$; expression complexe de S' : $z' = \bar{z} + 2i$.

2. $S' \circ S$ et $S \circ S'$ ont pour expression complexe : $z' = -z - 4 + 2i$.

Donc : $S \circ S' = S' \circ S$; $S \circ S'$ est la symétrie de centre $\Omega(-2\,;\,1)$.

♦ Exercice 34 p. 77

a) S est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation : $y = -2$.
b) S est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation : $x = 1$.
c) S est l'homothétie de centre $\Omega(2\,;\,-1)$ et de rapport -4.
d) S est la rotation de centre $\Omega(0\,;\,-2 - \sqrt{2})$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

♦ Exercice 35 p. 77

1. $z - 2i = 4e^{i\frac{\pi}{3}}\,(z - 2i)$.

2. f est la composée de :
- l'homothétie de centre $\Omega(1\,;\,2)$ et de rapport 4 ;
- et de la rotation de centre $\Omega(1\,;\,2)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

CONFIGURATIONS PLANES

♦ Exercice 36 p. 78

On a : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$; donc, ABC est un triangle équilatéral de sens direct.

♦ Exercice 37 p. 78

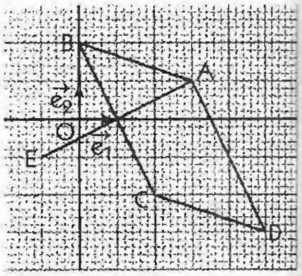
1. On a : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$; donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

2. ABCD est un parallélogramme ssi : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$;
c'est-à-dire : $z_D - z_C = z_A - z_B$ ou : $z_D = 5 - 3\,i$.

3. Soit I le milieu du segment [BC].

On a : $z_I = \dfrac{z_B + z_C}{2} = 1.$

$E = S_I(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AI} \Leftrightarrow z_E - z_I = z_I - z_A \Leftrightarrow z_E = -1 - i.$



◆ Exercice 38 p. 78

1. On vérifie que : $z_B = \dfrac{z_A + z_C}{2}.$

2. ADCE est un carré ssi : $\dfrac{z_D + z_E}{2} = z_B$ et $\dfrac{z_A - z_D}{z_C - z_D} = i.$

Or : $\dfrac{z_D + z_E}{2} = z_B \Leftrightarrow z_D + z_E = 2 + 4i$ et $\dfrac{z_A - z_D}{z_C - z_D} = i \Leftrightarrow z_D = \dfrac{z_A + z_C + i(z_A - z_C)}{2} = 5 + \dfrac{2}{3}i.$

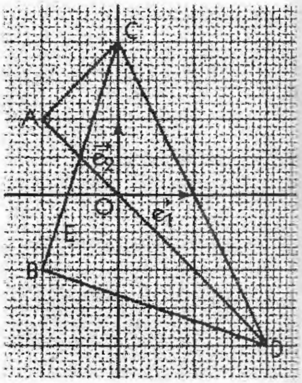
Donc : $z_E = 2 + 4i - z_D = -3 + \dfrac{10}{3}i.$

◆ Exercice 39 p. 78

1. On a : $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{i}{\sqrt{3}}$; donc, le triangle ABC est rectangle en B et de sens direct.

• On a : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$; donc : Mes $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \dfrac{\pi}{3}$ et Me $\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} = \dfrac{\pi}{6}.$

2. $D = S_B(A) \Leftrightarrow z_D = 2z_B - z_A \Leftrightarrow z_D = 3$. Le triangle ACD est équilatéral.



◆ Exercice 40 p. 78

1. On a : $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \dfrac{i}{3}$; donc le triangle ACD est rectangle en A.

On a : $\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = i$; donc le triangle BCD est rectangle et isocèle en B.

2. Soit I le milieu du segment [CD]. On a : $z_I = \dfrac{z_C - z_D}{2} = 1.$

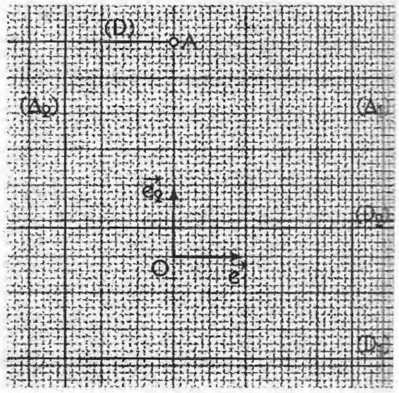
Les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre I et de rayon :

$IC = |z_C - z_I| = |2i - 1| = \sqrt{5}.$

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

◆ Exercice 41 p. 78

a) L'ensemble cherché est la réunion des droites (Δ_1) et (Δ_2) d'équations respectives : $x = \dfrac{5}{2}$ et $x = -\dfrac{3}{2}.$



b) L'ensemble cherché est la réunion des droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives : $y = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

c) On a : $\arg(z - 3i) \equiv \pi\ [2\pi]$. Soit A (3i).
L'ensemble cherché est la demi-droite (D) de repère $(A, -\vec{e_1})$ privée du point A.

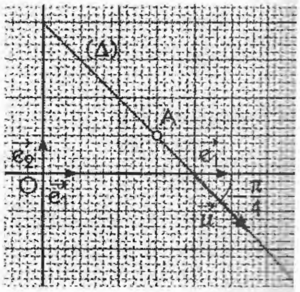
La demi-droite (D) a pour équation : $\begin{cases} y = 3 \\ x < 0 \end{cases}.$

d) On a : $\arg(\overline{z - 3 - i}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$; ou : $\arg(z - 3 - i) \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [\pi].$

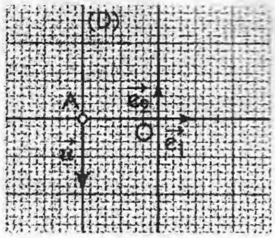
Soit A(3 + i). On a : $\arg(z - z_A) \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [\pi] \Leftrightarrow$ Mes $\widehat{(\vec{e_1}, \overrightarrow{AM})} \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [\pi].$

L'ensemble cherché est la droite (Δ) de repère $(A, \vec{u})$ privée de A, avec Mes $\widehat{(\vec{e_1}, \vec{u})} = -\dfrac{\pi}{4}.$

(Δ) a pour coefficient directeur $\tan(-\dfrac{\pi}{4}) = -1$;

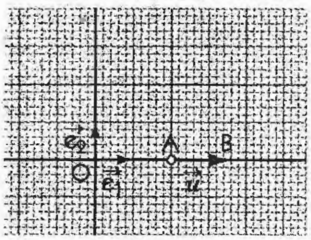


donc, une équation de (Δ) est $y = -x + p$, $(p \in \mathbb{R})$.
$A \in (\Delta) \Leftrightarrow 1 = -3 + p \Leftrightarrow p = 4$. D'où : $(\Delta) : y = -x + 4$.



e) On a : $\arg(z + 2) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Soit A (-2).

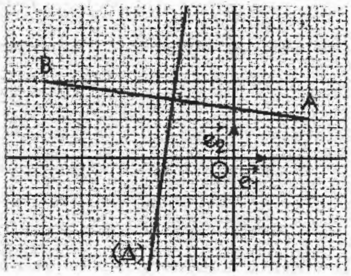
On a : $\arg(z - z_A) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [\pi]$; ou : Mes $\widehat{(\vec{e_1}, \overrightarrow{AM})} \equiv -\frac{\pi}{2}\ [\pi]$.
L'ensemble cherché est la droite (D) de repère $(A, \vec{u})$, privée de A et telle que :
Mes $\widehat{(\vec{e_1}, \vec{u})} = -\frac{\pi}{2}$.
Une équation de (D) est : $\begin{cases} x = -2 \\ y \neq 0 \end{cases}$.



f) On a : $\arg(z - 2) \equiv 0\ [2\pi]$. Soit A (2).

On a : $\arg(z - z_A) \equiv 0\ [2\pi]$; ou : Mes $\widehat{(\vec{e_1}, \overrightarrow{AM})} \equiv 0\ [2\pi]$.
L'ensemble cherché est la demi-droite]AB) privée de A, avec B(3 ; 0).
Une équation de]AB) est : $\begin{cases} y = 0 \\ x > 2 \end{cases}$.

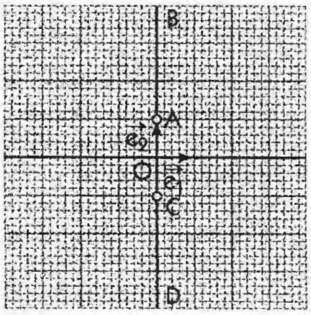
♦ Exercice 42 p. 78



a) L'équation équivaut à : $|z + 5 - 2i| = |z - 2 - i|$.
Soit A $(-5 + 2i)$ et B $(2 + i)$. On a : $|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$.
L'ensemble cherché est la médiatrice (Δ) du segment [AB].

b) $|z + 1 + i| = |3z - 9 - 3i| \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{45}{16}$.
L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega(\frac{7}{2} ; \frac{5}{4})$ et de rayon $\frac{3\sqrt{5}}{4}$.

♦ Exercice 43 p. 78



$Z = \frac{z + i}{z - i}$. On doit avoir : $z \neq i$.
On a : $Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2} + i\frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}$.

a) $Z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow x = 0$ et $x^2 + y^2 - 1 > 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ et $y \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$.
Soit A(i), B(2i), C(− i) et D(− 2i).
L'ensemble cherché est la réunion des demi-droites]AB) et]CD) privées respectivement de A et C.

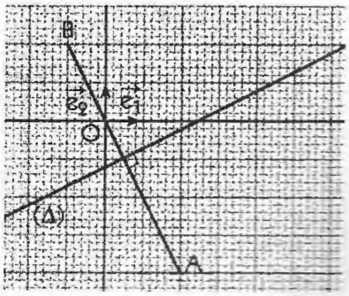
b) $Z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow x = 0$ et $-1 < y < 1$.
L'ensemble cherché est le segment ouvert]AC[.

c) $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$.
L'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon 1, privé du point A(i).

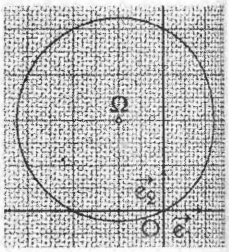
d) $|Z| = 1 \Leftrightarrow |z + i| = |z - i| \Leftrightarrow |z - z_C| = |z - z_A| \Leftrightarrow CM = AM$.
L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AC], c'est-à- dire l'axe réel.

e) $|z + i| = 3|z - i| \Leftrightarrow x^2 + (y - \frac{5}{4})^2 = \frac{9}{16}$.
L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega(0 ; \frac{5}{4})$ et de rayon $\frac{3}{4}$.

♦ Exercice 44 p. 78



$Z = \frac{z - 2 + 4i}{z + 1 - 2i}$. On doit avoir : $z \neq -1 + 2i$.
a) Soit A $(2 - 4i)$ et B$(-1 + 2i)$.
$|Z| = 1 \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$.
L'ensemble cherché est la médiatrice (Δ) du segment [AB].



b) Soit $z = x + iy$.

On a : $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 4\,[(x+1)^2 + (y-2)^2]$;

ou : $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 20$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega(-2\,;4)$ et de rayon $2\sqrt{5}$.

c) On a : $Z = \dfrac{x^2 - x + y^2 + 2y - 10}{(x+1)^2 + (y-2)^2} + i\,\dfrac{6x+3y}{(x+1)^2 + (y-2)^2}$.

$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 6x + 3y = 0$ et $(x+1)^2 + (y-2)^2 \neq 0$.

L'ensemble cherché est la droite (Δ) d'équation $2x + y = 0$ privée du point $B(-1 + 2i)$.

d) $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + 2y - 10 = 0$ et $(x+1)^2 + (y-2)^2 \neq 0$.

On a : $x^2 - x + y^2 + 2y - 10 = (x - \frac{1}{2})^2 + (y+1)^2 - \frac{45}{4}$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega(\frac{1}{2}\,; -1)$ et de rayon $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ privé du point B.

◆ **Exercice 45 p. 78**

a) $z\overline{z} + i\,((z - \overline{z}) - 3 = x^2 + (y-1)^2 - 4$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega(i)$ et de rayon 2.

b) $(z\overline{z})^2 - z\overline{z}^{\,-6} = |z|^4 - |z|^2 - 6 = (|z|^2 + 2)(|z|^2 - 3)$.

On a : $(z\overline{z})^2 - z\overline{z}^{\,-6} = 0 \Leftrightarrow |z|^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{3}$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

◆ **Exercice 46 p. 78**

a) On a : $(z - 1 - i)(\overline{z - 1 - i}) = 5$; ou $|z - z_A|^2 = 5$, avec $A(1 + i)$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre $A(1 + i)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

b) On obtient : $x^2 - 4y = 0$. L'ensemble cherché est la parabole d'équation : $y = \frac{1}{4}x^2$.

c) L'ensemble cherché est l'hyperbole d'équation : $y = -\frac{2}{x}$.

◆ **Exercice 47 p. 78**

a) Posons : $Z = \dfrac{2z - 1}{z^2}$.

$$\begin{aligned}
\text{On a : } Z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{Z} = Z \\
&\Leftrightarrow 2\,\overline{z}z\,(z - \overline{z}) = (z + \overline{z})(z - \overline{z}) \\
&\Leftrightarrow 4i\mathrm{Im}(z)[|z|^2 - \mathrm{Re}(z)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ ou } |z|^2 - \mathrm{Re}(z) = 0. \\
&\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 - \tfrac{1}{4} = 0.
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble cherché est la réunion de l'axe réel et du cercle de entre $\Omega\,(\frac{1}{2}\,; 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, privée du point O.

b) Posons : $Z = \dfrac{4 - (z + \overline{z})i}{1 - i + \frac{1}{2}(z - \overline{z})}$. On a : $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{Z} = Z \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$.

L'ensemble cherché est la droite(Δ) d'équation : $x + 2y - 2 = 0$.

Exercices d'approfondissement

◆ **Exercice 48 p. 78**

a) On trouve : $z = \frac{\sqrt{3}}{3}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

b) On a : $1 - \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\,e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$;

$1 + \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\,e^{-i\frac{\alpha}{2}}$ et $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$. Donc : $z = \tan\frac{\alpha}{2}\,e^{i\alpha}$.

♦ Exercice 49 p. 78

On a : $z = 2\cos\frac{\alpha}{2}\, e^{-i\frac{\alpha}{2}}$ et $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$. Donc : $\frac{1}{z} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\, e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

♦ Exercice 50 p. 78

a) Posons : $S = \sin A + \sin B + \sin C$.

On a : $S = \sin A + \sin B + \sin(A + B)$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\left[2\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{-B}{2}\right)\right] = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

b) Posons : $T = \cos A + \cos B + \cos C$.

On a : $T = \cos A + \cos B - \cos(A + B)$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \left(2\cos^2\frac{A+B}{2} - 1\right)$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) + 1$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\left[-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\right] + 1 = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1.$$

♦ Exercice 51 p. 78

1. *Méthode algébrique*

On a : $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$; $z + 1 = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$; $|z + 1| = 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$.

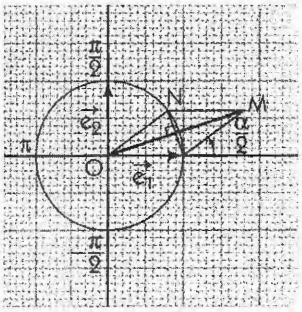
- Si $0 \le \alpha < \pi$; alors : $|z + 1| = 2\cos\frac{\alpha}{2}$; $\arg(z + 1) \equiv \frac{\alpha}{2}\ [2\pi]$.
- Si $\pi < \alpha < 2\pi$, alors : $|z + 1| = -2\cos\frac{\alpha}{2}$; $\arg(z + 1) \equiv \pi + \frac{\alpha}{2}\ [2\pi]$.
- Si $\alpha = \pi$, alors : $z + 1 = 0$.

Méthode géométrique

Le plan complexe est muni de repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
Soit N le point d'affixe z et M le point d'affixe $z + 1$. M est l'image du point N par la translation de vecteur $\vec{e_1}$.
Soit P le point d'affixe 1 et I le milieu du segment [OM].
ONMP est un losange et la droite (OM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{NOP}$.

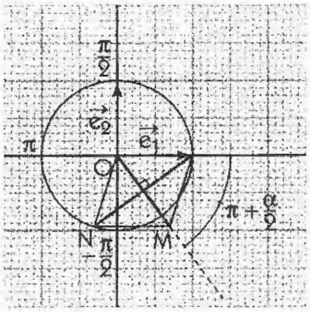
1er cas : $0 \le \alpha < \pi$

- $|z + 1| = OM = 2OI = 2\cos\frac{\alpha}{2}$
- $\text{Arg}(z + 1) \equiv \frac{\alpha}{2}\ [2\pi]$



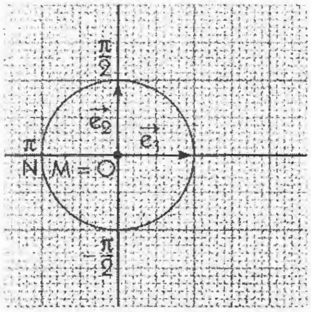
2^{e} cas : $\pi < \alpha < 2\pi$

- $|z + 1| = 2OI = -2\cos\frac{\alpha}{2}$
- $\text{Arg}(z + 1) \equiv \pi + \frac{\alpha}{2}\ [2\pi]$



3^{e} cas : $\alpha = \pi$

- $|z + 1| = OM = 0$
- $z + 1$ n'a pas d'argument.



2. *a)* On a : $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = 1$ et $\text{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \equiv \alpha_2 - \alpha_1\ [2\pi]$.

Posons : $z = \frac{z_2}{z_1}$; on a : $z_2 = z_1 z$ et $z_1 + z_2 = z_1(1 + z)$.

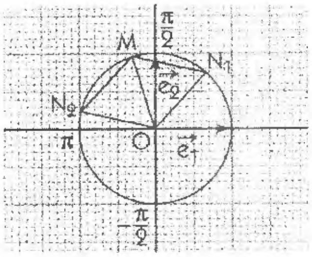
On déduit de la question **1.** la discussion suivante :

1er cas : $0 \leq \alpha_2 - \alpha_1 < \pi$	**2^e cas : $\pi < \alpha_2 - \alpha_1 < 2\pi$**	**3^e cas : $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$**
• $\lvert z_1 + z_2 \rvert = 2\cos\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$	• $\lvert z_1 + z_2 \rvert = -2\cos\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$	$z_1 + z_2 = 0.$
• $\operatorname{Arg}(z_1 + z_2) \equiv \dfrac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\ [2\pi]$	• $\operatorname{Arg}(z_1 + z_2) \equiv \pi + \dfrac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\ [2\pi]$	

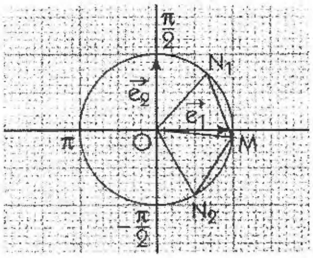
b) On distingue deux cas : $0 \leq \alpha_2 - \alpha_1 < \pi$ et $\pi < \alpha_2 - \alpha_1 < 2\pi$.

On trouve : $\lvert z_2 + z_1 \rvert = 1 \Leftrightarrow \alpha_2 - \alpha_1 = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $\alpha_2 - \alpha_1 = \dfrac{4\pi}{3}$.

$\alpha_2 - \alpha_1 = \dfrac{2\pi}{3}$



$\alpha_2 - \alpha_1 = \dfrac{4\pi}{3}$



♦ **Exercice 52 p. 79**

1. *a)* • On a : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = \dfrac{1 - z_0^5}{1 - z_0} = 0$; c'est-à-dire : $1 + \alpha + \beta = 0$.

• De plus : $\alpha\beta = -1$.

Donc, α et β sont solutions de l'équation du second degré : $Z^2 + Z - 1 = 0$.

b) On a : $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

c) (E) : $Z^2 + Z - 1 = 0$. Le discriminant de (E) est : $\Delta = 5$.

Donc, (E) a deux solutions : $Z' = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $Z'' = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

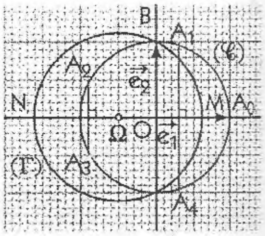
Or : $0 < \dfrac{2\pi}{5} < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\dfrac{2\pi}{5} > 0$; donc : $\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

$\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

2. *a)* On a : $z_1 = z_0$ et $z_4 = \overline{z}_0$;

donc, les points A_1 et A_4 sont symétriques par rapport à l'axe réel.

Par suite $z_H \in \mathbb{R}$; $z_H = \dfrac{z_1 + z_4}{2} = \dfrac{z_0 + \overline{z}_0}{2} = \operatorname{Re}(z_0) = \cos\dfrac{2\pi}{5}$.



b) Soit P un point d'affine réel x.

On a : $P \in (\Gamma) \Leftrightarrow \Omega P^2 = \Omega B^2$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha = x_M \text{ ou } x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = \beta = x_N.$$

Le milieu du segment [OM] a pour affine $\dfrac{\alpha}{2}$, c'est-à-dire $\cos\dfrac{2\pi}{5}$; donc H est le milieu de [OM].

c) ***Construction du pentagone***

– On trace le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O Passant par A_0 ;

– on place le point Ω tel que $\overrightarrow{O\Omega} = -\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{OA_0}$.

– Soit (Δ) la perpendiculaire à (OA_0) passant par O ;
soit B le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (Δ) tel que (O, A_0, B) soit direct.
On trace le cercle (Γ) de centre Ω passant par B.
(Γ) coupe la droite (OA_0) en deux points M et N.

Désignons par H et K les milieux respectifs des segments [OM] et [ON].
La perpendiculaire à (OA_0) en H coupe $(\mathscr{C})$ en A_1 et A_4.
La perpendiculaire à (OA_0) en K coupe $(\mathscr{C})$ en A_2 et A_3.
Les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sont les sommets d'un pentagone régulier.

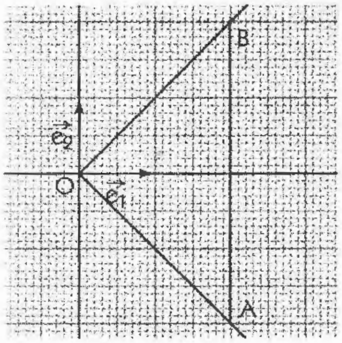
♦ Exercice 53 p. 78

1. *a)* $z^2 - 4z + 8 = 0$; donc : $\Delta' = -4 = (2i)^2$.

L'équation a deux solutions : $z_A = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$;

$$z_B = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

b) On a : $\dfrac{z_B}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$; donc le triangle OAB est isocèle et rectangle en O.



2. *a)* f est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

b) On a, d'une part : $z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_A = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$ (I).

On a, d'autre part : $z_A = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(2 - 2i) = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$ (II).

De (I) et (II), on déduit que : $\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$

♦ Exercice 54 p. 79

1. *a)* ***Méthode trigométrique***

On a : $a = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Soit : $z = re^{i\alpha}$.

$$z^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\alpha = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ k = 0 \text{ ou } k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \alpha = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \\ k = 0 \text{ ou } k = 1. \end{cases}$$

Les racines carrées de a sont donc :

$z' = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{12}} = \sqrt{2} \cos\frac{5\pi}{12} + i\sqrt{2} \sin\dfrac{5\pi}{12}$ et $z' = \sqrt{2}\, e^{i\frac{17\pi}{12}} = -\sqrt{2}\cos\dfrac{5\pi}{12} - i\sqrt{2} \sin\dfrac{5\pi}{12}$.

Méthode algébrique

Soit $z = x + iy$. On a : $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

$$z^2 = a \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = -\sqrt{3} \\ 2xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ et } y = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ et } y = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Les racines carrées de a sont donc : $z' = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ et $z'' = -\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

On déduit des résultats précédents que : $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

b) On a : $a^n = 2^n (\cos\dfrac{5n\pi}{6} + i\sin\dfrac{5n\pi}{6})$

$a^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\dfrac{5n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{5n\pi}{6} = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 5n = 6k\ (k \in \mathbb{Z})$.

Or : 5 divise $6k$ et PGCD $(5,6) = 1 \Rightarrow$ 5 divise k ; Donc : $k = 5p$ $(p \in \mathbb{Z})$; par suite : $n = 6p$ $(p \in \mathbb{Z})$.

c) $a^n \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \cos\dfrac{5n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{5n\pi}{6} = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow 5n - 6k = 3\ (k \in \mathbb{Z})$.

On en déduit que : $n = 6p + 3$ $(p \in \mathbb{Z})$.

2. Soit A(a), B(b) et C(c).

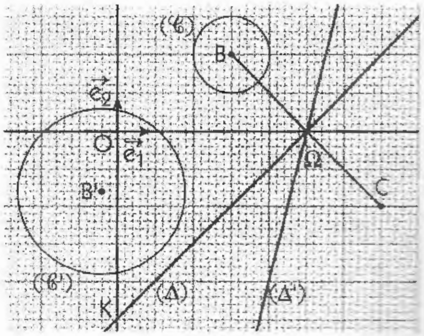
a) $|z - b| = |z - c| \Leftrightarrow$ MB = MC.

L'ensemble cherché est la médiatrice (Δ) du segment [BC].

Une équation de (Δ) est : $x - y - 5 = 0$.

b) $2\,|z - b| = |a| \Leftrightarrow \text{MB} = \dfrac{\text{OA}}{2}$.

L'ensemble cherché est le cercle $(\mathscr{C})$ de centre B et de rayon 1.



3. *a)* L'écriture complexe associée à f est de la forme :
$z' = az + b$; donc, f est une similitude directe.
De plus, $|a| = 2$; donc, f admet un unique point invariant $\Omega(w)$.
On a : $(1 + i\sqrt{3})w - 5i\sqrt{3} = w \Rightarrow w = 5$.

b) On a : $z' - 5 = (1 + i\sqrt{3})\, z - 5(1 + i\sqrt{3}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 5)$.
Soit **r** la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et **h** l'homothétie de centre Ω et de rapport 2.
On a : $f = \mathbf{r} \circ \mathbf{h} = \mathbf{h} \circ \mathbf{r}$.

c) ***Image de (Δ)***
$\Omega(5)$ et $K(-5i)$ sont deux points de (Δ). Soit K' et (Δ') les images respectives de K et (Δ) par f.
On a : $(\Delta') = (\Omega K')$.
$z_{K'} = (1 + i\sqrt{3})(-5i) - 5i\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + i(-5 - 5\sqrt{3})$.
On en déduit une équation de (Δ') : $x + (2 - \sqrt{3})y = 5$.

Image de (𝒞)
Soit B' et (𝒞') les images respectives de B et de (𝒞) par f.
On a : $z_{B'} = (1 + i\sqrt{3})(3 + 2i) - 5i\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} + i(2 - 2\sqrt{3})$.
(𝒞') est le cercle de centre B' et de rayon 2.

♦ Exercice 55 p. 79

1. On a : $\overline{a} = \overline{z} + \overline{z}^2 + \overline{z}^4 = z^6 + z^5 + z^3 = b$.
$\operatorname{Im}(a) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} \sin\frac{8\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{6\pi}{7}$.
Or : $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} < \pi$ et la fonction sinus est décroissante sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$.
Donc : $\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{6\pi}{7} > 0$. De plus : $\frac{2\pi}{7} \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin\frac{2\pi}{7} > 0$. Par suite : $\operatorname{Im}(a) > 0$.

2. ***Calcul de a + b***
On a : $a + b + 1 = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \frac{1 - z^7}{1 - z} = 0$; donc : $a + b = -1$.

Calcul de ab
On a : $ab = z^4 + z^6 + 1 + z^5 + 1 + z + 1 + z^2 + z^3 = (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6) + 2 = 0 + 2 = 2$.

Calcul de a et b
a et b sont solutions de l'équation du second degré : $z^2 + z + 2 = 0$.
Son discriminant est : $\Delta = 7i^2$. Donc : $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$ et $b = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$.

♦ Exercice 56 p. 79

1. *a)* O, A, B alignés $\Leftrightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg b - \arg a \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow \arg b + \arg \overline{a} \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow \overline{a}b \in \mathbb{R}$.

b) $\frac{(a+b)^2}{ab} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(\overline{a} + \overline{b})^2}{\overline{ab}} = \frac{(a + b)^2}{ab} \Leftrightarrow (\overline{a}^2 + 2\overline{ab} + \overline{b}^2)ab = (a^2 + 2ab + b^2)\overline{ab}$

$\Leftrightarrow |a|^2\, \overline{a}b + 2|ab|^2 + |b|^2\, a\overline{b} = |a|^2 a\overline{b} + 2|ab|^2 + |b|^2\, \overline{a}b$

$\Leftrightarrow (|a|^2 - |b|^2)(\overline{a}b - \overline{b}a) = 0 \Leftrightarrow |a| = |b|$ ou $\overline{a}b = \overline{\overline{a}b} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ OA = OB ou O, A et B sont alignés.

2. On a : $|a| = |b| \Rightarrow 1 = OA = OB$; donc : $\frac{(a + b)^2}{ab} \in \mathbb{R}$.

- Démontrons que le nombre réel $\frac{(a + b)^2}{ab}$ est positif.

On a : $2\frac{(a + b)^2}{ab} = \frac{(\overline{a} + \overline{b})^2}{\overline{ab}} + \frac{(a + b)^2}{ab} = 4 + 4\operatorname{Re}(\overline{a}b)$; donc : $\frac{(a + b)^2}{ab} = 2 + 2\operatorname{Re}(\overline{a}b)$.

Or : $|\overline{a}b|^2 = \overline{a}b\, a\overline{b} = |a|^2|b|^2 = 1$ donc : $-1 \le \operatorname{Re}(\overline{a}b) \le 1$ et par suite : $0 \le \frac{(a + b)^2}{ab} \le 4$.

3. ***Application***

a) On obtient : $Z = \dfrac{|z_1|z_2 + |z_2|z_1}{|z_1| + |z_2|}$.

b) On a : $|z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow Z = \dfrac{1}{2}(z_1 + z_2)$; donc : $\dfrac{Z^2}{z_1z_2} = \dfrac{1}{4}(2 + \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1})$.

Or : $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = z_1 \times \dfrac{1}{z_2} + z_2 \times \dfrac{1}{z_1} = z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

Par suite : $\dfrac{Z^2}{z_1z_2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$ et $\dfrac{Z^2}{z_1z_2} \in \mathbb{R}$.

c) On a : $\dfrac{Z^2}{z_1z_2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg \dfrac{Z^2}{z_1z_2} \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow \arg Z - \arg z_1 + \arg Z - \arg z_2 \equiv 0\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \mathrm{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OI})} + \mathrm{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OI})} \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow$ (OI) est la bissectrice de $\widehat{M_1OM_2}$.

♦ Exercice 57 p. 79

1. On a : $\arg(Z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow \mathrm{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Donc, $(\mathscr{C}_1)$ est le demi-cercle ci-contre privé de A et B.

2. $|Z| = 2 \Leftrightarrow |z - z_A| = 2|z - z_B| \Leftrightarrow AM = 2BM$.

Soit I le barycentre de (A, 1) et (B, 2), J le barycentre de (A, 1) et (B, –2).

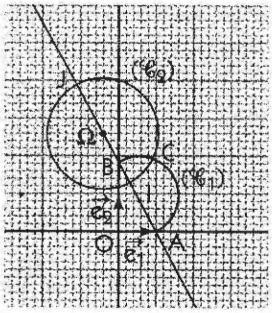
$(\mathscr{C}_2)$ est le cercle de diamètre [I J].

Une équation cartésienne de $(\mathscr{C}_2)$ est : $(x + \dfrac{1}{3})^2 + (y - \dfrac{8}{3})^2 = \dfrac{20}{9}$.

$(\mathscr{C}_2)$ est le cercle de centre $\Omega(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{3}i)$ et de rayon $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

3. $M \in (\mathscr{C}_1) \cap (\mathscr{C}_2) \Leftrightarrow |Z| = 2$ et $\arg(Z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow \dfrac{z - 1}{z - 2i} = 2i$ et $z \neq 2i \Leftrightarrow z = 1 + 2i$.

Soit C le point d'affine 1 + 2i. On a : $(\mathscr{C}_1) \cap (\mathscr{C}_2) = \{C\}$.



♦ Exercice 58 p. 79

1. $f(M) = M \Leftrightarrow \dfrac{2iz - 5}{z - 2i} = z \Leftrightarrow z^2 - 4iz + 5 = 0 \Leftrightarrow (z + i)(z - 5i) = 0$.

Donc, f admet deux points invariants : B(– i) et C(5i).

2. On a : $z' = \dfrac{2iz - 5}{z - 2i} \Leftrightarrow z'z - 2iz' = 2iz - 5 \Leftrightarrow z = \dfrac{2iz' - 5}{z' - 2i}\ (z \neq 2i)$.

Donc, f est une bijection de $\mathscr{P} - \{A\}$ dans $\mathscr{P} - \{A\}$ telle que : $f^{-1} = f$.

3. Soit $(\mathscr{D})$ la droite de repère $(O, \vec{e_2})$, privée du point A.

Soit M(*z*) un point de $(\mathscr{D})$ et M'(*z'*) son image par f.

Il existe un nombre réel λ distinct de 2 tel que : $z = \lambda i$. On a : $z' = \dfrac{2\lambda + 5}{\lambda - 2}$.

Or : $\dfrac{2\lambda + 5}{\lambda - 2}$ est un nombre réel distinct de 2, donc $f(M) \in (\mathscr{D})$.

Ainsi : $f(\mathscr{D}) \subset (\mathscr{D})$, donc : $f \circ f(\mathscr{D}) \subset f(\mathscr{D})$; c'est-à-dire : $(\mathscr{D}) \subset f(\mathscr{D})$. Par suite : $f(\mathscr{D}) = (\mathscr{D})$.

4. *a)* On a : $z' - 2i = \dfrac{-9}{|z - 2i|}$; donc : $|z' - 2i||z - 2i| = 9$.

b) $M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow |z - 2i| = R$; donc : $|z' - 2i| = \dfrac{9}{R}$; M appartient au cercle de centre A et de rayon $\dfrac{9}{R}$.

Par suite : $f(\mathscr{C})$ est le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{9}{R}$.

$(\mathscr{C})$ est globalement invariant par f si et seulement si $\dfrac{9}{R} = R$; c'est à dire : R = 3.

♦ Exercice 59 p. 79

1. *a)* Soit C' l'image du point C par f.

On a : $(1 + i)z_{C'} = 1 \Rightarrow z_{C'} = \dfrac{1}{1 + i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

b) Si $zz' = 1$, alors : $|z| \times |z'| = 1$; donc : $OM \times OM' = OA^2$.

Si $zz' = 1$, alors : $\arg z + \arg z' \equiv 0\ [2\pi]$; donc : Mes $(\widehat{\vec{e_1} - \overrightarrow{OM}})$ + Mes $(\widehat{\vec{e_1}, - \overrightarrow{OM'}}) \equiv [2\pi]$;

Par suite l'axe réel, c'est-à-dire la droite (AB), est la bissectrice de l'angle $\widehat{MOM'}$.

2. *a)* On a bien, pour tout nombre complexe non nul z, l'égalité : $(\frac{z+z'}{2} - 1)(\frac{z+z'}{2} + 1) = (\frac{z-z'}{2})^2$

b) On a : $(z_I - z_A)(z_I - z_B) = (z_I - z_M)^2$; donc : $|z_I - z_A|\ |z_I - z_B| = |z_I - z_M|^2$; c'est-à-dire : $IA \times IB = IM^2$.

On a : $(z_I - z_A)(z_I - z_B) = (z_I - z_M)^2 \Rightarrow \arg(z_I - z_A) + \arg(z_I - z_B) \equiv \arg(z_I - z_M)\ [2\pi]$;

donc : $\arg(z_I - z_A) - \arg(z_I - z_M) + \arg(z_I - z_B) - \arg(z_I - z_M) \equiv 0\ [2\pi]$;

ou : Mes $(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IA}})$ + Mes $(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IB}}) \equiv 0\ [2\pi]$; c'est-à-dire (IM) est la bissectrice de $\widehat{AIB}$.

Or : I, M et M' sont alignés ; donc : (MM') est la bissectrice de $\widehat{AIB}$.

De plus : I, M et M' sont alignés ; donc : (MM') est la bissectrice de $\widehat{AIB}$.

♦ Exercice 61 p. 80

1. On a : $\frac{z-a}{z-b} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$; donc : $z = b + i\frac{\sqrt{3}}{3}(b-a)$ et M est unique.

2. Soit (E) l'ensemble des points M tels que : $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 2$;

soit (Γ) l'ensemble des points M tels que : $\arg(\frac{z-a}{z-b}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

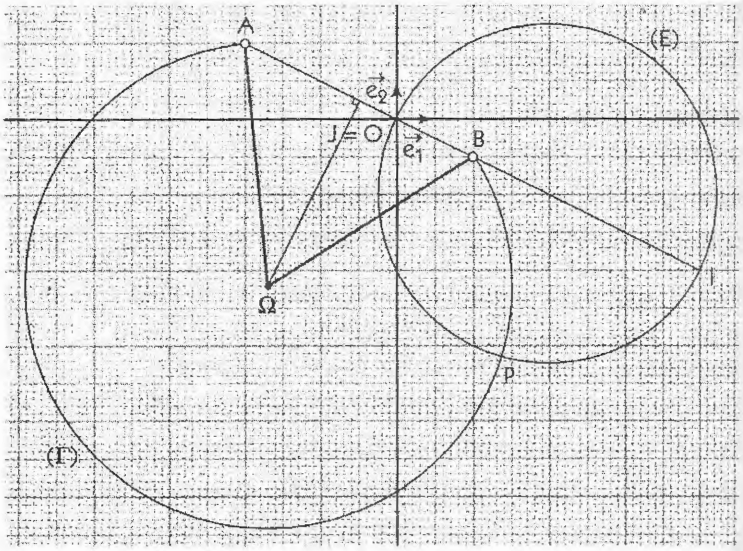
On a : $M \in (E) \Leftrightarrow MA = 2\ MB$.

Soit I le barycentre de (A,1) et (B, – 2), J le barycentre de (A,1) et (B,2).

(E) est le cercle de diamètre [I J]. Or $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{JA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$. On a : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow$ Mes $(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Soit Ω le point de la médiatrice de [AB] tel que : Mes $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}) = -\frac{2\pi}{3}$.

ΩAB est un triangle équilatéral de sens indirect.



(Γ) est l'arc du cercle de centre Ω passant par A et B, placé au-dessous de la droite (AB) et privé des poiuts A et B.

On a : $(E) \cap (\Gamma) = \{P\}$ et

$$z_P = 2 - i + i\frac{\sqrt{3}}{3}(6 - 3i)$$
$$= 2 + \sqrt{3} + i(1 - 2\sqrt{3}).$$

♦ Exercice 62 p. 80

1. L'équation (1) a pour solutions : 1, i, – 1 et – i. L'équation (2) a pour solutions : – 1, 0 et 1.

2. *a)* On a : $(\frac{z-i}{z+i})^n = a \Rightarrow \left|\frac{z-i}{z+i}\right|^n = |a| \Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \sqrt[n]{|a|}$.

b) Si (E) admet une solution réelle z_0, alors : $(\frac{z_0 - i}{z_0 + i})^n = a$ et $(\frac{\overline{z_0} + i}{z_0 - i})^n = \overline{a}$; $\frac{|z_0 - i|^n}{|z_0 + i|^n} = |\overline{a}| = |a|$.

Or : $z_0 = \overline{z}$. Donc : $\frac{|z_0 - i|^n}{|z_0 + i|^n} = |a|$ et $\frac{|z_0 + i|^n}{|z_0 - i|^n} = |a|$.

En faisant le produit membre à membre, on obtient : $|a|^2 = 1$; c'est-à-dire : $|a| = 1$.

c) Donc MP = MQ et M appartient à la médiatrice de [PQ] ; toutes les solutions sont réelles.

♦ Exercice 63 p. 80

1. Si z_0 est solution de (E), alors : $z_0^4 + 2z_0^3 + 2z_0^2 - 2z_0 + 1 = 0$; donc : $\overline{z}_0^4 + 2\overline{z}_0^3 + 2\overline{z}_0^2 - 2\overline{z}_0 + 1 = 0$; par suite $\overline{z}_0$ est solution de (E).

2. *a)* 0 n'est pas solution de (E). On a : (E) $\Leftrightarrow z^2[(z - \frac{1}{z})^2 + 2(z - \frac{1}{z}) + 4] = 0$.

b) On a : (E) $\Leftrightarrow (z - \frac{1}{z})^2 + 2(z - \frac{1}{z}) + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z^2 + 2Z + 4 = 0 \\ Z = z - \frac{1}{z}. \end{cases}$

L'équation du second dégré $Z^2 + 2Z + 4 = 0$ a deux solutions : $Z' = -1 - i\sqrt{3}$ et $Z'' = -1 + i\sqrt{3}$.

Résolution de l'équation (E)

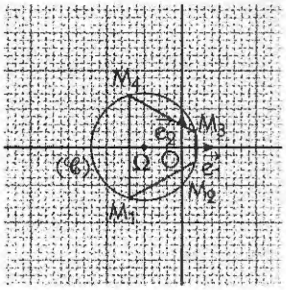
- $z - \frac{1}{z} = -1 - i\sqrt{3} \Leftrightarrow z^2 + (1 + i\sqrt{3})z - 1 = 0$.

L'équation a deux solutions : $z_1 = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i)$ et $z_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}(-1 + i)$.

- $z - \frac{1}{z} = -1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - 1 = 0$.

L'équation a deux solutions : $z_3 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 + i) = \overline{z}_2$ et $z_4 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(-1 + i) = \overline{z}_1$.

3. Soit M_1, M_2, M_3 et M_4 les images respectives des nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4.
L'axe réel est la médiatrice commune des segments $[M_1M_4]$ et $[M_2 M_3]$.
Le centre Ω (ω) du cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit à $M_1 M_2 M_3 M_4$ appartient à l'axe réel ; donc : $\omega \in \mathbb{R}$.
De plus : $\Omega M_1 = \Omega M_2 \Rightarrow |z_1 - \omega|^2 = |z_2 - \omega|^2$
Or : $|z_1 - \omega|^2 = 2 + \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})\omega + \omega^2$; $|z_2 - \omega|^2 = 2 - \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})\omega + \omega^2$.
Donc : $|z_1 - \omega|^2 = |z_2 - \omega|^2 \Leftrightarrow \sqrt{3} + \sqrt{3}\,\omega = -\sqrt{3} - \sqrt{3}\,\omega$
$\Leftrightarrow 1 + \omega = -1 - \omega \Leftrightarrow \omega = -1$.
On en déduit que : $|z_1 - \omega|^2 = 2 + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} + 1 = 2$.
Par suite, ($\mathscr{C}$) est le cercle de centre Ω (– 1 ; 0) et de rayon $\sqrt{2}$.

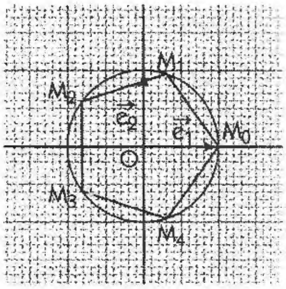


♦ Exercice 64 p. 80

1. Posons $z = re^{i\alpha}$. On a : $z^5 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = 1 \\ 5\alpha = 2k\pi. \end{cases}$

Donc, les solutions de (E) sont : $\omega = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$, ω^2, ω^3, ω^4 et $\omega^5 = 1$.
Soit M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 les images respectives des nombres complexes 1, ω, ω^2, ω^3 et ω^4. Ce sont les sommets d'un pentagone régulier de centre O.
Construction d'un pentagone régulier : *voir exercice* n° *52 p. 79.*

2. On a : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0$. Or : $\omega^3 = \overline{\omega}^2$ et $\omega^4 = \overline{\omega}$.
Donc : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 1 + (\omega + \overline{\omega}) + (\omega^2 + \overline{\omega}^2) = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$.
On en déduit que : $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.



3. On a : $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos^2\frac{2\pi}{5} - \sin^2\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$.
Donc, $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation : $4X^2 + 2X - 1 = 0$. On trouve : $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

4. *a)* Si z_0 est solution de (E'), alors : $z_0 \neq -1$ et : $(z_0 - 1)^5 = (z_0 + 1)^5$. Donc : $\left|\frac{z_0 - 1}{z_0 + 1}\right| = 1$.

Démontrons par l'absurde que z_0 est imaginaire pur. Supposons que : $z_0 \in \mathbb{R}$.
On a alors : $z_0 - 1 \in \mathbb{R}$ et $z_0 + 1 \in \mathbb{R}$.

Donc : $\left|\frac{z_0 - 1}{z_0 + 1}\right| = 1 \Leftrightarrow |z_0 - 1| = |z_0 + 1| \Leftrightarrow z_0 - 1 = z_0 + 1$ **(I)** ou $z_0 - 1 = -z_0 - 1$ **(II)**.

L'égalité **(I)** est impossible ; l'égalité **(II)** entraine : $z_0 = 0$, ce qui est absurde. Donc : $z_0 \in i\mathbb{R}$.

b) Posons : $Z = \frac{z - 1}{z + 1}$. On a : (E') $\Leftrightarrow Z^5 = 1 \Leftrightarrow Z \in \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$

Les solutions de (E') sont donc : $\frac{i}{\tan\frac{\pi}{5}}$, $\frac{i}{\tan\frac{2\pi}{5}}$, $-\frac{i}{\tan\frac{2\pi}{5}}$ et $-\frac{i}{\tan\frac{\pi}{5}}$.

4. Isométries du plan – Applications affines

(pages 81 à 104 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- Procéder à la recherche systématique des isométries du plan et à leur composition.
- Utiliser les isométries pour :

– étudier des configurations ;
– déterminer des lieux géométriques ;
– résoudre des problèmes de construction.

- Étudier, sur des exemples, les applications affines du plan.

COMMENTAIRES

Une nouvelle isométrie est introduite : la symétrie glissée.
De nouveaux groupes de transformations pourront être mis en évidence : les isométries laissant invariante une configuration donnée (deux points, un triangle équilatéral, un carré).

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

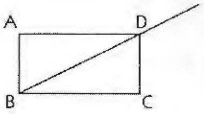
savoirs	savoir-faire
Composition d'isométries • Composition de symétries et translations : – composée de symétries orthogonales ; – décomposition de translations, de rotations ; – composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation. • Composition de rotations et translations : – composée de rotations ; – composée d'une rotation et d'une translation.	• Composer deux isométries : – deux symétries orthogonales ; – une symétrie orthogonale et une translation ; – deux rotations ; – une rotation et une translation. • Décomposer une isométrie : – une translation ; – une rotation.
Classification des isométries du plan • Classification à l'aide des points invariants : – décomposition d'une isométrie ; – isométries laissant invariants trois points non alignés ; – isométries laissant invariants deux points distincts ; – isométries laissant invariant un point. • Déplacements et antidéplacements : – définition et propriétés ; – composition de déplacements et antidéplacements ; – déterminations d'une isométrie.	• Étant donnés quatre points A, B, C et D tels que AB = CD, déterminer les isométries transformant (A,B) en (C,D). • Déterminer les isométries laissant invariante une configuration simple (deux points, un triangle équilatéral, un carré) et en établir le tableau de composition.
Applications affines • Généralités : – définitionn et propriétés ; – application vectorielle associée à une application affine. • Autres propriétés : – détermination d'une application affine ; – points invariants par une application affine ; – images d'une droite, du plan par une application affine. – expression analytique d'une application affine. • Affinités du plan : – définition ; – expression analytique.	• Une application affine *f* étant définie par un repère et son image : – déterminer l'image d'un point par *f* ; – déterminer l'expression analytique de *f* ; – démontrer que *f* est bijective ; – déterminer l'ensemble des points invariants par *f*. • Une application *f* étant définie par une expression analytique : – reconnaître que *f* une application affine ou pas ; – démontrer que *f* est bijective ; – déterminer l'ensemble des points invariants par *f*.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 86

$f = S_D \circ S_B = t_{2\overrightarrow{BD}}$.



♦ Exercice 1.b p. 86

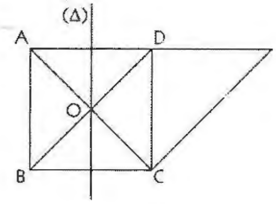
a) $S_{AC} \circ r(A, \frac{\pi}{2}) = S_{AC} \circ (S_{AC} \circ S_{AB}) = S_{AB}$

b) $r(D, \frac{\pi}{2}) \circ r(A, \frac{\pi}{2}) = (S_{BD} \circ S_{AD}) \circ (S_{AD} \circ S_{AC}) = S_{BD} \circ S_{AC} = S_O$

c) $r(C, -\frac{\pi}{2}) \circ r(A, \frac{\pi}{2}) = t_{2\overrightarrow{AD}}$

d) Soit (Δ) la médiatrice de [BC].

$r(A, \frac{\pi}{2}) \circ t_{\overrightarrow{CB}} = (S_{AC} \circ S_{AB}) \circ (S_{AB} \circ S\Delta) = S_{AC} \circ S\Delta = r(O, \frac{\pi}{2})$.



♦ Exercice 1.c p. 86

a) Soit A(4 ; 4). On a : $S \circ S' = r(A, \frac{\pi}{2})$.

b) $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont perpendiculaires en I(1 ; 0) ; donc : $S \circ S' = S_I$

c) $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles. Soit B(0 ; 2) et C(0 ; – 1) ; on a : $S \circ S' = t_{2\overrightarrow{BC}}$.

d) $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont perpendiculaires en $D(-\frac{2}{5} ; \frac{1}{5})$; donc : $S \circ S' = SD$.

♦ Exercice 1.e p. 86

Posons : $f = r(O, \frac{\pi}{3}) \circ t_{\overrightarrow{BO}}$.

f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

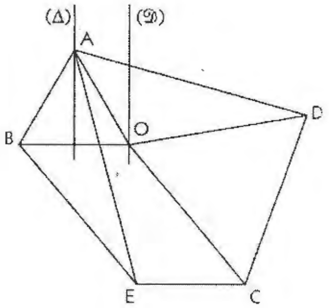
On a : $f(E) = r(O, \frac{\pi}{3})(C) = D$; $f(B) = r(O, \frac{\pi}{3})(O) = O$.

Soit (Δ) la médiatrice de [OB] et $(\mathscr{D})$ la perpendiculaire à (OB) en O.

On a : $t_{\overrightarrow{BO}} = S_{(\mathscr{D})} \circ S_{(\Delta)}$ et $r(O, \frac{\pi}{3}) = S_{(OA)} \circ S_{(\mathscr{D})}$;

donc : $f = S_{(OA)} \circ S_{(\Delta)} = r(A, \frac{\pi}{3})$.

On a : $r(A, \frac{\pi}{3})(E) = D$; donc, AED est un triangle équilatéral.



♦ Exercice 2.a p. 91

Soit B un point de $(\mathscr{D})$ autre que A ;

B' et B'' les points de $(\mathscr{D}')$ tels que : AB = A'B' = A'B''.

On sait qu'il existe un unique déplacement f tel que : $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

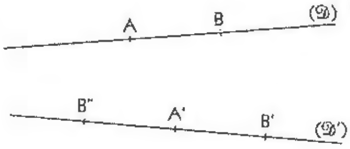
De même, il existe un unique déplacement g tel que : $g(A) = A'$ et $g(B) = B''$.

Désignons par : r la rotation de centre A et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$;

r' la rotation de centre A et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B''}})$;

t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

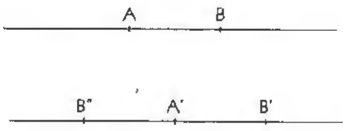
On a : $f = t \circ r$ et $g = t \circ r'$.



Cas particulier : $(\mathscr{D}) // (\mathscr{D}')$

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = \widehat{0} \Rightarrow f = t_{\overrightarrow{AA'}}$

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B''}}) = \widehat{P} \Rightarrow g = S_I$, avec I = mil[AA'].



♦ Exercice 2.b p. 91

Il existe un unique déplacement f tel que : $f(O) = O'$ et $f(A) = A'$. Donc : $f(\mathscr{C}) = (\mathscr{C}')$.

♦ Exercice 2.c p. 91

On a : AB = CD ; donc, il existe un unique déplacement f tel que : $f(A) = D$ et $f(B) = C$.

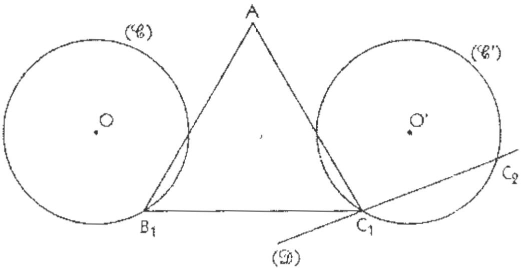
De plus : $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$; donc, f n'est pas une translation.

On en déduit que f est une rotation ; son angle est : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}}) = \widehat{P}$.

Donc, f est la symétrie de centre le milieu I de [BC].

On a : $f = S_I = r(I, \pi)$.

♦ Exercice 2.d p. 91



Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit $(\mathscr{C}')$ l'image du cerle $(\mathscr{C})$ par r.

- Si $(\mathscr{C}') \cap (\mathscr{D}) = \emptyset$, alors le problème n'a pas de solution.
- Si $(\mathscr{C}) \cap (\mathscr{D}) = \{C\}$, alors le problème admet une solution unique ABC, où $B = r(A, -\frac{\pi}{3})(C)$.
- Si $(\mathscr{C}') \cap (\mathscr{D}) = \{C_1, C_2\}$, alors le problème admet deux solutions AB_1C_1 et AB_2C_2, où $B_1 = r(A, -\frac{\pi}{3})(C_1)$ et $B_2 = r(A, -\frac{\pi}{3})(C_2)$.

♦ Exercice 2.e p. 91

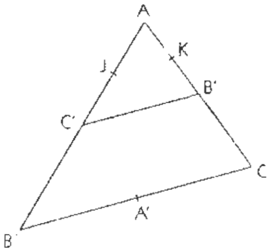
1. Soit (Δ) la médiatrice de [BC],
(Δ') la médiatrice de [AB] et O le centre de ABCD.

Les isométries laissant ABCD invariant sont : Id, $r = r(O, \frac{\pi}{2})$, r^{-1}, S_O, $S_{(\Delta)}$, $S_{(\Delta')}$, $S_{(AC)}$ et $S_{(BD)}$.

2. ***Tableau de composition***

$\circ$	Id	r	r^{-1}	S_O	$S_{(\Delta)}$	$S_{(\Delta')}$	$S_{(AC)}$	$S_{(BD)}$
Id	Id	r	r^{-1}	S_O	$S_{(\Delta)}$	$S_{(\Delta')}$	$S_{(AC)}$	$S_{(BD)}$
r	r	S_O	Id	r^{-1}	$S_{(BD)}$	$S_{(AC)}$	$S_{(\Delta)}$	$S_{(\Delta')}$
r^{-1}	r^{-1}	Id	S_O	r	$S_{(AC)}$	$S_{(BD)}$	$S_{(\Delta')}$	$S_{(\Delta)}$
S_O	S_O	r^{-1}	r	Id	$S_{(\Delta')}$	$S_{(\Delta)}$	$S_{(BD)}$	$S_{(AC)}$
$S_{(\Delta)}$	$S_{(\Delta)}$	$S_{(AC)}$	$S_{(BD)}$	$S_{(\Delta')}$	Id	S_O	r	r^{-1}
$S_{(\Delta')}$	$S_{(\Delta')}$	$S_{(BD)}$	$S_{(AC)}$	$S_{(\Delta)}$	S_O	Id	r^{-1}	r
$S_{(AC)}$	$S_{(AC)}$	$S_{(\Delta')}$	$S_{(\Delta)}$	$S_{(BD)}$	r^{-1}	r	Id	S_O
$S_{(BD)}$	$S_{(BD)}$	$S_{(\Delta)}$	$S_{(\Delta')}$	$S_{(AC)}$	r	r^{-1}	S_O	Id

♦ Exercice 3.a p. 98



1. Soit I, J et K les milieux respectifs des segments [B'C'], [AC'] et [AB'].
f conserve le milieu ; donc : $f(A') = I$, $f(B') = J$ et $f(C') = K$.

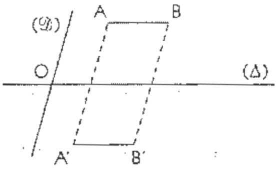
2.

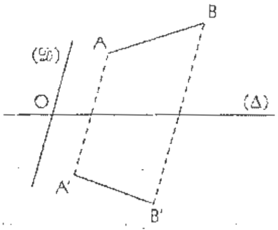
M	A	B	C	A'	B'	C'	(AA')	(BB')	(CC')
f(M)	A	B'	C'	I	J	K	(AI)	(B'J)	(C'K)

3. On trouve : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2} y \\ y' = \frac{1}{2} x. \end{cases}$

♦ Exercice 3.b p. 98

1. *a) (AB) et (Δ) sont parallèles* *b) (AB) et (Δ) sont sécantes*





2. f est l'affinité d'axe (Δ), de direction celle de $(\mathscr{D})$ et de rapport -1.

♦ Exercice 3.c p. 98

1. L'image, par f, du repère (C, I, J) est le repère (I, J, O), donc l'application f est bijective.

2. L'expression analytique de f est : $\begin{cases} x' = 1 - x - y \\ y' = x \end{cases}$. Le seul point invariant est A $(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$.

♦ Exercice 3.d p. 98

1. On trouve : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$. 2. On a : $f \circ f = I_{\mathcal{P}}$; donc, f est bijective.

Exercices d'apprentissage

DÉCOMPOSITION ET COMPOSITION D'ISOMÉTRIES

♦ Exercice 1 p. 99

a) (Δ) est la médiatrice du segment [AB]

b) (Δ) est l'image de la droite (AD) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

c) (Δ) est l'image de la droite (BC) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

d) (Δ) est la médiatrice du segment [AD].

♦ Exercice 2 p. 99

Posons : $\alpha = \text{Mes}\,\widehat{BAC}$.

a) $f = r(A, 2\alpha)$ *b)* $f = r(O, -2\alpha)$ *c)* $f = S_{(OB)}$ *d)* $f = S_{(OB)}$.

♦ Exercice 3 p. 99

a) $(\Delta) = (OA)$ *b)* $(\Delta) = (AB)$ *c)* $(\Delta) = (OB)$ *d)* $(\Delta) = (OC)$.

♦ Exercice 4 p. 99

a) $f = r(O, \frac{2\pi}{3})$ *b)* $f = t_{\overrightarrow{CB}}$ *c)* $f = S_{A'}$, où A' = mil [BC] *d)* $f = S_{B'}$, où B' = mil [AC].

♦ Exercice 5 p. 99

a) f est la rotation de centre Ω, symétrique de B par rapport à B', et d'angle $\frac{\pi}{3}$

b) f est la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

c) f est la symétrie de centre B

d) f est la symétrie de cente A', milieu de [BC].

♦ Exercice 6 p. 99

a) Soit (Δ) et (Δ') les bissectrices respectives des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABD}$.

On a : $r(A, \frac{\pi}{4}) = S_{(\Delta)} \circ S_{(AB)}$ et $r(B, \frac{\pi}{4}) = S_{(AB)} \circ S_{(\Delta')}$; donc : $f = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$.

Par suite, f est la rotation de centre Ω, point d'intersection de (Δ) et (Δ') et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) On a : $r(A, \frac{\pi}{2}) = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ et $r(B, \frac{\pi}{2}) = S_{(AB)} \circ S_{(BD)}$; donc : $f = S_{(AC)} \circ S_{(BD)} = S_O$.

c) On a : $f = t_{\overrightarrow{BD}}$.

d) Soit (Δ) la médiatrice du segment [AB] et (Δ') la bissectrice de l'angle $\widehat{CAD}$.

On a : $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(\Delta)} \circ S_{(AD)}$ et $r(B, \frac{\pi}{4}) = S_{(AD)} \circ S_{(\Delta')}$; donc : $f = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$.

Par suite, f est la rotation de centre Ω, point d'intersection de (Δ) et (Δ') et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

e) f est la rotation de centre Ω, image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

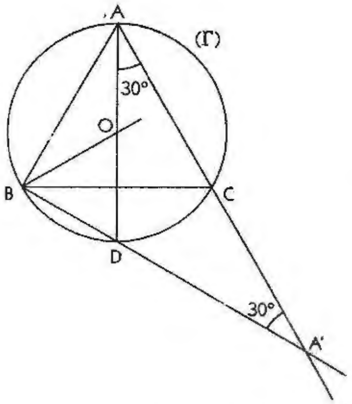
f) f est la rotation de centre Ω, symétrique de A par rapport à B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

♦ Exercice 7 p. 99

1. On a : $\alpha + \beta + \lambda = \pi$; donc, f est une symétrie centrale.

2. On a : $f(P) = P$; donc : $f = S_P$.

◆ Exercice 8 p. 99



1. ADC est un triangle inscrit dans un cercle de diamètre [AD] ;
donc, (CD) est perpendiculaire à (AC).

De plus : Mes(°) $\widehat{CA'D} = 30 =$ Mes(°) $\widehat{CAD}$.
Donc, AA'D est un triangle isocèle en D.
(CD) étant la hauteur relative au sommet principal, on a : AC = CA'.

2. On a : $S_{(BD)} \circ S_{(DC)} = r(D, -\frac{2\pi}{3})$;

$S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = r(A, \frac{2\pi}{3})$;

$S_{(DC)} \circ S_{(CA)} = r(C, \pi) = S_C$.

3. On en déduit que : $f = r(D, -\frac{2\pi}{3}) \circ r(A, \frac{2\pi}{3})$.
Donc, f est la translation de vecteur : $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AC}$.

b) On a : $S_{(BD)} \circ S_C \circ S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{AA'}}$; donc : $S_{(BD)} \circ S_C = t_{\overrightarrow{AA'}} \circ S_{(AB)}$ et $S_{(BD)} \circ S_C$ est une symétrie glissée.

ISOMÉTRIES ET DÉMONSTRATIONS DE PROPRIÉTÉS

◆ Exercice 9 p. 99

1. $r_P \circ r_Q$ est une rotation d'angle π, c'est-à-dire une symétrie centrale.
De plus, $r_P \circ r_Q(B) = rP(A) = C$; donc, $r_P \circ r_Q$ est la symétrie de centre I, milieu de [BC].

2. Posons : $Q' = S_I(Q)$. On a : $r_P(Q) = Q'$; donc, PQQ' est un triangle isocèle et rectangle en P.
(IP) est la hauteur relative au sommet principal I. Donc, le triangle IPQ est isocèle et rectangle en I.

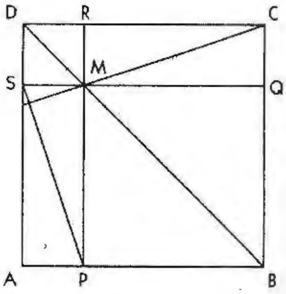
◆ Exercice 10 p. 99

1. $r(B, \frac{\pi}{3}) \circ r(A, -\frac{\pi}{3}) = t_{\overrightarrow{AE}}$.

2. On en déduit que : $r(B, \frac{\pi}{3}) = t_{\overrightarrow{AE}} \circ r(A, \frac{\pi}{3})$.

Donc : $r(B, \frac{\pi}{3})(C) = t_{\overrightarrow{AE}}(F)$; ou : $D = t_{\overrightarrow{AE}}(F)$; d'où, AEDF est un parallélogramme.

◆ Exercice 11 p. 99



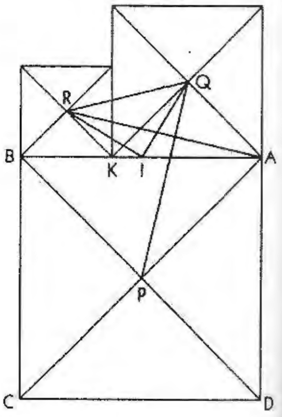
1. Soit r' la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{SA}$.
$t \circ r'$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{t \circ r'}{\curvearrowright}} \\ \hline M & P \\ Q & M \\ C & S \\ R & A \end{array}$$

2. On en déduit que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{SP}}) = \frac{\pi}{2}$.

◆ Exercice 12 p. 99



1. Soit C et D les autres sommets du carré principal, tels que ABCD soit direct.
Munissons le plan du repère orthonormé direct (C, D, B).
Posons ; $\lambda = KA$, où K est le sommet commun des deux petits carrés.

- On trouve : $Z_{\overrightarrow{IA}} = \frac{1}{2}$ et $Z_{\overrightarrow{IP}} = -\frac{1}{2}i$; donc : $Z_{\overrightarrow{IA}} = iZ_{\overrightarrow{IP}}$.

Par suite : IPA est un triangle isocèle et rectangle en I.

- On trouve : $Z_{\overrightarrow{IQ}} = \frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}i$ et $Z_{\overrightarrow{IR}} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{2}i$; donc : $Z_{\overrightarrow{IR}} = i\,Z_{\overrightarrow{IQ}}$.

Par suite : IQR est un triangle isocèle et rectangle en I.

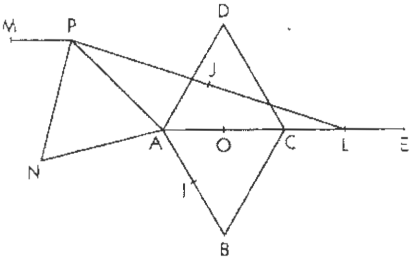
2. Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r}{\curvearrowright}} \\ \hline I & I \\ P & A \\ Q & R \end{array}$$

Donc, les droites (PQ) et (AR) sont perpendiculaires et AR = PQ.

♦ Exercice 13 p. 100



1. *a)* $f(\mathrm{O}) = \mathrm{A}$ *b)* On a : Mes$(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{IO}}, \overrightarrow{\mathrm{IA}}}) = \dfrac{\pi}{3}$ *c)* $f = r\left(\mathrm{I}, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. *a)* On a : $t(\mathrm{P}) = \mathrm{M} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{PM}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \overrightarrow{\mathrm{JL}} + \overrightarrow{\mathrm{JP}} &= \overrightarrow{\mathrm{JE}} + \overrightarrow{\mathrm{EL}} + \overrightarrow{\mathrm{JM}} + \overrightarrow{\mathrm{MP}} \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{JM}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{JM}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{O}} \end{aligned}$$

Par suite, J est le milieu de [LP].

b) On a : $f(\mathrm{P}) = r(\mathrm{A}, \dfrac{\pi}{3}) \circ t_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}(\mathrm{P}) = r(\mathrm{A}, \dfrac{\pi}{3})(\mathrm{M}) = \mathrm{N}$

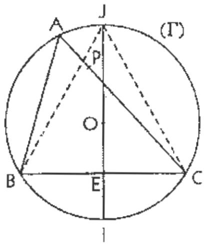
$$f(\mathrm{L}) = r(\mathrm{A}, \frac{\pi}{3}) \circ t_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}(\mathrm{L}) = r(\mathrm{A}, \frac{\pi}{3})(\mathrm{C}) = \mathrm{D}.$$

On en déduit le tableau ci-contre :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ \mathrm{P} & \mathrm{N} \\ \mathrm{L} & \mathrm{D} \end{array}$$

J et K sont les milieux respectifs de [LP] et [ND].
L'application affine f conservant le milieu, on a : $f(\mathrm{J}) = \mathrm{K}$.
Donc, IJK est un triangle équilatéral.

♦ Exercice 14 p. 100



1. *a) Voir figure ci-contre.*

b) L'ensemble cherché est l'arc du cercle (Γ) de corde [BC] contenant A, privé des points B et C.

2. *a)* AB = PC ; donc, il existe un unique déplacement qui applique (A, B) sur (P, C).
Or, les droites (AB) et (PC) sont sécantes ; donc, ce déplacement est une rotation r.
Son angle est : Mes$(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{PC}}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

b) Son centre est un point de l'arc de cercle précédent et de la médiatrice de [BC], c'est-à-dire le point J.

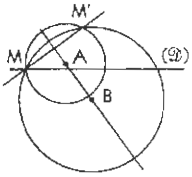
c) JAP est un triangle équilatéral.

3. *a)* On a : $r \circ S_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}) = r(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$.

b) $r \circ S_{\mathrm{B}}$ est la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$.

ISOMÉTRIES ET RECHERCHES DE LIEUX GÉOMÉTRIQUES

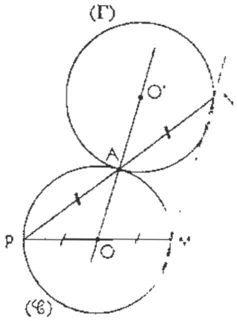
♦ Exercice 15 p. 100



On a : $\mathrm{M}' \in \mathscr{C}(\mathrm{A}, \mathrm{AM})$, donc : AM' = AM ;
$\mathrm{M}' \in \mathscr{C}(\mathrm{B}, \mathrm{BM})$, donc : BM' = BM.

Par suite, (AB) est la médiatrice de [MM'] et $\mathrm{M}' = S_{(\mathrm{AB})}(\mathrm{M})$.
Lorsque M décrit (𝒟), le point M' décrit la droite (𝒟'), image de (𝒟) par la symétrie orthogonale d'axe (AB).

♦ Exercice 16 p. 100



O est le milieu de [MP] ; donc : $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

A est le milieu de [NP] (axiome du milieu dans MNP) ;
donc : $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = -\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = -\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

Par suite : $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$; ou : $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

Donc : $\mathrm{N} = t(\mathrm{M})$, où t est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

Ainsi, lorsque M décrit (𝒞), alors N décrit le cercle (Γ), image de (𝒞) par t.

♦ Exercice 17 p. 100

On a : $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BA}$.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{t_{\overrightarrow{BA}}} \\ \hline B & A \\ M & P \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r(A, \frac{\pi}{3})} \\ \hline A & A \\ P & Q \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r \circ t} \\ \hline B & A \\ M & Q \\ (\mathscr{C}) & (\mathscr{C}') \end{array}$$

Soit t, la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$;

r, la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

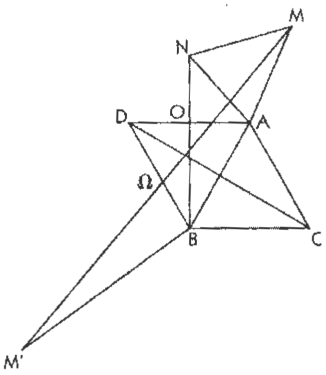
Lorsque M décrit $(\mathscr{C})$, Q décrit le cercle $(\mathscr{C}')$, image de $(\mathscr{C})$ par $r \circ t$.

♦ Exercice 19 p. 100

1. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r_1} \\ \hline A & A \\ M & N \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r_2} \\ \hline B & B \\ N & M' \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r} \\ \hline \Omega & \Omega \\ M & M' \end{array}$$

r est une rotation d'angle π telle que : $r(B) = r_2 \circ r_1 (B) = r_2(C) = D$.
Donc, r est la symétrie de centre Ω, milieu de [BD].



2. *a)* On a : $\text{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})} = \frac{\pi}{3}$; $\text{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BM'})} = \frac{2\pi}{3}$; $\text{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega M'})} = \pi$.

Les points M, N et M' sont alignés si et seulement si : $\widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MM'})} = \hat{0}$.

On a : $\widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MM'})} = \widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M\Omega})}$ (car M', Ω et M sont alignés)

$= \widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MA})} + \widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\Omega})}$ (Chasles) ;

donc : $\widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MM'})} = \hat{0} \Leftrightarrow \widehat{(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA})} = \widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MA})}$;

par suite : $\text{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA})} \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$.

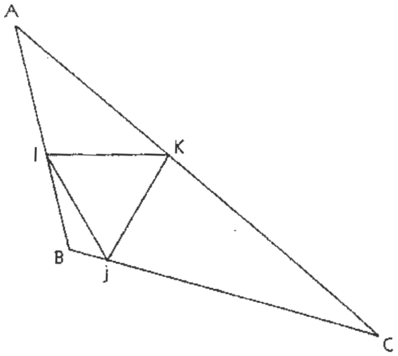
b) Soit O le point de la médiatrice de $[A\Omega]$ tel que :

$\text{Mes}\,\widehat{(\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{OA})} \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

(Γ) est le cercle de centre O et de rayon OA, privé des points A et Ω.

ISOMÉTRIES ET PROBLEMES DE CONSTRUCTION

♦ Exercice 20 p. 100



Analyse du problème

On suppose que le problème admet une solution IJK.
Soit alors r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
On a :

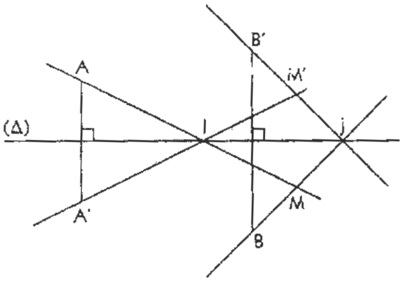
$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{r} \\ \hline I & I \\ J & K \\ (BC) & (B'C') \end{array}$$

On doit avoir : $K \in (AC) \cap (B'C')$ et $J = r^{-1}(K)$.

Synthèse

Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Désignons par B' et C' les images respectives de B et C par r.
La droite (B'C') est l'image de la droite (BC) par r.
Soit K le point d'intersection des droites (B'C') et (AC).
Posons : $J = r^{-1}(K)$.
Le triangle IJK est une solution du problème.

♦ Exercice 21 p. 100



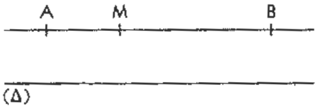
La construction utilise les propriétés suivantes :

- l'image, par une symétrie orthogonale d'axe (Δ), d'une droite $(\mathcal{D})$ est une droite $(\mathcal{D}')$;
- les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ se coupent sur (Δ).

1^er^ cas : (AB) et (Δ) sont sécantes

Soit I le point d'intersection des droites (AM) et (Δ) ;
on a : $M' \in (IA')$.
Soit J le point d'intersection des droites (BM) et (Δ) ;
on a : $M' \in (JB')$.
M' est le point d'intersection des droites (IA') et (JB').

2^e^ cas : (AB) et (Δ) sont parallèles

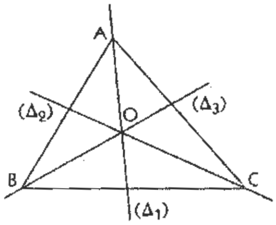


- Si $M \notin (AB)$, on procède comme précédemment.
- Si $M \in (AB)$:

– on choisit deux points P et Q extérieurs à (AB) et tels que : (PQ) et (Δ) soient sécantes ;
– on construit P' et Q', images respectives de P et Q ;
– on construit l'image M' de M à partir du couple (P, Q) et son image (P', Q').

♦ Exercice 23 p. 100

Analyse du problème



On suppose que le problème admet une solution ABC.
- Si l'on connaît un des côtés du triangle, les deux autres côtés sont les symétriques de celui-ci par rapport aux supports de ces côtés.
- Notons S_1 la symétrie orthogonale par rapport à la droite (Δ_i), $i \in \{1, 2, 3\}$.
$S_3 \circ S_2 \circ S_1$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite $(\mathcal{D})$ qui contient le point O.
- Soit (Δ) le support du côté [AC].
La droite (Δ) est globalement invariante par $S_{(\mathcal{D})}$; donc : $(\Delta) \perp (\mathcal{D})$.

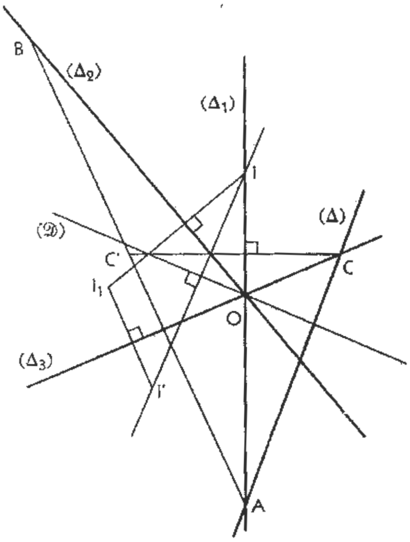
Synthèse

Construction de $(\mathcal{D})$

On a : $S_{(\mathcal{D})} = S_3 \circ S_2 \circ S_1$.
Soit I un point de (Δ_1) et I' son image par $S_{(\mathcal{D})}$.
On a : $I' = S_3 \circ S_2\ (I) = S_3\ (I_1)$.
Donc : $(\mathcal{D})$ = méd [II'] ;
$(\mathcal{D})$ est la perpendiculaire à (II') passant par O.

Construction de ABC

– On construit $(\mathcal{D})$ comme indiqué précédemment.
– On trace une droite (Δ) perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ et ne contenant pas le point O.
(Δ) coupe les droites (Δ_1) et (Δ_3) en A et C respectivement.
On pose : $C' = S_{(\Delta_1)}\ (C)$.



DÉTERMINATIONS D'ISOMÉTRIES

♦ Exercice 25 p. 101

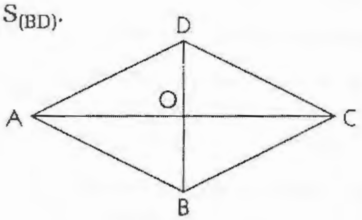
$r \circ t$ et $t \circ r$ sont des rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit (Δ) la médiatrice de [BC].

- On a : $t_{\overrightarrow{BC}} = S_{(\Delta)} \circ S_{(AB)}$ et $r\,(O, \frac{\pi}{2}) = S_{(AC)} \circ S_{(\Delta)}$. Donc : $r \circ t = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = r\,(A, \frac{\pi}{2})$.
- On a : $t_{\overrightarrow{BC}} = S_{(CD)} \circ S_{(\Delta)}$ et $r\,(O, \frac{\pi}{2}) = S_{(\Delta)} \circ S_{(BD)}$. Donc : $t \circ r = S_{(CD)} \circ S_{(BD)} = r\,(D; \frac{\pi}{2})$.

◆ Exercice 27 p. 101

1. Les isométries laissant le losange ABCD invariant sont : Id, S_O, $S_{(AC)}$ et $S_{(BD)}$.



2.

$\circ$	Id	S_O	$S_{(AC)}$	$S_{(BD)}$
Id	Id	S_O	$S_{(AC)}$	$S_{(BD)}$
S_O	S_O	Id	$S_{(BD)}$	$S_{(AC)}$
$S_{(AC)}$	$S_{(AC)}$	$S_{(BD)}$	Id	S_O
$S_{(BD)}$	$S_{(BD)}$	$S_{(AC)}$	S_O	Id

◆ Exercice 28 p. 101

1. Soit f une isométrie transformant [AB] en lui-même. f conserve le milieu ; donc : $f(I) = I$.
Déterminons l'image M du point A par f.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline I & I \\ A & M \end{array}$$

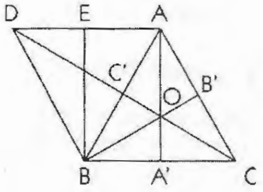
On a : $IM = IA \Rightarrow M \in \mathscr{C}(I, IA)$ et $M \in (IA)$. Donc : $M \in \{A, B\}$.

- Si $f(A) = A$ et $f(B) = B$, alors : $f = \text{Id}$ ou $f = S_{(AB)}$
- Si $f(A) = B$ et $f(B) = A$, alors : $f = S_I$ ou $f = S_{(\Delta)}$, avec $(\Delta) = \text{méd}\,[AB]$.

2. Les isométries cherchées sont : Id, S_I, $S_{(AB)}$ et $S_{(\Delta)}$, où $(\Delta) = \text{méd}\,[AB]$.

◆ Exercice 29 p. 101

1. Il existe exactement deux isométries qui transforment (A, B') en (B, C') :
– un déplacement : $f = r\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$,
– un antidéplacement : $g = S_{(BC')} \circ f = S_{(BC')} \circ r\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$.



2. Soit D le point tel que ABD est un triangle équilatéral et E le milieu de [AD].

On a :

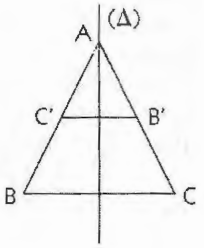
$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline A & B \\ B' & C' \\ C & A \\ A' & B' \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{g}{\curvearrowright}} \\ \hline A & B \\ B' & C' \\ C & A \\ A' & E \end{array}$$

APPLICATIONS AFFINES

◆ Exercice 30 p. 101

1. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ B & B' \\ C & C' \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{h(A,\,2)}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ B' & C \\ C' & B \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{h \circ f}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ B & C \\ C & B \end{array}$$



$h \circ f$ transforme ABC en ACB, donc $h \circ f$ est une isométrie.

2. Soit (Δ) la médiatrice de [BC]. On a : $h \circ f = S_{(\Delta)}$.

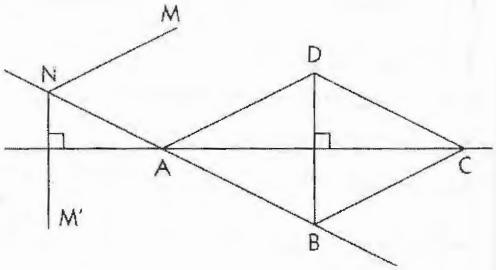
◆ Exercice 31 p. 101

1. *a)* On a : $f(D) = A$, $f[(AD)] = \{A\}$, $f(\mathscr{P}) = (AD)$.
b) L'image, par $f \circ f$, du repère (A, B, C) est le triplet (A, A, A).
Donc, $f \circ f$ est l'application qui, à tout point M du plan associe le point A.

2. *a)* On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{g \circ f}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ B & B \\ C & B \end{array}$$

$g \circ f$ est la projection p sur (AB), suivant la direction de (BC).
b) On a : $g \circ f = p \Rightarrow f = g^{-1} \circ p = g \circ p$.
Pour construire l'image M', par f, d'un point M du plan, on peut :
– construire l'image N de M par p ;
– construire l'image M' de N par g.



♦ Exercice 32 p. 101

1. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline A & B \\ B & A \\ C & C \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline B & A \\ A & B \\ C & C \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f\circ f}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ B & B \\ C & C \end{array}$$

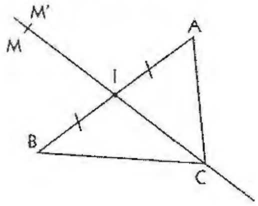
Donc : $f \circ f = \text{Id}$.

2. Soit I le milieu de [AB].
f conservant le milieu, $f(I)$ est le milieu de $[f(A)f(B)] = [BA]$; donc : $f(I) = I$.

3. $\forall$ M $\in$ (IC), $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ / $\overrightarrow{IM} = \lambda\overrightarrow{IC}$.
Donc : $\overrightarrow{f(I)\,f(M)} = \lambda\,\overrightarrow{f(I)\,f(C)}$; ou : $\overrightarrow{I\,f(M)} = \lambda\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IM}$. On en déduit que : $f(M) = M$.

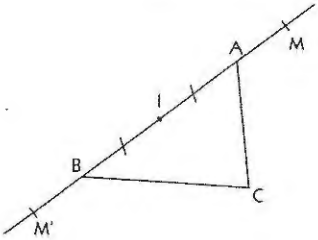
4. Soit M' $\in f$(AB). Donc : $\exists$ M $\in$ (AB) / M' = f(M).
Or : M $\in$ (AB) $\Leftrightarrow \exists\ t \in \mathbb{R}$ / $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.
Donc : $\overrightarrow{BM'} = t\overrightarrow{BA}$; ou : $\overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AB} = -\,t\overrightarrow{AB}$; ou encore : $\overrightarrow{AM'} = (1-t)\overrightarrow{AB}$.
Par suite : M' $\in$ (AB). On en déduit que : $f(AB) \subset (AB)$.
f étant involutive, $(AB) \subset f(AB)$. D'où : $f(AB) = (AB)$.

