les QCM de la prépa

Une approche différente pour réussir sa Prépa

Maths

Première année

MPSI
PCSI
PTSI
BCPST

Collection dirigée par Laurent Desmottes
Professeur en classes préparatoires

Martine Arous-Latanicki
Professeur en classes préparatoires

hachette
SUPÉRIEUR

Composition : IndoLogic

Maquette intérieure : Nicolas Piroux

Maquette de couverture : Nicolas Piroux

www.hachette-education.com

ISBN : 978-2-01-181240-7

Pour Hachette Éducation, le principe est d'utiliser des papiers composés de fibres naturelles, renouvelables, recyclables, fabriquées à partir de bois issus de forêts qui adoptent un système d'aménagement durable.
En outre, Hachette Éducation attend de ses fournisseurs de papier qu'ils s'inscrivent dans une démarche de certification environnementale reconnue.

Introduction

Cet ouvrage s'adresse à tous les étudiants en $1^{\text{ère}}$ année d'études supérieures scientifiques (classes préparatoires et 1^{er} cycle universitaire) désirant tester l'outil QCM. Ils en découvriront les nombreuses vertus .

- Par leur caractère ludique, les QCM sont une **invitation permanente** à **travailler**, et à le faire **avec enthousiasme**.
- Séparés en blocs indépendants, les QCM se prêtent particulièrement à des séquences de travail de courte durée (½ heure par exemple), propices à **une concentration et une efficacité maximales**.
- N'exigeant pas de rédaction, les QCM renvoient néanmoins à **la nécessité de rédiger** convenablement un brouillon pour aboutir à la solution exacte.
- Les QCM confrontent immédiatement l'étudiant à **une évaluation sans concession**. Il n'y a pas de réussite approximative, aucune possibilité de biaiser : c'est bon ou c'est faux !
- Les QCM, qui ne sont faciles qu'en apparence, renvoient aux **fondamentaux** des programmes, à la difficulté qu'il y a finalement à maîtriser parfaitement des questions de base, et à la nécessité de retravailler constamment ces incontournables. Les QCM ont la vertu de secouer le cocotier.
- Les QCM poussent finalement l'étudiant à se remettre en cause dans ses pratiques, et à s'interroger sur **la qualité, le plaisir et la gestion du temps**, qui sont les véritables critères de la réussite aux concours.

❖

Une grande partie des sujets proposés dans cet ouvrage reprennent, en les adaptant, les annales des concours de recrutement de l'École Nationale de l'Aviation Civile (ENAC) : concours EPL (Élèves Pilotes de Ligne) et concours ICNA (Ingénieurs du Contrôle de la Navigation Aérienne).
Les questions ont été regroupées en QCM de 3 ou 4 questions, et classées en quatorze chapitres thématiques, ce qui permet une utilisation régulière de l'ouvrage tout au long de l'année, à mesure de l'avancée du programme.

❖

Chaque question propose 4 possibilités de réponse : A, B, C ou D.
Chaque question comporte exactement zéro, une ou deux réponse(s) exacte(s). À chaque question, le candidat a donc le choix entre :

- sélectionner la seule réponse qu'il juge bonne parmi A, B, C ou D;
- sélectionner les deux seules réponses qu'il juge bonnes parmi A, B, C ou D;
- considérer qu'aucune des réponses proposées n'est bonne.

sommaire

sommaire

chapitre 1

Complexes

QCM 1 Relations trigonométriques
(d'après EPL 2008)

Question 1

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

A $\forall \theta \in \mathbb{R} : \cos(5\theta) = 16\cos^5\theta + 5\cos\theta$

B $\forall \theta \in \mathbb{R} : \cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

C $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

D $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ car $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Question 2 (d'après EPL 2008)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à résoudre $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k\theta) = 0$ où θ est une inconnue réelle.

A Si θ est solution, alors $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sin^2(k\theta) = 2^n$.

B $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k\theta) = \cos(n\theta)\left(\frac{\cos\theta}{2}\right)^n$

C L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{n} + \frac{k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D Il n'y a pas de solution à cette équation.

Question 3 (d'après ICNA 1990)

Soient $U(\alpha,h)=\sum_{p=0}^{n-1}\cos(\alpha+ph)$ et $V(\alpha,h)=\sum_{p=0}^{n-1}\sin(\alpha+ph)$, avec α et h réels non multiples de 2π. On note $Z=U+iV$.

A $Z(\alpha,h)=e^{i\alpha}\dfrac{1-e^{inh}}{1-e^{ih}}$

B $Z(\alpha,h)=e^{i\alpha}\dfrac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$

C $U(\alpha,h)=V\left(\frac{\pi}{2}-\alpha,h\right)$

D $U(0,h)=\dfrac{\cos\left(\frac{n-1}{2}h\right)\sin\left(\frac{nh}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$

Question 4 (d'après ICNA 1990)

On pose $A(h)=\sum_{p=1}^{n}\cos(ph)$ et $B(h)=\sum_{p=1}^{n}p\,\sin(ph)$.

A $A(h)=U(-h,h)$

B $A(h)=U(h,h)$

C $B(h)=\dfrac{dA}{dh}(h)$

D $A(h)=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}h\right)}{2\,\sin\left(\frac{h}{2}\right)}-\dfrac{1}{2}$

QCM 2 Application du plan complexe

(d'après EPL 2006)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère une transformation qui à tout point m d'affixe le nombre complexe non nul z, associe le point M d'affixe le nombre complexe Z vérifiant l'équation :

$$Z = \frac{z^2 + 1}{z^2} \qquad \text{(H)}$$

Question 1

On note $z = r.e^{i\theta}$ la forme trigonométrique du complexe z.

- **A** Z n'a pas toujours de forme trigonométrique.
- **B** La forme trigonométrique de Z s'écrit $\left(\frac{1}{r^2}\right)e^{-2i\theta}$.
- **C** La forme trigonométrique de Z s'écrit $1 - \left(\frac{1}{r^2}\right)e^{-2i\theta}$.
- **D** La forme trigonométrique de Z s'écrit $1 + \left(\frac{1}{r^2}\right)e^{-2i\theta}$.

Question 2

La partie réelle de Z s'écrit :

- **A** $\left(\frac{1}{r^2}\right)\cos(-2\theta)$
- **B** $1 + \left(\frac{1}{r^2}\right)\cos(2\theta)$

La partie imaginaire de Z s'écrit :

- **C** $\sin(-2\theta)$
- **D** $-\left(\frac{1}{r^2}\right)\sin(2\theta)$

Question 3

Soit Z un complexe, distinct de 1, représenté sous forme cartésienne par le nombre $X + iY$, où X et Y sont deux nombres réels. Pour un tel Z, on note $z = x + iy$ un complexe solution, s'il en existe, de l'équation (H). On a nécessairement :

A $X \neq 1$ et $Y \neq 0$

B $x^2 + y^2 = \dfrac{X-1}{(X-1)^2 + Y^2}$

C $x^2 - y^2 = \dfrac{X-1}{(X-1)^2 + Y^2}$

D $2xy = -\dfrac{Y}{(X-1)^2 + Y^2}$

Question 4

Soit Z un complexe non nul, distinct de 1, de forme trigonométrique $R\mathrm{e}^{i\varphi}$. Pour un tel Z, on note $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ un complexe solution, s'il en existe, de l'équation (H). On a nécessairement :

A $R \neq 1$ ou $\varphi \neq 0$

B $R \neq 1$ et $\varphi \neq 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$

C $r^2 = \dfrac{1}{R^2 + 1 - 2R\cos\varphi}$

D $r^2 = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 + 1 - 2R\cos\varphi}}$

Question 5

On suppose dans cette question que le point m d'affixe le nombre complexe non nul z décrit la demi-droite D d'origine O, privée de O, de vecteur directeur $\vec{e}$ tel que l'angle $\left(\vec{u}, \vec{e}\right)$ soit égal à $\pi/4$. Le point M d'affixe le nombre complexe Z vérifiant l'équation (H) décrit alors :

A une demi-droite.

B le demi-axe $\left(O, \vec{u}\right)$.

C le demi-axe $\left(O, -\vec{v}\right)$.

D le cercle de centre O et rayon $\sqrt{2}$.

Question 6

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation (E_n) : $\left(\dfrac{z^2+1}{z^2}\right)^n = 1.$

A Si z_0 est une solution de (E_n), $-z_0$ et $\overline{z_0}$ sont solutions de (E_n).

B (E_n) a n racines distinctes.

C (E_n) a $2n$ racines distinctes.

D $\left\{ \pm \dfrac{1}{\sqrt{2\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}} e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2n}\right)} \ / \ k \in \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\text{-}1\} \right\}$ est l'ensemble des solutions de (E_n).

QCM 3 Interprétation géométrique (d'après EPL 1994)

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on considère la fonction :

$$f \ : \ z \mapsto z' = \frac{iz - 2 + 4i}{z - i}$$

Question 1

On note D l'ensemble de définition de f. On peut dire que f est :

A définie sur $D = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

B l'application nulle.

C une bijection de D sur lui-même.

D involutive ($f \circ f = Id$).

Question 2

Soient M le point d'affixe z, M' le point d'affixe z', A le point d'affixe i, B le point d'affixe $-4-2i$ et O le point d'affixe 0.
Si l'on pose $Z = z - i$ et $Z' = z' - i$, alors :

A $Z\,Z' = -3 - 4i$

B $|Z\,Z'| = 5$

C $\arg(Z\,Z') = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \pmod{2\pi}$

D $\arg(Z) + \arg(Z') = C^{ste} \pmod{2\pi}$

Question 3

Si M décrit le cercle de centre A et de rayon 5, alors M' est situé sur :

A la médiatrice du segment $[OA]$.

B le cercle de diamètre $[OA]$.

Si M décrit une droite passant par A, sauf le point A, alors M' est situé sur :

C le cercle de diamètre $[AB]$.

D une droite passant par A.

Question 4

Si M' décrit le cercle de centre O et de rayon 1, alors M décrit :

A le cercle de diamètre $[AB]$.

B la médiatrice du segment $[AB]$.

Si M' décrit l'axe des réels, alors M décrit :

C une droite passant par B, sauf le point B.

D le cercle de diamètre $[AB]$, sauf le point B.

QCM 4 Équations complexes

(d'après EPL 1991 et 1992)

Question 1

Dans $\mathbb{C}$, on considère les équations :

$$z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$\bar{z}^2 - 2z + 1 = 0 \qquad (2)$$

A (1) est équation du 2^{nd} degré et admet donc deux racines, distinctes ou non.

B si z_0 est une solution de (1), alors z_0 est une solution de (2).

C si z_0 est solution de (1), alors z_0 est solution de l'équation du 4^e degré :

$$z^4 + 2z^2 - 8z + 5 = 0 \qquad (3)$$

D (1) et (2) ont au moins une solution différente.

Question 2

Pour l'équation (3) :

A 1 n'est pas une racine.

B on peut mettre en facteur $(z-1)^2$ dans le membre de gauche.

C les racines sont toutes réelles.

D il y a trois racines distinctes.

Question 3

Les valeurs suivantes sont racines de l'équation (1) :

A -1

B $-1 + i$

C $-1 - 2i$

D 1

→ QCM 1 Relations trigonométriques

• Question 1 : réponses B et C

NON

Pour la valeur particulière $\theta = 0$, l'équation de l'assertion A s'écrit :

$$\cos(5\times 0) = 16\cos^5(0) + 5\cos(0), \text{ soit } 1 = 16 + 5.$$

La réponse A est fausse.

Formule de Moivre

$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

• Soit le complexe : $z = \cos(5\theta) + i\sin(5\theta)$

À l'aide du binôme de Newton, en s'aidant du triangle de Pascal, on obtient :

$$z = (\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta$$
$$-10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta$$

$$\cos(5\theta) = \Re e(z) = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$

$$\cos(5\theta) = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\left(1-\cos^2\theta\right) + 5\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^2$$

$$\cos(5\theta) = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\left(1-\cos^2\theta\right) + 5\cos\theta\left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)$$

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

La réponse B est bonne.

• Pour $\theta = \dfrac{\pi}{10}$, la relation précédente s'écrit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = 16\cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\left[16\cos^4\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5\right] = 0$$

soit, puisque $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \neq 0$, et en posant $x = \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$:

$$16x^2 - 20x + 5 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 400 - 320 = 80 > 0$ donc l'équation admet 2 racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$

$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) > 0$, donc : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}}$

Or $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{6}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \simeq 0{,}866\ldots$

et $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

Question 2 : aucune réponse n'est bonne

- $$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sin^2(k\theta) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1-\cos(2k\theta)}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k\theta)}_{nul \text{ d'après l'hypothèse}}$$

En utilisant le développement du binôme de Newton, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sin^2(k\theta) = \frac{2^n - 1}{2}$$

La réponse A est fausse.

NON

Pour la valeur particulière $\theta = 0$, l'équation de l'assertion B s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{soit encore} \quad 2^n - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

La réponse B est fausse.

NON

$\theta = 0$ n'est pas solution de l'équation à résoudre, puisque, si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cos(0) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1 \neq 0$$

Or, $\theta = 0$ appartient à l'ensemble des solutions proposées, puisque, pour $k = -1$, θ s'écrit :

$$\frac{\pi}{n} + \frac{k\pi}{n} = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} = 0$$

La réponse C est fausse.

• D'après la formule de Moivre :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k\theta) = \Re e\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left[\cos(2k\theta) + i\sin(2k\theta)\right]\right) = \Re e\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{2i\theta}\right)^k\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k\theta) = \Re e\left[\left(e^{2i\theta} + 1\right)^n - 1\right] = \Re e\left[e^{in\theta}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^n - 1\right]$$

$$= 2^n \cos(n\theta)\cos^n\theta - 1$$

ce qui revient à résoudre l'équation : $\cos(n\theta)\cos^n\theta = \dfrac{1}{2^n}$

Penser à factoriser $e^{2i\theta} \pm 1$ par $e^{i\theta}$ pour faire apparaître $\cos\theta$ ou $\sin\theta$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f sur $\mathbb{R}$ par : $f(\theta) = \cos(n\theta)\cos^n\theta$

On a : $f(0) = 1 > \dfrac{1}{2^n}$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) = 0 < \dfrac{1}{2^n}$

Or, f est continue donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$\exists \theta_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2n}\right] / f(\theta_0) = \dfrac{1}{2n}$ et θ_0 est solution de l'équation proposée.

La réponse D est fausse.

• Question 3 : réponses A et D

• $Z(\alpha, h) = \sum_{p=0}^{n-1} \left[\cos(\alpha + ph) + i \sin(\alpha + ph)\right] = \sum_{p=0}^{n-1} e^{i\,(\alpha+ph)} = e^{i\alpha} \sum_{p=0}^{n-1} e^{iph}$

Il apparaît la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme égal à 1 et de raison e^{ih}. Or $h \neq 2k\pi$, donc $e^{ih} \neq 1$ et :

$$Z(\alpha, h) = e^{i\alpha}\,\frac{1 - e^{inh}}{1 - e^{ih}}$$

La réponse A est bonne.

• $Z(\alpha, h) = e^{i\alpha}\,\dfrac{e^{i\frac{nh}{2}}\left(e^{-i\frac{nh}{2}} - e^{i\frac{nh}{2}}\right)}{e^{i\frac{h}{2}}\left(e^{-i\frac{h}{2}} - e^{i\frac{h}{2}}\right)} = e^{i\left(\alpha + \frac{(n-1)h}{2}\right)}\,\dfrac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$

La réponse B est fausse.

• $U(\alpha, h) = \sum_{p=0}^{n-1} \cos(\alpha + ph) = \sum_{p=0}^{n-1} \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + ph)\right]$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \sin\left[\frac{\pi}{2} - \alpha - ph\right] = V\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, -h\right)$$

La réponse C est fausse.

• D'après l'assertion A :

$$U(0, h) = \Re\mathrm{e}\left[Z(0, h)\right] = \Re\mathrm{e}\left[e^{i\frac{(n-1)h}{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}\right] = \frac{\cos\left(\frac{n-1}{2}h\right)\,\sin\left(\frac{nh}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$$

La réponse D est bonne.

• Question 4 : réponses B et D

• $A(h) = \sum_{p=1}^{n} \cos(ph) = \sum_{p=1}^{n} \cos\left[h + (p-1)h\right] = \sum_{q=0}^{n-1} \cos(h + ph) = U(h, h)$

(en posant $q = p - 1$).

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

NON $\frac{dA}{dh}(h) = -\sum_{p=1}^{n} p\sin(ph) = -B(h)$ **La réponse C est fausse.**

- D'après les assertions 4-B et 3-A :

$$A(h) = U(h,h) = \Re e\left[Z(h,h)\right]$$

$$A(h) = \Re e\left[e^{i\frac{(n+1)h}{2}} \frac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}\right] = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}h\right)\ \sin\left(\frac{nh}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$$

En utilisant la transformation $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$, on obtient :

$$A(h) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}h\right)}{2\ \sin\left(\frac{h}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

La réponse D est bonne.

→ QCM 2 Application du plan complexe

• Question 1 : réponse A

Forme trigonométrique d'un complexe
Tout nombre complexe Z **non nul** peut être mis sous la forme trigonométrique :

$$Z = |Z|.e^{i\ \arg(Z)}$$

- Ici, Z peut être nul, si $z = \pm\, i$. Donc Z n'a pas toujours de forme trigonométrique.

La réponse A est bonne.

- $Z = \frac{r^2.e^{i2\theta} + 1}{r^2.e^{i2\theta}} = 1 + \frac{1}{r^2.e^{i2\theta}} = 1 + \left(\frac{1}{r^2}\right)\ e^{-2i\theta}$

Les réponses B et C sont fausses.

NON

• L'expression D est bonne, mais n'est pas une forme trigonométrique.

La réponse D est fausse.

L'expression B est la seule qui soit une forme trigonométrique... mais ce n'est pas la bonne !

• Question 2 : réponses B et D

D'après la question précédente, Z s'écrit :

$$Z = 1 + \left(\frac{1}{r^2}\right) e^{-2i\theta} = 1 + \left(\frac{1}{r^2}\right)\left[\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\right]$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{r^2}\right)\cos(2\theta) - i\left(\frac{1}{r^2}\right)\sin(2\theta)$$

$$\Re e(Z) = 1 + \left(\frac{1}{r^2}\right)\cos(2\theta) \quad \text{et} \quad \Im m(Z) = -\left(\frac{1}{r^2}\right)\sin(2\theta)$$

Les réponses A et C sont fausses, les réponses B et D sont bonnes.

• Question 3 : réponses C et D

Logique

Soient P et Q deux propositions logiques.

La négation de « **P et Q** » est « **non P ou non Q** ».

NON

$Z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad X = 1 \ \ et \ \ Y = 0$

$Z \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad X \neq 1 \ \text{ ou } \ Y \neq 0$

La réponse A est fausse.

$$Z \neq 1 \quad \text{donc} \quad (H) \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = \frac{1}{Z-1} \qquad (1)$$

Or, l'équation (1) s'écrit :

$$(x+iy)^2 = \frac{1}{X+iY-1}$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy = \frac{X-1-iY}{(X-1+iY)(X-1-iY)} = \frac{X-1-iY}{(X-1)^2+Y^2}$$

soit finalement, en identifiant membre à membre les parties réelles d'une part, et les parties imaginaires d'autre part :

$$x^2 - y^2 = \frac{X-1}{(X-1)^2 + Y^2} \quad \text{et} \quad 2xy = -\frac{Y}{(X-1)^2 + Y^2}$$

La réponse B est fausse, les réponses C et D sont bonnes.

• Question 4 : réponse D

$$Z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{R} = 1 \ \ et \ \ \varphi = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$Z \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{R} \neq 1 \ \ \text{ou} \ \ \varphi \neq 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

L'assertion A n'exclut pas le cas où, par exemple : $(R, \varphi) = (1, 2\pi)$

Or : $Z = R.e^{i\varphi} = 1.e^{i\,2\pi} = 1$. **La réponse A est fausse.**

L'assertion B recense bien l'ensemble des valeurs de φ. En revanche, elle est trop restrictive par la présence du « et ». Ainsi, le cas où, par exemple : $(R, \varphi) = (1, \pi/2)$ ne doit pas être exclu puisque :

$$Z = R.e^{i\varphi} = 1.e^{i\pi/2} = i \neq 1$$

La réponse B est fausse.

• D'après l'équation (1) établie à la question 3 : $z^2 = \dfrac{1}{Z-1}$

soit encore : $r^2 = \left|z^2\right| = \dfrac{1}{|Z-1|} = \dfrac{1}{\left|R.e^{i\varphi} - 1\right|} = \dfrac{1}{|R.\cos\varphi - 1 + i\,R.\sin\varphi|}$

et finalement :

$$r^2 = \frac{1}{\sqrt{R^2 + 1 - 2R\cos\varphi}}$$

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

• Question 5 : réponse A

D'après l'énoncé : $z = r.e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $r \neq 0$.

D'après l'assertion A de la question 1, si Z vérifie l'équation (H), Z s'écrit :

$$Z = 1 + \left(\frac{1}{r^2}\right) e^{-2i\theta} = 1 + \left(\frac{1}{r^2}\right) e^{-i\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{i}{r^2}$$

La partie réelle de Z est donc égale à 1, et sa partie imaginaire $-\frac{1}{r^2}$ décrit $\mathbb{R}_-^*$ quand r décrit $\mathbb{R}_+^*$. Autrement dit :

le point M d'affixe Z décrit la demi-droite $\left(A, -\vec{v}\right)$, privée du point A d'affixe 1.

La réponse A est bonne, les réponses B, C et D sont fausses.

• Question 6 : réponses A et D

• Notons $\varphi(z) = \left(\frac{z^2+1}{z^2}\right)^n$.

z_0 solution de (E_n) équivaut à $\varphi(z_0) = 1$.

$$\varphi\left(-z_0\right) = \varphi\left(z_0\right), \quad \overline{\varphi\left(z_0\right)} = \varphi\left(\overline{z_0}\right) \quad \text{et} \quad \overline{1} = 1$$

Donc, si z_0 est solution de (E_n), $-z_0$ et $\overline{z_0}$ le sont également.

La réponse A est bonne.

• Prenons l'inconnue auxiliaire : $Z = \frac{z^2+1}{z^2}$

$$\left(E_n\right) \Leftrightarrow \begin{cases} Z = \dfrac{z^2+1}{z^2} & \text{(H)} \\ Z^n = 1 & (2) \end{cases}$$

Résolvons (H) :

$$\text{(H)} \Leftrightarrow z^2\left(Z-1\right) = 1$$

Si $Z = 1$, on obtient $0 = 1$: pas de solution en z.

Si $Z \neq 1$: $(H) \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{Z-1}$

Or $\frac{1}{Z-1} \neq 0$ donc (H) admet deux racines non nulles opposées.

Les solutions de (2) sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité :

$$\left\{ Z = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \ / \ k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \text{n-1}\} \right\}$$

Pour $k = 0$: $Z = 1$ ne convient pas.
Donc (E_n) est équivalent à :

$$z^2 = \frac{1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1} = \frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}} = \frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

$$= \frac{e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)}}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \ / \ k \in \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\text{-}1\}$$

NON (E_n) a donc $(2n - 2)$ racines. **Les réponses B et C sont fausses.**

$$1 \le k \le n-1 \quad \text{donc} \quad 0 < \frac{k\pi}{n} < \pi \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$$

L'ensemble des solutions de (E_n) est :

$$\left\{ z = \pm \frac{1}{\sqrt{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}}\, e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2n}\right)} / k \in \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\text{-}1\} \right\}$$

La réponse D est bonne.

QCM 3 Interprétation géométrique

• Question 1 : réponses C et D

NON

- La fonction f est définie sur $D = \mathbb{C} \setminus \{i\}$. **La réponse A est fausse.**
- À l'évidence, f n'est pas l'application nulle. **La réponse B est fausse.**

- $f(z) = i \iff 4i - 3 = 0$: impossible. Donc f est une application de D dans D.

Soit $z' \in$ D. On cherche $z \in$ D tel que $z' = f(z)$.

$$z' = f(z) \iff z'(z - i) = iz - 2 + 4i$$

$$z' = f(z) \iff z(z' - i) = iz' - 2 + 4i$$

Or $z' \neq i$, donc :

$$z' = f(z) \iff z = \frac{iz' - 2 + 4i}{z' - i} \iff z = f(z')$$

Donc z est solution unique dans D. Par conséquent, f est bijective, et $f^{-1} = f$. De plus :

$$f \circ f = Id_{\mathrm{D}}$$

Les réponses C et D sont bonnes.

• Question 2 : réponses B et D

- On a, pour $(z, z') \in \mathrm{D}^2$: $z' = \dfrac{iz - 2 + 4i}{z - i}$

Calculons $Z\,Z'$:

$$Z\,Z' = (z - i)(z' - i) = (z - i)\left(\frac{iz - 2 + 4i}{z - i} - i\right) = -3 + 4i$$

La réponse A est fausse.

- $|Z\,Z'| = |-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

La réponse B est bonne.

Angle entre deux vecteurs et argument d'un complexe

Si $\vec{e}_1$ est le vecteur directeur de l'axe Ox, et si M est le point d'affixe z :

$$\arg(z) = \left(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}\right) \quad OM$$

Soient trois points A, B, C, avec C distinct de A et B, d'affixes respectives a, b et c :

$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \arg\left(\frac{c - b}{c - a}\right) \quad (\text{mod } 2\pi)$$

NON • $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \arg\left(\dfrac{z'-i}{z-i}\right) = \arg\left(\dfrac{Z'}{Z}\right) = \arg(Z') - \arg(Z) \quad (\text{mod } 2\pi)$

La réponse C est fausse.

• $Z\,Z' = -3+4i$, donc :

$$\arg(Z\,Z') = \arg(Z) + \arg(Z') = \arg(-3+4i) \quad (\text{mod } 2\pi)$$

La réponse D est bonne.

• Question 3 : réponse D

• Si M décrit le cercle de centre A et de rayon 5, on a :

$$\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = |z-i| = |Z| = 5$$

Donc, d'après l'assertion B de la question précédente :

$$\left\|\overrightarrow{AM'}\right\| = |z'-i| = |Z'| = \frac{|Z\,Z'|}{|Z|} = \frac{5}{5} = 1$$

Cela signifie que M' est situé sur le cercle de centre A et rayon 1, dont $[OA]$ représente un rayon et non un diamètre.

Les réponses A et B sont fausses.

• Si M décrit une droite Δ passant par A, sauf le point A, alors le vecteur $\overrightarrow{AM}$ garde une direction constante :

$$\left(\vec{e}_1, \overrightarrow{AM'}\right) = \arg(Z) = \alpha \quad (\text{mod } \pi) \quad (\alpha \text{ est l'angle polaire de } \Delta).$$

Donc, d'après l'assertion D de la question précédente :

$$\left(\vec{e}_1, \overrightarrow{AM'}\right) = \arg(Z') = \beta = \arg(-3+4i) - \alpha \quad (\text{mod } \pi)$$

Cela signifie que M' est situé sur la droite Δ' d'angle polaire β passant par A.

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

Question 4 : réponse B

• Si M' décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1, on a :

$$M' \in \mathscr{C} \iff \left\|\overrightarrow{OM'}\right\| = 1$$

$$M' \in \mathscr{C} \iff |z'| = 1$$

Or, d'après l'énoncé :

$$|z'| = \left|\frac{iz - 2 + 4i}{z - i}\right| = \frac{|iz - 2 + 4i|}{|z - i|} = \frac{|i|.|z + 4 + 2i|}{|z - i|} = \frac{|z + 4 + 2i|}{|z - i|}$$

$$M' \in \mathscr{C} \iff |z + 4 + 2i| = |z - i| \quad \text{et} \quad z \neq i$$

$$M' \in \mathscr{C} \iff \left\|\overrightarrow{BM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \quad \text{et} \quad M \neq A.$$

Cela signifie que M décrit la médiatrice du segment $[AB]$.

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

• Soit M d'affixe z $(z \neq i)$:

$$M' \in (Ox) \iff z' \in \mathbb{R} \iff z' = 0 \ \ ou \ \ \arg(z') = 0 \quad [\pi]$$

$$M' \in (Ox) \iff z' = -4 - 2i \ \ ou \ \ \arg(z') = 0 \quad [\pi]$$

Or :

$$\arg(z') = \arg\left(\frac{iz - 2 + 4i}{z - i}\right) = \arg(i) + \arg\left(\frac{z + 4 + 2i}{z - i}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$$

donc :

$$M' \in (Ox) \iff M = B \ \ ou \ \ \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2} \qquad (\text{mod } \pi)$$

Cela signifie que M décrit le cercle de diamètre AB, sauf le point A puisque $z \neq i$.

Les réponses C et D sont fausses.

QCM 4 Équations complexes

Question 1 : réponses B et C

NON L'équation (1) n'est pas une équation du 2nd degré, car elle fait intervenir $\overline{z}$ au lieu de z. **La réponse A est fausse.**

• Si z_0 est une solution de l'équation (1), on a :

$$z_0^2 - 2\overline{z_0} + 1 = 0$$

L'équation conjuguée de (1) est vraie :

$$\overline{z_0^2} - 2z_0 + 1 = 0$$

Or :
$$\overline{z_0^2} = \overline{z_0}^2$$

donc :
$$\overline{z_0}^2 - 2z_0 + 1 = 0$$

Cela signifie que z_0 est solution de l'équation (2), et que (2) $\Leftrightarrow$ (1).

La réponse B est bonne et la réponse D est fausse.

• Si z_0 est une solution de (1), on a :

$$\overline{z_0} = \frac{1}{2}\left(z_0^2 + 1\right)$$

En remplaçant dans (2), on obtient :

$$\left[\frac{1}{2}\left(z_0^2 + 1\right)\right]^2 - 2z_0 + 1 = 0$$

$$\left(z_0^2 + 1\right)^2 - 8z_0 + 4 = 0$$

$$z_0^4 + 2z_0^2 + 1 - 8z_0 + 4 = 0$$

$$z_0^4 + 2z_0^2 - 8z_0 + 5 = 0$$

Donc z_0 est solution de l'équation (3).

La réponse C est bonne.

• Question 2 : réponses B et D

NON $z = 1$ est solution évidente de l'équation (3). **La réponse A est fausse.**

• On cherche une factorisation :

$$z^4 + 2z^2 - 8z + 5 = (z-1)\left(z^3 + z^2 + 3z - 5\right)$$

$$z^4 + 2z^2 - 8z + 5 = (z-1)^2\left(z^2 + 2z + 5\right)$$

On peut mettre en facteur $(z - 1)^2$ dans le membre de gauche de l'équation (3).

La réponse B est bonne.

• L'équation $z^2 + 2z + 5 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 20 = -16$ et pour racines : $z = -1 \pm 2i$

Finalement, les racines de l'équation (3) sont :

$$\begin{cases} 1 \quad \text{(racine double)} \\ -1 - 2i \\ -1 + 2i \end{cases}$$

NON Deux racines de (3) ne sont pas réelles. **La réponse C est fausse.**

• Il y a trois racines distinctes à l'équation (3).

La réponse D est bonne.

• Question 3 : réponses C et D

NON -1 et $-1 + i$ ne sont pas racines de (3), donc ne sont pas racines de (1), d'après la question 1 assertion C. **Les réponses A et B sont fausses.**

• $(-1-2i)^2 - 2\overline{(-1-2i)} + 1 = 1 + 4i - 4 - 2(-1+2i) + 1 = 0$

$-1 -2i$ est donc racine de (1), donc le conjugué $-1 + 2i$ est aussi racine de (1).

La réponse C est bonne.

• $(1)^2 - 2\overline{(1)} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

1 est donc racine de (1).

La réponse D est bonne.

En conclusion, (1) a trois racines : 1, $-1 -2i$ et $-1 + 2i$.

chapitre 2

Fonctions usuelles

QCM 1 Fonction exponentielle
(d'après ICNA 1990)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{si } x \in \mathbb{R} - \{-1,\ 1\},\ f(x) = x\exp\left(\dfrac{2x}{x^2 - 1}\right) \\ f(-1) = f(1) = 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (xOy).