5. ***1^er^ cas : M ∈ (IC)***



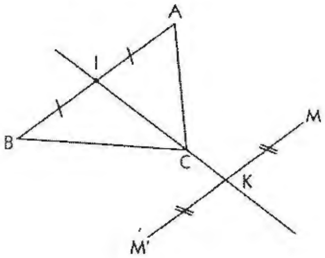
$f = \text{Id}$

2^e^ cas : M ∈ (AB)



$f = S_I$

3^e^ cas : M ∉ (IC) ∪ (AB)



f est l'affinité :
- d'axe (IC) ;
- de direction celle de (AB),
- de rapport – 1.

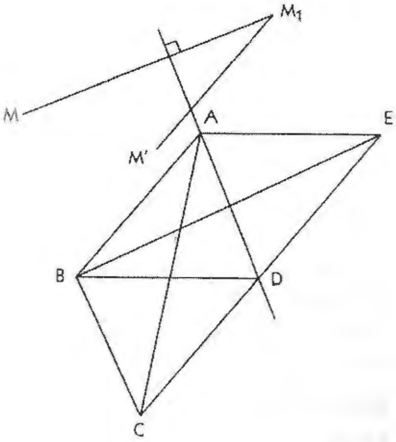
♦ Exercice 33 p. 101

1. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline A & B \\ B & D \\ D & C \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{t^{-1}}{\curvearrowright}} \\ \hline B & A \\ D & E \\ C & D \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{t^{-1}\circ f}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ B & E \\ D & D \end{array}$$

On a $g = t^{-1} \circ f = S_{(AD)}$, car ABDE est un losange.

2. On a : $f = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)}$.
Pour construire l'image M', par f, d'un point M du plan, on peut :
- construire l'image M_1 de M par $S_{(AD)}$;
- construire l'image M' de M_1 par $t_{\overrightarrow{AB}}$.

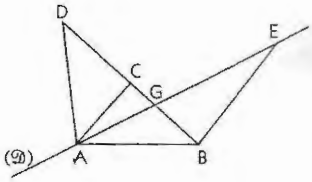


3. Soit M un point de coordonnées (α, β) dans le plan muni du repère (A, B, D).
On a : $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$; donc : $\overrightarrow{BM'} = \alpha\overrightarrow{BD} + \beta\overrightarrow{BC}$;
ou : $\overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AB} = \alpha(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + \beta(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$.
Or : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Doù : $\overrightarrow{AM'} = (1-\alpha)\overrightarrow{AB} + (\alpha+\beta)\overrightarrow{AD}$.

$$\text{On a : M' = M} \Rightarrow \begin{cases} 1-\alpha = \alpha \\ \alpha+\beta = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2} \\ \alpha = 0\,. \end{cases}$$

Ceci est impossible ; donc, f n'a pas de point invariant.

♦ Exercice 34 p. 101



1. L'ensemble des points invariants est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $y = 2x$.

Soit E le point tel que : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AC}$. On a : $(\mathcal{D}) = (AE)$.

2. On a : $(\mathcal{D}) : y = 2x$ et $(BC) : y = -x + 1$.

Donc, $(\mathcal{D}) \cap (BC)$ est le point G $(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3})$. On en déduit que : $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GC}$.

3. D'après **2.**, on a : $\overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{GB}$.
Donc, f est l'affinité d'axe (AG), de direction celle de (BD) et de rapport – 2.

♦ Exercice 35 p. 101

Soit : G = bar {(A, a) ; (B, b)}.
f_1 est une application affine ; donc : G_1 = bar {(A_1, a) ; (B_1, b)}.
f_2 est une application affine ; donc : G_2 = bar {(A_2, a) ; (B_2, b)}.
Posons : A' = g(A), B' = g(B) et G' = g(G).

Par définition de g, on a :
A' = bar {(A_1, α) ; (A_2, β)} ; B' = bar {(B_1, α) ; (B_2, β)} ; G' = bar {(G_1, α) ; (G_2, β)}.
Démontrons que : G' = bar {(A', a) ; (B', b)}.

D'une part, on a :

$$\underbrace{(A_1, \frac{\alpha}{a+b}a)\ (B_1, \frac{\alpha}{a+b}b)}_{(G_1,\ \alpha)} \qquad \underbrace{(A_2, \frac{\beta}{a+b}a)\ (B_2, \frac{\beta}{a+b}b)}_{(G_2,\ \beta)}$$

$$(G',\ \alpha+\beta)$$

D'autre part, on a :

$$(A_1, \frac{\alpha}{a+b}a)\ (B_1, \frac{\alpha}{a+b}b) \qquad (A_2, \frac{\beta}{a+b}a)\ (B_2, \frac{\beta}{a+b}b)$$

$$(A', \frac{\alpha+\beta}{a+b}a) \qquad (B', \frac{\alpha+\beta}{a+b}b)$$

$$\text{bar}\ \{(A', \frac{\alpha+\beta}{a+b}a) ; (B', \frac{\alpha+\beta}{a+b}b)\}$$

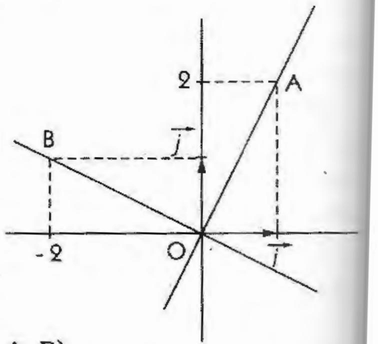
Donc, on a : G' = bar {(A', a) ; (B', b)}.

♦ Exercice 36 p. 101

1. On trouve : $\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = 2x . \end{cases}$

Cette expression est de la forme : $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$; donc, f est une application affine.

2. Soit A(x, y). On a : f(A) = A $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3x + 2y \\ y = 2x . \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x$.



On peut choisir : A (1 ; 2).
L'ensemble des points invariants par f est donc la droite (OA).
Soit B (x, y).
On obtient : $\overrightarrow{Of(B)} = -4\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow x = -2y$. On peut choisir : B(–2 ; 1).

Déduction
On a : $\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB} = 0$; donc : (OA) ⊥ (OB).
f est l'affinité orthogonale d'axe (OA) et de rapport – 4.

3. Soit M un point de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X,Y) dans (O, A, B).

On a : $\begin{cases} x = X - 2Y \\ y = 2X + Y . \end{cases}$ Donc, l'expression analytique de f dans (O, A, B) est : $\begin{cases} x' = X + 8Y \\ y' = 2X - 4Y . \end{cases}$

♦ Exercice 37 p. 101

1. On a : $\vec{a} = \|\vec{a}\|\vec{u}$; donc : $\overrightarrow{AM'} = (2\|\vec{a}\|^2 - 1)x\vec{u} - y\vec{v}$.

On en déduit que : $\begin{cases} x' = (2\|\vec{a}\|^2 - 1)x \\ y' = -y \, . \end{cases}$

L'expression analytique de f est de la forme : $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \, . \end{cases}$

Donc, f est une application affine.

2. Étant donné x', l'équation $(2\|\vec{a}\|^2 - 1)x = x'$ admet une solution unique si et seulement si : $\|\vec{a}\|$ est différent de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

3. *a)* Si $\|\vec{a}\| = 0$, alors l'expression analytique de f est : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \, . \end{cases}$

Donc, f est la symétrie de centre A.

b) Si $\|\vec{a}\| = 1$, alors l'expression analytique de f est : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \, . \end{cases}$

Donc, f est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

♦ Exercice 39 p. 102

Soit O le point d'intersection des droites $(\mathcal{D})$ et (Δ). Soit $I \in (\Delta)$ et $J \in (\mathcal{D})$.
Munissons le plan du repère (O, I, J).
On a :

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline O & O \\ I & O \\ J & K\text{, avec } K(0,2). \end{array}$$

On en déduit l'expression analytique de f est : $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 2y \, . \end{cases}$

- Donc, f est une application affine.
- Tout point de la droite (Δ) a pour image, par f, le point O ; donc, f n'est pas bijective.
- Seul le point O est invariant par f.

♦ Exercice 40 p. 102

1. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5$ et $\det(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -13$.

f transforme le repère (A, B, C) en le repère (A', B', C') ; donc, f est bijective.

2. On trouve : $\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 3x - y + 4 \, . \end{cases}$

♦ Exercice 41 p. 102

1. Soit (X, Y) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

On a : $\begin{cases} X = \dfrac{1}{3}(x - 2y - 6) \\ Y = \dfrac{1}{3}(2x - 4y - 12). \end{cases}$ Donc, $\overrightarrow{MM'}$ a la direction du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

2. On a bien : $f \circ f = f$.

3. *a)* L'ensemble des points invariants est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $x - 2y - 6 = 0$.

b) f est la projection sur la droite $(\mathcal{D})$, suivant la direction du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

♦ Exercice 42 p. 102

1. On a bien : $f \circ f = \text{Id}$.

2. L'ensemble des points invariants est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $2x + 3y - 6 = 0$.

3. *a)* Soit I (X, Y) le milieu de [MM'].

On a : $\begin{cases} X = \dfrac{1}{13}(9x - 6y + 12) \\ Y = \dfrac{1}{13}(-6x + 4y + 18) \end{cases}$. On vérifie que : $2X + 3Y - 6 = 0$.

b) Soit (X, Y) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

On a : $\begin{cases} X = \dfrac{4}{13}(-2x - 3y + 6) \\ Y = \dfrac{6}{13}(-2x - 3y + 6) \end{cases}$. Donc : $3X = 2Y$.

$\overrightarrow{MM'}$ a la direction du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de la droite $(\mathcal{D})$ est $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$; donc : $\vec{u} \perp \vec{v}$.

c) f est la symétrie orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$.

♦ Exercice 43 p. 102

L'expression analytique de f est : $\begin{cases} x' = 8x - 4y + 2 \\ y' = 4x + 2y + 4 \end{cases}$. Donc, f est une application affine.

♦ Exercice 44 p. 102

1. f est bijectvive et $f^{-1} = f$.

2. f conserve le milieu ; donc, $f(M)$ est le milieu de $[f(A)f^2(A)] = [f(A)A]$. Par suite : $f(M) = M$.

3. *a)* Soit A un point du plan. f étant bijective, $f(A)$ existe et est unique.
D'après la question **2.**, le milieu M du segment $[Af(A)]$ est invariant par f. Donc, l'ensemble $(\mathcal{I})$ n'est pas vide.

b) Soit A l'unique point invariant par f. Soit alors M et M' deux points du plan tels que : $M' = f(M)$.
D'après la question **2.**, le milieu de [MM'] est invariant par f ; donc, A est le milieu de [MM'].
Par suite, f est la symétrie de centre A.

♦ Exercice 45 p. 102

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline O & O' \\ I & I \\ J & J \end{array}$$

, avec : $O'(2\ ;\ 1)$.

f est l'affinité d'axe la droite (IJ) d'équation $y = -x + 1$, de direction celle de $\overrightarrow{OO'}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et de rapport -2.

♦ Exercice 46 p. 102

1. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline O & O' \\ I & I' \\ J & J' \end{array}$$

, avec : $O'(2\ ;\ 0)$; $I'(4\ ;\ 1)$ et $J'(-3\ ;\ -2)$.

On a : $\det(\overrightarrow{O'I'}, \overrightarrow{O'J'}) = 1$.
f transforme le repère (O, I, J) en le repère (O', I' J') ; donc, f est bijective.

a) l'image, par f, d'une droite $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, ($a$ et b non tous nuls), est une droite $(\mathcal{D}')$ de vecteur directeur $\vec{u}'\begin{pmatrix}2a - 5b\\a - 2b\end{pmatrix}$.

On a : $\det(\vec{u}, \vec{u}') = (a - 2b)^2 + b^2$.
Les nombres réels a et b étant non tous nuls, on a : $\det(\vec{u}, \vec{u}') \neq 0$; donc, $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes.

b) On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline M & M_1 \\ M_1 & M_2 \end{array}$$

D'après ce qui précède, les droites (MM_1) et (M_1M_2) sont sécantes.
Donc, les points M, M_1 et M_2, lorsqu'ils sont distincts, ne sont pas alignés.

2. On a $f \circ f$: $\begin{cases} x' = -x + 6 \\ y' = -y + 2. \end{cases}$

Donc, $f \circ f$ est la symétrie de centre A $(3\ ;\ 1)$. On en déduit que : $f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{Id}$.

3. *a)* A est le seul point invariant par f.

On a : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2} + \overrightarrow{AM_3})$

Or : $\overrightarrow{AM}\left|\begin{array}{l} x-3 \\ y-1 \end{array}\right.$; $\overrightarrow{AM_1}\left|\begin{array}{l} 2x-5y-1 \\ x-2y-1 \end{array}\right.$; $\overrightarrow{AM_2}\left|\begin{array}{l} -x+3 \\ -y+1 \end{array}\right.$; $\overrightarrow{AM_3}\left|\begin{array}{l} -2x+5y+1 \\ -x+2y+1. \end{array}\right.$

Donc : $\overrightarrow{AM_2} = -\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM_3} = -\overrightarrow{AM_1}$. Par suite : $\overrightarrow{AG} = \vec{0}$ et $G = A$.

b) Soit M(2 ; 1). On a : $M_1(1\ ;\ 0)$; $M_2(4\ ;\ 1)$ et $M_3(5\ ;\ 2)$.

♦ Exercice 47 p. 102

1. *a)* On a : $f(B') = B''$ (conservation du milieu).

b) AB'A'C est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur ; c'est donc un losange.

2. Si $f(A') = A''$, on a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A' \\ B & B' \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline A' & A'' \\ B' & B'' \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f\circ f}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A'' \\ B & B'' \end{array}$$

Donc : $f\circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA''}$.

Réciproquement, supposons que $f\circ f$ soit une translation.

Le vecteur de cette translation est : $\overrightarrow{BB''}$; on a : $f\circ f = t_{\overrightarrow{BB''}}$.
Donc : $f\circ f(A) = t_{\overrightarrow{BB''}}(A) = A''$; ou : $f(A') = A''$.

3. *a)* $\varphi(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{AA'}$; $\varphi(\overrightarrow{B'C}) = -\overrightarrow{B'C}$ *b)* $f = S_{(AA')}\circ t_{\overrightarrow{CB''}} = t_{\overrightarrow{CB''}}\circ S_{(AA')}$.

Exercices d'approfondissement

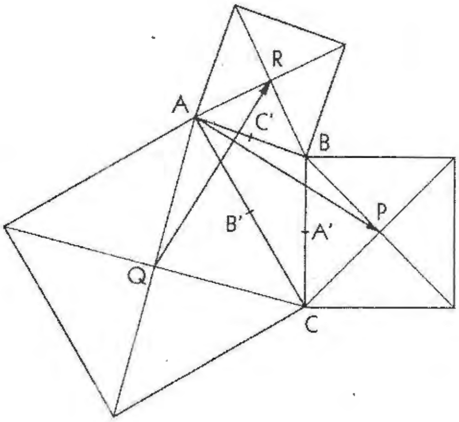
♦ Exercice 48 p. 103

1. On a : $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'R}$ (relation de Chasles)

$= \overrightarrow{QB'} + \overrightarrow{C'R} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ $(\overrightarrow{B'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$.

2. *a)* D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\overrightarrow{QR}) &= \varphi(\overrightarrow{QB'}) + \varphi(\overrightarrow{C'R}) - \varphi(\overrightarrow{BA'}) \\ &= \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{C'A} - \overrightarrow{A'P} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{A'P}.\end{aligned}$$



D'autre part, on a :

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{A'P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A'P}.$$

Donc : $\varphi(\overrightarrow{QR}) = -\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA}$.

b) Par défiuition de φ, On a :

$$\varphi(\overrightarrow{QR}) = \overrightarrow{PA} \Rightarrow \begin{cases} \|\overrightarrow{PA}\| = \|\overrightarrow{QR}\| \\ \mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{PA}}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AP = QR \\ (AP) \perp (QR). \end{cases}$$

♦ Exercice 49 p. 103

1. *a)* On a : $z_{\overrightarrow{AC}} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_{\overrightarrow{AB}} \Leftrightarrow c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$

$z_{\overrightarrow{DF}} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_{\overrightarrow{DE}} \Leftrightarrow f - d = e^{i\frac{\pi}{3}}(e - d)$

b) On a : $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DE} \Leftrightarrow g - b = e - d \Leftrightarrow g = b - d + e$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HF} \Leftrightarrow f - h = d - c \Leftrightarrow h = c - d + f$

c) On a : $g - a = b - d + e - a$

$$\begin{aligned} h - a &= c - d + f - a = (c - a) + (f - d) \\ &= e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) + e^{i\frac{\pi}{3}}(e - d) = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a + e - d) = e^{i\frac{\pi}{3}}(g - a)\end{aligned}$$

Donc : $z_{\overrightarrow{AH}} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_{\overrightarrow{AG}}$. Par suite, AGH est un triangle équilatéral.

2. *a)* f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a : $f(B) = t_2\circ r\circ t_1\ (B) = t_2\circ r\ (D) = t_2\ (D) = C$.

Donc, le centre Ω de la rotation f appartient à la médiatrice du segment [BC].

De plus : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}}) = \dfrac{\pi}{3} = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Donc : $\Omega = A$.

f est la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

b) On a : $f(G) = t_2 \circ r \circ t_1\ (G) = t_2 \circ r\ (E) = t_2\ (F) = H$.

f étant la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, AGH est un triangle équilatéral.

♦ Exercice 50 p. 103

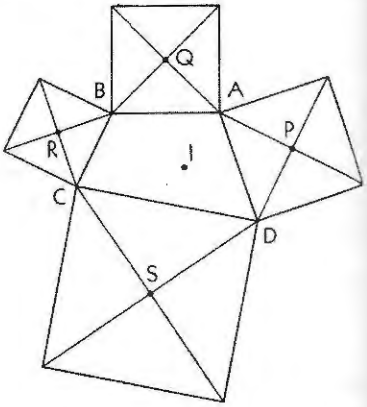
1. Soit I le milieu de [BD].

D'après l'exercice **9**, on a : PQI isocèle et rectangle en I ; RSI isocèle et rectangle en I.

Soit alors r la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r}{\curvearrowright}} \\ \hline I & I \\ P & Q \\ R & S \end{array}$$



Donc : $(PR) \perp (QS)$ et $PR = QS$.

2. Lorsque ABCD est un parallélogramme, on a :

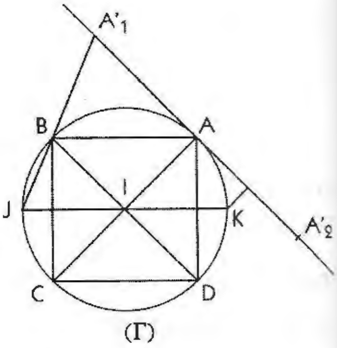
$\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AQ}$ (Chasles)
$\quad = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{SC}$ (ABCD parallélogramme)
$\quad = \overrightarrow{SI}$

$\overrightarrow{IR} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BR}$ (Chasles)
$\quad = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{PD}$ (ABCD parallélogramme)
$\quad = \overrightarrow{PI}$.

Donc, [PR] et [QS] se coupent en leur milieu.

PQRS est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur ; donc, PQRS est un carré.

♦ Exercice 51 p. 103



1. f, g_1 et g_2 sont des rotations d'angles respectifs $\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.

2. *a)* $f(D) = t \circ r_D(D) = t(D) = A$;
$f(A) = t \circ r_D(A) = t(C) = B$.

Le point d'intersection des médiatrices de [AD] et [AB] est I.

Donc, f est la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b) $g_1(D) = r_1 \circ f(D) = r_1(A) = A$; $g_2(D) = r_2 \circ f(D) = r_2(A) = A$.

3. *a)* On a : $g_2 \circ g_1^{-1} = r_2 \circ f \circ f^{-1} \circ r_1^{-1} = r_2 \circ r_1^{-1} = S_A$. Donc : $g_2 = S_A \circ g_1$.

On en déduit que : $g_2(A) = S_A \circ g_1(A)$; ou : $A'_2 = S_A(A'_1)$;
par suite, A est le milieu de $[A'_1\, A'_2]$.

b) On a : $r_2(A'_1) = r_2 \circ g_1\ (A) = r_2 \circ r_1 \circ f(A) = r_2 \circ r_1(B) = r\ (A, \dfrac{\pi}{2})\ (B) = D$.

Donc : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AA_1'}, \overrightarrow{AD}}) = \dfrac{3\pi}{4}$ et $(AC) \perp (AA'_1)$.

4. *a)* On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{g_1}{\curvearrowright}} \\ \hline J & J \\ D & A \\ A & A'_1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{g_2}{\curvearrowright}} \\ \hline K & K \\ D & A \\ A & A'_2 \end{array}$$

J est le point d'intersection des médiatrices de [AD] et $[AA'_1]$;
K est le point d'intersection des médiatrices de [AD] et $[AA'_2]$.

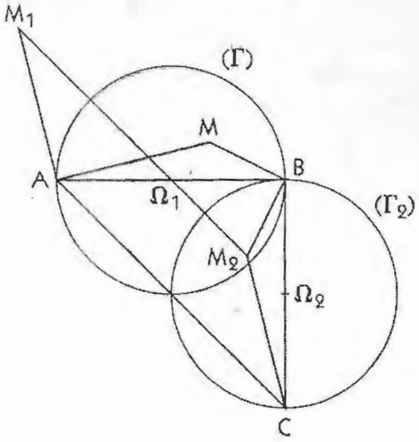
On a : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JA}}) = -\dfrac{\pi}{4}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KD}, \overrightarrow{KA}}) = \dfrac{3\pi}{4}$.

- Donc, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JA}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}})$; par suite, les points A, C, D, J appartiennent à un même cercle qui est (Γ).
- De même : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JA}}) \equiv \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KD}, \overrightarrow{KA}})$ [modulo π] ; par suite, les points A, D, J et K appartiennent à un même cercle qui est (Γ').

(Γ) et (Γ') ont trois points communs, donc ils sont confondus. Par suite, J et K appartiennent à (Γ).

De plus, les points J et K appartiennent à la médiatrice de [AD] ; donc, [JK] est cette médiatrice. Par suite, [JK] est un diamètre de (Γ).

b) Voir la figure ci-contre.



♦ Exercice 52 p. 103

1. *a)* On a : $t(A) = r_B \circ r_A^{-1}(A) = r_B(A) = C$.

Donc, ABC est un triangle isocèle et rectangle en B, de sens direct.

b) t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

c) On a : $r_B \circ r_A^{-1} = t \Leftrightarrow r_B = t \circ r_A$.

Donc : $r_B(M) = t \circ r_A(M)$;

c'est-à-dire : $M_2 = t(M_1)$; ou : $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$.

Par suite : M_1M_2CA est un parallélogramme.

2. *a)* On a : $\overset{r_B}{\curvearrowright}$

B	B
A	C
M	M_2
(Γ)	(Γ_2)

Donc, lorsque M décrit (Γ), M_2 décrit le cercle (Γ) de diamètre [BC].

b) On a : $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

c) On a : $\overrightarrow{M_2I} = \overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}$. ; c'est-à-dire : $I = t_{\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}}(M_2)$.

Donc, lorsque M décrit (Γ), I décrit le cercle (Γ_2), image du cercle (Γ) par la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}$.

♦ Exercice 53 p. 103

Soit : S_i les symétries de centres A_i ($i = 1, 2, ..., n$) ;

$T = S_n \circ S_{n-1} \circ ... \circ S_1$.

La connaissance d'un sommet détermine le polygone ; par exemple, déterminer M_1 équivaut à la recherche d'un point fixe pour T.

1^er^ cas : n est impair

T est une symétrie centrale, donc, le problème admet une solution unique.

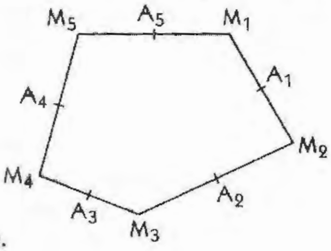
Exemple : $n = 5$

On a : $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1M_4} + \overrightarrow{M_4M_2}$;

donc : $2\overrightarrow{A_5M_5} = 2\overrightarrow{A_5A_4} + 2\overrightarrow{A_3A_2}$;

ou : $\overrightarrow{A_5M_5} = \overrightarrow{A_5A_4} + \overrightarrow{A_3A_2}$.

Ainsi, on peut déterminer un sommet du pentagone, donc tout le pentagone.



2^e^ cas : n est pair (n = 2p)

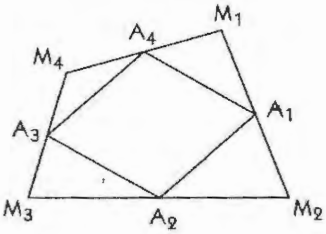
T est la translation de vecteur $\vec{u} = 2\sum_{k=1}^{p}\overrightarrow{A_{2k-1}A_{2k}}$

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, le problème n'a pas de solution.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors : $T = Id_{\mathcal{P}}$; tout point du plan est sommet d'un tel polygone.

Exemple : $n = 4$

$\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_4A_3}$

$\Leftrightarrow A_1A_2A_3A_4$ est un parallélogramme.



♦ Exercice 54 p. 103

Soit : A, B et C trois points de (Δ) ;

I, J et K les milieux respectifs de [Af(A)], [Bf(B)] et [Cf(C)]

On doit démontrer que : I, J et K sont alignés.

1. *a)* Si $f = S_{(\mathcal{D})}$, alors I, J et K appartiennent à $(\mathcal{D})$.

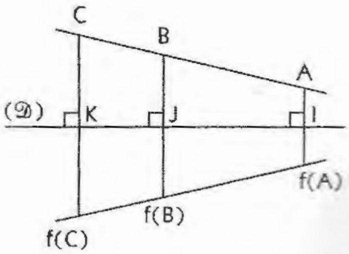
b) On a : $f = t_{\vec{u}} \circ S_{(\mathcal{D})}$, où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$.

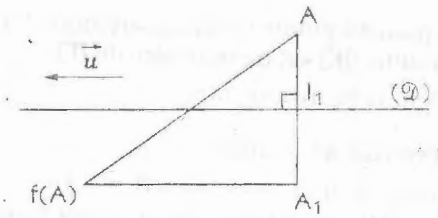
Posons : $A_1 = S_{(\mathcal{D})}(A)$.

D'après la question précédente, le milieu I_1 de $[AA_1]$ appartient à $(\mathcal{D})$.

Or : $(A_1f(A)) \mathbin{//} (\mathcal{D})$; donc, le milieu I de [Af(A)] appartient à $(\mathcal{D})$.

De même, J et K appartiennent à $(\mathcal{D})$.





2. a) $g = f \circ S_{(\Delta)}$, où f est un déplacement.

- Si f est une translation, alors d'après **1.** *b)*, g vérifie la propriété.
- Si f est une rotation, alors on décompose f :

$f = S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta'')}$ avec $(\Delta'') \,//\, (\Delta)$.

Donc $g = S_{(\Delta')} \circ t_{\vec{v}}$ et g vérifie la propriété.

b) On a $f = g \circ S_{(\Delta)}$; donc : $\forall\ M \in (\Delta) \Leftrightarrow (\Delta),\ f(M) = g(M)$.

g vérifie la propriété ;

donc les milieux de $[Ag(A)]$, $[Bg(B)]$ et $[Cg(C)]$ sont alignés.

Or $g(A) = f(A)$; $g(B) = f(B)$ et $g(C) = f(C)$.

Donc, les points I, J et K sont alignés.

- Exercice 55 p. 194

A – Relations vectorielles

1. On a : $\overrightarrow{AU} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AI}$;

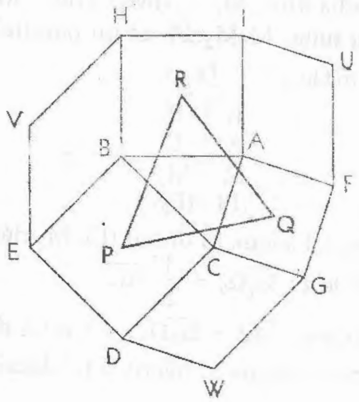
donc : $\rho(\overrightarrow{AU}) = \rho(\overrightarrow{AF}) + \rho(\overrightarrow{AI}) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

On a : $\overrightarrow{BV} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BE}$;

donc : $\rho(\overrightarrow{BV}) = \rho(\overrightarrow{BH}) + \rho(\overrightarrow{BE}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{CW} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$;

donc : $\rho(\overrightarrow{CW}) = \rho(\overrightarrow{CD}) + \rho(\overrightarrow{CG}) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$.



2. On a : $\overrightarrow{CB} = \rho(\overrightarrow{AU}) = \rho(\overrightarrow{EB})$; donc : $\overrightarrow{AU} = \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DC}$.

De même, on a : $\overrightarrow{BV} = \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{CW} = \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{IA}$.

B - Applications géométriques

1. On a : (AU) // (CD) et (CD) ⊥ (BC) ; donc : (AU) ⊥ (BC).
Par suite, (AU) est une hauteur de ABC.
De même (BV) et (CW) sont des hauteurs de ABC.
Donc, les droites (AU), (BV) et (CW) sont concourantes en l'orthocentre du triangle ABC.

2. • On a : $\overrightarrow{AW} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CW}$ (Chasles) ;

$$\begin{aligned} \text{donc : } \rho(\overrightarrow{AW}) &= \rho(\overrightarrow{CA}) + \rho(\overrightarrow{CW}) \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{BA} \quad \text{(d'après 2.)} \\ &= \overrightarrow{VA}. \end{aligned}$$

Par suite, AVW est un triangle isocèle et rectangle en A, de sens direct.

- De la même façon, on démontre que :

BWU est un triangle isocèle et rectangle en B, de sens direct.
CUV est un triangle isocèle et rectangle en C, de sens direct.

3. *a)* On a :
$$\begin{aligned} \overrightarrow{QU} + \overrightarrow{QW} &= (\overrightarrow{QF} + \overrightarrow{FU}) + (\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CW}) \quad \text{(Chasles)} \\ &= (\overrightarrow{QF} + \overrightarrow{QC}) + (\overrightarrow{FU} + \overrightarrow{CW}) \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{FU} + \overrightarrow{CW} \quad \text{(Q est le milieu de [CF])} \\ &= \overrightarrow{FU} + \overrightarrow{IA} \quad \text{(d'après 2.)} \\ &= \vec{0} \quad \text{(AFUI est un parallélogramme).} \end{aligned}$$

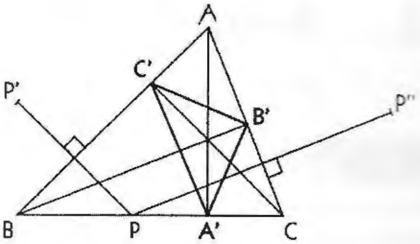
Donc, Q est le milieu de [UW].
De façon analogue, on démontre que P et R sont les milieux respectifs de [VW] et [UV].

b) On a : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$;

$$\begin{aligned} \text{donc : } \rho(\overrightarrow{AP}) &= \rho(\overrightarrow{AB}) + \rho(\overrightarrow{BP}) \\ &= \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{EP} \\ &= \overrightarrow{CW} + \overrightarrow{PC} \quad \text{(question 2, et P est le milieu de [EC])} \\ &= \overrightarrow{PW} \\ &= \tfrac{1}{2}\ \overrightarrow{VW} \quad \text{(P est le milieu de [VW]).} \end{aligned}$$

Par suite : (AP) ⊥ (VW).
Or : (VW) // (QR) (propriété du milieu dans UVW) ; donc : (AP) ⊥ (QR).
Ainsi, (AP) est une hauteur du triangle PQR.
De façon analogue, on démontre que (BQ) et (CR) sont des hauteurs du triangle PQR.

♦ Exercice 56 p. 104



1. Démontrons que : $\widehat{(\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'B})} = \widehat{(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'C'})}$.

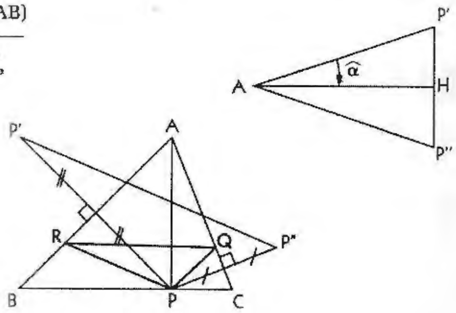
- A, B, A' et B' étant cocycliques, on a : $\widehat{(\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'B})} = \widehat{(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB})}$
- B, C, B' et C' étant cocycliques, on a : $\widehat{(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'C'})} = \widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CC'})}$
- Or : $\widehat{(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB})} = \widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CC'})}$ (ils ont le même complémentaire)

Donc : $\widehat{(\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'B})} = \widehat{(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'C'})}$;

c'est-à-dire : (BB') est la bissectrice de $\widehat{A'B'C'}$.

De façon analogue, on démontre que : (AA') est la bissectrice de $\widehat{B'A'C'}$; (CC') est la bissectrice de $\widehat{A'C'B'}$.

2. *a)* On a : $\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{S_{(AB)}}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ P' & P \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{S_{(AC)}}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ P & P'' \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{S_{(AC)} \circ S_{(AB)}}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ P' & P'' \end{array}$



$S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ est la rotation de centre A et d'angle $\widehat{2\alpha}$.

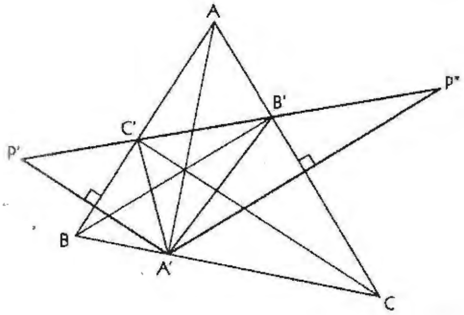
b) On a : P'P'' = 2HP' = 2AP'sinα = 2APsinα.

c) La distance P'P'' est minimale pour : P = A'.

3. Le périmètre du triangle PQR est : p = P'R + RQ + QP''.
- On a : P'P'' ≤ P'Q + QP'' (relation de Chasles).

Or : P'Q ≤ P'R + RQ (relation de Chasles).
Donc : P'P'' ≤ P'R + RQ + QP'' ;
c'est-à-dire : P'P'' ≤ p.

4. Ainsi, le périmètre p est minimal
si et seulement si : P'P'' = P'R + RQ + QP'' ;
c'est-à-dire :
P', R, Q et P'' alignés dans cet ordre ;
et R ∈]AB[, Q ∈]AC[.
ou : P, Q et R sont les pieds des hauteurs de ABC.



♦ Exercice 57 p. 104

A - 1. On a : $r = r(A, \frac{\pi}{3})$

On a :

$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ C & C' \\ M & M' \end{array}$

Par définition, on a : d_M = MA + MB + MC.
Or : MA = MM' (AMM' est équilatéral) et MC = M'C' (conservation de la distance).
Donc : d_M = MB + MM' + M'C'.

Déduction

d_M est minimale si et seulement si les points B, M, M' et C' sont alignés dans cet ordre. ;
c'est-à-dire, les points M et M' appartiennent à]BC'[.

2. On a :

$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ C & C' \\ M & M' \\ r^{-1}(B) & B \end{array}$

Donc : B' = r^{-1}(B).
B' est le point tel que AB'B est équilatéral, de sens direct.

3. D'après les questions 1. et 2., M est le point d'intersection des droites (BC') et (B'C).

B - 1. *a)* On a :

$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ C & Q \\ R & B \end{array}$

Donc : CR = QB.

b) Soit r' la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a : $\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r}{\curvearrowright}} \\ \hline C & Q \\ R & B \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r'}{\curvearrowright}} \\ \hline Q & A \\ B & P \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r' \circ r}{\curvearrowright}} \\ \hline C & A \\ R & P \end{array}$

$r' \circ r$ est une isométrie ; donc : CR = AP. Par suite : CR = BQ = AP.

5. Similitudes

(pages 105 à 122 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- Compléter l'étude des transformations planes.
- Étudier certaines transformations à l'aide de leur expression complexe.
- Utiliser les similitudes pour :

– étudier des configurations ;
– déterminer des lieux géométriques ;
– résoudre des problèmes de construction.

COMMENTAIRES

La recherche des éléments caractérisant une similitude indirecte est hors programme.
On fera le lien avec les triangles isométriques et semblables définis dans les classes antérieures.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Similitudes directes du plan • Premières propriétés : – expression complexe d'une similitude directe du plan ; – composée de similitudes directes du plan. • Propriétés géométriques : – propriété caractéristique d'une similitude ; – similitudes et configurations.	• Construire l'image d'un point par une similitude. • Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude définie par l'expression complexe. • Déterminer l'expression complexe d'une similitude. • Construire l'image par une similitude : – d'une droite : – d'un triangle ; – d'un cercle.
Similitudes directes et problèmes de géométrie • Déterminations d'une similitude directe du plan.	• Reconnaître une similitude à partir d'une « configuration clé » : demi-carré, demi-triangle équilatéral. • Une similitude étant définie par son centre, un point et son image, déterminer le rapport et l'angle de cette similitude. • Une similitude étant définie par deux points et leurs images, déterminer le centre, le rapport et l'angle de cette similitude. • Utiliser les similitudes pour : – démontrer des propriétés (parallélisme, contact, perpendicularité, milieu, alignement, etc.) ; – - déterminer des lieux géométriques ; – résoudre des problèmes de construction ; – calculer des distances et des aires.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 110

a) s est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

b) s est la similitude directe de centre Ω (0 ; − 1), de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

c) s est l'homothétie de centre $\Omega\ (0\ ;\frac{1}{3})$ et de rapport − 2.

d) s est la similitude directe de centre Ω (2 ; 0), de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

♦ Exercice 1.b p. 110

a) $z' = (\sqrt{3} + i)z$ *b)* $z' = i\sqrt{2}\, z + 1 - i\sqrt{2}$

c) $z' = (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i)z + \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} - i\frac{4 + \sqrt{3}}{2}$ *d)* $z' = 3z + 2 - 2i.$

♦ Exercice 1.c p. 110

a) On a $s_2 \circ s_1 : z' = -z + 2.$

$s_2 \circ s_1$ est la symétrie de centre $\Omega\ (1\ ;\ 0)$; $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1.$

b) On a $s_2 \circ s_1 : z' = -2(1 - i)z - 2 - 2i$;

$s_2 \circ s_1$ est la similitude directe de centre $\Omega\ (-\frac{2}{13}\ ;\ -\frac{10}{13})$, de rapport $2\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

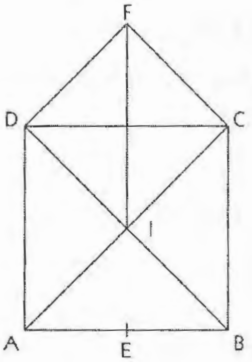
On a $s_1 \circ s_2 : z' = -2(1 - i)z + 1 + i$;

$s_1 \circ s_2$ est la similitude directe de centre $\Omega'\ (\frac{1}{13}\ ;\ \frac{5}{13})$, de rapport $2\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

♦ Exercice 1.d p. 110

On a :

$$\overset{s_1}{\curvearrowright} \qquad\qquad\qquad \overset{s_2}{\curvearrowright}$$
$$\begin{array}{c|c} A & A \\ B & C \\ I & D \\ E & I \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} D & D \\ F & C \\ C & B \\ I & A \end{array}$$



Donc, l'image par s_2 du carré ICFD est le carré ABCD.

♦ Exercice 1.e p. 110

1. On trouve : $z' = (1 + i\sqrt{3}\,)\,z + \sqrt{3}\ (2 - i).$

2. f est la similitude directe de centre $\Omega\ (1\ ;\ 2)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

♦ Exercice 1.f p. 110

1. s est la similitude directe de centre $\Omega\ (1\ ;\ 2)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

2. On trouve : $\begin{cases} x' = -x\sqrt{3} - y + 3 + \sqrt{3} \\ y' = x - y\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3}. \end{cases}$

3. Soit $(\mathcal{D})$ la droite de repère $(A, \vec{u})$.

L'image du point A par s est le point $A'(9\ ;\ 2)$. On a : $\Omega \in (\mathcal{D})$ et $s(\Omega) = \Omega$.

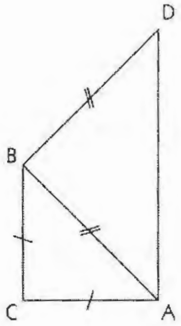
Donc, l'image par s de la droite $(\mathcal{D})$ est la droite $(A'\Omega)$ de repère $(\Omega, \vec{v})$, avec $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$.

♦ Exercice 2.a p. 118

Désignons par s la similitude. Posons : $D = s(B)$.

On a :

$$\overset{s}{\curvearrowright}$$
$$\begin{array}{c|c} A & A \\ C & B \\ B & D \end{array}$$

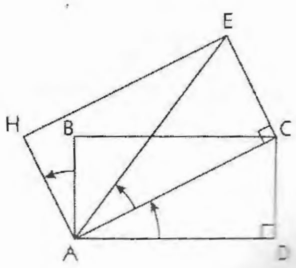


♦ Exercice 2.b p. 118

Désignons par s la similitude. Posons : $E = S(C)$ et $H = s(B)$.

On a :

$$\overset{s}{\curvearrowright}$$
$$\begin{array}{c|c} A & A \\ D & C \\ C & E \\ B & H \end{array}$$

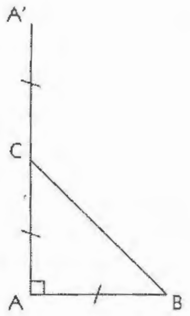


E appartient à la perpendiculaire à (AC) en C et $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}}) = (\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}})$.

H appartient à la perpendiculaire à (AC) en A et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}}) = (\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}})$.

L'image, par s, du rectangle ABCD est le rectangle AHEC.

♦ Exercice 2.c p. 118



1. s est la similitude de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2. L'image par s de la droite (AC) est la droite (CB).

3. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline \Omega & \Omega \\ A' & C \\ C & B \end{array}$$

On a : $\begin{cases} \Omega B = \sqrt{2}\Omega C \\ \mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega B}}) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow s(C) = B$;

donc : $(BC) \perp (\Omega C)$ (configuration du demi-carré).

♦ Exercice 2.d p. 118

L'expression analytique de s est : $z' = -\,iz$.

On a : $z' = \mathrm{e}_{-i\frac{\pi}{2}\,z}$; donc, s est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

♦ Exercice 2.e p. 118

Soit : r, la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$;

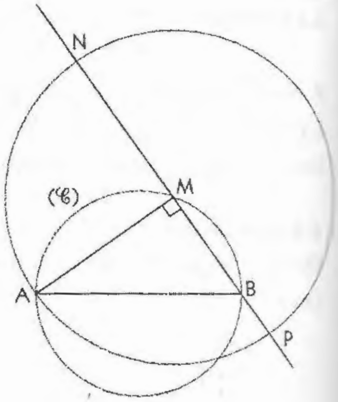
s, la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

On a : $r(M) = P$ et $s(M) = N$.

Donc, lorsque M décrit la droite $(\mathcal{D})$:

- P décrit la droite $(\mathcal{D}')$, image de $(\mathcal{D})$ par r ;
- N décrit la droite $(\mathcal{D}'')$, image de $(\mathcal{D})$ par s.

♦ Exercice 2.f p. 118



Les triangles AMP et AMN sont isocèles et rectangles en M.

Soit : s_1, la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$;

s_2, la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

On a : $s_1(M) = N$ et $s_2(M) = P$.

Donc, lorsque M décrit le cercle $(\mathcal{C})$ privé de A et B :

- N décrit l'image de $(\mathcal{C}) - \{A,B\}$ par s_1 ;
- P décrit l'image de $(\mathcal{C}) - \{A,B\}$ par s_2.

♦ Exercice 2.g p. 118

1. *a)* On a : $A \overset{S_B}{\mapsto} U \overset{S_A}{\mapsto} C'$ et $A' \overset{S_B}{\mapsto} C \overset{S_A}{\mapsto} B'$;

donc :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s_A \circ s_B}{\curvearrowright}} \\ \hline A & C' \\ A' & B' \end{array}$$

b) $s_A \circ s_B$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$;

donc, les segments [AA'] et [B'C'] sont isométriques et perpendiculaires.

2. Sont également isométriques et perpendiculaires [BB'] et [A'C] ; [CC'] et [A'B'].

Exercices d'apprentissage

SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

◆ Exercice 1. p. 119

a) s est la rotation de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) s est la similitude directe de centre $\Omega\,(0\,;-1)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

c) s est la similitude directe de centre $\Omega\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\,;2\right)$, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

d) s est la symétrie de centre $\Omega\,(0\,;1)$.

e) s est la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

f) s est l'homothétie de centre O et de rapport $-\sqrt{3}$.

◆ Exercice 2. p. 119

a) $z' = (-1 + i\sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})\,i$

b) $z' = i\sqrt{2}\,z - 3 + 3\,i\sqrt{2}$

c) $z' = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + i\sqrt{3})\,z + \frac{\sqrt{6}}{4} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)i$

d) $z' = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}\,i)\,z - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \left(\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

e) $z' = \sqrt{2}\,(1 + i)\,z - 2\sqrt{2} + 1 - i.$

◆ Exercice 3. p. 119

a) $z' = \left(\frac{1}{2} - i\right)z - \frac{1}{2} + 2\,i$ *b)* $z' = (-1 - 3\,i)\,z + 2 + 9\,i.$

◆ Exercice 4. p. 119

1. s est la similitude directe de centre $\Omega\,(0\,;-3)$, de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. *a)* Le cercle de centre O et de rayon 3 *b)* L'axe imaginaire pur.

◆ Exercice 5. p. 119

On a : $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$;

donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\,(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

On a de même : $\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'C'} = \frac{1}{2}\,(A'B'^2 + A'C'^2 - B'C'^2)$.

Or : (A', B', C') est l'image de (A, B, C) par une similitude de rapport k ;
donc : $A'B' = k\,AB \cdot A'C' = k\,AC$ et $B'C' = k\,BC$.
Par suite : $\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'C'} = k^2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

◆ Exercice 6. p. 119

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\frown}} \\ I & I \\ (\mathcal{D}) & (\mathcal{D}') \\ H & \square \end{array}$$

$H \in (\mathcal{D}) \Rightarrow s(H) \in (\mathcal{D}')$ et $(IH) \perp (\mathcal{D}) \Rightarrow (I\,s(H)) \perp (\mathcal{D}')$.
Ainsi, $s(H)$ est le point d'intersection de $(\mathcal{D}')$ et de la perpendiculaire à $(\mathcal{D}')$ passant par I ;
donc : $s(H) = H'$.

◆ Exercice 7. p. 119

1. On a : $z_G = 2z_A - 2z_B + z_C = 2\,i$.
2. s a pour expression analytique : $z' = (1 + i)\,z + 2$;
s est une similitude directe de centre G.
3. La similitude s a pour rapport $\sqrt{2}$ et pour angle $\frac{\pi}{4}$.

♦ Exercice 8. p. 119

Soit s la similitude directe de centre Ω qui applique (A,B) sur (A',B')

On a : $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}}) = (\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B'}})$ et $\dfrac{\Omega A'}{\Omega A} = \dfrac{\Omega B'}{\Omega B}$. (1)

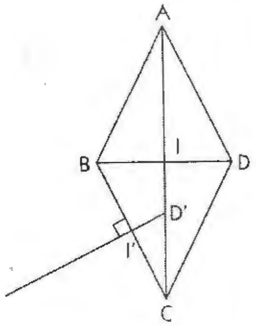
Soit s' la similitude directe de centre Ω qui applique A sur B.

$$\begin{aligned}
\text{On a : } (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}) &= (\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}}) + (\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}}) + (\widehat{\overrightarrow{\Omega B'}, \overrightarrow{\Omega B}}) \quad \text{(Chasles)}\\
&= (\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B'}}) + (\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}}) + (\widehat{\overrightarrow{\Omega B'}, \overrightarrow{\Omega B}}) \quad \text{(d'après (1))}\\
&= (\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega B'}})\ ;
\end{aligned}$$

et : $\dfrac{\Omega B}{\Omega A} = \dfrac{\Omega B'}{\Omega A'}$ (d'après (1)).

Donc : $s'(A') = B'$.

♦ Exercice 9. p. 119



1. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s_C}{\curvearrowright}} \\ \hline C & C \\ A & B \\ I & I' \end{array}$$

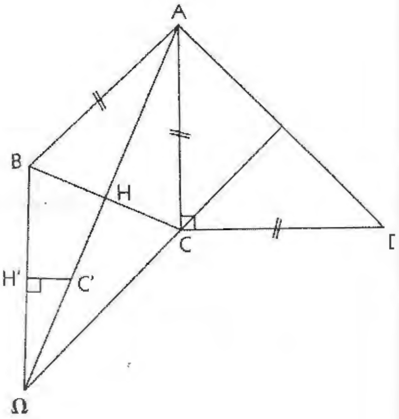
I est le milieu de [AC] et s_C conserve le milieu ; donc, I' est le milieu de [BC].

2. *a)* On a : Mes $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}}) = \dfrac{\pi}{8}$; donc D' ∈ (AC).

De plus : (ID) ⊥ (AC) et s_C conserve l'orthogonalité ; donc : (I'D') ⊥ (BC).

b) D' est le point d'intersection de (AC) et de la perpendiculaire à (BC) en I'.

♦ Exercice 10. p. 119



1. *a)* On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r_A}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ B & C \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r_C}{\curvearrowright}} \\ \hline A & D \\ C & C \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline A & D \\ B & C \end{array}$$

b) f est la rotation :
- de centre Ω, point d'intersection des médiatrices de [AD] et [BC] ;
- d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

2. *a)* On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline \Omega & \Omega \\ A & B \\ C & C' \\ H & H' \end{array}$$

H = mil[BC].

L'angle de s est :

Mes $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}) = \dfrac{\pi}{8}$.

b) On a : Mes $(\widehat{\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega C'}})$ = Mes $(\widehat{\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}}) = \dfrac{\pi}{8}$; donc : C' ∈ (ΩA).

c) H est le milieu de [ΩA] et s conserve le milieu ; donc, H' est le milieu de [ΩB] .

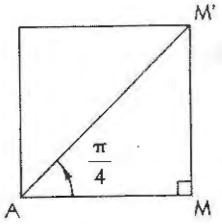
d) On a : (CH) ⊥ (ΩA) et s conserve l'orthogonalité ; douc : (C'H') ⊥ (ΩB).

Déduction

C' est le point d'intersection des médiatrices de [ΩB] et [BC] ;
donc, C' est le centre du cercle circonscrit à ΩBC.

SIMILITUDES DIRECTES ET PROBLEMES DE GÉOMÉTRIE

♦ Exercice 11 p. 119



1. s est la similitude directe de centre A(1 ; 0), de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

2. On a : $z' - 1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-1)$; ou : $z_{\overrightarrow{AM'}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\, z_{\overrightarrow{AM}}$.

Donc, AMM' est un triangle rectangle et isocèle en M.

3. M' décrit le cercle de centre O'(0 ; − 1) et de rayon $\sqrt{2}$.

♦ Exercice 12 p. 120

Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a : $s(M) = J$; donc, lorsque M décrit $(\mathscr{C})$, le point J décrit le cercle $(\mathscr{C}')$ image de $(\mathscr{C})$ par s.

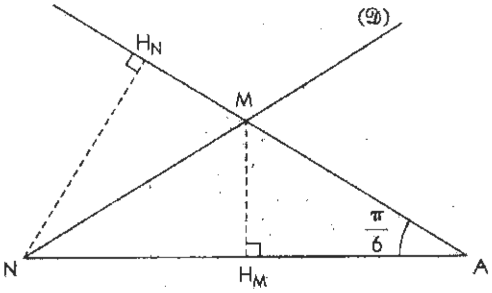
♦ Exercice 13 p. 120

Soit : s_1 la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$;

s_2 la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s_1}{\curvearrowright}} \\ A & A \\ M & H_M \\ (\mathscr{D}) & (\mathscr{D}_1) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s_2}{\curvearrowright}} \\ A & A \\ N & H_N \\ (\mathscr{D}) & (\mathscr{D}_2) \end{array}$$



Lorsque M décrit la droite $(\mathscr{D})$:

– H_M décrit la droite $(\mathscr{D}_1)$, image de $(\mathscr{D})$ par s_1 ;

– N décrit $(\mathscr{D})$, donc H_N décrit $(\mathscr{D}_2)$, image de $(\mathscr{D})$ par s_2.

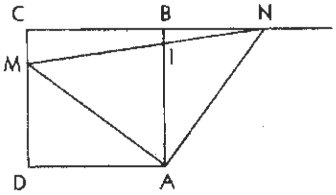
♦ Exercice 14 p. 120

1. soit r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Posons : $C' = r(C)$ et $M' = r(M)$.

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r}{\curvearrowright}} \\ A & A \\ D & B \\ C & C' \\ M & M' \end{array}$$



- (BC') est la perpendiculaire à (CD) en B ; donc : $(BC') = (BC)$.
- $M \in (CD) \Rightarrow M' \in (BC)$ et $(AM') \perp (AM)$; donc : $M' = N$.

Par suite, AMN est un triangle isocèle et rectangle en A.

2. Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Notons J le milieu de [AC].

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ A & A \\ M & I \\ D & J \\ C & B \end{array}$$

Lorsque M décrit la droite (DC), alors I décrit la droite (JB).

♦ Exercice 15 p. 120

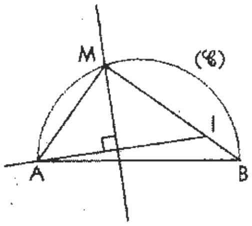
AMN est un triangle isocèle et rectangle en M.

Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ A & A \\ M & I \\ (\mathscr{C}) & (\mathscr{C}') \end{array}$$

Lorsque M décrit $(\mathscr{C})$, I décrit le demi-cercle $(\mathscr{C}')$, image de $(\mathscr{C})$ par s.



♦ Exercice 16 p. 120

1. s est la similitude directe de centre $\Omega\,(-1\,;\,-2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

2. On a : $|z'| = 4$; donc, M' appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 4.

$M' \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow s(M) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow M \in s^{-1}(\mathscr{C})$.

$s^{-1}(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $I = s^{-1}(O)$ et de rayon $4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

On a : $s(I) = O \Leftrightarrow (1 - i)\, z_I + 2 - i = 0 \Leftrightarrow z_I = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre $I\,(-\frac{3}{2}\,;\,-\frac{1}{2})$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

3. On a : $z' = (x + y + 2) + i(-x + y - 1)$;

$$|z'|^2 = 16 \Leftrightarrow (x + \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 8.$$

On retrouve le résultat précédent.

◆ **Exercice 17 p. 120**

1. s est la similitude directe de centre $\Omega(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2. M' appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$.

Donc, M appartient au cercle $s^{-1}(\mathscr{C})$ de centre $s^{-1}(O)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

$I = s^{-1}(O) \Leftrightarrow s(I) = O \Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})\, z_I + \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow z_I = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i.$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $I(-\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4})$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

◆ **Exercice 18 p. 120**

1. *a)* s_1 est la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b) s_2 est la similitude directe de centre B, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2. $s_2{}^{-1}$ est la similitude directe de centre B, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
Donc, $s_1os_2{}^{-1}$ est une translation.

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s_1os_2{}^{-1}}{\curvearrowright}} \\ \hline K & A \\ I & J \end{array}$$

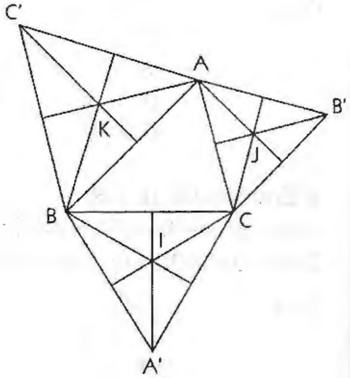
Donc : $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{IJ}$;
IJAK est un parallélogramme.

◆ **Exercice 19 p. 120**

1. *a)* s_A est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
b) On a : $s_A(K) = C'$.
2. *a)* s_B est la similitude directe de centre B, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
b) On a : $s_B(C') = K$.

3. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s_A}{\curvearrowright}} \\ \hline J & C \\ K & C' \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s_B}{\curvearrowright}} \\ \hline C & I \\ C' & K \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s_Bos_A}{\curvearrowright}} \\ \hline J & I \\ K & K \end{array}$$



Donc : $s_Bos_A = S(K, 1, -\frac{\pi}{3}) = r(K, -\frac{\pi}{3})$;

s_Bos_A est la rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

4. Comme $s_Bos_A(J) = I$, le triangle IJK est équilatéral.

◆ **Exercice 20 p. 120**

1. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ B & D \\ E & G \end{array}$$

Donc : $(BE) \perp (DG)$ et $BE = DG$.

2. *a)* On a : $(BE) \perp (AH)$ et r conserve l'orthogonalité. Donc : $(DG) \perp (Ar(H))$.
Par suite, $r(H)$ est le point d'intersection de (DG) et de la perpendiculaire à (DG) en A ;
c'est-à-dire : $r(H) = K$.

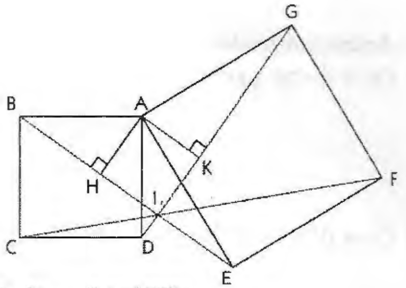
b) AHIK est un rectangle dont les côtés consécutifs AH et AK sont égaux ;
donc, c'est un carré.

3. *a)* f est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b) On a : $f(E) = F$ et $f(H) = I$.

c) On a :

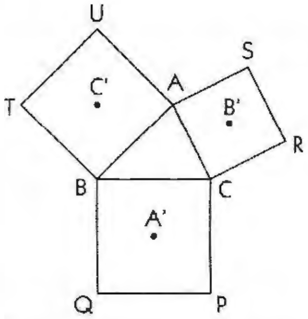
$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{f}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ B & C \\ E & F \\ H & I \end{array}$$



- On a vu qne : I ∈ (BE) ∩ (DG).
- De plus, les points B, H et E sont alignés.

Comme f conserve l'alignement, les points C, F et I sont alignés ; c'est-à-dire : I ∈ (CF).
Par suite, les droites (BE), (CF) et (DG) sont concourantes en I.

♦ Exercice 21 p. 120



1. On a : $s_B o s_D(O_3) = s_B(C) = O_2$.

2. On a : $s'_D o s'_B(O_1) = s_D'(A) = O_4$.

3. *a)* Soit b et d les affixes respectives des points B et D.
Les similitudes $s_B o s_D$ et $s_D o s_B$ ont la même expression analytiqne :
$z' = -iz + \frac{1}{2}(1 + i)(b + d)$; donc : $s_B o s_D = s'_D o s'_B$.

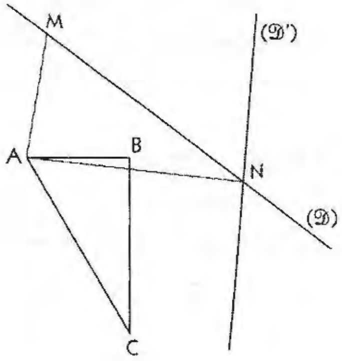
b) $s_B o s_D$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s_B o s_D}{\curvearrowright}} \\ \hline O_1 & O_4 \\ O_3 & O_2 \end{array}$$

Donc : $(O_1O_3) \perp (O_2O_4)$ et $O_1O_3 = O_2O_4$.

♦ Exercice 22 p. 120



1. s est la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

2. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ B & C \\ (\mathscr{D}) & (\mathscr{D}') \end{array}$$

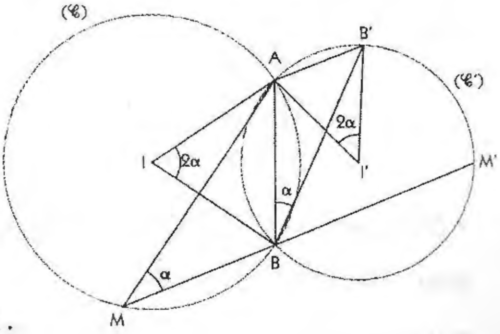
On a : $s(M) \in (\mathscr{D}) \cap (\mathscr{D}')$.
Soit N le point d'intersection des droites (𝒟) et (𝒟') ; $M = s^{-1}(N)$.

Exercice d'approfondissement

♦ Exercice 23 p. 121

1. On a : A ≠ I et A ≠ I' ; donc, il existe une unique similitude s de centre A telle que : $s(I) = I'$.

s a pour angle $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AI'})$ et pour rapport : $\frac{r}{r'}$. On a : $s(\mathscr{C}) = (\mathscr{C}')$.



2. *a)* AIB est isocèle en I.
Posons : mes $\widehat{AIB} = 2\alpha$.
On a : mes $\widehat{IBA}$ = mes $\widehat{IAB} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.
AI'B' étant l'image de AIB par la similitude s,
on a : mes $\widehat{AI'B'} = 2\alpha$.
$\widehat{ABB'}$ est un angle inscrit dans (𝒞') qui intercepte
le même arc $\overset{\frown}{AB'}$ que l'angle au centre $\widehat{AI'B'}$;
donc : mes $\widehat{ABB'} = \alpha$.
Par suite : mes $\widehat{IBB'}$ = mes $\widehat{IBA}$ + mes $\widehat{ABB'} = (\frac{\pi}{2} - \alpha) + \alpha = \frac{\pi}{2}$;
c'est-à-dire : (IB) ⊥ (BB').

Autre méthode

On a d'une part :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ I & I' \\ B & B' \end{array} \qquad \text{Donc : } \widehat{(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AI'})} = \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'})} \quad (1)$$

On a d'autre part : mes $\widehat{AB'B} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AI'B}$ (théorème des angles inscrits).

$=$ mes $\widehat{AI'I}$ ((II') = méd [AB]) (**2**)

De (**1**) et (**2**), on déduit que les triangles IAI' et BAB' sont semblables.

On a : mes $\widehat{BIA}$ = 2 mes $\widehat{AII'}$ ((II') = méd [AB]).

= 2 mes $\widehat{AB'B}$ (d'après (**2**)).

Donc, d'après la réciproque du théorème des angles inscrits, (BB') est tangente à ($\mathscr{C}$) en B.

b) B' est le point d'intersection (autre que B) de la perpendiculaire à (IB) en B avec ($\mathscr{C}$').

3. D'une part, on a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ B & B' \\ M & M' \end{array} \qquad \text{Donc : } \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'})} = \widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})}.$$

- D'autre part, on a : mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ABB'}$ (angles inscrits).

Donc, les triangles ABB' et AMM' sont semblables.

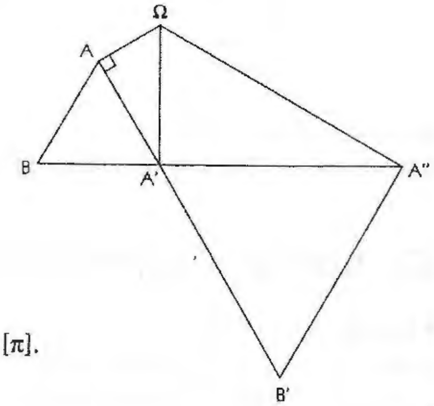
Par suite : Mes $\widehat{AM'M}$ = Mes $\widehat{AB'B}$.

Soit N ∈ (MM') ∩ ($\mathscr{C}$').

On a : Mes $\widehat{AB'B}$ = Mes $\widehat{AMN}$. Or : Mes $\widehat{AB'B}$ = Mes $\widehat{AM'N}$.

Les angles inscrits ont la même mesure principale, donc B = N.

Par suite, les points M, M' et B sont alignés.



♦ Exercice 24 p. 121

1. *s* est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2. Soit I et J les milieux respectifs de [AA']et [ΩA'].

On a : $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}AA'}{AJ} = \frac{AA'}{2\Omega A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc : $\Omega A = \frac{\sqrt{3}}{3} AA'$;

$\Omega A' = 2\Omega A = \frac{2\sqrt{3}}{3} AA'$.

3. On a : mes $\widehat{\Omega AA'} \equiv$ mes $\widehat{\Omega AJ}$ + mes $\widehat{JAA'}$ $[\pi] \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} [\pi] \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Donc, le triangle ΩAA' est rectangle en A.

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline \Omega & \Omega \\ A & A' \\ B & B' \\ A' & A'' \end{array}$$

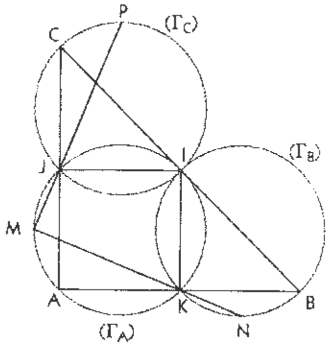
- D'une part, on a : $\widehat{(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'A''})} = \widehat{(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{A'A''})}$ (A, A' et B' sont alignés)

donc : Mes $\widehat{(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'A''})} = \frac{\pi}{3}$.

- D'autre part, on a : A'B' = 2AB et A'A" = 2AA' = 2AB ; donc : A'B' = A'A".

Par suite, A'B'A" est un triangle équilatéral.

♦ Exercice 25 p. 121



1. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r}{\curvearrowright}} \\ \hline \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{A} \\ (\Gamma_A) & (\Gamma_B) \\ (\Gamma_C) & (\Gamma_A) \end{array}$$

2. *a)* On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s_M}{\curvearrowright}} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{M} \\ \mathrm{B} & \mathrm{N} \end{array}$$

Les droites (AB) et (MN) sont sécantes en K.
Les cercles circonscrits aux triangles AMK et BNK sont respectivement (Γ_A) et (Γ_B).
On a : $(\Gamma_A) \cap (\Gamma_B) = \{K, I\}$; donc le centre de s_M est I.

b) On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s'_M}{\curvearrowright}} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{M} \\ \mathrm{C} & \mathrm{P} \end{array}$$

Les droites (AC) et (MP) sont sécantes en J.
Les cercles circonscrits aux triangles AMJ et CPJ sont respectivement (Γ_A) et (Γ_C).
On a : $(\Gamma_A) \cap (\Gamma_C) = \{I, J\}$; donc, le centre de s'_M est I.

c) Les similitudes s_M et s'_M ont le même centre et transforment A en M, donc elles sont égales.

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s_M}{\curvearrowright}} \\ \hline \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & \mathrm{M} \\ \mathrm{B} & \mathrm{N} \\ \mathrm{C} & \mathrm{P} \end{array}$$

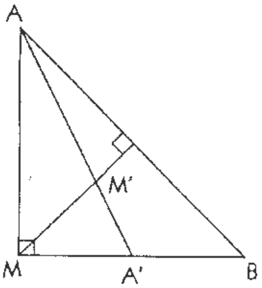
Les points I, B et C sont alignés.
La similitude s_M conservant l'alignement, les points I, N et P sont alignés.

3. IAM est un triangle rectangle en M tel que : Mes $(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IM}}) = -\frac{\pi}{6}$.

Donc : $\frac{IM}{IA} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Par suite, s_M est la similitude directe de centre I, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

♦ Exercice 26 p. 121



1. On a : $\cos(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \frac{AM}{AM'}$;

$\sin(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \frac{A'M}{AA'} = \frac{AM}{2AA'}$;

$AM' = \frac{2}{3}AA'$.

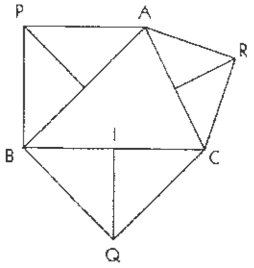
Donc : $\frac{AM'}{AM} = \frac{2}{3} \times \frac{AA'}{AM}$.

AMA' étant rectangle en M, on a : $AA'^2 = AM^2 + (\frac{1}{2}AM)^2 = \frac{5}{4}AM^2$; donc : $AA' = AM\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Par suite : $\cos(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\sin(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\frac{AM'}{AM} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

2. f est la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{5}}{3}$ et d'angle α tel que : $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

♦ Exercice 27 p. 121



1. *a)* s_B est la similitude directe de centre B, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

b) s_C est la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

2. $s_C \circ s_B$ est une similitude directe :

- de rapport $\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$;
- d'angle $-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$.

Donc, $s_C \circ s_B$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3. *a)* On a : $s_C \circ s_B(I) = s_C(Q) = I$; donc, I est le centre de la rotation $s_C \circ s_B$.

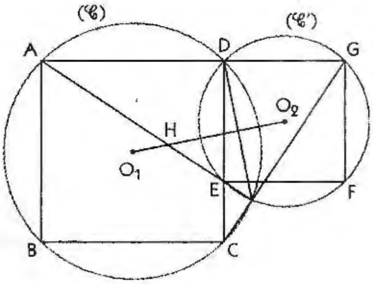
On a : $s_C \circ s_B = r(I, -\frac{\pi}{2})$.

b) On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s_C \circ s_B}{\curvearrowright}} \\ \hline I & I \\ P & R \end{array}$$

Donc, IPR est un triangle isocèle et rectangle en I.

◆ Exercice 28 p. 121



1. *a)* s est la similitude directe de centre D, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b) On a : $s(E) = F$; donc : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF}}) = \frac{\pi}{4}$.

2. *a)* On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline D & D \\ A & B \\ E & F \end{array}$$

$\{K\} = (AE) \cap (BF)$.

Soit $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ les cercles circonscrits aux triangles ABK et EFK respectivement.

On a : $(\mathscr{C}_1) \cap (\mathscr{C}_2) = \{K, D\}$.

$(\mathscr{C}_1)$ contient A, B et D ; donc : $(\mathscr{C}_1) = (\mathscr{C})$ et $K \in (\mathscr{C})$.

b) K appartient au cercle de diamètre [BD] ; donc : $(KD) \perp (BK)$.

Or : $(BK) = (BF)$; donc : $(KD) \perp (BF)$.

3. *a)* D'après **2.** *a)* $(\mathscr{C}_2)$ contient E, F et D ; donc : $(\mathscr{C}2) = (\mathscr{C}')$ et $K \in (\mathscr{C}')$.

b) Soit O_1 et O_2 les centres respectifs de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

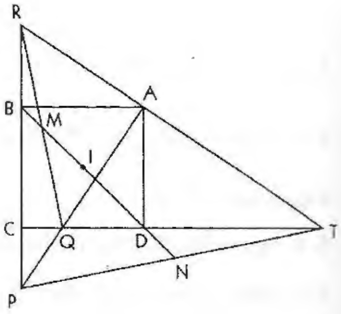
Soit H le point d'intersection des droites (O_1O_2) et (AE).

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline O_1 & C \\ O_2 & G \\ A & B \\ E & F \end{array}$$

Donc : $s(H)$ est le point d'intersection des droites (CG) et (BF) ;
c'est-à-dire : $s(H) = K$.
Les points O_1, H et O_2 sont alignés.
La similitude s conservant l'alignement, les points C, K et G sont alignés.

◆ Exercice 29 p. 121



1. *a)* On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ B & D \end{array}$$

(BC) est la perpendiculaire à (AB) en B.
Donc : $r(BC)$ est la perpendicnlaire à (AD) en D ;
c'est-à-dire : $r(BC) = (CD)$.

a) Soit $P' = r(P)$ et $R' = r(R)$.

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ B & D \\ P & P' \\ R & R' \end{array}$$

$P' \in (CD)$ et $(AP) \perp (AP')$;
donc : $P' = T$, c'est-à-dire : $r(P) = T$.
$R' \in (CD)$ et $(AR) \perp (AR')$;
donc $R' = Q$, c'est-à-dire : $r(Q) = Q$.

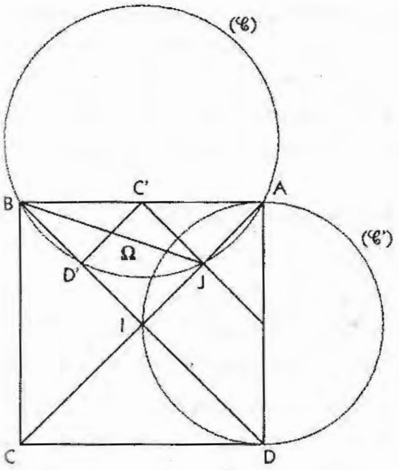
2. *a)* On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{B} & \mathrm{I} \\ \mathrm{R} & \mathrm{M} \\ \mathrm{P} & \mathrm{N} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}$$

b) Lorsque P décrit la droite (BC) privée du point B, alors N décrit la droite (ID) privée du point I.

c) Les points R, P, C et B sont alignés.
La similitude s conservant l'alignement, les points M, N, D et I sont alignés.
De plus ; B $\in$ (ID), car I est le milieu de [BD].
Par suite, les points M, N, B, D et I sont alignés.

♦ Exercice 30 p. 121



1. s est une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{4}$ et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

2. Posons : C' = s(C) et D' = s(D).
On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{I} \\ \mathrm{B} & \mathrm{J} \\ \mathrm{C} & \mathrm{C'} \\ \mathrm{D} & \mathrm{D'} \end{array}$$

ABC est un triangle isocèle et rectangle en B, de sens direct.
Donc, IJC' est un triangle isocèle et rectangle en J, de sens direct.
ABD est isocèle et rectangle en A, de sens direct.
Donc, IJD' est isocèle et rectangle en I, de sens direct.

3. Soit Ω le centre de la similitude s.
On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{I} \\ \mathrm{B} & \mathrm{J} \end{array}$$

(AB) $\cap$ (IJ) = {A} et s(A) $\neq$ A.
Donc, Ω appartient au cercle (𝒞)
circonscrit à ABJ.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{I} \\ \mathrm{D} & \mathrm{D'} \end{array}$$

(AD) $\cap$ (ID') = {D}.
Donc, Ω appartient au cercle (𝒞') circonscrit à DAI.
(𝒞') est le cercle de diamètre [AD].

Ω est le point d'intersection, autre que A, des cercles (𝒞) et (𝒞').

♦ Exercice 31 p. 121

1. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline \Omega & \Omega \\ \mathrm{I} & \Gamma \\ (\mathscr{C}) & (\mathscr{C}') \end{array}$$

Or : $\frac{\Omega I'}{\Omega I} = \frac{r'}{r}$; donc : $(r\overrightarrow{\Omega I}' + r'\,\overrightarrow{\Omega I})\,.\,(r\overrightarrow{\Omega I}' - r'\,\overrightarrow{\Omega I} = 0$.
Posons : P = bar {(I', r) ; (I, r')} et Q = bar {(I', r) ; (I, $-\,r'$)}.
On a : $(r + r')\overrightarrow{\Omega P}.\,(r - r')\overrightarrow{\Omega Q} = 0$; donc : $\overrightarrow{\Omega P}\,.\,\overrightarrow{\Omega Q} = 0$.
Par suite, l'ensemble des points Ω est le cercle (Γ) de diamètre [PQ].
a) On a : P = bar {(I', 1) ; (I, 2)} = A ; Q = {(I', 1) ; (I, − 2)} = B.

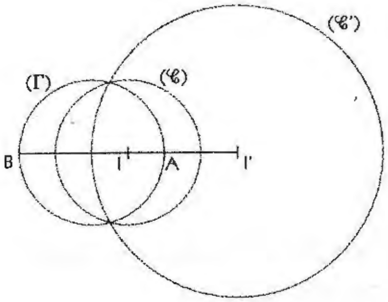
b) $II' = 3$

$(\mathscr{C}) = \mathscr{C}(I, 2)$

$(\mathscr{C}') = \mathscr{C}(I', 4)$

$\overrightarrow{IB} = -3\,\overrightarrow{IA}$

(Γ) est le cercle de diamètre [AB].



c) On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline K & K \\ I & I' \end{array}$$

L'angle de s est :
$\alpha = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KI},\overrightarrow{KI'}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

♦ Exercice 32 p. 122

1. s est la similitude directe de centre Ω (O ; 2), de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

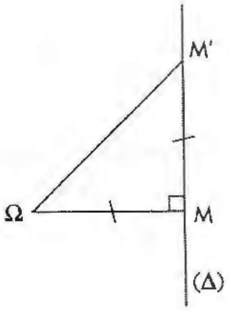
2. $M\Omega M'$ est un triangle isocèle et rectangle en M.

3. Soit M un point distinct de Ω.

- Ou trace la perpendiculaire (Δ) à (ΩM) en M ;
- on place le point M' de (Δ) tel que $\Omega MM'$ soit de sens direct et $MM' = \Omega M$.

4. $(\mathscr{C}_1)$ est le cercle de centre A $(-2 ; 2)$ et de rayon 2.

5. $(\mathscr{C}_2)$ est le cercle de centre B $(-1 ; 0)$ et de rayon 1.

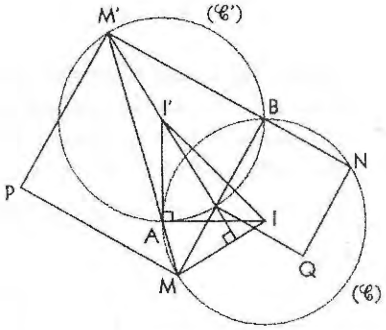


♦ Exercice 33 p. 122

1. On a : $I'M' = IM = IA$;
donc, il existe un unique déplacement qui applique (I, M) sur (I', M').
De plus : $\overrightarrow{II'} \neq \overrightarrow{MM'}$; donc, ce déplacement est une rotation.
C'est la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

2. D'une part on a : $(NB) \perp (BM) \Rightarrow (r(N)B) \perp (BM')$;
donc, $r(N)$ appartient à la perpendiculaire à (BM') en B qui est (BM).
D'autre part, on a : $N \in (\mathscr{C}) \Rightarrow r(N) \in (\mathscr{C}')$. Par suite : $r(N) = N'$.

3. s est la similitude directe de centre B, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.
Donc : $s(M) = P$.



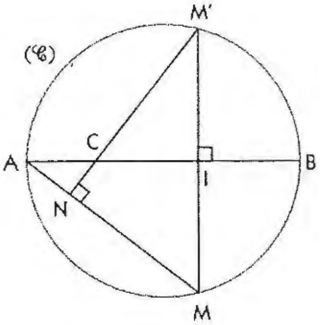
4. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline B & B \\ N & Q \\ M & P \end{array}$$

Lorsque M décrit $(\mathscr{C})$, les points P et Q décrivent le cercle (Γ), image de $(\mathscr{C})$ pa s.

♦ Exercice 34 p. 122

1. Les triangles ANC et M'CI sont rectangles et semblables.
Soit s' la similitude directe de centre C qui transforme I en M'.
Posons : $A' = s'(A)$.
On a : $(CA') = (CN)$, car N est le projeté orthogonal de C sur (AM).
Or : $(CA') = (CM')$, car les points A, C et I sont alignés.
Donc : $(CM') \perp (AN)$.
Les points A, C et I étant alignés, les points N, C et M' sont alignés.



2. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline N & N \\ M & C \end{array}$$

a) $s(MI)$ est la perpendiculaire à (MI) en C ; donc $s(MI) = (BC)$.

b) $s(NC)$ est la perpendiculaire à (NC) en N ; donc : $s(NC) = (AM)$.

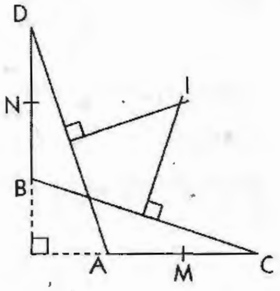
c) On a : $\{M'\} = (MI) \cap (NC)$; donc $\{s(M')\} = (BC) \cap (AM) = \{A\}$.
Par suite : $s(M') = A$.

3. *a)* On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline N & N \\ M & C \\ M' & A \\ I & I' \end{array}$$

I est le milieu de [MM']
et s conserve le milieu.
Donc, s(I) est le milieu de [CA] ;
c'est-à-dire : $s(I) = I'$.

b) On a : $s(NI) = NI'$; donc : $(NI) \perp (NI')$.
I' étant le milieu de [AC], (NI) est tangente en N au cercle de diamètre [AC].



♦ Exercice 35 p. 122

1. Soit i une telle isométrie.

1^{er} cas

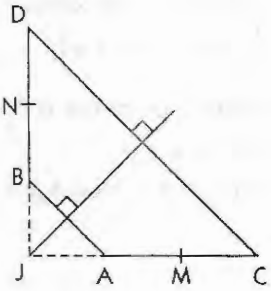
$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{i}{\curvearrowright}} \\ \hline A & D \\ C & B \end{array}$$

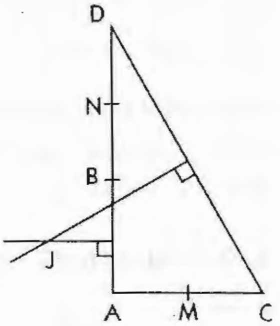
- Il y a exactement un déplacement, la rotation r :
  - de centre I, point d'intersection des médiatrices de [AD] et [BC] ;
  - d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- Il y a exactement un antidéplacement : $S_{(BD)} \circ r$.

2^{e} cas

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{i}{\curvearrowright}} \\ \hline A & B \\ C & D \end{array}$$

Il y a la rotation r' de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et $S_{(BD)} \circ r'$.



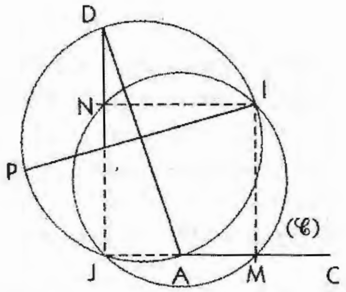


2. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r_1}{\curvearrowright}} \\ \hline I & I \\ A & D \\ C & B \\ M & N \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r_2}{\curvearrowright}} \\ \hline J & J \\ A & B \\ C & D \\ M & N \end{array}$$

a) On a : $(IM) \perp (IN)$ et $IM = IN$;
$(JM) \perp (JN)$ et $JM = JN$.
Donc, IMJN est un carré.

b) Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [MN].
La médiatrice de [MN] coupe $(\mathscr{C})$ en deux points I et J tels que INM est direct et JNM est indirect.



3. *a)* s est la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

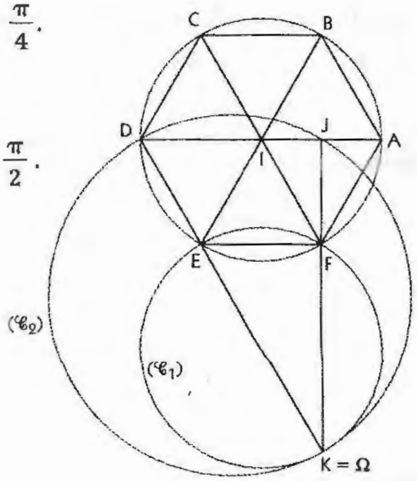
b) On a : $s(M) = J$ et $(AC) = (AM)$; donc : $s(AC) = (PJ)$.

4. P et R décrivent la droite (Δ) telle que : $J \in (\Delta)$ et $\text{Mes}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{JM}) = -\frac{\pi}{4}$.

♦ Exercice 36 p. 122

1. *a)* $s_1(E) = A$ *b)* $s^{-1}(J) = D$.

2. s_2 est la similitude directe de centre J, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.



3. *a)* On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s_1}{\curvearrowright}} \\ \hline E & A \\ D & J \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s_2}{\curvearrowright}} \\ \hline A & F \\ J & J \end{array}$$

et

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s_2 \circ s_1}{\curvearrowright}} \\ \hline E & F \\ D & J \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline E & F \\ J & J \end{array}$$

Donc : $s = s_2 \circ s_1$.

On a : $s_1 = S\,(B, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{3})$ et $s_2 = S\,(J, \sqrt{3}, -\frac{\pi}{2})$.

Donc s est une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

b) Soit Ω le centre de la similitude s.

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline \Omega & \Omega \\ E & F \\ D & J \end{array}$$

Désignons par : K le point d'intersection des droites (ED) et (FJ) ;
$(\mathscr{C}_1)$ le cercle circonscrit à EFK ;
$(\mathscr{C}_2)$ le cercle circonscrit à DJK.
Les cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ sont tangents en K ; donc : $\Omega = K$.

♦ Exercice 37 p. 122

1. *a)* $z_0 = 0,\ z_1 = i,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\},\ z_n - z_{n-1} = u(z_{n-2} - z_{n-1})$.

b) On démontre par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\},\ z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}\, i$.

2. *a)* On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline A_0 & A_1 \\ A_1 & A_2 \end{array}$$

$z_0 = 0,\ z_1 = \mathrm{i},\ z_2 = -u\,i + i$.

L'application complexe associée à s est définie par : $f(z) = -uz + i$.

On a : $f(z) = z \Leftrightarrow z = \frac{i}{1+u}$ et $-u = r\,e^{\frac{\pi}{4}i}$.

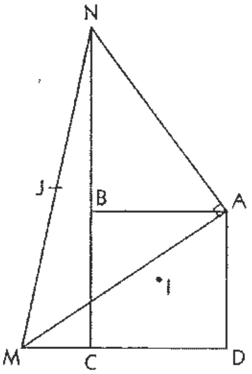
Donc, s est la similitude directe de centre $\Omega\,(\frac{i}{1+u})$, de rapport r et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b) On a démontré par récurrence que :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(z_n) = z_{n+1}$; donc : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ s(A_n) = A_{n+1}$.

♦ Exercice 38 p. 122

1. On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{r}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ D & B \end{array}$$



r est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
a) On a : $\{M\} = (CD) \cap (AM)$.
Or : $r(CD) = (BC)$ et $r(AM) = (AN)$;
donc : $\{r(M)\} = (BC) \cap (AN) = \{N\}$.
Par suite : $r(M) = N$.

b) Donc, AMN est un triangle isocèle et rectangle en A.

2. On a : $s = S(A, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4})$.
a) $s(C) = B$.
b) AJM est isocèle et rectangle en J ; donc : $s(M) = J$.

c) On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{s}{\curvearrowright}} \\ \hline A & A \\ D & I \\ C & B \\ M & J \end{array}$$

Lorsque M décrit la droite (DC),
alors J décrit la droite (IB).

6. Applications de l'espace

(pages 123 à 146 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- Définir certaines applications de l'espace et étudier leurs propriétés.

COMMENTAIRES

Ce chapitre enrichit les connaissances acquises sur les projections, les translations, les homothéties et les symétries orthogonales par leur extension à l'espace.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Projections • Définitions et propriétés : – définition de la projection sur un plan (resp. une droite), parallèlement à une droite (resp. un plan) ; – image de l'espace par une projection ; – ensemble des antécédents par une projection ; – ensemble des points invariants par une projection. • Autres propriétés : – conservation du coefficient de colinéarité ; – image d'une droite, d'un plan par une projection ; – expression analytique.	– décomposition d'un demi-tour ; – image d'une droite, d'un plan, d'une configuration du plan ou de l'espace ; – expression analytique ; – composée de deux demi-tours ; – composée d'un demi-tour et d'une réflexion. • Déterminer l'image, par une projection donnée, de certaines configurations du plan (quadrilatères, triangles) et de l'espace (tétraèdre, cube). • Déterminer les coordonnées de l'image d'un point par une projection donnée. • Déterminer une représentation paramétrique (ou une équation cartésienne) de l'ensemble des antécédents d'un point donné par une projection donnée.
Translations et Homothéties • Translations : – définition ; – propriété caractéristique ; – image d'une droite, d'un plan, d'une configuration du plan ou de l'espace ; – expression analytique ; – composée de deux translations. • Homothéties : – définition ; – propriété caractéristique ; – image d'une droite, d'un plan, d'une configuration du plan ou de l'espace ; – expression analytique ; – composée d'une homothétie et d'une translation.	• Déterminer les coordonnées de l'image d'un point donné par : – une translation donnée ; – une homothétie donnée. • Déterminer l'expression analytique : – d'une translation donnée ; – d'une homothétie donnée ; – d'une composée de translations et d'homothéties. • Étant donnée son expression analytique, déterminer les éléments caractéristiques : – d'une translation ; – d'une homothétie. • Déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une composée de translations et d'homothéties.
Symétries orthogonales • Réflexions : – définition ; – ensemble globalement invariant ; – restriction à l'ensemble globalement invariant ; – image d'une droite, d'un plan, d'une configuration du plan ou de l'espace ; – expression analytique ; – composée de deux réflexions de plans parallèles. • Demi-tours : – définition ; – ensemble globalement invariant ; – restriction à l'ensemble globalement invariant ; – composée de deux réflexions de plans perpendiculaires ;	• Déterminer les coordonnées de l'image d'un point donné par : – une réflexion donnée ; – un demi-tour donné. • Déterminer l'expression analytique : – d'une réflexion ; – d'un demi-tour. • Étant donnée son expression analytique, démontrer qu'une application affine est une réflexion (ou un demi-tour) et en déterminer les éléments caractéristiques.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a. p. 128

1. A'B'C'D' est un parallélogramme.

2. Soit (Δ) la droite, intersection des plans (ABC) et $(\mathcal{P})$.

- Si (Δ) // (AC) ou (Δ) // (BD), alors A'B'C'D' est un losange.
- Si (Δ) est parallèle à un côté du carré ABCD, alors A'B'C'D' est un rectangle.
- Si (ABC) est parallèle à $(\mathcal{P})$, alors A'B'C'D' est un carré.

♦ Exercice 1.b. p. 128

On munit l'espace $\mathscr{E}$ du repère orthonormé (A, B, D, E).

1. Le plan (FHC) a pour équation : $x + y + z - 2 = 0$; un vecteur normal est : $\vec{n}(1\,;1\,;1)$.
On a : $\overrightarrow{AG} = \vec{n}$; donc : (AG) ⊥ (FHC) et $p(A) = p(G)$.

2. $p(A)$ a pour coordonnées $(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3})$; donc, $p(A)$ est le centre de gravité de HFC.

♦ Exercice 1.c. p. 128

On munit $\mathscr{E}$ du repère orthonormé (A, B, D, E).

1. A, F et H ont la même image I $(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3})$ par p **2.** $(\mathcal{P}) = x + y - z - 1 = 0$.

♦ Exercice 1.d. p. 128

1. A'B'C'D' est un parallélogramme **2.** A'B'C'D' est un losange **3.** A'B'C'D' est un carré.

♦ Exercice 1.e. p. 128

1. A' $(2\,;-1\,;-1)$

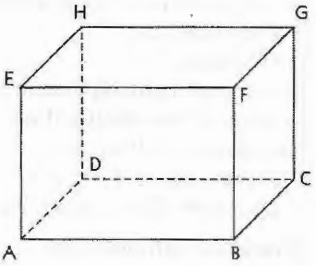
2. $\begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = -2\lambda - 1. \\ z = 3\lambda - 1 \end{cases}$

♦ Exercice 1.f. p. 128

1. A' $(0\,;1\,;-1)$

2. $(\mathcal{P}) : x - y - 2z - 1 = 0$.

♦ Exercice 2.a. p. 133



A$(0\,;0\,;0)$; B $(1\,;0\,;0)$; D$(0\,;1\,;0)$; E $(0\,;0\,;1)$;
C $(1\,;1\,;0)$; F $(1\,;0\,;1)$; G $(1\,;1\,;1)$; H $(0\,;1\,;1)$.

Notons C', F', G' et H' les images respectives des points C, F, G et H par la transformation donnée.

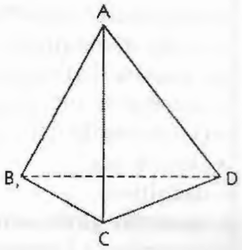
a) On a : $\overrightarrow{EG}(1\,;1\,;0)$; donc C'$(2\,;2\,;0)$; F'$(2\,;1\,;1)$;
G'$(2\,;2\,;1)$; H'$(1\,;2\,;1)$.

b) On a : $\overrightarrow{BH}(-1\,;1\,;1)$; donc C'$(0\,;2\,;1)$; F'$(0\,;1\,;2)$;
G'$(0\,;2\,;2)$; H'$(-1\,;2\,;2)$.

c) C'$(-2\,;-2\,;0)$; F'$(-2\,;0\,;-2)$; G'$(-2\,;-2\,;-2)$; H'$(0\,;-2\,;-2)$.

d) C' $(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2})$; F' = F ; G'$(1\,;\frac{1}{2}\,;1)$; H'$(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1)$.

♦ Exercice 2.b. p. 133



A'$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; B'$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;

C'$(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$; D'$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

♦ Exercice 2.c. p.133

toh est l'homothétie de centre E et de rapport 2.

◆ **Exercice 2.d. p. 133**

$h_2 \circ h_1$ est la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

◆ **Exercice 2.e. p. 133**

1. f est l'homothétie de centre $\Omega(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ et de rapport -2.

g est a translation de vecteur $\vec{u}(1, -2, -1)$.

2. $g \circ f : \begin{cases} x' = -2x - 3 \\ y' = -2y - 1 \\ z' = -2z + 2 \end{cases}$ $f \circ g : \begin{cases} x' = -2x - 6 \\ y' = -2y + 5 \\ z' = -2z + 5 \end{cases}$

$g \circ f$ est l'homothétie de centre $\Omega(-1, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ et de rapport -2.

$f \circ g$ est l'homothétie de centre $\Omega'(-2, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ et de rapport -2.

◆ **Exercice 2.f. p. 133**

$$h_1 : \begin{cases} x' = -3x - 4 \\ y' = -3y + 8 \\ z' = -3z - 8 \end{cases} \quad ; \quad h_2 : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\ z' = \frac{1}{2}z + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$h_2 \circ h_1 : \begin{cases} x' = -\frac{3}{2}x - 2 \\ y' = -\frac{3}{2}y + \frac{7}{2} \\ z' = -\frac{3}{2}z - \frac{5}{2} \end{cases} \quad ; \quad h_1 \circ h_2 : \begin{cases} x' = -\frac{3}{2}x - 4 \\ y' = -\frac{3}{2}y + \frac{19}{2} \\ z' = -\frac{3}{2}z - \frac{25}{2} \end{cases}$$

$h_2 \circ h_1$ est l'homothétie de centre $\Omega(-\frac{4}{5} ; \frac{7}{5} ; -1)$ et de rapport $-\frac{3}{2}$.

$h_1 \circ h_2$ est l'homothétie de centre $\Omega'(-\frac{8}{5} ; \frac{19}{5} ; -5)$ et de rapport $-\frac{3}{2}$.

◆ **Exercice 3.a. p 143**

1.

s_1	
A	F
B	B
C	C
D	G
E	E
F	A
G	D
H	H

s_2	
A	A
B	E
C	H
D	D
E	B
F	F
G	G
H	C

$s_2 \circ s_1$	
A	F
B	E
C	H
D	G
E	B
F	A
G	D
H	C

2. Les plans (OEH) et (OFG) sont perpendiculaires suivant une droite (Δ) contenant le point O. Donc, $s_2 \circ s_1$ est le demi-tour d'axe (Δ).

◆ **Exercice 3.b. p. 143**

$S_{(AD)} \circ S_{(AB)} = S_{(AE)}$; donc : $f = Id_{\mathcal{E}}$.

◆ **Exercice 3.c. p. 143**

1.

$S_{(OIA)}$	
O	O
A	A
B	C
C	B

$S_{(OJB)}$	
O	O
A	C
B	B
C	A

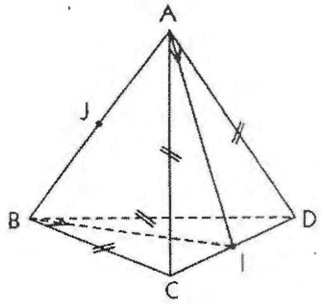
$S_{(OKC)}$	
O	O
A	B
B	A
C	C

2. $S_{(OIA)} \circ S_{(OBC)} = S_{(OI)}$; $S_{(OJB)} \circ S_{(OCA)} = S_{(OJ)}$; $S_{(OKC)} \circ S_{(OAB)} = S_{(OK)}$.

3. Soit L le milieu de [AO]. La droite (IL) est un axe de symétrie de OABC.

♦ Exercice 3.d. p. 143

Soit I et J les milieux respectifs de [CD] et [AB].



On a :

$S_{(ABI)}$

A	A
B	B
C	D
D	C

$S_{(CDJ)}$

A	B
B	A
C	C
D	D

Donc, (ABI) et (CDJ) sont des plans de symétrie de ABCD.
On en déduit que la droite ($\mathcal{D}$), intersection de (ABI) et (CDJ) est un axe de symétrie de ABCD.

♦ Exercice 3.e. p. 143

1. G(1 ; 1 ; 1) ; $\overrightarrow{AB}(-3 ; 3 ; 0)$; $\overrightarrow{AC}(-3 ; 0 ; 3)$.

On a : $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AC} = 0$, donc : (OG) ⊥ (ABC).

2. O'(2 ; 2 ; 2).

3. O' = O ; A'(– 1; 2 ; 2) ; B'(2 ; – 1 ; 2) et C'(2 ; 2 ; –1).

♦ Exercice 3.f. p .143

1. O'(2 ; – 1 ; 1) ; A'(1 ; 3 ; 1).

2. Les droites (OA) et (O'A') sont sécantes en $B(\frac{3}{2} ; 1 ; 1)$.

♦ Exercice 3.g. p. 143

L'expression analytique du demi-tour d'axe ($\mathcal{D}$)

est : $$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - y - 2z - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z + 6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z - 6). \end{cases}$$

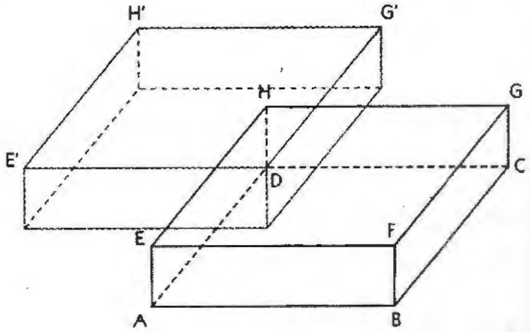
On en déduit : O'(– 2 ; 2 ; – 2) et $A'(-\frac{10}{3} ; -\frac{2}{3} ; -\frac{7}{3})$.

Exercices d'apprentissage

PROJECTIONS DE L'ESPACE

♦ Exercice 1 p. 144

Notons p la projection sur le plan (ABC) parallèlement à la droite (DF).



On a :

p

E	E'
F	D
G	G'
H	H'

♦ Exercice 2 p. 144

1. On a : G = bar {(A, 1), (B , 1), (C, 1), (D, 1)} ;
A' = bar {(B, 1), (C, 1), (D, 1)} ;
p(A) = A' ; p(B) = B ; p(C) = C ; p(D) = D.

Donc : p(G) = bar {(A'; 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)} = bar {(B, 2), (C, 2), (D, 2)} = A'.
p(G) = p(A) = A' ⇒ G ∈ (AA').

2. De même, on a : G ∈ (BB'), où B' est le centre de gravité de ACD ;
G ∈ (CC'), où C' est le centre de gravité de ABD ;
G ∈ (DD'), où D' est le centre de gravité de ABC.

♦ **Exercice 3 p. 144**

On a un losange si (BD) // $(\mathscr{P})$ ou (CA) // $(\mathscr{P})$.

♦ **Exercice 4 p. 144**

a) L'une des droites (AB), (AC) ou (BC) est parallèle au plan $(\mathscr{P})$.
b) (ABC) // $(\mathscr{P})$ ou l'une des bissectrices de ABC est parallèle à $(\mathscr{P})$.

♦ **Exercice 7 p. 144**

1. $\vec{n}(1, -2, 1)$ est à la fois un vecteur normal à $(\mathscr{P})$ et un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$; donc $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$.
On obtient ; I(2, 1, 1).

2. $A_1(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$; $A_2(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$.

3. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_2I}$; donc AA_1IA_2 est un parallélogramme.
De plus, $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AA_2} = 0$, donc AA_1IA_2 est un rectangle.

♦ **Exercice 8 p. 144**

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x - y - z + 3) \\ y' = \frac{1}{3}(-x + 2y - z + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x - y + 2z + 3). \end{cases}$$

♦ **Exercice 9 p. 144**

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + y + z) \\ y' = \frac{1}{3}(x + y + z) \\ z' = \frac{1}{3}(x + y + z). \end{cases}$$

TRANSLATIONS, HOMOTHÉTIES

♦ **Exercice 10 p. 144**

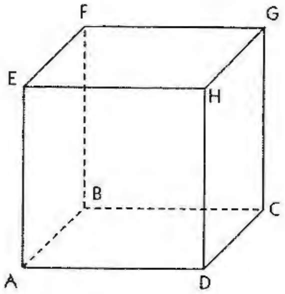
1. $\vec{n}(2, 3, 1)$ est à la fois un vecteur normal à $(\mathscr{P})$ et à $(\mathscr{P}')$; donc : $(\mathscr{P}) // (\mathscr{P}')$.

2. La translation de vecteur $\vec{u}(\frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7})$ transforme $(\mathscr{P})$ en $(\mathscr{P}')$.

♦ **Exercice 11 p. 144**

Dans le repère (A, B, D, E), on a :
A(0, 0, 0) ; B(1, 0, 0) ; C(1, 1, 0) ; D(0, 1, 0) ; E(0, 0, 1) ;
F(1, 0, 1) ; G (1, 1, 1) ; $I(1, \frac{1}{2}, 0)$; $J(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; $\overrightarrow{IJ}(0, 0, \frac{1}{2})$.

Donc :
$A'(0, 0, \frac{1}{2})$; $B'(1, 0, \frac{1}{2})$; $C'(1, 1, \frac{1}{2})$; $D'(0, 1, \frac{1}{2})$;
$E'(0, 0, \frac{3}{2})$; $F'(1, 0, \frac{3}{2})$; $G'(1, 1, \frac{3}{2})$; $H'(0, 1, \frac{3}{2})$.



♦ **Exercice 12 p. 144**

f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

♦ **Exercice 13 p. 144**

1. $\mathscr{A}(IJK) = \frac{1}{4}\mathscr{A}(BCD)$

2. $\mathscr{V}(ABCD) = 8\,\mathscr{V}(AIJK)$.

♦ **Exercice 14 p. 144**

On a : - l'homothétie h_1 de centre O_1 et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

- l'homothétie h_2 de centre O_2 et de rapport $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$O_1 \in$ (AB) ∩ (II') et $O_2 \in$ (AC) ∩ (II').

♦ Exercice 15 p. 144

Soit $M \in (S)$. $S_M(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AM}$.

Lorsque M parcourt (S), A' parcourt la sphère (S'), image de (S) par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

♦ Exercice 17 p. 144

1. h est l'homothétie de centre $\Omega(\frac{2}{3}, -1, 1)$ et de rapport -2.
2. L'image du point O est le point $O'(2 ; -3 ; 3)$.

SYMÉTRIES ORTHOGONALES

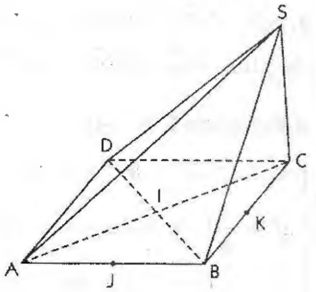
♦ Exercice 18 p. 145

a) $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z + 2 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x' = x \\ y' = -z + 1 \\ z' = -y + 1 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x' = -z + 1 \\ y' = y \\ z' = -x + 1 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1. \\ z' = z. \end{cases}$

♦ Exercice 20 p. 145

Soit I, J, K les milieux respectifs de [AC], [AB], [BC].

- On a quatre (4) plans de symétrie : (SAC), (SBD), (SIJ) et (SIK).
- On a un (1) axe de symétrie : (SI).



♦ Exercice 21 p. 145

1. On a : A(0, 0, 0); B(1, 0, 0) ; C(1, 1, 0) ; D(0, 1, 0), $S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2. *a)* $S_{(SAB)} : \begin{cases} x' = x \\ y' = z \\ z' = y \end{cases}$

$S'(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; A'(0, 0, 0) ; B'(1, 0, 0) ; C'(1, 0, 1) ; D'(0, 0, 1).

b) $s_{(SA)} : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y + 2z) \\ z' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z). \end{cases}$

$S'(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; A'(0, 0, 0) ; $B'(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; $C'(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$; $D'(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

c) $h_{(S,-2)} : \begin{cases} x' = -2x + \frac{3}{2} \\ y' = -2y + \frac{3}{2} \\ z' = -2z + \frac{3}{2}. \end{cases}$

$A'(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$; $B'(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$; $C'(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; $D'(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

♦ Exercice 23 p. 145

1. Notons : a = AB. On a : IJ = KJ = KL = LI = $\frac{1}{2}a$.

De plus : (AC) ⊥ (BD) ; or : (KL) // (IJ) // (AC) et (LJ) // (KJ) // (BD).

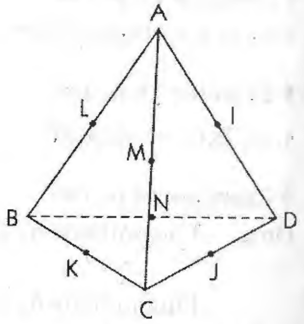
Donc : (LI) ⊥ (IJ) et (LI) ⊥ (KL).

Par suite, IJKL est un carré.

La droite (BD) est perpendiculaire aux droites (NC) et (AN) qui sont sécantes ; donc, (BD) est orthogonale à (ANC).

Or : (NM) ⊂ (ANC) ; donc : (BD) ⊥ (MN).

Comme (BD) // (IJK) et (MN) ⊥ (BD), on a : (MN) ⊥ (IJK).

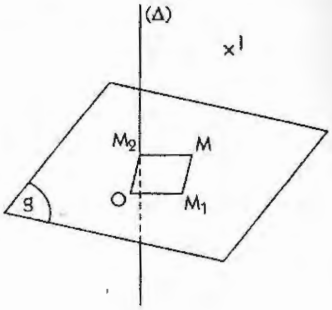


2. $s = S_{(IJK)}$; $d_1 = S_{(IK)}$; $d_2 = S_{(JL)}$.

a) $d_1 = s \circ s_1$, avec $s_1 = S_{(IKM)}$; $d_2 = s_2 \circ s$, avec $s_2 = S_{(JLM)}$ *b)* $d = S_{(MN)}$.

❑ Approfondissement

♦ Exercice 24 p. 145



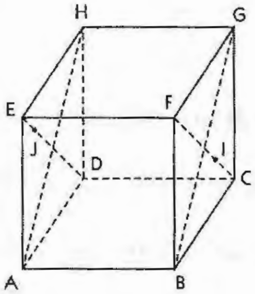
1. Supposons I, M_1 et M_2 alignés.
$M_2 \in (\Pi) \Rightarrow (IM_2) \subset (\Pi)$.
I, M_1 et M_2 alignés $\Rightarrow M_1 \in (\Pi)$.
$M_1 \in (\Pi)$ et $M_2 \in (\Pi) \Rightarrow M \in (\Pi)$.

2. *a)* (E) : $y = \dfrac{x}{x-1}$ *b)* (E) est une hyperbole.

♦ Exercice 26 p. 145

Le polygone obtenu est un hexagone.

♦ Exercice 27 p. 145



On munit $\mathscr{E}$ du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. On a : A(0, 0, 0) ; B(1, 0, 0) ; D(0, 1, 0) ; E(0, 0, 1) ;
G(1, 1, 1) ; C(1, 1, 0) ; H(0, 1, 1) ; $I(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$;
$O(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; $J(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Une représentation paramétrique de la droite (OI) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{6}t + \frac{1}{2} \\ z' = -\frac{1}{6}t + \frac{1}{2} \\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Une équation cartésienne du plan (ADH) est : $x = 0$.
On vérifie, analytiquement, que : $(ADH) \cap (OI) = \{J\}$.

2. *a)* On vérifie que : $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{CI}$.

b) On a (CD) : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$; (IJ) : $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -\frac{1}{3}t + \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{3}t + \frac{1}{3} \\ x = t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Donc, (CD) et (IJ) sont sécantes en K(2, 1, 0).

c) (EF) et (IJ) sont sécantes en L(− 1, 0, 1).

♦ Exercice 28 p. 146

1. Plans de symétrie de l'octaèdre : - les plans diagonaux (BCD), (ACF) et (ABD) ;
- les plans médiateurs des arêtes opposées.

2. *a)* $\underset{\curvearrowright}{S_{(AF)}}$

A	A
B	D
C	E
D	B
E	C
F	F

Donc, (AF) est un axe de symétrie de l'octaèdre.

b) Soit (Δ_1) et (Δ_2) les médiatrices respectives des segments [BC] et [CD].
Les droites (Δ_1), (Δ_2), (BD) et (CE) sont les axes de symétrie du carré BCDE.

On a :

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{S_{(\Delta_1)}}{\curvearrowright}} \\ \hline A & F \\ B & C \\ C & B \\ D & E \\ E & D \\ F & A \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{S_{(\Delta_2)}}{\curvearrowright}} \\ \hline A & F \\ B & E \\ C & D \\ D & C \\ E & B \\ F & A \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{S_{(BD)}}{\curvearrowright}} \\ \hline A & F \\ B & B \\ C & E \\ D & D \\ E & C \\ F & A \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{S_{(CE)}}{\curvearrowright}} \\ \hline A & F \\ B & D \\ C & C \\ D & B \\ E & E \\ F & A \end{array}$$

Donc, les droites (Δ_1), (Δ_2), (BD) et (CE) sont des axes de symétrie de l'octaèdre.

c)

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overset{S_{(IJ)}}{\curvearrowright}} \\ \hline A & B \\ B & A \\ C & E \\ D & F \\ E & C \\ F & D \end{array}$$

Donc, (IJ) est un axe de symétrie de l'octaèdre.
Notons K, L, M, N, P et Q les milieux respectifs de [CF], [AE], [BF], [AD], [AC] et [EF].

Les droites (KL), (MN) et (PQ) sont des axes de symétrie de l'octaèdre.

3. *a)* On a : $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & E \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$; $G' = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline C & D & F \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$.

O étant le centre de l'octaèdre, on a :

$O = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D & E & F \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline G & G' \\ \hline 3 & 3 \\ \hline\end{array}$. Donc O est le milieu de [GG'].

b) La droite (GG') n'est pas un axe de symétrie de l'octaèdre.

♦ Exercice 29 p. 146

1.

$$s : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = z \end{cases} ; \qquad s' : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z + 4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z + 4) \end{cases}$$

2. *a)* (ACE) : $x - y = 0$; $\vec{n}(1, -1, 0)$ est un vecteur normal de (ACE).
(CFH) : $x + y + z - 2 = 0$; $\vec{n}'(1, 1, 1)$ est un vecteur normal de (CFH).

On a : $\vec{n}.\vec{n}' = 0$; donc : (ACE) ⊥ (CFH).

b) On a : $S_{(IC)} = S_{(CFH)}{}^{o}S_{(ACE)}$; donc

$$S_{(IC)} : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z + 4) \\ y' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 4) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z + 4). \end{cases}$$

♦ Exercice 30 p. 146

1. *a)*

$$S_{\pi'} : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z + 6) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z - 3). \end{cases}$$

b)

$$S_{\Delta} : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + 2y - 2z) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - 2y - z) \\ z' = -\frac{1}{3}(2x + y + 2z). \end{cases}$$

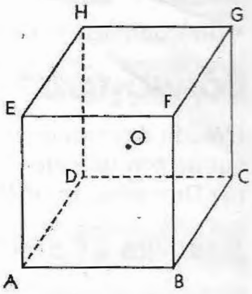
c)

$$S_{\Delta}{}^{0}S_{\pi} : \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y \quad 1 \\ z' = -z - 1. \end{cases}$$

2. $S_{\Delta}{}^{0}S_{\pi}$ est la symétrie de centre le point $\Omega(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

◆ Exercice 31 p. 146

1. Soit S_A une symétrie centrale par rapport à un point A.
On peut toujours trouver une droite (Δ) et un plan (π) tels que : $A \in (\Delta) \cap (\pi)$ et $(\Delta) \perp (\pi)$.
Alors : $S_A = S_{(\Delta)} \circ S_{(\pi)}$.
Soient alors (π_1) et (π_2) deux plans perpendiculaires suivant (Δ) ; on a : $S_{(\Delta)} = S_{(\pi_1)} \circ S_{(\pi_2)}$.
Donc : $S_A = S_{(\pi_1)} \circ S_{(\pi_2)} \circ S_{(\pi)}$.



2. *a)* $S_o \circ S_{(AOC)} = S_{(\Delta)}$, où (Δ) est la perpendiculaire au plan (AOC) en O.
$(\Delta) = \mathfrak{D}(o, \overrightarrow{BD})$; $S_{(AOC)} \circ S_o = S_{(\Delta)}$.

a) $S_o \circ S_{(AG)} = S_{(HBF)}$; $S_{(AC)} \circ S_o = S_{(HBF)}$.

7. Coniques

(page 147 à 170 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- (Re)connaître certaines courbes planes usuelles.

COMMENTAIRES

L'étude des coniques comme sections planes d'un cône avait une importance capitale pour les Anciens qui ne connaissaient pas d'antres moyens de les envisager. Mais depuis l'introduction des coordonnées par Descartes, les méthodes qu'ils utilisaient ont surtout un intérêt historique.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Étude générale des coniques • Conique définie par foyer et directrice : – définitions (parabole, ellipse, hyperbole) ; – régionnement du plan par une conique. • Équation réduite de la conique : – équation réduite d'une parabole ; – équation réduite d'une conique à centre. • Étude de courbes d'équations $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0.$	• Déterminer une équation d'une parabole de foyer et de directrice donnés. • Déterminer une équation d'une conique à centre connaissant le foyer, la directrice et l'excentricité. • Déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une conique d'équation donnée.
Étude de la parabole • Étude analytique : – tracé de la parabole ; – éléments caractéristiques de la parabole ; – équation de la tangente en un point de la parabole ; – régionnement du plan par la parabole. • Étude géométrique.	• Tracer une parabole d'équation donnée. • Déterminer une équation de la tangente en un point d'une parabole d'équation donnée.
Étude de l'ellipse • Étude analytique : – tracé de l'ellipse ; – éléments caractéristiques de l'ellipse ; – équation de la tangente en un point de l'ellipse. • Ellipse et cercle : – représentation paramétrique de l'ellipse ; – cercle principal et affinité. • Définition bifocale de l'ellipse.	• Tracer une ellipse d'équation donnée. • Déterminer une équation de la tangente en un point d'une ellipse d'équation donnée. • Déterminer une représentation paramétrique d'une ellipse d'équation donnée. • Déterminer une équation d'une ellipse de représentation paramétrique donnée. • Déterminer l'équation réduite d'une ellipse de définition bifocale donnée. • Déterminer la définition bifocale d'une ellipse d'équation réduite donnée.
Étude de l'hyperbole • Étude analytique : – tracé de l'hyperbole ; – éléments caractéristiques de l'hyperbole ; – équation de la tangente en un point ; – équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. • Définition bifocale de l'hyperbole.	• Tracer une hyperbole d'équation donnée. • Déterminer une équation de la tangente en un point d'une hyperbole d'équation donnée. • Déterminer l'équation réduite d'une hyperbole de définition bifocale donnée. • Déterminer la définition bifocale d'une hyperbole d'équation réduite donnée.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 153

Soit $(\mathscr{P})$ la parabole de foyer F, de directrice $(\mathscr{D})$ et de sommet S. On munit le plan d'un repère orthonormé $(S, \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\vec{i} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$. L'équation réduite de $(\mathscr{P})$ est :

a) $y^2 = 4x$ *b)* $y^2 = 10x$ *c)* $y^2 = 16x$ *d)* $y^2 = x$.

♦ Exercice 1.b p. 153

a) $(\Gamma) : \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ *b)* $(\Gamma) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ *c)* $(\Gamma) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ *d)* $(\Gamma) : \frac{x^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{18} = 1$.

♦ Exercice 1.c p. 153

a) $(\mathscr{P}) : y^2 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$ *b)* $(\mathscr{P}) : (y-2)^2 = 4x$ *c)* $(\mathscr{P}) : x^2 = -8(y-1)$ *d)* $(\mathscr{P}) : (x-1)^2 = 10\left(y + \frac{3}{2}\right)$.

♦ Exercice 1.d p. 153

a) $(\Gamma) : \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{2} = 1$ *b)* $(\Gamma) : \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

c) $(\Gamma) : \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$ *d)* $(\Gamma) : -\frac{(x-4)^2}{\frac{9}{8}} + \frac{\left(y - \frac{1}{8}\right)^2}{\frac{9}{64}} = 1$.

♦ Exercice 1.e p. 153

a) $F\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $(\mathscr{D}) : x = -1$ *b)* $F\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$; $(\mathscr{D}) : y = 2$ *c)* $F\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\0\end{pmatrix}$; $(\mathscr{D}) : x = -\frac{5}{4}$ *d)* $F\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $(\mathscr{D}) : y = 1$.

♦ Exercice 1.f p. 153

	a	*b*	*c*	*d*
Nature	ellipse	ellipse	hyperbole	hyperbole
Centre	O	O	O	O
Axe focal	$\mathscr{D}(O, \vec{i})$	$\mathscr{D}(O, \vec{j})$	$\mathscr{D}(O, \vec{i})$	$\mathscr{D}(O, \vec{j})$
Sommets sur l'axe focal	A $(2, 0)$ A' $(-2, 0)$	B $(0, 2\sqrt{3})$ B' $(0, -2\sqrt{3})$	A $(2\sqrt{3}, 0)$ A' $(-2\sqrt{3}, 0)$	B $(0, 2\sqrt{3})$ B' $(0, -2\sqrt{3})$
Foyers	F $(\sqrt{2}, 0)$ F' $(-\sqrt{2}, 0)$	F $(0, \sqrt{3})$ F' $(0, -\sqrt{3})$	F $(2\sqrt{5}, 0)$ F' $(-2\sqrt{5}, 0)$	F $(0, 4)$ F' $(0, -4)$
Directrices	$(\mathscr{D}) : x = 2\sqrt{2}$ $(\mathscr{D}') : x = -2\sqrt{2}$	$(\mathscr{D}) : y = 4\sqrt{3}$ $(\mathscr{D}') : y = -4\sqrt{3}$	$(\mathscr{D}) : x = \frac{6}{\sqrt{5}}$ $(\mathscr{D}') : x = \frac{-6}{\sqrt{5}}$	$(\mathscr{D}) : y = 3$ $(\mathscr{D}') : y = -3$
Excentricité	$e = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$e = \frac{1}{2}$	$e = \sqrt{\frac{5}{3}}$	$e = \frac{2}{\sqrt{3}}$

♦ Exercice 1.g p. 153

a) $(E) : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ *b)* $(E) : (x+1)^2 + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$

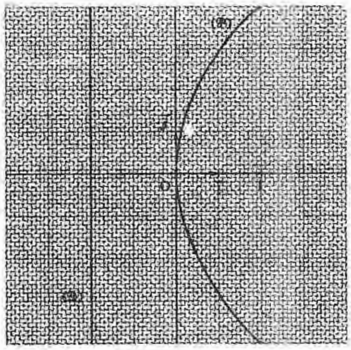
c) $(E) : \frac{x^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{8} = 1$ *d)* $(E) : -\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y+1)^2}{8} = 1$.

	a	*b*	*c*	*d*
Nature	ellipse	ellipse	hyperbole	hyperbole
Centre	$\Omega\ (1\ ;\ 0)$	$\Omega\ (-1 : 2)$	$\Omega\ (0\ ;\ -2)$	$\Omega\ (3\ ;\ -1)$
Axe focal	$\mathcal{D}\ (\Omega\ ,\vec{i})$	$\mathcal{D}\ (\Omega\ ,\vec{j})$	$\mathcal{D}\ (\Omega\ ,\vec{i})$	$\mathcal{D}\ (\Omega\ ,\vec{j})$
Sommets sur l'axe focal	A $(3, 0)$ A' $(-1, 0)$	B $(-1\ ;\ 2+\sqrt{3})$ B' $(-1\ ;\ 2-\sqrt{3})$	A $(2\ ;\ -2)$ A' $(-2\ ;\ -2)$	B $(3\ ;\ -1+2\sqrt{2})$ B' $(3\ ;\ -1-2\sqrt{2})$

♦ Exercice 2.a p. 157

A : $(\frac{9}{2}\ ;-6)$

$(T_A) : 2\,x + 3y + 9 = 0.$

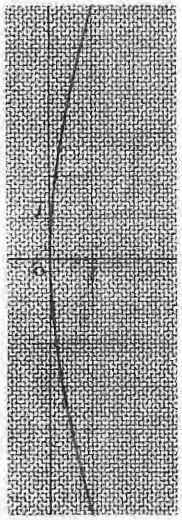


♦ Exercice 2.b p. 157

Les tangentes à $(\mathcal{P})$ en A (x_0, y_0) passant par P (2, 9) ont pour équation :

$y_0 = 2\,x_0 + 4.$

Leurs points de contact avec $(\mathcal{P})$ sont : B (1 ; 6) et C (4 ; 12).



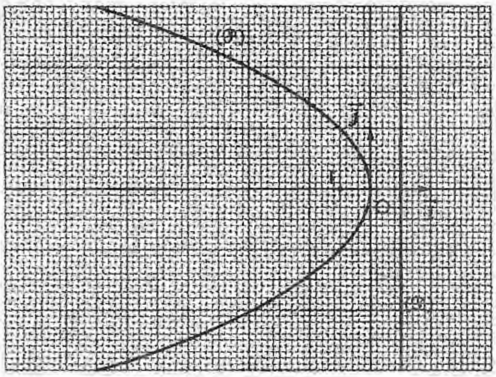
♦ Exercice 2.c p. 157

Les points de $(\mathcal{P})$ d'abscisse – 1 sont :

A $(-1\ ;\ \sqrt{2})$ et B $(-1\ ;\ -\sqrt{2})$.

$(T_A) : x + y\sqrt{2} - 1 = 0$

$(T_B) : x - y\sqrt{2} - 1 = 0.$



♦ Exercice 2.d p. 157

Le plan est muni du repère orthonormé $(S\ ;\vec{i},\vec{j})$.
Soit M (x_0, y_0).

On a $(\mathcal{P}) : y^2 = 2\,a\,x$

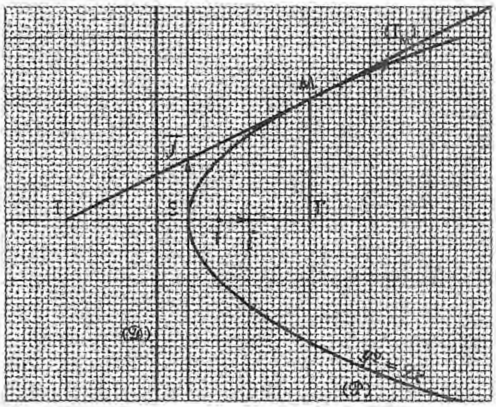
$(T_M) : y_0 y = a\,(x + x_0).$

L'axe focal (SF) a pour équation : $y = 0$.
T, le point d'intersection de (T_M)
et (SF) a pour coordonnées $(-x_0\ ;\ 0)$.
Le symétrique de T par rapport à S est T' $(x_0, 0)$.

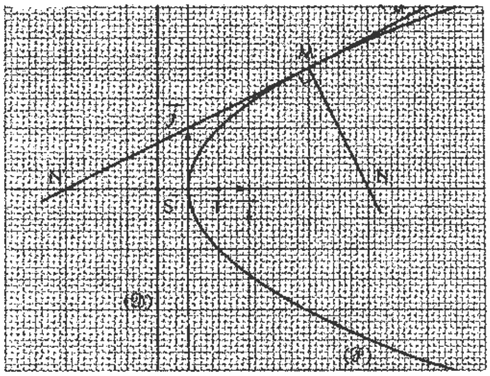
On a : $\overrightarrow{MT'}\ (0, -y_0)$ et $\overrightarrow{TT'}\ (2\,x_0, 0)$.

Donc : $\overrightarrow{MT'} \cdot \overrightarrow{TT'} = 0$.

T est bien le projeté orthogonal de M sur (SF).



♦ Exercice 2.e p. 157



Soit S le sommet de la parabole $(\mathcal{P})$.

On munit le plan du repère orthonormé $(S ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $(\mathcal{P}) : y^2 = 2\,ax$

$M(x_0, y_0)$ $(y_0 \neq 0)$ un point de $(\mathcal{P})$.

$(T_M) : y_0 y = a(x + x_0)$

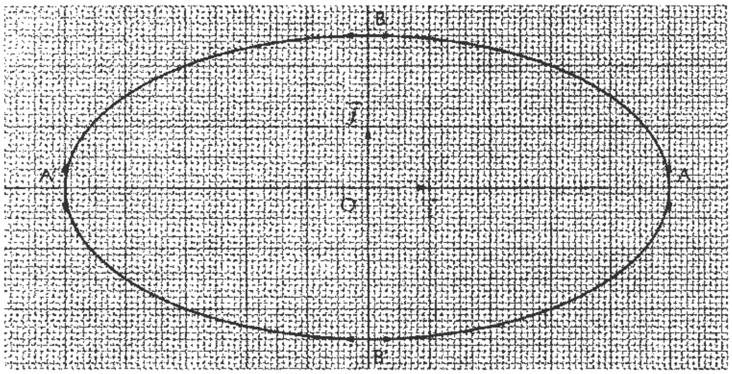
$F(\frac{a}{2}, 0)$ le foyer.

La perpendiculaire en M à (T_M) coupe l'axe focal en N $(x_0 + a, 0)$.

Le symétrique de N par rapport à F est N' $(-x_0, 0)$.

Les coordonnées de N' vérifient l'équation de (T_M), donc : $N' \in (T_M)$.

♦ Exercice 3.a p. 162



$(\mathcal{E})$ est l'ellipse de centre O et de sommets A $(5 ; 0)$,

A' $(-5 ; 0)$, B $(0 ; \frac{5}{2})$ et B' $(0, -\frac{5}{2})$.

1. Les points d'abscisses 4 sont C $(4 ; \frac{3}{2})$ et D $(4 ; -\frac{3}{2})$.

On a $(T_C) : 4x + 6y = 25$

$(T_D) : 4x - 6y = 25$

2. Les tangentes à $(\mathcal{E})$ ayant pour coefficient directeur $\frac{3}{8}$ passent par les points E $(3 ; -2)$ et H $(-3 ; 2)$.

On a $(T_E) : 3x - 8y = 25$ et $(T_H) : -3x + 8y = 25$.

♦ Exercice 3.b p. 162

a) $\begin{cases} x = -2 + 4\cos\theta \\ y = 1 + 2\sqrt{2}\sin\theta \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x = 1 + 2\cos\theta \\ y = -3 + 4\sin\theta \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta - 1 \\ y = 2\sin\theta + 1. \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$

♦ Exercice 3.c p. 162

a) $\dfrac{(x+1)^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{(y-2)^2}{\frac{9}{16}} = 1$ *b)* $\dfrac{(x+3)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1.$

♦ Exercice 3.d p. 162

On munit le plan du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ tel que O est le milieu de [FF'] et $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$.

L'équation réduite de l'ellipse est : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

♦ Exercice 3.e p. 162

a) F $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et F' $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

$(\mathcal{E})$ est l'ensemble des points M du plan tels que : MF + MF' = 4.

b) F $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et F' $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$(\mathcal{E})$ est l'ensemble des points M du plan tels que : MF + MF' = 10.

♦ Exercice 3.f p. 162

1. $(\mathscr{C}) : x^2 + (y-1)^2 = 9$. $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $\Omega\ (0\ ;\ 1)$ et de rayon 3.

2. *a)* L'expression analytique de l'affinité est : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{2}{3}\,y\ . \end{cases}$

On en déduit une équation de l'image de $(\mathscr{C})$ par l'affinité : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y-\frac{2}{3})^2}{4} = 1.$

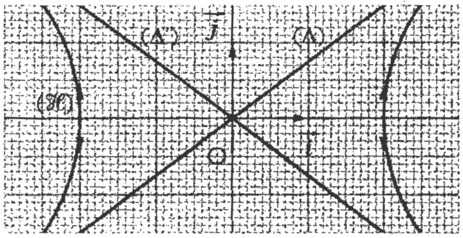
C'est l'ellipse de centre $\Omega'\ (0\ ;\ \frac{2}{3})$ et de sommets A (3 ; 0) ; A' (– 3 ; 0) ; B (0 ; 2) ; B' (0 ; – 2).

b) L'expression analytique de l'affinité est : $\begin{cases} x' = 2\,x \\ y' = y\ . \end{cases}$

Une équation de l'image de $(\mathscr{C})$ par l'affinité est : $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1.$

C'est l'ellipse de centre Ω et de sommets A (6 ; 0) ; A' (– 6 ; 0) ; B (0 ; 3) ; B' (0 ; – 3).

♦ Exercice 4.a p. 166



$(\mathscr{H})$ est l'hyperbole de centre O,
de sommets A $(\sqrt{2}\ ;\ 0)$, A' $(-\sqrt{2}\ ;\ 0)$
et d'asymptotes $(\Delta) : y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x$; $(\Delta') : y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,x$.

1. Les points de $(\mathscr{H})$ d'abscisse $2\sqrt{2}$ sont C $(2\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3})$ et D $(2\sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{3})$.

$(T_C) : x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1$ et $(T_D) : x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 1$.

2. $(\mathscr{H})$ admet des tangentes de coefficient directeur 1 aux points E (2 ; 1) et H (– 2 ; – 1).

$(T_E) : x - y = 1$ et $(T_H) : -x + y = 1$.

♦ Exercice 4.b p. 166

On munit le plan du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ tel que O est le milieu de [FF'] et $\vec{i} = \dfrac{1}{OF}\,\overrightarrow{OF}$.

On a $(\mathscr{H}) : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1.$

♦ Exercice 4.c p. 166

Le plan est muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

a) Soit F $(\sqrt{6}\ ;\ 0)$ et F' $(-\sqrt{6}\ ;\ 0)$. $(\mathscr{H})$ est l'ensemble des points M du plan tels que : $|MF - MF'| = 4$.

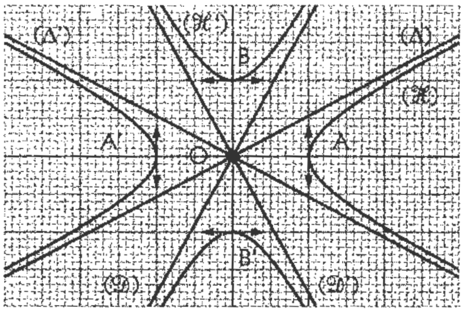
b) Soit F $(0\ ;\ \sqrt{6})$ et F' $(0\ ;\ -\sqrt{6})$. $(\mathscr{H})$ est l'ensemble des points M du plan tels que : $|MF - MF'| = 2\sqrt{2}$.

♦ Exercice 4.d p. 166

Soit M le point de coordonnées (x, y) dans $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ et de coordonnées (X, Y) dans $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$.

On a : $\begin{cases} x = X + Y \\ y = X - Y. \end{cases}$ *a)* XY = – 1 *b)* – X + 2 XY + 3 Y = 0 *c)* XY – X – 2 Y + 6 = 0.

♦ Exercice 4.e p. 166



1. $(\mathscr{H})$ est l'hyperbole de centre O,
de sommets A (1 ; 0) ; A' (– 1 ; 0)
et d'asymptotes $(\Delta) : y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,x$; $(\Delta') : y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,x$.

$(\mathscr{H}')$ est l'hyperbole de centre O,
de sommets B (0 ; 1) ; B' (0 ; – 1)
et d'asymptotes $(\mathscr{D}) : y = \sqrt{3}\,x$; $(\mathscr{D}') : y = -\sqrt{3}\,x$.

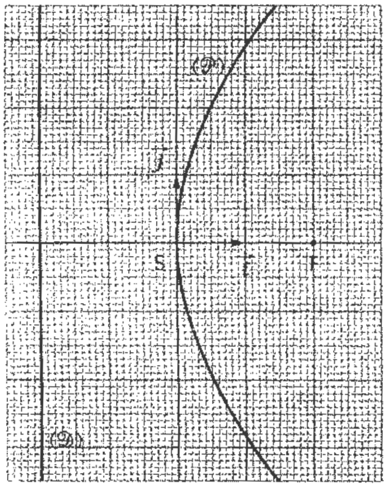
2. *a)* L'expression analytique de r est : $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x. \end{cases}$ Donc : $r(\mathcal{H}) = (\mathcal{H}')$.

b) L'expression analytique de S est : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x. \end{cases}$ Donc : $S(\mathcal{H}) = (\mathcal{H}')$.

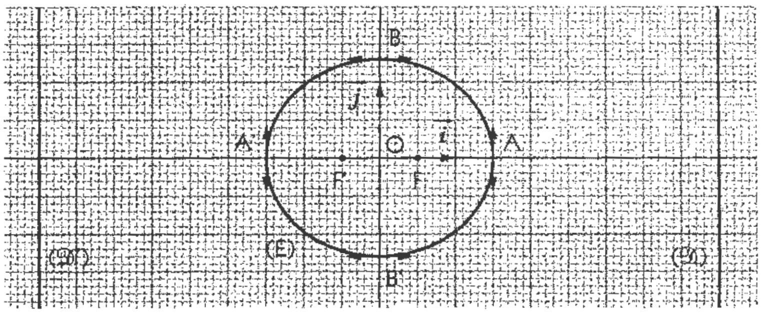
Exercices d'apprentissage

♦ Exercice 1 p. 167

a) On obtient la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation : $y^2 = 8x$.



b)



On obtient l'ellipse (E) d'équation : $\frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(E) a pour sommets A $(\frac{3}{2} ; 0)$; A' $(-\frac{3}{2} ; 0)$; B $(0 ; \sqrt{2})$; B' $(0 ; -\sqrt{2})$.

On a F $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$; F' $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$; $(\mathcal{D})$: $x = \frac{9}{2}$; $(\mathcal{D}')$: $x = -\frac{9}{2}$.

c) On obtient l'hyperbole (H) d'équation :

$\frac{4x^2}{9} - \frac{y^2}{18} = 1$.

(H) a pour sommets A $(\frac{3}{2} ; 0)$ et A' $(-\frac{3}{2} ; 0)$.

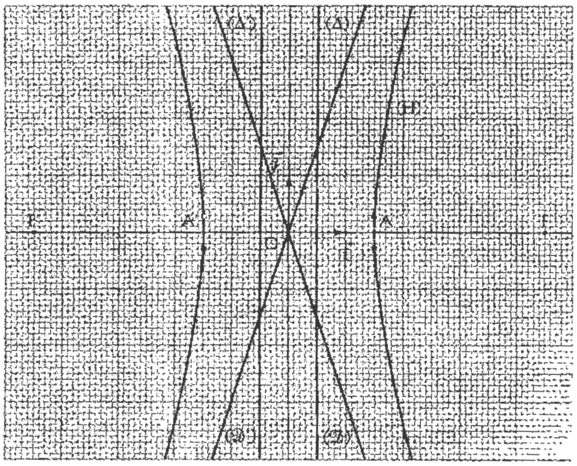
Asymptotes

$(\Delta) : y = 2\sqrt{2}\,x$; $(\Delta') : y = -2\sqrt{2}\,x$.

Foyers et directrices

F $(\frac{9}{2} ; 0)$; F' $(-\frac{9}{2} ; 0)$.

$(\mathcal{D}) : x = \frac{1}{2}$; $(\mathcal{D}') : x = -\frac{1}{2}$.



♦ Exercice 2 p. 167

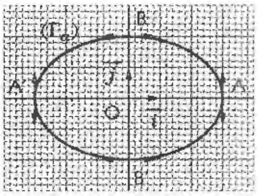
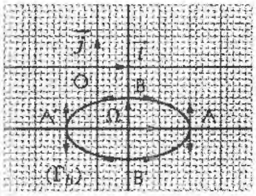
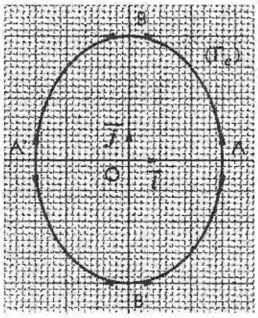
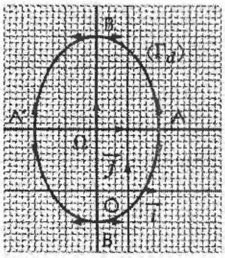
a) F $(-\frac{3}{8} ; 0)$; $(\mathcal{D}) : x = \frac{3}{8}$

b) F $(0 ; \frac{4}{3})$; $(\mathcal{D}) : y = \frac{2}{3}$

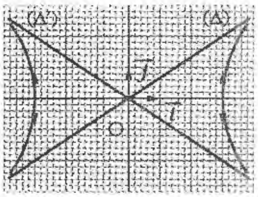
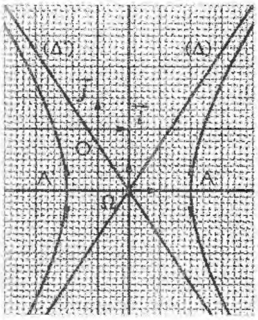
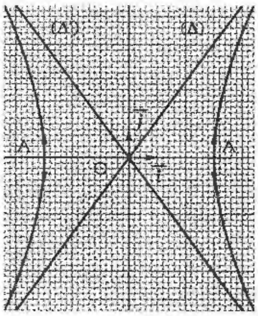
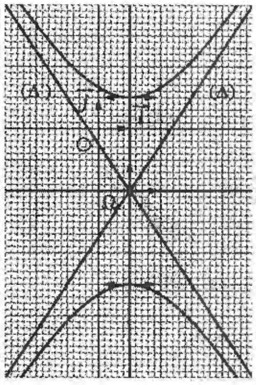
c) F $(\frac{5}{4} ; 1)$; $(\mathcal{D}) : x = \frac{3}{4}$

d) F $(1 ; -\frac{3}{4})$; $(\mathcal{D}) : y = \frac{3}{4}$.

♦ Exercice 3 p. 167

	a	*b*	*c*	*d*
Centre	O	$\Omega\,(1\,;-2)$	O	$\Omega\,(-1\,;2)$
Axe focal	$\mathscr{D}\,(O\,;\vec{i})$	$\mathscr{D}\,(\Omega\,;\vec{i})$	$\mathscr{D}\,(O\,;\vec{j})$	$\mathscr{D}\,(\Omega\,;\vec{j})$
Sommets	A (3 ; 0) ; A' (– 3 ; 0) B (0 ; 2) ; B' (0 ; – 2)	A (3 ; – 2) ; A' (– 1 ; – 2) B (1 ; – 1) ; B' (1 ; – 3)	A (3 ; 0) ; A' (– 3 ; 0) B (0 ; 4) ; B' (0 ; – 4)	A (1 ; 2) ; A' (– 3 ; 2) B (– 1 ; 5) ; B' (– 1 ; – 1)
Courbes				

♦ Exercice 4 p. 167

	a	*b*	*c*	*d*
Centre	O	$\Omega\,(1\,;-2)$	O	$\Omega\,(1\,;-2)$
Axe focal	$\mathscr{D}\,(O\,;\vec{i})$	$\mathscr{D}\,(\Omega\,;\vec{i})$	$\mathscr{D}\,(O\,;\vec{i})$	$\mathscr{D}\,(\Omega\,;\vec{j})$
Sommets	A (3 ; 0) ; A' (– 3 ; 0)	A (3 ; – 2) ; A' (– 1 ; – 2)	A (3 ; 0) ; A' (– 3 ; 0)	B (1 ; 1) ; B' (1 ; – 5)
Asymptotes	$(\Delta) : y = \frac{2}{3}x$ $(\Delta') : y = -\frac{2}{3}x$	$(\Delta) : x - 2y - 5 = 0$ $(\Delta') : x + 2y + 3 = 0$	$(\Delta) : y = \frac{4}{3}x$ $(\Delta') : y = -\frac{4}{3}x$	$(\Delta) : y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ $(\Delta') : y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$
Courbes				

♦ Exercice 5 p. 167

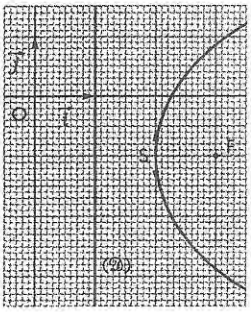
L'hyperbole a pour sommets A(2 ; 0), A' (– 2 ; 0) et pour foyers F $(2\sqrt{2}\,;0)$, F' $(-2\sqrt{2}\,;0)$.

C'est l'hyperbole d'équation : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$.

♦ Exercice 6 p. 167

$(\mathscr{E}) : \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{16} = 1$.

♦ Exercice 7 p. 167



1. ($\mathcal{P}$) est la parabole de sommet S (2 ; – 1), de foyer F (3 ; – 1) et de directrice ($\mathcal{D}$) : $x = 1$.

2. *a)* L'expression analytique de la symétrie s_1 d'axe $\mathcal{D}$ (O ; $\vec{j}$) est : $\begin{cases} x_1 = -x \\ y_1 = y. \end{cases}$

L'image de ($\mathcal{P}$) par la symétrie s_1 est donc la parabole ($\mathcal{P}_1$) d'équation : $y^2 + 2\,y + 4\,x + 9 = 0$.
($\mathcal{P}_1$) a pour sommet S_1 (– 2 ; – 1), pour foyer F_1 (– 3 ; – 1) et pour directrice ($\mathcal{D}_1$) : $x = -1$.

b) La symétrie s_2 de centre O a pour expression analytique : $\begin{cases} x_2 = -x \\ y_2 = -y. \end{cases}$

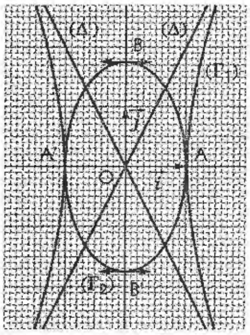
L'image de ($\mathcal{P}$) par la symétrie s_2 est donc la parabole ($\mathcal{P}_2$) d'équation : $y^2 - 2\,y + 4\,x + 9 = 0$.

c) La symétrie orthogonale s_3 par rapport à la droite d'équation $y = x$ a pour expression analytique :

$\begin{cases} x_3 = y \\ y_3 = x. \end{cases}$

L'image de ($\mathcal{P}$) par la symétrie s_3 est donc la parabole d'équation :
$x^2 + 2\,x - 4\,y + 9 = 0$.

♦ Exercice 8 p. 167

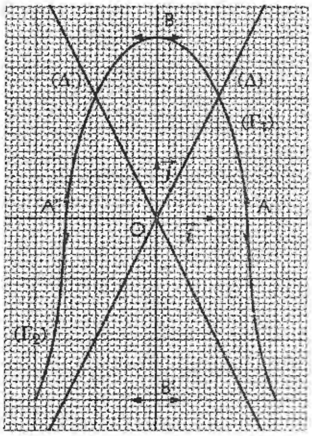


$(\Gamma) = (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$; $(\Gamma_1) : x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$; $(\Gamma_2) : x^2 + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

(Γ_1) est l'hyperbole de sommets A (1 ; 0) ; A' (– 1 ; 0) et d'asymptotes (Δ) : $y = x\sqrt{3}$; (Δ') = $y = -x\sqrt{3}$.

(Γ_2) est l'ellipse de sommets A (1 ; 0) ; A' (– 1 ; 0) ; B (0 ; $\sqrt{3}$) ; B' (0 ; – $\sqrt{3}$).

♦ Exercice 9 p. 167



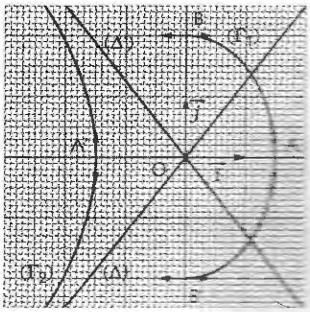
a) $(\Gamma) = (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$.

$(\Gamma_1) : \begin{cases} 4\,x^2 + y^2 = 9 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$; $(\Gamma_2) : \begin{cases} 4\,x^2 - y^2 = 9 \\ y \leqslant 0 \end{cases}$

(Γ_1) est la demi-ellipse de sommets A ($\dfrac{3}{2}$; 0) ; A' ($-\dfrac{3}{2}$; 0) et B (3 ; 0).

(Γ_2) est la demi-hyperbole de sommets A et A', d'asymptotes (Δ) : $y = 2\,x$; (Δ') : $y = -2\,x$.

La courbe (Γ) a une forme parabolique.



b) $(\Gamma) = (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$.

$(\Gamma_1) : \begin{cases} 25\,x^2 + 16\,y^2 = 64 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$; $(\Gamma_2) : \begin{cases} -25\,x^2 + 16\,y^2 = 64 \\ x \leqslant 0 \end{cases}$

(Γ_1) est la demi-ellipse de sommets A ($\dfrac{8}{5}$; 0) ; B (0 ; 2) et B' (0 ; – 2).

(Γ_2) est la demi-hyperbole de sommet A' ($-\dfrac{8}{5}$; 0)

et d'asymptotes (Δ) : $y = \dfrac{5}{4}\,x$;

(Δ') : $y = -\dfrac{5}{4}\,x$.

c) Soit A $(6\,;0)$; A' $(-6\,;0)$;
B $(0\,;4)$ et B' $(0\,;-4)$.

$(\Gamma) = (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2) \cup (\Gamma_3)$

$(\Gamma_1) : -4x^2 + 9y^2 = 144$

$(\Gamma_2) : \quad 4x^2 + 9y^2 = 144$

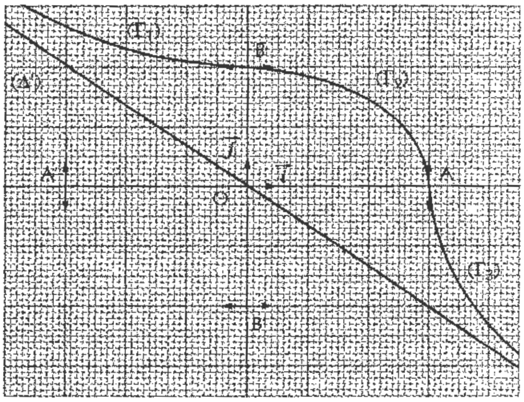
$(\Gamma_3) : \quad 4x^2 - 9y^2 = 144.$

(Γ_1) est une branche d'hyperbole de sommet B et d'asymptote

$(\Delta') : y = -\dfrac{2}{3}x.$

(Γ_2) est la quart d'ellipse de sommets A et B.

(Γ_3) est une branche d'hyperbole de sommet A et d'asymptote (Δ').



d) $(\Gamma) : (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$

$(\Gamma_1) : \begin{cases} 4(x-2)^2 - 9y^2 = 16 \\ x \in]-\infty\,;0] \cup [4\,;+\infty[\end{cases}$

$(\Gamma_2) : \begin{cases} 4(x-2)^2 + 9y^2 = 16 \\ x \in]0\,;4[. \end{cases}$

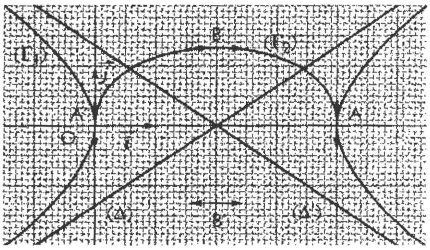
Soit A $(4\,;0)$; B $(2\,;\frac{4}{3})$ et B' $(2\,;-\frac{4}{3})$

(Γ_1) est l'hyperbole de sommets A et O,

d'asymptotes $(\Delta) : y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3}$;

$(\Delta') : y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3}$.

(Γ_3) est la demi-ellipse de sommets A, O et B.



♦ Exercice 10 p. 167

On a : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \\ y = \sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta \end{cases}$; donc : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y) \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2}(-\sqrt{3}x + \dfrac{1}{2}y). \end{cases}$

On en déduit : $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

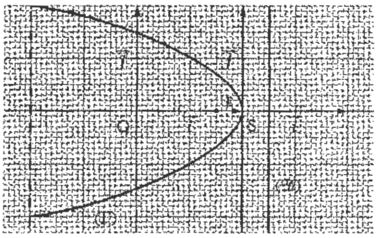
On obtient l'ellipse de sommets A $(1\,;0)$; A' $(-1\,;0)$; B $(0\,;2)$ et B' $(0\,;-2)$.

♦ Exercice 11 p. 167

$(\Gamma) : \begin{cases} y^2 = -\dfrac{1}{2}(x-1) \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

(Γ) est la partie de parabole de sommet S $(1; 0)$,

de foyer F $(\frac{7}{8}\,; 0)$ et de directrice $(\mathcal{D}) : x = \dfrac{9}{8}$.



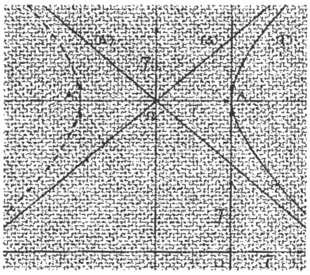
♦ Exercice 12 p. 167

$(\Gamma) : \begin{cases} (x+1)^2 - 2(y-2)^2 = 1 \\ x \in [1\,;+\infty[\end{cases}$

(Γ) est la branche d'hyperbole de sommet A $(0\,;2)$

et d'asymptotes $(\Delta) : y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2$;

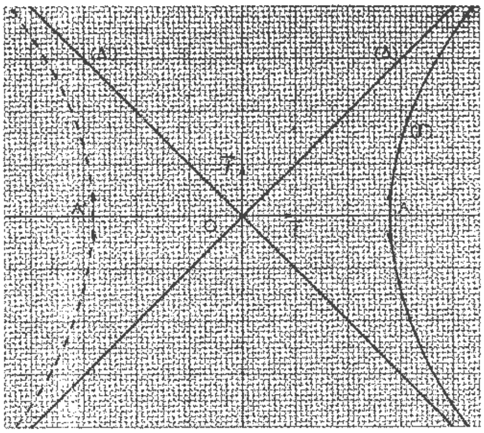
$(\Delta') : y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2.$



◆ Exercice 13 p. 167

$(\Gamma) : \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$

(Γ) est la branche d'hyperbole
de sommet A $(2\sqrt{2} ; 0)$
et d'asymptotes (Δ) : $y = x$;
(Δ') : $y = -x$.



◆ Exercice 14 p. 167

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$
tel que O est le milieu de [FF'] et $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$.

a) $\dfrac{x^2}{\frac{25}{4}} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ *b)* $x^2 - \dfrac{y^2}{\frac{5}{4}} = 1$.

◆ Exercice 15 p. 167

a) $\dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$ *b)* $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{5} = 1$.

◆ Exercice 16 p. 168

1. *a)* $\dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{2} = 1$ *b)* $X^2 - Y^2 = 1$.

2. Soit M (x, y) dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et M (X, Y) dans $(O ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On a : $\begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y). \end{cases}$ On en déduit : *a)* $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8$ *b)* $xy = -\dfrac{1}{2}$.

◆ Exercice 17 p. 168

1^er^ cas : (Γ) et (𝒞) sont tangents extérieurement

Notons I et J les points de tangence de (Γ)
avec (𝒞) et (Δ) respectivement.

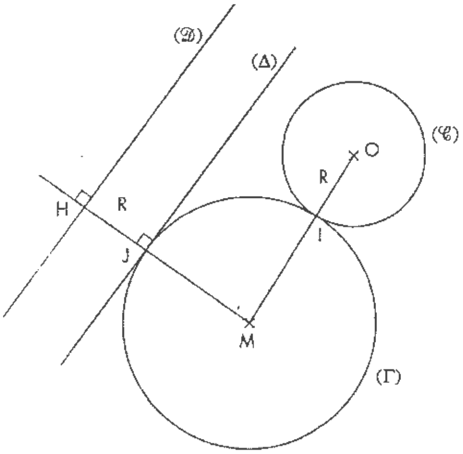
On a : MO = MJ + R.

Soit (𝒟) la droite située à la distance R de (Δ)
telle que (Δ) est entre (𝒟) et (𝒞).

Notons H le projeté orthogonal de M sur (𝒟).

On a : MH = MO.

Donc, (Γ) est la parabole de foyer O
et de directrice la droite (𝒟).



2^e^ cas : (𝒞) est intérieur à (Γ)

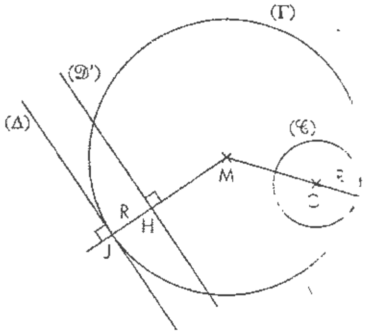
On a : MO = MJ – R

Soit (𝒟') la droite située à la distance R de (Δ)
telle que (𝒟') soit entre (Δ) et (𝒞).

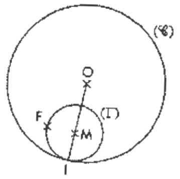
Notons H le projeté orthogonal de M sur (𝒟').

On a : MH = MO.

Donc, (Γ) est la parabole de foyer O
et de directrice la droite (𝒟').



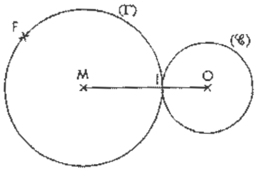
♦ Exercice 18 p. 168



Soit (Γ) l'ensemble cherché, I son point de contact avec $(\mathscr{C})$.
On a : $OI = OM + MI$;
donc : $R = MO + MF$.
(Γ) est une ellipse de foyers O et F.

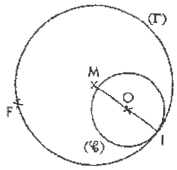
♦ Exercice 19 p. 168

1^{er} cas : (Γ) et $(\mathscr{C})$ sont tangents extérieurement



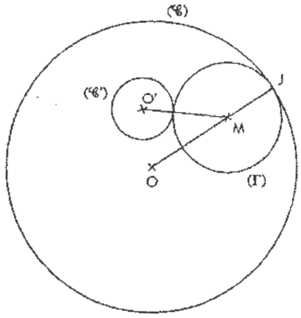
On a : $MO - MF = R$
Donc, (Γ) est une hyperbole de foyers O et F.

2^e cas : $(\mathscr{C})$ est intérieur à (Γ)



On a : $MF - MO = R$
Donc, (Γ) est une hyperbole de foyers O et F.
Les deux cas peuvent être regroupés par l'équation :
$|MF - MO| = R$.

♦ Exercice 20 p. 168



Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon R ;
$(\mathscr{C}')$ le cercle de centre O' et de rayon R' ;
(Γ) l'ensemble cherché.

On a : $OJ = OM + MJ \Leftrightarrow R = OM + MI$ **(1)**
$O'M = O'I + MI \Leftrightarrow O'M = R' + MI$ **(2)**

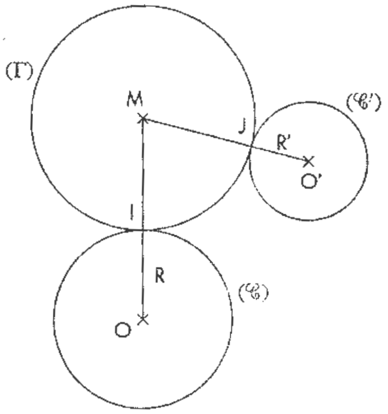
De **(1)** et **(2)**, on déduit : $MI = R - MO = MO' - R'$
Donc : $MO + MO' = R + R'$
(Γ) est une ellipse de foyers O et O'.

♦ Exercice 21 p. 168

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon R ; $(\mathscr{C}')$ le cercle de centre O' et de rayon R' ; (Γ) l'ensemble cherché ; I le point de contact de (Γ) et $(\mathscr{C})$; J le point de contact de (Γ) et $(\mathscr{C}')$.

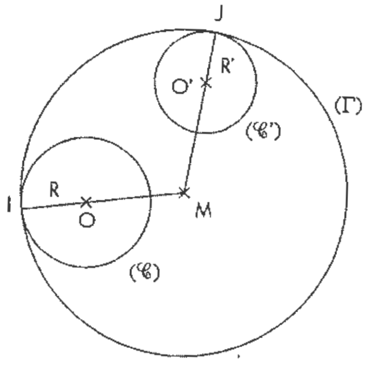
1^{er} cas : (Γ) est extérieur à $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$

On a : $MO' = MI + R'$; $MO = MI + R$.
Donc : $MO - MO' = R - R'$.
(Γ) est une hyperbole de foyers O er O'.



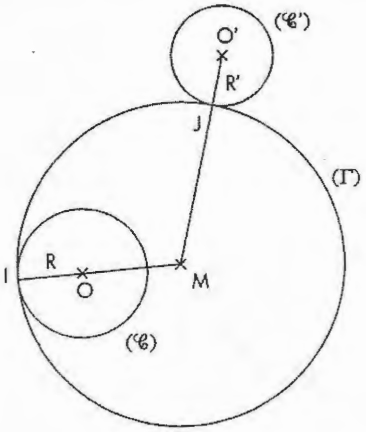
2^e cas : $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont intérieurs à (Γ)

On a : $MI = MO + R = MO' + R'$.
Donc : $MO' - MO = R - R'$.
(Γ) est une hyperbole de foyers O et O'



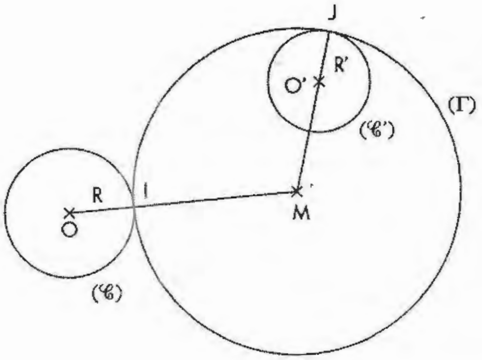
3^e cas : $(\mathcal{C})$ est intérieur à (Γ) et $(\mathcal{C}')$ est extérieur à (Γ)

On a : $MI = MO + R$; $MO' = MI + R'$.
Donc : $MO' - MO = R' + R$.
(Γ) est une hyperbole de foyers O et O'.



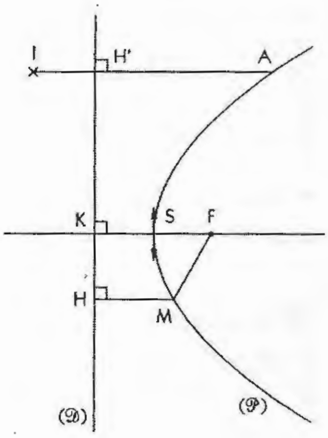
4^e cas : $(\mathcal{C}')$ est intérieur à (Γ) et $(\mathcal{C})$ est extérieur à (Γ)

On a : $MO = MI + R$; $MI = MO' + R'$.
Donc : $MO - MO' = R' + R$.
(Γ) est une hyperbole de foyers O et O'.



♦ Exercice 22 p. 168

Soit $(\mathcal{P})$ la parabole passant par A et de directrice $(\mathcal{D})$,
H' le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$.
Notons S le sommet de $(\mathcal{P})$ et K le projeté orthogonal de S sur $(\mathcal{D})$.
Le foyer de $(\mathcal{P})$ est le point F tel que : $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{KS}$.

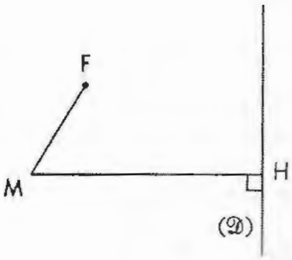


1. Soit M un point du plan et H son projeté orthogonal sur $(\mathcal{D})$.
On a : $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow MF = MH$.
Or : $A \in (\mathcal{P})$; donc : $AF = AH'$; ou : $F \in \mathcal{C}\,(A, AH')$.
F décrit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon AH' privé du point H'.

2. On a : $\overrightarrow{FS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FK}$.
Lorsque F décrit $(\mathcal{C}) - \{A\}$, alors S décrit $(\mathcal{C}') - \{I\}$ où $(\mathcal{C}')$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{FK}$ et I est l'image de H' par la même translation.

♦ Exercice 23 p. 168

Soit (E) la conique d'équation : $\frac{MF}{MH} = e$.

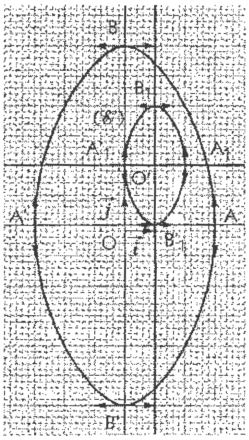


1. Soit M', F' et H' les images respectives des points M, F et H par une isométrie.

On a : $\frac{M'F'}{M'H'} = \frac{MF}{MH} = e$.

2. Soit M', F' et H' les images respectives des points M, F et H par une similitude de rapport k.

On a : $\frac{M'F'}{M'H'} = \frac{k\,MF}{k\,MH} = \frac{MF}{MH} = e$.



♦ Exercice 24 p. 168

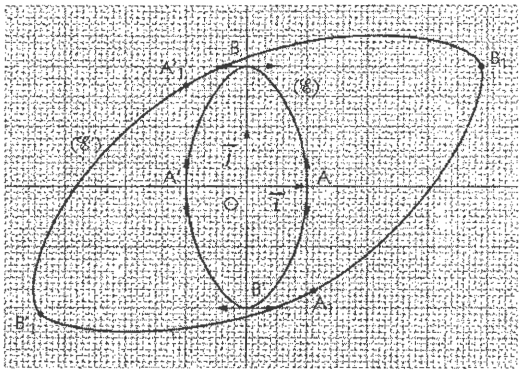
1. M' (x', y') est l'image de M (x, y) par la transformation h : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(3 + x) \\ y' = \frac{1}{3}(6 + y). \end{cases}$

h est l'homothétie de centre $\Omega\ (\frac{3}{2}\ ; 3)$ et de rapport $\frac{1}{3}$.

2. L'image par h de l'ellipse $(\mathscr{E})$ d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ est l'ellipse $(\mathscr{E}')$ d'équation $(x - 1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.

$(\mathscr{E})$ est l'ellipse de centre O et de sommets A $(3\ ; 0)$; A' $(-3\ ; 0)$; B $(0\ ; 6)$ et B' $(0\ ; -6)$.

$(\mathscr{E}')$ est l'ellipse de centre O' $(1\ ; 2)$ et de sommets A_1 $(2\ ; 2)$; A'_1 $(0\ ; 2)$; B_1 $(1\ ; 4)$ et B'_1 $(1\ ; 0)$.



♦ Exercice 25 p. 168

1. L'écriture complexe de f est : $z' = (1 - i\sqrt{3})\,z$.
Donc, f est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

2. $(\mathscr{E}')$: $7\,x^2 - 6\sqrt{3}\,xy + 13\,y^2 = 64$.

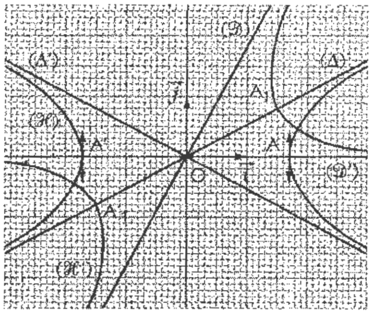
3. $(\mathscr{E})$ est l'ellipse de centre O et de sommets A $(1\ ; 0)$; A' $(-1\ ; 0)$; B $(0\ ; 2)$ et B' $(0\ ; -2)$.
Soit O', A_1, A'_1, B_1 et B'_1 les images respectives des points O, A, A', B et B' par f.
On a : O' = O ; A_1 $(1\ ; -\sqrt{3})$; A'_1 $(-1\ ; \sqrt{3})$; B_1 $(2\sqrt{3}\ ; 2)$ et B'_1 $(-2\sqrt{3}\ ; -2)$.
$(\mathscr{E}')$ est l'ellipse de centre O, de sommets A_1, A'_1, B_1 et B'_1.

♦ Exercice 26 p. 168

1. La rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases}$

On en déduit $(\mathscr{H}')$: $2\,xy\sqrt{3} - 2\,y^2 = 3$.

2. $(\mathscr{H})$: $x^2 - 3\,y^2 = 3$.



$(\mathscr{H})$ est l'hyperbole de sommets A $(\sqrt{3}\ ; 0)$; A' $(-\sqrt{3}\ ; 0)$ et d'asymptotes $(\Delta) : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$; $(\Delta') : y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

(Δ) passe par O et C $(\sqrt{3}\ ; 1)$; (Δ') passe par O et D $(\sqrt{3}\ ; -1)$.
Soit O', A_1, A'_1, C', D', $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ les images respectives de O, A, A', C, D, (Δ) et (Δ') par la rotation r. On a :
O' = O ; A_1 $(\frac{3}{2}\ ; \frac{\sqrt{3}}{2})$; A'_1 $(-\frac{3}{2}\ ; -\frac{\sqrt{3}}{2})$; C' $(1\ ; \sqrt{3})$; D' $(2\ ; 0)$;
$(\mathscr{D})$ passe par O et C' ; $(\mathscr{D}')$ passe par O et D'.
$(\mathscr{H}')$ est l'hyperbole de sommets A_1, A'_1, et d'asymptotes $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

♦ Exercice 27 p. 168

1. $(\mathscr{H})$: $\dfrac{(x + \frac{1}{3})^2}{\frac{2}{9}} + \dfrac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1$.

$(\mathscr{H})$ est l'hyperbole de centre $\Omega\ (-\frac{1}{3}\ ; 0)$, de sommets B $(\sqrt{\frac{2}{3}}\ ; 0)$; B' $(-\sqrt{\frac{2}{3}}\ ; 0)$,
d'asymptotes $(\Delta) : y = \sqrt{3}\,(x + \frac{1}{3})$, $(\Delta') : y = -\sqrt{3}\,(x + \frac{1}{3})$.

2. *a)* Les points A (1), M (z) et M' (z^4) ($z \neq 1$) sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A}$ est réel ;

c'est-à-dire ($z^3 + z^2 + z + 1$) est réel.

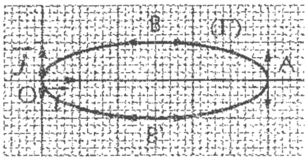
b) Posons $z = x + iy$.

On a : $z^3 + z^2 + z + 1 = (x^3 - 3\,xy^2 + x^2 - y^2 + x + 1) + i\,(3\,x^2y - y^3 + 2\,xy + y)$.

Donc, les points A, M et M' sont alignés si et seulement si $y\,(3\,x^2 - y^2 + 2\,x + 1) = 0$;

c'est-à-dire M $\in (\mathscr{H}) \cup \mathscr{D}\,(O\,;\overrightarrow{e_1}) - \{A\}$.

♦ Exercice 28 p. 168



On a : $z' = (\dfrac{1}{3}\,x - 1) + iy$

a) (Γ) : $\dfrac{(x-3)^2}{9} + y^2 = 1$.

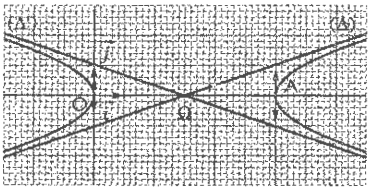
(Γ) est l'ellipse de sommets A (6 ; 0) ; O ; B (3 ; 1) et B' (3 ; − 1).

b) ($\mathscr{H}$) : $\dfrac{(x-3)^2}{9} - y^2 = 1$.