Question 1

A f est continue sur $\mathbb{R}$.

B $\forall\ x \neq 0,\ f(x)\,f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$

C f est impaire.

D f est dérivable à gauche en -1 et 1.

Question 2

Le signe de f' est celui d'un polynôme p de degré 4.

A $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

B $p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$

C p est divisible par $x^2 - \left(1 + \sqrt{5}\right)x + 1$.

D p admet quatre racines réelles distinctes.

Question 3

Nous avons les limites suivantes :

A $\lim\limits_{x \to 1_+} f(x) = -\infty$

B $\lim\limits_{x \to -1_+} f(x) = +\infty$

C $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

D $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = 1$

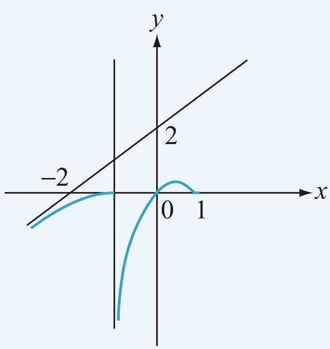
Question 4

A $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ donc la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

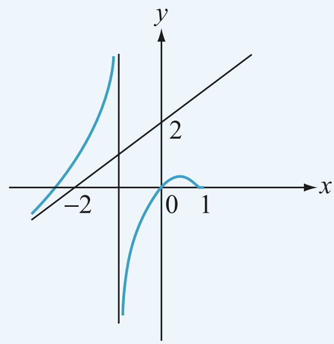
B $\mathcal{C}$ admet trois asymptotes.

Sur l'intervalle $x \leq 1$, $\mathcal{C}$ est représentée par :

C



D



QCM 2 Fonctions trigonométriques réciproques (d'après EPL 1992)

On considère la fonction de variable réelle x définie par :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

• Question 1

- **A** f est définie sur $]-1,\ 1[$.
- **B** f est définie sur $\mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$.
- **C** f est paire car la composée de deux fonctions impaires est paire.
- **D** f est impaire car la somme de deux fonctions impaires est impaire.

• Question 2

- **A** f est bornée.
- **B** f est prolongeable par continuité en 1.
- **C** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$
- **D** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Question 3

Pour $x \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$, on pose $\varphi = \arctan x$

A $f(x) = \arcsin[\sin(2\varphi)] - \arctan[\tan(2\varphi)]$

B Si $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\arcsin(\sin u) = \pi + u$.

C Si $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\arctan(\tan u) = -u$.

D Si $x \in [0, 1[$, $f(x) = 0$.

Question 4

Sur $]1, +\infty[$, on a :

A f est dérivable sur $[1, +\infty[$.

B $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

C $f'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2}$

D $f(x) = \pi - 2\arctan x$

QCM 3 Calcul d'une somme

Soient les fonctions de variable réelle :

$$f : x \mapsto \arctan(x+1) - \arctan x$$

$$g : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

Question 1

A $\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad -\dfrac{\pi}{2} < g(x) < 0$

B $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\pi < f(x) < 0$

C $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < f(x) < \pi$

D $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 < f(x) < \dfrac{\pi}{2}$

Question 2

A $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan[f(x)] = \tan[g(x)]$

B $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) - \pi$

C $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = g(x)$

D $\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad f(x) = g(x) + \pi$

• Question 3

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

- **A** $S_n = \arctan(n)$
- **B** $S_n = \arctan(n) - 1$
- **C** $S_n = \arctan(n+1)$
- **D** $S_n = \arctan(n-1)$

→ QCM 4 Fonctions arg

Soient les fonctions :

$$f : x \mapsto \arg\operatorname{th}(\sin x)$$
$$g : x \mapsto \arg\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

• Question 1

On pose, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$y = \arg\operatorname{th}(\sin x) \qquad et \qquad z = \arg\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

- **A** $y \in]-1, 1[$
- **B** $z \in [0, +\infty[$
- **C** $\operatorname{ch}^2 y = \frac{1}{\cos^2 x}$ donc $\operatorname{ch} y = \frac{1}{\cos x}$.
- **D** $\operatorname{ch} y = \operatorname{ch} z$ donc $y = z$.

Question 2

- **A** f n'est pas dérivable en 0.
- **B** $\forall\, x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- **C** $\forall\, x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[, g'(x) = f'(x)$
- **D** $\forall\, x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right], g(x) = -f(x)$

QCM 5 Fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [0, +\infty[, & f(x) = 2x - \ln(\operatorname{sh} x + 1) \\ \text{si } x \in]-\infty, 0], & f(x) = e^{1/x}\sqrt{1-x} \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (xOy).

Question 1

- **A** f n'est pas continue en 0.
- **B** f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et à droite en 0.
- **C** f n'est pas dérivable à gauche en 0.
- **D** f est dérivable à droite et à gauche en 0, donc f est dérivable en 0.

Question 2

- **A** Sur $]-\infty, 0], f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 2x - 2$

Sur $[0, +\infty[$:

- **B** $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{\operatorname{sh} x + 1}$
- **C** $f'(x) = \dfrac{e^x - 3e^{-x} + 4}{2(\operatorname{sh} x + 1)}$
- **D** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = 0$ donc (Ox) est asymptote à $\mathcal{C}$.

Question 3

A Il existe un réel b et une fonction ε tel que, pour $x > 0$:

$$\ln\left(\operatorname{sh} x + 1\right) = x + b + \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$$

Dans le cas où l'assertion A est jugée exacte :

B $b = 0$

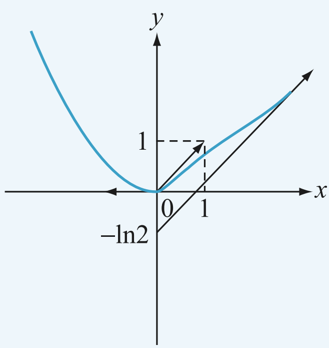
C $b = \ln 2$

D La droite d'équation $y = x – \ln 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

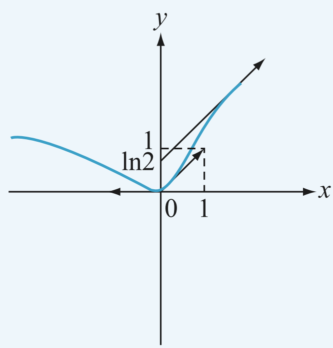
Question 4

La courbe $\mathcal{C}$ est représentée par :

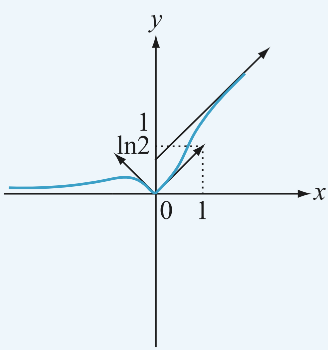
A



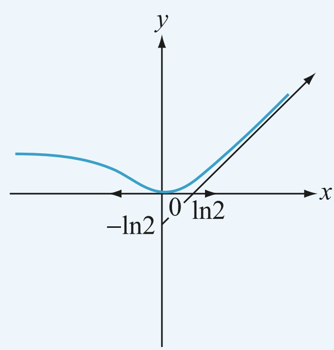
B



C



D



→ QCM 1 Fonction exponentielle

• Question 1 : réponse D

• Par opérations et par composition, f est continue sur $\mathbb{R}-\{-1\,,\ 1\}$.

• Continuité en –1:

$$\lim_{x\to\,-1_-}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=-\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to\,-1_-} f(x)=0=f(-1)$$

$$\lim_{x\to\,-1_+}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=+\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to\,-1_+} f(x)=-\infty$$

Donc f est continue à gauche en –1, mais pas à droite.

• Continuité en 1 :

$$\lim_{x\to 1_-}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=-\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 1_-} f(x)=0=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1_+}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=+\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 1_+} f(x)=+\infty$$

Donc f est continue à gauche en 1, mais pas à droite.

La réponse A est fausse.

Pour $x=\pm\,1$: $f(x)\,f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0\neq 1.$ **La réponse B est fausse**.

$f(2)=2\,e^{4/3}$ et $f(-2)=-2\,e^{-4/3}$

$f(-2)\neq -f(2)$: f n'est pas impaire. **La réponse C est fausse**.

• Dérivabilité à gauche en –1:

$$\tau=\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\frac{x}{x+1}\,e^{\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)}$$

$$\text{Quand } x\to -1_- \ :\ \frac{x}{x+1}\to +\infty \ \text{ et } \ e^{\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)}\to 0$$

Pour lever l'indétermination, posons : $X = \dfrac{2x}{x^2-1}$. Alors : $\tau = \left(\dfrac{x-1}{2}\right) X\, e^X$

$\dfrac{x-1}{2} \to -1$, $X \to -\infty$ et $X\, e^X \to 0$ (e^X l'emporte sur X) donc $\lim\limits_{x\to -1_-} \tau = 0$

Donc f est dérivable à gauche en -1, et $f'_g(-1) = 0$.

• Un raisonnement identique conduit à :

f est dérivable à gauche en 1, et $f'_g(1) = 0$.

La réponse D est bonne.

• Question 2 : réponses B et C

Sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$:

$$f'(x) = \left[1 + \frac{x\left(2x^2 - 2 - 4x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\right] e^{\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)} = \frac{p(x)}{\left(x^2-1\right)^2}\, e^{\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)}$$

avec : $\boldsymbol{p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1}$.

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

Cherchons si p est divisible par $x^2 - \left(1+\sqrt{5}\right)x + 1$, c'est-à-dire s'il existe un réel b tel que :

$$p(x) = \left[x^2 - \left(1+\sqrt{5}\right)x + 1\right]\left(x^2 + bx + 1\right).$$

Par identification des deux écritures, on obtient :

$$b = -1 + \sqrt{5}\cdot$$

Donc :

$$\boldsymbol{p(x) = \left[x^2 - \left(1+\sqrt{5}\right)x + 1\right]\left[x^2 + \left(-1+\sqrt{5}\right)x + 1\right]}$$

La réponse C est bonne.

$$p(x) = 0 \iff x^2 - \left(1+\sqrt{5}\right)x + 1 = 0 \quad (1) \quad \text{ou} \quad x^2 + \left(-1+\sqrt{5}\right)x + 1 = 0 \quad (2)$$

(1) a pour discriminant $\Delta = 2 + 2\sqrt{5} > 0$ et admet donc deux racines réelles distinctes x_1 et x_2.

(2) a pour discriminant $\Delta = 2 - 2\sqrt{5} < 0$ et n'admet donc pas de racines réelles.

La réponse D est fausse.

Question 3 : réponse D

D'après la question 1 : $\lim\limits_{x \to 1_+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1_+} f(x) = -\infty$

Les réponses A et B sont fausses.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

La réponse C est fausse.

$$\frac{f(x)}{x} = e^{\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1.$$

La réponse D est bonne.

Question 4 : réponses B et C

D'après l'assertion D de la question 3, $\mathcal{C}$ admet une direction asymptotique $y = x$ quand x tend vers $\pm\infty$.

$$f(x) - x = x\left[e^{\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)} - 1\right] = xh.\frac{e^h - 1}{h} = \frac{2x^2}{x^2-1}.\frac{e^h-1}{h} \quad \text{en posant :} \quad h = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right) = 2, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} h = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^h-1}{h}\right) = 1$$

donc : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - x\right] = 2$ et $\boldsymbol{y = x + 2}$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $\pm\infty$.

La réponse A est fausse.

Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$0 \,\|\|$	$+$	1	$+$	0	$-$	$0 \,\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \,\|\| -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	$0 \,\|\| +\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

$\mathcal{C}$ admet trois asymptotes :
- l'asymptote verticale d'équation $x = -1$ en -1_+
- l'asymptote verticale d'équation $x = 1$ en 1_+
- l'asymptote oblique d'équation $y = x + 2$ en $\pm\infty$

Les réponses B et C sont bonnes et la réponse D est fausse.

→ QCM 2 Fonctions trigonométriques réciproques

• Question 1 : réponses B et D

• La fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{1-x^2}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$ et la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$ est définie sur $\mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$.

• La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$.

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \iff -\left(1+x^2\right) \leq 2x \leq 1+x^2 \iff \begin{cases} 1+x^2+2x \geq 0 \\ 1+x^2-2x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1+x)^2 \geq 0 \\ (1-x)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Cette double condition est toujours vérifiée,

donc la fonction $x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$.

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

Soit g et h deux fonctions impaires :

- $g\ o\ h\ (-x) = g[h(-x)] = g[-h(x)] = -g[h(x)] = -g\ o\ h\ (x)$
donc $g\ o\ h$ est impaire.

- $(g+h)(-x) = g(-x) + h(-x) = -g(x) - h(x) = -(g+h)(x)$
donc $g + h$ est impaire.

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

• Question 2 : réponses A et D

$$\begin{cases} \forall\ x \in [-1,\ 1], \quad \arcsin x \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \arctan x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases} \quad \text{donc} \quad \forall\ x \in \mathbb{R} - \{-1,\ 1\}, \quad -\pi \leq f(x) \leq \pi$$

Par conséquent, f est bornée : **la réponse A est bonne**.

$$\lim_{x \to 1_-} \left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1_+} \left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = -\infty$$

$$\text{donc :} \quad \lim_{x \to 1_-} f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1_+} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \neq 0$$

Donc f n'est pas prolongeable par continuité en 1. **La réponse B est fausse**.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 0 = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

$$\arcsin 0 = 0 \quad \text{et} \quad \arctan 0 = 0 \quad \text{donc} \quad \boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

• Question 3 : réponses A et D

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_+ - \{1\}, \quad \varphi = \arctan x \quad \Leftrightarrow \quad x = \tan \varphi \quad \text{et} \quad \varphi \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[- \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}\right) - \arctan\left(\frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}\right)$$

On reconnaît les formules donnant sin a et tan a en fonction de $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$:

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

Donc : $$\boldsymbol{f(x) = \arcsin\left[\sin(2\varphi)\right] - \arctan\left[\tan(2\varphi)\right]}$$

La réponse A est bonne.

Si $u \in \left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$, $\arcsin(\sin u) \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ or $(\pi + u) \in \left[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right]$

La réponse B est fausse.

En réalité, si $u \in \left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$, $\arcsin(\sin u) = \pi - u$.

Si $u \in \left]\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$, $\arctan(\tan u) \in \left]-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$ or $-u \in \left[-\pi,\ -\frac{\pi}{2}\right[$

La réponse C est fausse.

En réalité, si $u \in \left]\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$, $\arctan(\tan u) = u + \pi$.

Si $x \in [0,\ 1[$, $\varphi = \arctan x \in \left[0,\ \frac{\pi}{4}\right[$ et $2\varphi \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[$

donc : $$f(x) = \underbrace{\arcsin\left[\sin(2\varphi)\right]}_{2\varphi} - \underbrace{\arctan\left[\tan(2\varphi)\right]}_{2\varphi} = 2\varphi - 2\varphi = \mathbf{0}$$

La réponse D est bonne.

• Question 4 : réponse A

Posons : $$f_1(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,\ 1[$ et, d'après la question 1 :

$$-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1 \iff \begin{cases} (1+x)^2 > 0 \\ (1-x)^2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Donc, par composition, f_1 est dérivable sur $]1, +\infty[$.
La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par opérations et composition, f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $]1, +\infty[$.
Par conséquent, f est dérivable sur $]1, +\infty]$.

La réponse A est bonne.

Sur $]1, +\infty[$: $1 - x^2 < 0$ donc $\sqrt{(1-x^2)^2} = x^2 - 1$.

- $$f_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \; \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}\,(1+x^2)} = -\frac{2}{(1+x^2)}$$

- $$f_2'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \; \frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2+4x^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)}$$

Donc : $$f'(x) = f_1'(x) - f_2'(x) = \boldsymbol{-\frac{4}{1+x^2}}$$

Les réponses B et C sont fausses.

On remarque que : $f'(x) = -4(\arctan)'(x)$

Donc, sur $]1, +\infty[$: $f(x) = -4 \arctan x + C$

Or, d'après l'assertion D de la question 2 : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -4\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = -2\pi + C = 0$ d'où $C = 2\pi$ et

$\boldsymbol{f(x) = 2\pi - 4 \arctan x}$

La réponse D est fausse.

→ QCM 3 Calcul d'une somme

Fonction arctan
La fonction arctan est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, strictement croissante, et : $\forall\, x \in \mathbb{R},\; y = \arctan x \iff x = \tan y$ et $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Question 1 : réponses C et D

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ x^2 + x + 1 > 0 \quad (\Delta = -3 < 0)$ donc g est définie sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ \mathbf{0 < g(x) < \frac{\pi}{2}}$$

La réponse A est fausse.

$\forall\ x \in \mathbb{R}\ :\quad -\frac{\pi}{2} < \arctan(x+1) < \frac{\pi}{2} \quad$ et $\quad -\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$

donc $\quad -\pi < f(x) < \pi$

De plus, la fonction arctan est strictement croissante :

$x + 1 > x$ donc $\arctan(x+1) > \arctan x$ c'est-à-dire $f(x) > 0$

Finalement : $\quad \forall\ x \in \mathbb{R},\ \ \mathbf{0 < f(x) < \pi}$

La réponse B est fausse et la réponse B est bonne.

$\forall\ x \in \mathbb{R}_+ :\ \ 0 < \arctan(x+1) < \frac{\pi}{2}$ et $0 \le \arctan x < \frac{\pi}{2}$ donc $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$

Or, d'après ce qui précède, $f(x) > 0$, donc :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \ 0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$$

La réponse D est bonne.

Question 2 : réponses A et C

Posons : $\alpha = \arctan(x+1)$ et $\beta = \arctan x$, soit $f(x) = \alpha - \beta$

Alors : $\quad x + 1 = \tan\alpha \quad$ et $\quad x = \tan\beta \quad$ avec $\quad \alpha, \beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\tan[f(x)] = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{x + 1 - x}{1 + x(x+1)}$$

On obtient :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ \tan[f(x)] = \frac{1}{x^2 + x + 1} = \tan[g(x)]$$

Pour tout x réel, $\tan[f(x)]$ et $\tan[g(x)]$ sont donc **de même signe**.
Or, d'après la question précédente :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad 0 < f(x) < \pi \quad et \quad 0 < g(x) < \frac{\pi}{2}$$

Donc, pour tout x réel, $\tan[f(x)]$ et $\tan[g(x)]$ sont **positifs** :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad 0 < f(x) < \frac{\pi}{2} \quad et \quad 0 < g(x) < \frac{\pi}{2}$$

La fonction arctan étant bijective, on a finalement :

$$\boldsymbol{\forall\ x \in \mathbb{R},\ \tan\left[f(x)\right] = \tan\left[g(x)\right] \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x)}$$

Les réponses A et C sont bonnes, les réponses B et D sont fausses.

• Question 3 : réponse C

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} g(k)$$

et, d'après la question précédente :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} g(k) = \sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n}\left[\arctan(k+1) - \arctan k\right]$$

En développant, les termes s'annulent deux à deux, sauf le premier et le dernier terme. Ainsi, en posant $k' = k+1$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+1) - \sum_{k=0}^{n} \arctan k$$

$$S_n = \sum_{k'=1}^{n+1} \arctan k' - \sum_{k=0}^{n} \arctan k$$

$$S_n = \arctan(n+1) - \underbrace{\arctan 0}_{0}$$

$$\boldsymbol{S_n = \arctan(n+1)}$$

La réponse C est bonne, les réponses A, B et D sont fausses.

Cette méthode est appelée « méthode des dominos ».

→ QCM 4 Fonctions arg

Fonction argth

La fonction argth est une bijection de]–1, 1[dans $\mathbb{R}$, et :

$$\forall\ x \in]-1,\ 1[,\ \ y = \operatorname{arg\,th} x \iff x = \operatorname{th} y \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{R}$$

Fonction argch

La fonction argch est une bijection de $[1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, et :

$$\forall\ x \in [1,\ +\infty[,\ \ y = \operatorname{arg\,ch} x \iff x = \operatorname{ch} y \quad \text{et} \quad y \in [0,\ +\infty[$$

• Question 1 : réponses B et C

Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x \in]-1,\ 1[$ donc $\boldsymbol{y \in \mathbb{R}}$.

La réponse A est fausse.

Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \in]0,\ 1]$ donc $\dfrac{1}{\cos x} \in [1,\ +\infty[$ et $\boldsymbol{z \in [0,\ +\infty[}$

La réponse B est bonne.

$$\operatorname{ch}^2 y = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Or : $\operatorname{ch} y > 0$ et $\dfrac{1}{\cos x} > 0$ donc $\boldsymbol{\operatorname{ch} y = \dfrac{1}{\cos x}}$

La réponse C est bonne.

On a donc : $\boldsymbol{\operatorname{ch} y = \operatorname{ch} z}$ or la fonction ch est paire, donc : $y = \pm z$

Plus précisément, puisque $z \in [0,\ +\infty[$:

- **Si** $\boldsymbol{y \in \mathbb{R}_-,\ \ y = -z}$
- **Si** $\boldsymbol{y \in \mathbb{R}+,\ \ y = z}$

La réponse D est fausse.

• Question 2 : réponse D

f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[$ par composition de fonctions dérivables.

La réponse A est fausse.

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[,\qquad f'(x) = \frac{1}{1-\sin^2 x}\ \cos x = \frac{1}{\cos^2 x}\ \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

La réponse B est fausse.

La fonction argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ mais **n'est pas dérivable en 1**. Donc, par composition de fonctions, g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[-\{0\}$, **ce qui ne signifie pas que g n'est pas dérivable en 0**.

Les théorèmes d'opérations et de compositions de fonctions dérivables ne permettent pas de conclure lorsqu'une des fonctions n'est pas dérivable. Par exemple :

$$\begin{cases} x \mapsto \sqrt{x} \text{ n'est pas dérivable en 0} \\ x \mapsto x^2 \text{ est dérivable en 0} \end{cases} \text{ mais } x \mapsto \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \text{ est dérivable en 0.}$$

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[-\{0\},\qquad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}}\ \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{|\sin x|\ \cos x}$$

Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\ 0\right[$, $\sin x < 0$ donc $|\sin x| = -\sin x$ et $\boldsymbol{g'(x) = -\dfrac{1}{\cos x} = -f'(x)}$.

La réponse C est fausse.

D'après ce qui précède :

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2},\ 0\right[,\qquad g(x) = -f(x) + C \qquad (1)$$

f et g sont définies et continues en 0, et : $\quad g(0) = f(0) = 0$

donc, en faisant tendre x vers 0 dans (1), on obtient : $\quad C = 0$.

On peut dès lors fermer l'intervalle en 0 :

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2},\ 0\right],\qquad \boldsymbol{g(x) = -f(x)}.$$

La réponse D est bonne.

→ QCM 5 Fonction définie par morceaux

Notons les restrictions suivantes :

- $g = f\,|_{[0,\,+\infty[}\ :\ x \ \mapsto\ 2x - \ln(\operatorname{sh} x + 1)$
- $h = f\,|_{]-\infty,\,0[}\ :\ x \ \mapsto\ e^{1/x}\sqrt{1-x}$

• Question 1 : réponse B

- Les fonctions g et h sont continues, et dérivables par opérations et compositions de fonctions dérivables ($x \mapsto \sqrt{1-x}$ est dérivable pour $x < 1$).

$$\forall\ x \in [0,\ +\infty[\,, \qquad g'(x) = 2 - \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x + 1} = \boldsymbol{\frac{2 \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x + 2}{\operatorname{sh} x + 1}}$$

$$\forall\ x \in]-\infty,\ 0[\,,\ h'(x) = e^{1/x}\left[-\frac{1}{x^2}\sqrt{1-x} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right] = -\boldsymbol{\frac{e^{1/x}}{2x^2\sqrt{1-x}}\left(x^2 - 2x + 2\right)}$$

Donc f est continue et dérivable sur]0, + ∞[,]–∞, 0[et à droite en 0.

- Par ailleurs : $\qquad f(0) = g(0) = 0$

Examinons la continuité à gauche en 0 :

Quand $x \to 0_-$: $\dfrac{1}{x} \to -\infty$ donc $e^{1/x} \to 0$ et $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = 0 = f(0)$

- Donc f est continue à gauche et à droite en 0, c'est-à-dire continue en 0.

La réponse A est fausse.

f est dérivable à droite en 0 : $\boldsymbol{f'_d(0) = g'(0) = 1}$

La réponse B est bonne.

- Examinons la dérivabilité à gauche en 0 :

Sur $]-\infty,\ 0[$:

$$\tau = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^{1/x}\sqrt{1-x}}{x} = \sqrt{1-x}\left(Z\ e^Z\right) \quad \text{en posant} \quad Z = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0_-} Z = -\infty \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{x \to 0_-}\left(Z\ e^Z\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0_-} \tau = 0$$

Donc f est dérivable à gauche en 0, et : $\qquad \boldsymbol{f'_g(0) = 0}$.

La réponse C est fausse.

- $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0. **La réponse D est fausse**.

• Question 2 : réponses A et C

- $\forall\ x \in]-\infty,\ 0[$,

$$f'(x) = h'(x) = -\frac{e^{1/x}\left(x^2 - 2x + 2\right)}{2x^2\sqrt{1-x}} \text{ est du signe de } \boldsymbol{-x^2 + 2x - 2.}$$

La réponse A est bonne.

- $\forall\ x \in \left]0,\ +\infty\right[$,

$$\boldsymbol{f'(x) = g'(x) = 2 - \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x + 1}} = \frac{2\ \text{sh } x - \text{ch } x + 2}{\text{sh } x + 1} = \frac{e^{x} - e^{-x} - \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) + 2}{\text{sh } x + 1}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{e^{x} - 3e^{-x} + 4}{2(\text{sh } x + 1)}}$$

La réponse B est fausse et la réponse C est bonne.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{e^{1/x}}{x}\sqrt{-x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)} = e^{1/x}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{-x}}\right)\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}$ donc :
$\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = 0$: $\mathcal{C}$ admet une **branche parabolique** dans la direction (Ox).

La réponse D est fausse.

Question 3 : réponse A

Pour $x > 0$: $\ln\ (\text{sh } x + 1) = \ln\left[\dfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x} + 2\right)\right] = \ln\left[e^{x}\left(1 - e^{-2x} + 2e^{-x}\right)\right] - \ln 2$

$$\ln\ (\text{sh } x + 1) = x - \ln 2 + \ln\left(1 - e^{-2x} + 2e^{-x}\right)$$

Soit : $\varepsilon(x) = \ln\left(1 - e^{-2x} + 2e^{-x}\right)$ on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$ et $\boldsymbol{b = -\ln 2}$

La réponse A est bonne, les réponses B et C sont fausses.

Pour $x > 0$: $f(x) = x + \ln 2 - \varepsilon(x)$ donc la droite d'équation $y = x + \ln 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

La réponse D est fausse.

Question 4 : réponse B

Pour $x > 0$: $\mathrm{e}^{x} - 3\mathrm{e}^{-x} + 4 > 0 \iff \begin{cases} X = \mathrm{e}^{x} > 1 \\ X^{2} + 4X - 3 > 0 \end{cases}$

$$\Delta' = 7, \quad X_1 = -2 - \sqrt{7} < 0, \quad X_2 = -2 + \sqrt{7} \in [0,\ 1[$$

Donc, $\forall\ x \in \left]0,\ +\infty\right[$: $\mathrm{e}^{x} - 3\mathrm{e}^{-x} + 4 > 0$ donc $f'(x) > 0$

Compte tenu des résultats des questions précédentes : **la réponse B est bonne, les réponses A, C et D sont fausses.**

chapitre 3

Équations différentielles

QCM 1 Équation linéaire du 1^{er} ordre

(d'après EPL 1994)

Soient les équations différentielles associées :

$$x(2-x)y' + (1-x)y = 1 \qquad (E)$$

$$x(2-x)y' + (1-x)y = 0 \qquad (H)$$

On note $I_1 =]-\infty,\ 0[$, $I_2 =]0,\ 2]$ et $I_3 =]2,\ +\infty[$. On pose $U = I_1 \cup I_2 \cup I_3$.

Question 1

C désignant une constante quelconque, les solutions de (H) sur U sont :

A $y = C\sqrt{|x(2-x)|}$

B $y = \dfrac{C}{\sqrt{|x(2-x)|}}$

C $y = \sqrt{x(2-x)}$ est une solution de (H) dérivable sur I_2.

D $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x(2-x)|}}$ est la seule solution de (H) continue sur U.

Question 2

Sur I_1, (H) :

A n'admet aucune solution.

B admet une infinité de solutions.

Sur $\mathbb{R}$, (H) :

C admet trois solutions distinctes, et trois seulement.

D n'admet que la banale solution nulle.

Question 3

Pour $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$, notons f_i une solution particulière de (H) sur I_i. On effectue dans (E) le changement d'inconnue (méthode de la variation de la constante) défini par $y(x) = f_i(x)z(x)$, avec $x \in \mathrm{I}_i$.

On note, pour tout réel $t \neq 0$: $\begin{cases} \operatorname{sgn}(t) = 1 & \text{si} \quad t > 0 \\ \operatorname{sgn}(t) = -1 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$

z vérifie sur U la relation :

A $z' = \sqrt{x(2-x)}$

B $z' = \dfrac{1}{\sqrt{|x(2-x)|}}$

C $z' = \dfrac{\operatorname{sgn}[x(2-x)]}{\sqrt{|x(2-x)|}}$

D $z' = \dfrac{\operatorname{sgn}[x(2-x)]}{\sqrt{x(2-x)}}$

Question 4

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note F_i une primitive sur I_i de :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x^2 - 2x|}}$$

A $F_2(x) = \arcsin|x-1|$

B $F_2(x) = \arccos(1-x)$

C $F_1(x) = \operatorname{argch}(1-x)$

D $F_3(x) = \operatorname{argch}(x-1)$

QCM 2 Raccordement

Soit l'équation différentielle : $\qquad e^x - 1y' + e^x y = \varphi(x) \qquad$ (E)

où φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On note (E_0) l'équation homogène associée à (E), et I un des intervalles $]-\infty,\ 0[$ ou $]0, +\infty[$.

Question 1

A (E_0) admet une infinité de solutions sur I.

B (E) peut ne pas avoir de solution sur I pour certaines fonctions φ.

S'il existe une solution de (E) sur I, alors elle est obligatoirement :

C unique.

D continue sur I.

Question 2

Une solution de (E_0) sur I est :

A $y_0 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{|e^x - 1|}}$

B $y_0 : x \mapsto \dfrac{1}{1 - e^x}$

C étant une constante réelle quelconque, les solutions de (E) sur I sont :

C $y : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,dt + \frac{C}{e^x - 1}$

D $y : x \mapsto \dfrac{1}{e^x - 1}\left[\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,dt + C\right]$

Question 3

A (E_0) n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

B (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ telle que $y(0) = 1$.

Si (E) admet une solution sur $\mathbb{R}$, alors elle est obligatoirement:

C continue sur $\mathbb{R}$.

D dérivable sur $\mathbb{R}$.

Question 4

Dans cette question, on prend $\varphi(x) = 2x$.

Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}^*$ est :

A $y_1 : x \mapsto \dfrac{x^2}{|e^x - 1|}$

B $y_1 : x \mapsto \dfrac{x^2}{e^x - 1}$

C (E) n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

D (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

QCM 3 Équation linéaire du 2^{nd} ordre

(d'après EPL 1992 et 2006)

Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. On considère l'équation :

$$y'' = -\omega^2 y \qquad (E)$$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

Question 1

A Il n'existe aucune solution réelle de (E) car l'équation caractéristique $r^2 + \omega^2 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

B a et b étant deux réels donnés, (E) admet une unique solution réelle telle que $y(0) = a$ et $y'(0) = b$.

Dans le cas où l'assertion B est jugée exacte, cette solution est définie par :

C $y(x) = b\cos(\omega x) - \dfrac{a}{\omega}\sin(\omega x)$

D $y(x) = a\sin(\omega x) + \dfrac{b}{\omega}\cos(\omega x)$

Question 2

On prend dans la suite $\omega = 2$.
On considère l'équation :

$$y'' + 4y = 8x\left[2\cos(2x) - \sin(2x)\right] \qquad (1)$$

A $y_0 \;:\; x \;\mapsto\; e^{2ix}$ est solution complexe de (E).