($\mathscr{H}$) est l'hyperbole de sommets A (6 ; 0) et O,

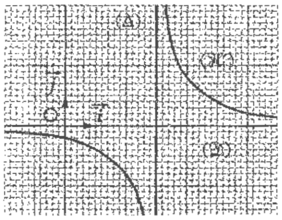
d'asymptotes (Δ) : $y = \dfrac{1}{3}\,x - 1$;

(Δ') : $y = -\dfrac{1}{3}\,x + 1$.



c) ($\mathscr{H}$') : $y = \dfrac{3}{2\,(x-3)}$.

($\mathscr{H}$') est une hyperbole d'asymptotes $\mathscr{D}\,(O\,;\vec{i})$ et (Δ) : $x = 3$.



♦ Exercice 29 p. 168

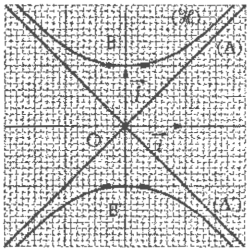
1. $z' = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{1}{\cos\alpha}\,i$; $z'' = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha}\,i$, $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. $z_M = z''$.

a) $x = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ et $y = \dfrac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow (\mathscr{H}) : -x^2 + y^2 = 1$.

b) ($\mathscr{H}$) est l'hyperbole équilatère de sommets B (0 ; 1) et B' (0 ; − 1).

Lorsque α décrit $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, alors y décrit $[1\,;+\infty[$ et M décrit la branche d'hyperbole située au-dessus de $\mathscr{D}\,(O\,;\vec{i})$.



♦ Exercice 30 p. 169

1. ($\mathscr{E}$) : $4\,x^2 + y^2 = 1$.

($\mathscr{E}$) est l'ellipse de sommets A ($\dfrac{1}{2}$; 0) ;

A' ($-\dfrac{1}{2}$; 0) ; B (0 ; 1) et B' (0 ; − 1).

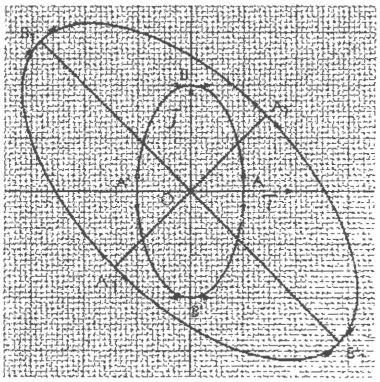
2. Soit s la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

L'expression analytique de s est : $\begin{cases} x' = \sqrt{2}\,(x-y) \\ y' = \sqrt{2}\,(x+y). \end{cases}$

On en déduit une équation de ($\mathscr{E}$') : $5\,x^2 + 6\,xy + 5\,y^2 = 8$.

3. $\mathscr{E}'$ est l'ellipse de sommets A_1 ($\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$) ;

A_1 ($-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$) ; B_1 ($-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$) ; B'_1 ($\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$).



♦ Exercice 31 p. 169

Soit M (x, y) un point d'affine z.

1. *a)* On a : $\overline{z} + z + 4 = 2\,(x + 2)$; donc, $(\mathcal{D})$ est la droite d'équation : $x = -2$.

b) La distance de M à $(\mathcal{D})$ est : $\delta = |x + 2| = \frac{1}{2}|\overline{z} + z + 4|$.

2. $(\Gamma) : \frac{(x-4)^2}{18} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$.

(Γ) est une ellipse de foyers F $(3\,;0)$ et F' $(-3\,;0)$ dans $(\Omega\,; \vec{i}, \vec{j})$, avec $\Omega\,(4\,;1)$, d'excentricité $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Or : $\left|\frac{z-1-i}{\overline{z}+z+4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{|z-1-i|}{\frac{1}{2}\,|\overline{z}+z+4|} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\times 4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{d\,(\mathrm{M}, \mathrm{F})}{d\,(\mathrm{M}, \mathcal{D})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc, (Γ) est l'ellipse de foyer F $(1\,;1)$, d'excentricité $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de directrice $(\mathcal{D}) : x = -2$.

♦ Exercice 32 p. 169

1. L'ensemble cherché est la réunion de la droite de repère $(\mathrm{O}\,; \vec{i})$ et du cercle de centre O et de rayon 1.

2. *a)* Désignons par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 2.

Une représentation paramétrique de $(\mathcal{C})$ est : $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}$ Donc : $z = 2e^{i\theta}$.

b) M' décrit l'ellipse (Γ) d'équation : $\frac{x^2}{\frac{25}{16}} + \frac{y^2}{\frac{9}{16}} = 1$.

(Γ) a pour sommets A $(\frac{5}{4}\,;0)$; A' $(-\frac{5}{4}\,;0)$; B $(0\,;\frac{3}{4})$ et B' $(0\,;-\frac{3}{4})$.

♦ Exercice 33 p. 169

- Si $m = 0$, (Γ_0) est la droite de repère $(\mathrm{O}\,;\vec{j})$.
- Si $m > 0$, (Γ_m) est l'ellipse de centre $\Omega_m\,(m\,;0)$; de sommets O, $\mathrm{A}_m\,(2\,m\,;0)$, $\mathrm{B}_m\,(m\,;\sqrt{m})$ et $\mathrm{B}'_m\,(m\,;-\sqrt{m})$.
- Si $m < 0$, (Γ_m) est l'hyperbole de centre Ω_m, de sommets O et A_m, d'asymptotes $(\Delta_m) : y = \frac{\sqrt{-m}}{m}(x-m)$ et $(\Delta'_m) : y = -\frac{\sqrt{-m}}{m}(x-m)$.

♦ Exercice 34 p. 169

- Si $m = 2$, alors $(\Gamma_2) = (\mathcal{D}) \cup (\mathcal{D}')$, avec $(\mathcal{D}) : y = -2 + \sqrt{3}$ et $(\mathcal{D}') : y = -2 - \sqrt{3}$.
- Si $m \neq 2$, alors $(y+2)^2 = (m-2)\,(x - \frac{m-5}{m-2})$.

(Γ_m) est la parabole de sommet $\mathrm{S}_m\,(\frac{m-5}{m-2}\,;-2)$, de foyer F $(\frac{m^2-16}{4\,m-8}\,;-2)$ et de directrice $(\Delta) : x = \frac{-m^2+8\,m-24}{4\,m-8}$.

♦ Exercice 35 p. 169

1. On a : $2\,m\,(x+2)^2 - (m-1)\,y^2 = m + 2$.

- Si $m = 0$, alors $(\Gamma_0) : (\mathcal{D}_1) \cup (\mathcal{D}'_1)$, avec $(\mathcal{D}_1) : y = \sqrt{2}$ et $(\mathcal{D}'_1) : y = -\sqrt{2}$.
- Si $m = 1$, alors $(\Gamma_1) = (\mathcal{D}_2) \cup (\mathcal{D}'_2)$, avec $(\mathcal{D}_2) : x = -2 + \sqrt{3}$ et $(\mathcal{D}'_2) : x = -2 - \sqrt{3}$.
- Si $m = -2$, alors $(\Gamma_{-2}) = (\mathcal{D}_3) \cup (\mathcal{D}'_3)$, avec $(\mathcal{D}_3) : y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+2)$ et $(\mathcal{D}'_3) : y = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x+2)$.

- Pour $m \in \mathbb{R} - \{0\,;1\,;-2\}$, on détermine la nature de (Γ_m) à l'aide du tableau ci-contre.

m	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$\frac{m}{m+2}$		+		−	0	+		+	
$\frac{m-1}{m+2}$		+		−		−	0	+	
(Γ_m)		hyperbole		hyperbole		ellipse		hyperbole	

2. *a)* $(\Gamma_{1/3})$ est le cercle de centre $\Omega\,(-2\,;0)$ et de rayon $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

b) (Γ_{-1}) est l'hyperbole équilatère d'équation : $-2\,(x+2)^2 + 2\,y^2 = 1$.

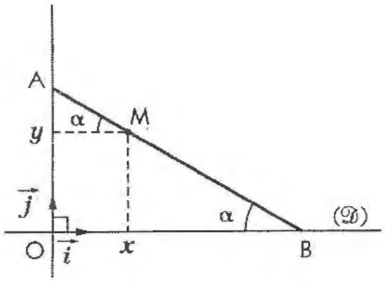
3. $(\Gamma_{1/2})$ est l'ellipse d'équation : $(x+2)^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{5}{2}$.

Elle a pour centre $\Omega\,(-2\,;0)$ et pour sommets $A\,(-2+\sqrt{\frac{5}{2}}\,;0)$, $A'\,(-2-\sqrt{\frac{5}{2}}\,;0)$, $B\,(-2\,;\sqrt{5})$ et $B'\,(-2\,;-\sqrt{5})$.

(Γ_2) est l'hyperbole d'équation : $(x+2)^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. Elle a pour sommets $D\,(-2\,;0)$ et $E\,(-3\,;0)$.

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 36 p. 169



On munit le plan du repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

On a : $\cos\alpha = \frac{OB}{AB} \Rightarrow OB = \ell\cos\alpha$;

$\sin\alpha = \frac{OA}{AB} \Rightarrow OA = \ell\sin\alpha$.

Or : $x = \frac{1}{3}OB = \frac{1}{3}\ell\cos\alpha$;

$y = \frac{2}{3}OA = \frac{2}{3}\ell\sin\alpha$, $(\alpha \in [0\,;\frac{\pi}{2}])$.

On a : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{\ell^2}{9}} + \dfrac{y^2}{\frac{4\,\ell^2}{9}} = 1. \\ 0 \leqslant x \leqslant \ell \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \ell. \end{cases}$

L'ensemble cherché est un quart d'ellipse de sommets M_0 et $M_{\frac{\pi}{2}}$.

♦ Exercice 37 p. 169

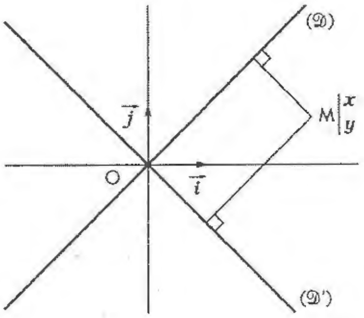
Soit (Γ) l'ensemble des points M tels que : $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MF}\|$.

On a : $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} \left| \begin{matrix} 0 \\ 2z \\ -2y \end{matrix} \right.$ et $\overrightarrow{MF} \left| \begin{matrix} -x \\ 3-y \\ -z \end{matrix} \right.$

1. Dans le plan $\Pi\,(O\,;\vec{j}, \vec{k})$, (Γ) est le cercle d'équation : $(y+1)^2 + z^2 = 4$.

2. Dans le plan $\Pi'\,(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, (Γ) est l'hyperbole d'équation : $-\frac{x^2}{12} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

♦ Exercice 38 p. 169



Soit O le point d'intersection des droites (𝒟) et (𝒟').
On munit le plan du repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs directeurs normés des bissectrices de (𝒟) et (𝒟').
Dans ce repère, (𝒟) et (𝒟') ont des équations de la forme (𝒟) : $y = ax$ et (𝒟') : $y = -ax$ $(a \neq 0)$.

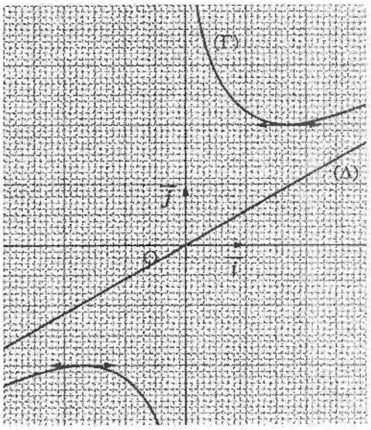
On a : $d\,(M\,,\mathcal{D}) = \frac{|ax-y|}{\sqrt{a^2+1}}$; $d\,(M\,;\mathcal{D}') = \frac{|ax+y|}{\sqrt{a^2+1}}$.

1. On obtient l'ellipse (E) d'équation :
$2\,a^2x^2 + 2\,y^2 = k\,(a^2+1)$ avec $k > 0$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

2. On obtient l'hyperbole $(\mathcal{H})$ d'équation : $-4\,axy = k\,(a^2+1)$.

3. (E) : $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$; $(\mathcal{H})$: $xy = -\sqrt{3}$.

♦ Exercice 39 p. 169



1. $D_f =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.
f est impaire, donc l'étude se fera sur $]0\,;+\infty[$.
O est un centre de symétrie pour (Γ).

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2\sqrt{3}}$.

On en déduit, ci-dessous le tableau de variation de f.

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Les asymptotes de (Γ) sont les droites $\mathcal{D}\,(O\,;\vec{j})$ et $(\Delta) : y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

2. *a)* Soit M un point de coordonnées (x, y) dans $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ et de coordonnées (X, Y) dans $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On obtient : $\begin{cases} x = X\sqrt{3} + Y \\ y = -X + Y\sqrt{3}. \end{cases}$

Une équation de (Γ) dans $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est donc : $-6X^2 + 2Y^2 = 3$.

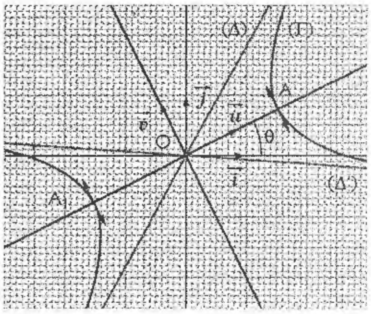
b) (Γ) est une hyperbole dont les foyers sont : dans $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, $F\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}0\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}$;

dans $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, $F\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{6}\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ -\sqrt{6}\end{pmatrix}$.

♦ Exercice 40 p. 169

$(\Gamma) : x^2 + 11y^2 - 10xy\sqrt{3} + 16 = 0$.

1. Soit M un point de coordonnées (x, y) dans $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ et de coordonnées (X, Y) dans $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.



On obtient : $\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta. \end{cases}$

Une équation de (Γ) dans $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est donc :

$$\begin{aligned}&(\cos^2\theta + 11\sin^2\theta - 5\sqrt{3}\sin 2\theta)X^2\\ &\quad + (\sin^2\theta + 11\cos^2\theta + 5\sqrt{3}\sin 2\theta)Y^2\\ &\quad + (10\sin 2\theta - 10\sqrt{3}\cos 2\theta)XY + 16 = 0.\end{aligned}$$

Cette équation est de la forme $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$
si et seulement si $10\sin 2\theta - 10\sqrt{3}\cos 2\theta = 0$;

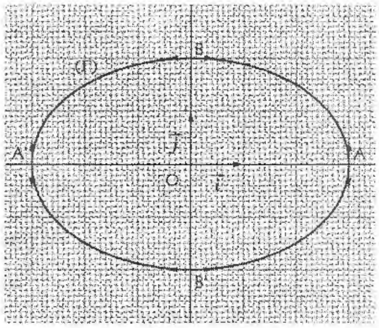
c'est-à-dire : $\tan 2\theta = \sqrt{3} = \tan\dfrac{\pi}{3}$.

Donc : $\theta = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$.

2. Une équation de (Γ) est alors : $\dfrac{X^2}{4} - Y^2 = 1$.

(Γ) est l'hyperbole de sommets A (2 ; 0) et A' (– 2 ; 0),
d'asymptotes $(\Delta) : Y = \dfrac{X}{2}$ et $(\Delta') : Y = -\dfrac{X}{2}$, dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

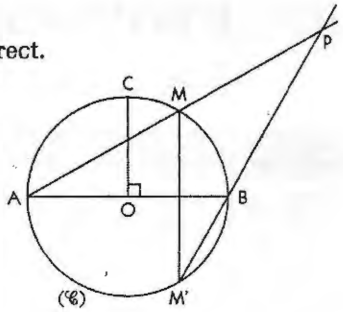
♦ Exercice 41 p. 169



1. $f(x) = 3\cos 2x$; $g(x) = 2\sin 2x$

2. $\begin{cases} x = 3\cos 2\theta \\ y = 2\sin 2\theta. \end{cases}$ $\quad(\Gamma) : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

(Γ) est l'ellipse de sommets A (3 ; 0), A' (– 3 ; 0),
B (0 ; 2) et B' (0 ; – 2).



♦ Exercice 42 p. 169

Soit O le milieu de [AB], C le point de $(\mathscr{C})$ tel que le repère (O, B, C) soit direct.

Munissons le plan du repère orthonormé (O, B, C). On a : A $\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$ et B $\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$.

Soit M $\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ un point de $(\mathscr{C})$. On a : M' $\left|\begin{matrix}\alpha\\-\beta\end{matrix}\right.$ et $\alpha^2+\beta^2=1$.

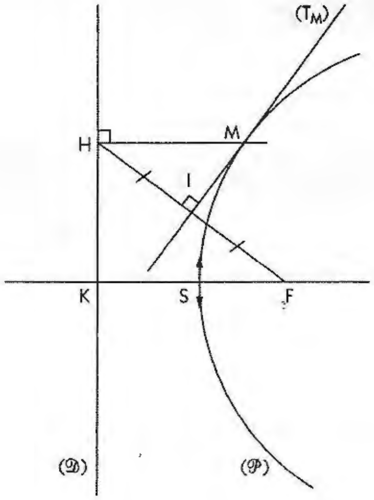
On a (AM) : $\beta x-(\alpha+1)\,y=-\beta$;
(BM') : $\beta x+(\alpha-1)\,y=\beta$.

On en déduit les coordonnées de P $(\frac{1}{\alpha}\,;\frac{\beta}{\alpha})$.

$x=\frac{1}{\alpha}$ et $y=\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{x}$ et $\beta=\frac{y}{x}$

$\alpha^2+\beta^2=1 \Leftrightarrow x^2-y^2=1.$

Le lieu de P est l'hyperbole d'équation : $x^2-y^2=1$.



♦ Exercice 43 p. 170

Soit H le projeté orthogonal de M sur $(\mathscr{D})$.
(T_M) est la médiatrice de [HF] (*manuel, p. 156*).
Le projeté orthogonal I de F sur (T_M) est le milieu de [HF] ;
donc : $\overrightarrow{FI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FH}$.
Lorsque M décrit $(\mathscr{P})$, H décrit $(\mathscr{D})$ et I décrit la droite $(\mathscr{D}')$, image de $(\mathscr{D})$ par l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$.

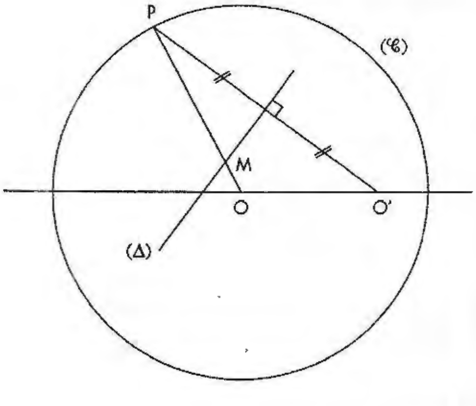
♦ Exercice 44 p. 170

1. • M appartient à la médiatrice de [O'P] ; donc : MP = MO'.
Par suite : MO + MO' = MO + MP = OP = R, avec OO' < R.
Donc M appartient à l'ellipse (E) de foyers O et O' et de grand axe de longueur R.

• Réciproquement, soit M un point de (E) et $(\mathscr{C})$ le cercle directeur relatif au foyer O.

Posons : {P} = [OM] ∩ $(\mathscr{C})$. On a : OP = OM + MP

$$\begin{aligned} M\in(E) &\Leftrightarrow MO+MO'=R\\ &\Leftrightarrow MO+MO'=OP\\ &\Leftrightarrow MO'=OP-MO=MP\,; \end{aligned}$$



Donc M appartient à la médiatrice de [O'P].
Or M appartient à (OP).
Donc M est le point d'intersection de (OP) et de la médiatrice de [O'P] lorsque P décrit $(\mathscr{C})$.

Conclusion : Lorsque P décrit $(\mathscr{C})$, M décrit l'ellipse de foyers O et O' et de grand axe de longueur R.

2. Il suffit de démontrer que tout point N distinct de M de la médiatrice (Δ) de [O'P] est extérieur à l'ellipse.
Dans le triangle NOP, on a : OP < ON – NP.
Or : NP = O'N ; donc : OP < ON – O'N ; ou : NO – NO' > R.
Donc, tout point N différent de M est extérieur à l'ellipse.
(Δ) et (E) ont un seul point commun ; donc (Δ) est la tangente de (E) en M.

8. Probabilités

(pages 171 à 192 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

– initier les élèves au calcul de probabilités.

– réinvestir les connaissances acquises sur le dénombrement en classe de première dans le calcul de probabilités.

– entraîner les élèves à faire le lien entre le langage probabiliste et le langage ensembliste.

– familiariser les élèves à l'utilisation de la formule du binôme.

COMMENTAIRES

- Les probabilités seront introduites sur des situations issues d'expériences aléatoires sans faire cas d'espace probabilisé.
- On se limitera à des cas où l'univers des éventualités est fini.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Analyse combinatoire • Formule du binôme : – le triangle de Pascal $C_n^{n-p} = C_n^p$ $C_{n-1}^{p-1} + C^p_{n-1} = C^p_n$; – formule du binôme de Newton $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$.	• Utiliser le triangle de Pascal et/ou la formule du binôme de Newton pour trouver les coefficients binomiaux de $(a+b)^n$.
• Outils de dénombrement : – modèles de base ; – principe multiplicatif ; – principe additif.	• Définir une éventualité associée à une expérience aléatoire. • Déterminer les événements : $A \cup B$ et $A \cap B$. • Reconnaître des événements incompatibles, contraires ou indépendants.
Calculs de probabilités • Vocabulaire des événements : – expérience aléatoire ; – événements liés à une expérience aléatoire. • Probabilité d'un événement : – définition ; – propriétés d'une probabilité ; $P(A) + P(\overline{A}) = 1$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. – événements indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$; – formule de LAPLACE (ou d'équiprobabilité) ; • Schéma de Bernoulli : – définition ; – propriété : $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. **Variable aléatoire** • Notion de variable aléatoire : – loi de probabilité d'une variable aléatoire ; – fonction de répartition d'une variable aléatoire.	• Utiliser les propriétés d'une probabilité pour calculer la probabilité de certains événements. • Utiliser les techniques de dénombrement pour calculer les probabilités dans des problèmes de tirage, de lancer de dés. • Passer du langage probabiliste au langage ensembliste et vice-versa. • Reconnaître le schéma de Bernoulli et calculer les probabilités associées. • Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire. • Définir la fonction de répartition d'une variable aléatoire et construire sa courbe. • Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire à partir d'une représentation graphique de sa fonction de répartition.

savoirs	savoir-faire
• Caractéristiques d'une variable aléatoire : – espérance mathématique ; – variance, écart type ; – loi binomiale de paramètres n et p.	• Calculer l'espérance mathématique, la variance, l'écart type d'une variable aléatoire.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 175

a) 7 980 *b)* 7 *c)* 35 *d)* 0

e) $(n-1)!$ *f)* $\frac{1}{n^3-n}$ *g)* $\frac{1}{4n^2+2n}$ *h)* $\frac{1}{n^2+n}$.

♦ Exercice 1.b p. 175

a) $\frac{9!}{4!}$ *b)* $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ *c)* $\frac{8!}{4!\,3!}$ *d)* $\frac{(n+3)!}{n!}$.

♦ Exercice 1.c p. 175

$$\mathrm{C}_{a+b-1}^{a}+\mathrm{C}_{a+b-1}^{b}=\frac{(a+b-1)!}{a!\,(b-1)!}+\frac{(a+b-1)!}{b!\,(a-1)!}=\frac{(a+b-1)!\,b}{a!\,b!}+\frac{(a+b-1)!\,a}{a!\,b!}=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}=\mathrm{C}_{a+b}^{a}.$$

♦ Exercice 1.d p. 175

a) $n = 9$ *b)* $n = 8$ *c)* $n = 9$ *d)* $n = 89$.

♦ Exercice 1.e p. 175

$(3+2x)^4 = 16x^4 + 96x^3 + 816x^2 + 216x + 81$;

$(2-2x)^7 = -2\,187x^7 + 10\,206x^6 - 20\,412x^5 + 22\,680x^4 - 15\,120x^3 + 6\,084x^2 - 1\,344x + 128$;

$(3-x^2)^6 = x^{12} - 18x^{10} + 135x^8 - 540x^6 + 1\,215x^4 - 1\,458x^2 + 729$;

$(2x^2+7y)^4 = 16x^8 + 224x^6y + 1\,176x^4y^2 + 2\,744x^2y^3 + 2\,401y^4$.

♦ Exercice 1.f p. 175

1. Un numéro est un tirage successif avec remise de 6 parmi 10 ; donc, le nombre de numéros de téléphone possibles (y compris le numéro 00 00 00) est : $10^6 = 1\,000\,000$.

2. *a)* On désigne par *ab cd ef* le numéro de téléphone à composer ; par exemple : *ab cd ef* = 12 12 72.
On peut choisir successivement :
- 2 lettres parmi les 6, auxquelles l'on attribue le chiffre 1 : $\mathrm{C}_6^2 = 15$ possibilités ;
- 3 lettres parmi les 4 restantes, auxquelles l'on attribue le chiffre 2 : $\mathrm{C}_4^3 = 4$ possibilités ;
- la lettre restante, à laquelle l'on attribue le chiffre 7 : $\mathrm{C}_1^1 = 1$ possibilité.

Le nombre de numéros de téléphone possibles est : $15 \times 4 \times 1 = 60$.

b) On désigne par x et y les deux chiffres distincts à utiliser pour composer le numéro de téléphone
Un numéro est un tirage successif avec remise de 6 parmi 2 ; donc, le nombre de numéros de téléphone possibles (les 2 numéros *xx xx xx* et *yy yy yy* sont exclus) est : $2^6 - 2 = 62$.

On peut successivement :
- choisir 2 chiffres parmi les 10 : $\mathrm{C}_{10}^2 = 45$ possibilités ;
- composer des numéros de téléphone : $2^6 - 2 = 62$ possibilités.

Le nombre de numéros de téléphone possibles est : $45 \times 62 = 2\,790$.

c) On désigne par : *ab cd ef* le numéro de téléphone à composer ; par exemple : *ab cd ef* = 12 11 75.

On peut successivement :
- choisir 3 lettres parmi les 6, auxquelles l'on attribue le chiffre 1 : $\mathrm{C}_6^3 = 20$ possibilités ;
- réaliser un tirage successif avec remise de 3 parmi les 9 chiffres restants : $9^3 = 729$ possibilités.

Le nombre de numéros de téléphone possibles est : $20 \times 729 = 14\,580$.

♦ Exercice 1.g p. 175

Un résultat est un tirage successif avec remise de 5 parmi 6 ; donc, le nombre de résultats possibles est : $6^5 = 7\,776$.

a) Les chiffres sont 1 et 2. Un résultat est un tirage successif avec remise de 5 parmi 2 ; donc, le nombre de résultats possibles est : $2^5 = 32$.

b) Les chiffres sont 2, 4 et 6. Un résultat est un tirage successif avec remise de 5 parmi 3 ; donc, le nombre de résultats possibles est : $3^5 = 243$.

c) Les chiffres sont 2, 3, 4, 5 et 6. Un résultat est un tirage successif avec remise de 5 parmi 5 ; donc, le nombre de résultats possibles est : $5^5 = 3\,125$.

d) Il faut extraire les résultats où ne figure pas le chiffre 1.
Donc, le nombre de résultats possibles est : $6^5 - 5^5 = 7\,776 - 3\,125 = 4\,651$.

e) Le nombre de résultats où ne figure pas le chiffre 1 est : $5^5 = 3\,125$;
le nombre de résultats où figure le chiffre 1 exactement une fois est : $5 \times 5^4 = 5^5 = 3\,125$.
Donc, le nombre de résultats possibles est : $2 \times 5^5 = 6\,250$.

f) Pour chacune des dispositions $666xy$, $x666y$ ou $xy\,666$, on a : $5^2 = 25$ possibilités
Donc, le nombre de résultats possibles est : $3 \times 25 = 75$.

♦ Exercice 2.a p. 183

a) Les trois boules ne peuvent pas être à la fois unicolores et tricolores ; donc : $A \cap B = \emptyset$.

b) $A \cap B = \emptyset$, donc A et B sont incompatibles.
Soit l'événement C : « Obtenir un tirage bicolore ». On a : $\overline{A} = B \cup C$ et $B \cup C \neq B$; donc, les événements A et B ne sont pas contraires.

c) $\overline{A}$: « Obtenir un tirage bicolore ou tricolore ; $\overline{B}$: « Obtenir un tirage unicolore ou bicolore ;
$\overline{A} \cap \overline{B}$: « Obtenir un tirage bicolore » ; $\overline{A} \cup \overline{B} = \Omega$: l'événement certain.

♦ Exercice 2.b p. 183

a) Soit x la probabilité de l'événement élémentaire $\{1\}$.
On a : $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = x$ et $P(\{6\}) = 3x$; donc : $5x + 3x = 1$ ou $x = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

b) $P(\{2, 4, 6\}) = \frac{5}{8} = 0{,}625$.

c) $P(\{2, 4\}) = \frac{2}{8} = 0{,}25$.

♦ Exercice 2.c p. 183

Un résultat est une combinaison de 5 parmi 32 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_{32}^5 = 201\,376$.

a) Pour réaliser l'événement A « Tirer exactement 3 cartes de couleur noire », il faut tirer les 3 cartes parmi les 16 noires et 2 cartes parmi les 16 rouges. Le nombre de cas favorables est :
$C_{16}^3 \times C_{16}^2 = 67\,200$; donc : $P(A) = \frac{67\,200}{201\,376} = \frac{300}{899}$; $P(A) \approx 0{,}333\,704$.

b) Pour réaliser l'événement B « Tirer 3 cartes de couleur noire, 2 cœurs et exactement 1 as », il faut :
– soit tirer 1 as parmi les 2 as noirs, puis 2 cartes parmi les 14 noires qui ne sont pas as, enfin 2 cœurs parmi les 7 cœurs qui ne sont pas as ; le nombre de cas favorables est : $C_2^1 \times C_{14}^2 \times C_7^2 = 2 \times 91 \times 21 = 3\,822$.
– soit tirer l'as de coeur, puis 1 coeur parmi les 7 cœurs qui ne sont pas as, enfin 3 cartes parmi les 14 noires qui ne sont pas as ; le nombre de cas favorables est : $C_1^1 \times C_7^1 \times C_{14}^3 = 1 \times 7 \times 364 = 2\,548$.

Donc : $P(B) = \frac{3\,822 + 2\,548}{201\,376} = \frac{455}{14\,384}$; $P(A) \approx 0{,}031\,632$.

♦ Exercice 2.d p. 183

$P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}4$; $P(A \cap B) = 0{,}2$; $P(A \cup B) = 0{,}9$; $P(\overline{A} \cup B) = 0{,}5$.

♦ Exercice 2.e p. 183

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}12$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}58$.

♦ Exercice 2.f p. 183

Soit l'événement A : « Obtenir un roi » et l'événement B : « Obtenir un trèfle ».

On a : $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$; $P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$; $P(A) \times P(B) = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$.
Donc, les événements A et B sont indépendants.

♦ Exercice 2.g p. 183

1. On a : $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{5}{6}$; $P(C) = \frac{1}{2}$.

2. On a : $P(A) \times P(B) = \frac{5}{18}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$; donc, A et B ne sont pas indépendants ;

$P(A) \times P(C) = \frac{1}{6}$ et $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$; donc, A et C sont indépendants ;

$P(B) \times P(C) = \frac{5}{12}$ et $P(B \cap C) = \frac{2}{6}$; donc, B et C ne sont pas indépendants.

♦ Exercice 2.h p. 183

a) Pour réaliser l'événement A « Obtenir une boule blanche pour la première fois au troisième tirage », il faut que la première boule tirée soit noire, la deuxième noire et la troisième blanche.
Le résultat de chaque tirage est indépendant des autres.
On désigne ce résultat par le triplet : (n, n, b). Donc : $P(A) = P((n, n, b)) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{18}{125} = 0{,}144$.

b) Pour réaliser l'événement B « Ne pas obtenir consécutivement 2 boules de la même couleur », il faut obtenir le triplet (b, n, b) ou bien (n, b, n).

Donc : $P(B) = P((b, n, b)) + P((n, b, n)) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{30}{125} = 0{,}24$.

c) L'événement C « Ne pas obtenir 3 boules de la même couleur » a pour événement contraire l'événement « Obtenir consécutivement 3 boules de la même couleur », c'est-à-dire les triplets (b, b, b) ou (n, n, n). Donc : $P(C) = 1 - [P((b, b, b)) + P((n, n, n))] = 1 - [\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}] = \frac{90}{125} = 0{,}72$.

♦ Exercice 2.i p. 183

Le lancer de la pièce équilibrée est répété trois fois de façon indépendante. C'est un schéma de Bernoulli à 3 épreuves où la probabilité de face (ou pile) est $\frac{1}{2}$.

a) L'événement A « Obtenir au moins une fois face » a pour événement contraire l'événement « Obtenir trois fois pile ». Donc : $P(B) = 1 - C_3^3 \times (\frac{1}{2})^3 = \frac{7}{8} = 0{,}875$.

b) Pour réaliser l'événement B « Obtenir au moins deux fois face », il faut obtenir deux ou bien trois fois face. Donc : $P(B) = C_3^2 \times (\frac{1}{2})^3 + C_3^3 \times (\frac{1}{2})^3 = \frac{4}{8} = 0{,}5$.

♦ Exercice 3.a p. 187

1. La loi de probabilité de X est déterminée par le tableau 1 ci-dessous :

Tableau 1

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

On en déduit le tableau **2** ci-contre.

Tableau 2

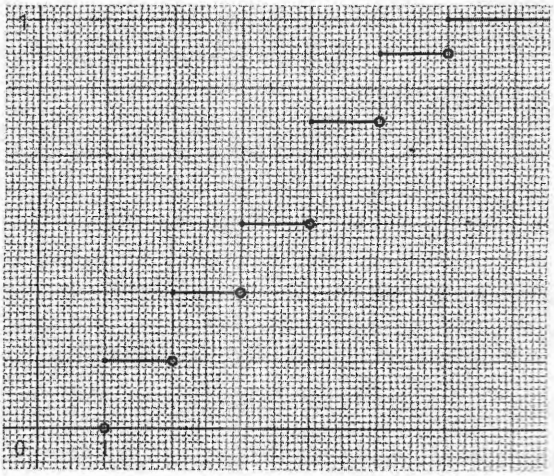
x_i	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	1
$x_iP(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{41}{12}$
$(x_i)^2P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{6}$	3	$\frac{167}{12}$

3. On déduit que : $E(X) = \frac{41}{12}$

et $\sigma(X) = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2} = \frac{\sqrt{323}}{12}$;
ou $\sigma(X) \approx 1{,}5$.

2. La fonction de répartition est définie par :

$$\begin{cases} F(x) = 0, \text{ si } x < 1 \\ F(x) = \frac{1}{6}, \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ F(x) = \frac{1}{4}, \text{ si } 2 \leq x < 3 \\ F(x) = \frac{1}{2}, \text{ si } 3 \leq x < 4 \\ F(x) = \frac{3}{4}, \text{ si } 4 \leq x < 5 \\ F(x) = \frac{11}{12}, \text{ si } 5 \leq x < 6 \\ F(x) = 1, \text{ si } 6 \leq x. \end{cases}$$



♦ Exercice 3.b p. 187

1. La lecture graphique donne le tableau ci-contre.

2. On déduit : $E(X) = \frac{23}{6}$; $\sigma(X) \approx 19{,}24$.

	-20	-10	10	20	30	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	1

♦ Exercice 3.c p. 187

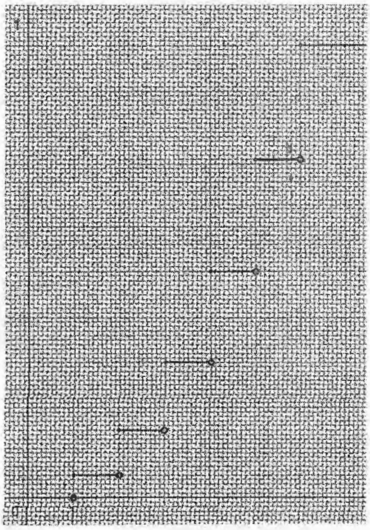
1. La loi de probabilité de X est déterminée par le tableau ci-contre.

x_i	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$	1

3. On déduit : $E(X) = \frac{91}{21}$; $\sigma(X) \approx 1{,}5$.

2. La fonction de répartition est définie par :

$$\begin{cases} F(x) = 0, \text{ si } x < 1 \\ F(x) = \frac{1}{21}, \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ F(x) = \frac{3}{21}, \text{ si } 2 \leq x < 3 \\ F(x) = \frac{6}{21}, \text{ si } 3 \leq x < 4 \\ F(x) = \frac{10}{21}, \text{ si } 4 \leq x < 5 \\ F(x) = \frac{15}{21}, \text{ si } 5 \leq x < 6 \\ F(x) = 1, \text{ si } 6 \leq x. \end{cases}$$



♦ Exercice 3.e p. 187

1. Loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel $k \leq 10$, on a : $P(X = k) = C_{10}^k \times (\frac{1}{2})^k \times (\frac{1}{2})^{10-k} = C_{10}^k \times (\frac{1}{2})^{10} = \frac{C_{10}^k}{1\,024}$.

On en déduit le tableau suivant.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$	$\frac{1}{1\,024}$	$\frac{10}{1\,024}$	$\frac{45}{1\,024}$	$\frac{120}{1\,024}$	$\frac{210}{1\,024}$	$\frac{252}{1\,024}$	$\frac{210}{1\,024}$	$\frac{120}{1\,024}$	$\frac{45}{1\,024}$	$\frac{10}{1\,024}$	$\frac{1}{1\,024}$

2. On déduit que : $E(X) = 5$; ou $\sigma(X) \approx 1{,}58$.

Exercices d'apprentissage

ANALYSE COMBINATOIRE

♦ Exercice 1 p. 188

On a : $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n(n+1) - (n+1) + 1}{(n+1)!} = \frac{n^2}{(n+1)!}$.

♦ Exercice 2 p. 188

On a : $C_{n+k}^{p+k} \times C_{p+k}^{p} = \frac{(n+k)!}{(p+k)!\,(n-p)!} \times \frac{(p+k)!}{k!\,p!} = \frac{(n+k)!}{k!\,n!} \times \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_{n+k}^{k} \times C_{n}^{p}$.

♦ Exercice 3 p. 188

a) $n = 20$ *b)* $n = 4$ *c)* $n = 4$ *d)* $n = 17$ e) $n = 14$ ou $n = 8$.

♦ Exercice 4 p. 188

$x = 17$ et $y = 8$.

♦ Exercice 5 p. 188

- La propriété est vraie pour $n = 1$.
- Si la propriété est vraie pour $n = k$, alors on a :

$$\sum_{p=1}^{k+1} p(p!) = \sum_{p=1}^{k} p(p!) + (k+1) \times (k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1) \times (k+1)! = (1 + k + 1) \times (k+1)! - 1 = (k+2)! - 1.$$

La propriété est vraie pour $k + 1$, donc, elle vraie pour tout entier naturel n.

♦ Exercice 6 p. 188
a) $(3-\sqrt{3})^4 = 252 - 144\sqrt{3}$ *b)* $(1+2\sqrt{3})^5 = 841 + 538\sqrt{3}$ *c)* $(2\sqrt{3}-5)^3 = -305 + 174\sqrt{3}$.

♦ Exercice 7 p. 188
a) $(1-\mathrm{i})^4 = -4$ *b)* $(1+2\mathrm{i})^5 = 41 - 38\mathrm{i}$ *c)* $(1+2\mathrm{j})^6 = -27$.

♦ Exercice 8 p. 188
Pour tous entiers naturels n et p tels que $1 \leq p \leq n$, on a :

$$p\,\mathrm{C}_n^p = p \times \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} = n\,\mathrm{C}_{n-1}^{p-1}.$$

Donc : $\sum_{p=1}^{n} p\,\mathrm{C}_n^p = \sum_{p=1}^{n} n\,\mathrm{C}_{n-1}^{p-1} = n \sum_{p=1}^{n} n\,\mathrm{C}_{n-1}^{p-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n\,\mathrm{C}_{n-1}^{k} = n\,2^{n-1}$.

♦ Exercice 9 p. 188
1. • La propriété est vraie pour $k = 1$: $\mathrm{C}_n^n = \mathrm{C}_{n+1}^{n+1}$.

• Si la propriété est vraie pour $k = j$, alors : $\sum_{p=0}^{j} \mathrm{C}_{n+p}^{n} = \sum_{p=0}^{j-1} \mathrm{C}_{n+p}^{n} + \mathrm{C}_{n+j}^{n} = \mathrm{C}_{n+j}^{n+1} + \mathrm{C}_{n+j}^{n} = \mathrm{C}_{n+j+1}^{n+1}$.

La propriété est vraie pour $k = j+1$, donc, elle vraie pour tout entier naturel non nul k.

2. La somme des 10 premiers termes non nuls de la colonne du triangle de Pascal, formés des nombres C_n^{10} $(n \geq 10)$ est : $\sum_{p=0}^{10} \mathrm{C}_{10+p}^{10} = \mathrm{C}_{10+10+1}^{10+1} = \mathrm{C}_{21}^{11} = 352\,716$.

♦ Exercice 10 p. 188
1. $(1+x)^n = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p x^n$.

2. *a)* Pour $x = 1$, on a : $2^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^p + \ldots + \mathrm{C}_n^n$.
b) Pour $x = -1$, on a : $0 = \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \ldots + (-1)^p\,\mathrm{C}_n^p + \ldots + (-1)^n\,\mathrm{C}_n^n$.
c) Pour $x = 2$, on a : $3^n = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + \ldots + 2p\mathrm{C}_n^p + \ldots + 2n\mathrm{C}_n^n$.

3. Pour $n = 2k$, on a :
$\mathrm{C}_{2k}^0 + \mathrm{C}_{2k}^1 + \mathrm{C}_{2k}^2 + \ldots + \mathrm{C}_{2k}^p + \ldots + \mathrm{C}_{2k}^{2k-1} + \mathrm{C}_{2k}^{2k} = 2^{2k}$.
$\mathrm{C}_{2k}^0 - \mathrm{C}_{2k}^1 + \mathrm{C}_{2k}^2 + \ldots + (-1)^p\,\mathrm{C}_{2k}^p + \ldots + (-1)^{2k-1}\,\mathrm{C}_{2k}^{2k-1} + \mathrm{C}_{2k}^{2k} = 0$.

$2\mathrm{C}_{2k}^0 + 0 + 2\mathrm{C}_{2k}^2 + \ldots + 0 + 2\mathrm{C}_{2k}^{2k} = 2^{2k}$. Donc : $\mathrm{C}_{2k}^0 + \mathrm{C}_{2k}^2 + \mathrm{C}_{2k}^4 + \ldots + \mathrm{C}_{2k}^{2k} = 2^{2k-1} = 2^{n-1}$.

4. Pour $n = 2k+1$, on a : $2\mathrm{C}_{2k+1}^0 + 2\mathrm{C}_{2k+1}^2 + 2\mathrm{C}_{2k+1}^4 + \ldots + 2\mathrm{C}_{2k+1}^{2k} = 2^{2k+1} = 2^n$.

Donc : $\mathrm{C}_{2k+1}^0 + \mathrm{C}_{2k+1}^2 + \mathrm{C}_{2k+1}^4 + \ldots + \mathrm{C}_{2k+1}^{2k} = 2^{2k} = 2^{n-1}$.

♦ Exercice 11 p. 188
a) Il faut tirer 3 cartes parmi les 8 piques et 5 cartes parmi les 24 cartes qui ne sont pas des piques.

Le nombre de tirages est : $\mathrm{C}_8^3 \times \mathrm{C}_{24}^5 = 56 \times 42\,504 = 2\,380\,224$.

b) Le tirage contient exactement 6 piques, exactement 7 piques ou bien exactement 8 piques, et pour chaque cas la différence est prise parmi les 24 cartes qui ne sont pas des piques.

Le nombre de tirages est : $\mathrm{C}_8^6 \times \mathrm{C}_{24}^2 + \mathrm{C}_8^7 \times \mathrm{C}_{24}^1 + \mathrm{C}_8^8 \times \mathrm{C}_{24}^0 = 28 \times 276 + 8 \times 24 + 1 = 7\,921$.

c) Il faut tirer le roi de pique, 2 cartes parmi les 7 piques restantes et 5 cartes parmi les 24 cartes qui ne sont pas des piques. Le nombre de tirages est : $1 \times \mathrm{C}_7^2 \times \mathrm{C}_{24}^5 = 1 \times 21 \times 42\,504 = 892\,584$.

d) Il faut tirer 3 cartes parmi les 8 piques, puis 2 cartes parmi les 8 trèfles, enfin 3 cartes parmi les 8 cœurs. Le nombre de tirages est : $\mathrm{C}_8^3 \times \mathrm{C}_8^2 \times \mathrm{C}_8^3 = 56 \times 28 \times 56 = 87\,808$.

♦ Exercice 12 p. 188
a) On désigne par : *abcd* $(a \neq 0)$ l'entier de quatre chiffres.
- Le nombre d'entiers naturels de quatre chiffres est : $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9\,000$.
- Le nombre d'entiers naturels de quatre chiffres dans lesquels le chiffre 5 n'apparaît pas est :
$8 \times 9 \times 9 \times 19 = 5\,832$.

- Le nombre d'entiers naturels de quatre chiffres dans lesquels le chiffre 5 apparaît uniquement au chiffre des milliers ($a = 5$) est : $1 \times 9 \times 9 \times 9 = 729$.
- Le nombre d'entiers naturels de quatre chiffres dans lesquels le chiffre 5 apparaît uniquement au chiffre des centaines, au chiffre des dizaines ou bien au chiffre des unité (en b, c ou bien d) est :

$8 \times (C_3^1 \times 9 \times 9) = 1\ 944$.

Au chiffre des milliers, attribuer 1 parmi les 8 chiffres non nuls et distincts de 5, puis choisir 1 lettre parmi les 3, à laquelle l'on attribue le chiffre 5, puis réaliser un tirage successif avec remise de 2 parmi les 9 chiffres restants.)
Donc, le nombre d'entiers naturels de quatre chiffres, dans lesquels 5 apparaît au moins deux fois est :
$9\ 000 - (5\ 832 + 729 + 1\ 944) = 495$.

b) Le nombre d'entiers naturels ayant quatre chiffres au plus (0 à 9 999) est : 10 000.
Le chiffre des unités est 0 ou 5 :
- de 0 à 9 : 2 multiples de 5 ;
- de 0 à 99 : $2 \times 10 = 20$ multiples de 5 ;
- de 0 à 999 : $2 \times 10 \times 10 = 200$ multiples de 5 ;
- de 0 à 9999 : $2 \times 10 \times 10 \times 10 = 2\ 000$ multiples de 5.

◆ Exercice 13 p. 188

1. Un itinéraire est une permutation des 5 villes étapes par lesquelles le circuit passe.
Donc, le nombre d'itinéraires possibles est : $5! = 120$.

2. La troisième étape étant NIAMEY, il reste à faire une permutation des 4 villes restantes.
Donc, le nombre d'itinéraires pour troisième étape NIAMEY est : $4! = 24$.

3. Le nombre d'itinéraires pour lesquels DAKAR précède YAOUNDE. est : $4 \times 3! = 24$.

◆ Exercice 14 p. 188

La première bande a 4 possibilités, tandis que chacune des 4 bandes restantes ont chacune 3 possibilités.
Donc, le nombre de drapeaux différents que l'on peut obtenir est : $4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 324$.

◆ Exercice 15 p. 188

1. *a)* Le nombre de parties de p éléments d'un ensemble E de n éléments est : C_n^p.

b) • Pour constituer une partie de p éléments contenant x_0, il faut choisir x_0, puis choisir $p - 1$ éléments parmi les $(n - 1)$ restants.

Le nombre de parties de p éléments contenant x_0, d'un ensemble E de n éléments est : C_{n-1}^{p-1}.

• Pour constituer une partie de p éléments ne contenant pas x_0, il faut choisir p éléments parmi les $(n - 1)$ restants. Le nombre de parties de p éléments ne contenant pas x_0, d'un ensemble E de n éléments est : C_{n-1}^p.

c) On en déduit que : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$.

2. *a)* Le nombre d'arrangements à p éléments d'un ensemble E de n éléments est : A_n^p.

b) • Le nombre d'arrangements à p éléments contenant x_0, d'un ensemble E de n éléments est :

$A_p^1 \times A_{n-1}^{p-1} = pA_{n-1}^{p-1}$.

• Le nombre d'arrangements à p éléments ne contenant pas x_0, d'un ensemble E de n éléments est : A_{n-1}^p.

c) On en déduit que : $pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p = A_n^p$.

Vérification : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p \Leftrightarrow \dfrac{A_{n-1}^{p-1}}{(p-1)!} + \dfrac{A_{n-1}^p}{p!} = \dfrac{A_n^p}{p!} \Leftrightarrow pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p = A_n^p$.

◆ Exercice 16 p. 188

Le nombre de parties de n éléments d'un ensemble E de $2n$ éléments est d'une part C_{2n}^n

et d'autre part $\sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p \times C_n^{n-p}$.

Or : $C_n^p = C_n^{n-p}$; donc : $C_{2n}^n = \sum\limits_{p=0}^{n} (C_n^p)^2$.

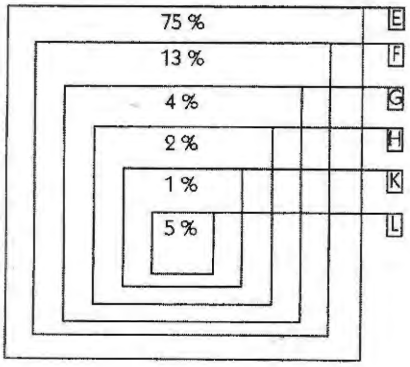
CALCULS DE PROBABILITÉS

♦ Exercice 17 p. 188

Le nombre de cas possibles est : $6 \times 6 = 36$.
Pour gagner, il faut obtenir ou bien un 6 ou bien deux 6 ; le nombre de cas favorables est : $5 \times 2 + 1 = 11$.
Donc, la probabilité de gagner est : $p = \frac{11}{36}$.

♦ Exercice 18 p. 189

Sur le diagramme ci-contre, sont représentés respectivement :
l'ensemble E des élèves de la classe ;
l'ensemble F des élèves qui ont été absents au moins 1 jour ;
l'ensemble G des élèves qui ont été absents au moins 2 jours ;
l'ensemble H des élèves qui ont été absents au moins 3 jours ;
l'ensemble K des élèves qui ont été absents au moins 4 jours ;
l'ensemble L des élèves qui ont été absents au moins 5 jours.



L'événement A « L'élève n'a jamais été absent » : $p(A) = \frac{75}{100} = 0{,}75 = 1 - \frac{25}{100}$;

l'événement B « L'élève a été absent au moins un jour » : $p(B) = \frac{25}{100} = 0{,}25$;

l'événement C « L'élève a été absent exactement deux jours » : $p(C) = \frac{4}{100} = 0{,}04 = \frac{12-8}{100}$;

l'événement D « L'élève a été absent moins de quatre jours » : $p(D) = \frac{2+4+13+75}{100} = 0{,}94 = 1 - \frac{6}{100}$.

♦ Exercice 19 p. 189

Un tirage est une combinaison de 4 parmi 32 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_{32}^4 = 35\,960$.

- Pour réaliser l'événement A « Obtenir une carte de chaque couleur », il faut tirer 1 carte parmi les 8 cartes de chacune des 4 couleurs ; le nombre de cas favorables est : $C_8^1 \times C_8^1 \times C_8^1 \times C_8^1 = 8^4 = 4\,096$.

Donc : $p(A) = \frac{4\,096}{35\,960} = \frac{512}{4\,495}$.

- Pour réaliser l'événement B « Obtenir exactement un as », il faut tirer 1 carte parmi les 4 as et 3 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as ;

le nombre de cas favorables est : $C_4^1 \times C_{28}^3 = 4 \times 3\,276 = 13\,104$. Donc : $p(B) = \frac{13\,104}{35\,960} = \frac{1\,638}{4\,495}$.

- Pour réaliser l'événement C « N'obtenir aucun as », il faut tirer 4 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as ; le nombre de cas favorables est : $C_4^0 \times C_{28}^4 = 1 \times 3\,276 = 20\,475$.

Donc : $p(C) = \frac{20\,475}{35\,960} = \frac{4\,095}{7\,192}$.

- L'événement D « Obtenir au moins un as » a pour événement contraire C.

Donc : $p(D) = 1 - p(C) = \frac{3\,097}{7\,192}$.

- Pour réaliser l'événement E « Obtenir deux cœurs et deux piques », il faut tirer 2 cartes parmi les 8 cœurs et 2 cartes parmi les 8 piques ; le nombre de cas favorables est : $C_8^2 \times C_8^2 = 28 \times 28 = 784$.

Donc : $p(E) = \frac{784}{35\,960} = \frac{98}{4\,495}$.

- Pour réaliser l'événement F « Obtenir exactement deux cœurs et un as », il faut tirer :

– soit 2 cartes parmi les 8 cœurs dont l'as et 2 cartes parmi les 21 cartes qui ne sont ni cœurs, ni as ;
– soit 2 cartes parmi les 7 cœurs qui ne sont pas as, 1 as parmi les 3 as qui ne sont pas cœurs et enfin 1 carte parmi les 21 cartes qui ne sont ni cœurs, ni as.

Le nombre de cas favorables est : $(C_1^1 \times C_7^1 \times C_{21}^2) + (C_7^2 \times C_3^1 \times C_{21}^1) = 2\,793$. Donc : $P(F) = \frac{2\,793}{35\,960}$.

♦ Exercice 20 p. 189

Un tirage est une combinaison de 3 parmi 34 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_{34}^3 = 7\ 140$.

1. Pour réaliser l'événement A « Tirer une boule de chaque couleur », il faut tirer la boule blanche, puis la boule rouge et enfin 1 boule parmi les 34 boules vertes.
Le nombre de cas favorables est : $C_1^1 \times C_1^1 \times C_{34}^1 = 34$. Donc : $p(A) = \dfrac{34}{7\ 140} = \dfrac{1}{210}$.

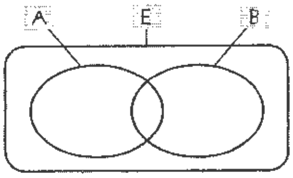
2. Pour réaliser l'événement B « Tirer trois boules vertes », il faut tirer les 3 boules parmi les 34 boules vertes ; le nombre de cas favorables est : $C_{34}^3 = 5\ 984$. Donc : $p(B) = \dfrac{5\ 984}{7\ 140} = \dfrac{88}{105}$.

♦ Exercice 21 p. 189

1. La probabilité de choisir deux points consécutifs sur un cercle est : $p = \dfrac{n}{C_n^2} = \dfrac{2}{n-1}$.

2. La probabilité de choisir deux points consécutifs sur une droite est : $p = \dfrac{n-1}{C_n^2} = \dfrac{2}{n}$.

♦ Exercice 22 p. 189



a) On a : $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset$.
Donc : $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times p(B) + p(A \cap \overline{B})$.

b) $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A) \times p(B) = p(A) \times [1 - p(B)] = p(A) \times p(\overline{B})$;
donc, A et B sont des événements indépendants.

c) $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) - p(\overline{A}) \times p(B) = p(\overline{A}) \times [1 - p(B)] = p(\overline{A}) \times p(\overline{B})$;
donc, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi des événements indépendants.

♦ Exercice 23 p. 189

On a : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$; donc : $p(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = 0{,}2$; $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}6$.

♦ Exercice 24 p. 189

1. Le nombre de cas possibles est : 6.
L'événement A : « Obtenir un nombre pair » ; $A = \{2, 4, 6\}$ et $P(A) = \dfrac{1}{2}$;
l'événement B : « Obtenir un multiple de 3 » ; $B = \{3, 6\}$ et $P(B) = \dfrac{1}{3}$;
l'événement $A \cap B$: « Obtenir un nombre pair multiple de 3 » ; $A \cap B = \{6\}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.
On a : $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} = P(A \cap B)$; donc, A et B sont des événements indépendants.

2. Le nombre de cas possibles est : $6 \times 6 = 36$.
L'événement C : « Obtenir une somme égale à un multiple de 3 ».

Somme	1 + 2 = 3	1 + 5 = 6	2 + 4 = 6	3 + 3 = 6	3 + 6 = 9	6 + 6 = 12
Couples	(1, 2) (2, 1)	(1, 5) (5, 1)	(4, 2) (2, 4)	(3, 3)	(3, 6) (6, 3)	(6, 6)
Effectif	2	2	2	1	2	1

Donc : $P(C) = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

L'événement D : « Obtenir une somme divisible par 4 ».

Somme	1 + 3 = 4	2 + 2 = 4	2 + 6 = 8	3 + 5 = 8	4 + 4 = 8	6 + 6 = 12
Couples	(1, 3) (3, 1)	(2, 2)	(6, 2) (2, 6)	(3, 5) (5, 3)	(4, 4)	(6, 6)
Effectif	2	1	2	2	1	1

Donc : $P(D) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$.

On a : $C \cap D = \{(6, 6\}$; $P(C \cap D) = \dfrac{1}{36}$ et $P(C) \times P(D) = \dfrac{5}{18} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2{,}5}{36}$.
Donc, C et D ne sont pas des événements indépendants.

♦ Exercice 25 p. 189

On suppose qu'il n'y a aucun couple homosexuel parmi les 6 couples.

Un résultat est une combinaison de 4 parmi 12 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_{12}^4 = 495$.

a) Pour réaliser l'événement A « Aucun homme n'est désigné », il faut tirer 4 femmes parmi les 6 ; le nombre de cas favorables est : $C_6^4 = 15$. Donc : $p(A) = \frac{15}{495} = \frac{1}{33}$.

• Pour réaliser l'événement B « Monsieur Traoré est désigné », il faut tirer 3 personnes parmi les 11 restantes ; le nombre de cas favorables est : $C_1^1 \times C_{11}^3 = 1 \times 165 = 165$. Donc : $p(B) = \frac{165}{495} = \frac{1}{3}$.

On a : • $A \cap B = \emptyset$; donc, A et B sont des événements incompatibles.

• $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$; donc, A et B ne sont pas des événements indépendants.

b) Pour réaliser l'événement C « Deux couples sont désignés », il faut tirer 2 couples parmi les 6.
Le nombre de cas favorables est : $C_6^2 = 15$; donc : $p(C) = \frac{15}{495} = \frac{1}{33}$.
A et C ne sont pas des événements indépendants.

♦ Exercice 26 p. 189

1. La probabilité pour qu'une boule prise au hasard soit rouge est : $p = \frac{3}{10}$.

2. Chaque tirage est indépendant des autres.
La probabilité pour que les 3 boules soient rouges est : $q = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10}$.

3. Il faut tirer simultanément les 3 boules rouges.
La probabilité pour que les 3 boules soient rouges est : $r = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$.

♦ Exercice 27 p. 189

1. La probabilité de l'événement « La machine A est en état de marche » est : $p = 1 - \frac{5}{200} = \frac{195}{200} = 0{,}975$.

2. La probabilité de l'événement « La machine A est en panne » est : $q = \frac{5}{200} = 0{,}025$.

3. La probabilité de l'événement « La machine C ou la machine D sont en panne » est :

$r = \frac{3}{200} + \frac{10}{200} - \left(\frac{3}{200} \times \frac{10}{200}\right) = \frac{2\,570}{40\,000} = 0{,}064\,25$.

4. La probabilité de l'événement « Aucune machine n'est en panne » est :

$s = \left(1 - \frac{5}{200}\right) \times \left(1 - \frac{5}{200}\right) \times \left(1 - \frac{5}{200}\right) = \frac{145\,977}{160\,000}$; $s \approx 0{,}912\,356\,25$.

♦ Exercice 28 p. 189

Un résultat est une combinaison de 2 parmi 5 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_5^2 = 10$.

1. Pour réaliser l'événement A « Ne rien gagner », il faut tirer les 2 enveloppes sans valeur. Le nombre de cas favorables est : $C_2^2 \times C_3^0 = 1 \times 1 = 1$; donc : $p(A) = \frac{1}{10} = 0{,}10$.

2. Pour réaliser l'événement B « Gagner exactement 500 F », il faut tirer 1 enveloppe parmi les 2 qui contiennent 500 F chacune et 1 enveloppe parmi les 2 sans valeur.
Le nombre de cas favorables est : $C_2^1 \times C_2^1 = 4$; donc : $p(B) = \frac{4}{10} = 0{,}40$.

3. Pour réaliser l'événement C « Gagner exactement 1 000 F », il faut tirer :
– soit les 2 enveloppes qui contiennent 500 F chacune ;
– soit l'enveloppe qui contient 1 000 F et 1 enveloppe parmi les 2 sans valeur.
Le nombre de cas favorables est : $(C_2^2 \times C_3^0) + (C_1^1 \times C_2^1) = (1 \times 1) + (1 \times 2) = 3$. Donc : $p(D) = 0{,}30$.

♦ Exercice 29 p. 189

a) Personne parmi les 10 vaccinés n'est protégé : $\left(\frac{45}{100}\right)^{10} \approx 0{,}34 \times 10^{-3}$.

b) 5 personnes sont protégées : $C_{10}^5 \times \left(\frac{55}{100}\right)5 \times \left(\frac{45}{100}\right)^5 \approx 0{,}4$.

c) Les 10 personnes sont protégées : $C_{10}^{10} \times \left(\frac{55}{100}\right)^{10} \times \left(\frac{45}{100}\right)0 = 0{,}25 \times 10^{-2}$.

◆ **Exercice 30 p. 189**

1. *a)* $P_G = \frac{52}{102} = \frac{26}{51}$ *b)* $P_F = \frac{50}{102} = \frac{25}{51}$.

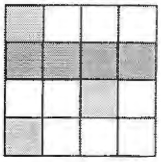
2. *a)* 3 filles et 2 garçons : $P^{3f}_{2g} = C_5^3 \times (\frac{25}{51})^3 \times (\frac{26}{51})^2$; $P^{3f}_{2g} = \approx 0{,}3$.

b) 5 filles : $P^{5f}_{0g} = C_5^5 \times (\frac{25}{51})^5 \times (\frac{26}{51})0 = (\frac{25}{51})^5$; $P^{5f}_{0g} \approx 0{,}03$.

◆ **Exercice 32 p. 189**

Une répartition au hasard des 7 pions (indiscernables) sur les 16 cases du damier, à raison d'un pion au plus par case est une combinaison de 7 parmi 16 ; donc, le nombre de cas possibles est : $C_{16}^7 = 11\,440$.

1. • Pour réaliser l'événement A « Quatre pions sont placés sur une même rangée horizontale », on peut choisir successivement :



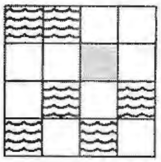
– 1 rangée horizontale parmi les 4, où l'on place 4 pions dans les 4 cases :
$C_4^1 \times C_4^4 = 4$ possibilités.

– 3 cases parmi les 12 cases restantes, où l'on place 3 pions : $C_{12}^3 \times C_3^3 = 220$ possibilités.

Le nombre de cas favorables à A est : $4 \times 220 = 880$. Donc : $p(A) = \frac{880}{11\,440} = \frac{1}{13}$.

• Pour réaliser l'événement B « Aucune rangée horizontale ne contient trois pions », on a les configurations suivantes.

Configuration 1 : 3 rangées horizontales à 2 pions et 1 rangée horizontale à 1 pion



On peut choisir successivement :

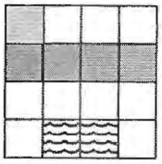
– 3 lignes parmi les 4, où l'on place 2 pions dans 2 des 4 cases par ligne :

$C_4^3 \times (C_4^2)^3 = 4 \times 216 = 864$ possibilités.

– la ligne restante, où l'on place 1 pion dans 1 des 4 cases : $C_1^1 \times C_4^1 = 4$ possibilités.

Le nombre de cas favorables pour la ***configuration 1*** est : $= 864 \times 4 = 3\,456$.

Configuration 2 : 1 rangée horizontale à 4 pions, 1 rangée horizontale à 2 pions et 1 rangée horizontale à 1 pion



On peut choisir successivement :

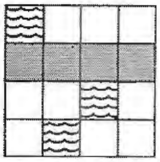
– 1 ligne parmi les 4, où l'on place 4 pions dans les 4 cases : $C_4^1 \times C_4^4 = 4$ possibilités.

– 1 ligne parmi les 3 restantes, où l'on place 2 pions dans 2 des 4 cases : $C_3^1 \times C_4^2 = 18$ possibilités.

– 1 ligne parmi les 2 restantes, où l'on place 1 pion dans 1 des 4 cases : $C_2^1 \times C_4^1 = 8$ possibilités.

Le nombre de cas favorables pour la ***configuration 2*** est : $4 \times 18 \times 8 = 576$.

Configuration 3 : 1 rangée horizontale à 4 pions, 3 rangées horizontales à 1 pion



On peut choisir successivement :

– 1 ligne parmi les 4, où l'on place 4 pions dans les 4 cases par ligne :

$C_4^1 \times C_4^4 = 4$ possibilités.

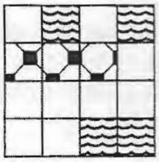
– les 3 lignes restantes, où l'on place 1 pion dans 1 des 4 cases par ligne :
$C_3^3 \times (C_4^1)^3 = 1 \times 64 = 64$ possibilités.

Le nombre de cas favorables pour la ***configuration 3*** est : $4 \times 64 = 256$.

Le nombre de cas favorables à B est : $3\,456 + 576 + 256 = 4\,288$.

Donc : $p(B) = \frac{4\,288}{11\,440} = \frac{268}{715}$.

• Pour réaliser l'événement C « une rangée horizontale et une seule contient exactement trois pions », on a les configurations suivantes.



Configuration 4 : 1 rangée horizontale à 3 pions et 2 rangées horizontales à 2 pions

On peut choisir successivement :

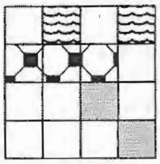
– 1 ligne parmi les 4, où l'on place 3 pions dans 3 des 4 cases :

$C_4^1 \times C_4^3 = 4 \times 4 = 16$ possibilités.

– 2 lignes parmi les 3 restantes, où l'on place 2 pions dans 2 des 4 cases par ligne :

$C_3^2 \times (C_4^2)^2 = 108$ possibilités.

Le nombre de cas favorables pour la ***configuration 4*** est : $16 \times 108 = 1\,728$.



Configuration 5 : 1 rangée horizontale à 3 pions, 1 rangée horizontale à 2 pions et 2 rangées horizontales à 1 pion

On peut choisir successivement :

– 1 ligne parmi les 4, où l'on place 3 pions dans 3 des 4 cases :

$C_4^1 \times C_4^3 = 16$ possibilités.

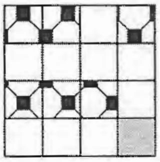
– 1 ligne parmi les 3 restantes, où l'on place 2 pions dans 2 des 4 cases :

$C_3^1 \times C_4^2 = 18$ possibilités.

– les 2 lignes restantes, où l'on place 1 pion dans 1 des 4 cases par ligne : $C_2^2 \times (C_4^1)^2 = 16$ possibilités.

Le nombre de cas favorables pour la ***configuration 5*** est : $16 \times 18 \times 16 = 4\,608$.

Le nombre de cas favorables à C est : $1\,728 + 4\,608 = 6\,336$. Donc : $p(\text{C}) = \frac{6\,336}{11\,440} = \frac{36}{65}$.



• Pour réaliser l'événement D « Deux rangées horizontales contiennent exactement trois pions », on a la configuration suivante :
2 rangées horizontales à 3 pions et 1 rangée horizontale à 1 pion.
On peut choisir successivement :
– 2 lignes parmi les 4, où l'on place 3 pions dans 3 des 4 cases par ligne :
$C_4^2 \times (C_4^3)^2 = 96$ possibilités.
– 1 ligne parmi les 2 restantes, où l'on place 1 pion dans 1 des 4 cases :
$C_2^1 \times C_4^1 = 8$ possibilités.
Le nombre de cas favorables à D est : $96 \times 8 = 768$. Donc : $p(\text{D}) = \frac{768}{11\,440} = \frac{48}{715}$.

VARIABLE ALÉATOIRE

♦ Exercice 37 p. 190

1. Il y a $C_{12}^2 = 66$ façons de choisir 2 boules parmi 12.

a) Il y a $C_3^2 = 3$ façons de choisir 2 boules vertes ; la probabilité cherchée est donc : $\frac{3}{66} = \frac{1}{22}$.

b) Le nombre de cas favorables est : $C_3^1 \times C_4^1 + C_3^1 \times C_5^1 + C_4^1 \times C_5^1 = 12 + 15 + 20 = 47$. Donc : $p(\text{B}) = \frac{47}{66}$.

2. La loi de probabilité de X est déterminée par le tableau ci-contre. On déduit E(X) ≈ 0,17 ; V(X) ≈ 1,35.

x_i	-2	-1	0	1	2	Total
$P(X = n)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{23}{66}$	$\frac{5}{22}$	$\frac{5}{33}$	1

♦ Exercice 39 p. 190

1. *a)* La loi de probabilité de X est déterminée par le tableau suivant.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P\ X = n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

b) $P(X > 2) = \frac{35}{36}$.

2. Loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{35}{36}$.

a) P(exactement 2 succès) $= C_6^2 \times (\frac{35}{36})^2 \times (\frac{1}{36})^4 = 15 \times \frac{35^2}{36^6} = \frac{18\,375}{2\,176\,782\,336}$;

P(exactement 2 succès) $\approx 8{,}44 \times 10^{-6}$.

b) Au plus 2 succès *signifie* exactement 0, 1, ou bien 2 succès.

P(au plus 2 succès) $= C_6^0 \times (\frac{35}{36})^0 \times (\frac{1}{36})^6 + C_6^1 \times \frac{35}{36} \times (\frac{1}{36})^5 + C_6^2 \times (\frac{35}{36})^2 \times (\frac{1}{36})^4 = \frac{18\,586}{2\,176\,782\,336}$;

P(au plus 2 succès) $\approx 8{,}53 \times 10^{-6}$.

♦ Exercice 40 p. 190

1. Il faut tirer 1 boule parmi les 3 de U et 1 boule parmi les $(n + 1)$ de V ; le nombre de cas possibles est : $C_3^1 \times C_{n+1}^1 = 3 \times (n + 1) = 3n + 3$.

Somme	$1 + 3 = 4$	$1 + 4 = 5$	$2 + 3 = 5$	$2 + 4 = 6$
Nombre de cas favorables	$C_1^1 \times C_n^1$	$C_1^1 \times C_1^1$	$C_2^1 \times C_n^1$	$C_2^1 \times C_1^1$

La loi de probabilité de X est déterminée par le tableau ci-dessous.

s	4	5	6	Total
$P(X = s)$	$\frac{n}{3n+3}$	$\frac{2n+1}{3n+3}$	$\frac{2}{3n+3}$	1
$sP(X = s)$	$\frac{4n}{3n+3}$	$\frac{10n+5}{3n+3}$	$\frac{12}{3n+3}$	$\frac{14n+17}{3n+3}$
$s^2P(X = s)$	$\frac{16n}{3n+3}$	$\frac{50n+25}{3n+3}$	$\frac{72}{3n+3}$	$\frac{66n+97}{3n+3}$

2. $E(X) = \dfrac{14n + 17}{3n + 3}$.

3. $n = 3$.

4. $n > 42$.

♦ Exercice 41 p. 190

Loi binomiale de paramètres 3 et 0,7.

On a : $P(X = 0) = C_3^0 \times (0{,}7)^0 \times (0{,}3)^3 = 0{,}027$; $P(X = 1) = C_3^1 \times (0{,}7)^1 \times (0{,}3)^2 = 0{,}063$;

$P(X = 2) = C_3^2 \times (0{,}7)^2 \times (0{,}3)^1 = 0{,}147$; $P(X = 3) = C_3^3 \times (0{,}7)^3 \times (0{,}3)^0 = 0{,}343$.

♦ Exercice 42 p. 190

La loi de probabilité de X est déterminée par le tableau ci-dessous.

i	1	2	…	k	…	n	Total
$P(X = i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$	1
$iP(X = i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	…	$\frac{k}{n}$	…	1	$\frac{n+1}{2}$
$i^2P(X = i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{2^2}{n}$	…	$\frac{k^2}{n}$	…	n	$\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

2. $E(X) = \dfrac{n + 1}{2}$.

$\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{n^2 - 1}{12}}$.

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 45 p. 191

$(x + 1)^{p+q} = \sum\limits_{k=0}^{p+q} C_{p+q}^k x^k$; le coefficient de x^n est C_{p+q}^n

$(x + 1)^p(x + 1)^q = (\sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k x^k)(\sum\limits_{i=0}^{q} C_q^i x^i)$.

En développant ce produit x^n est obtenu par la somme des termes $C_p^k x^k C_q^i x^i$, avec $i + k = n$.

Donc le coefficient de x^n est $\sum\limits_{i+k=n} C_p^k x^k C_q^i x^i$.

En remplaçant i par $n - k$, ou obtient $\sum\limits_{k=0}^{n} C_p^k C_q^{n-k}$; d'où : $C_{p+q}^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_p^k C_q^{n-k}$.

♦ Exercice 46 p. 191

1. $a_n = C_{2n}^n$.

2. $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

3. posons : $T = \sum\limits_{k=0}^{n} k(C_n^k)^2$; on a : $T = \sum\limits_{k=0}^{n} (n - k)(C_n^k)^2$.

Additionnons membre à membre : $2T = nC_{2n}^n$; donc : $\sum\limits_{k=0}^{n} k\,(C_n^k)^2 = \dfrac{n}{2} C_{2n}^n$.

♦ Exercice 47 p. 191

Soit n un entier naturel non nul.

On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(x + 1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$; donc : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $n(x + 1)^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} k\, C_n^k x^{k-1}$;

ou : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $nx(x + 1)^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} k\, C_n^k x^k$.

Dérivons membre à membre : $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $n(x + 1)^{n-1} + nx(n - 1)(x + 1)^{n-2} = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2\, C_n^k x^{k-1}$.

En particulier, pour $x = 1$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\, C_n^k = n\, 2^{n-1} + n(n - 1)2^{n-2} = n(n + 1)2^{n-2}$.

♦ Exercice 48 p. 191

1. L'hexagone détermine $C_6^2 = 15$ cordes dont 6 sont des côtés ; la réponse est donc : $\frac{6}{15} = 0{,}4$.

2. *a)* L'hexagone détermine $C_6^3 = 20$ triangles dont 2 sont équilatéraux ; la réponse est donc : $\frac{2}{20} = 0{,}1$.

b) L'hexagone détermine $C_6^3 = 20$ triangles dont 12 sont rectangles ; la réponse est donc : $\frac{12}{20} = 0{,}6$.

♦ Exercice 53 p. 192

1. $\Omega = \{111 ; 112 ; 121 ; 122 ; 211 ; 212 ; 221 ; 222\}$

2. p est une probabilité si $0 \leq p(\mathrm{A}) \leq 1$ et $p(\Omega) = 1$.
$p(\Omega) = 1 \Leftrightarrow 36a + 8b = 1$.

3. $\mathrm{B} = \{111 ; 112 ; 121 ; 122\}$; $\mathrm{C} = \{222 ; 221\}$.
$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{C}) \Leftrightarrow 5a + 2b = 0$.

On a : $\begin{cases} 36a + 8b = 1 \\ 5a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{16}$ et $b = -\frac{5}{32}$.

♦ Exercice 54 p. 192

$f(x) = 36x^2 - 2x^3$.

1. f est dérivable sur $[0 ; 18]$ et $f'(x) = 6x\,(12 - x)$.
f atteint son maximum pour : $x = 12$.

x	0		12		18
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	1 728	↘	0

2. *a)* Pour avoir une boule de chaque couleur, le nombre de possibilités est : $n^2(36 - 2n) = f(n)$.

b) $p(n) = \frac{f(n)}{C_{36}^3} = \frac{f(n)}{7\,140}$.

$p(x)$ est maximum pour : $x = 12$; on a alors : $p(12) = \frac{144}{595}$; $p(12) \approx 0{,}242$.

♦ Exercice 55 p. 192

3 termes consécutifs du triangle de Pascal sont C_n^{p-1}, C_n^p et C_n^{p+1}, $(p \geq 1, p + 1 \leq n, p < n)$.

Ils sont en progression géométrique ssi : $C_n^{p-1} + C_n^{p+1} = 2\,C_n^p$;
c'est-à-dire : $n^2 - n(4p + 1) + 4p^2 - 2 = 0$.
Cette équation du second degré en n a pour discriminant : $\Delta = 8p + 9$.
Δ doit être un carré parfait pour qu'on obtienne une valeur entière de n.

- Si $p = 2$, alors : $\Delta = 25$; $n_1 = 2$, impossible car $p < n$; $n_2 = 7$.
  Pour $n = 7$ on obtient C_7^1, C_7^2, C_7^3 ; soit 7, 21, 35 : la raison est 14.
- Si $p = 5$, alors : $\Delta = 49$; $n_1 = 7$ déjà trouvé ; $n_2 = 14$.
  Pour $n = 14$ on obtient C_{14}^4, C_{14}^5, C_{14}^6 ; soit 1001, 2002, 3003 : la raison est 1001.
- Si $p = 9$, alors : $\Delta = 81$; $n_1 = 14$; $n_2 = 23$.
  Pour $n = 23$ on obtient C_{23}^8, C_{23}^9, C_{23}^{10} ; soit 490 314, 817 190, 1 144 066 : la raison est 326 876.
- Si $p = 14$, alors : $\Delta = 121$; $n_1 = 23$; $n_2 = 42$.
  pour $n = 42$, on obtient C_{42}^{13}, C_{42}^{14}, C_{42}^{15}.

Les lignes $n = 7$, $n = 14$, $n = 23$ et $n = 42$ répondent à la question.

♦ Exercice 57 p. 192

1. La loi de probabilité de X est déterminée par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} = n) = (1 - p)^{n-1}\,p$.
Posons : $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$;

2. $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (1 - p)^{k-1}\,p = p \sum_{k=1}^{n} (1 - p)^{k-1} = p\,\frac{1 - (1 - p)^n}{p} = 1 - (1 - p)^n$; donc : $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{S}_n = 1$.

9. Limites et continuité

(pages 193 à 212 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- Compléter les propriétés sur les calculs de limites par les propriétés relatives à la composition de fonctions et aux fonctions monotones sur un intervalle ouvert.
- Donner quelques propriétés des fonctions continues sur un intervalle.

COMMENTAIRES

Les fonctions rencontrées en terminale sont le plus souvent continues sur leur intervalle d'étude. On indiquera clairement que les fonctions construites à partir de fonctions polynômes, trigonométriques, logarithmes ou exponentielles sont continues.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Limites d'une fonction • Notions de base : – limites de référence ; – limites et opérations sur les fonctions ; – limites en l'infini d'une fonction polynôme et d'une fonction rationnelle ; – propriétés de comparaison. • Limite de la composée de deux fonctions. • Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert.	• Déterminer la limite de la composée de deux fonctions.
Étude d'une branche infinie • Asymptotes : – asymptote parallèle à l'un des axes ; – asymptote non parallèle aux axes. • Direction asymptotique.	• Déterminer les asymptotes à la courbe représentative d'une fonction donnée. • Justifier qu'une droite est asymptote à une courbe. • Étudier les branches infinies de la courbe représentative d'une fonction donnée.
Continuité d'une fonction • Continuité sur un intervalle : – continuité et opérations sur les fonctions ; – composée de deux fonctions continues. • Image d'un intervalle par une fonction continue. – propriétés : – théorème des valeurs intermédiaires et conséquences. • Fonction continue et monotone : – bijection réciproque d'une fonction continue et monotone ; – image d'un intervalle par une fonction continue et monotone ; – fonction racine n-ième ; – puissance d'exposant rationnel.	• Justifier qu'une fonction est continue sur un intervalle. • Trouver l'image d'un intervalle par une fonction continue à l'aide du tableau de variation de cette fonction. • Démontrer, à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, qu'une équation du type $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur un intervalle donné. • Déterminer, par la méthode de balayage ou de dichotomie, une valeur approchée de chacune des solutions d'une équation du type $f(x) = 0$. • Le plan étant muni d'un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de la fonction réciproque d'une fonction bijective. • Effectuer des calculs avec des nombres à puissances d'exposant rationnel.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ **Exercice 1.a p. 198**

a) $+\infty$ *b)* $-\infty$ *c)* $+\infty$ *d)* $+\infty$.

♦ Exercice 1.b p. 198

a) Limite en $+\infty : \frac{1}{3}$; limite en $-\infty : \frac{1}{3}$

b) Limite en $+\infty : -\infty$; limite en $-\infty : +\infty$

c) limite en $+\infty : 0$; limite en $-\infty : 0$

d) limite en $+\infty : -\infty$; limite en $-\infty : -\infty$.

♦ Exercice 1.c p. 198

a) $\forall x \in \mathbb{R}, -4x + 2 \leq f(x) - 4x + 4$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{|x|}{x^2 + 1}$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 \leq f(x) \leq x^2 + 2$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

d) $\forall x \in [0 ; +\infty[, f(x) \geq x^3$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\forall x \in]-\infty ; 0], f(x) \leq x^3$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

♦ Exercice 1.d p. 198

$\forall x \in]0 ; +\infty[, \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$; donc : $\forall x \in]0 ; +\infty[, \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, $\forall x \in]0 ; +\infty[, \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \geq 0$.

Donc : $\forall x \in]0 ; +\infty[, 0 < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$.

♦ Exercice 1.e p. 198

a) 1 *b)* 1 *c)* $\frac{1}{3}$ *d)* 0.

♦ Exercice 1.f p. 198

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

♦ Exercice 2.a p. 203

a) $(\mathscr{D}) : y = 2$ $(\Delta) : x = -1$	*b)* $(\mathscr{D}) : y = 0$ $(\Delta) : x = -1$ $(\Delta') : x = 1$	*c)* $(\mathscr{D}) : y = 2$ $(\Delta) : x = -1$ $(\Delta') : x = 1$	*d)* $(\mathscr{D}) : y = 2$ $(\Delta) : x = -1$ $(\Delta') : x = 1$.

♦ Exercice 2.b p. 203

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - x + 3] = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$; donc la droite (Δ) d'équation $y = x - 3$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x + 3 > 0$; donc, $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (Δ).

b) $\forall x \in \mathbb{R}^{-} \{5\}, f(x) = 3x + 13 + \frac{69}{x-5}$; donc : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - 3x - 13] = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{69}{x - 5} = 0$.

Par suite, la droite (Δ) d'équation $y = 3x + 13$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

- Sur l'intervalle $]5 ; +\infty[$, $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (Δ).
- Sur l'intervalle $]-\infty ; 5[$, $(\mathscr{C})$ est au-dessous de (Δ).

c) On a : $f(x) - (\sqrt{2}\,x + \frac{\sqrt{2}}{4}) = \frac{7}{8\sqrt{2x^2 + x + 1} + 8x\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}] = 0$.

La droite (Δ) d'équation $y = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$ est asymptote à $(\mathscr{C})$. $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (Δ).

♦ Exercice 2.c p. 203

a) $(\mathscr{C})$ a deux asymptotes : $(\mathscr{D}) : y = 2x - 3$ et $(\mathscr{D}') : y = -2x + 3$.

b) $(\mathscr{C})$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

c) $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = 2x$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}, 2x + 3 \leq f(x) \leq 2x + 5$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

- On a d'une part : $\forall x \in]0 ; +\infty[, 2 + \frac{3}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 2 + \frac{5}{x}$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

De plus : $f(x) - 2x = 4 + \cos x$ et $[f(x) - 2x]$ n'a pas de limite.
Donc, $(\mathscr{C})$ admet une direction asymtotique, celle de la droite (Δ) d'équation $y = 2x$.

- On a d'autre part : $\forall x \in]-\infty ; 0[, 2 + \frac{5}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 2 + \frac{3}{x}$. On trouve la même direction asymptotique.

◆ **Exercice 2.d p. 203**

a) $(\mathscr{C})$ n'a pas d'asymptote

b) $(\mathscr{C})$ a trois asymptotes : $(\mathscr{D}) : y = -\frac{1}{2}$; $(\Delta) : x = -1$ et $(\Delta') : x = 3$

c) $(\mathscr{C})$ a deux asymptotes : $(\mathscr{D}) : y = -x + 1$ et $(\Delta) : x = 2$

d) $(\mathscr{C})$ a une asymptote : $(\mathscr{D}) : y = 1$

e) $(\mathscr{C})$ a deux asymptotes : $(\Delta) : x = -2$ et $(\Delta') : x = 2$

f) $(\mathscr{C})$ a deux asymptotes : $(\mathscr{D}) : y = x - 2$ et $(\Delta) : x = 1$.

◆ **Exercice 3.a p. 209**

a) f continue sur $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$

b) f continue sur $\mathbb{R}$

c) f continue sur $\mathbb{R}$

d) f continue sur $]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$, $(k \in \mathbb{Z})$.

◆ **Exercice 3.b p. 209**

a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x + 1$.
On en déduit le tableau de variation de f.
Donc : $f(K) = [-\frac{9}{4} ; 10]$.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	10	↗	$+\infty$

b) $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{x(4-x)}{x^4}$.
On en déduit le tableau de variation de f.
Donc : $f(K) =]-\infty ; \frac{1}{8}]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{8}$	↘	0

c) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x(2x-1)}{2\sqrt{x^2 - x + 2}}$.
On en déduit le tableau de variation de f.
Donc : $f(K) = [\frac{\sqrt{7}}{2} ; +\infty[$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	↗	$+\infty$

◆ **Exercice 3.c p. 209**

a) Posons : $f(x) = x^4 - 3x - 1$.
On a : $\forall x \in K, f'(x) = 4x^3 - 3$;
$\forall x \in K, f''(x) = 12x^2$.
On en déduit le tableau de variation de f.
f est continue et strictement croissante sur K, et $0 \in f(K)$.
Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans K.

x	1		0		2
$f''(x)$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$	1	↗		↗	
$f(x)$	-3	↗		↗	9

b) Posons : $f(x) = \cos x - x$.
On a : $\forall x \in \mathbb{R}, -x - 1 \leq f(x) \leq -x + 1$;
donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\sin x - 1$;
donc : $\forall x \in \mathbb{R}, -2 \leq f'(x) \leq 0$.
On en déduit le tableau de variation de f.
f est continue et strictement décroissante sur K, et $0 \in f(K)$.
Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans K.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

c) Posons : $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 1}{x - 1} - m$.
On a : $\forall x \in K, f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{(x-1)^2}$.
Posons : $N(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$.
On a : $\forall x \in K, N'(x) = 6x\,(x - 1)$.
On en déduit le tableau de variation de la fonction f.
f est continue et strictement croissante sur K et $0 \in f(K)$.
Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans K.

x	1		$+\infty$
$N'(x)$		$+$	
$N(x)$	3	↗	
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

♦ Exercice 3.d p. 209

a) Posons : $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3(x-1)(x+1)$.
On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↗	1	↘	-3	↗	1	↗	$+\infty$

Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions
α, β et γ telles que : $\alpha \in]-2\,;-1[$, $\beta \in]-1\,;1[$ et $\gamma \in]\,1\,;2[$.

On en déduit une valeur approchée, à 10^{-1} des solutions de (E) : $\alpha \approx -1{,}5$; $\beta \approx -0{,}3$ et $\gamma \approx 1{,}8$.

b) Posons : $f(x) = x^4 - 2x - 1$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4x^3 - 2$.
On en déduit le tableau de variation de la fonction f.
Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β telles que : $\alpha \in]-1\,;0[$ et $\beta \in]1\,;2[$.

x	$-\infty$		-1		0		x_0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↘	-1	↘	$-1-\frac{3}{2}x_0$	↗	-2	↗	11	↗	$+\infty$

On trouve : $\alpha \approx -0{,}4$ et $\beta \approx 1{,}4$.

c) Posons : $f(x) = \sin x - x + 1$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos x - 1$;
$\forall x \in \mathbb{R}, -2 \leq f'(x) \leq 0$;
$\forall x \in \mathbb{R}, -x \leq f(x) \leq -x + 2$.

x	$-\infty$		$\frac{\pi}{2}$		π		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$0{,}43$	↘	$-2{,}14$	↘	$-\infty$

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de la fonction f.
Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α telle que : $\alpha \in]\frac{\pi}{2}\,;\pi[$. On trouve : $\alpha \approx 1{,}9$.

♦ Exercice 3.e p. 209

a) AF

Exercices d'apprentissag~

CALCULS DE LIMITES

♦ Exercice 1 p. 210

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ *b)* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ *d)* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

♦ Exercice 2 p. 210

a) 0 *b)* 0 *c)* 0 *d)* 1 *e)* 0 *f)* 0.

♦ Exercice 3 p. 210

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$ *b)* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ *c)* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -2$ *d)* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 0$.

♦ Exercice 4 p. 210

1. $\forall x \in [1\,;+\infty[, \dfrac{x}{x+1} - 1 = \dfrac{-1}{x+1} < 0$ et $\forall x \in [1\,;+\infty[, \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x-1}{2(x+1)} \geq 0$.

Donc : $\forall x \in [1\,;+\infty[, \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{x}{x+1} < 1$.

Déduction

$\forall x \in [1\,;+\infty[, \dfrac{\sqrt{x}}{2} \leq \dfrac{x\sqrt{x}}{x+1} < \sqrt{x} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{x}}{x+1} = +\infty$.

$\forall x \in [1\,;+\infty[, \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leq \dfrac{x}{\sqrt{x}(x+1)} < \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}(x+1)} = 0$.

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x + \sin x| \leq |\cos x| + |\sin x| \leq 2$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|\dfrac{\cos x + \sin x}{x^2}\right| \leq \dfrac{2}{x^2}$; donc : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{\cos x + \sin x}{x^2} = 0$.

♦ Exercice 5 p. 210

a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \leq f(x) \leq x$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x^2 \leq f(x) \leq x^2$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

c) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{-1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

d) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, on a : $x > 1$; donc : $\frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

e) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 \leq x + \cos x \leq x + 1$; $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 + \cos x} \leq \frac{1}{2}$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, on a : $x > 1$; donc : $\frac{x-1}{4} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

f) Lorsque x tend vers $-\infty$, on obtient : $\frac{x-1}{2} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{4}$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

♦ Exercice 6 p. 210

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

2. *a)* $f(x) = x \times \frac{x^2}{1 - \cos x}$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

b) $f(x) = -(\frac{\sin x}{x})^2 \times \frac{x^2}{1 - \cos x}$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -2$.

c) $f(x) = -(1 + \cos x) \times \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{x}{\tan x}$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$.

d) $f(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}}\,\frac{|x|}{\sin x}$; donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

♦ Exercice 7 p. 210

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; donc : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\frac{1}{2}$

b) $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}}$; donc : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\frac{1}{2}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + 1}$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$

d) $f(x) = \frac{2(\sqrt{2x+7} + \sqrt{10-x}}{3(\sqrt{3+x} + \sqrt{5-x})}$; donc : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x-6}}{(x+2)(\sqrt{x+1}+2)}$; donc : $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-1}$; donc : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$.

♦ Exercice 8 p. 210

a) $D_f =]-\infty ; 1]$; donc, f n'a pas de limite en $+\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\forall x \in [0 ; +\infty[, f(x) \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{2x+1}}$. ; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d) $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

♦ Exercice 9 p. 210

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\forall x \in]-\infty ; 0[, f(x) = \frac{3x - \frac{1}{x}}{2 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$; donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\forall x \in]0 ; +\infty[, f(x) = \frac{4}{x + \sqrt{x^2-4}}$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

d) $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}$; donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

e) $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{|x|}}}{3 + \frac{2}{x}}$; *donc :* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{3}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

♦ Exercice 10 p. 210

1. $\forall x \in]-1\,;0[\, \cup\,]0\,;+\infty[$, $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$; donc : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

2. *a)* $\dfrac{3}{2}$ *b)* $\dfrac{1}{4}$ *c)* $\dfrac{1}{4}$ *d)* 0.

♦ Exercice 11 p. 210

a) On a : $\forall\, x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $f(x) = \dfrac{1}{2\cos^2 x}$; donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$

b) On pose : $u = 3x$; on a : $f(u) = 9 \times \dfrac{1-\cos u}{u^2}$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{u\to 0} f(u) = \dfrac{9}{2}$.

c) On pose : $u = \dfrac{\pi}{2} - x$. Donc : $x = \dfrac{\pi}{2} - u$; $(x \underset{<}{\to} \dfrac{\pi}{2}) \Leftrightarrow (u \underset{>}{\to} 0)$.

On a : $f(u) = \dfrac{\sin u}{1-\cos u} = -\dfrac{\sin u}{u} \times \dfrac{1}{u}$; donc : $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ >}} f(u) = -\infty$.

d) On pose : $u = x - \dfrac{\pi}{4}$; donc $x = u + \dfrac{\pi}{4}$; $(x \to \dfrac{\pi}{4}) \Leftrightarrow (u \to 0)$.

On a : $f(u) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sin u}{u}$; donc : $\lim\limits_{u\to 0} f(u) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

♦ Exercice 12 p. 210

a) On a : $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\,\sin(x - \dfrac{\pi}{4})$; $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\cos(x - \dfrac{\pi}{4})$.

Donc : $f(x) = -\dfrac{\cos(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4})}{\sin(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4})}$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$.

b) On a : $f(x) = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = -\dfrac{\cos(x - \dfrac{\pi}{4})}{\sin(x - \dfrac{\pi}{4})}$; donc : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = -1$.

c) On a : $f(x) = -\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$; donc : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = -1$.

♦ Exercice 13 p. 210

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$ *b)* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{|x|\to +\infty} f(x) = 0$ *d)* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{|x|\to +\infty} f(x) = 1$ *f)* $\lim\limits_{|x|\to +\infty} f(x) = 0$.

BRANCHES INFINIES

♦ Exercice 14 p. 211

a) $(\mathscr{C}_f)$ a trois asymptotes, $(\Delta_1) : x = 0$; $(\Delta_2) : x = 1$; $(\mathscr{D}) : y = 1$.

b) $(\mathscr{C}_f)$ a deux asymptotes, $(\Delta) : x = 1$; $(\mathscr{D}) : y = 2x + 2$.

c) $(\mathscr{C}_f)$ a trois asymptotes, $(\Delta) : x = 1$; $(\mathscr{D}_1) : y = x + 2$; $(\mathscr{D}_2) : y = -x - 2$.

d) $(\mathscr{C}_f)$ a deux asymptotes, $(\Delta) : x = 0$; $(\mathscr{D}) : y = x$.

♦ Exercice 15 p. 211

a) $(\mathscr{C}_f)$ a deux asymptotes, $(\Delta) : x = 1$; $(\mathscr{D}) : y = x + 4$.

b) $(\mathscr{C}_f)$ a deux asymptotes, $(\Delta) : x = 1$; $(\mathscr{D}) : y = x + 1$.

c) Lorsque $x \to +\infty$, $(\mathscr{C}_f)$ admet pour asymptote la droite $(\mathscr{D}) : y = x$.
Lorsque $x \to -\infty$, $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique dans la direction de $(\mathscr{D}) : y = x$.

d) $(\mathscr{C}_f)$ a trois asymptotes : $(\Delta) : x = 1$; $(\mathscr{D}_1) : y = x + \dfrac{1}{2}$ $(x \to +\infty)$; $(\mathscr{D}_2) : y = -x - \dfrac{1}{2}$ $(x \to -\infty)$.

♦ Exercice 16 p. 211

a) $(\mathscr{C})$ a deux asymptotes, $(\mathscr{D}_1) : y = 2x$ $(x \to +\infty)$; $(\mathscr{D}_2) : y = -2x$ $(x \to -\infty)$.

b) $(\mathscr{C})$ a deux asymptote, $(\mathscr{D}_1) : y = \dfrac{3}{2}x$ $(x \to +\infty)$; $(\mathscr{D}_2) : y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ $(x \to -\infty)$.

c) $(\mathscr{C})$ a trois asymptotes, $(\Delta) : x = 0$; $(\mathscr{D}_1) : y = \dfrac{1}{2}x + 1$ $(x \to -\infty)$; $(\mathscr{D}_2) : y = \dfrac{1}{2}x - 1$ $(x \to +\infty)$.

d) $(\mathscr{C})$ a deux asymptotes : $(\mathscr{D}_1) : y = x - \dfrac{1}{2}$ $(x \to +\infty)$; $(\mathscr{D}_2) : y = -x + \dfrac{1}{2}$ $(x \to -\infty)$.

◆ Exercice 17 p. 211

1. Si $a < -1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; si $a = -1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$; si $a \geq 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. $\forall\, x \in \left]-\infty\,;0\right[$, $\dfrac{f(x)}{x} = a + \dfrac{b}{x} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$; $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2\right) \Leftrightarrow a = 1$.

$$\forall\, x \in \left]-\infty\,;0\right[,\ f(x) - 2x = \frac{-2b + \dfrac{b^2-1}{x}}{-1 + \dfrac{b}{x} - \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}}\ ;\ \left(\lim_{x \to -\infty} [f(x) - 2x] = 2\right) \Leftrightarrow b = 2.$$

FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE

◆ Exercice 18 p. 211

1. $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $f(x) = \dfrac{3(x+1)}{\sqrt{3x^2+1} + 2}$; donc : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{3}{2}$.

2. $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $g(x) = f(x)$ et $g(1) = \dfrac{3}{2}$.

◆ Exercice 19 p. 211

a) La fonction $g : x \mapsto 1 - x^2$ est continue sur $[-1\,;1]$ et $g([-1\,;1]) = [0\,;1]$;
la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et $[0\,;1] \subset [0\,;+\infty[$.
Donc, la fonction $f = h \circ g$ est continue sur $[-1\,;1]$.

b) La fonction $g : x \mapsto 2x - 5$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
la fonction $h : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Donc, la fonction $f = h \circ g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction $g : x \mapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(\mathbb{R}) = [-1\,;1]$;
la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $[-1\,;1] \subset \mathbb{R}$.
Donc, la fonction $f = h \circ g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

d) La fonction $g : x \mapsto \tan^2 x + 1$ est continue sur $D = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et $g(D) \subset [1\,;-\infty[$;
la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$ et $[1\,;+\infty[\subset [0\,;+\infty[$.
Donc, la fonction $f = h \circ g$ est continue sur D.

◆ Exercice 20 p. 211

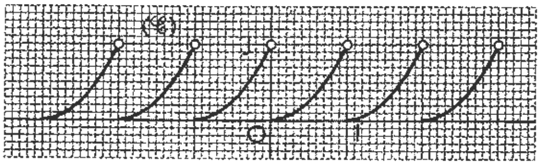
1. La fonction $g : x \mapsto x - 1$ est continue sur $[1\,;+\infty[$ et $g([1\,;+\infty[= [0\,;+\infty[$;
la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$;
la fonction $p : x \mapsto x - 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $[0\,;+\infty[\subset \mathbb{R}$.
Donc, la fonction $f = p \circ h \circ g$ est continue sur $[1\,;+\infty[$.

2. On a : $\forall\, x \in [1\,;+\infty[$, $f(x) + 2 \geq 0$; donc : $\forall\, x \in [1\,;+\infty[$, $f(x) \geq -2$.

3. • On vient de démontrer que : $f([1\,;+\infty[) \subset [-2\,;+\infty[$.
• Réciproquement, pour tout β de $[-2\,;+\infty[$, il existe $\alpha = 1 + (2+\beta)^2$ tel que : $\beta = f(\alpha)$.
Donc : $[-2\,;+\infty[\subset f([1\,;+\infty[)$. Par suite : $f([1\,;+\infty[) = [-2\,;+\infty[$.

◆ Exercice 21 p. 211

Pour tout entier relatif n, on a :
f continue sur $]n\,;n+1[$;
f discontinue en n et $n+1$;
$\forall\, x \in [n\,;n+1[$, $f(x) = n + (x-n)^2$.



◆ Exercice 22 p. 211

a) $a = -1$

b) $a = -\dfrac{1}{2}$.

◆ Exercice 23 p. 211

a) On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
Soit F le prolongement par continuité de f en 0 ; on a : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $F(x) = f(x)$ et $F(0) = 0$.

b) On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = x(\dfrac{\sin x}{x})^2$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
Soit G le prolongement par continuité de g en 0 on a : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $G(x) = g(x)$ et $G(0) = 0$.

◆ Exercice 24 p. 211

a) $f(\mathrm{K}) = [-2\ ;\ 14]$ *b)* $f(\mathrm{K}) = [-\frac{9}{2}\ ;\ 0]$ *c)* $f(\mathrm{K}) =]-\infty\ ;\ -2] \cup]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty[$ *d)* $f(\mathrm{K}) = [0\ ;\ 1]$.

◆ Exercice 25 p. 211

1. La fonction $f : x \mapsto x^3 - 6x - 6$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $f' : x \mapsto 3(x + \sqrt{2})\ (x - \sqrt{2})$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$4\sqrt{2} - 6$	↘	$-4\sqrt{2} - 6$	↗	$+\infty$

f est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ -\sqrt{2}]$, $[-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}]$ et $[\sqrt{2}\ ;\ +\infty[$; de plus : $0 \in f([\sqrt{2}\ ;\ +\infty[)$.

Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[\sqrt{2}\ ;\ +\infty[$.

2. On a : $\alpha \approx 2{,}85$.

◆ Exercice 26 p. 211

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto \frac{3}{4}x(x - \frac{8}{3})$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\frac{38}{27}$	↗	$+\infty$

f est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ 0]$, $[0\ ;\ \frac{8}{3}]$ et $[\frac{8}{3}\ ;\ +\infty[$;

de plus, 0 appartient à chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ 1[$, $]1\ ;\ -\frac{38}{27}[$ et $]-\frac{38}{27}\ ;\ +\infty[$.

Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions α, β et γ telles que : $\alpha \in\ ]-\infty\ ;\ 0[$, $\beta \in\ ]0\ ;\ \frac{8}{3}[$ et $\gamma \in\ ]\frac{8}{3}\ ;\ +\infty[$.

2. On trouve : $\alpha \approx -0{,}90$; $\beta \approx 1{,}19$ et $\gamma \approx 3{,}71$.

◆ Exercice 27 p. 211

1. La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ \pi]$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto -\sin x$.

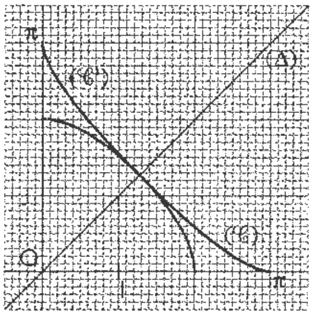
On eu déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	0		π
$f'(x)$	0	−	0
$f(x)$	2	↘	0

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0\ ;\ \pi]$; donc f est bijective et sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement décroissante sur $[0\ ;\ 2]$.

On a, ci-dessous, le tableau de variation de f^{-1}.

x	0		2
$f^{-1\prime}(x)$	‖	−	‖
$f^{-1}(x)$	π	↘	0



2. Soit (𝒞) et (𝒞') les courbes représentatives respectives des fonctions f et f^{-1}. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, (𝒞) et (𝒞') sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

◆ Exercice 28 p. 211

1. La fonction f est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$; donc f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$ sur $f(]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$.

2. On en déduit le tableau de variation de f^{-1} et celui de f.

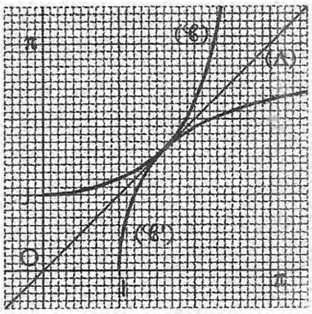
x	$-\infty$		$+\infty$
$f^{-1\prime}(x)$		+	
$f^{-1}(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

◆ Exercice 29 p. 211

1. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\pi[$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$.
Posons : $g(x) = \sin x - x\cos x$.
$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = x\sin x$.
On en déduit, ci-contre, les variations de f.
La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0\,;\pi[$; donc, f est une bijection de $]0\,;\pi[$ sur $f(]0\,;\pi[) =]1\,;+\infty[$.

x	0		π
$g'(x)$	0	$+$	0
$g(x)$	0	↗	π
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ 1	↗	$+\infty$

2. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, les courbes représentatives respectives $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.



◆ Exercice 30 p. 211

a) $5^{-1/3}$ *b)* 2^3 *c)* 2 *d)* $3^{5/4}$ *e)* $3^{9/4}$.

◆ Exercice 31 p. 212

a) ab *b)* $a\sqrt{1+\dfrac{b}{a}} + b\sqrt{1+\dfrac{a}{b}}$.

Approfondissement

◆ Exercice 32 p. 212

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|$; donc : $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Donc, f est continue en tout élément x de $\mathbb{R}$.

◆ Exercice 33 p. 212

1. L'aire du triangle AOB est : $\mathscr{A}(\text{AOB}) = \dfrac{\sin x}{2}$.
L'aire de la portion de disque comprise entre l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$ et la corde [AB] est : $\mathscr{A}' = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin x}{2}$.
On a : $\mathscr{A}(\text{AOB}) = \mathscr{A}' \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} - \sin x = 0$.
Posons : $f(x) = \dfrac{x}{2} - \sin x$.
La fonction f est dérivable sur $[0\,;\pi]$ et sa dérivée est
$f' : x \mapsto \dfrac{1}{2} - \cos x$.
On en déduit le tableau de variation de f.

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\dfrac{\pi - 3\sqrt{3}}{6}$	↗	$\dfrac{\pi}{2}$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[\frac{\pi}{3}\,;\pi]$, et $0 \in f([\frac{\pi}{3}\,;\pi])$; donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[\frac{\pi}{3}\,;\pi]$.

2. On trouve : $\alpha \approx 1{,}90$.

◆ Exercice 35 p. 212

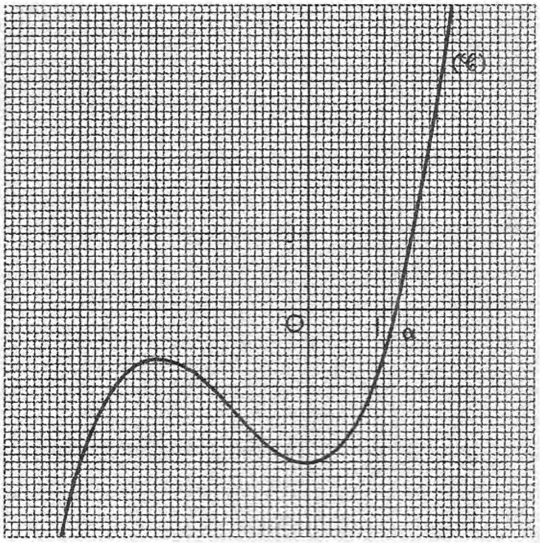
1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto x(x+2)$.
On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\dfrac{2}{3}$	↘	-2	↗	$+\infty$

La courbe $(\mathscr{C})$, ci-contre, est la représentation graphique de f.

2. La courbe $(\mathscr{C})$ coupe l'axe (OI) en un seul point.
Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
On a : $\alpha \in]1\,;+\infty[$.

3. On trouve : $\alpha \approx 1{,}196$.



♦ Exercice 36 p. 212

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{4-x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$.

Donc : f est croissante sur $]-\infty\,;4[$ et décroissante sur $]4\,;+\infty[$; $f'(4) = 0$; $f(4) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = 1$.

On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	↘	1

2. *a)* L'équation $f(x) = 1{,}1$ admet une solution unique α dans $]4\,;+\infty[$.
On trouve : $\alpha \approx 6{,}9$.

b) L'équation $f(x) = 0{,}75$ admet une solution unique β dans $]-\infty\,;4[$.
On trouve : $\beta \approx 0{,}6$.

c) L'équation $f(x) = -0{,}5$ admet une solution unique γ dans $]-\infty\,;4[$.
On trouve : $\gamma \approx -2{,}7$.

♦ Exercice 37 p. 212

2. *a)* Posons : $f(x) = \sin x - \cos x - \frac{\pi}{2}$.

La fonction f est dérivable sur $[0\,;\pi]$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto x \sin x$. On en déduit le tableau de variation de f.

x	0		π
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\,;\pi]$ et $f([0\,;\pi]) = [-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$.

Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0\,;\pi]$. On trouve : $\alpha \approx 1{,}91$.

b) La fonction $g : x \mapsto \cos\frac{x}{2}$ est dérivable sur $[0\,;\pi]$ et sa dérivée est $g' : x \mapsto -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de g.

x	0		π
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	1	↘	0

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$ et $g([0\,;\pi]) = [0\,;1]$.

Donc, g est une bijection de $[0\,;\pi]$ sur $[0\,;1]$.

Déduction

On a : $0 < r < 2 \Rightarrow 0 < \frac{r}{2} < 1$.

Donc : $\exists\, \alpha \in\,]0\,;\pi[\ /\ g(\alpha) = \frac{r}{2}$; c'est-à-dire : $\exists\, \alpha \in\,]0\,;\pi[\ /\ r = 2\cos\frac{\alpha}{2}$.

On a : $g(1) \approx 0{,}87 \Rightarrow r \approx 1{,}74$.

♦ Exercice 38 p. 212

1. Posons : $f(x) = |x\sqrt{1-x}| - \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$. On a : $D_f =]-\infty\,;1]$.

$\forall\, x \in\,]-\infty\,;0]$; $f(x) = -x\sqrt{1-x} - \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$; $\forall\, x \in\,]0\,;1]$; $f(x) = x\sqrt{1-x} - \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

La fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0]$ et $]0\,;1[$.

$\forall\, x \in\,]-\infty\,;0]$; $f'(x) = \dfrac{(3x-2)\sqrt{1-x}}{2(1-x)}$; $\forall\, x \in\,]0\,;1[$; $f'(x) = \dfrac{(-3x+2)\sqrt{1-x}}{2(1-x)}$.

On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$\frac{2}{3}$		x_3		1
$f'(x)$		$-$		$-$	-1 ‖ 1	$+$		$+$	0	$-$		$-$	‖
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{1}{3\sqrt{3}}$	↗	0	↗	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{3\sqrt{3}}$

- La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et $f(]-\infty\,;0[) =]-\frac{1}{3\sqrt{3}}\,;+\infty[$; donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_1 dans $]-\infty\,;0[$.

On a : $f(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$; donc : $x_1 \in\,]-\frac{1}{3}\,;0[$.

- De la même façon, on montre que f admet une solution unique x_2 dans $]0\,;\frac{2}{3}[$ et une solution unique x_3 dans $]\frac{2}{3}\,;1[$.

2. • On a : $u_1 = \frac{3}{2}(x_1 - \frac{1}{3})$ et $-\frac{1}{3} < x_1 < 0$; donc : $-1 < u_1 < -\frac{1}{2}$.

Par suite : $\exists\ \theta_1 \in\,]\frac{2\pi}{3}\,;\pi[\ /\ u_1 = \cos\theta_1$.

On a : $u_2 = \frac{3}{2}(x_2 - \frac{1}{3})$ et $0 < x_2 < \frac{2}{3}$; donc : $-\frac{1}{2} < u_2 < \frac{1}{2}$.

Par suite : $\exists\ \theta_2 \in\,]\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}[\ /\ u_2 = \cos\theta_2$.

- On a : $u_3 = \frac{3}{2}(x_3 - \frac{1}{3})$ et $\frac{2}{3} < x_3 < 1$; donc : $\frac{1}{2} < u_3 < 1$.

Par suite : $\exists\ \theta_3 \in\,]0\,;\frac{\pi}{3}[\ /\ u_3 = \cos\theta_3$.

3. *a)* On a d'une part : $u_1 = \cos\theta_1$; donc : $4u_1^3 - 3u_1 = 4\cos^3\theta_1 - 3\cos\theta_1 = \cos 3\theta_1$ **(i)**

On a d'autre part : $u_1 = \frac{3}{2}(x_1 - \frac{1}{3})$; donc : $3u_1 = \frac{9}{2}x_1 - \frac{3}{2}$ et $4u_1^3 = \frac{27}{2}(x_1^3 - x_1^2 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{27})$.

Or : $-x_1\sqrt{1-x_1} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow x_1^2 - x_1^3 = \frac{1}{27}$.

Par suite : $4u_1^3 = -1 + \frac{9}{2}x_1$ et $4u_1^3 - 3u_1 = \frac{1}{2}$ **(ii)**

De **(i)** et **(ii)**, on déduit que : $\cos 3\theta_1 = \frac{1}{2}$.

De la même façon, on démontre que : $\cos 3\theta_2 = \frac{1}{2}$ et $\cos 3\theta_3 = \frac{1}{2}$.

b) $\cos 3\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ (1) ou $\theta = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ (2).

On a : $\theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ et $0 < \theta < \pi \Rightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{4}{3} \Rightarrow k \in \{0\,;1\}$.

Si $k = 0$, alors : $\theta = \frac{\pi}{9}$; si $k = 1$, alors : $\theta = \frac{7\pi}{9}$.

On a : $\theta = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ et $0 < \theta < \pi \Rightarrow \frac{1}{6} < k < \frac{5}{3} \Rightarrow k = 1$.

Par suite : $\theta = \frac{5\pi}{9}$.

Or : $\theta_1 \in\,]\frac{2\pi}{3}\,;\pi[$, $\theta_2 \in\,]\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}[$ et $\theta_3 \in\,]0\,;\frac{\pi}{3}[$. Donc : $\theta_1 = \frac{7\pi}{9}$, $\theta_2 = \frac{5\pi}{9}$ et $\theta_3 = \frac{\pi}{9}$.

♦ Exercice 39 p. 212

1. On a : $D_f =]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$.

Donc, la droite (Δ) d'équation $x = 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

2. *a)* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{4}x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{4}x^2 = +\infty$.

b) $\forall\, x \in D_f$, $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{x-2}$.

Donc, $(\mathscr{C})$ est asymptote à la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$.

Sur $]-\infty\,;2[$, $(\mathscr{C})$ au- dessous de $(\mathscr{P})$; sur $]2\,;+\infty[$, $(\mathscr{C})$ est au-dessus de $(\mathscr{P})$.

3. *a)* La fonction f est dérivable sur D_f et a pour dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{3x(x-1)(x-\frac{8}{3})}{2(x-2)^2}$.

On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		1		2		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$-\frac{3}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{29}{3}$	↗	$+\infty$

b) La fonction f est continue et strictement décroissante de $]-\infty\,;0[$ sur $]-1\,;+\infty[$. Donc, f est une bijection de $]-\infty; 0[$ vers $]-1\,;+\infty[$.

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty\,;0[$. On trouve : $\alpha \approx -1{,}3$.

10. Dérivation - Études de fonctions

(pages 213 à 232 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- Approfondir la notion de dérivée vue en classe de Première par :
  - la dérivée de fonctions composées ;
  - l'inégalité des accroissements finis ;
  - les dérivées successives.
- Appliquer la dérivation à l'étude globale et locale de fonctions.

COMMENTAIRES

On signalera la notation différentielle fréquemment utilisée en sciences physiques.
On approfondira l'étude des fonctions, notamment les fonctions trigonométriques et les fonctions irrationnelles.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Dérivation • Fonctions dérivées : – dérivabilité sur un intervalle ; – dérivées usuelles. • Dérivée de fonctions composées : – dérivée de la composées de deux fonctions ; – dérivée de la réciproque d'une fonction ; – dérivées des fonctions $x^r \mapsto x^r$ et u^r ($r \in \mathbb{Q}^*$). • Inégalité des accroissements finis : • Dérivées successives et applications : – dérivées successives d'une fonction ; – position relative d'une courbe et de ses tangentes.	• Étudier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle. • Déterminer l'ensemble de dérivabilité d'une fonction. • Déterminer la dérivée d'une fonction sur un intervalle. • Étudier, sur un intervalle, la dérivabilité de la réciproque d'une fonction donnée. • Déterminer la dérivée de la réciproque d'une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle. • Déterminer les dérivées des fonctions de types $x \mapsto x^r$ et u^r ($r \in \mathbb{Q}^*$). • À l'aide de l'inégalité des accroissements finis : - comparer des nombres ; - faire des approximations. • Calculer les dérivées successives d'une fonction.
Études de fonctions • Plan d'étude d'une fonction.	• Étudier des fonctions polynômes. • Étudier des fonctions rationnelles. • Étudier des fonctions irrationnelles. • Étudier des fonctions trigonométriques.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 221

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $f' : x \mapsto 3x|x|$.

b) f est dérivable sur $]-\infty ; 2[$ et sa dérivée est : $f' : x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{2-x}$.

c) f est dérivable sur $]-\frac{5}{2} ; +\infty[$ et sa dérivée est : $f' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$.

d) f est dérivable sur $]-\infty ; -1[\cup]4 ; +\infty[$ et sa dérivée est : $f' : x \mapsto \frac{(x+1)(4x-11)}{2\sqrt{x^2-3x-4}}$.

♦ Exercice 1.b p. 221

1. f est dérivable sur $]-\infty\,;-2\,[\cup]-2\,;+\infty\,[$ et sa dérivée est : $f' : x \mapsto \dfrac{3}{(x+2)^2}$.

2. *a)* $D_{f'} = \mathbb{R}\,;\; f'(x) = \dfrac{6x}{(x^2+2)^2}$

b) $D_{f'} =]\,0\,;+\infty\,[\,;\; f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^2}$

c) $D_{f'} =]-\infty\,;-2\,[\cup]\,1\,;+\infty\,[\;;\; f'(x) = \dfrac{3}{2(x+2)^2} \times \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$

d) $D_{f'} = \mathbb{R}\,;\; f'(x) = \dfrac{-3\sin x}{(\cos x+2)^2}$.

♦ Exercice 1.c p. 221

1. f est continue et strictement croissante sur $[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\,]$, donc f est une bijection de $[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\,]$ sur $[-1\,;1]$.

2. f est dérivable sur $]-1\,;1\,[$ et $\forall\, x \in\,]-1\,;1\,[,\; f'^{-1}(x) = \dfrac{1}{f'0f^{-1}(x)}$.

Or : $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) = \sin y$; donc : $f'^{-1}(x) = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. g admet une fonction réciproque g^{-1} dérivable sur $]-1\,;1[$ et $\forall\, x \in\,]-1\,;1[,\; g'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

♦ Exercice 1.d p. 221

a) $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^4}$ *b)* $f'(x) = 3x\sqrt{x^2+1}$ *c)* $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ *d)* $f'(x) = \dfrac{x}{3}(x^2+1)^{\frac{5}{6}}$.

♦ Exercice 1.e p. 221

La fonction **cos** est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est majorée, en valeur absolue, par 1.
Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous nombres réels a et b, $|\cos b - \cos a| \leq |b-a|$.

♦ Exercice 1.f p. 221

La fonction f est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Or : $\forall\, x \in [10\,000\,;\,10\,001],\; |\,f(x)\,| \leq \dfrac{1}{200}$; donc : $|\sqrt{10\,001} - 100| \leq 5 \times 10^{-3}$.

♦ Exercice 1.g p. 221

a) $f'(x) = 4x - 3$; $f''(x) = 4$; $f^{(3)}(x) = 0$

b) $f'(x) = -3x^2 + 1$; $f''(x) = -6x$; $f^{(3)}(x) = -6$

c) $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$; $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$; $f^{(3)}(x) = \dfrac{-6}{(x-1)^4}$

d) $f'(x) = \dfrac{-5}{(x-1)^2}$; $f''(x) = \dfrac{10}{(x-1)^3}$; $f^{(3)}(x) = \dfrac{-30}{(x-1)^4}$.

♦ Exercice 1.h p. 221

$f'(x) = \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^2}{2!} + x + 1$; $f''(x) = \dfrac{x^2}{2!} + x + 1$; $f^{(3)}(x) = x + 1$; $f^{(4)}(x) = 1$; pour $n \geq 5$, $f^{(n)}(x) = 0$.

♦ Exercice 1.i p. 221

a) $f'(x) = 1 + \tan^2 x$; $f''(x) = 2\tan x + 2\tan^3 x$; $f^{(3)}(x) = 2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x$

b) $f'(x) = 2\cos 2x$; $f''(x) = -4\sin 2x$; $f^{(3)}(x) = -8\cos 2x$

c) $f'(x) = \sin 2x$; $f''(x) = 2\cos 2x$; $f^{(3)}(x) = -4\sin 2x$

d) $f'(x) = -\sin 2x$; $f''(x) = -2\cos 2x$; $f^{(3)}(x) = 4\sin 2x$.

♦ Exercice 2.a p. 203

a) $(\mathscr{D}) : y = 2$
$(\Delta) : x = -1$

b) $(\mathscr{D}) : y = 0$
$(\Delta) : x = -1$
$(\Delta') : x = 1$

c) $(\mathscr{D}) : y = 2$
$(\Delta) : x = -1$
$(\Delta') : x = 1$

d) $(\mathscr{D}) : y = 2$
$(\Delta) : x = -1$
$(\Delta') : x = 1$.

♦ Exercice 2.a p. 227

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est :
$f' : x \mapsto (x - 1)(3x + 1)$.

Représentation Graphique

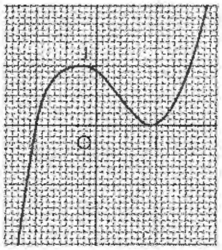


Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) f est paire, donc l'étude peut se faire sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est :
$f' : x \mapsto 4x(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$.

Représentation Graphique

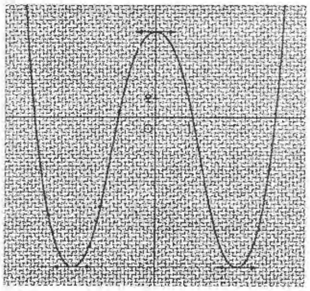


Tableau de variation

x	0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

♦ Exercice 2.b p. 227

b) f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et sa fonction dérivée est :

$$f' : x \mapsto \frac{2(x-1)(4x-3)}{(x-1)^4}.$$

Représentation Graphique

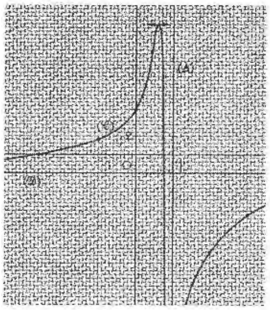


Tableau de variation

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$		
$f(x)$	-2	$\nearrow$	14	$\searrow$ $-\infty$	$\|$	$-\infty$	$\nearrow$	-2

Asymptotes

$(\mathscr{D}) : y = -2$ et $(\Delta) : x = 1$.

$(\mathscr{C}) \cap (OI)$

$(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\frac{-2 - \sqrt{14}}{2} \approx -2{,}8$ et $\frac{-2 + \sqrt{14}}{2} \approx 0{,}8$.

♦ Exercice 2.c p. 227

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa fonction dérivée est :

$$f' : x \mapsto \frac{x^2+4}{2x^2}.$$

Représentation Graphique

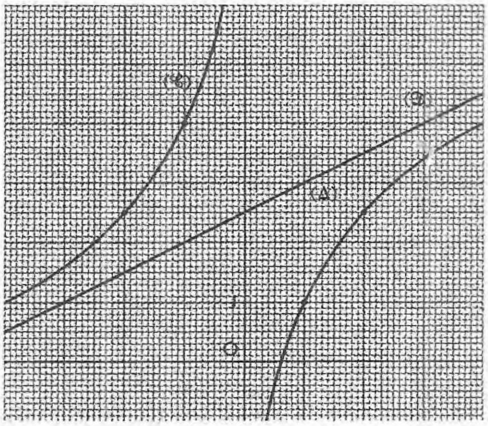


Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Asymptotes

$(\mathscr{D}) : y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ et $(\Delta) : x = 0$.

$(\mathscr{C}) \cap (\mathrm{OI})$

$(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses : $\frac{-5-\sqrt{41}}{2} \approx -5{,}7$ et $\frac{-5+\sqrt{41}}{2} \approx 0{,}7$ ·

♦ Exercice 2.d p. 227

1. f est continue sur $]-\infty\,;4]$ est dérivable sur : $]-\infty\,;4]$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 4\\ x<4}} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = -\infty$; donc, f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 4.

2. $\forall x \in]-\infty\,;4[,\ f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$.

Représentation Graphique

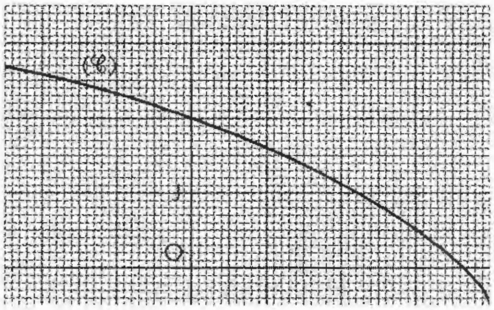


Tableau de variation

x	$-\infty$		4
$f'(x)$		$-$	‖
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; donc, $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique dans la direction de (OI).

♦ Exercice 2.e p. 227

1. f est continue sur $]-\infty\,;-4] \cup [1\,;+\infty[$; f est dérivable sur $]-\infty\,;-4[\cup]1\,;+\infty[$.

f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse -4 et au point d'abscisse 1,

car $\lim\limits_{\substack{x \to -4\\ <}} \frac{f(x)-f(-4)}{x+4} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$.

2. $\forall x \in]-\infty\,;-4[\cup]1\,;+\infty[,\ f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-4}}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	▨	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	▨	0	↗	$+\infty$

3. Axe de symétrie

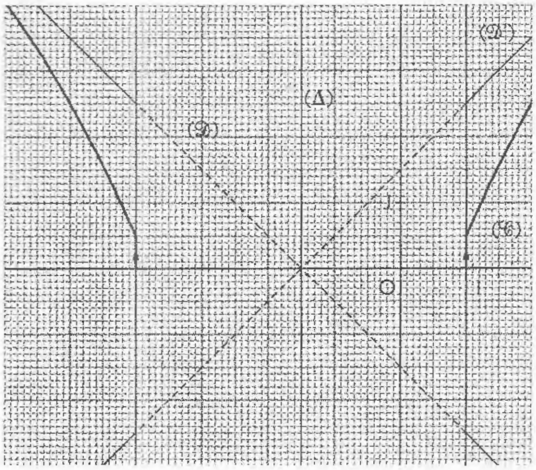
La droite (Δ) d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.

Asymptotes

En $-\infty$: $(\mathscr{D}) : y = -x - \dfrac{3}{2}$

En $+\infty$: $(\mathscr{D}') : y = x + \dfrac{3}{2}$.

Représentation Graphique



♦ Exercice 2.g p. 227

1. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\, 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\,\}$

f étant de période 2π, l'ensemble d'étude est $[-\pi\,;\pi]$.

2. *a)* $\forall\, x \in [-\pi\,; 0\,[\cup]\,0\,;\pi]$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) - 1}{(1-\cos x)^2}$.

b) ***Tableau de variation***

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		π
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	‖	$-$	$-\frac{1}{2}$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$

c) La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

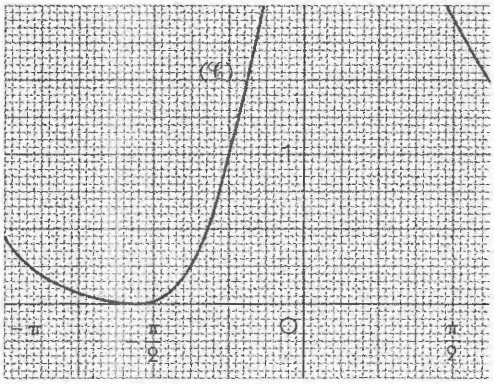
3. *a)* La tangente est parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisses :

$x_k = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,; x_{k'} = \dfrac{-\pi}{2} + 2k'\pi \quad (k \in \mathbb{Z}, k' \in \mathbb{Z})$.

b) $(T_{-\pi}) : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1-\pi}{2}$

$(T_{-\pi}) : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi - 1}{2}$.

Représentation Graphique



Exercices d'apprentissage

CALCULS DE DÉRIVÉES

♦ Exercice 1 p. 228

a) $f'(x) = -5x^4 + 3x^2$

b) $f'(x) = 8x(x^2 + 1)^3$

c) $f'(x) = (5x + 2)^2(37 - 80x)$

d) $f'(x) = 2x^4(2 - 4x^2)^2(5 - 22x^2)$.

♦ Exercice 2 p. 228

a) $f'(x) = \dfrac{1}{(-x + 1)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{(x + 1)(-3x - 1)}{(x^2 - x - 1)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{8(x - 1)}{(3x + 1)^3}$

d) $f'(x) = \dfrac{(2x - 1)(-6x + 13)}{(3x + 1)^4}$.

♦ Exercice 3 p. 228

a) $D_f =]-\infty ; 0]\cup[3 ; +\infty[$

$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]3 ; +\infty[, f'(x) = \dfrac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}}$

$\lim\limits_{\underset{<}{x \to 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{\underset{>}{x \to 3}} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = +\infty$

b) $D_f = [-1 ; +\infty[$

$\forall x \in [-1 ; +\infty[$; $f'(x) = \dfrac{1}{2}(5x - 1)\sqrt{x + 1}$.

c) $D_f =]-\infty ; -2]\cup]1 ; +\infty[$.

$\forall x \in]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[, f'(x) = \dfrac{-3}{2(x - 1)^2}\sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 2}}$.

$\lim\limits_{\underset{<}{x \to -2}} \dfrac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = +\infty$

d) $D_f = [-1 ; +\infty[$

$\forall x \in]-1 +\infty[$; $f'(x) = \dfrac{-3x + 4}{2\sqrt{x - 1}(3x - 2)^2}$.

$\lim\limits_{\underset{>}{x \to 1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$.

♦ Exercice 4 p. 228

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0$; donc, f est constante.
En développant $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3$, on montre que : $f(x) = 1$.

♦ Exercice 5 p. 228

a) $f'(x) = -\sin x - \cos x$

b) $f'(x) = 3 \sin (-3x + \frac{\pi}{3})$

c) $f'(x) = 2x \cos (x^2 - \frac{\pi}{6})$

d) $f'(x) = -2 \cos 4x$

e) $f'(x) = -\sin x \cos (\cos x)$

f) $f'(x) = -2x \cos \dfrac{1}{x} + \sin \dfrac{1}{x}$

g) $f'(x) = \dfrac{x}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} \cos \sqrt{\dfrac{1}{1 - x^2}}$

h) $f'(x) = (1 + \tan^2 x)[1 + \tan^2 (\tan x)]$

i) $f'(x) = \dfrac{-(1 + \cos x)^2}{\sin^3 x}$

j) $f'(x) = \dfrac{(x - 2) \cos x + 2(x^2 - 4x) \sin x}{\cos^3 x\sqrt{x^2 - 4x}}$.

♦ Exercice 6 p. 228

a) $\cos a$ *b)* $1 + \tan^2 a$ *c)* $-\sin 2a$ *d)* 0 *e)* $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ *f)* 0.

♦ Exercice 7 p. 228

a) $\dfrac{1}{2}$ *b)* $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ *c)* $\dfrac{5}{6}$ *d)* $\dfrac{1}{6}$.

♦ Exercice 8 p. 228

1. (T) : $y = -\frac{1}{4}(x+1)$.

2. Aux points A (0 ; 1) et B (− 2 ; − 11), la tangente a pour coefficient directeur − 4.

3. Il n'y a pas de point de ($\mathscr{C}$) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $3x - 2y + 1 = 0$.

♦ Exercice 9 p. 228

a) $D_f =]-\infty ; -\frac{3}{2}[\cup]2 ; +\infty[$

$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{5}{3}(4x-1)(2x^2 - x - 6)^{\frac{2}{3}}$

b) $D_f =]-\infty ; -\frac{3}{2}[\cup]2 ; +\infty[$

$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{3}{5}(4x-1)(2x^2 - x - 6)^{\frac{-2}{5}}$

c) $D_f =]-\infty ; -\frac{3}{2}[\cup]2 ; +\infty[$

$\forall x \in D_f, f'(x) = -\frac{1}{3}(4x-1)(2x^2 - x - 6)^{\frac{-4}{3}}$

d) $D_f =]-\frac{3}{2} ; 2[$

$\forall x \in D_f, f'(x) = -\frac{3}{2}(-4x+1)(-2x^2 + x + 6)^{\frac{-5}{2}}$.

DÉRIVÉE DE FONCTIONS RÉCIPROQUES

♦ Exercice 10 p. 228

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	0	↗	1

1. La fonction f est dérivable sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ et sa dérivée est la fonction $f' : \mapsto 2 \sin x \cos x$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation f.

f est continue et strictement croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, donc f est bijective.

2. La fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $]0 ; 1[$.

On a : $\left.\begin{array}{l} y = f^{-1}(x) \\ x \in [0 ; 1] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = f(y) = \sin^2 y \\ y \in [0 ; \frac{\pi}{2}] \end{array}\right.$;

$$\forall x \in]0 ; 1[, f^{-1}(x) = \frac{1}{f'0f^{-1}(x)} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{2 \sin y \cos y} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$$

♦ Exercice 11 p. 228

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$

1. La fonction f est dérivable sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$

et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation f.

f est continue et strictement croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$, donc f est bijective.

2. La réciproque f^{-1} est dérivable sur $]1 ; +\infty[$.

On a : $\left.\begin{array}{l} y = f^{-1}(x) \\ x \in [1 ; +\infty[\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = f(y) = \frac{1}{\cos y} \\ y \in [0 ; \frac{\pi}{2}] \end{array}\right.$

$$\forall x \in]1 ; +\infty[, f^{-1}(x) = \frac{1}{f'_0 f^{-1}(x)} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{\cos^2 y}{\sin y} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

♦ Exercice 12 p. 228

x	$-\pi$		π
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

1. La fonction f est dérivable sur $]-\pi\,;\pi[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{x}{2})$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation f.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\pi\,;\pi[$, donc elle est bijective.

2. La fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $\left.\begin{array}{r} y = f^{-1}(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = f(y) = \tan \frac{y}{2} \\ y \in\,]-\pi\,;\pi[\end{array}\right.$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) \quad = \frac{1}{f'\circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{y}{2})} = \frac{2}{1 + x^2}.$$

COMPARAISON DE NOMBRES

♦ Exercice 13 p. 228

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[32\,;33]$, on obtient : $|\sqrt{33} - \sqrt{32}| \leq 0{,}088$.

♦ Exercice 14 p. 228

x	0		$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	

1. La fonction $f : x \mapsto \tan x - x$ est dérivable sur $[0\,;\frac{\pi}{4}]$ et a pour dérivée la fonction $f' : x \mapsto \tan^2 x$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$
$g'(x)$	-1	$-$	0
$g(x)$	0	↘	

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

Donc : $\forall x \in [0\,;\frac{\pi}{4}], f(x) \geqslant 0$ (I).

La fonction $g : x \mapsto \tan x - 2x$ est dérivable sur $[0\,;\frac{\pi}{4}]$ et sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto \tan^2 x - 1$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de g.

Donc : $\forall x \in [0\,;\frac{\pi}{4}], g(x) \leqslant 0$ (II).

De (I) et (II), on déduit : $\forall a \in [0\,;\frac{\pi}{4}], a \leqslant \tan a \leqslant 2a$.

2. La fonction $h : x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $[0\,;\frac{\pi}{2}[$ et a pour dérivée la fonction $h' : x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$.

Soit a et b deux éléments de $[0\,;\frac{\pi}{2}[$ tels que : $a \leqslant b$.

La fonction $x \mapsto \cos^2 x$ étant décroissante sur $[0\,;\frac{\pi}{2}[$, on a : $\forall x \in [a\,;b], \cos^2 b \leqslant \cos^2 x \leqslant \cos^2 a$;

donc : $\forall x \in [a\,;b], \frac{1}{\cos^2 a} \leqslant h'(x) \leqslant \frac{1}{\cos^2 b}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on en déduit : $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leqslant \tan b - \tan a \leqslant \tan \leqslant \frac{b-a}{\cos^2 b}$.

♦ Exercice 15 p. 229

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$ est dérivable sur $[0 ; \frac{1}{2}]$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$.

On a : $\forall x \in [0 ; \frac{1}{2}], -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant f'(x) \leqslant -\frac{1}{2}$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f sur $[0 ; x]$, on obtient :

$-\frac{1}{\sqrt{2}}(x-0) \leqslant f(x) - f(0) \leqslant -\frac{1}{2}(x-0)$; donc : $1 - \frac{x}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{1-x} \leqslant 1 - \frac{x}{2}$.

♦ Exercice 16 p. 228

1. *a)* La fonction $f : x \mapsto 3x^3 - 5x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 9\,(x + \frac{\sqrt{5}}{3})\,(x - \frac{\sqrt{5}}{3})$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{5}}{3}$		$\frac{\sqrt{5}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

b) On a : $A = f(a)$, avec $a = 0{,}745\ 356\ 123$;

$B = f(b)$, avec $b = 0{,}745\ 356\ 124$;

$a \in]\frac{\sqrt{5}}{3} ; +\infty[$ et $b \in]\frac{\sqrt{5}}{3} ; +\infty[$.

On a : f croissante sur $]\frac{\sqrt{5}}{3} ; +\infty[$ et $a < b$; donc : $f(a) < f(b)$; c'est-à-dire : $A < B$.

2. La fonction $g : x \mapsto \frac{\sqrt{5}x^2}{1-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto \frac{\sqrt{5}x\,(2-x)}{(1-x)^2}$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	‖	+	0	−	
$g(x)$		↘		↗	‖	↗		↘	

On a : $C = g(c)$, avec $c = 2{,}098\ 765\ 432\ 1$;

$D = g(d)$, avec $d = 2{,}098\ 765\ 432$;

$c \in]2 ; +\infty[$ et $d \in]2 ; +\infty[$.

On a : g décroissante sur $]2 ; +\infty[$ et $c > d$;

donc : $g(c) < g(d)$; c'est-à-dire : $C < D$.

♦ Exercice 17 p. 229

a et b appartiennent à l'intervalle $]0 ; 1[$.

On a : $a^3 + b^3 = a^3 + (1-a)^3 = 3a^2 - 3a + 1$.

La fonction $f : x \mapsto 3x^3 - 3x + 1$ est dérivable sur $]0 ; 1[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 3\,(2x-1)$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{4}$	↗	1

Donc, les valeurs extrêmes de $a^3 + b^3$ sont $\frac{1}{4}$ et 1.

DÉRIVÉES SUCCESSIVES

♦ Exercice 18 p. 229

a) $f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$; $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

b) $f'(x) = \frac{x^2-1}{2x^2}$; $f''(x) = \frac{1}{x^3}$

c) $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$; $f''(x) = \frac{-1}{(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x}}$

d) $f'(x) = -3\cos^2 x \sin x$; $f''(x) = 3\cos x\,(3\sin^2 x - 1)$

e) $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$; $f''(x) = 3\sin x\,(3\cos^2 x - 1)$

f) $f'(x) = 2\,(\tan x + \tan^3 x)$; $f''(x) = 2\,(3\tan^4 x + 4\tan^2 x + 1)$.

♦ Exercice 19 p. 229

$$f(x) = \frac{5}{24}x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{19}{4}x^2 + \frac{47}{6}x + \frac{43}{8}.$$

♦ Exercice 20 p. 229

1. $f(x) = \cos x$. On a : $f'(x) = \sin(-x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$; donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Supposons-la vraie à l'ordre k : $f^{(k)}(x) = \cos(x + k\frac{\pi}{2})$.

Alors : $f^{(k+1)}(x) = -\sin(x + k\frac{\pi}{2}) = \sin(-x - k\frac{\pi}{2}) = \cos(x + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \cos[x + (k-1)\frac{\pi}{2}]$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$.

2. Posons : $f(x) = \sin(ax + b)$ et $g(x) = \cos(ax + b)$.

On établit aisément que :

$f^{(n)}(x) = a^n \sin(ax + b + n\frac{\pi}{2})$; $g^{(n)}(x) = a^n \cos(ax + b + n\frac{\pi}{2})$.

3. Posons : $h(x) = \cos 2x - \sin\frac{x}{2}$.

On a : $h^{(n)}(x) = 2^n \cos(2x + n\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2^n}\sin(\frac{x}{2} + n\frac{\pi}{2})$.

ÉTUDES DE FONCTIONS

♦ Exercice 21 p. 229

e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 3}{x^2 - 2x - 3}$;

$D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 3[\cup]3 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{-6(x^2 + 3)}{x^2 - 2x - 3}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

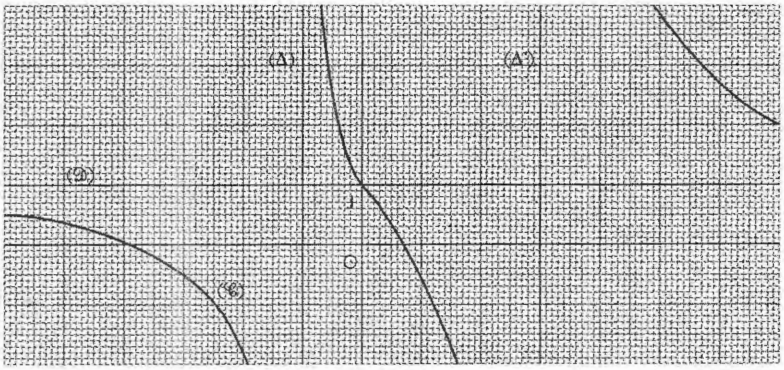
Asymptotes

$(\mathcal{D}) : y = 1$

$(\Delta) : x = -1$

$(\Delta') : x = 3$.

Courbe représentative



$(\mathcal{C})$ coupe (OI) aux points d'abscisses :

$-2 - \sqrt{7} \simeq -4{,}6$ et $-2 + \sqrt{7} \simeq 0{,}6$.

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$; $D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 + \infty[$.

f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{x(-x^3 + 2)}{(x^3 + 1)^2}$.

Tableau de variation

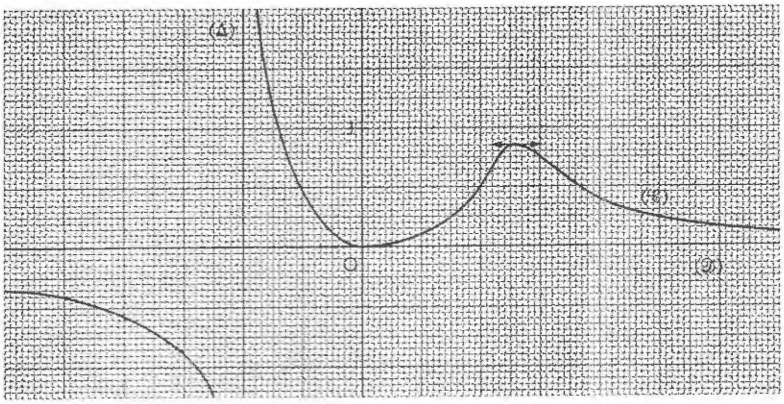
x	$-\infty$		-1		0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	↘	0

Asymptotes

$(\mathcal{D}) : y = 0$

$(\Delta) : x = -1$

Courbe représentative



♦ **Exercice 22 p. 229**

c) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$; $D_f = \mathbb{R}$.

f est impaire, donc l'étude peut se faire sur $[0 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction : $f' : x \mapsto \dfrac{2x^2\,(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$.

Asymptotes

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2x - \dfrac{2x}{x^2+1}$.

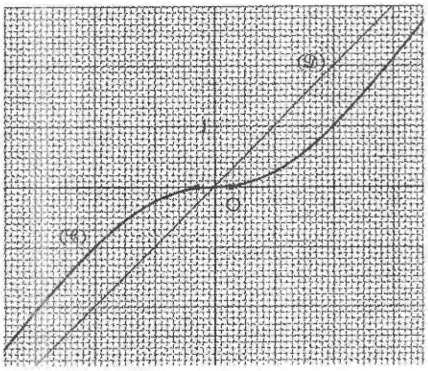
La droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 2x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

$(\mathcal{C})$ est située au-dessous de $(\mathcal{D})$ sur $[0 ; +\infty[$.

Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

Courbe représentative



d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+x-2}$; $D_f =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{x^2(x^2+2x-6)}{(x^2+x-2)^2}$.

L'équation $x^2 + 2x - 6 = 0$ a pour solutions :

$x' = -1 - \sqrt{7}$ et $x'' = -1 + \sqrt{7}$.

On a : $x' \simeq -3{,}6$ et $x'' \simeq 1{,}6$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		x'		-2		1		x''		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	y'	↘	‖	↘	‖	↘	y''	↗	$+\infty$

Asymptotes

$(\Delta) : x = -2$;

$(\Delta') : x = 1$;

$(\mathcal{D}) : y = x - 1$.

On a : $y' = f(x') = -\dfrac{20 + 14\sqrt{7}}{9}$;

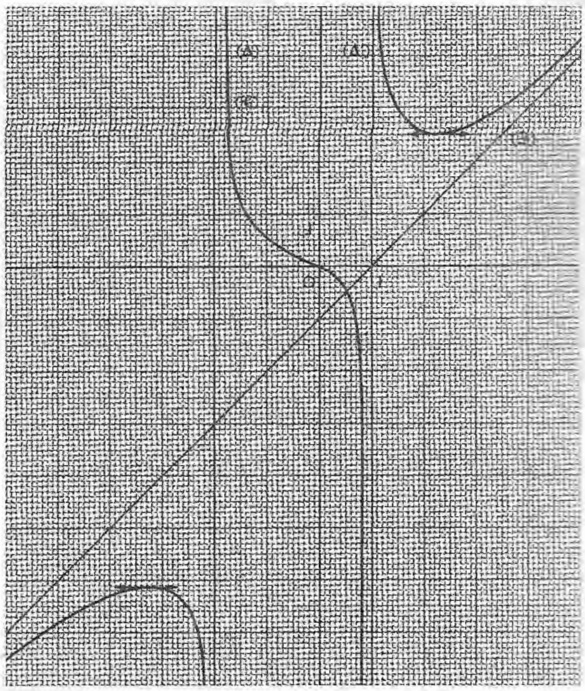
$y'' = f(x'') = \dfrac{-20 + 14\sqrt{7}}{9}$;

$y' \simeq -6{,}3$; $y'' \simeq 1{,}9$.

Le tableau ci-dessous la position relative de (𝒟) et (𝒞).

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$3x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(x-1)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Courbe représentative



♦ Exercice 23 p. 229

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 10x + 5}{(x+1)^2}$;

$D_f =]-\infty\,;-1\,[\cup]-1\,;+\infty\,[$.

$\forall\, x \in D_f\,,\, f(x) = x + 1 + \dfrac{7}{x+1} - \dfrac{3}{x+1^2}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-4		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{17}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	5	↘	$\frac{19}{4}$	↗	$+\infty$

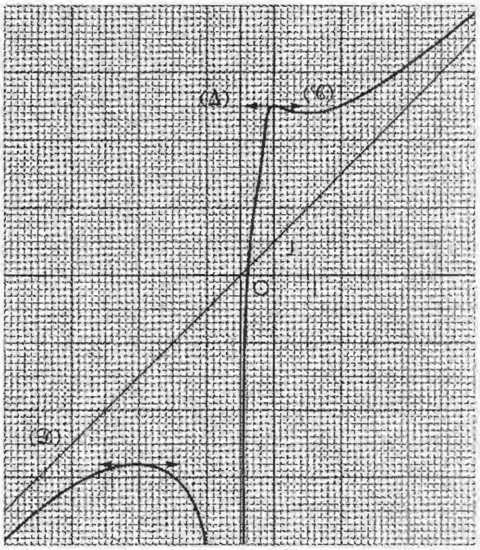
La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction : $f' : x \mapsto \dfrac{x(x-1)(x+4)}{(x+1)^3}$.

Asymptotes

$(\Delta) : x = -1$

$(\mathcal{D}) : y = x + 1$.

Courbe représentative



♦ Exercice 24 p. 229

$\forall\, x \in \left]-\infty\,;-1\right],\ f(x) = x^2 - 2x - 4\ ;\ \forall\, x \in \left]-1\,;0\right],\ f(x) = -x^2 - 2x - 2\ ;$

$\forall\, x \in \left]0\,;1\right],\ f(x) = -x^2 + 2x - 2\ ;\ \forall\, x \in \left]1\,;+\infty\right[,\ f(x) = x^2 + 2x - 4.$

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\,;0\,;1\}$.

$\forall\, x \in \left]-\infty\,;-1\right],\ f'(x) = 2x - 2\ ;\ \forall\, x \in \left]-1\,;0\right],\ f'(x) = -2x - 2\ ;$

$\forall\, x \in \left]0\,;1\right],\ f'(x) = -2x + 2\ ;\ \forall\, x \in \left]1\,;+\infty\right[,\ f'(x) = 2x + 2.$

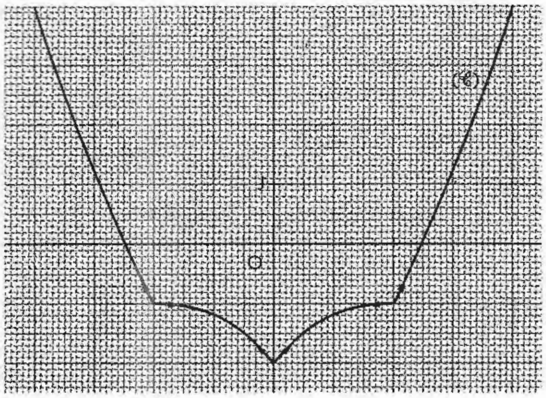
Donc : $f'_g(-1) = -4$ et $f'_d(-1) = 0\ ;\ f'_g(0) = -2$ et $f'_d(0) = 2\ ;\ f'_g(1) = 0$ et $f'_d(1) = 4.$

A $(-1\,;-1)$, B $(0\,;-2)$ et C $(1\,;-1)$ sont des points anguleux de $(\mathscr{C})$.

2. *Tableau de variation*

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	-4 ‖ 0	$-$	-2 2	$+$	0 4	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↘	-2	↗	-1	↗	$+\infty$

Courbe représentative



♦ Exercice 25 p. 229

$D_f = \mathbb{R}.$

1. $\forall\, x \in \left]-\infty\,;-1\right],\ f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{-x + 1}\ ;$

$\forall\, x \in \left]-1\,;0\right],\ f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}\ ;$

$\forall\, x \in \left]0\,;+\infty\right],\ f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}.$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\,;0\}$.

$\forall\, x \in \left]-\infty\,;-1\right[,\ f'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 2}{(-x + 1)^2}\ ;$

$\forall\, x \in \left]-1\,;0\right[,\ f'(x) = \dfrac{x\,(x - 2)}{(x - 1)^2}\ ;$

$\forall\, x \in \left]0\,;+\infty\right[,\ f'(x) = \dfrac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}.$

Donc : $f'_g(-1) = -\dfrac{1}{4}$ et $f'_d(-1) = \dfrac{3}{4}\ ;$

$f'_g(0) = 0$ et $f'_d(0) = 0\ ;$

par suite : $f'(0) = 0.$

2. *Asymptotes*

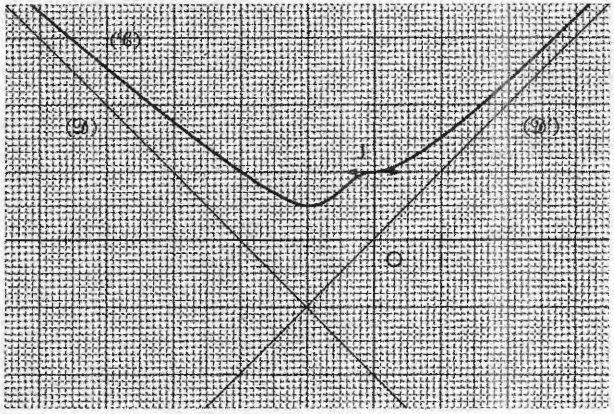
$(\mathscr{D}) : y = -x - 2.$

$(\mathscr{D}') : y = x.$

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\frac{1}{4}$ ‖ $\frac{3}{4}$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1	↗	$+\infty$

Courbe représentative



♦ Exercice 27 p. 229

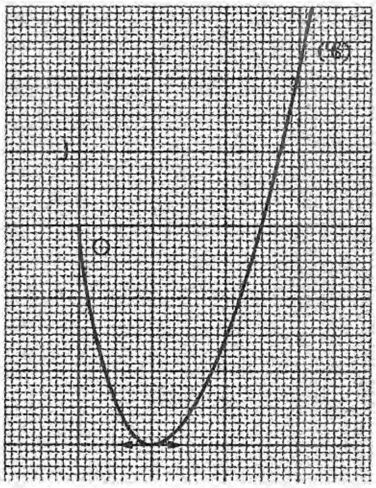
a) $D_f = [\,0\,;+\infty\,[$.
La fonction f est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{2(x\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}$.

Branche infinie.
$(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique dans la direction de (OJ).

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-3	↗	$+\infty$

Courbe représentative



♦ Exercice 29 p. 229

$D_f =]-\infty\,;-3\,] \cup [\,5\,;+\infty\,[$.
1. f est continue sur D_f et dérivable sur $]-\infty\,;-3\,[\cup]\,5\,;+\infty\,[$.

Dérivabilité en − 3 et 5

- $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x-5^2}{x+3}} = +\infty$;

donc, f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse -3.

- De même, $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(5)}{x-5} = +\infty$; donc f admet au point

d'abscisse 5 une demi-tangente verticale.

2. $\forall\, x \in]-\infty\,;-3\,[\cup]\,5\,;+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{3}{2}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-15}}$.

Asymptotes

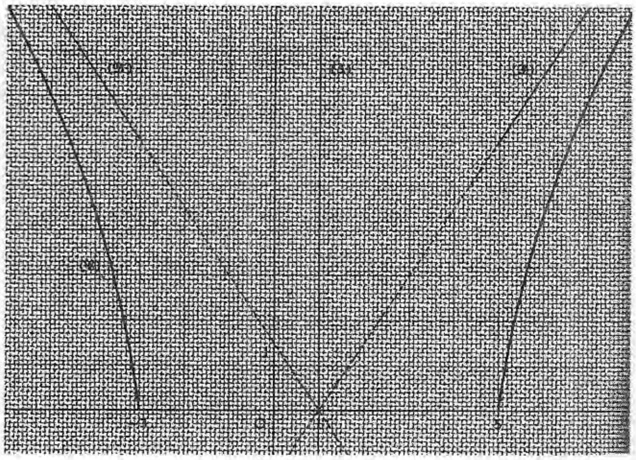
$(\mathscr{D}) : y = \dfrac{3}{2}(x-1)$ (en $+\infty$).
$(\mathscr{D}') : y = -\dfrac{3}{2}(x-1)$ (en $-\infty$).

Tableau de variation

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+\infty$	▨	$+\infty$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	▨	0	↗	$+\infty$

Axe de symétrie
$(\Delta) : x = 1$.

3. ***Courbe représentative***



♦ Exercice 30 p. 230

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$; $D_f =]-\infty\,;0] \cup]1\,;+\infty[$.

1. f est continue sur D_f et dérivable sur $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$.

Dérivabilité en 0.

$$\lim_{\substack{x \to 0\\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0\\ <}} -\sqrt{\frac{x}{x-1}} = 0 \text{ ; donc } f'_g(0) = 0.$$

2. $\forall\, x \in]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}}$.

Asymptotes

$(\Delta) : x = 1$;

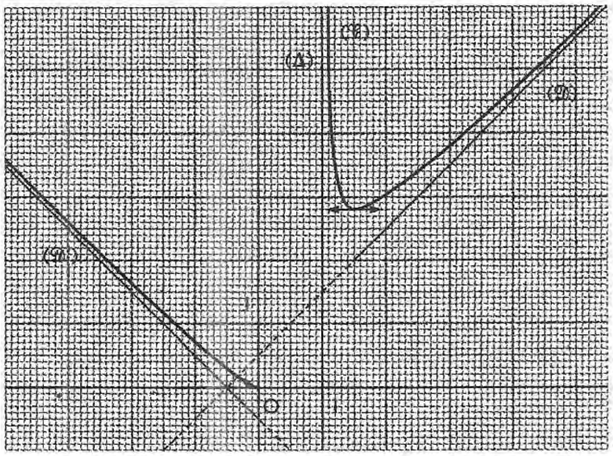
$(\mathcal{D}) : y = x + \frac{1}{2}$ (en $+\infty$) ;

$(\mathcal{D}) : y = -x - \frac{1}{2}$ (en $-\infty$).

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	▨	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	▨	‖ $+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

3. ***Courbe représentative***



Approfondissement

♦ Exercice 37 p. 230

1. $f(x) = (1 + x)^n$; $f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$.

2. $f(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p x^p$; $f'(x) = \sum\limits_{p=1}^{n} pC_n^p x^{p-1}$.

3. *a)* $\sum\limits_{p=1}^{n} pC_n^p = f'(1) = n \times 2^{n-1}$

b) $\sum\limits_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} pC_n^p = f'(-1) = 0$.

♦ Exercice 39 p. 230

1. $f(x) = \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{1}{2(x+1)}$.

2. Posons : $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

On a : $g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$; $h^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$.

Donc : $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n![(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}]}{2(x^2-1)^{n+1}}$.

Ainsi : $P_n(x) = (x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}$.

♦ Exercice 40 p. 230

1. $f(g)' = f'g + fg'$.
$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

2. On a : $(fg)^{(3)} = f^{(3)}g + 3f''g' + 3f'g'' + fg^{(3)}$.

3. $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{p=0}^{n} C_n^p\, f^{(n-p)} g^{(p)}$, avec $f^{(0)} = f$ et $g^{(0)} = g$.

4. *a)* $f(x) = x \cos x$.

$f^{(n)}(x) = x \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right) + n \cos\left[x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$f^{(n)}(x) = x \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right) + n \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) $f(x) = x^2 \cos x$.

$f^{(n)}(x) = [x - n(n-1)] \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

♦ Exercice 42 p. 231

1. $\forall x \in [\,0\,;2\,[$, $f(x+2) = f(x)$; donc : $f(2) = f(0) = 0$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 16 + 8b + 4c + 2d$.

f est continue en 2 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(0)$; càd : $8 + 4b + 2c + d = 0$ (1).

2. $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 4 + 3b + 2c + d = 0$ (2).

$f(1) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3 + 2b + 2c + 2d = 0$ (3).

(1), (2) et (3) conduisent au système : $\begin{cases} 4b + 2c + d = -8 \\ 3b + 2c + d = -4 \\ 2b + 2c + 2d = -3. \end{cases}$

Ce système a pour solution :

$b = -4$, $c = \dfrac{11}{2}$ et $d = -3$.

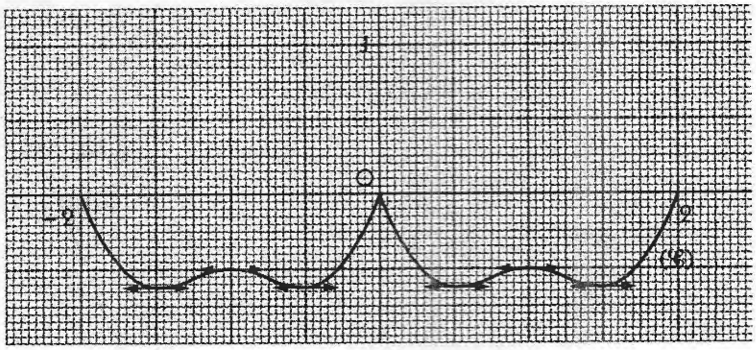
Donc : $f(x) = x^4 - 4x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 - 3x$.

3. f est dérivable sur $[\,0\,;2\,[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto (x-1)(2x-1)(2x-3)$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$	-3	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	3
$f(x)$	0	↘	$-\frac{9}{16}$	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{9}{16}$	↗	0

Courbe représentative



Points d'inflexion

$\forall x \in [\,0\,;2\,[,\ f''(x) = 12x^2 - 24x + 11$.

f'' s'annule et change de signe pour $x' = \dfrac{6-\sqrt{3}}{6}$ et $x'' = \dfrac{6+\sqrt{3}}{6}$. On a : $x' \simeq 0{,}7$ et $x'' \simeq 1{,}2$.

Les points d'abscisses $\dfrac{6-\sqrt{3}}{6}$ et $\dfrac{6+\sqrt{3}}{6}$ sont donc les points d'inflexion.

Axe de symétrie

La droite (Δ) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$.

Les autres points d'inflexion et axes de symétrie se déduisent par translations puisque f est périodique.

♦ Exercice 47 p. 231

$\forall x \in \,]\,0\,;2\,[,\ f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}(x-1)\right)$.

1. f est dérivable sur $]\,0\,;2\,[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{\pi}{2}\left[1 + \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}(x-1)\right)\right]$.

Valeurs remarquables

$f(1) = 0$;

$f(\frac{1}{2}) = -1$;

$f(\frac{3}{2}) = 1$.

Tableau de variation

x	0		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

Asymptotes

Les droites (OJ) et (Δ) d'équation $x = 2$ sont asymptotes à $(\mathscr{C})$.

2. f est continue et strictement croissante sur $]\,0\,;2\,[$, donc elle est bijective.

On note g sa réciproque.

On a : $\left.\begin{array}{l} y = g(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = f(y) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(y-1)\right) \\ y \in]0\,;2[\end{array}\right.$

$$g'(x) = \frac{1}{f'0g(x)} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}[1 + \tan^2 \frac{\pi}{2}(y-1)]}.$$

$$g'(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}(1 + x^2)} = \frac{2}{\pi(x^2+1)}.$$

3. On a : $D_h =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

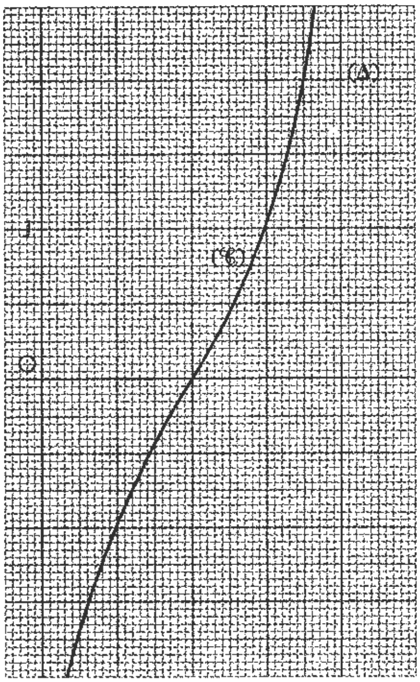
$\forall x \in D_h,\ h'(x) = 0.$

Donc, la fonction h est constante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

$\forall x \in]-\infty\,;0[,\ h(x) = h(-1) = 2g(-1) = 2 \times \frac{1}{2} = 1\,;$

$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ h(x) = h(1) = 2g(1) = 2 \times \frac{3}{2} = 3.$

Courbe représentative



11. Primitives - Fonction ln

(pages 233 à 254 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- Mettre en place la notion de primitives d'une fonction.
- Initier les élèves au calcul de primitives à partir des formules de dérivation.
- Introduire une nouvelle fonction, ln, et en donner les propriétés essentielles.
- Utiliser les logarithmes dans la résolution de problèmes.

COMMENTAIRES

La fonction logarithme népérien est définie comme primitive de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en 1. D'autres modes d'introduction pourront être étudiés en travaux dirigés.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Primitives d'une fonction • Définition et propriétés : – définition ; – ensemble des primitives d'une fonction ; – primitive prenant une valeur donnée en x_0. • Calculs de primitives : – primitives de fonctions élémentaires ; – primitives de la somme de deux fonctions ; – primitives du produit d'une fonction par un nombre réel ; – primitives de : $u' \times (v' \circ u)$.	• Deux fonctions étant données sur un intervalle, vérifier que l'une est une primitive de l'autre. • Connaissant une primitive d'une fonction f sur un intervalle K : – déterminer la forme générale des primitives de f sur K ; – déterminer la primitive de f qui prend une valeur donnée en x_0. • Déterminer les primitives d'une combinaison linéaire de fonctions élémentaires dont on connaît les primitives. • Déterminer les primitives d'une fonction de la forme : $u' \times (v' \circ u)$.
Fonction logarithme népérien • Définition et propriétés : – définition ; – propriétés algébriques. • Étude de la fonction ln : – dérivée et sens de variation ; – propriété : $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$; – limites usuelles ; – le nombre d'Euler ; – courbe représentative de ln.	• Résoudre une équation comportant des logarithmes. • Résoudre une inéquation comportant des logarithmes. • Retrouver, à l'aide de sa représentation graphique, les propriétés analytiques de la fonction ln. • Utiliser les limites de la fonction ln pour déterminer des limites de fonctions.
Fonctions comportant ln • Fonction $\ln \circ u$: – dérivée de : $\ln \circ u$; – primitives de : $\frac{u'}{u}$.	• Étudier la composée d'une fonction avec la fonction logarithme népérien. • Déterminer les primitives d'une fonction de la forme : $\frac{u'}{u}$.
Logarithme décimal • Définition et propriétés : – définition ; – propriétés algébriques. • Utilisations du logarithme décimal.	• Utiliser le logarithme décimal dans le calcul numérique.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

◆ Exercice 1.a p. 239

Dans chaque cas, on a : $\forall x \in \mathrm{K}, \mathrm{F}'(x) = f(x)$.