B $y_0 \;:\; x \;\mapsto\; \cos x - \sin x$ est solution de (E).

Une solution de (1) telle que $y_1(0) = 1$ et $y_1'(0) = 1$ est :

C $y_1 \;:\; x \;\mapsto\; (x^2 + x + 1)\cos x + \left(2x^2 - \dfrac{x}{2}\right)\sin x$

D $y_1 \;:\; x \;\mapsto\; (x^2 + x + 1)\cos(2x) + \left(x^2 - \dfrac{x}{2}\right)\sin(2x)$

Question 3

On considère l'équation :

$$y'' + 4y = f(x) \qquad (2)$$

où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.
Soient F, G et H les fonctions définies par :

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\sin(2x-2t)dt \qquad G(x) = \int_0^x f(t)\cos(2t)dt \qquad H(x) = \int_0^x f(t)\sin(2t)dt$$

A G et H sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

B $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ F(x) = \frac{1}{2}[H(x)\cos(2x) + G(x)\sin(2x)]$

C F est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie (2).

D $y\ :\ x\ \mapsto\ \cos(2x) + \sin(2x) + F(x)$ est solution de (2).

QCM 4 Changement de variable

(d'après EPL 2008)

On cherche à résoudre l'équation fonctionnelle :

$$\forall\ x \in]0,\ +\infty[,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (P)$$

où l'inconnue f est dérivable sur $[0, +\infty]$, à valeurs réelles.

Soit l'équation : $$x^2 y'' + y = 0 \qquad (E)$$

d'inconnue y deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Question 1

Dans (E) :

A pour $I = [0,\ +\infty[$, on peut faire le changement de variable $x = \sqrt{t}$ $(t \in [0,\ +\infty[)$.

B pour $I =]0,\ +\infty[$, on peut faire le changement de variable $x = e^t$ $(t \in \mathbb{R})$.

Si l'assertion B est jugée exacte, on pose $x = e^t$ et $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y\left(e^t\right)$.

C $\left(y\right.$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[\left.\right) \Leftrightarrow \left(z\right.$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}\left.\right)$.

D y est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si z est solution de $z'' + z' + z = 0$.

Question 2

A, B, a et φ étant des constantes réelles quelconques, (E) a pour solutions sur $]0, +\infty[$:

A $y : x \mapsto a\sqrt{x}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x + \varphi\right)$

B $y : x \mapsto \sqrt{x}\left[A\cos\left(\sqrt{3}\,x\right) + B\sin\left(\sqrt{3}\,x\right)\right]$

C $y : x \mapsto a\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x + \varphi\right)$

D $y : x \mapsto x^2\left[A\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$

Question 3

On note f une solution de (P), et A, B et a des constantes réelles quelconques.

A f est 2 fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et est solution de (E).

B $f(x) = \sqrt{x}\left[A\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$

C $f(x) = a\sqrt{x}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

D $f(x) = a\sqrt{x}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

→ QCM 1 Équation linéaire du 1er ordre

• Question 1 : Aucune réponse n'est bonne

NON Les constantes C_1, C_2 et C_3 ne sont pas forcément égales sur chacun des trois intervalles disjoints I_1, I_2 et I_3.

Les réponses A et B sont fausses.

> **Solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre**
>
> Les solutions sur un intervalle I de l'équation différentielle :
>
> $$y' = a(x)y$$
>
> où a est continue sur I, sont :
>
> $$y \;:\; x \;\mapsto\; Ce^{A(x)}$$
>
> où A est une primitive de a, et $C \in \mathbb{R}$.

• Sur I_1 ou I_2 ou I_3 : $\quad$ (H) $\Leftrightarrow$ $y' = \dfrac{x-1}{x(2-x)}\, y$

$$\varphi(x) = \frac{x-1}{x(2-x)} = \frac{x-1}{2x-x^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{en posant} \quad u(x) = 2x - x^2$$

Donc, une primitive de φ s'écrit par exemple :

$$\int \varphi(x)dx = -\frac{1}{2}\ln\left(|u(x)|\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(|x(2-x)|\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{|x(2-x)|}}\right)$$

et les solutions **sur un des intervalles** I_1 **ou** I_2 **ou** I_3 sont :

$$y = C\exp\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{|x(2-x)|}}\right)\right] = \frac{C}{\sqrt{|x(2-x)|}}, C \in \mathbb{R}$$

La réponse C est fausse.

• Les solutions sur U sont :

$$\text{Pour } i \in \{1,\ 2,\ 3\} : \quad \forall\, x \in I_i,\ \ y(x) = \frac{C_i}{\sqrt{|x(2-x)|}} \quad , \ C_i \text{ constante sur } \mathrm{I}_i.$$

Toutes les solutions d'une équation différentielle sont dérivables, donc continues.

La réponse D est fausse.

• Question 2 : réponses B et D

Sur I_1, (H) admet une infinité de solutions :

$$y(x) = \frac{C_1}{\sqrt{|x(2-x)|}} \qquad (C_1 \in \mathbb{R}).$$

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

Soit f une solution de (H) sur $\mathbb{R}$, si elle existe. Alors, la restriction de f sur I_i est :

$$x \mapsto \frac{C_i}{\sqrt{|x(2-x)|}}$$

Or : $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{|x(2-x)|}} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{|x(2-x)|}} = +\infty$$

Donc, pour que f soit continue en 0 et en 2, il faut que $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, c'est-à-dire que la seule solution de (H) sur $\mathbb{R}$ est $f = 0$.

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

• Question 3 : réponse C

• Sur I_i, notons : $\operatorname{sgn}\left[x(2-x)\right] = \varepsilon_i$ (constante).

Prenons pour solution particulière : $$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{|x(2-x)|}}$$

$$y(x) = f_i(x)\, z(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{|x(2-x)|}} = \frac{z(x)}{\sqrt{\varepsilon_i\, x(2-x)}}$$

$$y'(x) = \frac{z'(x)}{\sqrt{\varepsilon_i\, x(2-x)}} - z(x)\frac{1-x}{x(2-x)\sqrt{\varepsilon_i\, x(2-x)}}$$

En reportant dans (E), on obtient :

$$\frac{x(2-x)\ z'(x)}{\sqrt{\varepsilon_i\, x(2-x)}} - \frac{(1-x)\ z(x)}{\sqrt{\varepsilon_i\, x(2-x)}} + \frac{(1-x)\ z(x)}{\sqrt{\varepsilon_i\, x(2-x)}} = 1$$

soit finalement : $$z'(x) = \frac{\sqrt{x(2-x)\,\varepsilon_i}}{x(2-x)} = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\varepsilon_i\, x(2-x)}} = \frac{\operatorname{sgn}\left[x(2-x)\right]}{\sqrt{\left|x(2-x)\right|}}$$

La réponse C est bonne, les réponses A, B et D sont fausses.

• Question 4 : réponses B et D

Sur U, notons : $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\left|x(2-x)\right|}}$

Sur I_2 : $x(2-x) > 0$ donc $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$

Soit $\Phi(x) = \arcsin\left|x-1\right|$ sur I_2 : $\begin{cases} \text{si } x \in \left]0,\ 1\right], & \Phi(x) = \arcsin(1-x) \\ \text{si } x \in \left[1,\ 2\right[, & \Phi(x) = \arcsin(x-1) \end{cases}$

Φ est dérivable sur]0, 1] et sur [1, 2[, donc à droite et à gauche en 1 :

$$\begin{cases} \left(\Phi\big|_{]0,\,1]}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = -\varphi(x) \\ \left(\Phi\big|_{[1,\,2[}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = \varphi(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Phi'_g(1) = -1 \\ \Phi'_d(1) = 1 \end{cases}$$

• $\Phi'_g(1) \neq \Phi'_d(1)$ donc Φ n'est pas dérivable en 1.

La réponse A est fausse.

• Soit $\Psi(x) = \arccos(1-x)$ sur I_2 :

$$\Psi'(x) = -\frac{(-1)}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \varphi(x)$$

La réponse B est bonne.

• Sur I_1 et I_3 : $x(x-2) > 0$ donc $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(x-2)}}$

Soit $G(x) = \operatorname{argch}(1-x)$ sur I_1. $1-x > 1$, donc G existe sur I_1 et :

$$G'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2-1}} = -\varphi(x)$$

La réponse C est fausse.

• Soit $H(x) = \operatorname{argch}(x-1)$ sur I_3. $x-1 > 1$, donc H existe sur I_3 et :

$$H'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2-1}} = \varphi(x)$$

La réponse D est bonne.

Les solutions de (E), non demandées, sont, avec C_1, C_2, C_3 constantes réelles :

- sur I_1 : $z'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x(x-2)}}$ donc $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(x-2)}}\left[\operatorname{argch}(1-x) + C_1\right]$

- sur I_2 : $z'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$ donc $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\left[\arccos(1-x) + C_2\right]$

- sur I_3 : $z'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x(x-2)}}$ donc $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(x-2)}}\left[-\operatorname{argch}(x-1) + C_3\right]$

→ QCM 2 Raccordement

• Question 1 : réponses A et D

• Sur I : $e^x - 1 \neq 0$ donc (E) est une équation différentielle linéaire du 1^er ordre, et admet d'après le cours une infinité de solutions sur I. Il en va de même pour (E_0).

La réponse A est bonne, les réponses B et C sont fausses.

• Une solution de (E) sur I est forcément dérivable sur I, donc continue sur I.

La réponse D est bonne.

• Question 2 : réponses B et D

La méthode qui consiste à reconnaître dans le premier membre de (E), lorsque cela est possible, la dérivée d'un produit, est la plus rapide.

• $(E_0) \iff \forall\, x \in I,\ \left[\left(e^x - 1\right)y\right]' = 0$

$(E_0) \iff \forall\, x \in I,\ \left(e^x - 1\right)y(x) = C,\ C$ constante réelle

$(E_0) \iff \forall\, x \in I,\ y(x) = \dfrac{C}{e^x - 1},\ C \in \mathbb{R}$

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

• $(E) \iff \forall\, x \in I,\ \left[\left(e^x - 1\right)y\right]' = \varphi(x)$

$(E) \iff \forall\, x \in I,\ \left(e^x - 1\right)y(x) = \Phi(x) + C$

où Φ est une primitive de φ sur I, et C une constante réelle.

Or φ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$ convient sur chaque intervalle I.

Les solutions de (E) sur I sont finalement : $y \ : \ x \ \mapsto \ \dfrac{1}{e^x - 1}\left[\int_0^x \varphi(t)\,dt \ + \ C\right]$

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

Question 3 : réponses C et D

• Cherchons une solution f de (E_0) sur $\mathbb{R}$, si elle existe. f doit être continue.

$$f\Big|_{]-\infty,\,0[} \ : \ x \ \mapsto \ \frac{C_1}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad f\Big|_{]0,\,+\infty[} \ : \ x \ \mapsto \ \frac{C_2}{e^x - 1}$$

Or : $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{e^x - 1} = +\infty$

Pour que f soit continue en 0, il faut que $C_1 = C_2 = 0$, donc l'unique solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est $f = 0$.

La réponse A est fausse.

NON

Pour $x = 0$, l'équation (E) devient : $\qquad y(0) = \varphi(0)$

Donc, si $\varphi(0) \neq 1$, (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$ telle que $y(0) = 1$.

La réponse B est fausse.

• Toute solution d'une équation différentielle sur $\mathbb{R}$ est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$.

Les réponses C et D sont bonnes.

Une équation $y' + a(x)\,y = b(x)$ (1) avec a et b continues sur un intervalle I admet une unique solution telle que $y(x_0) = y_0$.

Ce résultat ne peut pas s'appliquer dans le cas présent car l'équation (E) ne peut pas se mettre sous la forme (1) sur $\mathbb{R}$ puisque $e^x - 1 = 0 \iff x = 0$.

Question 4 : réponses B et D

$$(\mathrm{E}) \iff \forall\, x \in \mathrm{I},\ \left[\left(e^x - 1\right)y\right]' = 2x$$

On applique les résultats de la question 2 :

$\int_0^x 2t\,dt = x^2 \qquad$ donc les solutions de (E) sur I sont :

$$y \ : \ x \ \mapsto \ \frac{1}{e^x - 1}\left[x^2 \ + \ C\right]$$

En choisissant $C_1 = 0$ pour $\mathrm{I} =]-\infty,\ 0[$ et $C_2 = 0$ pour $\mathrm{I} =]0,\ +\infty[$:

$$y_1 \ :\ x \ \mapsto \ \frac{x^2}{e^x - 1} \qquad \text{est une solution particulière de (E) sur } \mathbb{R}^*.$$

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

• Cherchons si (E) admet une solution f sur $\mathbb{R}$. Si f existe :

$$f\Big|_{]-\infty,\ 0[} \ :\ x \ \mapsto \ \frac{x^2 + C_1}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad f\Big|_{]0,\ +\infty[} \ :\ x \ \mapsto \ \frac{x^2 + C_2}{e^x - 1}$$

C_1, C_2 constantes réelles.
f doit être continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en 0.
– Examinons la continuité en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \left(e^x - 1\right) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0_-} \left(x^2 + C_1\right) = C_1 \quad , \quad \lim_{x \to 0_+} \left(x^2 + C_2\right) = C_2$$

Pour que les limites de f en 0 soient finies, il faut nécessairement que $C_1 = C_2 = 0$.

Donc :
$$f\Big|_{\mathbb{R}^*} \ :\ x \ \mapsto \ \frac{x^2}{e^x - 1}$$

$$f(x) = x\ \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{or} \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1 \qquad \text{(limite remarquable)}$$

Donc :
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

On pose alors $f(0) = 0$, et f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, $f(0) = 0$ est cohérent avec (E) pour $x = 0$.

– Examinons la dérivabilité en 0 :

$$\tau = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \tau = 1$$

Donc f est dérivable en 0 (donc sur $\mathbb{R}$) et $f'(0) = 1$.

En conclusion, (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{cases} \text{si } x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} \\ f(0)=0 \end{cases}$$

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

→ QCM 3 Équation linéaire du 2nd ordre

• Question 1 : réponse B

- (E) admet toujours une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$.

Résolvons l'équation caractéristique :

$$r^2 + \omega^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = i\omega \;\text{ ou }\; r = -i\omega$$

Les solutions réelles de (E) sont : $y \;:\; x \;\mapsto\; A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$

La réponse A est fausse.

- $y(0) = a$ et $y'(0) = b$ sont les **deux conditions initiales** de (E), équation différentielle linéaire du **2nd ordre** à coefficients constants.

La réponse B est bonne.

- $\begin{cases} y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) \\ y'(x) = -A\omega\sin(\omega x) + B\omega\cos(\omega x) \end{cases}$

Les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{cases} y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = a \\ B\omega = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = a \\ B = \dfrac{b}{\omega} \end{cases}$$

Finalement : $$y(x) = a\,\cos(\omega x) + \frac{b}{\omega}\,\sin(\omega x)$$

Les réponses C et D sont fausses.

• Question 2 : réponse A

On considère l'équation :

$$y'' + 4y = 8x\left[2\,\cos(2x) - \sin(2x)\right] \qquad (1)$$

Pour $\omega = 2$, l'équation (1) a pour équation homogène associée l'équation :

$$y'' + 4y = 0 \qquad (E)$$

Les solutions complexes de (E) sont :

$$y \ : \ x \ \mapsto \ \lambda\, e^{2ix} + \mu\, e^{-2ix}, \qquad \lambda \text{ et } \mu \text{ constantes complexes.}$$

La réponse A est bonne.

• D'après la question 1, les solutions réelles de (E) sont :

$$y \ : \ x \ \mapsto \ A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

La réponse B est fausse.

2nd membre produit d'un polynôme et d'une exponentielle

Soit l'équation différentielle :

$ay'' + by' + cy = e^{mx}P(x)$ (F) d'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$

avec a, b, c, m constantes complexes, a non nul et P un polynôme.