◆ Exercice 1.b p. 239

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{F}(x) = x^4 - \frac{5}{3}x^3 - x$ *b)* $\forall x \in]-\infty ; 0[, \mathrm{F}(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$

c) $\forall x \in]0 ; +\infty[, \mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{2} + \sqrt{x}$ *d)* $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{F}(x) = \sin x + 2\cos x.$

◆ Exercice 1.c p. 239

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{F}(x) = \frac{1}{10}(5x^2 - 7)^5$ *b)* $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{F}(x) = \frac{1}{-4(2x^2 - 6x + 11)^2}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{F}(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$ *d)* $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{F}(x) = -\cos(3x - 2)$

e) $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{F}(x) = \frac{2}{5}\sin^5 x$ *f)* $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{F}(x) = \frac{1}{6}\sin(3x^2 - \frac{\pi}{4}).$

◆ Exercice 1.d p. 239

a) $\forall x \in]0 ; +\infty[, \mathrm{F}(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{x} - 5$ *b)* $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{F}(x) = -3\cos x - \sin x - 4$

c) $\forall x \in]0 ; +\infty[, \mathrm{F}(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + 1$ *d)* $\forall x \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[, \mathrm{F}(x) = -\tan x \cos x + 2.$

◆ Exercice 2.a p. 244

1. $\ln 8 = 3\ln 2$; $\ln\frac{1}{16} = -4\ln\sqrt{2}$; $\ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$; $\ln(2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\ln 2$; $\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}\ln 2.$

2. $\ln 15 = \ln 3 + \ln 5$; $\ln 45 = 2\ln 3 + \ln 5$; $\ln\frac{25}{3} = -\ln 3 + 2\ln 5$; $\ln(75\sqrt{5}) = \ln 3 + \frac{5}{2}\ln 5.$

◆ Exercice 2.b p. 244

a) $x = e^{-3}$ *b)* $x = 1$ ou $x = e^2$ *c)* $x = 2$ *d)* $x = 1$ *e)* $x = 0.$

◆ Exercice 2.c p. 244

On a : $(x + 1)(2x^2 - 5x + 2) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2.$

a) Posons : $\mathrm{X} = \ln(x + 1).$

$2\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(\mathrm{X} + 1)(\mathrm{X} - \frac{1}{2})(\mathrm{X} - 2) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{X} \in \{-1 ; \frac{1}{2} ; 2\}.$

On en déduit les solutions de l'équation : $\frac{1}{e} - 1$; $\sqrt{e} - 1$ et $e^2 - 1.$

b) $\forall x \in]\frac{3}{2} ; +\infty[$, (E) $\Leftrightarrow 2(x + 1)(x - \frac{1}{2})(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

◆ Exercice 2.d p. 244

a) $\{(\frac{1}{e} ; e)\}$ *b)* $\{(7 ; 9), (9 ; 7)\}.$

◆ Exercice 2.e p. 244

a) $S =]0 ; \frac{1}{e}[$ *b)* $S =]0 ; 1[$ *c)* $S =]1 ; 2[\cup]e ; +\infty[$ *d)* $S = \varnothing$

e) $S =]-\infty ; -1[\cup]0 ; 1[$ *f)* $S =]1 ; +\infty[$ *g)* $S =]-e^{9/2} ; 0[\cup]0 ; e^{9/2}[.$

◆ Exercice 2.f p. 244

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *b)* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ *c)* $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

d) $\lim_{x \to 1} f(x) = -\frac{1}{2}$ *e)* $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 1$ *f)* $\lim_{x \to 0} f(x) = k.$

◆ Exercice 3.a p. 247

a) $\forall x \in]-\infty ; -\frac{1}{2}[, f'(x) = 2x + \frac{2}{2x + 1}$ *b)* $\forall x \in]-\infty ; 1[\cup]6 ; +\infty[, f'(x) = \frac{2x - 7}{x^2 - 7x + 6}$

c) $\forall x \in]6 ; +\infty[, f'(x) = \frac{2x - 7}{x^2 - 7x + 6}$ *d)* $\forall x \in]-\infty ; 1[\cup]6 ; +\infty[, f'(x) = \frac{2x - 7}{x^2 - 7x + 6}.$

♦ Exercice 3.b p. 247

a) $\forall x \in]0\,;\pi[,\ f'(x) = \text{cotan}x$

b) $\forall x \in]0\,;\sqrt{\pi}[\,,\ f'(x) = 2x\,\text{cotan}x^2$

c) $\forall x \in]0\,;\text{e}[,\ f'(x) = \dfrac{1}{x\cos^2(\ln x)}$

d) $\forall x \in]-\sqrt{3}\,;0[\,,\ f'(x) = \dfrac{3(x^2-1)}{2x(x^2-3)}$.

♦ Exercice 3.c p. 247

a) $\forall x \in]2\,;+\infty[,\ \text{F}(x) = 3\ln(x-2) + \text{C},\ (\text{C} \in \mathbb{R})$

b) $\forall x \in]-\infty\,;2[,\ \text{F}(x) = 3\ln(-x+2) + \text{C},\ (\text{C} \in \mathbb{R})$

c) $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ \text{F}(x = x^2 - x + \ln x + \text{C},\ (\text{C} \in \mathbb{R})$

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{F}'(x) = \dfrac{1}{3}\ln(3x^2+3x+1) + \text{C},\ (\text{C} \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 3.d p. 247

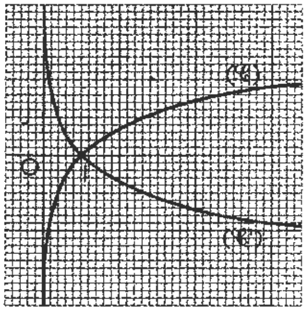
1. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\,;0\},\ f(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+1}$.

2. $\forall x \in]-1\,;+\infty[,\ \text{F}(x) = \ln(-x) + 2\ln(x+1) + \text{C},\ (\text{C} \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 3.e p. 247

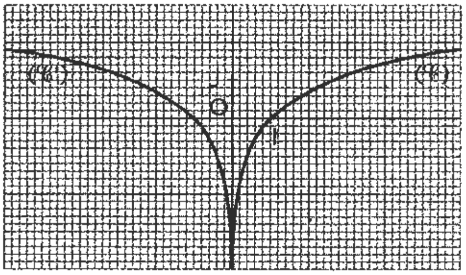
Soit $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de ln et $(\mathscr{C}')$ celle de la fonction donnée

a)



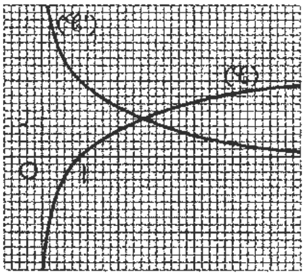
$(\mathscr{C}') = \text{S}_{(\text{OI})}(\mathscr{C})$

b)



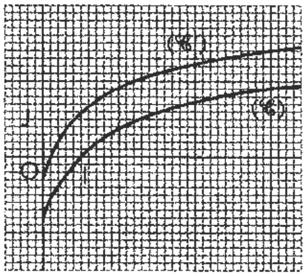
$(\mathscr{C}') = \text{S}_{(\text{OJ})}(\mathscr{C})$

c)



$(\mathscr{C}') = \text{t}_{2\overrightarrow{\text{OJ}}} \circ \text{S}_{(\text{OI})}(\mathscr{C})$

d)



$(\mathscr{C}') = \text{t}_{\overrightarrow{\text{OJ}}}(\mathscr{C})$.

♦ Exercice 3.f p. 247

a) Posons : $f(x) = x - \ln x$.

Étude aux bornes de D_f

On a : $\text{D}_f =]0\,;+\infty[$.

Sens de variation

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$; donc, la droite (OJ) est asymptote à $(\mathscr{C})$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$;

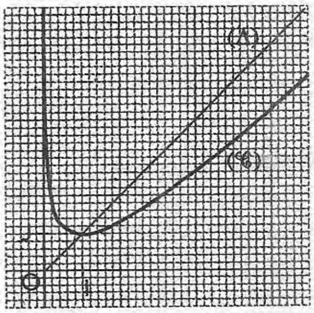
$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} (-\ln x) = +\infty$.

Donc, $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique dans la direction de la droite (Δ) d'équation $y = x$.

La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty)[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{x-1}{x}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



b) Posons : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Étude aux bornes de D_f

$D_f =]0 ; +\infty[$.

- On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} \times \ln x = -\infty$; donc, la droite (OJ) est asymptote à (𝒞).
- On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; donc, la droite (OI) est asymptote à (𝒞).

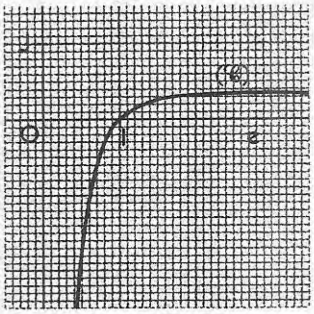
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

Courbe représentative



c) Posons : $f(x) = x\ln x$.

Étude aux bornes de D_f

$D_f =]0 ; +\infty[$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Donc, (𝒞) admet une branche parabolique dans la direction de (OJ).

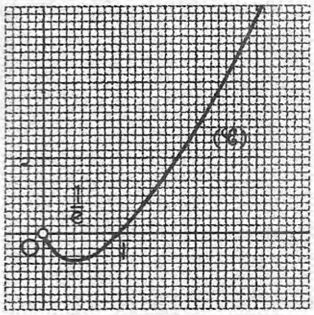
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 1 + \ln x$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

Courbe représentative



d) Posons : $f(x) = 2\ln(x + 1) - \ln x$.

Étude aux bornes de D_f

$D_f =]0 ; +\infty[$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$; donc, la droite (OJ) est asymptote à (𝒞).

On a : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = \ln \frac{(x + 1)^2}{x} = \ln\left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)$; donc ; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

De plus : $\forall x \in]0 ; +\infty[$; $\frac{f(x)}{x} = 2\,\frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \times \frac{x + 1}{x} - \frac{\ln x}{x}$.

Par suite, (𝒞) admet une branche parabolique dans la direction de (OI).

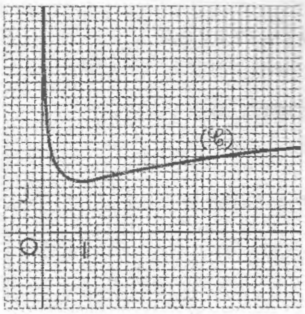
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur $]0 ~;~ +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \to \dfrac{x-1}{x(x+1)}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$2\ln 2$	↗	$+\infty$

Courbe représentative



♦ Exercice 3.g p. 247

1. $D_f = [0 ~;~ 1[\cup]1 ~;~ +\infty[$.

Continuité en 0

$\forall x \in D_f,\ f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{\ln x}{x}}$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$; donc : $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0 = f(0)$.

On en déduit que f est continue en 0.

Dérivabilité en 0.

$\forall x \in D_f,\ \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{\ln x}$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\ln x} = 0$; donc : $f'_d(0) = 0$.

2. ***Étude aux bornes de D_f***

On a : $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$; donc, la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est asymptote à (𝒞).

On a : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\dfrac{\ln x}{x}} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$;

donc, (𝒞) admet une branche parabolique dans la direction de (OI).

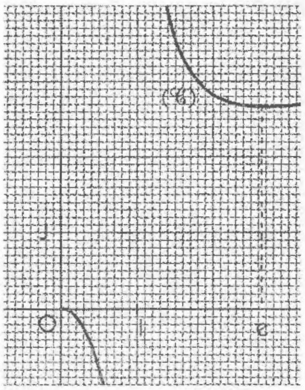
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction $f' : x \to \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Courbe représentative



♦ Exercice 4.a p. 249

a) $x = \dfrac{2-\sqrt{31}}{3}$ ou $x = \dfrac{2+\sqrt{31}}{3}$

b) $x = 10^{-3}$ ou $x = 10^{0,4}$

c) $x = 0,1$.

♦ Exercice 4.b p. 249

a) $S = \{(4 ~;~ 25), (25 ~;~ 4)\}$

b) $S = \{(10\sqrt{10} ~;~ 10^{-2})\}$.

♦ Exercice 4.c p. 249

1. $\log(351) = 2,54531$

$\log(35100) = 4,54531$

$\log(0,0351) = -1,45469$

$\log(35,1)^2 = 3,09062$

$\log\sqrt{0,351} = -0,227\,345$.

2. $1,54531 = \log 35,1$

$0,45469 = \log \dfrac{1}{0,351}$

$3,54531 = \log 3510$

$0,06059 = \log(3,51)^{\frac{1}{9}}$.

Exercices d'apprentissage

PRIMITIVES

De l'exercice n°1 à l'exercice n°10, C désigne une constante réelle.

♦ Exercice 1 p. 250

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + 7x + \mathrm{C}$

b) $\forall x \in\ ]0\,;+\infty[,\ \mathrm{F}(x) = \frac{5x^2}{2} - 2x - \frac{4}{x} + \mathrm{C}$

c) $\forall x \in\ ]0\,;+\infty[,\ \mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{2} + 4\sqrt{x} + \mathrm{C}$

d) $\forall x \in\ ]0\,;+\infty[,\ \mathrm{F}(x) = \sin x + 5\cos x + \mathrm{C}$

e) $\forall x \in\ ]0\,;+\infty[,\ \mathrm{F}(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x} + \mathrm{C}$

f) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = -2\cos\frac{x}{2} - \frac{5}{4}\sin 4x + \mathrm{C}.$

♦ Exercice 2 p. 250

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + x + \mathrm{C}$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - x + \mathrm{C}$

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \mathrm{C}$

d) $\forall x \in\ ]0\,;+\infty\,[,\ \mathrm{F}(x) = 4\sqrt{x} - x + \mathrm{C}.$

♦ Exercice 3 p. 250

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = -\frac{1}{4}(2-3x)^4 + \mathrm{C}$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = -\frac{1}{2}(x^2+x+1)^2 + \mathrm{C}$

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = -\frac{1}{12}(x^4-5) + \mathrm{C}$

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = -\frac{1}{2}(x^2-1)^4 + \mathrm{C}.$

♦ Exercice 4 p. 250

a) $\forall x \in\ ]-\frac{1}{3}\,;1[,\ \mathrm{F}(x) = \frac{-1}{2(3x^2-2x-1)} + \mathrm{C}$

b) $\forall x \in\ ]-1\,;+\infty[,\ \mathrm{F}(x) = \frac{-2}{3(1+x)^3} + \mathrm{C}$

c) $\forall x \in\ ]0\,;+\infty[,\ \mathrm{F}(x) = \frac{-2}{\sqrt{x}+1} + \mathrm{C}$

d) $\forall x \in\ ]-\infty\,;0[,\ \mathrm{F}(x) = \frac{-1}{4(x^3+2x)^2} + \mathrm{C}.$

♦ Exercice 5 p. 250

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = 2\sqrt{x^2+1} + \mathrm{C}$

b) $\forall x \in\ ]3\,;+\infty[,\ \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2-4x-6} + \mathrm{C}$

c) $\forall x \in\ ]-1\,;1[,\ \mathrm{F}(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + \mathrm{C}$

d) $\forall x \in\ ]\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty[,\ \mathrm{F}(x) = \frac{-2}{\sqrt{x^2+3x+1}} +$

♦ Exercice 6 p. 250

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2}$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \frac{1}{6}\sin^6 x + 3$

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = -\cos x^2 + 3$

d) $\forall x \in\ ]0\,;\pi[,\ \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\ln(\tan\frac{x}{2}) + 3.$

♦ Exercice 7 p. 250

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = -\frac{1}{10}(\cos^2 x + 1)^5 + \mathrm{C}$

b) $\forall x \in\ ]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[,\ \mathrm{F}(x) = \frac{1}{6}\tan^6 x + \mathrm{C}$

c) $\forall x \in\ ]0\,;+\infty[,\ \mathrm{F}(x) = \cos\frac{1}{x} + \mathrm{C}$

d) $\forall x \in\ ]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[,\ \mathrm{F}(x) = -2\sqrt{\cos x} + \mathrm{C}.$

♦ Exercice 8 p. 250

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin 4x + 2\sin 2x + 3x) + \mathrm{C}$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = -\frac{1}{32}(\frac{1}{6}\sin 6x - \frac{3}{2}\sin 4x + \frac{15}{2}\sin 2x - 10x) + \mathrm{C}$

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \frac{1}{16}(-\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{5}{3}\cos 3x - 10\cos x) + \mathrm{C}$

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = -\frac{1}{16}(\frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x - 2\sin x) + \mathrm{C}$

e) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = -\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin 4x - x) + \mathrm{C}$

f) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \mathrm{C}.$

♦ Exercice 9 p. 250

1. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\},\ f(x) = x + 3 - \frac{4}{(x-2)^2}.$

2. $\forall x \in\ ]2\,;+\infty\,[,\ \mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{4}{x-2} + \mathrm{C}.$

♦ Exercice 10 p. 250

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$, $F(x) = \tan x + \frac{1}{\cos x} + C$.

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

♦ Exercice 12 p. 250

a) $\ln 2$ *b)* 0 *c)* 0 *d)* $2\ln 2$.

♦ Exercice 13 p. 250

1. $\ln\frac{1}{e} = -1$; $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$; $\ln e\sqrt{e} = \frac{3}{2}$; $\ln\frac{\sqrt{e}}{e} = -\frac{1}{2}$.

2. $\ln e^3 - \ln e^2 = 1$; $5\ln\frac{1}{e} + 4\ln e\sqrt{e} = 1$.

♦ Exercice 14 p. 250

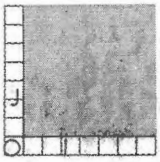
$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $\ln(1+x) = \ln[x(1+\frac{1}{x})] = \ln x + \ln(1+\frac{1}{x})$.

♦ Exercice 15 p. 250

a) $x < y$ *b)* $x < y$ *c)* $x > y$ *d)* $x > y$.

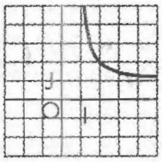
♦ Exercice 16 p. 250

a)



(E_1) est la partie hachurée du plan, privée des demi-droites [OI) et [OJ).

b) (E_2) est la branche d'hyperbole d'équation : $\begin{cases} y = \frac{x}{x-1} \\ x > 1. \end{cases}$



c) Soit (Δ_1) la demi-droite d'équation $y = x$ et $x \geq 0$;
(Δ_2) la demi-droite d'équation $y = \frac{x}{4}$ et $x \geq 0$.
(E_3) est la réunion de (Δ_1) et (Δ_2) privées du point O.

d) (E_4) est la réunion des hyperboles d'équations $y = \frac{1}{x}$ et $y = -\frac{1}{x}$.

♦ Exercice 17 p. 251

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Soit $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de ln et $(\mathscr{C}')$ celle de f.

a) On a : $(\mathscr{C}') = S_{(OI)}(\mathscr{C})$.

b) Soit $(\mathscr{C}_1)$ la représentation graphique de f sur $[1\,;+\infty[$ et $(\mathscr{C}_2)$ celle de f sur $]0\,;1]$.
On a : $(\mathscr{C}') = (\mathscr{C}_1) \cup S_{(OI)}(\mathscr{C}_2)$.

c) On a : $(\mathscr{C}') = t_{2\overrightarrow{OI}}(\mathscr{C})$.

d) Posons : $\vec{u} = \overrightarrow{OI} + 2\,\overrightarrow{OJ}$. On a : $(\mathscr{C}') = t_{\vec{u}}(\mathscr{C})$.

♦ Exercice 18 p. 251

a) $\mathbb{R}^*$ *b)* $]0\,;+\infty[$ *c)* $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ *d)* $]-1\,;2[$.

♦ Exercice 19 p. 251

a) $D_f =]-1\,;+\infty[$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $D_f =]-\infty\,;2[$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -\infty$.

c) $D_f =]-\infty\,;-1[\,\cup\,]2\,;+\infty[$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = -\infty$.

d) $D_f =]-1;\,2[$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$.

♦ Exercice 20 p. 251

a) $+\infty$ *b)* $\frac{1}{2}$ *c)* $\ln 3$ *d)* 0 *e)* 0 *f)* 0 *g)* 0 *h)* 1.

♦ Exercice 21 p. 251

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 1$ *b)* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ *c)* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ *e)* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ *f)* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$ *g)* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{3}{2}$ *h)* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$.

♦ Exercice 22 p. 251

a) $S = \{3\}$ *b)* $S = \{-1 ; 2\}$ *c)* $S = \{0\}$ *d)* $S = \{7\}$ *e)* $S = \{4\}$ *f)* $S = \{1\}$

g) $S = \{-3 - \sqrt{19} ; -3 + \sqrt{19}\}$ *h)* $S = \{\frac{-7 - \sqrt{85}}{6} ; \frac{-7 + \sqrt{85}}{6}\}$.

♦ Exercice 23 p. 251

a) $S = \{1\}$ *b)* $S = \{-5 ; 1\}$ *c)* $S = \{5\}$ *d)* $S = \varnothing$.

♦ Exercice 24 p. 251

a) $S = \{e ; e^{\frac{2}{3}}\}$ *b)* $S = \{\frac{1}{e} ; 4\}$ *c)* $S = \{e - 1 ; \frac{1}{e} - 1 ; e\sqrt[4]{e} - 1\}$ *d)* $S = \{e^{-2}\}$.

♦ Exercice 25 p. 251

a) $S =]e ; +\infty[$ *b)* $S =]-\infty ; \frac{2}{3}[$ *c)* $S =]-\frac{2}{3} ; 1[$ *d)* $S = [0 ; e^2]$

e) $S =]-\frac{1}{2} ; 2]$ *f)* $S = [3 ; +\infty[$ *g)* $S =]0 ; 1]$.

♦ Exercice 26 p. 251

a) $S = [e^{-2} ; e]$ *b)* $S =]0 ; \frac{1}{e}] \cup [e^3 ; +\infty[$ *c)* $S =]0 ; \frac{1}{e}[\cup [e^2 ; +\infty[$ *d)* $S =]0 ; \frac{1}{e}[\cup]1 ; e[$.

♦ Exercice 27 p. 251

a) $S = \{(9, 16) ; (16, 9)\}$ *b)* $S = \{(1 ; e - 1)\}$ *c)* $S = \{(32 ; 18)\}$ *d)* $S = \{(e^2 ; e^{-\frac{1}{3}})\}$.

FONCTION COMPORTANT LN

♦ Exercice 28 p. 251

a) $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 1 + \ln|x|$ *b)* $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$

c) $\forall x \in]1 ; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ *d)* $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}$

e) $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ *f)* $\forall x \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[, f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

g) $\forall x \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[, f'(x) = -\frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2}$ *h)* $\forall x \in]0 ; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e} ; +\infty[, f'(x) = \frac{-2}{x(1 + \ln x)^2}$.

♦ Exercice 29 p. 251

a) $\forall x \in]-\infty ; 0[, f'(x) = \frac{1}{x}$ *b)* $\forall x \in]-\frac{1}{2} ; +\infty[, f'(x) = \frac{2}{2x + 1}$

c) $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2x}$ *d)* $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{4x - 3}{2x^2 - 3x + 4}$

e) $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x}$ *f)* $\forall x \in]-\infty ; -1[, f'(x) = \frac{-3}{(x - 2)(x + 1)}$

g) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-4 ; 2\}, f'(x) = \frac{6}{(x - 4)(x - 2)}$ *h)* $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{-\sin(\ln x)}{x}$.

♦ Exercice 30 p. 251

a) Les restrictions de f à $]-\infty ; 1[$ et $]2 ; +\infty[$ sont respectivement continues sur ces intervalles. De plus : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0 = f(1)$; donc, f est continue en 1. Par suite, f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) $\forall x \in]-\infty ; 1[, f'(x) = (x - 1)^2$; donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$; c'est-à-dire : $f_g'(1) = 0$.

La fonction f est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et a pour dérivée la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$; donc : $f'_d(1) = 1$.

On a : $f'_g(1) \neq f'_d(1)$; donc, I est un un point anguleux de la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f.

♦ Exercice 31 p. 251

a) Les restrictions de g à $]-\infty\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ +\infty[$ sont des fonctions continues sur ces intervalles.
De plus : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1 = g(0)$; donc, g est continue en 1. Par suite g est continue sur $\mathbb{R}$.

b) On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} (3x + 2) = 2$; c'est-à-dire : $g'_g(0) = 2$.

g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et a pour dérivée : $x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x = 1}$; donc : $g'_d(0) = 2$.

Par suite, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 2$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

♦ Exercice 32 p. 252

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C\ (C \in \mathbb{R})$

b) $\forall x \in]-2\ ;\ 2[$, $F(x) = \ln(4 - x^2) + C\ (C \in \mathbb{R})$

c) $\forall x \in]-\infty\ ;\ -2[$, $F(x) = 2x + \ln(-x-2) - \dfrac{3}{x+2} + C\ (C \in \mathbb{R})$

d) $\forall x \in]-\infty\ ;\ -1[$, $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - \ln(-x-1) + \dfrac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C\ (C \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 33 p. 252

a) $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $F(x) = \dfrac{1}{2} \ln^2 x + C\ (C \in \mathbb{R})$

b) $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $F(x) = \ln|\ln x| + C\ (C \in \mathbb{R})$

c) $\forall x \in]0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$, $F(x) = \ln(\sin x) + C\ (C \in \mathbb{R})$

d) $\forall x \in]\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$, $F(x) = \ln(\sin x - \cos x) + C\ (C \in \mathbb{R})$

e) $\forall x \in]0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$, $F(x) = \ln(\tan x) + C\ (C \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 34 p. 252

a) $\forall x \in]2\ ;\ +\infty[$, $F(x) = x + 2\ln(x - 2)$
b) $\forall x \in]2\ ;\ +\infty[$, $F(x) = -2x - 3\ln(x-2)$
c) $\forall x \in]2\ ;\ +\infty[$, $F(x) = -x - \ln(x - 2)$
d) $\forall x \in]2\ ;\ +\infty[$, $F(x) = -3x - 6\ln(x-2)$.

♦ Exercice 35 p. 252

1\. $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\ ;\ \frac{1}{2}\}$, $f(x) = 1 - \dfrac{2}{2x+1} - \dfrac{1}{x+1}$.

2\. $\forall x \in]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty[$, $F(x) = x - \ln(2x + 1) - \ln(x + 1) + C\ (C \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 36 p. 252

1\. $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{1}{(x-3)^2}$.

2\. $\forall x \in]-\infty\ ;\ 3[$, $F(x) = x + 2\ln(3 - x) + \dfrac{1}{x+3} + 4$.

♦ Exercice 37 p. 252

1\. $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $f(x) = \dfrac{-1}{x-1} + \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

2\. $\forall x \in]-\infty\ ;\ 1[$, $F(x) = -\ln(1 - x) + \ln(x^2 + x + 1)$.

♦ Exercice 38 p. 252

$F(x) + G(x) = x + C\ (C \in \mathbb{R})$; $F(x) - G(x) = \ln(\cos x + \sin x) + C\ (C \in \mathbb{R})$.

$F(x) = \dfrac{1}{2}[x + \ln(\cos x + \sin x)] + K\ (K \in \mathbb{R})$; $G(x) = \dfrac{1}{2}[x - \ln(\cos x + \sin x)] + K'\ (K' \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 39 p. 252

La fonction $x \mapsto x\ln x$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et a pour dérivée la fonction $x \mapsto \ln x + 1$.
Donc, une primitive de la fonction ln sur $]0\ ;\ +\infty[$ est la fonction : $x \mapsto x\ln x - x$.

♦ Exercice 40 p. 252

a) $D_f =]0\ ;\ +\infty[$.

Étude aux bornes de D_f

- On a : $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}(1 - x + 2x\ln x)$; donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$.

On en déduit que la droite (OJ) est asymptote à ($\mathscr{C}$).

- On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; donc ($\mathscr{C}$) admet une branche parabolique dans la direction de (OI).

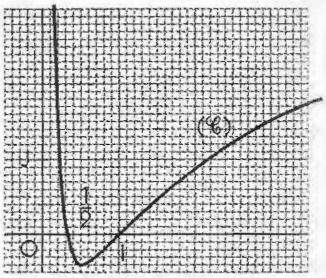
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{2x-1}{x}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$1 - 2\ln 2$	↗	$+\infty$

Courbe représentative



b) $D_f =]0\,;e^2[\cup]e^2\,;+\infty[$

Études aux bornes de D_f

- On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, donc la droite ($\Delta$) d'équation $y = 1$ est asymptote à ($\mathscr{C}$).
- On a : $\lim\limits_{\substack{x \to e^2 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to e^2 \\ >}} f(x) = -\infty$; donc, la droite ($\mathscr{D}$) d'équation $x = e^2$ est asymptote à ($\mathscr{C}$).

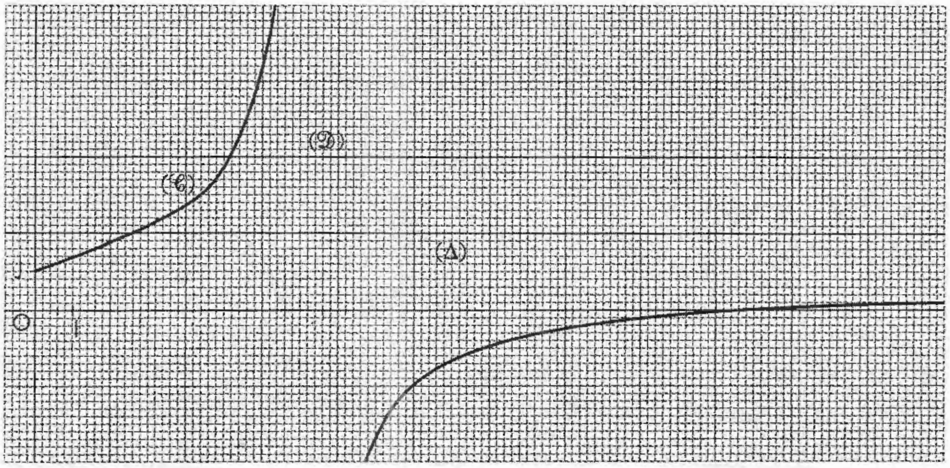
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{1}{x(2 - \ln x)^2}$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ 1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

Courbe représentative



c) $D_f =]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

Étude aux bornes de D_f

- On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$;

donc, la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est asymptote à ($\mathscr{C}$).

- On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; donc, la droite (OI) est asymptote à ($\mathscr{C}$).

Sens de variation

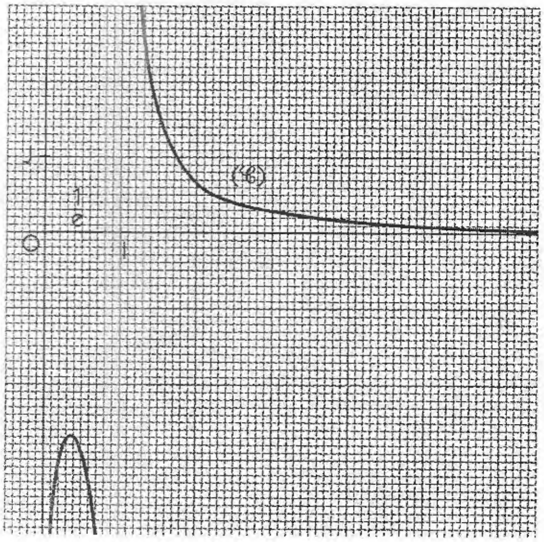
La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{(x\ln x)^2}$.

On en déduit, ci dessous, le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{1}{e}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-e$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

d) $D_f =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.
La fonction f est paire ; donc, l'étude peut se restreindre à $]0\,;+\infty[$.

Courbe représentative



Étude aux bornes de]0 ; + ∞[.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$; donc, la droite (OJ) est asymptote à (𝒞).

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\dfrac{\ln x}{x} = 0$; donc, (𝒞) admet une branche parabolique dans la direction de (OI).

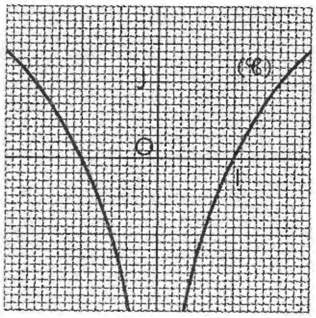
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction : $x \mapsto \dfrac{2}{x}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Courbe représentative



♦ Exercice 41 p. 252

1. On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$; donc f est continue en 0.

2. On a : $D_f = \mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -x\ln|x| = -f(x)$; donc, la fonction f est impaire.

3. On restreint l'étude de f à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
On a : $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) = x\ln x$ et $f(0) = 0$.
On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
Donc, (𝒞) admet une branche parabolique dans la direction de (OJ).

Sens de variation

La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sa dérivée est la fonction : $x \mapsto \ln x + 1$.

Dérivabilité en 0

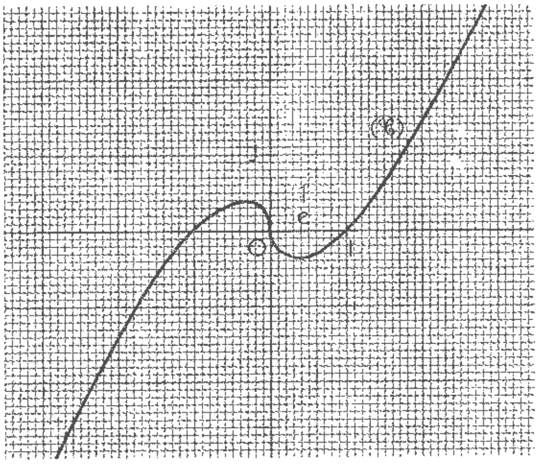
On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$;

donc, f admet en 0 une demi tangente verticale.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

Courbe représentative



◆ **Exercice 42 p. 252**

1. On a : $D_f =]-1\ ;\ 3[$.

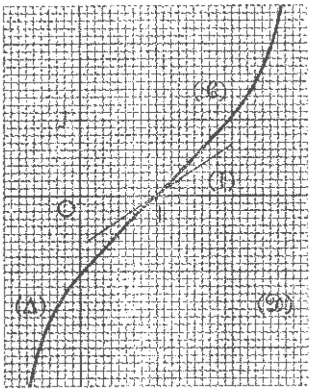
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$; donc, la droite (Δ) d'équation $x = -1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = +\infty$; donc, la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $x = 3$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

La fonction f est dérivable sur $]-1\ ;\ 3[$ et sa dérivée est la fonction $f' = x \mapsto \dfrac{4}{(x+1)(3-x)}$.

On en déduit le tableau de variation de f, puis sa courbe représentative $(\mathscr{C})$

x	-1		3
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖



2. *a)* f est continue et strictement croissante sur $]-1\ ;\ 3[$; de plus : $f(]-1\ ;\ 3[) = \mathbb{R}$.

Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.

Or : $f(1) = 0$; donc, $(\mathscr{C})$ coupe l'axe (OI) au point $\Omega = I$.

b) Soit $h \in \mathbb{R}$.

On a : $-1 < 1 + h < 3 \Rightarrow -1 < 1 - h < 3$; donc, le point $\Omega(1\ ;\ 0)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

c) $(T) : y = x - 1$.

3. $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3e - 1}{e + 1}$. Or : $\dfrac{3e - 1}{e + 1} \approx 1{,}92$; donc : $1{,}9 < x < 2$.

(T) est au-dessous de $(\mathscr{C})$ sur $[1\ ;\ 3[$, donc : $S = [1\ ;\ 3[$.

◆ **Exercice 43 p. 252**

1. *a)* $D = \mathbb{R}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} > |x|$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x + |x|$.

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x + |x| \geq 0$; donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.

2. *Étude aux bornes de* $\mathbb{R}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 0$.

Donc, la doite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 2x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = 0$; donc, la droite (OI) est asymptote à $(\mathscr{C})$.

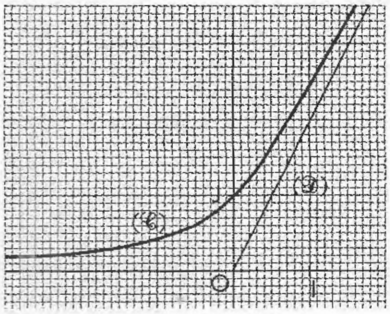
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

On en déduit ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative



3. *a)* $S = \{2\sqrt{2}\}$.

b) $D_g = \mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$;

$$g(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) = \ln \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = -g(x).$$

Donc, g est une fonction impaire.

c) On restreint l'étude de g à $[0 ; +\infty[$.

$g(0) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$. Donc, $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique dans la direction de (OI).

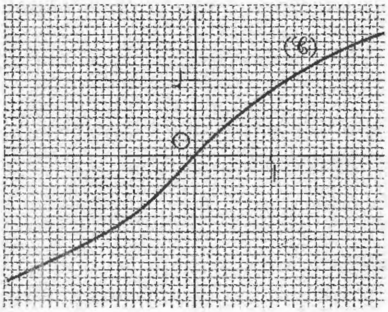
Sens de variation

La fonction g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de g.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	1	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative



d) g est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; de plus, $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Donc, g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On vérifie que : $\forall n \in \mathbb{Z}, g\left(\dfrac{e^n - e^{-n}}{2}\right) = n$.

Approfondissement

◆ **Exercice 44 p. 252**

1\. Soit : $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x}$, $(a_0 \neq 0, m \geq 2, n \geq 1)$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty \Rightarrow a_0 < 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} xf(x) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2\. On sait que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \ln x = 0$.

Donc, d'après la question précédente, ln n'est pas la restriction à $]0 ; +\infty[$ d'une fonction rationnelle.

◆ **Exercice 45 p. 252**

1\. On a : $D_f =]-\frac{1}{b} ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction

$f' : x \mapsto \dfrac{a(bx+1)\ln(bx+1) - b(ax+1)\ln(ax+1)}{(ax+1)(bx+1)\ln^2(bx+1)}$.

2\. $g(x) = a(bx+1)\ln(bx+1) - b(ax+1)\ln(ax+1)$.

La fonction g est dérivable sur $]-\frac{1}{b}\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto ab[\ln(bx+1) - \ln(ax+1)]$.

x	$-\frac{1}{b}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	0	↗	
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{a}{b}$ $\frac{a}{b}$	↗	1

On en déduit que : $\forall x \in]-\frac{1}{b}\,;0[,\ g'(x) < 0$;

$g(0) = 0$;

$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ g'(x) > 0$.

On a : $\forall x \in D_f,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{(ax+1)(bx+1)\ln^2(bx+1)}$.

Le tableau ci-contre permet de déterminer le sens de variation de f.

f est strictement croissante sur $]-\frac{1}{b}\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

3. On a : $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

f étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a : $f(\frac{1}{b}) < f(\frac{1}{a})$;

donc : $\ln(\frac{a}{b}+1) \times \ln(\frac{b}{a}+1) < (\ln 2)^2$.

♦ Exercice 46 p. 253

1. *a)* $f_a(1) = 0$; $f_a(a) = 1$; $\forall n \in \mathbb{Z},\ f_a(a^n) = n$.

b) et *c)* Les vérifications sont immédiates.

2. *a)* On a : $D_{f_a} =]0\,;+\infty[$.

1er cas : $0 < a < 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_a(x) = +\infty$; donc, (OJ) est asymptote à $(\mathscr{C}_a)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_a(x)}{x} = 0$; $(\mathscr{C}_a)$ admet nne branche parabolique dans la direction de (OI).

La fonction f_a est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f'_a : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln a}$.

On en déduit, ci contre, le tableau de variation de f_a.

x	0		$+\infty$
$f_a'(x)$	‖	$-$	
$f_a(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

2^e cas : $a > 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_a(x) = -\infty$; donc, (OJ) est asymptote à $(\mathscr{C}_a)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_a(x)}{x} = 0$; donc $(\mathscr{C}_a)$ admet une branche parabolique dans la direction de (OI).

La fonction f_a est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f'_a : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln a}$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation f_a.

x	0		$+\infty$
$f_a'(x)$	‖	$+$	
$f_a(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

b) • Pour $0 < a < 1$, f_a est continue et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$;
donc f_a est une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $f(]0\,;+\infty[) = \mathbb{R}$.

• Pour $a > 1$, f_a est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$;
donc, f_a est une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

c) On a bien : $f_{\frac{1}{a}} = -f_a$; donc, les courbes $(\mathscr{C}_a)$ et $(\mathscr{C}_{\frac{1}{a}})$ sont symétriques par rapport à (OI).

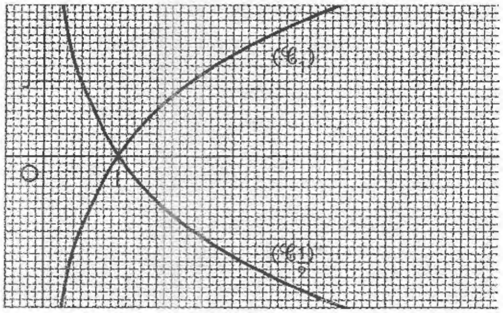
3. On trace $(\mathscr{C}_2)$ et on en déduit $(\mathscr{C}_{\frac{1}{2}})$ en utilisant la symétrie d'axe (OI).

Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$f_2'(x)$	‖	$+$	
$f_2(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

- Asymptote : (OJ)
- Branche parabolique dans la direction de (OI)

Courbe représentative



♦ Exercice 47 p. 253

1. On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_k(x) = \lim\limits_{x \to 0} (kx - x\ln x) = 0 = f_k(0)$; donc, f_k est continue en 0.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f_k(x) - f_k(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (k - \ln x) = +\infty$; donc, f_k n'est pas dérivable en 0.

La courbe $(\mathscr{C}_k)$ admet au point 0 une demi-tangente verticale.

2. *a)* (T_k) : $y = (k - 1 - \ln a)\,x + a$.

b) (T_k) et (OJ) se coupent au point B(0 ; a).

c) Lorsque k décrit $\mathbb{Z}$, les tangentes (T_k) sont concourantes au point B.

3. *a)* ***Étude aux bornes de [0 ; +∞[***

On a : $f_k(0) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_k(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (k - \ln x) = -\infty$.

$(\mathscr{C}_k)$ admet une branche parabolique dans la direction de (OJ).

Sens de variation

La fonction f_k est dérivable sur]0 ; +∞[et sa dérivée est la fonction $f'_k : x \mapsto k - 1 - \ln x$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f_k.

x	0		e^{k-1}		$+\infty$
$f_k'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	‖ 0	↗	e^{k-1}	↘	$-\infty$

b)

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_0(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$-\infty$

x	0	$\frac{1}{e}$	1	e
y	0	$\frac{1}{e}$	1	e

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

x	0	1	e	e^2
y	0	1	0	$-e^2$

x	0		e		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	0	↗	e	↘	$-\infty$

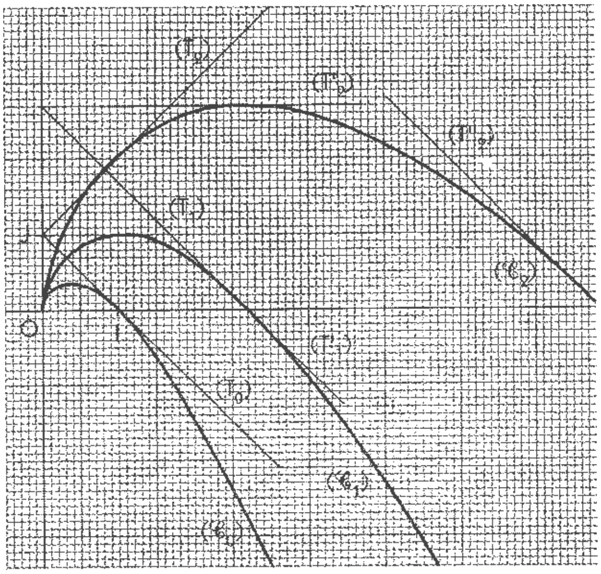
x	0	1	e	e^2
y	0	2	e	0

Chacune des courbes a :
– une demi-tangente verticale en 0 ;
– une branche parabolique dans la direction de (OJ).

4. • Pour $a = 1$, on a $(T_k) : y = (k - 1)x + 1$.
On en déduit $(T_0) : y = -x + 1$;
$(T_1) : y = 1$ et $(T_2) : y = x + 1$.
Les droites (T_0), (T_1) et (T_2) sont concourantes en J.

• Pour $a = \mathrm{e}$, on a $(T'_k) : y = (k - 2)x + \mathrm{e}$.
On en déduit $(T'_1) : y = -x + \mathrm{e}$ et $(T'_2) : y = \mathrm{e}$.
Les droites (T'_1) et (T'_2) sont sécantes en C(0 ; e).

• Pour $a = \mathrm{e}^2$, on a $(T''_k) : y = (k - 3)x + \mathrm{e}^2$.
On en déduit $(T''_2) : y = -x + \mathrm{e}^2$
Les courbes (T''_2) et (OJ) sont sécantes en $D(0 ; \mathrm{e}^2)$.



♦ Exercice 48 p. 253

1. On a : $D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 3[\cup]3 ; +\infty[$.

Étude aux bornes de D_f

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$; donc, la droite (Δ) d'équation $x = -1$ est asymptote à (𝒞).

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty$; donc, la droite (Δ') d'équation $x = 3$ est asymptote à (𝒞).

Sens de variation de f

La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{(x + 3)(x - 5)}{2(x - 3)(x + 1)}$.

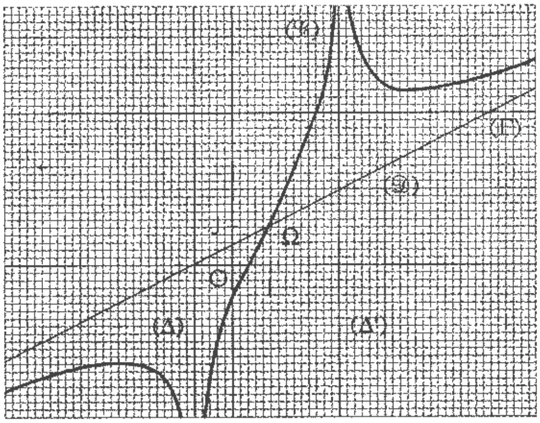
On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-3		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	+	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	α	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	β	↗	$+\infty$

$\alpha \approx -2{,}6$ et $\beta \approx 4{,}6$.

2. *a)* Ω(1 ; 1) est un point d'inflexion de (𝒞).
On vérifie que Ω est un centre de symétrie de (𝒞).
b) La droite (𝒟) d'équation $y = \frac{1}{2}(x + 1)$ est asymptote à (𝒞) et $\Omega \in (\mathscr{D})$.

c)



♦ Exercice 49 p. 253

1. On a : $D_f =]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

Étude aux bornes de D_f

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$; donc, (OJ) est asymptote à (𝒞).

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$; donc, la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est asymptote à (𝒞).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$; donc, (𝒞) admet une branche parabolique dans la direction de (OI).

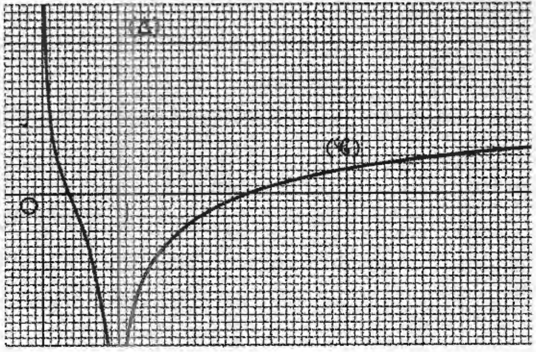
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Courbe représentative



2. *a)* La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0\,;1[$; donc f est une bijection de $]0\,;1[$ sur $f(]0\,;1[) = \mathbb{R}$. De même, f est une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi : $\forall\, m \in \mathbb{R}, \exists\, x_1 \in\,]0\,;1[\ /\ \ln|\ln x_1| = m\ ; \exists\, x_2 \in\,]1\,;+\infty[\ /\ \ln|\ln x_2| = m$.

L'équation $\ln|\ln x| = m$ admet deux solutions x_1 et x_2.

b) On a : $\ln|\ln x_1| = \ln|\ln x_2| \Leftrightarrow |\ln x_1| = |\ln x_2| \Leftrightarrow \ln x_1 = \ln x_2$ ou $\ln x_1 = -\ln x_2$.

Or : $x_1 \neq x_2$; donc : $\ln x_1 = -\ln x_2 = \ln \frac{1}{x_2}$. On en déduit que : $x_1 = \frac{1}{x_2}$; ou : $x_1 x_2 = 1$.

♦ Exercice 50 p. 253

1. *a)* ***Continuité en 1***

On a : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$; donc f est continue en 1.

Dérivabilité en 1

- f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$.
- f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

b) $D_f =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

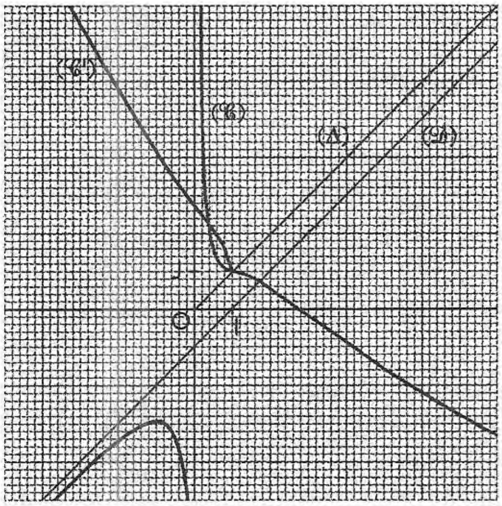
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x + 1] = 0$; donc, la droite (𝒟) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (𝒞).
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\text{llim}\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$; donc, la droite (OJ) est asymptote à (𝒞).
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; donc, (𝒞) admet une branche parabolique dans la direction de (OI).

c) f est dérivable sur $]-\infty\,;1]$ et sa dérivée est la fonction : $x \mapsto \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$.

f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction : $x \mapsto \frac{-2\ln x}{x}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↘	$-\infty$



A(e ; 0) est un point d'inflexion de (𝒞).

2. *a)* La fonction h est continue et strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$; donc h est une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur $h(]1\,;+\infty[) =]-\infty\,;1[$.

b) On en déduit que h admet une réciproque h^{-1} strictement décroissante sur $]-\infty\,;1[$.
Désignons par (𝒞') la courbe représentative de h^{-1}. Les courbes (𝒞) et (𝒞') sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation : $y = x$.

♦ Exercice 51 p. 253

1. *Étude de f_{-1}*

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $f_{-1}(x) = 0$; donc, $(\mathscr{C}_{-1})$ est la droite (OI) privée du point A(− 1 ; 0).

Étude de f_1

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $f_1(x) = 0$; donc, $(\mathscr{C}_1)$ est la droite (OI) privée du point I.

Étude de f_0

$f_0(x) = -\ln x$. $D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

f_0 est une fonction paire ; donc, l'étude de f_0 peut se restreindre à $]0 ; +\infty[$.

On complétera la courbe en utilisant la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

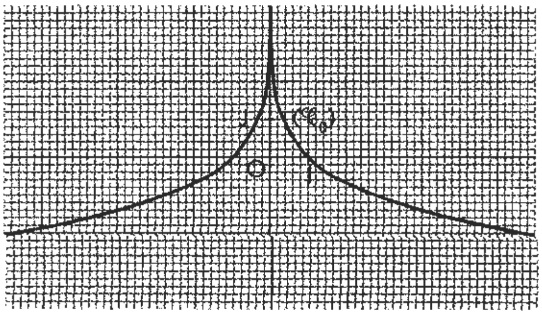
On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_0(x) = +\infty$; donc, (OJ) est asymptote à $(\mathscr{C}_0)$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = 0$; donc, $(\mathscr{C}_0)$ admet une branche parabolique dans la direction de (OI).

La fonction f_0 est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f'_0 : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f_0, puis la courbe représentative $(\mathscr{C}_0)$ de f_0.

x	0		$+\infty$
$f_0'(x)$	‖	$-$	
$f_0(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$



2. *a)* f_m est définie, continue et dérivable sur l'ensemble : $D_m = \mathbb{R} - \{-m ; -\frac{1}{m}\}$.
b) Les courbes $(\mathscr{C}_m)$ passent par les points I et A(− 1 ; 0).

3. *a)* Les courbes $(\mathscr{C}_m)$ et $(\mathscr{C}_{\frac{1}{m}})$ sont symétriques par rapport à la droite (OI).
b) Les courbes $(\mathscr{C}_m)$ et $(\mathscr{C}_{-m})$ sont symétriques par rapport à (OJ).
c) • Si $m < -1$, alors : $-m > 1$.
On trace : $(\mathscr{C}_{-m})$ et $(\mathscr{C}_m) = S_{(OJ)}(\mathscr{C}_{-m})$.

• Si $-1 < m < 0$, alors : $0 < -m < 1$ et $-\frac{1}{m} > 1$.
On trace : $(\mathscr{C}_{-\frac{1}{m}})$, $(\mathscr{C}_{\frac{1}{m}}) = S_{(OJ)}(\mathscr{C}_{\frac{1}{m}})$ et $(\mathscr{C}_m) = S_{(OI)}(\mathscr{C}_{\frac{1}{m}}) = S_0(\mathscr{C}_{-\frac{1}{m}})$.

• Si $0 < m < 1$, alors : $\frac{1}{m} > 1$.
On trace : $(\mathscr{C}_{\frac{1}{m}})$ et $(\mathscr{C}_m) = S_{(OI)}(\mathscr{C}_{\frac{1}{m}})$.

4. On suppose : $m > 1$.
On a : $m > 1 \Rightarrow -\frac{1}{m} > -m$. $D_m =]-\infty ; -m[\cup]-m ; -\frac{1}{m}[\cup]-\frac{1}{m} ; +\infty[$.

a) ***Étude aux bornes de D_m***

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} f_m(x) = \ln|m|$; donc, la droite $(\mathscr{D}_m)$ d'équation $y = \ln|m|$ est asymptote à $(\mathscr{C}_m)$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -m \\ <}} f_m(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -m \\ >}} f_m(x) = +\infty$; donc, la droite (Δ_m) d'équation $x = -m$ est asymptote à $(\mathscr{C}_m)$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{m} \\ <}} f_m(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{m} \\ >}} f_m(x) = -\infty$; donc, la droite (Δ'_m) d'équation $x = -\dfrac{1}{m}$ est asymptote à $(\mathscr{C}_m)$.

Sens de variation

La fonction f_m est dérivable sur D_m et sa dérivée est la fonction $f'_m : x \mapsto \dfrac{m^2 - 1}{(x + m)(mx + 1)}$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f_m.

x	$-\infty$		$-m$		$-\frac{1}{m}$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$-$	
$f_m(x)$	$\ln(m)$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\ln(m)$

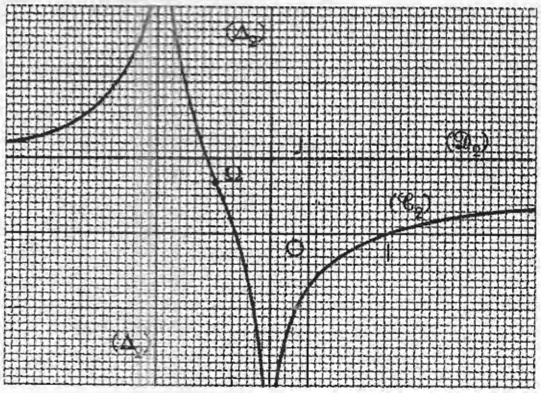
b) $(\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}) = S_{(OI)}(\mathscr{C}_2)$; $(\mathscr{C}_{-2}) = S_{(OJ)}(\mathscr{C}_2)$.

Centre de symétrie

Soit Ω le point d'intersection de $(\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

On obtient : $\Omega\left(-\frac{5}{4} ; \ln 2\right)$.

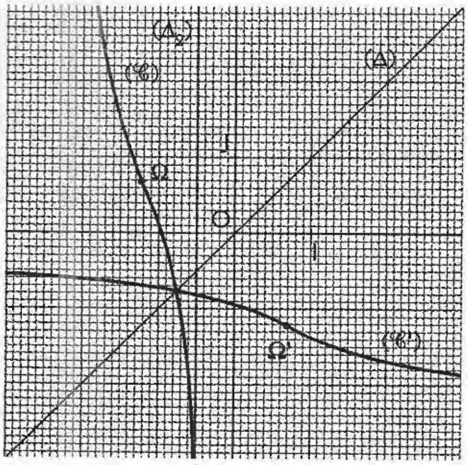
Ω est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_2)$.



c) g est continue et strictement décroissante sur $\left]-2 ; -\frac{1}{2}\right[$.
Donc, g est une bijection de $\left]-2 ; -\frac{1}{2}\right[$ sur $g\left(\left]-2 ; -\frac{1}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.

Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ les représentations graphiques respectives des fonctions g et g^{-1}.

$(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.



♦ Exercice 52 p. 254

1. *a)* On a : $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

Étude aux bornes de D_f

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$. La droite (Δ) d'équation $x = 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

On a : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique dans la direction de (OI).

Sens de variation

La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{x-2}{(x-1)^2}$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

b) $f(0) = 0$; donc :
f est positive sur $]-\infty ; 0]$ et $]1 ; +\infty[$; f est négative sur $[0 ; 1[$.

2. *a)* On a : $D_g =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

Étude aux bornes de D_g

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Donc, $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique dans la direction de (OJ).

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$; donc, la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x = 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

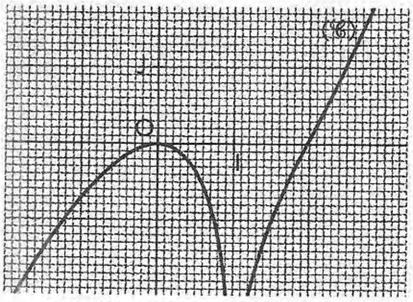
Sens de variation

La fonction g est dérivable sur D_g et sa dérivée est la fonction f.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de g.

b) A(2 ; 0) est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$.

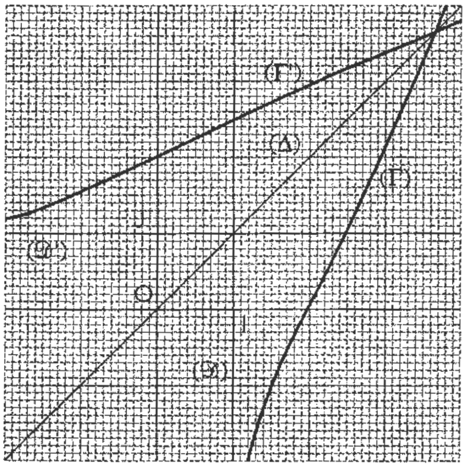
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



3. La fonction h est continue et strictement croissante sur $]1\ ;+\infty[$; donc, h est une bijection de $]1\ ;+\infty[$ sur $h(]1\ ;+\infty[) = \mathbb{R}$.

Soit (Γ) et (Γ') les représentations graphiques respectives de h et h^{-1}.

(Γ) et (Γ') sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.



♦ Exercice 54 p. 254

1. *a)* $D_m =]0\ ;1[\cup]1\ ;+\infty[$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_m(x) = -\infty$; donc, (OJ) est asymptote à $(\mathscr{C}_m)$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f_m(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f_m(x) = +\infty$; donc, la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est asymptote à $(\mathscr{C}_m)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_m(x)}{x} = +\infty = 0$; donc $(\mathscr{C}_m)$ admet une branche parabolique dans la direction de (OI).

b) La fonction f_m est dérivable sur D_m et sa dérivée est la fonction $f'_m : x \mapsto \frac{\ln^2 x - m}{x \ln^2 x}$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan. M est un extremum de $(\mathscr{C}_m)$ si et seulement si $f'_m(x) = 0$.

Donc : $m = \ln^2 x$ et $y = \ln(x\ln^2 x) + \ln x = \ln x + \ln(\ln^2 x) + \ln x = 2\ln x + 2\ln|\ln x| = 2\ln(x|\ln x|)$.

c) Posons : $f(x) = 2\ln(x|\ln x|)$. On a : $D_f =]0\ ;1[\cup]1\ ;+\infty[$.

Étude aux bornes de D_f

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$; donc, la droite (OJ) est asymptotte à (Γ).

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$; donc, la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $x = 1$ est asymptote à (Γ).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; donc, (Γ) admet une branche parabolique dans la direction (OI).

Sens de variation

La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{2(\ln x + 1)}{x \ln x}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

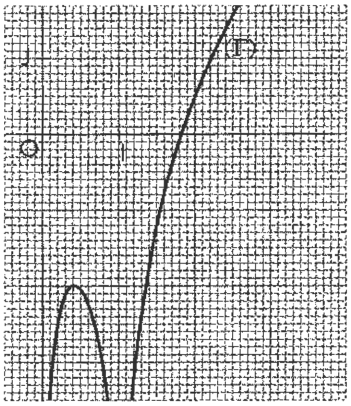
x	$-\infty$		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2. On suppose que : $m = 1$.

a) On utilise les résultats de la question 1.

$\forall x \in D_1, f'_1(x) = \frac{\ln^2 x - 1}{x \ln 2x}$.

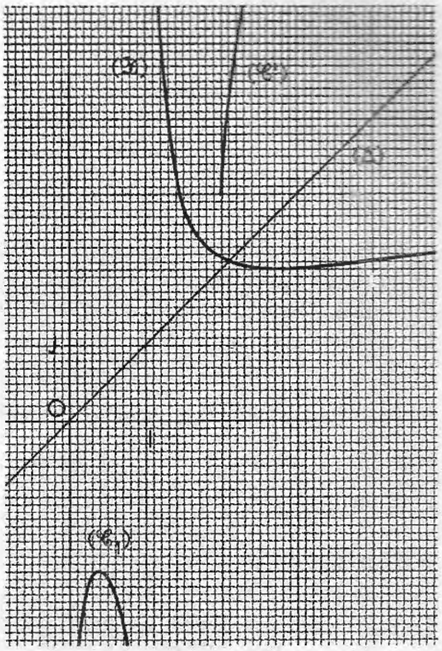
Courbe représentative



On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f_1.

x	0		$\frac{1}{e}$		1		e		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

- La droite (OJ) est asymptote à $(\mathscr{C}_1)$
- La droite (Δ) d'équation $x = 1$ est asymptote à $(\mathscr{C}_1)$.
- $(\mathscr{C}_1)$ admet une branche parabolique dans la direction de (OI).



b) g est une fonction continue et strictement croissante sur $[e\ ;+\infty[$; donc, g est une bijection de $[e\ ;+\infty[$ vers $g([e\ ;+\infty[) = [2\ ;+\infty[$.

Sa réciproque g^{-1} est une fonction continue et strictement croissante sur $[2\ ;+\infty[$.

Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les représentations graphiques respectives de g et g^{-1}. Les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation : $y = x$.

3. *a)* On a : $\forall\, x \in D_1$, $f''_1(x) = \dfrac{-\ln x(\ln^3 x - \ln x - 2)}{(x \ln^2 x)^2}$.

Donc, $(\mathscr{C}_1)$ admet un point d'inflexion dont l'abscisse α vérifie l'équation : $\ln^3 x - \ln x - 2 = 0$.

b) On trouve : $\alpha \approx 4{,}58$.

♦ Exercice 55 p. 254

1. *a)* Si $m > 0$, $D_m =]0\ ;+\infty[$; si $m < 0$, $D_m =]-\infty\ ;0[$.

b) **1er cas : $m > 0$**

On a : $-m < 0$.

$\forall\, x \in]0\ ;+\infty[$, $-x \in]-\infty\ ;0[$;

$f_{-m}(-x) = (-m)(-x) + 1 + \ln[(-m)(-x)] = mx + 1 + \ln(mx) = f_m(x)$.

Donc : $(\mathscr{C}_{-m}) = S_{(OJ)}(\mathscr{C}_m)$

2^e cas : $m < 0$

On a : $-m > 0$.

$\forall\, x \in]-\infty\ ;0[$, $-x \in]0\ ;+\infty[$ et $f_{-m}(-x) = f_m(x)$. Donc : $(\mathscr{C}_{-m}) = S_{(OJ)}(\mathscr{C}_m)$.

c) S i $m > 0$, on a : $D_m =]0\ ;+\infty[$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_m(x) = -\infty$; donc, la droite (OJ) est asymptote à $(\mathscr{C}_m)$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_m(x)}{x} = m$ et : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f_m(x) - mx] = +\infty$.

$(\mathscr{C}_m)$ admet une branche parabolique dans la direction de la droite $(\mathscr{D}_m)$ d'équation : $y = mx$.

2. *a)* On a : $\forall\, x \in]0\ ;+\infty[$, $f_2(x) = 2x + 1 + \ln(2x)$.

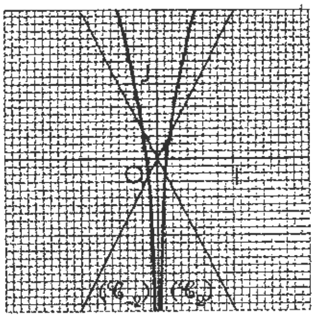
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_2(x) = -\infty$; donc, (OJ) est asymptote à $(\mathscr{C}_2)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty$. $(\mathscr{C}_2)$ admet une branche parabolique dans la direction de la droite (D_2) : $y = 2x$.

On a : $\forall\, x \in]0\ ;+\infty[$, $f_2'(x) = \dfrac{2x+1}{x}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f_2.

x	0		$+\infty$
$f_2'(x)$	‖	+	
$f_2(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



b) La fonction f_2 est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$; donc, f_2 est une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $f(]0\,;+\infty[) = \mathbb{R}$.
Par suite, l'équation $f_2(x) = 0$ admet une solution unique α.
On a : $\alpha \approx 0{,}14$.

c) On a vu que f_2 est une bijection de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
On a : $(\mathscr{C}_{-2}) = S_{(OJ)}(\mathscr{C}_2)$; donc, f_{-2} est une bijection de $]-\infty\,;0[$ vers $\mathbb{R}$.

Désignons par $(\mathscr{C}'_2)$ et $(\mathscr{C}'_{-2})$ les courbes représentatives respectives de f_2^{-1} et f_{-2}^{-1}, et par (Δ) la droite d'équation $y = x$. On a : $(\mathscr{C}'_2) = S_\Delta(\mathscr{C}_2)$; $(\mathscr{C}'_{-2}) = S_\Delta(\mathscr{C}_{-2}) = S_\Delta \circ S_{(OJ)}(\mathscr{C}_2)$.

◆ **Exercice 56 p. 254**

1. On a : $D_g =]0\,;+\infty[$.
La fonction g est dérivable sur D_g et sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto \dfrac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	−	0	+	
$g(x)$	‖	↘	1	↗	

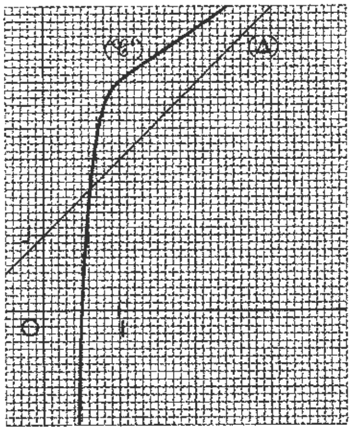
On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $3x^2 + 3x + 2 > 0$.
On en déduit ci-contre, le tableau de variation de g.
Donc : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[$, $g(x) \geq 1$. Par suite : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[$, $g(x) > 0$.

2. On a : $D_f =]0\,;+\infty[$.

Étude au bornes de D_f

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$; donc, la droite (OJ) est asymptote à $(\mathscr{C})$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$. Donc, la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.



Sens de variation.

La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{g(x)}{x^3}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3. f est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$; donc f est une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $f(]0\,;+\infty[) = \mathbb{R}$. Par suite, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β ; on a : $\beta \approx 0{,}46$.

4. On a : $D_h =]0\,;+\infty[$.

Étude aux bornes de $]0\,;+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} h(x) = -\infty$; donc , (OJ) est asymptote à la courbe (Γ) de h.

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [h(x) - x] = +\infty$; donc, (Γ) admet une branche parabolique dans la direction de la droite $(\mathscr{D})$ d'équation : $y = x$.

Sens de variation

La fonction h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est $h' : x \mapsto \dfrac{x+1}{x}$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de h.

x	0 $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

La fonction h est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$; donc, h est une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $f(\,]0\,;+\infty[\,) = \mathbb{R}$.

Par suite, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α.

Soit $M(x\,,y)$ un point du plan. $M \in (\Delta) \cap (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + 1 \end{cases}$; on a : $\alpha \approx 0{,}57$.

12. Fonctions exponentielles – Fonctions puissances

(pages 255 à 274 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- Introduire la fonction exponentielle et les fonctions puissances, et se familiariser avec leurs propriétés.
- Étudier la croissance comparée des fonctions logarihme, exponentielle et puissances.
- Étudier des fonctions construites à l'aide des fonctions exponentielles ou des fonctions puissances.

COMMENTAIRES

Les règles opératoires suivantes sont très pratiques :
« À l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x » ;
« À l'infini, les puissances de x l'emportent sur le logarithme de x ».

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Fonction exponentielle • Définition et propriétés : – définition ; – propriétés algébriques. • Étude de la fonction exponentielle : – sens de variation ; – dérivée ; – limites usuelles.	• Réduire des expressions comportant des exponentielles. • Résoudre une équation comportant des exponentielles. • Résoudre une inéquation comportant des exponentielles. • Retrouver, à l'aide de sa représentation graphique, les propriétés analytiques de la fonction exponentielle. • Utiliser les limites de la fonction ln pour déterminer des limites de fonctions.
Fonctions comportant exp. • Dérivée de la fonction exp$u$.	• Étudier la composée d'une fonction avec la fonction exponentielle népérienne.
• Primitive de la fonction $u'\mathrm{e}^u$.	• Déterminer les primitives d'une fonction de la forme $u'\mathrm{e}^u$.
Fonctions puissances • Étude des fonctions puissances : – fonction $x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$; – fonction u^α $(\alpha \in \mathbb{R})$, où $u > 0$ sur K. • Croissance comparée de $\ln x$, e^x et x^α.	• Étudier une fonction du type : $x \mapsto x^\alpha$. • Étudier une fonction du type : u^α. • Étudier la croissance comparée de $\ln x$, e^x et x^α. • Résoudre une équation ou une inéquation comportant des puissances.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 259

a) $\frac{2}{3\mathrm{e}}$ *b)* $\frac{x+1}{x-2}$ *c)* e^{x^2-x-6} *d)* $\frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}}{2}$.

♦ Exercice 1.b p. 259

a) $S = \{0\}$ *b)* $S = \{0\}$ *c)* $S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}\right\}$ *d)* $S = \{\ln 2\}$.

♦ Exercice 1.c p. 259

a) $S =]\ln 3 ; +\infty[$ *b)* $S =]\,0 ; +\infty\,[$ *c)* $S =]-\infty ; \ln 2\,]$ *d)* $S = [0 ; +\infty[$.

♦ Exercice 1.d p. 259

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *b)* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

♦ Exercice 2.a p. 265

a) $f'(x) = (-6x + 11)\,e^{-3x}$ *b)* $f'(x) = (2x^2 + 4x + 3)e^{x^2+2x}$

c) $f'(x) = 2\left[\ln(x^2 + 1) + \dfrac{x}{x^2+1}\right]e^{2x}$ *d)* $f'(x) = \dfrac{(-2x+1)\,e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}$.

♦ Exercice 2.b p. 265

a) $F(x) = e^{x^2-3x}$ *b)* $F(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^{x^2+2x}}$ *c)* $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(e^{2x} + 2)$ *d)* $F(x) = -e^{\frac{1}{x}}$.

♦ Exercice 2.c p. 265

a) $f(x) = x\,e^x$. On a : $D_f = \mathbb{R}$.

Étude aux bornes de $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; donc la droite (OI) est asymptote à $(\mathscr{C})$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$;

donc $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique dans la direction de (OJ).

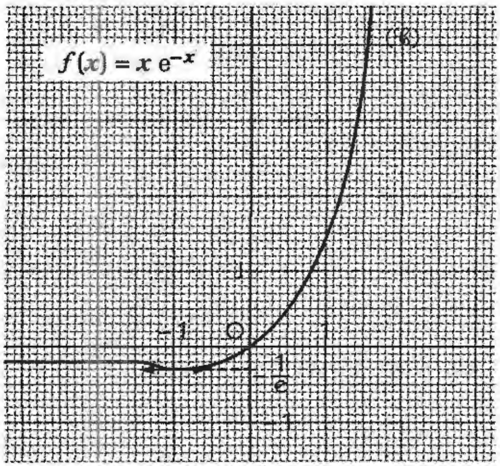
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée la fonction $f' : x \mapsto (x+1)\,e^x$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

Courbe représentative



d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$. On a : $D_f =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

Étude aux bornes de D_f

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; donc (OI) est asymptote à $(\mathscr{C})$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$;

donc $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique dans la direction de (OJ).

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$;

donc (OJ) est asymptote à $(\mathscr{C})$.

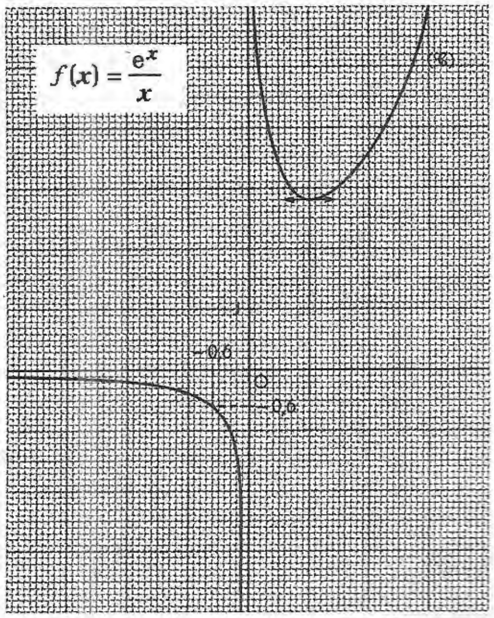
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{(x-1)\,e^x}{x^2}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Courbe représentative



♦ Exercice 2.d p. 265

a) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. On a : $D_f = \mathbb{R}$.

f est une fonction impaire ; donc l'étude se fera sur $[0\ ;+\infty[$.

***Étude aux bornes de* [0 ; + ∞[**

$f(0) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$;

donc $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique dans la direction de (OJ).

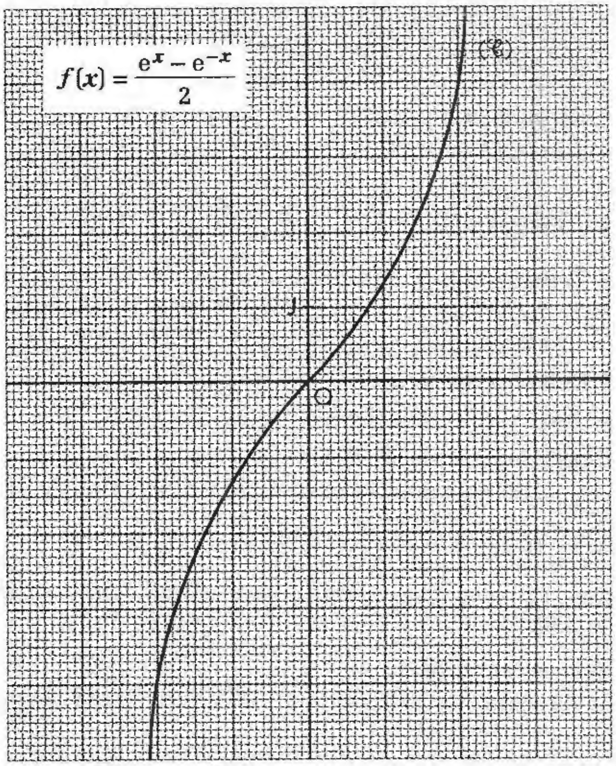
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	1	+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

Courbe représentative



b) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. On a : $D_f = \mathbb{R}$.

f est une fonction impaire ; donc l'étude se fera sur $[0\ ;+\infty[$.

***Étude aux bornes de* [0 ; + ∞[**

$f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$;

donc la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

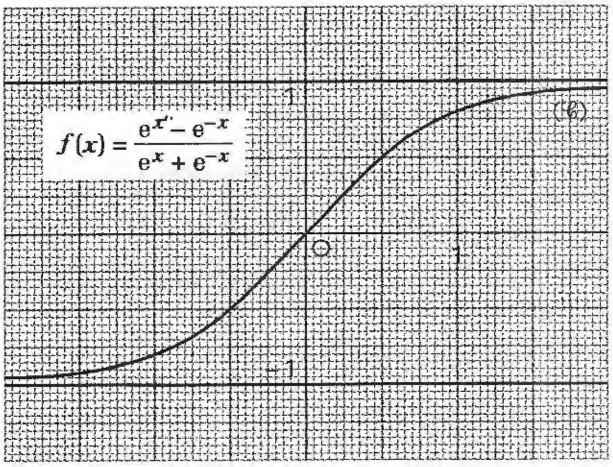
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ et sa dérivée est fonction $f' : x \mapsto \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	1	+	
$f(x)$	0	↗	1

Courbe représentative



♦ Exercice 2.e p. 265

1. *Continuité en 0*

On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$; donc f est continue en 0.

Dérivabilité en 0

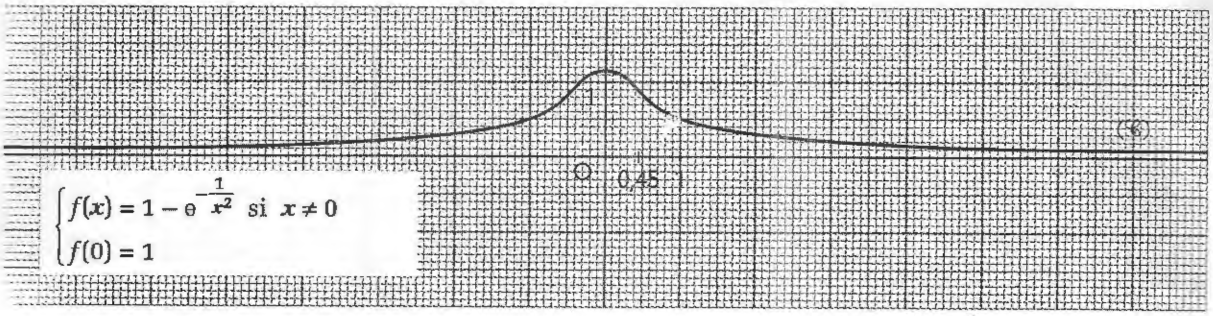
On a : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\dfrac{1}{x} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

Par suite, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2. La fonction f est paire ; l'étude de f se fera sur $[0 ; +\infty[$.
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; donc la droite (OI) est asymptote à $(\mathscr{C})$.
La fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{-2}{x^3} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.
On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 $\quad -$	
$f(x)$	1 $\searrow$	0

Courbe représentative



♦ Exercice 2.f p. 265

a) $S = \{e ; e^2\}$ *b)* $S = \{1\}$.

♦ Exercice 2.g p. 265

a) $f(x) = e^{2x\ln\pi} + e^{x\ln\pi} - 2$. On a : $D_f = \mathbb{R}$.

Études aux bornes de $\mathbb{R}$

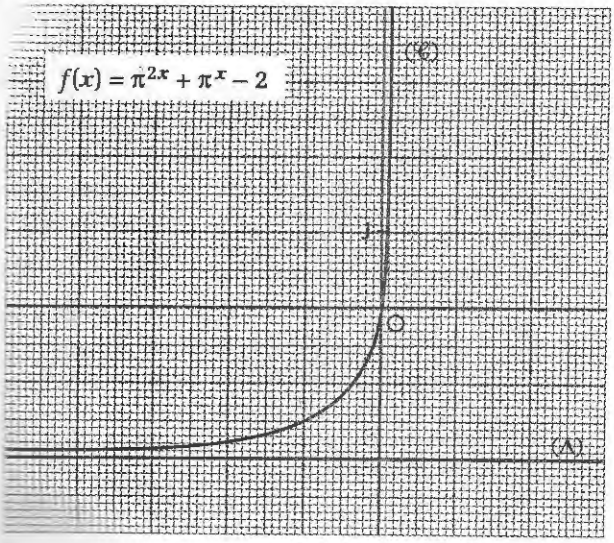
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$; donc la droite (Δ) d'équation $y = -2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$; donc $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique dans la direction de (OJ).

Sens de variation

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \ln\pi \, e^{x\ln\pi}(2e^{x\ln\pi} + 1)$.
On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-2 $\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative



b) $f(x) = \ln(2^x - 1) = \ln(e^{x\ln 2} - 1)$.

On a : $D_f =]0\,;+\infty[$.

Étude aux bornes de D_f

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$; donc (OJ) est asymptote à $(\mathscr{C})$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x\ln 2] = 0$;

donc la droite (Δ) d'équation $y = x\ln 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

Sens de variation

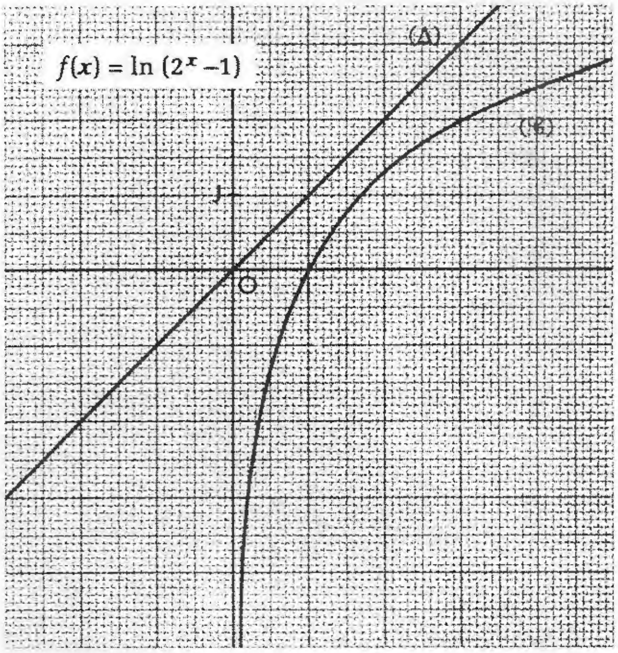
La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{\ln 2 \times 2^x}{2^x - 1}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+		+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1

Courbe représentative



♦ Exercice 3.a p. 270

a) $D_f =]-\infty\,;-1[\, \cup\,]-1\,;+\infty[$. $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$.

b) $D_f =]0\,;+\infty[$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) $D_f =]0\,;+\infty[$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 1$.

d) $D_f =]\,0\,;+\infty[$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.

♦ Exercice 3.b p. 270

$f(x) = (x^2 - x + 1)^{\frac{2}{3}}$. On a : $D_f = \mathbb{R}$.

Études aux bornes de $\mathbb{R}$

On a : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$.

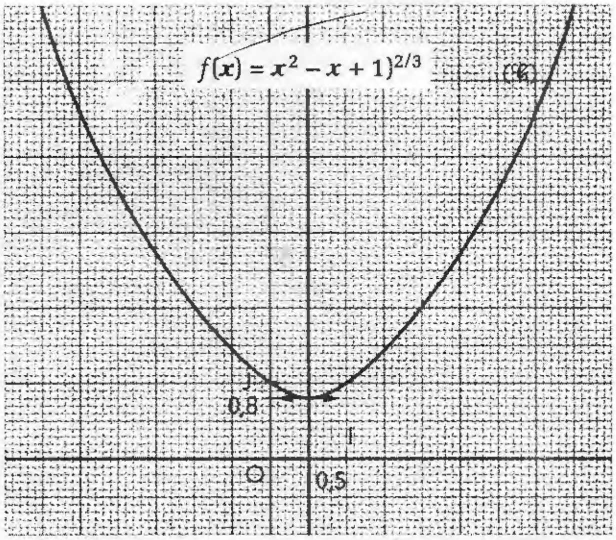
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{2}{3}(x^2 - x + 1)^{-\frac{1}{3}(2x-1)}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↘	0,8	↗	$+\infty$

Courbe représentative



♦ Exercice 3.c p. 270

On a : $f(x) = e^{x \ln x}$. $D_f =]0\,;+\infty[$.

Études aux bornes de D_f

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 1$; on peut prolonger f par continuité en posant : $f(0) = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$;

donc (𝒞) admet une branche parabolique dans la direction de (OJ).

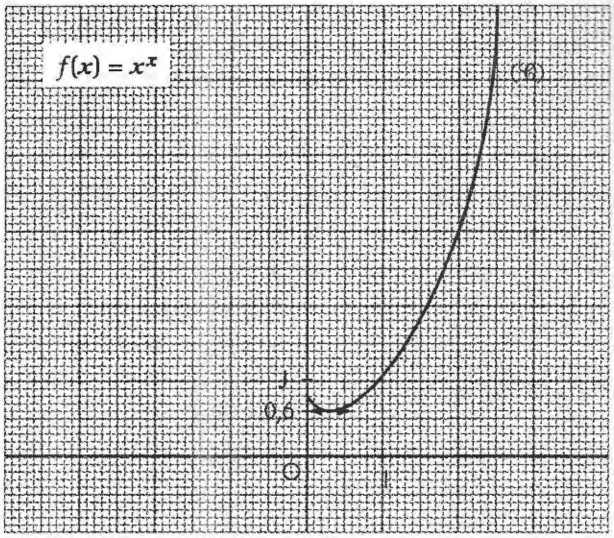
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto (1 + \ln x)e^{x \ln x}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 1	↘	$e^{-\frac{1}{e}}$	↗	$+\infty$

Courbe représentative



Exercices d'entraînement

FONCTION EXPONENTIELLE

♦ Exercice 1 p. 271

$a = 3$; $b = \dfrac{1}{5}$; $c = 3e^2$; $d = \dfrac{e}{2}$; $m = \dfrac{\sqrt{e}}{6}$; $p = \dfrac{5}{2}$.

♦ Exercice 2 p. 271

a) $S = \varnothing$ *b)* $S = \{\ln 3 - 2\}$ *c)* $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ *d)* $S = \{-1\,;2\}$.

♦ Exercice 3 p. 271

a) $S = \{\ln 2\}$ *b)* $S = \{\ln 2\}$ *c)* $S = \{\ln 3\}$ *d)* $S = \{\ln 2\}$.

♦ Exercice 4 p. 271

On a : $x^{\log x} = 10 \Rightarrow \log x \times \ln x = \ln 10$; donc : $\dfrac{\ln x}{\ln 10} \times \ln x = \ln 10$; ou : $\ln^2 x = \ln^2 10$.

On en déduit que l'équation admet deux solutions : $x' = 10$ et $x'' = \dfrac{1}{10}$.

On a bien : $x' \times x'' = 1$.

♦ Exercice 5 p. 271

a) $S = \{(\ln 3\,;0)\}$ *b)* $S = \{(\ln 5\,;\ln 6)\}$

c) $S = \{(\ln 2\,;\ln 2 - 1)\,;(\ln 5\,;\ln 5 - 1)\}$ *d)* $S = \{(\ln 2\,;\ln 5)\}$.

♦ Exercice 6 p. 271

a) $S =]-\infty\,;-\ln 2]$ *b)* $S =]-1\,;1[$

c) $S = [-1\,;3]$ *d)* $S =]-\infty\,;-\ln 2[\cup]\ln 2\,;+\infty[$.

♦ Exercice 7 p. 271

a) $D_f = \mathbb{R}$ *b)* $D_f = \mathbb{R}^*$ *c)* $D_f =]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

d) $D_f =]-\infty\,;0[$ *e)* $D_f = \mathbb{R}$ *f)* $D_f = [-1\,;+\infty[$.

♦ Exercice 8 p. 271

a) $D_f = \mathbb{R}$. On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $D_f = \mathbb{R}$. On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

c) $D_f = \mathbb{R}$. On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

d) $D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$. On a : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$.

e) $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$. On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

f) $D_f = \mathbb{R}$. On a : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$.

♦ Exercice 9 p. 271

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *b)* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ *d)* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ *f)* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$.

♦ Exercice 10 p. 271

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ *b)* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ *d)* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.

FONCTIONS COMPORTANT EXP

♦ Exercice 11 p. 271

a) $D_{f'} = \mathbb{R}$; $f'(x) = -2\,e^{-2x+1}$ *b)* $D_{f'} = \mathbb{R}$; $f'(x) = 2x\exp(x^2)$

c) $D_{f'} =]0 ; +\infty[$; $f'(x) = e^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$ *d)* $D_{f'} = \mathbb{R}$; $f'(x) = (x-2)\,e^{1-x}$

e) $D_{f'} = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ *f)* $D_{f'} = \mathbb{R}$; $f'(x) = x\,(2-x)e^{-x}$.

♦ Exercice 12 p. 271

a) $F(x) = -\dfrac{1}{4}\,e^{-4x}$ *b)* $F(x) = \dfrac{1}{2}\exp(x^2)$

c) $F(x) = \dfrac{1}{2}\,e^{2x} - 3e^{-x} - x$ *d)* $F(x) = -\,e^{\cos x}$

e) $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 5x - \dfrac{3}{2}\,e^{-2x+1}$ *f)* $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1 + e^{2x})$.

♦ Exercice 13 p. 271

$F(x) = (4x - 9)\,e^x$.

♦ Exercice 14 p. 271

$F(x) = (\cos x + 2\sin x)\,e^x$.

♦ Exercice 15 p. 271

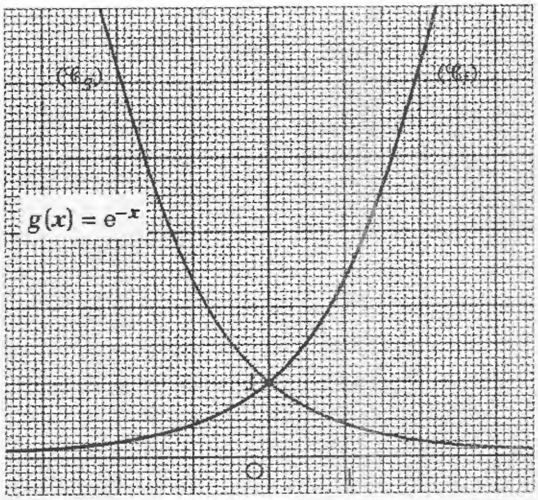
1. $f(x) = 1 - \dfrac{3\,e^x}{2\,e^x + 1}$.

2. $F(x) = x - \dfrac{3}{2}\ln(2\,e^x + 1) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

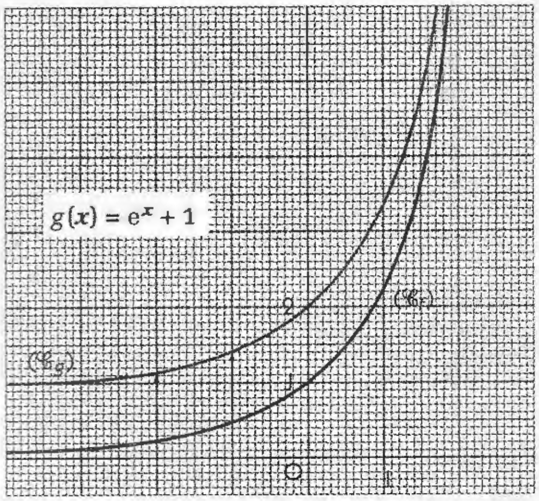
♦ Exercice 16 p. 271

Soit f la fonction exponentielle népérienne et g la fonction donnée.

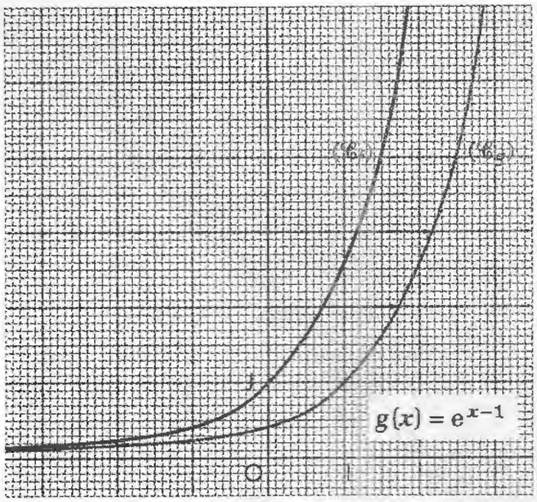
a)



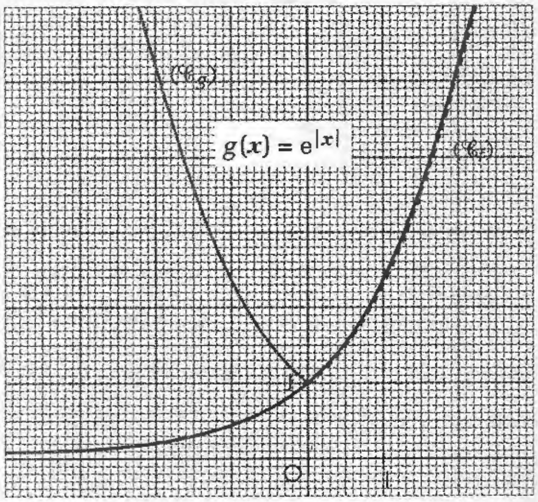
b)



c)



d)



♦ Exercice 17 p. 271

1. On a : $D_f = \mathbb{R}$.

Étude aux bornes de $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$; donc ($\mathscr{C}$) admet une branche parabolique dans la direction de (OJ).

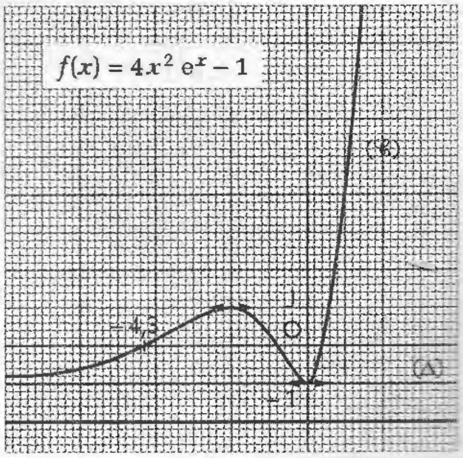
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$; donc la droite (Δ) d'équation $y = -1$ est asymptote à ($\mathscr{C}$).

Sens de variation

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 4x\,(x + 2)\,e^{x}$. On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-1	↗	1,16	↘	-1	↗	$+\infty$

Courbe représentative



2. On a : $4x^2 = e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = 0$.
L'équation admet trois solutions.

♦ Exercice 18 p. 271

1. On trouve : $f'_d(-1) = 0$ et $f'_g(1) = 0$.

2. On a : $D_f = \mathbb{R}$.

La fonction f est impaire ; on peut restreindre l'étude à $[0\,;+\infty[$.

Étude aux bornes de $[0\,;+\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e$; donc la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = e$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$; donc la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

Sens de variation

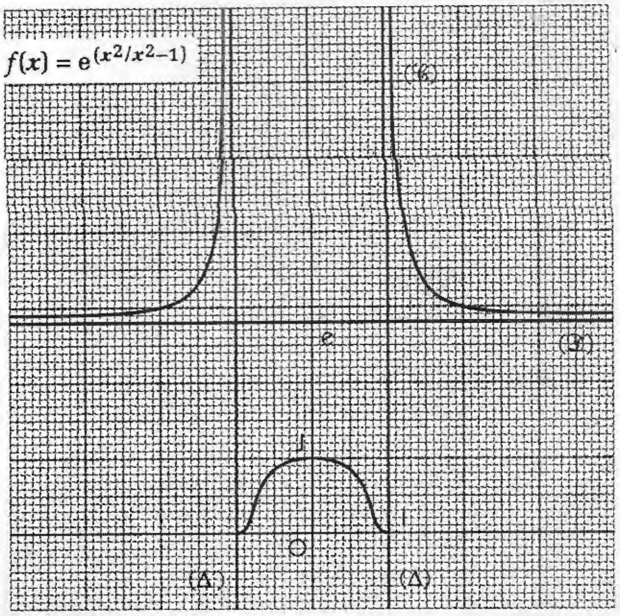
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\,;1\}$ et sa dérivée est la fonction

$$f' : x \mapsto \frac{-2x}{(x^2-1)^2}\ \exp\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right).$$

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0 ‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	e

Courbe représentative



♦ Exercice 19 p. 272

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x - 1] = 0$; donc la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

Sur $]-\infty\,;1[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Δ) ;
sur $]1\,;+\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessous de (Δ) ;
$(\mathcal{C})$ et (Δ) se coupent en I.

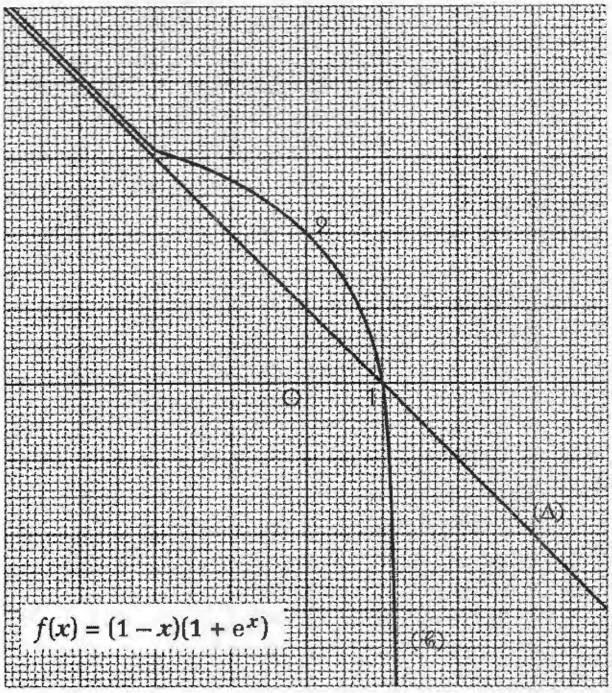
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$; donc $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique dans la direction de (OJ) en $+\infty$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -1 - x\,e^x$;
$f''(x) = -(x+1)\,e^x$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	-1	↗	$\frac{1-e}{e}$	↘	$-\infty$
$f(x)$	$+\infty$		↘		$-\infty$

Courbe représentative



♦ Exercice 20 p. 272

1. *a)* D = $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

b) $\forall\, x \in \mathrm{D},\ f(x) = x + \ln\left|1 - \mathrm{e}^{-x}\right|$ et $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \ln\left|1 - \mathrm{e}^{-x}\right| = 0$.

c) ***Étude aux bornes de D***

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; donc la droite (OI) est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{|x| \to 0} f(x) = -\infty$; donc la droite (OJ) est asymptote à $(\mathscr{C})$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

D'après la question *b)*, la droite (Δ) d'équation. $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

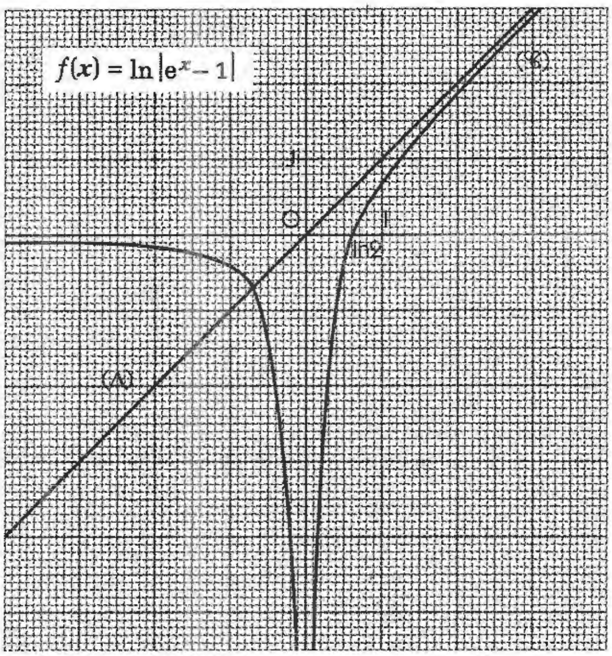
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur D et sa dérivée est la fonction f' : $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Courbe représentative



2. *a)* La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$; donc g est une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $g\,(]0\,;+\infty[) = \mathbb{R}$.

b) On a : $(\mathscr{C}') = S_\Delta\,(\mathscr{C})$.

♦ Exercice 21 p. 272

1. $\mathrm{D}_f =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; donc la droite (OI) est asymptote à $(\mathscr{C})$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$; donc la droite (OJ) est asymptote à $(\mathscr{C})$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$; donc $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique dans la direction de (OJ).

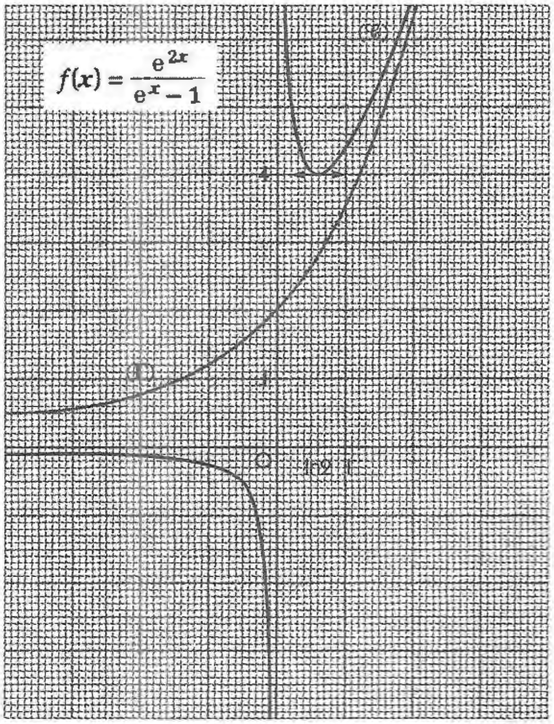
2. On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (\mathrm{e}^x + 1)] = 0$; donc la courbe (Γ) d'équation $y = \mathrm{e}^x + 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$. Sur $]-\infty\,;0[$, $(\mathscr{C})$ est au-dessous de (Γ) et sur $]0\,;+\infty[$, $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (Γ).

3. La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction f' : $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}\,(\mathrm{e}^x - 2)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		ln2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Courbe représentative



◆ **Exercice 22 p. 272**

a) $S = \{0\}$ *b)* $S = \{-1\}$ *c)* $S = \{2\}$

d) $S = \left\{\dfrac{3\ln 2}{\ln 6}\right\}$ *e)* $S = \{-2\ ;\ 2\}$ *f)* $S = \left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right\}$.

◆ **Exercice 23 p. 272**

a) $S = \left\{\dfrac{\ln 2}{\ln 7}\ ;\ \dfrac{\ln 3}{\ln 7}\right\}$ *b)* $S = \{0\}$ *c)* $S = \left\{\dfrac{\ln 7}{\ln 2}\right\}$ *d)* $S = \left\{\dfrac{\ln 5}{\ln 3}\right\}$.

◆ **Exercice 24 p. 272**

a) $S = \varnothing$ *b)* $S =]-\infty\ ;\ 2]$ *c)* $S =]-\infty\ ;\ -3[$

d) $S = [1\ ;\ +\infty[$ *e)* $S =]-\infty\ ;\ 0[$ *f)* $S =]-\infty\ ;\ -2] \cup [2\ ;\ +\infty[$.

◆ **Exercice 25 p. 272**

a) $+\infty$ *b)* 0 *c)* $+\infty$ *d)* 1.

◆ **Exercice 26 p. 272**

a) $f(x) = e^{x\ln 2}$. On a : $D_f = \mathbb{R}$.

Étude aux bornes de $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; donc la droite (OI) est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$;

$(\mathscr{C})$ admet en une branche parabolique dans la direction de (OJ).

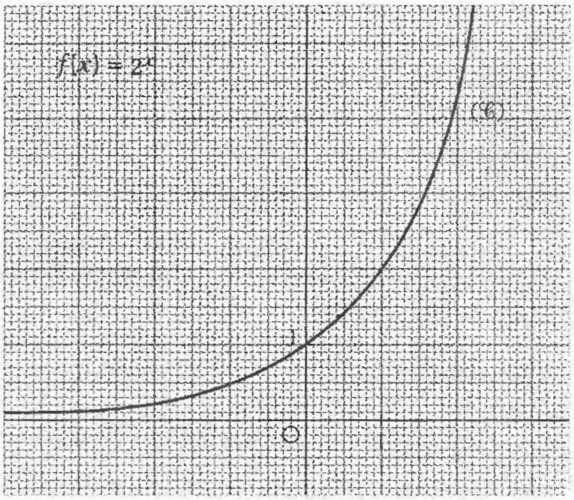
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \ln 2 \times 2^x$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

Courbe représentative



d) $f(x) = \exp\left(\dfrac{\ln 5}{x}\right)$. On a : $D_f =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$.

Étude aux bornes de D_f

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 1$; donc la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = 0.$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$; donc la droite (OJ) est asymptote à $(\mathscr{C})$.

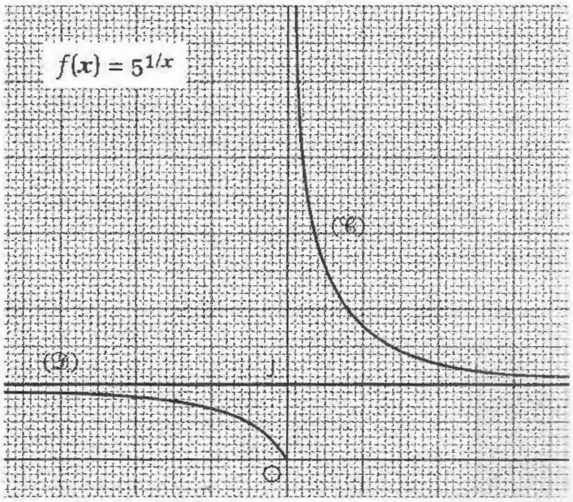
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto -\dfrac{\ln 5}{x^2}\exp\left(\dfrac{\ln 5}{x}\right)$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	1

Courbe représentative



FONCTIONS PUISSANCES

♦ **Exercice 27 p. 272**

a) 6,47 *b)* 1,01 335 *c)* 1,2 599 *d)* 0,885.

♦ **Exercice 28 p. 272**

a) $a^{-1,5}$ *b)* $a^{14/3}$ *c)* $a^{0,04}$ *d)* $a^{-0,6}$ *e)* $a^{-0,5}$ *f)* $a^{5,5}$.

♦ **Exercice 29 p. 272**

a) $D_f =]0\,;+\infty[$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. *b)* $D_f =]0\,;+\infty[$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

♦ **Exercice 30 p. 272**

a) $f(x) = e^{0,2\ln x}$. On a : $D_f =]0\,;+\infty[$.

Étude aux bornes de D_f

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$;

donc (𝒞) admet une branche parabolique dans la direction de (OI).

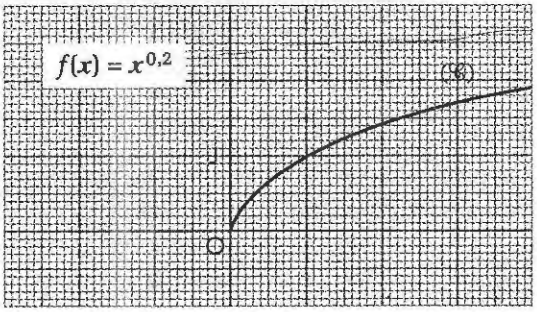
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{0,2}{x}\exp(0,2\ln x)$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

Courbe représentative



♦ **Exercice 31 p. 272**

1. ***Continuité en 1***

On a : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0 = f(1)$. ; donc f est continue en 1.

Dérivabilité en 1

On trouve : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$; donc f n'est pas dérivable en 1.

2. On a : $D_f =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

Étude aux bornes de D_f

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = 1$; donc la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à (𝒞).

$\lim\limits_{|x| \to 0} f(x) = +\infty$; donc la droite (OJ) est asymptote à (𝒞).

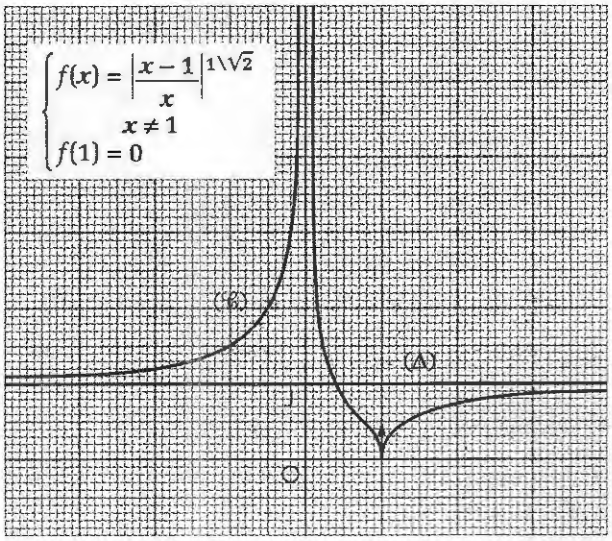
Sens de variation

La fonction f est dérivable sur D_f et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}\,x\,(x-1)}\left|\dfrac{x-1}{x}\right|^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	1

Courbe représentative



♦ Exercice 32 p. 272

a) $D_f = \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $D_f =]0\,;+\infty[$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $D_f =]0\,;+\infty[$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d) $D_f =]0\,;+\infty[$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 33 p. 272

1. $f'_g(0) = 0$ et $f'_d(0) = -1$; donc f n'est pas dérivable en 0.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$;

donc $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique dans la direction de (OI) en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + x^2] = 0$;

donc la parabole (Γ) d'équation $y = -x^2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$, en $+\infty$.

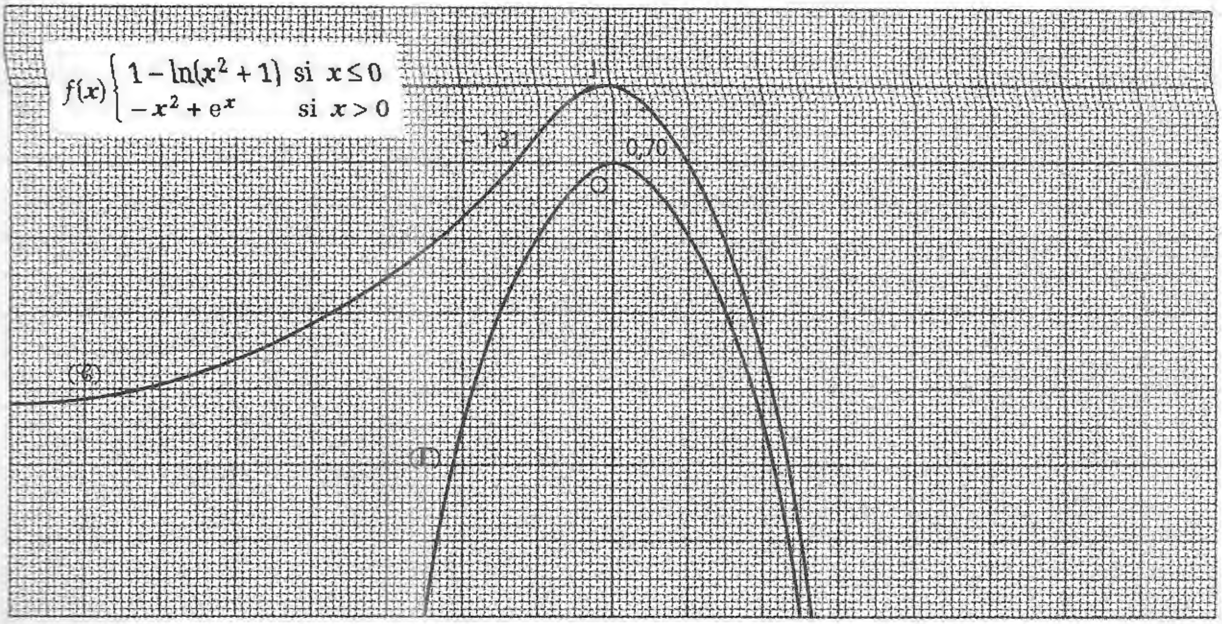
3. $\forall x \in]-\infty\,;0]$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{x^2+1}$; donc : $\forall x \in]-\infty\,;0]$, $f'(x) \geq 0$.

$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = -(2x + e^{-x})$; donc : $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$0 \,\|\, -1$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Courbe représentative



4. $(\mathscr{C})$ coupe (OI) en deux points d'abscisses α et β telles que : $-2 < \alpha < -1$ et $0 < \beta < 1$.

a) On a : $\alpha = -\sqrt{e-1}$.

b) On trouve : $\beta \approx 0{,}7$.

♦ Exercice 34 p. 273

1. $\forall\,(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a-b)^2 \geq 0$; donc : $ab \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$.

2. *a)* On pose : $a = \sqrt{u}$ et $b = \sqrt{v}$. On a : $\sqrt{uv} \leq \dfrac{u+v}{2}$.

La fonction ln étant croissante sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit : $\dfrac{\ln u + \ln v}{2} \leq \ln\left(\dfrac{u+v}{2}\right)$.

b) On pose : $a = \mathrm{e}^{u/2}$ et $b = \mathrm{e}^{v/2}$ et on utilise la question **1**.

3. *a)* $\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ f(x) = ax - \dfrac{x^q}{q}$.

$$f'(x) = a - x^{q-1}.$$

x	$-\infty$		$a^{p/q}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{a^p}{q}$	$\searrow$	$-\infty$

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

Donc : $\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ f(x) \leq \dfrac{a^p}{p}$;

c'est-à-dire : $\forall\, x \in [0\,;+\infty[,\ ax \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{x^q}{q}$. En particulier, pour $x = b$, on a : $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

b) On pose : $a = u^{1/p}$ et $b = v^{1/q}$. L'inégalité devient : $u^{1/p} \times v^{1/q} \leq \dfrac{u}{p} + \dfrac{v}{q}$.

La fonction ln étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a : $\dfrac{\ln u}{p} + \dfrac{\ln v}{q} \leq \ln\left(\dfrac{u}{p} + \dfrac{v}{q}\right)$.

On pose : $a = \mathrm{e}^{u/p}$ et $b = \mathrm{e}^{v/q}$. L'inégalité devient : $\mathrm{e}^{u/p} + \mathrm{e}^{v/q} \leq \dfrac{\mathrm{e}^u}{p} + \dfrac{\mathrm{e}^v}{q}$.

c) ***Interprétation de la 1^re^ inégalité***

On a : $A(u\,;\ln u)$; $B(v\,;\ln v)$; $\overrightarrow{OK} = \dfrac{1}{p}\overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{q}\overrightarrow{OB}$; $K\left(\dfrac{u}{p} + \dfrac{v}{q}\,;\dfrac{\ln u}{p} + \dfrac{\ln v}{q}\right)$; $D\left(\dfrac{u}{p} + \dfrac{v}{q}\,;\ln\left(\dfrac{u}{p} + \dfrac{v}{q}\right)\right)$.

Le point D est placé au-dessus de K.

On dit que la fonction ln est concave.

Interprétation de la 2^e^ inégalité

On dit que la fonction exp est convexe.

♦ Exercice 35 p. 273

1. On pose : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[,\ f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{-1}{x(x+1)^2}$.

On en dédnit, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Donc : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[,\ f(x) > 0$; c'est-à-dire : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[,\ \dfrac{1}{x+1} < \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ (i)

On pose : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[,\ g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} g(x) = -\infty$.

La fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto \dfrac{1}{x^2\,(x+1)}$.

On en dédnit, ci-contre, le tableau de variation de g.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

Donc : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[,\ g(x) < 0$; c'est-à-dire : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[,\ \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}$ **(ii)**

De (i) et (ii), on déduit que :

$$\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[,\ \frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

Déduction

On a : (i) $\Rightarrow 1 < (x+1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$;

(ii) $\Rightarrow x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) < 1$.

Donc : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) < 1 < (x+1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$;

Ou : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x < 1 < \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}$; par suite : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}$.

2. Soit P(n) la proposition : « $\dfrac{(n+1)^n}{n!} < \mathrm{e}^n < \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$ ».

- On a : $\dfrac{(1+1)^1}{1!} < \mathrm{e} < \dfrac{(1+1)^{1+1}}{1!}$; donc p(1) est vraie.
- Soit k un entier naturel non nul.

Si p(k) est vraie, alors : $\dfrac{(k+1)^k}{k!} < \mathrm{e}^k < \dfrac{(k+1)^{k+1}}{k!}$; ou : $(k+1)^k < k!\,\mathrm{e}^k < (k+1)^{k+1}$.

Or : $(k+2)^{k+1} = [(k+1)+1]^{k+1}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a : $(k+2)^{k+1} < (k+1)\,!\ \mathrm{e}^{k+1} < (k+2)^{k+2}$;

c'est-à-dire : $\dfrac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)!} < \mathrm{e}^{k+1} < \dfrac{(k+2)^{k+2}}{(k+1)!}$; P(k + 1) est vraie.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{(n+1)^n}{n!} < \mathrm{e}^n < \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$.

◆ Exercice 36 p. 273

1. On a : $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x \ln|\sin x|}$; $D_f = \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

La fonction f est périodique de période 2π ; donc l'étude peut se limiter à $]-\pi\,;\pi[$.

De plus, f est une fonction paire ; donc son intervalle d'étude est $]0\,;\pi[$.

2. *a)* On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; donc : si $x \neq 0$, $g(x) = f(x)$ et $g(0) = 0$.

b) On a : $g'(0) = 1$.

3. On a : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ g(x) = \mathrm{e}^{\cos x \ln(\sin x)}$

$\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} g(x) = +\infty$; donc la droite (Δ) d'équation $x = \pi$ est asymptote à (Γ).

La fonction g est dérivable sur $]0\,;\pi[$ et sa dérivée est la fonction g' :

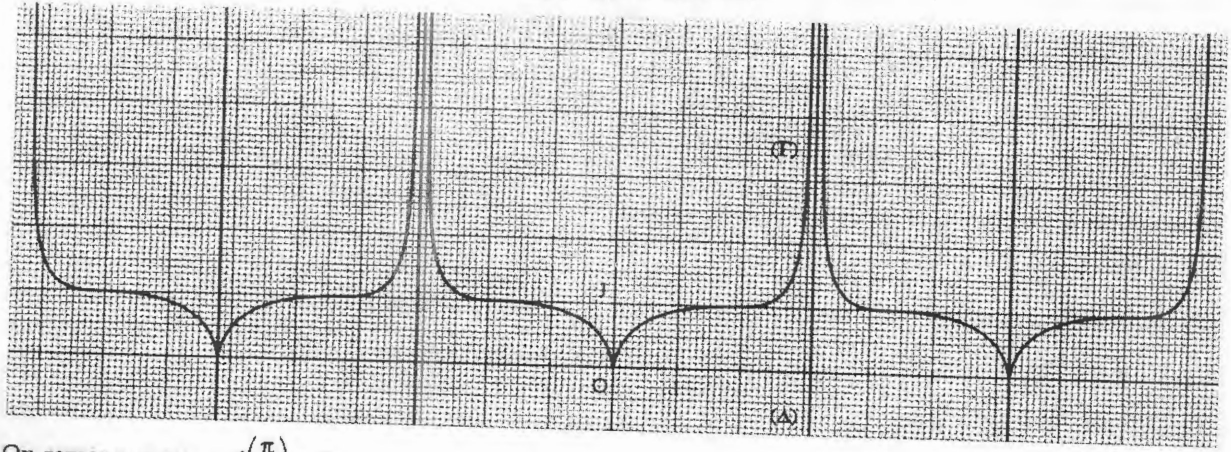
$$x \mapsto \frac{-\sin^2 x \ln(\sin x) + \cos^2 x}{\sin x}\,\mathrm{e}^{\cos x \ln(\sin x)} ;$$

donc : $\forall x \in]0\,;\pi[,\ g'(x) \geq 0$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de g.

x	0		π
$g'(x)$	1	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative



On remarque que : $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

♦ Exercice 37 p. 273

1. *a)* soit p(m) la proposition : « $e^x > \dfrac{x^m}{m!}$ ».

- On a : $\forall x \in [0\,;+\infty[$, $e^x > x$; donc p(1) est vraie.
- Soit k un entier naturel non nul.

Si p(k) est vraie, alors : $e^x < \dfrac{x^k}{k!}$.

Considérons alors la fonction $f : x \mapsto e^x - \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$.

f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto e^x - \dfrac{x^k}{k!}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a :
$\forall x \in [0\,;+\infty[, f'(x) > 0$.
On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$

Donc : $\forall x \in [0\,;+\infty[, f(x) > 0$; ou : $\forall x \in [0\,;+\infty[$, $e^x > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$; p($k+1$) est vraie.

On en déduit que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \left(\forall x \in [0\,;+\infty[, e^x > \dfrac{x^m}{m!}\right)$.

Donc : $\forall x \in [0\,;+\infty[, 0 \leq f(x) < 1$.
Par suite, les parties d'abscisses positives des courbes $(\mathscr{C}_m)$ sont comprises entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = 0$; donc la droite (OI) est asymptote à $(\mathscr{C}_m)$ en $+\infty$.

2. *a)* Pour tout entier naturel non nul m, la fonction f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f'_m : x \mapsto \dfrac{x^{m-1}\,e^{-x}}{m!}(m-x)$.

1^er^ cas : m = 1

$f_1(x) = x\,e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = +\infty$; donc $(\mathscr{C}_1)$ admet une branche parabolique dans la direction de (OJ) en $-\infty$.
De plus, la droite (OI) est asymptote à $(\mathscr{C}_1)$ en $+\infty$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	0

2^e^ cas : m est pair

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f_m(x)}{x} = -\infty$; donc $(\mathscr{C}_m)$ admet une branche parabolique dans la direction de (OJ) en $-\infty$.
De plus, la droite (OI) est asymptote à $(\mathscr{C}_m)$ en $+\infty$.

x	$-\infty$		0		m		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_m(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\dfrac{m^m}{e^m m!}$	↘	0

3^e^ cas : m est impair

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f_m(x)}{x} = +\infty$; donc $(\mathscr{C}_m)$ admet une branche parabolique dans la direction de (OJ) en $-\infty$.
De plus, la droite (OI) est asymptote à $(\mathscr{C}_m)$ en $+\infty$.

x	$-\infty$		0		m		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f_m(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\dfrac{m^m}{e^m m!}$	↘	0

3. *a)* $\forall x \in \mathbb{R}, f'_{m+1}(x) = f_m(x) - f_{m+1}(x) = \dfrac{x^m\,e^{-x}}{(m+1)!}(m+1-x)$.

1^er^ cas : m est pair

- Sur $]-\infty\,; m+1[$, $(\mathscr{C}_m)$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_{m+1})$.
- Sur $]m+1\,;+\infty[$, $(\mathscr{C}_m)$ est au-dessous de $(\mathscr{C}_{m+1})$.
- $(\mathscr{C}_m)$ et $(\mathscr{C}_{m+1})$ se coupent aux points O et A_{m+1}.

2^e^ cas : m est impair

- Sur $]0\,; m+1[$, $(\mathscr{C}_m)$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_{m+1})$.
- Sur $]-\infty\,; 0[$ et $]m+1\,;+\infty[$, $(\mathscr{C}_m)$ est au-dessous de $(\mathscr{C}_{m+1})$
- $(\mathscr{C}_m)$ et $(\mathscr{C}_{m+1})$ se coupent aux points O et A_{m+1}.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, f_{m+2}(x) - f_m(x) = \dfrac{x^m e^{-x}}{m!} \; \dfrac{[x+\sqrt{(m+1)(m+2)}][x-\sqrt{(m+1)(m+2)}]}{(m+1)(m+2)}$.

1^er^ cas : m est pair

- Sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;\sqrt{(m+1)(m+2)}[$, $(\mathscr{C}_{m+2})$ est au-dessous de $(\mathscr{C}_m)$.
- Sur $]\sqrt{(m+1)(m+2)}\,;+\infty[$, $(\mathscr{C}_{m+2})$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_m)$.
- $(\mathscr{C}_{m+2})$ et $(\mathscr{C}_m)$ se coupent aux points O et B_m d'abscisse $\sqrt{(m+1)(m+2)}$.

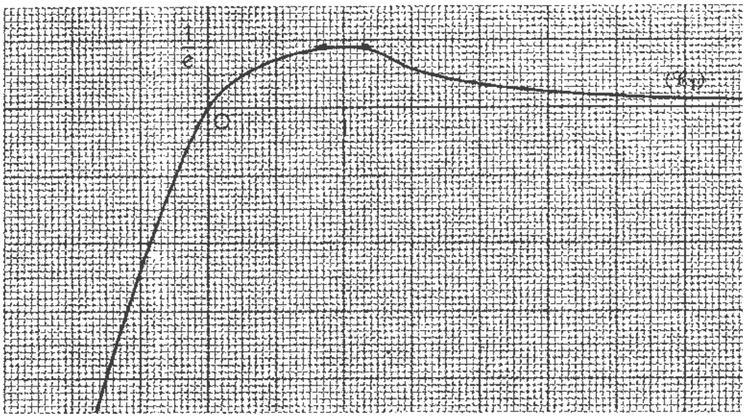
On a bien : $m+1 < \sqrt{(m+1)(m+2)} < m+2$.

2^e^ cas : m est impair

- Sur $]-\infty\,;0[$ et $]\sqrt{(m+1)(m+2)}\,;+\infty[$, $(\mathscr{C}_{m+2})$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_m)$.
- Sur $]0\,;\sqrt{(m+1)(m+2)}[$, $(\mathscr{C}_{m+2})$ est au-dessous de $(\mathscr{C}_m)$.
- $(\mathscr{C}_{m+2})$ et $(\mathscr{C}_m)$ se coupent aux points O et B_m d'abscisse $\sqrt{(m+1)(m+2)}$.

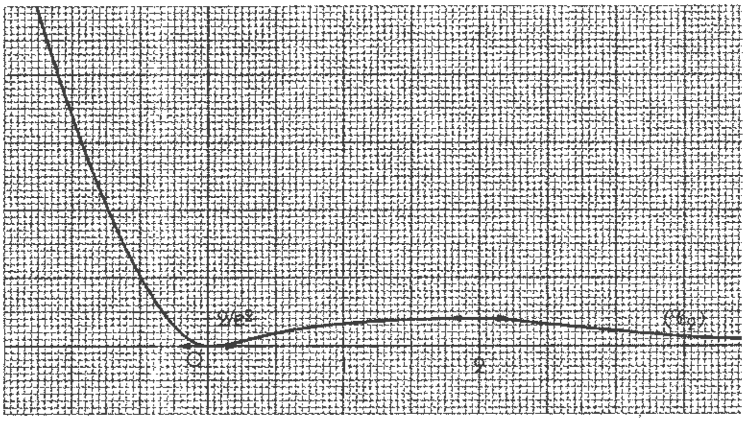
4. Tracé de $(\mathscr{C}_1)$

$f_1(x) = x e^{-x}$



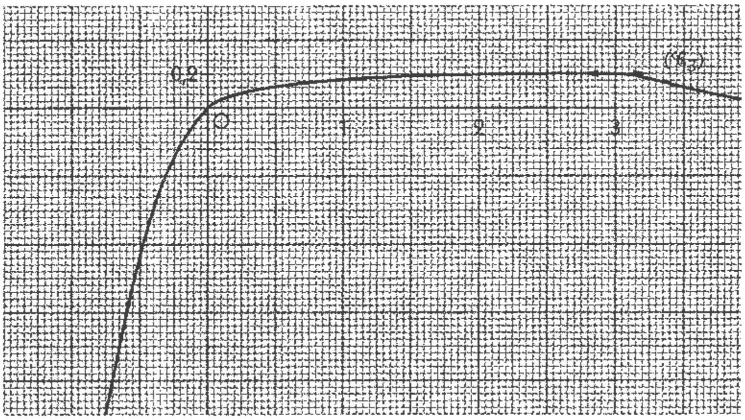
Tracé de $(\mathscr{C}_2)$

$f_2(x) = \dfrac{x^2}{2} e^{-x}$



Tracé de $(\mathscr{C}_3)$

$f_3(x) = \dfrac{x^3}{6} e^{-x}$



♦ Exercice 39 p. 273

1. Après 8 h : $q_0\,\mathrm{e}^{-1/3}$; après 16 h : $q_0\,\mathrm{e}^{-1/3}\,(1 + \mathrm{e}^{1/3})$; après 24 h : $q_0\,\mathrm{e}^{-1/3}\,(1 + \mathrm{e}^{1/3} + \mathrm{e}^{2/3})$.

2. Sur $[0 ; 8[$, $q(t) = q_0\,\mathrm{e}^{-t/24}$.

Sur $[8 ; 16[$, $q(t) = q_0\,\mathrm{e}^{-t/24}\,(1 + \mathrm{e}^{1/3})$.

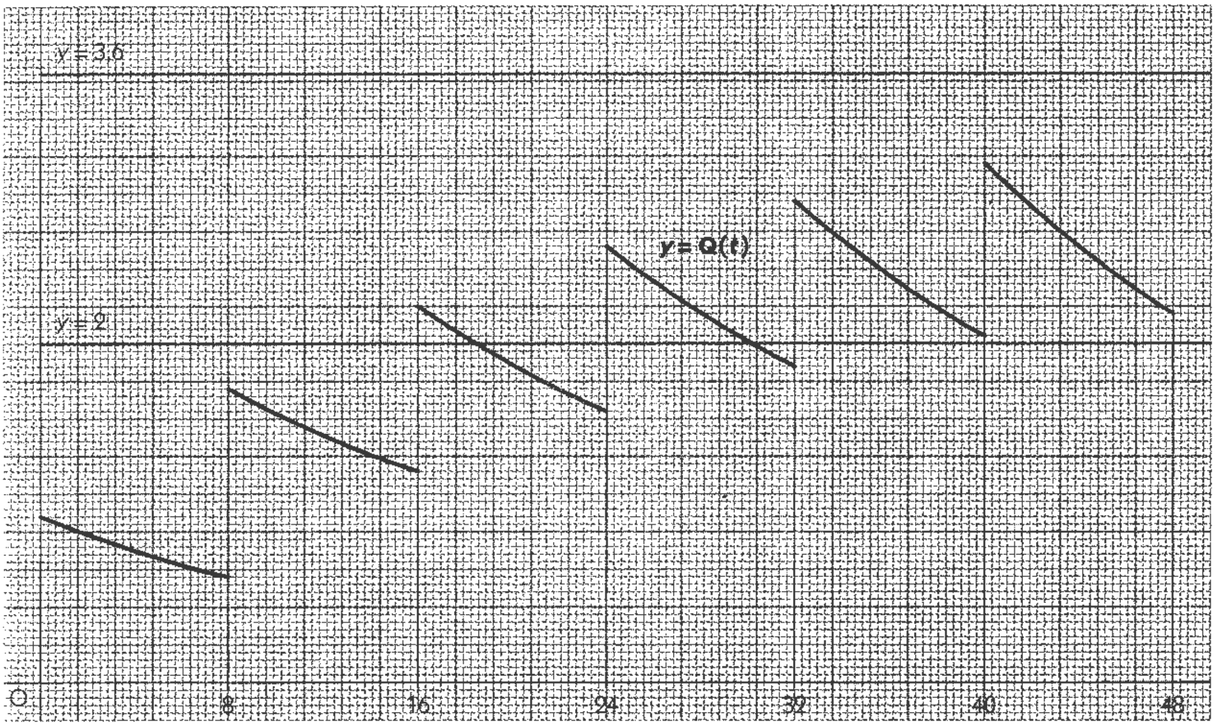
Sur $[16 ; 24[$, $q(t) = q_0\,\mathrm{e}^{-t/24}\,(1 + \mathrm{e}^{1/3} + \mathrm{e}^{2/3})$.

Sur $[24 ; 32[$, $q(t) = q_0\,\mathrm{e}^{-t/24}\,(1 + \mathrm{e}^{1/3} + \mathrm{e}^{2/3} + \mathrm{e}^{3/3})$.

Sur $[32 ; 40[$, $q(t) = q_0\,\mathrm{e}^{-t/24}\,(1 + \mathrm{e}^{1/3} + \mathrm{e}^{2/3} + \mathrm{e}^{3/3} + \mathrm{e}^{4/3})$.

Sur $[40 ; 48[$, $q(t) = q_0\,\mathrm{e}^{-t/24}\,(1 + \mathrm{e}^{1/3} + \mathrm{e}^{2/3} + \mathrm{e}^{3/3} + \mathrm{e}^{4/3} + \mathrm{e}^{5/3})$.

$q(48) = q_0\,\mathrm{e}^{-2}\,(1 + \mathrm{e}^{1/3} + \mathrm{e}^{2/3} + \mathrm{e}3/3 + \mathrm{e}^{4/3} + \mathrm{e}^{5/3}) + 1$.



3. Graphiquement, on a : $t = 32\ h$.

4. Juste après la $n^{\text{ème}}$ injection, $n = \dfrac{t}{8} + 1$.

$q(t) = q_0\,\mathrm{e}^{-t/24}\,(1 + \mathrm{e}^{1/3} + \ldots + \mathrm{e}^{(n-1)/3)})$.

Quand $n \mapsto +\infty$; $q(t) \mapsto 3{,}528$ (*valeur approchée*).

Or Q est croissante ; donc : $q(t) < 3{,}6$.

13. Suites numériques

(pages 275 à 294 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- Compléter et consolider les résultats essentiels sur les suites numériques.
- Utiliser le raisonnement par récurrence dans l'étude des suites numériques.
- Utiliser les suites pour la modélisation de phénomènes discrets et pour l'approximation de nombres.

COMMENTAIRES

L'étude de suites $U_{n+1} = f(U_n)$ pour approcher une solution de l'équation $f(x) = x$ se fera uniquement sur des exemples.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Étude globale d'une suite numérique • Suites bornées. • Suites (strictement) monotones : – suite (strictement) croissante ; – suite (strictement) décroissante ; – suite constante. • Suites arithmétiques, suites géométriques.	• Conjecturer, à l'aide d'une représentation graphique, si une suite est minorée, majorée ou bornée. • Démontrer qu'une suite est minorée, majorée, bornée. • Conjecturer le sens de variation d'une suite : – à l'aide d'une calculatrice ; – à l'aide d'une représentation graphique. • Étudier le sens de variation d'une suite.
Limite d'une suite numérique • Notion de limite d'une suite : – suite convergente ; – suite divergente. • Calculs de limites : – limite d'une suite du type : $u_n = f(n)$; – limite d'une somme de suites ; – limite d'un produit de suites ; – limite d'un quotient de suites ;	• Conjecturer la limite d'une suite : – à l'aide d'une calculatrice ; – à l'aide d'une représentation graphique. • Calculer la limite d'une suite du type : $u_n = f(n)$. • Calculer la limite d'une suite à l'aide des propriétés sur la somme, le produit ou le quotient.
– croissances comparées des suites (a^n), (n^α) et $(\ln n)$; – propriétés de comparaison. • Limite d'une suite monotone *Théorème de convergence monotone* – toute suite croissante et majorée est convergente ; – toute suite décroissante et minorée est convergente.	• Calculer la limite d'une suite à l'aide des résultats sur les croissances comparées. • Calculer la limite d'une suite à l'aide des propriétés de comparaison. • Étudier la convergence d'une suite à l'aide du théorème de convergence monotone.
Compléments sur les suites • Suites définies par récurrence. • Approximation des solutions d'une équation.	• Utiliser les suites dans le calcul approché. • En utilisant des résultats sur les suites arithmétiques et les suites géométriques, faire des sommations simples. • Étudier une suite à l'aide d'nne suite auxiliaire. • Utiliser les suites pour la résolution de problèmes concrets.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ **Exercice 1.a p. 279**

On a : $u_0 = -\frac{3}{5}$; $u_1 = -\frac{2}{3}$; $u_2 = -\frac{1}{2}$; $u_3 = -1$ et $u_4 = 0$.

L'ensemble de définition de la suite (u_n) est : $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

♦ Exercice 1.b p. 279

a) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2} \leq u_n \leq 2$ *b)* La suite (u_n) n'est ni majorée, ni minorée

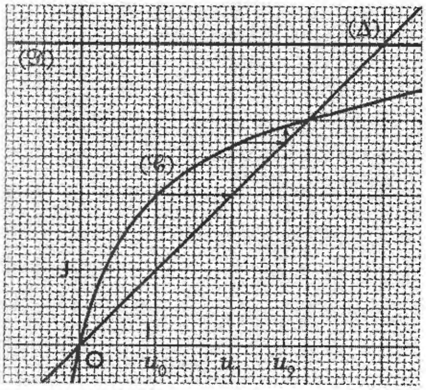
c) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$ *d)* La suite (u_n) est minorée par 0, mais elle n'est pas majorée.

♦ Exercice 1.c p. 279

1. *a)* Soit $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \frac{4x}{1+x}$.

On conjecture que la suite (u_n) est minorée par 0 et majorée par 4.

b) Démontrons par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 4$.
Soit $p(n)$ la proposition : « $0 < u_n < 4$ ».
- On a : $u_0 = 1$; donc $p(0)$ est vraie.
- Soit k un entier naturel.



Si $p(k)$ est vraie, alors : $0 < u_k < 4$.
– D'une part, on a : $4\,u_k > 0$ et $1 + u_k > 0$;

donc : $\frac{4\,u_k}{1+u_k} > 0$; c'est-à-dire : $u_{k+1} > 0$.

– D'autre part, on a : $u_{k+1} - 4 = \frac{-4}{1+u_k}$;

donc : $u_{k+1} < 4$.

Par suite, on a : $0 < u_{k+1} < 4$; donc : $p(k+1)$ est vraie.
On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 4$.

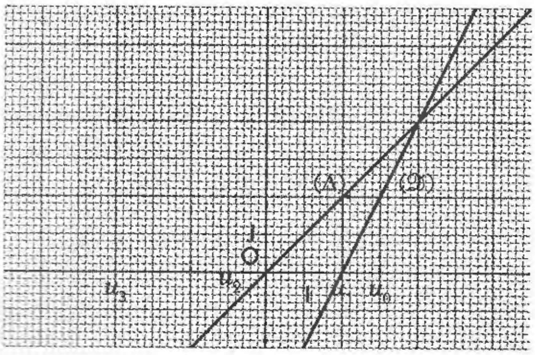
2. On démontre par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 1 \leq v_n \leq 2$.

♦ Exercice 1.d p. 279

a) (u_n) est croissante. *b)* (u_n) est croissante. *c)* (u_n) est décroissante. *d)* (u_n) est croissante.

♦ Exercice 1.e p. 279

1. *a)*



On conjecture que la suite (u_n) est décroissante.

b) Soit $p(n)$ la proposition : « $u_{n+1} \leq u_n$ ».
- On a : $u_0 = 3$ et $u_1 = 2$; donc $p(0)$ est vraie.
- Soit k un entier naturel.

Si $p(k)$ est vraie, alors : $u_{k+1} \leq u_k$.
La fonction $f : x \mapsto 2x - 4$ étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a : $f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$;
c'est-à-dire : $u_{k+2} \leq u_{k+1}$;
donc : $p(k+1)$ est vraie.
On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$.

2. On démontre par récurrence que la suite (v_n) est positive.

♦ Exercice 1.f p. 279

1. Soit (u_n) une suite géométrique strictement positive de raison q $(q > 0)$.
On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$; donc : $\ln u_{n+1} = \ln q + \ln u_n$.
On en déduit que $(\ln u_n)$ est une suite arithmétique de raison $\ln q$.

2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$; donc : $\exp(u_{n+1}) = \exp(r) \times \exp(u_n)$.
On en déduit que (e^{u_n}) est une suite géométrique de raison e^r.

♦ Exercice 1.g p. 279

1. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = -3 + \frac{3n}{2}$.

2. $u_0 + u_1 + \ldots + u_{25} = 13(u_0 + u_{25}) = 409{,}5$.

♦ Exercice 1.h p. 279

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-3) \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

2. $u_3 + u_4 + \dots + u_{10} = \dfrac{8}{3} \times \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^8 - 1\right]$; donc : $u_3 + u_4 + \dots + u_{10} \approx -2{,}562$.

♦ Exercice 2.a p. 285

a) $f(x) = x - \dfrac{1}{x+1}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{(2x+1)^2}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{3}{4}$

c) $f(x) = x\,(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1)$; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

d) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

♦ Exercice 2.b p. 285

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2}{3^n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = 1 - \dfrac{1}{3^n}$. Donc : $\lim u_n = 0$ et $\lim v_n = 1$.

♦ Exercice 2.c p. 285

a) 0 *b)* 0 *c)* $+\infty$ *d)* 25 *e)* 0 *f)* 0.

♦ Exercice 2.d p. 285

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 1 - n$; $\lim u_n = -\infty$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq n - 1$; $\lim u_n = +\infty$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq \ln n - 1$; $\lim u_n = +\infty$

d) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 1 - 3^n$; $\lim u_n = -\infty$

e) $\forall n \in \mathbb{N},\ -\dfrac{1}{1+n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{1+n}$; $\lim u_n = 0$

f) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; $\lim u_n = 1$

g) $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{2n}{n^2+1}$; $\lim u_n = 0$

h) $\forall n \in \mathbb{N},\ -\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \leq u_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$; $\lim u_n = 0$.

♦ Exercice 2.e p. 286

1. *a)* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pi$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{x \to \pi} \cos x = -1$

2. *a)* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} = 1$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

♦ Exercice 2.f p. 286

1. Soit p(n) la proposition : « $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ ».

- On a : $\dfrac{1}{1!} = \dfrac{1}{2^{1-1}}$; donc p(1) est vraie.
- Soit k un entier naturel non nul.

Si p(k) est vraie, alors : $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$.

On a : $\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{2}$; donc : $\dfrac{1}{(k+1)k!} \leq \dfrac{1}{2 \times 2^{k-1}}$;

ou : $\dfrac{1}{(k+1)!} \leq \dfrac{1}{2^k}$; c'est-à-dire : p(k + 1) est vraie.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

2. On démontre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 3 - \dfrac{2}{2^n}$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 3$; la suite (u_n) est majorée par 3.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée ; donc elle converge.

♦ Exercice 2.g p. 286

1. • On montre aisément par récurrence que la suite (u_n) est positive.

• $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{{u_n}^2 + 2} < \dfrac{1}{2}$ et $u_n > 0$; donc : $\dfrac{u_n}{{u_n}^2 + 2} < \dfrac{u_n}{2}$; c'est-à-dire : $u_{n+1} < \dfrac{u_n}{2}$.

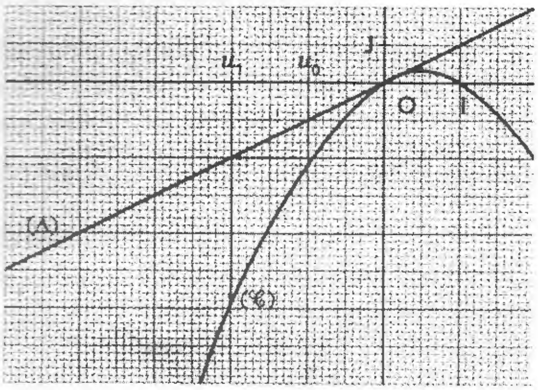
2. • On a : $u_n < \dfrac{u_{n-1}}{2}$; $u_{n-1} < \dfrac{u_{n-2}}{2}$; ... ; $u_2 < \dfrac{u_1}{2}$; $u_1 < \dfrac{u_0}{2}$.

En faisant le produit membre à membre, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < \dfrac{u_0}{2n}$. Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

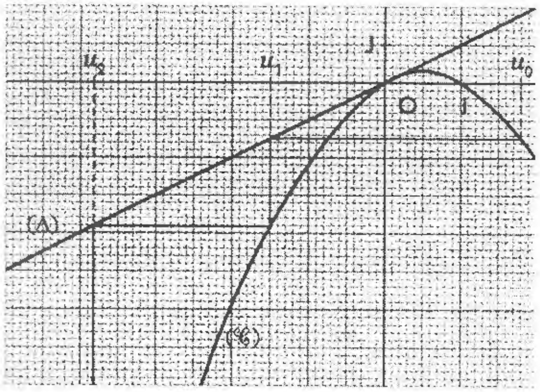
♦ Exercice 3.a p. 290

1. Si $a \in \{0\ ;\ 1\}$, alors : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$.

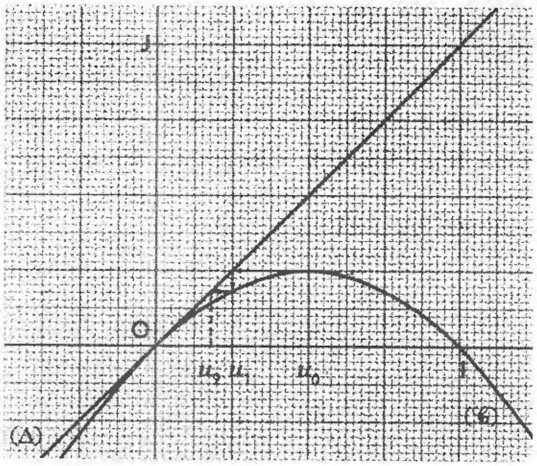
$a \in \left]-\infty\ ;\ 0\right[$



$a \in \left]1\ ;\ +\infty\right[$



$a \in \left]0\ ;\ 1\right[$



On conjecture que :

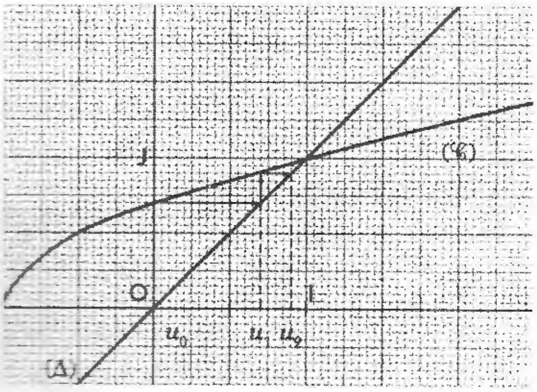
- si $a \in \{0\ ;\ 1\}$, alors : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$;
- si $a \in \left]0\ ;\ 1\right[$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;
- si $a \in \left]-\infty\ ;\ 0\right[\cup \left]1\ ;\ +\infty\right[$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

2. *a)* $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = -\,u_n^2$;
donc : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leq 0$; (u_n) est décroissante.
On démontre par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 0.

b) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; donc elle converge.

♦ Exercice 3.b p. 290

1. $a \in [0\ ;\ 1]$



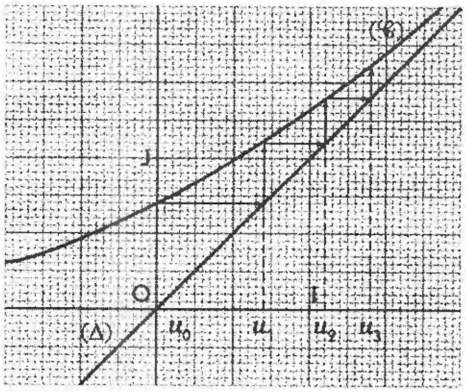
On conjecture que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

2. *a)* On démontre par récurrence que :
$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)$.

b) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

♦ Exercice 3.c p. 290

1.



On conjecture que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. *a)* On a : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n} + 1 = v_n + 1$
donc : (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b) $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1)$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercices d'apprentissage

ÉTUDE GLOBALE D'UNE SUITE

♦ Exercice 1 p. 291

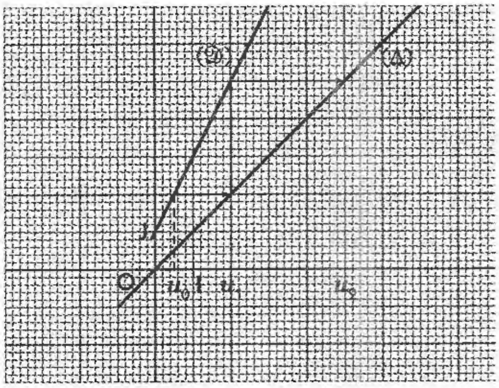
a) $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 1.$ *b)* $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < \frac{1}{2}.$ *c)* $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq 1.$ *d)* $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{e}.$

♦ Exercice 2 p. 291

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq 4.$ *b)* $\forall n \geq 3, 0 < u_n \leq \frac{1}{e}.$ *c)* $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < \ln 2.$ *d)* $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq 1.$

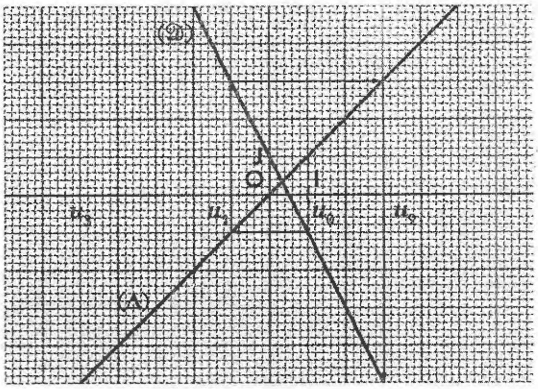
♦ Exercice 3 p. 291

a)



La suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$ et non majorée.

b)



La suite (u_n) n'est ni majorée, ni minorée.

♦ Exercice 4 p. 291

1. On a : $\forall p \geq 2, p^2 \geq (p-1)p$; donc : $\forall p \geq 2, \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}.$

2. On a :

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2^2} & \leq & 1 - \frac{1}{2}\,; \\ \frac{1}{3^2} & \leq & \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,; \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ \frac{1}{(n-1)^2} & \leq & \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\,; \\ \frac{1}{n^2} & \leq & \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}. \end{array}$$

En faisant la somme membre à membre, on obtient : $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{n}.$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leq u_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$ On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq 2$; (u_n) est bornée.

♦ Exercice 5 p. 291

1. On démontre par récurrence que : $\forall p \geq 2, p^p \geq 2^p$; donc : $\forall p \geq 2, \frac{1}{p^p} \leq \frac{1}{2^p}.$

2. On a : $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}.$

Déduction

On a : $\frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{2^2}$; $\frac{1}{3^3} \leq \frac{1}{2^3}$; ... ; $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}.$

En faisant la somme membre à membre, on obtient : $\forall n \geq 2, u_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}.$

Donc : $\forall n \geq 2, 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$; (u_n) est bornée.

♦ Exercice 6 p. 291

a) (u_n) est décroissante à partir du rang 3 *b)* (u_n) est décroissante

c) (u_n) est décroissante à partir du rang 3 *d)* (u_n) est croissante.

♦ Exercice 7 p. 291

On démontre par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 2^n(u_1 - u_0) = 2^n(a - 3)$.

Donc : si $a = 3$, alors la suite (u_n) est constante et égale à 3 ;
si $a > 3$, alors la suite (u_n) est croissante ;
si $a < 3$, alors la suite (u_n) est décroissante.

♦ Exercice 8 p. 291

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = n(n - 4)$; donc, la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

♦ Exercice 10 p. 291

1. *a)* On a : $u_1 = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = 1$ et $u_3 = \dfrac{1}{4}$.

b) $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ u_{2p} = \dfrac{1}{2p - 1}$; $u_{2p+1} = \dfrac{1}{2p + 2}$ et $u_{2p+2} = \dfrac{1}{2p + 1}$.

On en déduit que : $u_{2p+1} < u_{2p+2} < u_{2p}$; donc (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

2. $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ u_{2p+2} - u_{2p} = \dfrac{-2}{(2p + 1)(2p - 1)}$; donc (u_{2p}) est décroissante.

$\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ u_{2p+1} - u_{2p-1} = \dfrac{-1}{2p(p + 1)}$; donc (u_{2p-1}) est décroissante.

♦ Exercice 11 p. 291

1. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n = 2^n$ et $u_n - v_n = -4n + 3$.

2. $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 2^n - n^2 + \dfrac{n}{2} + 1$ et $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = 2^n + n^2 - \dfrac{n}{2} - 2$.

♦ Exercice 12 p. 291

1. $a = \dfrac{1}{3}$.

2. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{5}{3} \times 2^{n-1}$; $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \dfrac{5}{3}(2^n - 1)$.

3. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = v_n + \dfrac{1}{3}$; $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{5}{3}(2^n - 1) + \dfrac{n}{3}$.

LIMITES DE SUITES

♦ Exercice 13 p. 291

a) 1 *b)* π *c)* $\dfrac{1}{2}$ *d)* 0.

♦ Exercice 14 p. 291

a) $\dfrac{4}{3}$ *b)* 0 *c)* $\dfrac{1}{2}$.

♦ Exercice 16 p. 292

a) 1 *b)* $\dfrac{1}{3}$ *c)* $-\infty$ *d)* 0.

♦ Exercice 17 p. 292

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

♦ Exercice 18 p. 292

a) 0 *b)* $+\infty$ *c)* $-\infty$ *d)* -1

e) 1 *f)* 1 *g)* $+\infty$ *h)* 0.

♦ Exercice 19 p. 292

a) $\forall\, n \geq 1,\ \dfrac{n - 1}{n + 1} \leq u_n \leq \dfrac{n + 1}{n - 1}$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| \leq \dfrac{n}{n^2 + 1}$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

c) $\forall\, n \geq 1,\ \sqrt{\dfrac{n}{n + 1}} \leq u_n \leq \sqrt{\dfrac{n}{n - 1}}$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

d) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| \leq \dfrac{1}{n} + \left|\dfrac{\ln n}{n}\right|$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

◆ Exercice 20 p. 292

1. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n}{n^2+n} \leq \dfrac{n}{n^2+p} \leq \dfrac{n}{n^2+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

2. On en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

◆ Exercice 21 p. 292

1. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{\sqrt{n+p}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$; donc : $u_n \geq \dfrac{n}{\sqrt{2n}}$ ou $u_n \geq \sqrt{\dfrac{n}{2}}$.

2. On en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

◆ Exercice 22 p. 292

a) 1 *b)* 1 *c)* 0 *d)* 1 *e)* 0 *f)* 1.

◆ Exercice 23 p. 292

1. On conjecture que la suite (u_n) a pour limite 8.

2. *a)* On a : $a = 8$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 8 = \dfrac{1}{2}(u_{n-1} - 8)$; donc $(u_n - 8)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 8 = \dfrac{1}{2^n}(u_0 - 8) = \dfrac{-8}{2^n}$.

Par suite : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 8$.

3. *a)* Les droites d'équations $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$ et $y = x$ se coupent au point d'abscisse $\dfrac{8}{3}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \dfrac{8}{3} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \dfrac{8}{3}\right) = \left(-\dfrac{8}{3}\right) \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{8}{3}$.

b) Les droites d'équations $y = -2x + 4$ et $y = x$ se coupent au point d'abscisse $\dfrac{4}{3}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \dfrac{4}{3} = (-2)^n \left(u_0 - \dfrac{4}{3}\right) = \left(-\dfrac{4}{3}\right) \times (-2)^n$; donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{4}{3} + \left(-\dfrac{4}{3}\right) \times (-2)^n$.

- Si n est pair, alors : $u_n = \dfrac{4}{3}(1 - 2^n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- Si n est impair, alors : $u_n = \dfrac{4}{3}(1 + 2^n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

La suite (u_n) n'a pas de limite, sinon cette limite serait unique.

c) Les droites d'équations $y = 2x + 4$ et $y = x$ se coupent au point d'abscisse -4.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 4 = 2^n(u_0 + 4) = 4 \times 2^n$; donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4(-1 + 2^n)$.

On en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

SUITES MONOTONES CONVERGENTES

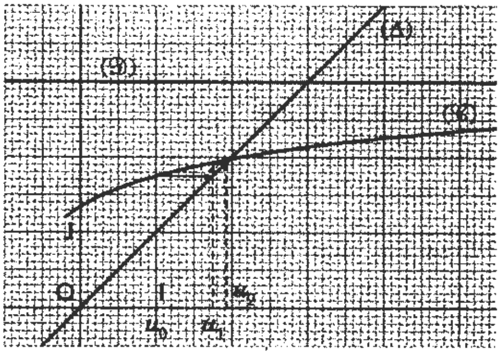
◆ Exercice 24 p. 292

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x+4}{x+3}$ est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{5}{(x+3)^2}$.

Donc, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Sur la figure ci-contre, $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de la fonction f et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

On conjecture que la suite (u_n) a pour limite 2.



2. *a)* Soit p(n) la proposition : « $0 \leq u_n \leq 2$ ».

- On a : $u_0 = 1$; donc p(0) est vraie.
- Soit k un entier naturel.

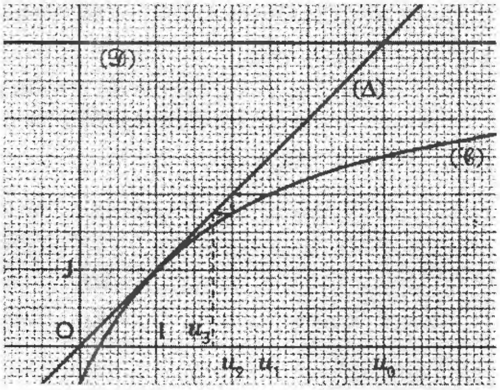
Si p(k) est vraie, alors : $0 \leq u_k \leq 2$.

La fonction f étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, on a : $f(0) \leq f(u_k) \leq f(2)$;
c'est-à-dire : $\frac{4}{3} \leq u_{k+1} \leq 2$.
Donc : $0 \leq u_{k+1} \leq 2$ et $p(k+1)$ est vraie.
On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 2$.
b) Soit $p(n)$ la proposition : « $u_{n+1} \geq u_n$ ».
- On a : $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{7}{4}$; donc $p(0)$ est vraie.
- Soit k un entier naturel.

Si $p(k)$ est vraie, alors : $u_{k+1} \geq u_k$.
La fonction f étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, on a : $f(u_{k+1}) \geq f(u_k)$; c'est-à-dire : $u_{k+2} \geq u_{k+1}$.
Donc : $p(k+1)$ est vraie.
On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$; c'est-à-dire la suite (u_n) est croissante.
3. La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle admet une limite finie l telle que : $l = \frac{3l+4}{l+3}$.

On trouve : $l = 2$.

♦ Exercice 25 p. 292



1. La suite (u_n) est constante pour : $a = 1$.

2. La fonction $f : x \mapsto \frac{4x-1}{x+2}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto \frac{9}{(x+2)^2}$.

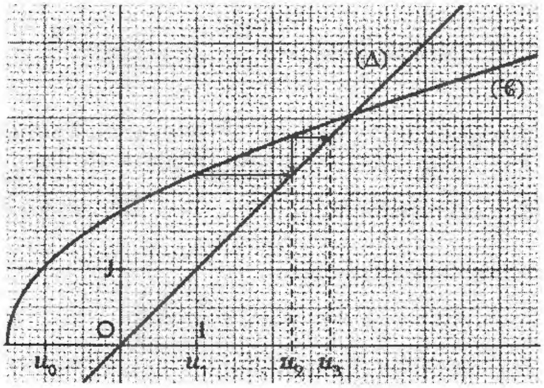
Donc, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Sur la figure ci-contre, $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de la fonction f et (Δ) la droite d'équation $y = x$.
- On démontre par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 1.
- On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n+2}$;

donc : la suite (u_n) est décroissante.
On aurait également pu faire un raisonnement par récurrence.
La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle admet une limite finie l telle que : $l = \frac{4l-1}{l+2}$.

On trouve : $l = 1$.

♦ Exercice 26 p. 292



1. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$.

Donc, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.
Sur la figure ci-contre, $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de la fonction f et (Δ) la droite d'équation $y = x$.
On conjecture que la suite (u_n) a pour limite 3.

2. *a)* • Soit $p(n)$ la proposition : « $-1 \leq u_n \leq 3$ ».
– On a : $u_0 = -1$; donc $p(0)$ est vraie.
– Soit k un entier naturel.
Si $p(k)$ est vraie, alors : $-1 \leq u_k \leq 3$.
La fonction f étant strictement croissante sur $]-1\,;+\infty\,[$,
on a : $f(-1) \leq f(u_k) \leq f(3)$; c'est-à-dire : $1 \leq u_{k+1} \leq 3$.
Donc : $p(k+1)$ est vraie.
On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ -1 \leq u_n \leq 3$.
- On démontre par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

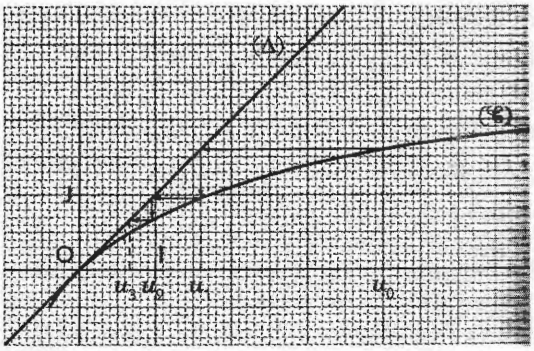
b) La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle admet une limite finie l telle que : $l = \sqrt{2l+3}$.
On trouve : $l = 3$.

◆ Exercice 27 p. 292

1. La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Donc, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Sur la figure ci-contre, $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de la fonction f et (Δ) la droite d'équation $y = x$.



2. On démontre par récurrence que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle admet une limite finie l telle que : $l = \ln(1+l)$.
Par lecture graphique, on trouve : $l = 0$.

Exercices d'approfondissement

◆ Exercice 28 p. 293

Désignons par : u_0 la superficie du terrain ;
u_n la superficie attribuée à la n-ième étape($n \neq 0$) du partage.

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{u_0}{2^n}$.

La répartition des différentes parts se fait comme l'indique le tableau suivant.

Frères	Parts						
1er frère	u_1	u_4	u_7	....	u_{3k-2}	....	u_{3n-2}
2e frère	u_2	u_5	u_8	....	u_{3k-1}	....	u_{3n-1}
3e frère	u_3	u_6	u_9	....	u_{3k}	....	u_{3n}

On a : $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = u_0\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) = u_0$.

On en déduit que le terrain peut être totalement partagé de cette manière.

Posons : $A(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{3k-2}$; $B(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{3k-1}$ et $C(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{3k}$.

On a : $A(n) = \dfrac{u_0}{2} \times \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^{3n}}}{1 - \dfrac{1}{2^3}}$; $B(n) = \dfrac{u_0}{2^2} \times \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^{3n}}}{1 - \dfrac{1}{2^3}}$ et $C(n) = \dfrac{u_0}{2^3} \times \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^{3n}}}{1 - \dfrac{1}{2^3}}$.

Les parts du 1er frère, du 2e frère et du 3e frère sont les limites respectives des suites $A(n)$, $B(n)$ et $C(n)$.
On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} A(n) = 8$; $\lim\limits_{n \to +\infty} B(n) = 4$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} C(n) = 2$.
Donc, les parts du 1er frère, du 2e frère et du 3e frère sont respectivement 8, 4 et 2 hectares.

◆ Exercice 29 p. 293

1. On trouve : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{1}{4}$.

2. On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - a_{n+1} = 3\,u_n - n^2 + n - \dfrac{(n+1)^2}{2} - \dfrac{1}{4} = 3\left(u_n - \dfrac{n^2}{2} - \dfrac{1}{4}\right) = 3v_n$.
Donc, (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

3. On a : $v_0 = u_0 - a_0 = 2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}$; donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{7}{4} \times 3^n$.
On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{7}{4} \times 3^n + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{1}{4}$.
On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
Les suites (u_n) et (v_n) divergent.

◆ Exercice 30 p. 293

1. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}$; donc, la suite (u_n) est croissante.

2. $\forall n \geq 2, \ln n \geq \ln 2 \Rightarrow n\ln n \geq n\ln 2 \Rightarrow n^n \geq 2^n \Rightarrow \dfrac{1}{n^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$.

On démontre par récurrence que : $\forall n \geq 2, 0 \leq u_n \leq v_n$.

Déduction

On a :

$$\begin{aligned} v_n - v_{n-1} &= \frac{1}{2^n}\,; \\ v_{n-1} - v_{n-2} &= \frac{1}{2^{n-1}}\,; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ v_3 - v_2 &= \frac{1}{2^3}\,; \\ v_2 - v_1 &= \frac{1}{2^2}. \end{aligned}$$

En faisant la somme membre à membre, on obtient : $v_n - 1 = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dots + \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^n}$.

Donc : $\forall n \geq 2, v_n = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2^n}$.

On en déduit que : $\forall n \geq 2, 0 \leq u_n \leq \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2^n}$.

Par suite : $\forall n \geq 2, 0 \leq u_n \leq \dfrac{3}{2}$; la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{3}{2}$.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle admet une limite finie l telle que : $0 \leq l \leq \dfrac{3}{2}$.

◆ Exercice 31 p. 293

1. La fonction $f : x \mapsto x - \dfrac{x^2}{2} - \ln(1 + x)$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

et la fonction $g : x \mapsto x - \ln(1 + x)$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \dfrac{k}{n^2} - \dfrac{k^2}{2n^4} < \ln\left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right) < \dfrac{k}{n^2}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) < \ln(u_n) < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2}$.

Or : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{6n^3 - 8n^2 + 3n - 1}{12n^3} < \ln(u_n) < \dfrac{n-1}{2n}$. Par suite : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln(u_n) = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{e}$.

◆ Exercice 32 p. 293

1. La fonction $f : x \mapsto 2 + \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$.

Donc, la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Sur la figure ci-contre, $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de la fonction f et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

On conjecture que la suite (u_n) a pour limite l'abscisse l du point d'intersection de (Δ) et $(\mathscr{C})$.

On a : $l = 2 + \dfrac{1}{l}$ et $l > 0$; on trouve : $l = 1 + \sqrt{2}$.

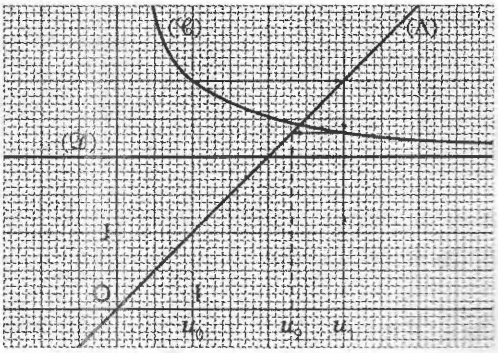
2. *a)* On remarque que la suite (u_n) est strictement positive.

$\text{Sign}(u_{2p+2} - u_{2p}) = \text{Sign}(u_{2p} - u_{2p-2}) = \dots = \text{Sign}(u_2 - u_0)$.

Or : $u_2 - u_0 = \dfrac{4}{3}$; donc : (u_{2p}) est croissante.

On démontre par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}, u_{2p} < 1 + \sqrt{2}$.

b) De façon analogue, on démontre que la suite (u_{2p+1}) est décroissante et minorée par $1 + \sqrt{2}$.



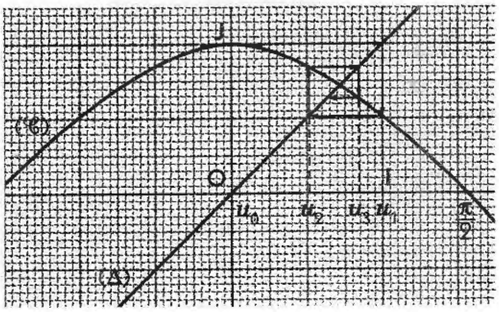
3. La suite (u_{2p}) est croissante et majorée, donc elle admet une limite finie l telle que : $l = 2 + \frac{1}{l}$ et $l \geq 0$.

La suite (u_{2p+1}) est décroissante et minorée, donc elle admet une limite finie l' telle que : $l' = 2 + \frac{1}{l'}$ et $l' \geq 0$.

On obtient : $l = l' = 1 + \sqrt{2}$.

♦ Exercice 33 p. 293

1. *a)* Ci-contre, la représentation graphique des premiers termes de la suite (u_n). On conjecture que (u_n) converge.



b) La fonction $g : x \mapsto x - \cos x$ est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et sa fonction dérivée est $g' : x \mapsto 1 + \sin x$.

On a : $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $1 \leq g'(x) \leq 2$; la fonction g est strictement croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et donc sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

De plus : $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2}$, $g(1) = 1 - \cos 1$; et : $\frac{1}{2} < \frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2} < 0 < 1 - \cos 1 < 1$.

La fonction g est continue, strictement croissante sur K et $0 \in g(\mathrm{K})$; donc, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans K.

c) On a : $\forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = -\sin x$.

- La fonction f est décroissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et donc sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

On a : $f\left(\left[\frac{1}{2} ; 1\right]\right) = \left[\cos 1 ; \cos\frac{1}{2}\right]$, $\cos 1 = 0{,}54$ et $\cos\frac{1}{2} = 0{,}88$; donc : $f\left(\left[\frac{1}{2} ; 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

- On a : $\forall x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, $-0{,}84 < f'(x) < -0{,}47$; donc : $\forall x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, $f'(x) \leq 0{,}9$.

2. *a)* • On démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathrm{K}$.
•D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq 0{,}9\,|u_n - \alpha|$;
c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}9\,|u_n - \alpha|$.

b) On en déduit que :

$$\begin{array}{lcl} |u_n - \alpha| & \leq & 0{,}9\,|u_{n-1} - \alpha| ; \\ |u_{n-1} - \alpha| & \leq & 0{,}9\,|u_{n-2} - \alpha| ; \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ |u_3 - \alpha| & \leq & 0{,}9\,|u_2 - \alpha| ; \\ |u_2 - \alpha| & \leq & 0{,}9\,|u_1 - \alpha|. \end{array}$$

En faisant le produit membre à membre, on obtient : $|u_n - \alpha| \leq (0{,}9)^{n-1}\,|u_1 - \alpha|$.

Or : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \alpha \leq \frac{1}{2}$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\,(0{,}9)^{n-1}$.

c) D'après la question précédente : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

Donc, une valeur approchée de α à 10^{-3} près est : $\cos(u_{60})$.