Une solution particulière de (F) s'écrit :

$$y_p(x) = e^{mx}Q(x) \quad \text{avec } Q \text{ un polynôme.}$$

• si m n'est pas racine de l'équation caractéristique : $\deg Q = \deg P$

• si m est racine simple de l'équation caractéristique : $\deg Q = (\deg P) + 1$

• si m est racine double de l'équation caractéristique : $\deg Q = (\deg P) + 2$

• Notons y_p une solution particulière de l'équation :

$$y'' + 4y = 8x\left[2\cos(2x) - \sin(2x)\right] \qquad (1)$$

et notons y_2 une solution particulière dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$y'' + 4y = 8xe^{2ix} \qquad (2)$$

On a : $\cos(2x) = \Re\text{e}\left(e^{2ix}\right)$ et $\sin(2x) = \Im m\left(e^{2ix}\right)$

donc, d'après le principe de superposition :

$$y_p = 2\Re\text{e}(y_2) - \Im m(y_2)$$

$m = 2i$ est racine simple de l'équation caractéristique $\omega^2 + 4 = 0$

donc : $y_2(x) = e^{2ix}\ Q(x)$ avec $\deg Q = (\deg P) + 1 = 1 + \deg(8x) = 2$

y_2 s'écrit alors : $y_2(x) = e^{2ix}\ \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)$

Or γe^{2ix} est solution de l'équation homogène (E), donc on peut prendre $\gamma = 0$.

On a :

$$y_2(x) = e^{2ix}\ \left(\alpha x^2 + \beta x\right)$$
$$y'_2(x) = e^{2ix}\ \left[2i\left(\alpha x^2 + \beta x\right) + 2\alpha x + \beta\right]$$
$$y''_2(x) = e^{2ix}\ \left[-4\left(\alpha x^2 + \beta x\right) + 4i(2\alpha x + \beta) + 2\alpha\right]$$

En remplaçant dans (2), on obtient : $(8i\,\alpha x + 4i\,\beta + 2\alpha)e^{2ix} = 8xe^{2ix}$

Donc : $\begin{cases} 8i\,\alpha = 8 \\ 4i\,\beta + 2\alpha = 0 \end{cases}$ soit encore $\begin{cases} \alpha = -i \\ \beta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Finalement : $y_2(x) = \left(-i\,x^2 + \dfrac{x}{2}\right)e^{2ix} = \left(-i\,x^2 + \dfrac{x}{2}\right)\left[\cos(2x) + i\sin(2x)\right]$

On obtient alors : $y_p(x) = 2\Re e\left(y_2(x)\right) - \Im m\left(y_2(x)\right)$

$$y_p(x) = 2\left[\frac{x}{2}\cos(2x) + x^2\sin(2x)\right] - \left[-x^2\cos(2x) + \frac{x}{2}\sin(2x)\right]$$

$$y_p(x) = \left(x^2 + x\right)\cos(2x) + \left(2x^2 - \frac{x}{2}\right)\sin(2x)$$

Donc les solutions de l'équation (1) sont :

$$y_1(x) = \left(x^2 + x + A\right)\cos(2x) + \left(2x^2 - \frac{x}{2} + B\right)\sin(2x), \quad (\mathrm{A, B}) \in \mathbb{R}^2$$

et : $y'_1(x) = \left(4x^2 + x + 2B + 1\right)\cos(2x) + \left(-2x^2 + 2x - 2A - \dfrac{1}{2}\right)\sin(2x)$

Les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y'_1(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 2B + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

La solution de (1) telle que $y_1(0) = 1$ et $y'_1(0) = 1$ est donc :

$$y_1(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\cos(2x) \quad + \quad \left(2x^2 - \frac{x}{2}\right)\sin(2x)$$

Les réponses C et D sont fausses.

• Question 3 : réponses C et D

G est la primitive de $g : x \mapsto f(x)\cos(2x)$ telle que $G(0) = 0$

H est la primitive de $h : x \mapsto f(x)\sin(2x)$ telle que $H(0) = 0$

G et H existent car g et h sont continues sur $\mathbb{R}$.
G et H sont dérivables, et :

$$, \qquad H'(x) = f(x)\sin(2x)$$

NON En l'absence d'hypothèse sur la dérivabilité de f, il est impossible de savoir si G et H sont deux fois dérivables. Par exemple, en prenant $f(x) = |x|$, il est possible de montrer que G' n'est pas dérivable en 0.

La réponse A est fausse.

- $$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\sin(2x - 2t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\left[\sin(2x)\cos(2t) - \cos(2x)\sin(2t)\right]dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin(2x)\int_0^x f(t)\cos(2t)\,dt - \cos(2x)\int_0^x f(t)\sin(2t)\,dt\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin(2x)G(x) - \cos(2x)H(x)\right]$$

La réponse B est fausse.

- G, H, sin, cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations :

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left[2\cos(2x)G(x) + \sin(2x)G'(x) + 2\sin(2x)H(x) - \cos(2x)H'(x)\right]$$
$$= \cos(2x)G(x) + \sin(2x)H(x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\cos(2x)\left[f(x) - f(x)\right]$$
$$= \cos(2x)G(x) + \sin(2x)H(x)$$

G, H, sin, cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc F' est dérivable sur $\mathbb{R}$, autrement dit F est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$F''(x) = -2\sin(2x)G(x) + \cos^2(2x)f(x) + 2\cos(2x)H(x) + \sin^2(2x)f(x)$$

$$F''(x) = -4F(x) + f(x) \quad \text{car} \quad \cos^2(2x) + \sin^2(2x) = 1.$$

$$F''(x) + 4F(x) = f(x) \qquad \text{donc } F \text{ est solution de l'équation (2).}$$

La réponse C est bonne.

Compte tenu de la question 2, les solutions de l'équation (2) sont alors :

$$y \ : \ x \ \mapsto \ A\cos(2x) + B\sin(2x) + F(x)$$

La réponse D est bonne.

→ QCM 4 Changement de variable

• Question 1 : réponses B et C

NON Pour $I = [0, +\infty[$, $x = \sqrt{t}$ ne convient pas car $t \mapsto \sqrt{t}$ n'est pas 2 fois dérivable en 0. **La réponse A est fausse.**

• Pour $I =]0, +\infty[$, $x = e^t$ convient car $\varphi : t \mapsto e^t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans I, 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa réciproque $\varphi^{-1} : x \mapsto t = \ln x$ est aussi 2 fois dérivable sur I.

La réponse B est bonne.

• $\left(\forall\, t \in \mathbb{R},\ z(t) = y\left(e^t\right)\right) \ \Leftrightarrow\ \left(\forall\, x \in]0, +\infty[,\ y(x) = z(\ln x)\right)$

Donc $z = y\circ\exp$ et $y = z\circ\ln$, et par composition, exp et ln étant 2 fois dérivables :

$$\left(y \text{ est 2 fois dérivable sur }]0,+\infty[\right) \ \Leftrightarrow\ \left(z \text{ est 2 fois dérivable sur } \mathbb{R}\right)$$

La réponse C est bonne.

• Effectuons dans (E) le changement de variable $y(x) = z(\ln x)$ avec $x = e^t$.

$$\forall\ x \in\,]0,\ +\infty[,\quad y'(x) = z'(\ln x)\frac{1}{x} = z'(t)\ e^{-t} \quad \text{car} \quad \frac{1}{x} = e^{-t}$$

$$y''(x) = z''(\ln x)\frac{1}{x^2} + z'(\ln x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = [z''(t) - z'(t)]\ e^{-2t}$$

En remplaçant dans (E), on obtient :

$\forall t \in \mathbb{R},\ \ e^{2t}\left(e^{-2t}\right)[z''(t) - z'(t)] + z(t) = 0$, donc z est solution de
$z'' - z' + z = 0$ (1)

La réponse D est fausse.

• Question 2 : réponse A

L'équation caractéristique de (1) s'écrit : $r^2 - r + 1 = 0$ (C) .

$\Delta = -3$, donc (C) a 2 racines conjuguées : $r_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \overline{r_1}$.

Les solutions de (1) sur $\mathbb{R}$ sont donc :

$$z\ :\ t\ \mapsto\ e^{t/2}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t\right)\right],\ \ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

ou encore :

$$z\ :\ t\ \mapsto\ a\ e^{t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t + \varphi\right),\ \ (a, \varphi) \in \mathbb{R}^2$$

et les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont alors :

$$y\ :\ x\ \mapsto\ \sqrt{x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right],\ \ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

ou encore :

$$y\ :\ x\ \mapsto\ a\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + \varphi\right),\ \ (a, \varphi) \in \mathbb{R}^2$$

La réponse A est bonne, les réponses B, C et D sont fausses.

• Question 3 : réponses A et C

• On a $f' = f \circ \psi$ avec $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ dérivable sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc par composition f' est dérivable sur $]0, +\infty[$, et par conséquent f est 2 fois dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus :

$f''(x) = f'\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{f(x)}{x^2}$ donc $x^2 f''(x) + f(x) = 0$ et f est solution de (E).

La réponse A est bonne.

• Réciproquement, si f est solution de (E) :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[\left(A + B\sqrt{3}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \left(B - A\sqrt{3}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$$

$$\text{et} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) - B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right] \quad \text{car} \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

f est solution de (P) si et seulement si : $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(A + B\sqrt{3}\right) = A \\ \dfrac{1}{2}\left(B - A\sqrt{3}\right) = -B \end{cases} \iff A = B\sqrt{3}$

La réponse B est fausse.

$$f(x) = 2B\sqrt{x}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right] = 2B\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Les solutions de (P) sont donc :

$$f : x \mapsto a\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \frac{\pi}{6}\right), \quad a \in \mathbb{R}$$

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

chapitre 4

Géométrie du plan et de l'espace – Courbes – Coniques

QCM 1: Courbes paramétrées

(d'après EPL 1991)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $(x'x)$ et $(y'y)$.

$\mathscr{A}$ est la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

$\mathscr{B}$ est la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = \dfrac{u+2}{u^2-1} \\ y = \dfrac{2u}{u^2-1} \end{cases}$

Question 1

Un segment $[AB]$ varie de façon à ce que $A \in (x'x)$, $B \in (y'y)$ et $AB = a$ ($a > 0$ fixé). C est le point tel que $OACB$ soit un rectangle. On note t une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OC})$ (mod 2π), et M le projeté orthogonal de C sur $[AB]$.

A Le point C a pour coordonnées $(a\cos t,\ a\sin t)$, donc $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-a\cos t,\ -a\sin t)$.

B Une équation de *(AB)* est : $(\cos t)x + (\sin t)y - a\cos t\ \sin t = 0$.

C $\mathscr{A}$ est le lieu de M.

D Pour $t \neq k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$, (AB) est tangente à $\mathscr{A}$ en M.

Question 2

On note *M(t)* le point de $\mathscr{A}$ de paramètre t.

A $\mathscr{A}$ est de période 2π, donc il suffit d'étudier $\mathscr{A}$ pour $t \in [0, 2\pi]$, puis d'utiliser des translations pour compléter $\mathscr{A}$.

B Il suffit d'étudier $\mathscr{A}$ pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, puis d'utiliser 2 symétries pour compléter $\mathscr{A}$.

La tangente en $M(0)$ est :

C $(x'x)$

D $(y'y)$

Question 3

On note $M(u)$ le point de $\mathcal{B}$ de paramètre u.

A $M\left(\frac{1}{u}\right)$ est le symétrique de $M(u)$ par rapport à $\Omega\,(-1,0)$, donc il suffit d'étudier $\mathcal{B}$ pour $u \in]-1,\ 1[$, puis d'utiliser une symétrie pour compléter $\mathcal{B}$.

B Il existe 2 valeurs α et β de u telles que $x'(u) = 0$, avec $\alpha < -1 < 0 < \beta$.

$\mathcal{B}$ admet pour asymptotes les droites d'équation :

C $y = \frac{2}{3}\,(x-1)$

D $y = 2x$

Question 4

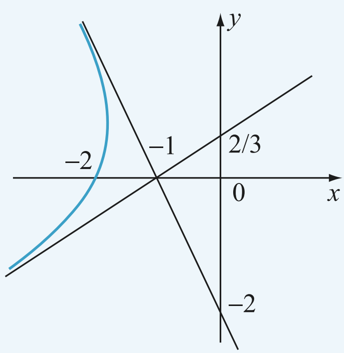
Soit Γ la courbe d'équation : $-4x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x + 4y = 0$.

A Si Γ est une conique, c'est une ellipse.

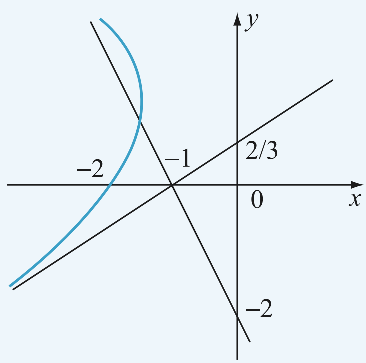
B $\mathcal{B} = \Gamma - \{O\}$

Pour $u \in]-1,\ 1[$, la représentation graphique de $\mathcal{B}$ est :

C



D



QCM 2 Autour de la cardioïde

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
On appelle cardioïde la courbe $\mathscr{C}$ d'équation polaire :

$$r = a(1+\cos\theta)$$

Soit $\vec{u}(\theta) = (\cos\theta)\,\vec{i} + (\sin\theta)\,\vec{j}$ et $M(\theta)$ le point de $\mathscr{C}$ de paramètre θ :

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = r(\theta)\,\vec{u}(\theta)$$

Question 1

A On peut se contenter d'étudier $\mathscr{C}$ pour $\theta \in [0,\ \pi]$, puis utiliser une symétrie pour compléter $\mathscr{C}$.

B Si, pour $\theta \neq 0\ [\pi]$, on note V l'angle $\left(\vec{u}(\theta),\ \dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right)\ [\pi]$, alors :

$$\tan V = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

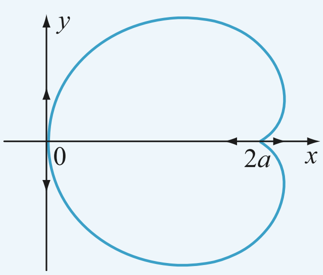
C Il y a exactement 2 points de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à (Oy).

D $M(0)$ est un point singulier.

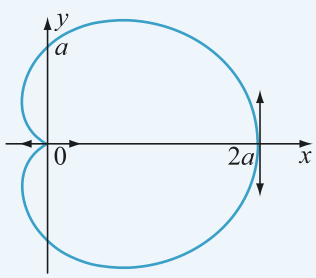
Question 2

La représentation graphique de $\mathscr{C}$ est :

A



B



Soit D_θ la droite passant par O dirigée par $\vec{u}(\theta)$, et C_1 le cercle d'équation polaire :

$$r = a\cos\theta$$

C D_θ coupe $\mathscr{C}$ en 2 points M et M' tels que $MM' = a$, et le cercle C_1 en un point $I \neq O$.

D I est le milieu de $[MM']$.

Question 3

Soit $\mathscr{P}$ une parabole de foyer O et directrice D, et soit K le projeté orthogonal de O sur D.

A Le paramètre p de $\mathscr{P}$ est tel que $OK = 2p$.

B Le sommet de $\mathscr{P}$ est le milieu de $[OK]$.

C Une équation polaire de $\mathscr{P}$ est : $r = p\left[1 + \cos(\theta - \alpha)\right]$.

D $M \in \mathscr{P} \quad \Leftrightarrow \quad OM = KM$

Question 4

Soit A le point de coordonnées $(a, 0)$, et C le cercle de centre A passant par O. On cherche l'ensemble Γ des sommets S des paraboles $\mathscr{P}$ de foyer O passant par A.

A Soit $\mathscr{P}$ est une parabole de foyer O et directrice D :

$$A \in \mathscr{P} \quad \Leftrightarrow \text{D est tangente au cercle C}$$

Pour $M \in$ C, on note $\theta = \left(\vec{i}, \overrightarrow{AM}\right)$ $[2\pi]$, D la tangente en M à C, et K le projeté orthogonal de O sur D.
On a :

B $\overrightarrow{OK} = a\,(1 + \cos\theta)\ \vec{u}(\theta)$

C $\overrightarrow{OK} = a\,(1 - \cos\theta)\ \vec{u}(\theta)$

D Γ est la cardioïde $\mathscr{C}$.

QCM 3 Inverse d'une courbe

(d'après EPL 2009)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On note $P^* = P - \{O\}$.
Soient les points F et F' tels que O soit le milieu de $[F F']$ et $FF' = 2a$ $(a > 0)$, F étant d'abscisse positive.
Soit L_a l'ensemble des points M du plan tels que $MF \times MF' = a^2$.

Question 1

Une équation cartésienne de L_a est :

A $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right)$

B $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(y^2 - x^2\right)$

Une équation polaire de L_a est :

C $\rho^2 = 2a^2\cos(2\theta)$

D $\rho^2 = 2a^2\sin(2\theta)$

Question 2

Soit Γ_a la courbe d'équation polaire :

$$\rho = a\sqrt{2\cos(2\theta)}$$

Soit $\vec{u}_\theta = (\cos\theta)\,\vec{i} + (\sin\theta)\,\vec{j}$, et $M(\theta)$ le point de Γ_a de paramètre θ :

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta)\,\vec{u}_\theta$$

A On peut se contenter d'étudier Γ_a pour $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, puis utiliser trois symétries pour compléter Γ_a.

B Γ_a est symétrique par rapport à O, donc $L_a = \Gamma_a$.

C En $M(0)$, la tangente à Γ_a est (Ox).

D Γ_a admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente, et se situe au-dessus de cette tangente.

Question 3

On définit $\mathcal{G}$ par $\mathcal{G}(M) = M'$ tel que :

$$\begin{cases} \text{les points } O, M\ , M' \text{ sont sur la même demi-droite issue de } O \\ OM\ \times\ OM' = 1 \end{cases}$$

A $\mathcal{G}$ est une application de P dans lui-même.

B $\mathcal{G}$ est une bijection de P^* dans P^*, et $\mathcal{G}^{-1} = \mathcal{G}$.

C $\mathcal{G}$ est l'application de P^* dans P^* qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{z}$.

D $\mathcal{G}$ admet un unique point invariant.

Question 4

On considère la courbe C_a d'équation :

$$x^2 - y^2 = 2a^2$$

A C_a est une hyperbole équilatère de foyers F et F'.

B C_a est une hyperbole équilatère dont les directrices passent par F et F'.

C Une équation polaire de C_a est :

$$\rho^2 \cos(2\theta) = a^2$$

D $\mathcal{G}\left(C_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = L_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

QCM 4 Géométrie de l'espace et coniques

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On note P le plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit $a > 0$. On considère les droites :

$$\mathrm{D} \;:\; y = z + a = 0$$
$$\mathrm{D}' \;:\; x = z - a = 0$$

Soit M un point de D d'abscisse λ, M' un point de D′ d'ordonnée μ (λ et μ étant de même signe), et H le point d'intersection de (MM') avec le plan P.

Question 1

A $\mathrm{D} \cap \mathrm{D}' = \varnothing$, donc D est parallèle à D′.

Les équations paramétriques de la droite (MM') sont :

B $\begin{cases} x = \lambda - \lambda t \\ y = \mu\, t \\ z = a(1 + 2t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

C $\begin{cases} x = \lambda + \lambda t \\ y = \mu\, t \\ z = a(2t - 1) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

D H a pour coordonnées $\left(\dfrac{\mu}{2}, \dfrac{\lambda}{2}, 0\right)$.

Question 2

Soit S_a la sphère de centre O et de rayon a, et Γ l'ensemble des points H tels que (MM') soit tangente à S_a.

La distance d'un point A à une droite passant par B et dirigée par $\vec{u}$ est :

A $\dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}\right|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

B $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

C (MM') est tangente à S_a si et seulement si $\lambda\mu = 2a^2$.

D Γ est une hyperbole du plan P d'équation $xy = a^2$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Question 3

On prend dans cette question $\lambda = \mu = a$.
Soit Σ la sphère de diamètre $[MM']$, et Q le plan contenant O, M et M'.
Soit $\mathscr{C}$ l'intersection de Σ et Q, et $\mathscr{E}$ la projection orthogonale de $\mathscr{C}$ sur le plan P.

A L'intersection d'une sphère et d'un plan est toujours un cercle.

B La projection orthogonale d'un cercle sur un plan est toujours une ellipse.

C $\mathscr{C}$ a pour équations dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - ax - ay - a^2 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

D $\mathscr{E}$ a pour équation dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$: $x^2 + y^2 - ax - ay - a^2 = 0$.

Question 4

Soit $\mathscr{C}_a$ la courbe du plan P d'équation dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$:

$$x^2 + y^2 - xy - \frac{a}{2}x - \frac{a}{2}y - \frac{a^2}{2} = 0$$

A Si $\mathscr{C}_a$ est une conique, sa nature dépend de a.

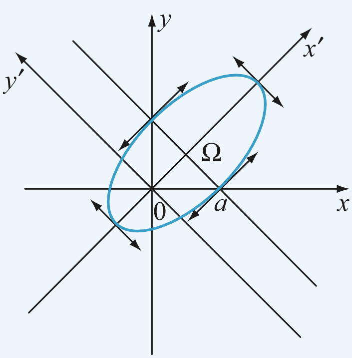
B Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$, $\vec{i'} = r\left(\vec{i}\right)$, $\vec{j'} = r\left(\vec{j}\right)$.

L'équation de $\mathscr{C}_a$ dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i'}, \vec{j'}\right)$ est :

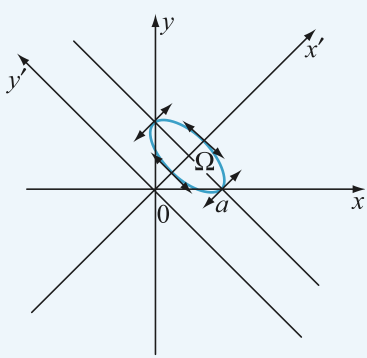
$$x'^2 + 3y'^2 - a\sqrt{2}\,x' - a^2 = 0$$

$\mathscr{C}_a$ a pour représentation graphique dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$:

C



D



corrigés

→ QCM 1 Courbes paramétrées

• Question 1 : réponses C et D

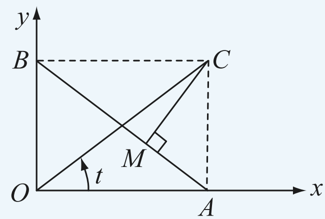
• $t = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OC}\right)\ [2\pi]$ donc $\overrightarrow{OC} = a\,\vec{u}_t$ où $\vec{u}_t$ est le vecteur unitaire d'angle polaire t :

$$\vec{u}_t \left|\begin{array}{l}\cos t\\ \sin t\end{array}\right. \quad \text{donc} \quad C\left|\begin{array}{l}a\cos t\\ a\sin t\end{array}\right., \quad A\left|\begin{array}{c}a\cos t\\ 0\end{array}\right., \quad B\left|\begin{array}{c}0\\ a\sin t\end{array}\right. \quad \text{et}$$

$$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{c}-a\cos t\\ a\sin t\end{array}\right.$$

La réponse A est fausse.

• Déterminons l'équation de la droite (AB) :



$$M\,(x,y) \in (AB) \quad \Leftrightarrow \quad \text{dét}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - a\cos t & -a\cos t \\ y & a\sin t \end{vmatrix} = 0$$

Une équation de (AB) est donc :
$(\sin t)\,x + (\cos t)\,y - a\cos t\,\sin t = 0$

La réponse B est fausse

• Cherchons les coordonnées de M, projeté orthogonal de C sur (AB) :

Soit $M\left|\begin{array}{l}x\\ y\end{array}\right.$. En remarquant que $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}\left|\begin{array}{l}\sin t\\ \cos t\end{array}\right.$:

$$(1)\ \begin{cases}\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB}\\ M \in (AB)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{CM} \text{ colinéaire à } \vec{u}\\ M \in (AB)\end{cases}$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - a\cos t = \lambda\sin t\\ y - a\sin t = \lambda\cos t\\ (\sin t)\,x + (\cos t)\,y - a\cos t\,\sin t = 0\end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda\sin t + a\cos t\\ y = \lambda\cos t + a\sin t\\ (\lambda\sin t + a\cos t)\,\sin t + (\lambda\cos t + a\sin t)\\ \cos t - a\cos t\,\sin t = 0 \qquad\qquad (2)\end{cases}$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) = -a\cos t\,\sin t \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -a\cos t\,\sin t$$

Donc M a pour coordonnées : $\left|\begin{array}{l} x = a\cos t - a\sin^2 t\ \cos t = a\cos^3 t \\ y = a\sin t - a\sin t\ \cos^2 t = a\sin^3 t \end{array}\right.$

Donc le lieu de M est $\mathscr{A}$. **La réponse C est bonne.**

• Pour $t \neq k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$, la tangente à $\mathscr{A}$ en M est dirigée par $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ si $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} \neq \overrightarrow{0}$.

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\left|\begin{array}{l} x' = -3a\sin t\ \cos^2 t \\ y' = 3a\sin^2 t\ \cos t \end{array}\right.$$

soit
$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \underbrace{3\sin t\ \cos t}_{\neq 0}\ \underbrace{\left|\begin{array}{l} -a\cos t \\ a\sin t \end{array}\right.}_{\overrightarrow{AB}} = 3\sin t\ \cos t\ \overrightarrow{AB}$$

Alors $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et $M \in (AB)$, donc (AB) est tangente à $\mathscr{A}$ en M.

La réponse D est bonne.

• Question 2 : réponse C

$M(t)\left|\begin{array}{l} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{array}\right.$ x et y sont de période 2π, donc $\mathscr{A}$ est de période 2π, et on obtient **la totalité** de la courbe $\mathscr{A}$ en prenant t dans un intervalle de longueur 2π.

La réponse A est fausse.

• On note s_D la symétrie orthogonale par rapport à une droite D.

$$M(-t)\left|\begin{array}{l} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad s_{(x'x)} : M(t) \mapsto M(-t)$$

On peut dès lors restreindre l'étude de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ (de longueur 2π) à l'intervalle $[0, \pi]$, puis compléter $\mathscr{A}$. par la symétrie $s_{(x'x)}$.

t et $\pi - t$ sont symétriques par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$, et $M(\pi - t)\left|\begin{array}{l} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{array}\right.$ donc :

$s_{(y'y)} : M(t) \mapsto M(\pi - t)$: on peut dès lors restreindre l'étude à l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, puis compléter $\mathscr{A}$ par les symétries $s_{(y'y)}$ et $s_{(x'x)}$.

t et $\frac{\pi}{2}-t$ sont symétriques par rapport à $\frac{\pi}{4}$, et $M\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\left|\begin{array}{l} x\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=y(t) \\ y\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=x(t) \end{array}\right.$

donc : $s_{\Delta} \ : \ M(t) \ \mapsto \ M\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ avec $\Delta \ : \ y=x$.

On peut dès lors restreindre l'étude à l'intervalle $\left[0, \ \frac{\pi}{4}\right]$, puis compléter $\mathscr{A}$ par les 3 symétries s_{Δ}, $s_{(y'y)}$ et $s_{(x'x)}$.

La réponse B est fausse.

- $M(0)\left|\begin{array}{l} a \\ 0 \end{array}\right.$ et $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(0)=\vec{0}$ d'après la question 1, donc $M(0)$ est un point **stationnaire**.

Notons $A=M(0)$. La droite (AM) a pour coefficient directeur :

$$m(t)=\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}$$

$$m(t)=\frac{a\sin^3 t}{a\left(\cos^3 t-1\right)}=\frac{\sin^3 t}{(\cos t-1)\left(\cos^2 t+\cos t+1\right)}$$

$$=\frac{\sin t\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2}{-\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)\left(\cos^2 t+\cos t+1\right)}$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)=\frac{1}{2} \qquad \text{donc} \qquad \lim_{t\to 0} m(t)=0$$

La tangente à $\mathscr{A}$ en M(0)a pour coefficient directeur $\lim\limits_{t\to 0} m(t)$, donc :

la tangente à $\mathscr{A}$ en $M(0)$ est $(x'x)$.

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

Question 3 : réponse A

- $\forall \ u\in\mathbb{R}-\{-1, \ 1\} : \ M(u)\left|\begin{array}{l} x(u)=\frac{u+2}{u^2-1} \\ y(u)=\frac{2u}{u^2-1} \end{array}\right.$

et
$$M\left(\frac{1}{u}\right)\left|\begin{aligned} x\left(\frac{1}{u}\right) &= \frac{\frac{1}{u}+2}{\frac{1}{u^2}-1} = \frac{u+2u^2}{1-u^2} \\ y\left(\frac{1}{u}\right) &= \frac{\frac{2}{u}}{\frac{1}{u^2}-1} = \frac{2u}{1-u^2} = -y(u) \end{aligned}\right.$$

Le milieu de $\left[M(u),\ M\left(\frac{1}{u}\right)\right]$ a pour coordonnées $\left|\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[x(u)+x\left(\frac{1}{u}\right)\right] &= -1 \\ \frac{1}{2}\left[y(u)+y\left(\frac{1}{u}\right)\right] &= 0 \end{aligned}\right.$

donc $M\left(\frac{1}{u}\right)$ est le symétrique de *M(u)* par rapport à $\Omega\ (-1,\ 0)$.

Pour $u \in]-1,\ 1[-\{0\}$, $\frac{1}{u}$ décrit. $]-\infty,\ -1[\ \cup\ ]1,\ +\infty[$, donc il suffit d'étudier $\mathcal{B}$ pour $u \in]-1,\ 1[$, puis de compléter par la symétrie par rapport à Ω, sauf pour $M(0)$.

La réponse A est bonne.

- $$\frac{d\overrightarrow{M}}{du}\left|\begin{aligned} x'(u) &= -\frac{u^2+4u+1}{\left(u^2-1\right)^2} = -\frac{(u-\alpha)(u-\beta)}{\left(u^2-1\right)^2} \\ y'(u) &= -\frac{2\left(u^2+1\right)}{\left(u^2-1\right)^2} \end{aligned}\right.$$

avec $\begin{cases} \alpha = -2-\sqrt{3} \simeq -3{,}7 \\ \beta = -2+\sqrt{3} \simeq -0{,}3 \end{cases}$

$\alpha < -1 < \beta < 0$

La réponse B est fausse.

- $\lim\limits_{u\to -1_+} x(u) = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to -1_+} y(u) = +\infty$ donc $\mathcal{B}$ admet une branche infinie au voisinage de -1.

$\frac{y}{x}(u) = \frac{2u}{u+2} \underset{u\to -1}{\to} -2$ donc $\mathcal{B}$ admet une direction asymptotique $y = -2x$

$$(y+2x)(u) = \frac{4}{u-1} \underset{u\to -1}{\to} -2$$

donc $\mathcal{B}$ admet l'asymptote : $y = -2x - 2$.

- $\lim_{u \to 1_-} x(u) = -\infty$ et $\lim_{u \to 1_-} y(u) = -\infty$ donc $\mathcal{B}$ admet une branche infinie au voisinage de 1.

$\frac{y}{x}(u) = \frac{2u}{u+2} \underset{u \to 1}{\to} \frac{2}{3}$ donc $\mathcal{B}$ admet une direction asymptotique $y = \frac{2}{3}x$

$$\left(y - \frac{2}{3}x\right)(u) = \frac{4}{3(u+1)} \underset{u \to 1}{\to} \frac{2}{3}$$

donc $\mathcal{B}$ admet l'asymptote : $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$.

Les réponses C et D sont fausses.

Question 4 : réponses B et C

Courbe du second degré

Soit la courbe Γ d'équation : $a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2 + \alpha\,x + \beta\,y + \gamma = 0$

avec $a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ réels, $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

Γ est vide, ou un point, ou la réunion de droites, ou un cercle, ou une conique.

Si c'est une conique ou un cercle, Γ est une parabole si $\Delta = 0$, une ellipse ou un cercle si $\Delta < 0$, une hyperbole si $\Delta > 0$.

- $-4x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x + 4y = 0$ donne : $\Delta = 16 + 4 \times 4 \times 3 = 64 > 0$.

Donc, si Γ est une conique, c'est une hyperbole. **La réponse A est fausse.**

- $\mathcal{B}$ admet deux asymptotes et un centre de symétrie Ω, donc il est possible que $\mathcal{B} = \Gamma$.