♦ Exercice 34 p. 293

A

1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_n	3	7	17	41	99	236	577	1 393	3 363
q_n	2	5	12	29	70	169	408	985	2 375

2. *a)* On démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n^2 - 2q_n^2 = (-1)^{n+1}$.

b) On conjecture que : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} q_n = +\infty$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n^2} + 2$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 = 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty}\frac{p_n}{q_n} = \sqrt{2}$.

3. *a)* $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$.

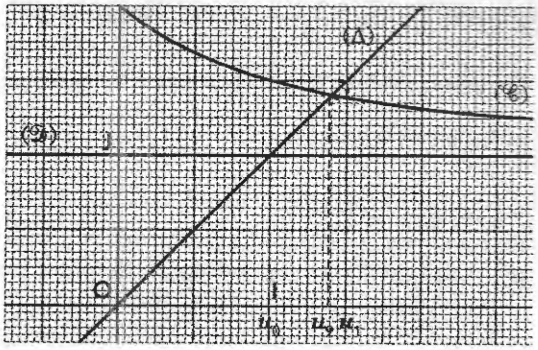
b) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x+1}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{-1}{(x+1)^2}$.

Donc, la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Sur la figure ci-contre, $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de la fonction f et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

La suite (u_n) converge vers l'abscisse l du point d'intersection de (Δ) et $(\mathscr{C})$;

on a : $l = \dfrac{l+2}{l+1}$ et $l \geq 0$, donc : $l = \sqrt{2}$.



B

$v_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2} + \dfrac{1}{v_n}$.

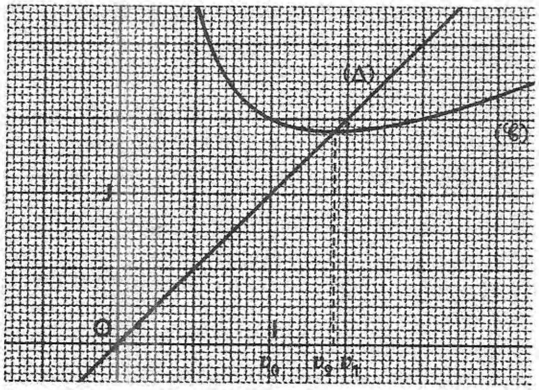
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+2}{2x}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{x^2-2}{2x^2}$.

f est décroissante sur $]0\,;\sqrt{2}]$ et croissante sur $[\sqrt{2}\,;+\infty[$.

Sur la figure ci-contre, $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de la fonction f et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

La suite (u_n) converge vers l'abscisse l du point d'intersection de (Δ) et $(\mathscr{C})$.

On a : $l = \dfrac{l^2+2}{2l}$ et $l \geq 0$; donc : $l = \sqrt{2}$.



Remarque

- On peut démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n^2 - 2b_n^2 = 1$.
- On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n^2 = \dfrac{1}{b_n^2} + 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \sqrt{2}$.

♦ Exercice 35 p. 293

1. On a : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ w_p = v_p + \dfrac{1}{2_{p+1}}$; donc : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ v_p < w_p$.

2. *a)* $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ v_{p+1} = v_p + \dfrac{1}{(2p+1)(2p+2)}$; la suite (v_p) est croissante.

$\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ w_{p+1} = w_p - \dfrac{1}{(2p+2)(2p+3)}$; donc : la suite (w_p) est décroissante.

b) On a : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ v_1 < v_p < w_p < w_1$.
La suite (v_p) est croissante et majorée par w_1, donc elle converge.
La suite (w_p) est décroissante et minorée par v_1, donc elle converge.

3. *a)* D'après la question **1.** : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ w_p - v_p = \dfrac{1}{2_{p+1}}$; donc : $\lim\limits_{p \to +\infty} (w_p - v_p) = 0$.

b) Donc (v_p) et (w_p) admettent une limite finie commune l qui est nécessairement la limite de la suite (u_n).
On a : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ v_2 < v_p < w_p < w_2$; donc : $v_2 \leq l \leq w_2$.
Or : $v_2 \approx 0{,}58$ et $w_2 \approx 0{,}78$. Donc : 0,68 est une valeur approchée de l à 10^{-2} près.

♦ Exercice 36 p. 293

1. *a)*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

b) On a : $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

2. *a)* On a : $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (*nombre d'or*) et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

On démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ (*formule de Binet*).

b) On a : $|\beta| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \beta^n = 0$ et $\alpha > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha^n = +\infty$. Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

♦ Exercice 38 p. 294

Une question fondamentale : l'ordre d'utilisation des récipients est-il important ou pas ?
Par exemple, les façons suivantes de vider le tonneau sont-elles identiques :
$1 \times 2\text{L} + 18 \times 1\text{L}$; $2 \times 2\text{L} + 16 \times 1\text{L}$; $1 \times 2\text{L} + 16 \times 1\text{L} + 1 \times 2\text{L}$?

Nous distinguons donc deux cas.

1er cas : l'ordre n'est pas important

Utilisation du dénombrement

$x = 2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = 1$	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0

Donc, il y a **11** façons de vider le tonneau.

Utilisation de l'arithmétique
Soit x le nombre de fois où le récipient de 2 L est utilisé et y le nombre de fois où le récipient de 1L est utilisé.
On a : $2x + y = 20$ (E).
Une solution particulière de (E) est : (9,2).
Les solutions de (E) sont les couples $(k + 9 ; -2k + 2)$, où $k \in \mathbb{Z}$.
On a : $k + 9 \geq 0$ et $-2k + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -9 \leq k \leq 1$.
Donc, il y a **11 façons** de vider le tonneau.

2e cas : l'ordre est important

Soit U_n le nombre de façons de vider un tonneau de n litres avec deux récipients de capacités respectives 1 litre et 2 litres.
Un tonneau de n litres se videra de l'une des deux manières suivantes :
– vider 1 litre du tonneau ; il reste alors $(n-1)$ litres à vider, donc U_{n-1} façons de vider ;
– vider 2 litres du tonneau ; il reste alors $(n-2)$ litres à vider, donc U_{n-2} façons de vider.

Donc, on a : $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$.

On en déduit que : $U_1 = 1$; $U_2 = 2$; $U_3 = 3$; $U_4 = 5$; $U_5 = 8$; $U_6 = 13$; $U_7 = 21$; $U_8 = 34$; $U_9 = 55$; $U_{10} = 89$; $U_{11} = 144$; $U_{12} = 233$; $U_{13} = 377$; $U_{14} = 610$; $U_{15} = 987$; $U_{16} = 1\,597$; $U_{17} = 2\,584$; $U_{18} = 4\,181$; $U_{19} = 6\,765$; $\mathbf{U_{20} = 10\,946}$.

Donc, il y a **10 946 façons** de vider le tonneau.

♦ Exercice 39 p. 294

1. La fonction f étant croissante sur $]a\,;b[$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Sign}[f(u_n) - f(u_{n-1})] = \text{Sign}(u_n - u_{n-1})$;
c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Sign}(u_{n+1} - u_n) = \text{Sign}(u_n - u_{n-1})$.
On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{Sign}(u_{n+1} - u_n) = \text{Sign}(u_1 - u_0)$; donc, la suite (u_n) est monotone.
De plus, $f(]a\,;b[) \subset\,]a\,;b[$; donc, la suite (u_n) est bornée.
La suite (u_n) est monotone et bornée, donc elle converge.

2. La fonction f^2 étant croissante sur $]a\,;b[$, on a : $\forall p \geq 2$, $\text{Sign}[f^2(u_{2p}) - f^2(u_{2p-2})] = \text{Sign}(u_{2p} - u_{2p-2})$;
c'est-à-dire : $\forall p \geq 2$, $\text{Sign}(u_{2p+2} - u_{2p}) = \text{Sign}(u_{2p} - u_{2p-2})$.

On en déduit que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\text{Sign}(u_{2p+2} - u_{2p}) = \text{Sign}(u_2 - u_0)$; donc, la suite (u_{2p}) est monotone.

De même, on montre que la suite (u_{2p+1}) est monotone.

Les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont monotones et bornées, donc elles convergent.

3. *a)* La fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x+1}$ est dérivable sur $]0\,;3[$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{2}{(x+1)^2}$.
Donc, la fonction f est croissante sur $]0\,;3[$. De plus : $f(]0\,;3[) \subset \,]0\,;3[$.
D'après la question **1.**, la suite (u_n) est monotone et convergente.

Sa limite l vérifie : $l = \dfrac{3l+1}{l+1}$ et $l > 0$; on trouve : $l = 1 + \sqrt{2}$.

b) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x^2+1}$ est dérivable sur $]0\,;2[$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2}$.
Donc, la fonction f est décroissante sur $]0\,;2[$. De plus : $f(]0\,;2[) \subset \,]0\,;2[$.
D'après la question **2.**, les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont monotones et convergentes.

c) La fonction $f : x \mapsto (1-x)^2$ est dérivable sur $]0\,;1[$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto 2(x-1)$.
Donc, la fonction f est décroissante sur $]0\,;1[$. De plus : $f(]0\,;1[) \subset \,]0\,;1[$.
D'après la question **2.**, les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont monotones et convergentes.

♦ Exercice 40 p. 294

1. *a)* La fonction $g : x \mapsto x - f(x)$ est continue sur $[0\,;1]$ et $g([0\,;1]) = [-1\,;1]$.
Donc : $\exists\, \alpha \in [0\,;1]$ tel que : $g(\alpha) = 0$; c'est-à-dire : $\exists\, \alpha \in [0\,;1]$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$.
b) Supposons qu'il existe un réel β de $[0\,;1]$ tel que : $\beta \neq \alpha$ et $f(\beta) = \beta$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq k|\beta - \alpha|$; donc : $(k-1)|\beta - \alpha| \geq 0$ et $k \geq 1$.
Ceci est contraire à l'hypothèse que : $k \in [0\,;1[$. Par suite : $\beta = \alpha$.

2. *a)* On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{array}{lcl} |u_{n+1} - \alpha| & = & |f(u_n) - f(\alpha)|\ ; \\ |f(u_n) - f(\alpha)| & \leq & k|u_n - \alpha| \end{array}$$
(*inégalité des accroissements finis*) .
Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$.
b) On a :
$$\begin{array}{lcl} |u_n - \alpha| & \leq & k|u_{n-1} - \alpha|\ ; \\ |u_{n-1} - \alpha| & \leq & k|u_{n-2} - \alpha|\ ; \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ |u_2 - \alpha| & \leq & k|u_1 - \alpha|\ ; \\ |u_1 - \alpha| & \leq & k|u_0 - \alpha|\ . \end{array}$$
En faisant le produit membre à membre, on obtient : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq k^n|u_0 - \alpha|$.
Or : $k \in [0\,;1[\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

3. ***Application***
La fonction $f' : x \mapsto \sqrt{x+1}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.
On a : $\forall\, x \in [0\,;+\infty[$, $f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$; $u_0 \in [0\,;+\infty[$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
(u_n) admet une limite finie l telle que : $l = \sqrt{l+1}$ et $l \geq 0$.
On trouve : $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

♦ Exercice 42 p. 294

1. Soit p(n) la proposition : « $u_n > 0$ et $v_n > 0$ ».
- On a : $0 < u_0 < v_0$; donc p(0) est vraie.
- Soit k un entier naturel.

Si p(k) est vraie, alors : $u_k > 0$ et $v_k > 0$.
Donc : $\sqrt{u_k v_k} > 0$ et $\dfrac{u_k + v_k}{2} > 0$; c'est-à-dire : $u_{k+1} > 0$ et $v_{k+1} > 0$.
Par suite : p($k+1$) est vraie.
On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2. *a)* On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.
Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$; par suite : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

*b) **Sens de variation de (u_n)***

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n(v_n - u_n)$.

Or : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et $(v_n - u_n) \geq 0 \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n(v_n - u_n) \geq 0$.

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 0$ et la suite (u_n) est croissante.

Sens de variation de (v_n)

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2}$.

Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n \leq 0$ et la suite (v_n) est décroissante.

c) • On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$; donc : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n - u_n$.

• Démontrons par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$.

Soit p(n) la proposition : « $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$ ».

– On a : $v_1 - u_1 - \dfrac{v_0 - u_0}{2} = \left(v_1 - \dfrac{v_0 - u_0}{2}\right) - u_1 = u_0 - u_1$.

La suite (u_n) étant croissante, on a : $u_0 - u_1 \leq 0$; donc : $v_1 - u_1 \leq \dfrac{v_0 - u_0}{2}$ et p(1) est vraie.

– Soit k un entier naturel.

Si p(k) est vraie, alors : $v_k - u_k \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^k (v_0 - u_0)$.

On a : $v_{k+1} - u_{k+1} - \dfrac{v_k - u_k}{2} = \left(v_{k+1} - \dfrac{v_k - u_k}{2}\right) - u_{k+1} = u_k - u_{k+1}$.

La suite (u_n) étant croissante, on a : $u_k - u_{k+1} \leq 0$; donc : $v_{k+1} - u_{k+1} \leq \dfrac{v_k - u_k}{2}$.

Par suite : $v_{k+1} - u_{k+1} \leq \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^k (v_0 - u_0)$; ou : $v_{k+1} - u_{k+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} (v_0 - u_0)$.

Donc : p(k + 1) est vraie.

On en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$.

Limites des suites (u_n) et (v_n)

• On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, donc elle admet une limite finie.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc elle admet une limite finie.

• On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$; donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Comme les suites (u_n) et (v_n) admettent une limite finie, on en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

3. *Encadrement de la limite*

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n - u_n \leq 6 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$$6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-5} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 6 + 5\ln 10}{\ln 2} \Leftrightarrow n \geq 18.$$

Donc, la limite commune des suites (u_n) et (v_n) à 10^{-5} près est : $u_{18} = v_{18}$.

14. Intégration

(pages 295 à 320 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- Introduire la notion d'intégrale.
- Mettre en place quelques techniques de calcul.
- Utiliser ce nouvel outil pour :
  - calculer des grandeurs (aires, volumes, moments d'inertie,...) ;
  - faire des approximations ;
  - définir de nouvelles fonctions ;
  - éudier des suites.

COMMENTAIRES

Les changements de variables non affines sont hors programme.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Intégrale d'une fonction continue • Notion d'intégrale : – définition et conséquences ; – interprétation graphique de l'intégrale ; – interprétation cinématique de l'intégrale.	• Calculer des intégrales simples à l'aide de l'interprétation graphique.
• Propriétés algébriques : – relation de Chasles ; – linéarité de l'intégrale ; – propriétés de comparaison.	• Utiliser les propriétés de linéarité pour calculer une somme d'intégrales. • Démontrer des inégalités à l'aide du calcul intégral. Encadrer une intégrale.
Techniques de calcul intégral • Techniques de base : – utilisation de primitives usnelles ; – intégration par parties ; – changement de variable affine ; – intégration de fonctions paires, impaires, périodiques.	• Calculer des intégrales en utilisant : – des primitives usuelles ; – une intégration par parties ; – un changement de variable affine ; – la parité ou la périodicité.
• Intégration de fonctions particulières : – intégration de polynômes trigonométriques ; – intégration de fonctions rationnelles.	• Calculer l'intégrale d'une fonction trigonométrique. • Calculer l'intégrale d'une fonction rationnelle.
• Calcul approché d'une intégrale.	• Calculer une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.
Applications du calcul intégral • Calculs d'aires et de volumes. • Fonctions définies par une intégrale.	• Calculer des aires et des volumes. • Étudier une fonction définie par une intégrale.

Exercices du cours

◆ Exercice 1.a p. 301

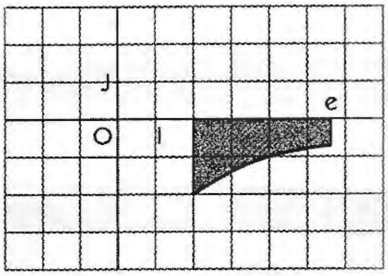
a) $I = [t^2]_{-1}^{2} = 3$ *b)* $I = [\frac{t^3}{3}]_{2}^{0} = -\frac{8}{3}$ *c)* $I = [-\frac{1}{x}]_1^2 = \frac{1}{2}$

d) $I = [2\sqrt{x}]_{\frac{1}{2}}^{4} = 4 - \sqrt{2}$ *e)* $I = [-\cos t]_0^{\pi} = 2$ *f)* $I = [e^t]_{-1}^{2} = e^2 - e^{-1}$

g) $I = [2\sqrt{t+2}]_2^0 = 2\sqrt{2} - 4$ *h)* $I = [\frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{3}{2}}]_2^3 = \frac{7}{3}\sqrt{7} - \frac{5}{3}\sqrt{5}$.

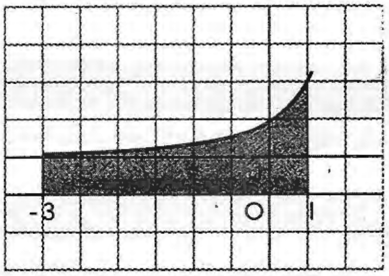
◆ Exercice 1.b p. 301

c)



$$I = 2\int_1^e \frac{dx}{x} = 2[\ln x]_1^e = 2 \text{ cm}^2$$

d)



$$I = 2\int_{-3}^{1} (e^x + 1)\,dx = 2(e + 4 - e^{-3}) \text{ cm}^2.$$

◆ Exercice 1.c p. 301

a) $I = \int_{-2}^{1} (-x+1)\,dx + \int_1^3 (x-1)\,dx = [-\frac{x^2}{2} + x]_{-2}^{1} + [\frac{x^2}{2} - x]_1^3 = \frac{13}{2}$

b) $I = \int_0^4 (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\,dx = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} - 2$.

◆ Exercice 1.d p. 301

1. $A + B = \pi$ et $A - B = 0$. **2.** $A = B = \frac{\pi}{2}$.

◆ Exercice 1.e p. 301

1. La fonction sinus étant strictement croissante sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$, $\forall x \in [\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}]$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq 1$;

donc : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}]$, $1 \leq \frac{1}{\sin x} \leq \sqrt{2}$.

2. On en déduit que : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} \leq \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx$; d'où : $\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

◆ Exercice 1.f p. 301

a) $\frac{103}{3}$ *b)* $\frac{2}{7}$ *c)* $\frac{1}{e^2 - e}$ *d)* 0.

◆ Exercice 2.a p. 308

a) $I = [\frac{1}{8}(x^2 - 4x + 1)^4]_0^4 = 0$ *b)* $I = [\ln(1 + t^2)]_0^1 = \ln 2$

c) $I = [-\frac{1}{6}\cos^6 t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}$ *d)* $I = [\frac{1}{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$

e) $I = [\frac{1}{2}e^{2x}]_{\ln 2}^{\ln 3} = \frac{5}{2}$ *f)* $I = [\frac{1}{2}e^{t^2+1}]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - e)$

g) $I = [\ln(e^{2x} + 3x)]_0^2 = \ln(e^4 + 6)$ *h)* $I = [\frac{1}{4}\ln^4 x]_1^e = \frac{1}{4}$.

♦ Exercice 2.b p. 308

a) On pose : $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin t$; donc : $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\cos t$

On a : $I = [-t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = [-t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

b) On pose : $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$; on trouve : $I = \frac{1 + e^2}{4}$

c) On pose : $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$; on trouve : $I = -\frac{2}{e} - e^2$

d) On pose : $u(t) = t$ et $v'(t) = (-t+3)^{\frac{1}{2}}$; on trouve : $I = \frac{-8 + 12\sqrt{2}}{5}$.

♦ Exercice 2.c p. 308

a) On pose : $u = 2t + 5$; donc : $du = 2dt$ et $I = \frac{1}{2}\int_0^1 u^7 du = \frac{1}{16}[u^8]_0^1 = \frac{1}{16}$

b) On pose : $u = x + 2$; on trouve : $I = \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

c) On pose : $u = x + 1$; on trouve : $I = \frac{8}{3}$

d) On pose : $u = -t + 3$; on trouve : $I = \frac{12\sqrt{2} - 8}{5}$.

♦ Exercice 2.e p. 308

a) On a : $\sin^2 5x = -\frac{1}{2}(-1 + \cos 10x)$; donc : $I = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{40}$

b) On a : $\sin^4 x = \frac{1}{8}(3 + \cos 4x - 4\cos 2x)$; donc : $I = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$

c) On a : $\cos^4 x \sin^2 x = -\frac{1}{32}(\cos 6x + 2\cos 4x - \cos 2x - 2)$; donc : $I = \frac{\sqrt{3}}{64} + \frac{\pi}{48}$

d) On a : $\cos^4 x - \sin^2 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 8\cos 2x - 1)$; donc : $I = \frac{\pi}{16}$.

♦ Exercice 2.f p. 308

$I = [3\ln(x+1) + \ln(2x+1)]_0^2 = 3\ln 3 + \ln 5.$

♦ Exercice 2.g p. 308

$I = [-\frac{1}{x} - \ln x + \ln(x+1)]_1^3 = \frac{2}{3} + \ln\frac{2}{3}.$

♦ Exercice 3.a p. 314

a) $I = \int_{-1}^{1} [(-x^3 + x + 1) - (2x^2 - 1)] \, dx = [-\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$

b) $I = \int_{-1}^{3} (\frac{x}{2} + e^{-x} - \frac{x}{2}) \, dx = \int_{-1}^{3} e^{-x} \, dx = [-e^{-x}]_{-1}^{3} = e - e^{-3}.$

♦ Exercice 3.b p. 314

a) $f(x) = -x^2 + 4x$

$f'(x) = -2x + 4$

b) $g(x) = (x-4)^2$

$g'(x) = 2(x-4).$

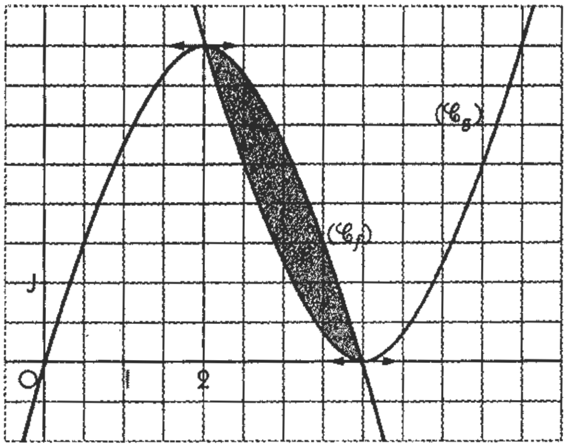
Tableau de variation

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

Tableau de variation

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Courbes représentatives



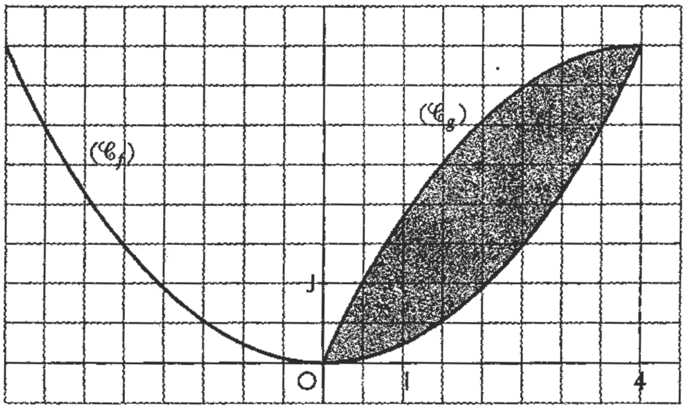
On a : $\mathscr{A} = \int_2^4 [f(x) - g(x)]\,dx$

$= \int_2^4 (-2x^2 + 12x - 16)\,dx$

$= [-\frac{2}{3}x^3 + 6x^2 - 16x]_2^4$

$= \frac{8}{3}\,u = \frac{32}{3}$ cm^2.

b) Courbes représentatives de $f : x \mapsto \frac{x^2}{4}$ et $g : x \mapsto 2\sqrt{x}$



On a : $\mathscr{A} = \int_0^4 [g(x) - f(x)]\,dx$

$= \int_0^4 (2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4})\,dx$

$= [\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12}]_0^4$

$= \frac{16}{3}\,u$

$= \frac{64}{3}$ cm^2.

♦ Exercice 3.c p. 314

Posons : $f(x) = x^n$ et $g(x) = \sqrt[n]{x}$.

Sur $[0\,;\,1]$, $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessous de $(\mathscr{C}_g)$; donc : $\int_0^1 x^n\,dx \leq \int_0^1 \sqrt[n]{x}\,dx$.

Vérification par le calcul

On a : $\int_0^1 x^n\,dx = [\frac{1}{n+1}x^{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ et $\int_0^1 \sqrt[n]{x}\,dx = [\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}]_0^1 = \frac{n}{n+1}$.

Donc : $\int_0^1 x^n\,dx \leq \int_0^1 \sqrt[n]{x}\,dx$.

♦ Exercice 3.e p. 314

On pose : $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$.

a) La fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$; donc : $D_F = [0\,;+\infty[$.

La fonction F est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.

Donc, F est croissante sur $[0\,;+\infty[$. On a : $\forall\, x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) \geq 0$;

donc : $\forall\, x \in [0\,;1]$, $F(x) \leq 0$; $\forall\, x \in [1\,;+\infty[$, $F(x) \geq 0$.

b) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}\,e^{-x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$; donc : $D_F = [0\,;+\infty[$.

La fonction F est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction f.

Donc, F est croissante sur $[0\,;+\infty[$. On a : $\forall\, x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) \geq 0$;

donc : $\forall\, x \in [0\,;1]$, $F(x) \leq 0$; $\forall\, x \in [1\,;+\infty[$, $F(x) \geq 0$.

c) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x+1}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$; donc : $D_F =]0\,;+\infty[$.
La fonction F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction f.
Donc : F est décroissante sur $]0\,;1[$ et F est croissante sur $[1\,;+\infty[$.
On a : $\forall x \in]0\,;1[,\ f(x) < 0$; donc : $F(x) > 0$
$\forall x \in [1\,;+\infty[,\ f(x) \geq 0$; donc : $F(x) \geq 0$.

d) $F(x) = -\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,dt$.
La fonction $f : x \mapsto -\ e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$; donc : $D_F = \mathbb{R}$.
La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f. Donc, F est décroissante sur $\mathbb{R}$.
On a : $\forall x \in]-\infty\,;1],\ F(x) > 0$ et $\forall x \in [1\,;+\infty[,\ F(x) < 0$.

♦ **Exercice 3.f p. 314**

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = F(2x) - F(x)$; donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2\,f(2x) - f(x)$.

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{\sqrt{4+4x^2} - \sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+4x^2} \times \sqrt{1+x^2}}$; donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) > 0$.

Donc, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On remarque que : $g(0) = 0$.
On en déduit que : $\forall x \in]-\infty\,;0],\ g(x) \leq 0$ et $\forall x \in [0\,;+\infty[,\ g(x) \geq 0$.

Exercices d'apprentissage

INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

♦ **Exercice 1 p. 315**

a) $I = [\frac{t^4}{2}]_{-1}^{2} = \frac{15}{2}$

b) $I = [-\frac{t^5}{5}]_{-1}^{\frac{3}{2}} = -\frac{55}{32}$

c) $I = [-\frac{1}{2t^2}]_{-1}^{-2} = \frac{3}{8}$

d) $I = [\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}]_0^9 = 18$

e) $I = [-\frac{1}{2}\cos 2t]_{\pi}^{0} = 0$

f) $I = [2x + 3\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 3$

g) $I = [-\cos(x + \frac{\pi}{4})]_0^{\pi} = \sqrt{2}$

h) $I = [3\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2}$.

♦ **Exercice 2 p. 315**

a) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}$; $D_F = \mathbb{R}$

b) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{4-t^2}$; $D_F =]-2\,;2[$

c) $F(x) = \displaystyle\int_1^x t\sqrt{2-t}\,dt$; $D_F =]-\infty\,;2]$

d) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln(1+t)\,dt$; $D_F =]-1\,;+\infty[$.

♦ **Exercice 4 p. 315**

a) f est une fonction paire ; donc l'ensemble d'étude est $[0\,;+\infty[$.

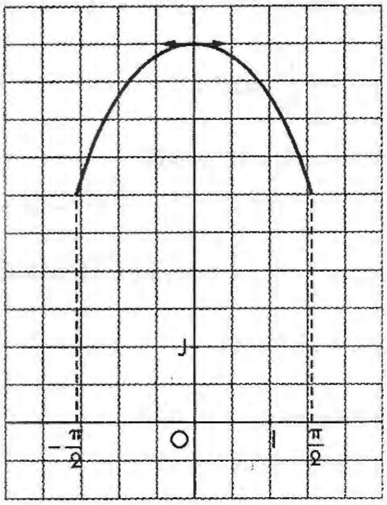
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto -2\sin x$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

Tableau de variation

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	5	↘	3

Courbe représentative



$\mathrm{I} = {}_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3 + 2\cos x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3 + 2\cos x)\,\mathrm{d}x = 2\,[3x + 2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = (3\pi + 4)\,u$; $\mathrm{I} \approx 80{,}52\ \mathrm{cm}^2$.

b) $\mathcal{A} = \int_1^2 \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = [-\frac{2}{x}]_1^2 = 1\ u = 6\ \mathrm{cm}^2$.

♦ Exercice 5 p. 315

a) $\frac{5}{2}$ *b)* $-\frac{17}{4}$ *c)* 4 *d)* $\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^2 - 3$.

♦ Exercice 6 p. 315

$\int_{0,1}^{1} x^2\,\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x < \int_{0,1}^{1} x\,\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x < \int_{0,1}^{1} \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x < \int_{0,1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{x}\,\mathrm{d}x.$

♦ Exercice 7 p. 315

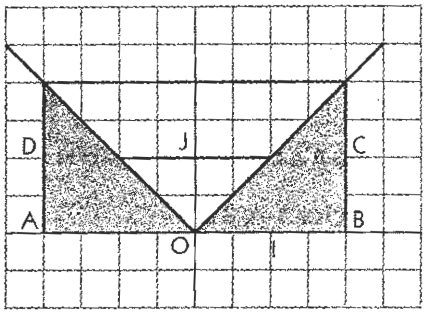
$\frac{1}{1+\pi^2} \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{4}}.$

♦ Exercice 9 p. 315

a) $\mu = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} |x|\,\mathrm{d}x = 1.$

b) μ est la hauteur du rectangle ABCD, de base 4, dont l'aire est égale à celle de la surface grisée.

Donc : μ = 1.



TECHNIQUES DE CALCUL INTEGRAL

♦ Exercice 10 p. 315

Les valeurs moyennes des fonctions $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos^2 x$ sont respectivement 0, 0 et $\frac{1}{2}$.

♦ Exercice 11 p. 315

a) $\mathrm{I} = \frac{3}{2}[\frac{-1}{x^2+1}]_0^1 = \frac{3}{4}$

b) $\mathrm{I} = [-\sqrt{9-x^2}]_{-2}^{1} = \sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

c) $\mathrm{I} = [-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}]_3^0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-9}$

d) $\mathrm{I} = [\ln(\mathrm{e}^x + 3)]_0^2 = \ln((\mathrm{e}^4 + 3) - \ln 4$

e) $\mathrm{I} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x = 2\,[\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \frac{\pi}{2}$

f) $\mathrm{I} = [\frac{1}{2}\tan^2 x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

g) $\mathrm{I} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\,[\sin^5 x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5}$

h) $\mathrm{I} = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x = 2\,[\frac{1}{3}\sin^3 x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

♦ Exercice 12 p. 315

a) $\mathrm{I} = [\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - 1)^2]_{-2}^{1} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-4} + 2\mathrm{e}^{-2})$

b) $\mathrm{I} = [-\ln|\cos x|]_{-\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\ln 3$

c) $\mathrm{I} = \frac{1}{5}\,[(2x+1)^2\sqrt{2x+1}]_0^2 = 5\sqrt{5} - \frac{1}{5}$

d) $\mathrm{I} = [-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}]_2^1 = \sqrt{\mathrm{e}} - \mathrm{e}$

e) $\mathrm{I} = [\frac{1}{2}\ln^2 x]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}3} = 4$ *f)* $\mathrm{I} = [\ln|\ln x|]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} = \ln 3$ *g)* $\mathrm{I} = [-\frac{1}{\ln x}]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}3} = \frac{2}{3}$ *h)* $\mathrm{I} = [\ln|\tan x|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\ln 3$.

♦ Exercice 13 p. 315

1. On a : $\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. **2.** $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} + \int_0^x \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = [\tan t]_0^x + [\frac{1}{\cos t}]_0^x = \tan x + \frac{1}{\cos x} - 1.$

INTÉGRATION PAR PARTIES

◆ **Exercice 14 p. 316**

a) $u = 2x + 1$ et $v' = \cos x$; $I = \pi - 1$

b) $u = x - 1$ et $v' = \sin 3x$; $I = \dfrac{\pi - 2}{3}$

c) $u = 2x + 1$ et $v' = e^{2x}$; $I = 2e^4$

d) $u = \ln x$ et $v' = 2x + 1$; $I = 12\ln 3 - 6\ln 2 - \dfrac{7}{2}$.

◆ **Exercice 16 p. 316**

a) $I = (x + 1)\sin x + \cos x - 1$

b) $I = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + 4$

c) $I = (\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{4})e^{2x} - \dfrac{1}{4}$

d) $I = x\ln\dfrac{x^2 - 1}{x^2} + \ln\dfrac{x + 1}{x - 1} + 4\ln 2 - 3\ln 3$.

◆ **Exercice 17 p. 316**

a) On pose : $u = x^2$ et $v' = \cos x$; donc : $u' = 2x$ et $v = \sin x$.

On a : $I = [x^2 \sin x]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = -2\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

On pose : $u = x$ et $v' = \sin x$; donc : $u' = 1$ et $v = -\cos x$.

D'où : $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx = [-x\cos x]_0^{\pi} + [\sin x]_0^{\pi} = \pi$. Par suite : $I = -2\pi$.

f) On pose : $u = (1 + x)^2$ et $v' = e^{-x}$; donc : $u' = 2(1 + x)$ et $v = -e^{-x}$.

Donc : $I = [-(1 + x)^2 e^{-x}]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0} (1 + x)e^{-x} dx = -1 + 2\int_{-1}^{0} (1 + x)e^{-x} dx$.

On pose : $u = 1 + x$ et $v' = e^{-x}$; donc : $u' = 1$ et $v = -e^{-x}$.

D'où : $\int_{-1}^{0} (1 + x)e^{-x} dx = -[(1 + x)e^{-x}]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-x} dx = -1 + \int_{-1}^{0} e^{-x} dx = -1 - [e^{-x}]_{-1}^{0} = e - 2$.

Par suite : $I = 2e - 5$.

CHANGEMENT DE VARIABLE AFFINE

◆ **Exercice 18 p. 316**

a) $u = x + 1$; $I = \dfrac{4}{15}(1 + \sqrt{2})$

b) $u = 1 - x$; $I = -\dfrac{1\,076}{15}$

c) $u = 2x + 1$; $I = \dfrac{11\sqrt{2} - 4}{210}$

d) $u = 3x - 4$; $I = \dfrac{155}{648}$.

◆ **Exercice 19 p. 316**

1. Posons : $u = \dfrac{t}{b}$; donc : $t = bu$ et $dt = b\,du$. On a : $\int_b^{ab} \dfrac{dt}{t} = \int_1^a \dfrac{b\,du}{bu} = \int_1^a \dfrac{du}{u}$.

2. Donc : $[\ln t]_b^{ab} = [\ln u]_1^a$; c'est-à-dire : $\ln(ab) - \ln b = \ln a$; ou : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

◆ **Exercice 21 p. 316**

1. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$.

2. *a)* 0 et 4 *b)* 0 et 4 *c)* 2 et 6 *d)* 4.

INTÉGRATION DE FONCTIONS PARTICULIERES

◆ **Exercice 22 p. 316**

a) $\cos^3 x - 3\cos x \sin x = \dfrac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x) - \dfrac{3}{2}\sin 2x$; donc : $I = -\dfrac{5}{6}$

b) $\sin^4 x = \dfrac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$; donc : $I = \dfrac{3\pi}{16}$

c) $\cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$; donc : $I = \frac{43\sqrt{2}}{60}$

d) $\cos^2 x \cos 2x = \frac{1}{4}(\cos 4x + 2\cos 2x + 1)$; donc : $I = \frac{4+\pi}{16}$.

♦ Exercice 23 p. 316

1. $A + B = \frac{\pi}{32}$; $A - B = \frac{1}{24}$. **2.** $A = \frac{\pi}{64} + \frac{1}{48}$; $B = \frac{\pi}{64} - \frac{1}{48}$.

♦ Exercice 26 p. 316

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}^- \{-1\}, f(x) = x^2 + 2x + 3 - \frac{1}{x+1}$.

2. Donc : $\int_0^3 f(x)\,dx = [\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \ln(x+1)]_0^3 = 27 - 2\ln 2$.

♦ Exercice 28 p. 317

1. Posons : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

La fonction f est paire ; donc l'ensemble d'étude est $[0\,;1]$.

La fonction f est dérivable sur $]-1\,;1[$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de f.

On a : $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$;

donc : $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$.

L'amplitude de chaque intervalle est $\frac{1}{50}$.

On a : $s_{10} < A < S_{10}$

$s_{10} = \frac{1}{50}[f(\frac{31}{50}) + f(\frac{32}{50}) + \dots + f(\frac{39}{50}) + f(\frac{40}{50})]$

$s_{10} = \frac{1}{50} \times 6{,}9937 = 0{,}139874$.

Donc : $0{,}13 < A < 0{,}14$.

2. On a : $\forall x \in [\frac{3}{5}\,;\frac{4}{4}], \frac{3}{4} < |f'(x)| < \frac{4}{3}$.

Donc : $|A - s_n| < \frac{4}{3} \times \frac{1}{2n} \times (\frac{4}{5} - \frac{3}{5})^2$;

c'est-à-dire : $|A - s_n| < \frac{2}{75n}$.

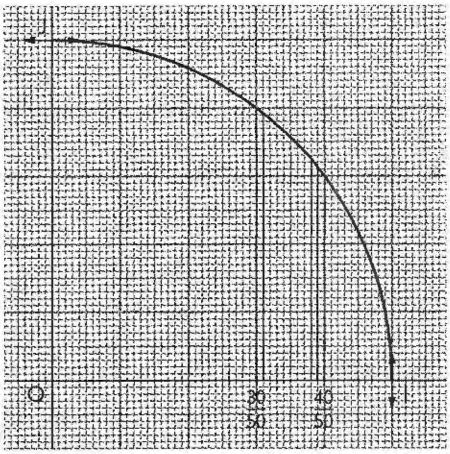
On doit avoir : $\frac{2}{75n} \leq 2 \times 10^{-3}$; c'est-à-dire : $n \geq \frac{10^3}{75}$.

Donc : $n = 14$.

Tableau de variation

x	0		1
$f'(x)$	0	−	$-\infty$
$f(x)$	1	↘	0

Courbe représentative



CALCULS D'AIRES ET DE VOLUMES

♦ Exercice 30 p. 317

La pétale ci-contre est formée des courbes représentatives d'une fonction f et de sa réciproque f^{-1}.

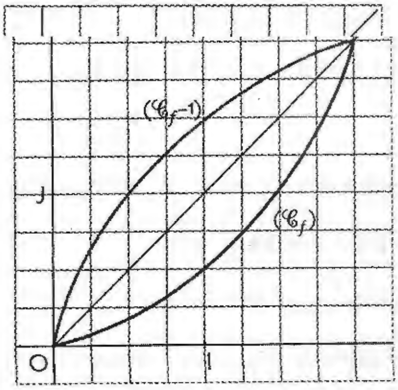
On a : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; $f^{-1}(x) = \sqrt{2x}$.

L'aire de cette pétale est : $\mathcal{A} = \int_0^2 (\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2})\,dx$.

On a : $\mathcal{A} = [\frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6}]_0^2 = \frac{4}{3}$.

L'aire de la fleur est : $4\mathcal{A} = \frac{16}{3}$ cm^2.

Courbe représentative



♦ Exercice 33 p. 317

1. *a)* On a : $D_f = \mathbb{R}$;

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -x + \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = -x + \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1} = -x - \frac{1-e^{x}}{1+e^{x}} = -f(x).$$

Donc, f est une fonction impaire.

b) L'ensemble d'étude de f est $[0\,;+\infty[$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^{x}+1}\ ;\ \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0.$$

Donc, la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{1+e^{2x}}{(1+e^{x})^2}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

Courbe représentative

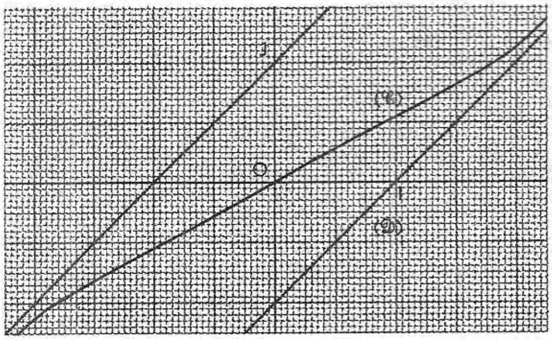


Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$ +	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

2. *a)* $f(x) = x + 1 - \dfrac{2\,e^{x}}{1+e^{x}}$; donc : $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - 2\ln(1+e^{x}) + C \ (C \in \mathbb{R})$.

b) $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^a [f(x) - x + 1]\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a (-x+1)\,dx$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{x^2}{2} + x - 2\ln(1+e^{x})\right]_0^a + \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_0^a = 2a - 2\ln(1+e^{a}) + 2\ln 2.$$

c) $\mathcal{A} = -2\ln(1+e^{-a}) + 2\ln 2$; donc : $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathcal{A} = 2\ln 2$.

♦ Exercice 34 p. 317

1. $\mathcal{A}_1(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^a = \ln a$; donc : $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathcal{A}(a) = +\infty$.

2. $\mathcal{A}_n(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{a^{n-1}}\right)$; donc : $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathcal{A}_n(a) = \dfrac{1}{n-1}$.

Exercices d'approfondissement

♦ Exercice 36 p. 317

1. On a : $\forall t \in [0\,;1],\ 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t^5}{1+t}$;

donc : $\forall t \in [0\,;1],\ 0 \leq 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dfrac{1}{1+t} \leq t^5$.

2. $\forall t \in [0\,;1],\ 0 \leq \displaystyle\int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \frac{1}{1+t}\right) dt \leq \int_0^x t^5\,dt$;

$$0 \leq \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \ln(1+t)\right]_0^x \leq \left[\frac{t^6}{6}\right]_0^x ;$$

$$0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ln(1+x) \leq \frac{x^6}{6}.$$

3. On a : $\ln(1,1) = \ln(1 + 10^{-1})$;

donc : $0 \leq 10^{-1} - \dfrac{10^{-2}}{2} + \dfrac{10^{-3}}{3} - \dfrac{10^{-4}}{4} + \dfrac{10^{-5}}{5} - \ln(1,1) \leq \dfrac{10^{-6}}{6}$;

ou : $0 \leq \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{3000} - \dfrac{1}{40000} + \dfrac{1}{500000} - \ln(1,1) \leq 0{,}16 \times 10^{-6}$;

Par suite = $\ln(1,1) \approx \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{3000} - \dfrac{1}{40000} + \dfrac{1}{500000}$ à 2×10^{-7} près ;

c'est-à-dire : $\ln(1;1) \approx \dfrac{285\,931}{3\,000\,000}$ à 2×10^{-7} près.

♦ Exercice 37 p. 317

1. On pose : $u = 1 - x$. On a : $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}x$; $x = 0 \Rightarrow u = 1$; $x = 1 \Rightarrow u = 0$.

Donc : $\displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x = \int_1^0 (1-u)^p\,u^q(-\,\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^q(1-u)^p\,\mathrm{d}u = \int_0^1 x^q(1-x)^p\,\mathrm{d}x$.

2. On a : $\displaystyle\int_0^1 x^2\,(1-x)^{15}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{15}\,(1-x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^{17} - 2x^{16} + x^{15})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2448}$.

♦ Exercice 38 p. 317

1. F est dérivable sur $]0\,;\pi[$ et $F'(x) = \dfrac{1}{\sin x}$. G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t = [\ln(\tan\frac{t}{2}]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\ln 3.$

$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = [\ln(t + \sqrt{1+t^2})]_{-1}^{1} = \ln(3 + 2\sqrt{2}).$

♦ Exercice 39 p. 318

1. $f(x) = (2 - x)\,e^x$.

Étude aux bornes de D_f

$D_f = \mathbb{R}$.

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (\frac{2}{x} - 1)\,e^x = -\infty$; donc, $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique dans la direction de (OJ).

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$; donc, la droite (OI) est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto (1 - x)\,e^x$.

On en déduit, ci-contre le tableau de variation de f.

Courbe représentative

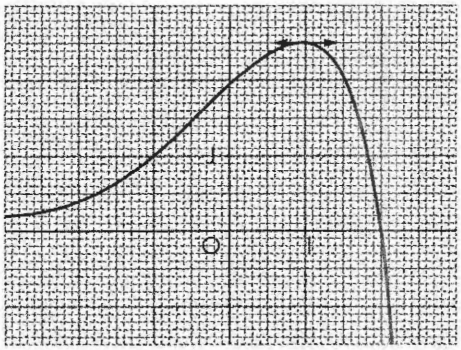


Tableau de variation

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$

2. $x_G = \dfrac{9}{e^3 - 4}$ et $y_G = \dfrac{e^6 - 25}{8e(e^3 - 4)}$.

♦ Exercice 40 p. 318

1. $x_G = 0$ et $y_G = \dfrac{4R}{3\pi}$.

♦ Exercice 41 p. 318

1. $x_G = \dfrac{-12a^3 \ln a + 4a^3 - 4}{-18a^2 \ln a + 9a^2 - 9}$ et $y_G = \dfrac{-18a^3 \ln^2 a + 12a^3 \ln a - 4a^3 + 4}{-54a^2 \ln a + 27a^2 - 27}$.

2. Lorsque a tend vers 0, le centre d'inertie atteint la position limite $G(\frac{4}{9}\ ; -\frac{4}{27})$.

♦ Exercice 42 p. 318

On a : $\begin{cases} x'(t) = -\sin t - \sin 2t \\ y'(t) = \cos t + \cos 2t\ . \end{cases}$

Donc : $V^2(t) = x'^2(t) + y'^2(t) = 4\cos^2 \frac{t}{2}$; $V(t) = 2\left|\cos \frac{t}{2}\right|$.

La distance parconrue entre les instants 0 et $\frac{\pi}{2}$ est : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\frac{t}{2}\,dt = 4\,[\sin\frac{t}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}$.

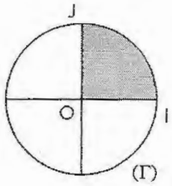
♦ Exercice 43 p. 318

1. *a)* On a : $\overrightarrow{V}(t)\ (t\cos t\ ;\ t\sin t)$.

b) On a : $\|\overrightarrow{V}(t)\| = t$. La longueur de $(\mathscr{C})$ est : $L = \int_0^{10} t\,dt = [\frac{t2}{2}]_0^{10} = 50$.

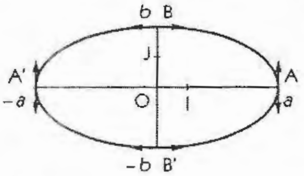
2. $\begin{cases} x(t) = t\sin t + \cos t \\ y(t) = -t\cos t + \sin t. \end{cases}$

♦ Exercice 45 p. 318



1. Soit (Γ) le disque de centre O et de rayon 1. (Γ) a pour aire π.

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ est l'aire de la partie hachurée, c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}$.



2. $\forall x \in [0\ ;\ a]$, $y = b\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}$.

a) L'aire délimitée par l'ellipse d'équation réduite $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ est : $\mathscr{A} = \pi ab$.

b) Soit f_1 la fonction définie sur $[-2\ ;\ 1]$ par $f_1(x) = \sqrt{1-(\frac{x-1}{3})^2}$ et $(\mathscr{C}_1)$ sa courbe représentative.

Soit f_2 la fonction définie sur $[1\ ;\ 2]$ par $f_2(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$ et $(\mathscr{C}_2)$ sa courbe représentative.

Soit f_3 la fonction définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $f_3(x) = -\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}$ et $(\mathscr{C}_3)$ sa courbe représentative.

Soit $\mathscr{A}_i$ l'aire délimitée par $(\mathscr{C}_i)$ et la droite (OI), $i \in \{1, 2, 3\}$. On a : $\mathscr{A}_1 = \frac{3\pi}{4}$; $\mathscr{A}_2 = \frac{\pi}{4}$; $\mathscr{A}_3 = \pi$.

L'aire du domaine colorié est : $\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 = 2\pi$.

Par ailleurs, l'aire de l'ellipse d'équation réduite $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ est : $\pi \times 2 \times 1 = 2\pi$.

Donc, l'aire du domaine colorié est égale à l'aire du domaine délimité par l'ellipse d'équation réduite : $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$.

3. Soit $g_1 : [-2\ ;\ -1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2 - \sqrt{1-(x+1)^2}$;

$g_2 : [-1\ ;\ 0] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2 - \sqrt{1-(x+1)^2}$;

$g_3 : [0\ ;\ 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + \cos(\frac{\pi}{2}x) + \sqrt{1-(x-1)^2}$;

$g_4 : [-2\ ;\ 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}$.

Soit $(\mathscr{C}'_i)$ la courbe représentative de g_i et $\mathscr{A}_i'$ l'aire délimitée par $(\mathscr{C}'_i)$ et (OI), $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

On a : $\mathscr{A}_1' = \frac{\pi}{4}$; $\mathscr{A}_2' = 2 + \frac{\pi}{4}$; $\mathscr{A}_3' = 2 + \frac{\pi}{2}$; $\mathscr{A}_4' = \pi$.

Donc, l'aire du domaine colorié est : $\mathscr{A}_1' + \mathscr{A}_2' + \mathscr{A}_3' + \mathscr{A}_4' = 4 + 2\pi$.

♦ Exercice 46 p. 319

1. *a)* On a : $D_f = \mathbb{R}$.

Étude aux bornes de $\mathbb{R}$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;

$\forall x \in]-\infty\,;0]$, $f(x) - (-2x+1) = -\dfrac{3}{x - \sqrt{x^2+3}}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-2x+1)] = 0$.

Donc, la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = -2x + 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; donc, la droite $(\mathscr{D}')$ d'équation $y = 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{x - \sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}$.

On en déduit, ci-dessous, le tableau de variation de f.

Courbe représentative

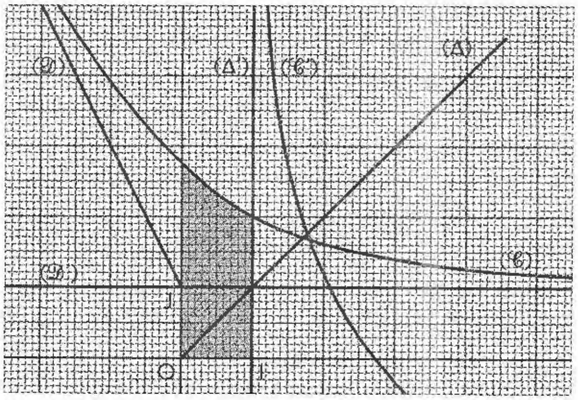


Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow 1$

b) f est une fonction continue strictement décroissante de $\mathbb{R}$ sur $]1\,;+\infty[$; donc, f est bijective et admet une bijection réciproque de $]1\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

2. *a)* Soit $(\mathscr{C}')$ la courbe représentative de f^{-1}.

Les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

La droite (Δ') d'équation $x = 1$ est asymptote à $(\mathscr{C}')$.

b) Soit $y \in]1\,;+\infty[$.

On a : $f(x) = y \Rightarrow 1 - x + \sqrt{x^2+3} = y \Rightarrow x = \dfrac{3-(y-1)^2}{2(y-1)}$.

Donc : $\forall x \in]1\,;+\infty[$, $f^{-1}(x) = \dfrac{3-(x-1)^2}{2(x-1)}$.

3. *a)* $\displaystyle\int_2^{1+\sqrt{3}} f^{-1}(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int_2^{1+\sqrt{3}} (x-1)\,dx = \frac{3}{2}[\ln(x-1)]_2^{1+\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\left[\frac{(x-1)2}{2}\right]_2^{1+\sqrt{3}} = \frac{3}{4}\ln 3 - \frac{1}{2}$.

b) On a : $f(0) = 1 + \sqrt{3}$ et $f(1) = 2$; donc : $f^{-1}(1+\sqrt{3}) = 0$ et $f^{-1}(2) = 1$.

On pose : $u = f^{-1}(x)$; donc : $x = f(u)$ et $dx = f'(u)\,du$.

On a : $\displaystyle\int_2^{1+\sqrt{3}} f^{-1}(x)dx = \int_1^0 u\,f'(u)du = [u\,f(u)]_1^0 - \int_1^0 f(u)du = -2 + \int_0^1 f(u)du$.

Donc : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 2 + \int_2^{1+\sqrt{3}} f^{-1}(x)\,dx = \frac{3}{4}\ln 3 + \frac{3}{2}$.

Déduction

On a : $\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln 3 + \frac{3}{2}$; donc : $-\frac{1}{2}[(1-x)^2]_0^1 + \int_0^1 \sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln 3 + \frac{3}{2}$.

Par suite : $\int_0^1 \sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln 3 + 1.$

♦ Exercice 48 p. 319

1. $I_0 = \frac{1}{2}\ln(7+4\sqrt{3})$; $I_1 = \ln 2.$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}.$

3. $I_{n+2} - I_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}.$

On en déduit : $I_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ln(7+4\sqrt{3})$; $I_3 = \ln 2 - \frac{3}{8}$; $I_4 = \ln 2 - \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}$; $I_5 = \ln 2 - \frac{33}{64}$.

♦ Exercice 49 p. 319

1. $I_0 = 1$; $I_1 = -1+\sqrt{2}$; $I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$.

2. On a : $\forall x \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}], \frac{\cos^n x}{\sin^2 x} > 0$; donc : $I_n \geq 0.$

On a : $\forall x \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}], 0 \leq \cos x < 1$ et $\cos^n x \geq 0$; donc : $\forall x \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}], 0 \leq \cos^{n+1} x \leq \cos^n x.$

Or : $\forall x \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}], \frac{1}{\sin^2 x} > 0.$

En faisant le produit membre à membre, on obtient : $\forall x \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}], 0 \leq \frac{\cos^{n+1} x}{\sin^2 x} \leq \frac{\cos^n x}{\sin^2 x}$.

Donc : $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$; c'est-à-dire que la suite (I_n) est décroissante.

La suite (I_n) est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

3. *a)* On a : $\forall x \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}], 0 \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; donc : $\forall x \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}], 0 \leq \cos^n x \leq (\frac{\sqrt{2}}{2})^n.$

Or : $\forall x \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}], 1 \leq \frac{1}{\sin^2 x} \leq 2.$

En faisant le produit membre à membre, on obtient : $\forall x \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}], 0 \leq \frac{\cos^n x}{\sin^2 x} \leq 2\,(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$,

b) Donc : $0 \leq I_n \leq 2\,(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \times \frac{\pi}{4}$; ou : $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$. On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

♦ Exercice 50 p. 319

1. $\forall n \in \mathbb{N}, I_n+1 = \frac{2(n+1)}{2n+5}\, I_n.$

2. $I_0 = \frac{2}{3}$.

3. On a :

$$I_0 = \frac{2}{3}$$

$$I_1 = \frac{2}{5}\, I_0$$

$$I_2 = \frac{4}{7}\, I_1$$

....

$$I_n = \frac{2n}{2n+3}\, I_{n-1}.$$

En faisant leur produit membre à membre, on obtient : $I_n = \prod\limits_{k=o}^{n} \frac{2(k+1)}{2k+3}$.

♦ Exercice 53 p. 319

1. La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}e^{\frac{-1}{x}}$ est continue sur]0 ; + ∞[; donc : $D_F =]0 ; +\infty[$.

2. On a : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $x > 0$ et $x^2 > 0$; donc, pour tout t compris entre x et x^2, $g(t) \geq 0$.

On en déduit que : $\forall x \in [\,1 ; +\infty[$, $\int_x^{x^2} g(t)\,dt \geq 0$ et $\forall x \in]0 ; 1]$, $\int_x^{x^2} g(t)\,dt \leq 0$.

3. *a)* Soit G une primitive de g sur]0 ; +∞[. On a : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $F(x) = G(x^2) - G(x)$.

La fonction F est dérivable sur]0 ; +∞[et sa dérivée est la fonction $F' : x \mapsto \frac{2}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$.

b) On a : $F'(x) = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\ [2\exp(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) - 1]$;

$$F'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\ln 2}}{2\ln 2} \Leftrightarrow x \geq 0{,}68.$$

On en déduit, ci-contre, le tableau de variation de F.

On a : $F(x) = G(x^2) - G(x)$; donc : $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = 0$.

On en déduit que : $\forall x \in]0 ; 1]$, $F(x) \leq 0$;
$\forall x \in [1 ; +\infty[$, $F(x) \geq 0$.

Tableau de variation

x	0		0,68		1		+∞
$F'(x)$		−	0	+		+	
$F(x)$	0	↘	F (0,68)	↗	0	↗	

15. Équations différentielles

(pages 321 à 334 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

- Introduire, sur des exemples élémentaires, la notion d'équation différentielle.
- Utiliser ce nouvel outil pour résoudre des problèmes de géométrie, de mécanique, de démographie, etc.

COMMENTAIRES

On pourra présenter une **équation différentielle** comme une relation entre une fonction et ses dérivées successives. Dans une équation différentielle, **l'inconnue** est la fonction.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Généralités • Notion d'équation différentielle. • Équations de types : $y' = f(x)$ et $y'' = g(x)$.	• Reconnaître une équation différentielle. • Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle. • Résoudre des équations différentielles de types : $y' = f(x)$ et $y'' = g(x)$.
Équations du type : $y' - ay = 0$ • Résolution : – solution générale : $x \to ke^{ax}$; – solution vérifiant une condition initiale. • Applications.	• Résoudre une équation différentielle du type : $y' - ay = 0$.
Équations du type : $y'' + ay' + by = 0$ • Équations du type : $y'' + \lambda y = 0$. – solutions des équations du type $y'' - \omega^2 y = 0$: $x \to \mathrm{A}e^{\omega x} + \mathrm{B}e^{-\omega x}$, (A et B réels) ; – solutions des équations du type $y'' + \omega^2 y = 0$: $x \to \mathrm{A}\cos\omega x + \mathrm{B}\sin\omega x$ (A et B réels).	• Résoudre une équation différentielle du type : $y'' - \omega^2 y = 0$. • Résoudre une équation différentielle du type : $y'' + \omega^2 y = 0$.
• Équations du type : $y'' + ay' + by = 0$. – équation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$; – solution générale, suivant le discriminant de l'équation caractéristique ; – solution vérifiant des conditions initiales.	• Résoudre une équation différentielle du type : $y'' + ay' + by = 0$. • Déterminer la solution d'une équation différentielle vérifiant une condition initiale.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

♦ Exercice 1.a p. 323

a) $y = -\ln x + c$, $(c \in \mathbb{R})$

b) $y = -\ln(-x) + \frac{1}{2x^2} + c$, $(c \in \mathbb{R})$

c) $y = \frac{1}{2}e^{-2x} + c$, $(c \in \mathbb{R})$

d) $y = \ln(\sin x) + c$, $(c \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 1.b p. 323

a) $y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{3}$

b) $y = -\frac{1}{2}\ln(\sin 2x) + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $y = \frac{1}{4}(e^{2x-1} + e^{2x+1} + 3e - \frac{1}{e})$

d) $y = \frac{1}{2}\ln^2 x - \frac{3}{2}$.

◆ Exercice 1.c p. 323

a) $y = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + cx + d$, $(c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R})$ *b)* $y = \frac{1}{16}\cos^2 x + cx + d$, $(c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R})$

c) $y = -\frac{1}{8}(e^{2x} - e^{-2x}) + cx + d$, $(c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R})$ *d)* $y = -\frac{1}{2}\ln|\cos x| + cx + d$, $(c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R})$.

◆ Exercice 1.d p. 323

a) $y = -\ln|\cos x| + x + 1$ *b)* $y = (x-1)e^x + ex + e + 1$.

◆ Exercice 2.a p. 326

a) $y = ke^x$, $(k \in \mathbb{R})$ *b)* $y = ke^{-2x}$, $(k \in \mathbb{R})$ *c)* $y = ke^{-\frac{1}{2}x}$, $(k \in \mathbb{R})$ *d)* $y = k\exp\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)$, $(k \in \mathbb{R})$.

◆ Exercice 2.b p. 326

a) $y = e^{3x}$ *b)* $y = e^{-3x+3}$ *c)* $y = e^{\frac{3}{4}x+3}$ *d)* $y = \frac{-4}{2^x}$.

◆ Exercice 2.c p. 326

1. $y = Ae^{-2x} + B$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

2. $y'(0) = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$; $y(0) = 1 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$. Donc : $y = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}$.

◆ Exercice 2.d p. 326

On désigne par $h(t)$ la quantité de microbes à l'instant t.
La vitesse d'accroissement à l'instant t est la fonction dérivée de h.
Par hypothèse, on a : $h' = ah$, $(a \in \mathbb{R})$. Donc : $h(t) = ke^{at}$.
$h(2) = 10^5 \Leftrightarrow ke^{2a} = 10^5$ et $h(6) = 5 \times 10^5 \Leftrightarrow ke^{6a} = 5 \times 10^5$.
Donc : $a = \frac{1}{4}\ln 5$; $k = \frac{10^5}{\sqrt{5}}$ et $h(t) = \frac{10^5}{\sqrt{5}}\exp^{\left(\frac{1}{4}\ln 5t\right)} = 44\,721e^{0,4t}$.
$h(0) = 44\,721$; donc, initialement, il y avait 44 721 microbes dans cette culture.

◆ Exercice 3.a p. 331

a) $y = Ae^{\frac{8}{3}x} + Be^{-\frac{8}{3}x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$ *b)* $y = Ae^{\sqrt{2x}} + Be^{-\sqrt{2x}}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

c) $y = A\cos\frac{2}{3}x + B\sin\frac{2}{3}x$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$ *d)* $y = A\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

◆ Exercice 3.b p. 331

a) $y = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ *b)* $y = 0$.

◆ Exercice 3.c p. 331

a) $y = Ae^{-3x} + Be^{2x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$ *b)* $y = (Ax+B)\exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

c) $y = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{2x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$ *d)* $y = (Ax+B)e^{-\frac{1}{3}x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

e) $y = Ae^{-5x} + Be^x$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$ *f)* $y = Ae^{(3-\sqrt{7})x} + Be^{(3+\sqrt{7})x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

g) $y = (A\cos 3\sqrt{2}x + B\sin 3\sqrt{2}x)e^{3x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$ *h)* $y = (Ax+B)e^{-\frac{1}{2}x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

◆ Exercice 3.d p. 331

a) $y = \frac{1}{6}(3+\sqrt{3})e^{(1-\sqrt{3})x} + \frac{1}{3}(3-\sqrt{3})e^{(1+\sqrt{3})x}$ *b)* $y = xe^{2x}$ *c)* $y = (\cos x + \sin x)e^{-2x}$.

Exercices d'apprentissage

GÉNÉRALITÉS

◆ Exercice 1 p. 332

Les vérifications sont immédiates ; par exemple, résolvons la première question.

a) On a : $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ et $y' = x - 1$; donc : $2(y + y') = x^2$.

♦ Exercice 2 p. 332

Les vérifications sont immédiates ; par exemple, résolvons la dernière question.

e) On a : $y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$; $y' = -\frac{2}{1-x^2}$ et $y'' = \frac{-4x}{(1-x^2)^2}$; donc : $y'' + x(y')^2 = 0$.

♦ Exercice 3 p. 332

(E) : $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

1. Posons : $y = e^{-x}$; on a : $y' = -e^{-x}$; $y'' = e^{-x}$ et $y''' = -e^{-x}$.
Donc : $y''' - 2y'' - y' + 2y = -e^{-x} - 2e^{-x} + e^{-x} + 2e^{-x} = 0$; $f : x \mapsto e^{-x}$ est solution de (E).
On vérifie de la même manière que les fonctions $g : x \mapsto e^{x}$ et $h : x \mapsto e^{2x}$ sont solutions de (E).

2. Posons : $y = ae^{-x} + be^{x} + ce^{2x} = (af + bg + ch)(x)$.
Donc : $y''' - 2y'' - y' + 2y = (af''' + bg''' + ch''') - 2(af'' + bg'' + ch'') - (af' + bg' + ch') + 2(af + bg + ch)$
$= (af''' - 2af'' - af' + 2af) + (bg''' - 2bg'' - bg' + 2bg) + (ch''' - 2ch'' - ch' + 2ch) = 0$.

♦ Exercice 4 p. 332

1. $\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + A$; $\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + B$.

2. *a)* $y = -\frac{1}{2} e^x \cos x + Ax$, $(A \in \mathbb{R})$ *b)* $y = \frac{1}{2} e^x \sin x + Bx$, $(B \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 5 p. 332

1. *a)* $f(x) = x\sin x + \cos x$; $f'(x) = x\cos x$; $f''(x) = \cos x - x\sin x$.

2. On a : $xf''(x) - 2f'(x) + xf(x) = 0$.

3. On a : $xy'' - 2y' + xy = 0$.

♦ Exercice 6 p. 332

Soit (x, y) les coordonnées du point M.
Les coefficients directeurs de (OM) et de la tangente à ($\mathscr{C}$) en M sont respectivement : $\frac{y}{x}$ et $\frac{dy}{dx}$.
On a : $\frac{y}{x} = 2\frac{dy}{dx}$; ou : $2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Donc : $y^2 = Cx$, $(C \in \mathbb{R})$.

ÉQUATIONS DU TYPE Y'–AY=0

♦ Exercice 7 p. 332

a) $y = ke^{-\frac{3}{4}x}$, $(k \in \mathbb{R})$ *b)* $y = k5^x$, $(k \in \mathbb{R})$ *c)* $y = ke^{-\frac{3}{5}x}$, $(k \in \mathbb{R})$ *d)* $y = ke^{\sqrt{3x}}$, $(k \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 8 p. 332

a) $y = ke^{3|x|}$, $(k \in \mathbb{R})$ *b)* $y = ke^{2x}$, $(k \in \mathbb{R})$

c) $y = Ae^{\sqrt{3x}}, + Be^{-\sqrt{3x}}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$ *d)* $y = \frac{4}{25} Ae^{-\frac{5}{2}x} + Bx + C$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 9 p. 332

a) $y = 2e^{3x}$ *b)* $y = \exp\left(\frac{4-x}{3}\right)$ *c)* $y = \frac{1}{2^{x-1}}$ *d)* $y = -e^{x-1}$.

♦ Exercice 10 p. 332

a) $y = \exp^{\left(3 - \frac{3}{2}x\right)}$ *b)* $y = 3e^{2-x}$ *c)* $y = 2\exp^{\left(\frac{2+x}{4}\right)}$ *d)* $y = e^{\pi(x-1)}$.

♦ Exercice n° 11 p. 332

$f(x) = -\frac{6}{5} e^{-(1+\frac{x}{2})}$.

♦ Exercice 12 p. 332

$f(x) = \frac{2}{5} \exp^{[-\frac{5}{2}(x+1)]}$.

♦ Exercice 13 p. 332

1. $\theta(t) = 30 + 40\exp^{[(\frac{1}{5}\ln\frac{3}{4})t]}$ **2.** $\theta(20) = 42{,}6°$.

♦ Exercice 14 p. 332

1. $v(t) = 16e^{-0{,}08t}$ **2.** $v(t) = 0{,}99 \Rightarrow t = 34{,}8$ s.

ÉQUATIONS DU TYPE Y''+AY'+BY=0

♦ Exercice 15 p. 333

a) $y = Ae^{-2x} + Be^{2x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

b) $y = A\cos 4x + B\sin 4x$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

c) $y = Ae^{-\frac{3}{2}x} + Be^{2x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

d) $y = (A\cos 3x + B\sin 3x)e^{2x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

e) $y = Ae^{-3x} + B$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

f) $y = (Ax + B)e^{3x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 16 p. 333

a) $y = -(x+1)e^{-x}$

b) $y = -\frac{1}{4}\sin 4x$

c) $y = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{2^x} + 2^x\right)$

d) $y = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\cos\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}-1}\sin\frac{x}{2}$

e) $y = e^{-3x} + 2e^{x}$

f) $y = \left[-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]e^{-\frac{1}{2}x}$.

♦ Exercice 17 p. 333

$f(x) = \frac{1}{2}(\pi + \sqrt{\pi})e^{-\sqrt{\pi}x} + \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{\pi})e^{\sqrt{\pi}x}$.

♦ Exercice 18 p. 333

$f(x) = (\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x)\exp\left(\frac{x}{2}\right)$.

♦ Exercice 19 p. 333

1. $y = Ae^{x} + Be^{2x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.
2. $y = -e^{x} + 2e^{2x}$.

♦ Exercice 20 p. 333

$f(x) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{x}{3} - \sin\frac{x}{3}\right)e^{x}$.

♦ Exercice 21 p. 333

1. $f(x) = \cos x + \sin x$; $f'(x) = -\sin x + \cos x$; $f''(x) = -\cos x - \sin x = -f(x)$.
2. $y'' + y = 0$.
3. $y = A\cos x + B\sin x$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 22 p. 333

1. $g(x) = (x+1)e^{-2x}$ et $g'(x) = -(2x-1)e^{-2x}$; donc : $g'(x) + 2g(x) = e^{-2x}$.

2. $(f+g)$ est solution de (E) si et seulement si : $(f+g)'(x) + 2(f+g)(x) = e^{-2x}$;
c'est-à-dire : $(f'(x) + 2f(x)) + (g'(x) + 2g(x)) = e^{-2x}$; ou $f'(x) + 2f(x) + e^{-2x} = e^{-2x}$;
donc, f est solution de l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$.

3. On a : $f(x) = ke^{-2x}$, $(k \in \mathbb{R})$.
Les solutions de (E) sont les fonctions $(f+g) : x \mapsto (x+1+k)e^{-2x}$, $(k \in \mathbb{R})$.

Approfondissement

♦ Exercice 23 p. 333

1. On trouve (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.
« $f^{(n+2)}(x) + 4f^{(n+1)}(x) + 4f^{(n)}(x) = 0$ ».

2. Soit p(n) la
$(x) = (x+1)e^{-2x}$; $f'(x) = -(2x+1)e^{-2x}$; $f''(x) = 4xe^{-2x}$ et $f^{(3)}(x) = 4(-2x+1)e^{-2x}$.

• Or
Donc : $f^{(3)}(x) + 4f''(x) + 4f'(x) = (4 - 8x + 16x - 8x - 4)e^{-2x} = 0$; p(1) est vraie.

• Soit k un entier naturel non nul.
Si p(k) est vraie, alors : $f^{(k+2)}(x) + 4f^{(k+1)}(x) + 4f^{(k)}(x) = 0$.
En dérivant, on obtient : $f^{(k+3)}(x) + 4f^{(k+2)}(x) + 4f^{(k+1)}(x) = 0$; donc : p($k+1$) est vraie.
On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n+2)}(x) + 4f^{(n+1)}(x) + 4f^{(n)}(x) = 0$.

3. $F(x) = -\frac{1}{4}(2x+3)e^{-2x}$.

♦ Exercice 24 p. 333

(E) : $(2\cos^2\alpha)r^2 - (4\sin\alpha\cos\alpha)r + 2 = 0$. On a : $\Delta' = (2i\cos^2\alpha)^2$.

$r_1 = \tan\alpha - i$ et $r_2 = \tan\alpha + i$; $y = (A\cos x + B\sin x)\,e^{x\tan\alpha}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 25 p. 333

1. $y = A\cos 4x + B\sin 4x$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

2. $y = 2(\cos 4x + \sin 4x)$.

3. On a : $f(x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos(4x - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ou $4x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi$, $(k' \in \mathbb{Z})$.

Donc : $S = \{\frac{7\pi}{48} ; \frac{23\pi}{48} ; \frac{31\pi}{48} ; \frac{47\pi}{48}\}$.

♦ Exercice 26 p. 333

1. $y = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

2. $f(x) = (\cos 2x)e^{-x}$.

3. *a)* $F'(x) = -\frac{1}{5}[f''(x) + 2f'(x)] = -\frac{1}{5}[-5f(x)] = f(x)$.

Par suite F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a : $F(x) = -\frac{1}{5}(\cos 2x - 2\sin 2x)e^{-x}$.

b) On a : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = F(\frac{\pi}{2}) - F(0) = \frac{1}{5}(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1)$.

♦ Exercice 27 p. 333

1. $y = Ae^{\lambda x}$, $(A \in \mathbb{R})$; $f_k(x) = ke^{\lambda x}$.

2. *a)* $(T_k) : y = k(\lambda x - \lambda x_0 + 1)e^{\lambda x_0}$.

b) Lorsque k décrit $\mathbb{R}$, (T_k) passe par le point fixe $A(x_0 - \frac{1}{\lambda} ; 0)$.

♦ Exercice 28 p. 333

On a : $J(0 ; 1)$, $M(x ; y)$, $H(x ; 0)$ et $N((\lambda + x ; 0)$.

Une équation de la tangente (MN) est : $Y - y = y'((X - x)$.

Les coordonnées de N vérifient cette équation : $0 - y = y'(\lambda + x - x)$; ou : $y' = -\frac{1}{\lambda}y$.

Donc : $y = ke^{-\frac{1}{\lambda}x}$. Or : $y(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1$. Une équation de $(\mathscr{C})$ est donc : $y = e^{-\frac{1}{\lambda}x}$.

♦ Exercice 29 p. 333

Soit $M(x ; y)$ un point de $(\mathscr{C})$.

On doit avoir : $y' = ay^2$, $(a \in \mathbb{R})$; ou : $\frac{y'}{y^2} = a$; donc : $-\frac{1}{y} = ax + C$.

On a : $y(-1) = -1 \Leftrightarrow C = a + 1$. Donc : $y = \frac{-1}{ax + a + 1}$.

♦ Exercice 30 p. 334

Soit $M(x ; y)$ un point de $(\mathscr{C})$.

Le coefficient directeur de la tangente en M à $(\mathscr{C})$ est : y'.

Le coefficient directeur de la droite (OM) est : $\frac{y}{x}$.

On doit avoir : $y' = 3\frac{y}{x}$; ou : $\frac{y'}{y} = \frac{3}{x}$; donc : $y = kx^3$.

Or : $y(1) = -2 \Leftrightarrow k = -2$. Par suite : $y = -2x^3$.

♦ Exercice 31 p. 334

On doit avoir : $y'\frac{y}{x} = -1$; ou : $y'y = -x$; donc : $y^2 = -x^2 + 2C$, $(C \in \mathbb{R})$.

On a : $x^2 + y^2 = 2C$, $(C \geq 0)$. Les cercles $(\mathscr{C})$ sont centrés en O.

♦ Exercice 32 p. 334

On a : $J(0 ; 1)$, $M(x ; y)$, $Q(0 ; y)$ et $N(0 ; y - 1)$.

Le coefficient directeur de (T) est : y'. Le coefficient directeur de (Δ) est : $-\frac{1}{y'}$.

On a : $(\Delta) : Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$ et $N \in (\Delta) \Leftrightarrow y' = -x$.

Donc : $y = -\frac{1}{2}x^2 + C$, $(C \in \mathbb{R})$.

Or : $y(1) = 1 \Leftrightarrow C = \frac{3}{2}$. Par suite : $f(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 3)$.

♦ Exercice 33 p. 334

1. $4\vec{\Gamma} = -\vec{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x''(t) = -x(t) \\ 4y''(t) = -y(t) \end{cases}$.

Résolution de l'équation différentielle : $4x'' + x = 0$.

L'équation caractéristique est : $4r^2 + 1 = 0$; donc : $r_1 = -\frac{1}{2}i$ et $r_2 = \frac{1}{2}i$.

On en déduit : $x(t) = A\cos\frac{t}{2} + B\sin\frac{t}{2}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

De même : $y(t) = A'\cos\frac{t}{2} + B'\sin\frac{t}{2}$, $(A' \in \mathbb{R}, B' \in \mathbb{R})$.

On a : $x(0) = 1 \Leftrightarrow A = 1$; $y(0) = 0 \Leftrightarrow A' = 0$; $x(\pi) = 0 \Leftrightarrow B = 0$; $y(\pi) = 2 \Leftrightarrow B' = 2$.

Donc : $x(t) = \cos\frac{t}{2}$ et $y(t) = 2\sin\frac{t}{2}$.

2. Une équation de la trajectoire de M est : $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

♦ Exercice 34 p. 334

1. $Q(t) = Q_0e^{-\lambda t}$.

2. $Q(T) = \frac{1}{2}Q_0 \Rightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$.

Donc : $T = \frac{\ln 2}{1{,}2444 \times 10^{-4}}$; $T \approx 5\,570{,}13$ années.

3. $Q(t) = 0{,}7Q_0 \Rightarrow e^{-\lambda t} = 0{,}7 \Rightarrow t = \frac{\ln(0{,}7)}{-1{,}2444 \times 10^{-4}}$; $T \approx 2\,866{,}24$ années.

♦ Exercice 35 p. 334

1. $y = Ae^{-2x} + Be^{2x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

2. $P(x) = -x^2 + 2x - 1$.

3. *a)* $(f - P)$ est solution de (E) si et seulement si : $(f - P)''(x) - 4(f - P)(x) = 0$;
ou : $f''(x) - 4f(x) = P''(x) - 4P(x) = 4(x - 1)^2 - 2$; c'est-à-dire : f est solution de (E').
b) D'après 3. *a) f)* est solution de (E') si et seulement si : $(f - P)(x) = Ae^{-2x} + Be^{2x}$.
Donc : $f(x) = Ae^{-2x} + Be^{2x} - x^2 + 2x - 1$; $f'(x) = -2Ae^{-2x} + 2Be^{2x} - 2x + 2$.
Or : $f(0) = 0 \Leftrightarrow A + B - 1 = 0$ et $f'(0) = 0 \Leftrightarrow -2A + 2B + 2 = 0$; donc : $A = 1$ et $B = 0$.
Par suite : $f(x) = e^{-2x} - x^2 + 2x - 1$.

♦ Exercice 36 p. 334

1. $y = (Ax + B)e^{-2x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

2. $g(x) = -x + 1$.

3. *a)* $(f - g)$ est solution de (E) si et seulement si : $(f - g)''(x) + 4(f - g)'(x) + 4(f - g)(x) = 0$;
ou : $f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = g''(x) + 4g'(x) + 4g(x) = -4x$; c'est-à-dire : f est solution de (E').
On en déduit que : $f(x) = (Ax + B)e^{-2x} - x + 1$; $f'(x) = (-2Ax + A - 2B)e^{-2x} - 1$.
$f(0) = 2 \Leftrightarrow B = 1$ et $f'(0) = -2 \Leftrightarrow A = 1$. Donc : $f(x) = (x + 1)e^{-2x} - x + 1$.

♦ Exercice 37 p. 334

1. La vérification est immédiate.

2. On a : $f(x) = g(x)e^{2x}$

$$f'(x) = [g'(x) + 2g(x)]e^{2x}$$
$$f''(x) = [g''(x) + 4g'(x) + 4g(x)]e^{2x}$$
$$f^{(3)}(x) = [g^{(3)}(x) + 6g''(x) + 12g'(x) + 8g(x)]e^{2x}.$$

Donc : f est solution de (E) si seulement si : $g^{(3)} = 0$.

3. On en déduit que : $g(x) = \frac{1}{2}Ax^2 + Bx + C$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R})$;
donc : $f(x) = (\frac{1}{2}Ax^2 + Bx + C)\,e^{2x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 38 p. 334

1. *a)* Posons : $y = xz$.
On a : $y' = z + xz'$ et $y'' = 2z' + xz''$.
y est solution de (E) si et seulement si : $x^2(2z' + xz'') - x(z + xz') + xz = 0$;
c'est-à-dire : $x^2z' + x^3z'' = 0$; ou : $z' + xz'' = 0$; ou encore : $(xz')' = 0$.
On en déduit que : $xz' = A$, $(A \in \mathbb{R})$.

b) L'équation (E') a pour solution : $z = A\ln x + B$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.
Donc, l'équation (E) a pour solution : $y = xz = Ax\ln x + Bx$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

2. On a (H) : $y' = \dfrac{x + y}{x} \Leftrightarrow xy' = x + y$.

On a : $y' = z + xz'$ et $y'' = 2z' + xz''$. Posons : $y = xz$. On a : $y' = z + xz'$.

xz est solution de (H) si et seulement si : $z' = \dfrac{1}{x}$.

Donc : $z = \ln(-x) + C$, $(C \in \mathbb{R})$. Par suite : $y = x\ln(-x) + Cx$, $(C \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 39 p. 334

1. Si f est solution sur $]1\,;+\infty[$ de (E) alors : $(x - 1)f''(x) - xf'(x) + f(x) = 0$.
En dérivant, on obtient après simplification : $f^{(3)}(x) - f''(x) = 0$;
donc, f'' est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = y$.

2. On a : $\forall\, x \in \,]1\,;+\infty[,\ f^{(3)}(x) = f''(x)$;
donc : $\forall\, x \in \,]1\,;+\infty[,\ f''(x) = f'(x) + C_1$, $(C_1 \in \mathbb{R})$;
$\forall\, x \in \,]1\,;+\infty[,\ f'(x) = f(x) + C_1x + C_2$, $(C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R})$.
f est solution de (E) si et seulement si : $C_1 + C_2 = 0$.

3. Si f est solution de (E), alors f'' est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = y$;
donc : $f''(x) = Ae^x$, $(A \in \mathbb{R})$; par suite : $f(x) = Ae^x + Bx + C$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R})$.
Réciproquement, si la fonction $x \mapsto Aex + Bx + C$ est solution de (E), alors : $C = 0$.
On en déduit que : $f(x) = Ae^x + Bx$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

♦ Exercice 40 p. 334

1. On a (Σ) : $\begin{cases} y' = -z & \text{(i)} \\ z' = y - 2z & \text{(ii)} \end{cases}$.

- On a : (i) $\Rightarrow y'' = -z' = -y + 2z$ (d'après (ii)).

$\begin{cases} y' = -z \\ y'' = -y + 2z \end{cases} \Rightarrow y'' + 2y' + y = 0.$

- On a : (ii) $\Rightarrow z'' = -y' - 2z' = -z - 2z'$; donc : $z'' + 2z' + z = 0$.

2. *a)* On a : (E) : $(u'' + u') + (u' + u) = 0$; ou : $(u' + u)' + (u' + u) = 0$.
Donc : $(u' + u)(x) = Ae^{-x}$, $(A \in \mathbb{R})$.
b) • $g : x \mapsto Axe^{-x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E').
• f est solution de (E') si et seulement si $(f - g)$ est solution de $v' + v = 0$.
c) On a : $(f - g)(x) = Be^{-x}$; donc : $f(x) = (Ax + B)e^{-x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

3. • Si $(y\,;z)$ est solution de (Σ), alors : $y = (Ax + B)e^{-x}$ et $z = (Cx + D)e^{-x}$.
• Réciproquement, si y et z sont solutions de (Σ), alors : $y' = -z \Rightarrow C = A$ et $D = B - A$.
Donc : $\begin{cases} y = (Ax + B)e^{-x} \\ z = (Ax + B - A)e^{-x} \end{cases}$

Imprimé en Italie par Rotolito Lombarda S.p.A.
Dépôt légal : 60561 - 10/2006 - Collection n° 61 - Édition n° 01
59/6323/6