Équation cartésienne de $\mathcal{B}$:

$$M(x,\ y) \in \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, u \in \mathbb{R} - \{-1,\ 1\},\ (1) \begin{cases} x = \dfrac{u+2}{u^2-1} \\ y = \dfrac{2u}{u^2-1} \end{cases}$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y = \dfrac{4}{u^2-1} \quad (\text{donc } 2x - y \neq 0) & (L_1) \\ y = \dfrac{(2x-y)u}{2} & (L_2) \end{cases}$$

et $\qquad (L_2) \quad \Leftrightarrow \quad u = \dfrac{2y}{2x-y}$

En remplaçant dans (L_1), on obtient : $$(2x-y)\left[\frac{4y^2}{(2x-y)^2}-1\right]=4$$

soit : $$-4x^2+4xy+3y^2-8x+4y=0$$

Donc : $$(1) \iff \begin{cases} u=\dfrac{2y}{2x-y} \quad \text{avec } 2x-y\neq 0 \\ -4x^2+4xy+3y^2-8x+4y=0 \quad (2)\end{cases}$$

Or : $$u=1 \;\; ou \;\; u=-1 \iff u^2=1 \iff 4y^2=(2x-y)^2$$

On aurait alors, d'après (2), $2x-y=0$, ce qui est impossible.

Donc : $$M\in\mathcal{B} \iff \begin{cases} -4x^2+4xy+3y^2-8x+4y=0 \quad (2) \\ 2x-y\neq 0\end{cases}$$

Dans (2), $2x-y=0$ donne $y=0$ et $x=0$, c'est-à-dire $M=O$, donc $\mathcal{B}=\Gamma-\{O\}$.

La réponse B est bonne.

D'après la question 3 : **la réponse C est bonne et la réponse D est fausse.**

→ QCM 2 Autour de la cardioïde

• Question 1 : réponses A et B

r et $\vec{u}(\theta)$ sont de période 2π, donc on obtient toute la courbe $\mathcal{C}$ en l'étudiant sur un intervalle de longueur 2π : $[\alpha,\ \alpha+2\pi]$.

$r(-\theta)=r(\theta)$ donc $s_{(Ox)}$: $M(\theta) \mapsto M(-\theta)$: on peut dès lors restreindre l'étude à l'intervalle $[0,\ \pi]$, puis compléter $\mathcal{C}$ par symétrie par rapport à l'axe Ox.

La réponse A est bonne.

Point régulier – point singulier

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) = r'(\theta)\ \overrightarrow{u}(\theta) + r(\theta)\ \overrightarrow{v}(\theta) \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{v}(\theta) = \overrightarrow{u}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

- $M(\theta)$ est régulier $\Leftrightarrow \dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) \neq \overrightarrow{0}$

La tangente en un point régulier est dirigée par $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta)$.

- $M(\theta)$ est singulier (stationnaire) $\Leftrightarrow \dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow r(\theta) = r'(\theta) = 0$.

Le seul point singulier possible est O, et si $O = M(\theta_0)$, la tangente en O est la droite $\theta = \theta_0\ [\pi]$.

- On note $V = \left(\overrightarrow{OM}, \dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}\right)\ [\pi]$, et si $r' \neq 0$, $\tan V = \dfrac{r}{r'}$.

- $r'(\theta) = -a \sin\theta$ si $\theta \neq 0\ [\pi]$, $r'(\theta) \neq 0$ donc :

$$\tan V = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

soit $V = \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. Ce résultat reste vrai si $\theta = 0\ [\pi]$.

La réponse B est bonne.

- Là où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à (Oy) : $\left(\overrightarrow{i}, \dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

$$\left(\overrightarrow{i}, \frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}\right) = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}(\theta)\right) + V = \theta + V = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

On a : $\dfrac{3\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \dfrac{3\theta}{2} = k\pi \Leftrightarrow \theta = \dfrac{2k\pi}{3}\quad (k \in \mathbb{Z})$

On obtient 3 valeurs de θ (modulo 2π) : 0, $\dfrac{2\pi}{3}$, $-\dfrac{2\pi}{3}$ donc il y a exactement 3 points de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à (Oy).

La réponse C est fausse.

- $M(0) \neq O$, donc $M(0)$ ne peut pas être point singulier.

La réponse D est fausse.

Question 2 : réponses B et D

- $M(\pi) = 0$ donc la tangente en O est l'axe (Ox). O est un point de rebroussement.

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

- D_θ coupe $\mathscr{C}$ en $M = M(\theta)$ et $M' = M(\theta + \pi)$.

C_1 est le cercle de rayon $\dfrac{a}{2}$, passant par O, de centre $\Omega\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$.

D_θ coupe C_1 en $I \neq O$, donc : $\overrightarrow{OI} = a\cos\theta\ \vec{u}(\theta)$

$\overrightarrow{OM} = a\,(1+\cos\theta)\ \vec{u}(\theta)$

et $\overrightarrow{OM'} = a\,(1-\cos\theta)\ \vec{u}(\theta+\pi) = a\,(\cos\theta - 1)\ \vec{u}(\theta)$

Donc : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = -2a\ \vec{u}(\theta)$ et $MM' = 2a$.

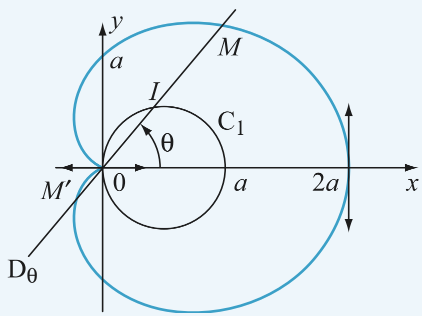
La réponse C est fausse.

- $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}) = a\cos\theta\ \vec{u}(\theta) = \overrightarrow{OI}$, donc I est le milieu de $[MM']$.

La réponse D est bonne.

Ce résultat permet de construire la cardioïde point par point :

- **on prend $I \in C_1$;**
- **sur (OI), on place M et M' à la distance a de I : on obtient ainsi 2 points M et M' de la cardioïde.**



Question 3 : réponse B

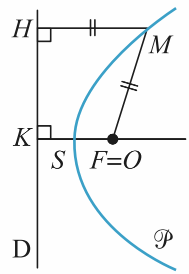
Foyer et directrice d'une parabole

La parabole $\mathcal{P}$ de foyer O et de directrice D est l'ensemble des points M équidistants de O et de D.

Le paramètre p de $\mathcal{P}$ est $p = OK$, où K désigne le projeté orthogonal de O sur D.
Le sommet S de $\mathcal{P}$ est le milieu de $[OK]$.

Une équation polaire de $\mathcal{P}$ est $r = \dfrac{p}{1+\cos(\theta-\alpha)}$ où

α désigne l'angle polaire de l'axe focal (OK).

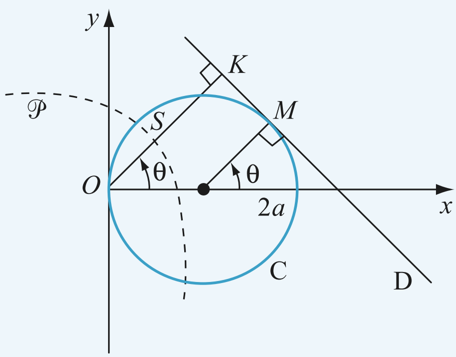


La réponse B est bonne, les réponses A, C et D sont fausses.

Question 4 : réponses A et B

- $A \in \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad AO = d(A,\mathrm{D})$

Or :
$AO = a$, rayon du cercle C de centre A.



Donc :

$$d(A,\mathrm{D}) = a \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{D}\ \text{tangente à C} \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathcal{P}$$

La réponse A est bonne.

- $AM = a$ donc $\overrightarrow{AM} = a\,\vec{u}(\theta) = \begin{vmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \end{vmatrix}$ et $M \begin{vmatrix} a(\cos\theta+1) \\ a\sin\theta \end{vmatrix}$

D est orthogonal à (AM) et à (OK) donc :

$$\overrightarrow{OK} = \lambda\ \vec{u}(\theta), \quad K \left| \begin{matrix} \lambda \cos\theta \\ \lambda \sin\theta \end{matrix} \right. \quad \text{et} \quad \overrightarrow{KM} \left| \begin{matrix} (a-\lambda)\cos\theta + a \\ (a-\lambda)\sin\theta \end{matrix} \right.$$

Or : $\overrightarrow{KM} \cdot \vec{u}(\theta) = 0 \iff (a-\lambda)\cos^2\theta + a\cos\theta + (a-\lambda)\sin^2\theta = 0$

$$\iff \lambda = a(1+\cos\theta)$$

Donc $\overrightarrow{OK} = a(1+\cos\theta)\ \vec{u}(\theta)$, et K décrit la cardioïde $\mathscr{C}$.

La réponse B est bonne et la réponse C est fausse.

• S est le milieu de $[OK]$, donc $\overrightarrow{OS} = \dfrac{a}{2}(1+\cos\theta)\ \vec{u}(\theta)$ et :

Γ (lieu des points S) est la cardioïde d'équation polaire $r = \dfrac{a}{2}(1+\cos\theta)$, déduite de $\mathscr{C}$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

La réponse D est fausse.

→ QCM 3 Inverse d'une courbe

• Question 1 : réponses A et C

• Choisissons $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $F \left| \begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix} \right.$ et $F' \left| \begin{matrix} -a \\ 0 \end{matrix} \right.$.

Cherchons une équation cartésienne de L_a :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in L_a &\iff MF^2 \times MF'^2 = a^4 \\ &\iff \left[(x-a)^2 + y^2\right]\left[(x+a)^2 + y^2\right] = a^4 \\ &\iff \left[x^2 + y^2 + a^2 - 2ax\right]\left[x^2 + y^2 + a^2 + 2ax\right] = a^4 \\ &\iff \left(x^2 + y^2 + a^2\right)^2 - 4a^2x^2 = a^4 \\ &\iff \left(x^2 + y^2\right)^2 + 2a^2\left(x^2 + y^2\right) - 4a^2x^2 = 0 \\ &\iff \left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right) \end{aligned}$$

La réponse A est bonne et la réponse B est fausse.

• Cherchons une équation polaire de L_a : $\overrightarrow{OM} = \rho\ \vec{u}_\theta \iff \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

$$\begin{aligned} M \in L_a \quad &\iff \quad \rho^4 = 2a^2\rho^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\ &\iff \quad \rho^4 = 2a^2\rho^2\cos(2\theta) \\ &\iff \quad \rho = 0\ (M = O)\ \ ou\ \ \rho^2 = 2a^2\cos(2\theta)\quad (1) \end{aligned}$$

Or, pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, $\cos(2\theta) = 0$ et $\rho = 0$, donc la courbe d'équation (1) contient O, et :

$$M \in L_a \iff \rho^2 = 2a^2\cos(2\theta)$$

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

• Question 2 : réponse B

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = a\sqrt{2\cos(2\theta)}\ \vec{u}\,\theta$$

• ρ existe pour : $\cos(2\theta) \geq 0$, c'est-à-dire : $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2\theta \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

donc : $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right],\ k \in \mathbb{Z}$

• ρ est de période π et $\vec{u}_\theta$ est de période 2π, donc Γ_a est de période 2π : on obtient toute la courbe en étudiant sur un intervalle de longueur 2π.

• $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$ donc s_O : $M(\theta) \mapsto M(\theta + \pi)$: on peut dès lors restreindre l'étude à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, puis compléter par la symétrie de centre O.

• $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ donc $s_{(Ox)}$: $M(\theta) \mapsto M(-\theta)$: on peut dès lors restreindre l'étude à l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, puis compléter par les symétries $s_{(Ox)}$ et s_O.

• ρ n'existe pas sur $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc il suffit de mener l'étude sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ puis d'utiliser **2 symétries** pour obtenir toute la courbe Γ_a.

La réponse A est fausse.

• Γ_a est symétrique par rapport à O. Une équation polaire de L_a est :

$$\rho^2 = 2a^2\cos(2\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \rho = a\sqrt{2\cos(2\theta)} \ (1) \quad \text{ou} \quad \rho = -a\sqrt{2\cos(2\theta)} \ (2)$$

(1) est l'équation polaire de Γ_a, et (2) est celle de la courbe symétrique de Γ_a par rapport à O, c'est-à-dire encore Γ_a. Donc $L_a = \Gamma_a$.

La réponse B est bonne.

• $M(0)$ est le point tel que $\theta = 0$ et $\rho = a\sqrt{2}$, donc $M(0) \in (Ox)$.

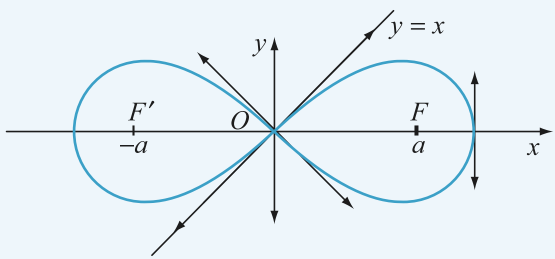
On pourrait déterminer la tangente en $M(0)$ en calculant $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$, mais cela n'est pas nécessaire ici. En effet, (Ox) est un axe de symétrie de Γ_a, et si la tangente en $M(0)$ est (Ox), alors $M(0)$ est un point de rebroussement, donc un point singulier, ce qui est impossible puisque $M(0) \neq O$.

La réponse C est fausse.

• $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = O$ donc la tangente en O est la droite $\theta = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$, soit la droite Δ d'équation $y = x$. Mais Γ_a se situe **sous** Δ pour $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$.

La réponse D est fausse.

θ	0		$\pi/4$
ρ	$a\sqrt{2}$	$+$	0



• Question 3 : réponse B

$$\mathcal{G} : M \mapsto M' \begin{cases} \text{les points } O, M, M' \text{ sont sur la même} \\ \text{demi-droite issue de } O & (1) \\ OM \times OM' = 1 & (2) \end{cases}$$

NON O n'a pas d'image par $\mathcal{G}$. **La réponse A est fausse.**

• Pour $M \neq O$: si $M' = \mathcal{G}(M)$, alors $M = \mathcal{G}(M')$ d'après (1) et (2), donc $\mathcal{G}$ est une bijection de P^* dans P^*, et $\mathcal{G}^{-1} = \mathcal{G}$.

La réponse B est bonne.

$\mathcal{G}$ est en fait une application involutive de P^* : $\mathcal{G} \circ \mathcal{G} = Id_P$.

• Soit $M(z)$ et $M'(z')$: $\mathcal{G}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM},\ \lambda > 0 & (1) \\ \lambda\, \text{OM}^2 = 1 & (2) \end{cases}$

donc :

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{OM^2}\overrightarrow{OM} \quad \text{soit} \quad z' = \frac{z}{|z|^2} \Leftrightarrow z' = \frac{z}{z\,\bar{z}} \Leftrightarrow z' = \frac{1}{\bar{z}}$$

La réponse C est fausse.

• $M(z)$ invariant $\Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \dfrac{1}{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z\,\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1$

L'ensemble des points invariants par $\mathcal{G}$ est donc le cercle de centre O et de rayon 1.

La réponse D est fausse.

• Question 4 : réponse B

$$C_a : x^2 - y^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = 1 \quad \text{(équation réduite).}$$

Donc C_a est une **hyperbole de centre O**, d'asymptotes $x^2 - y^2 = 0$, c'est-à-dire les bissectrices des axes, donc elle est **équilatère**, d'axe focal (Ox).

• $\alpha = \beta = a\sqrt{2}$ donc les sommets de C_a sont $A \left| \begin{array}{l} a\sqrt{2} \\ 0 \end{array} \right.$ et $A' \left| \begin{array}{l} -a\sqrt{2} \\ 0 \end{array} \right.$,

et ses foyers sont $I \left| \begin{array}{l} c \\ 0 \end{array} \right.$ et $I' \left| \begin{array}{l} -c \\ 0 \end{array} \right.$ avec $c^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 4a^2$,

donc $I \left| \begin{array}{l} 2a \\ 0 \end{array} \right.$ et $I' \left| \begin{array}{l} -2a \\ 0 \end{array} \right.$.

La réponse A est fausse.

• Les directrices ont pour équations : $x = \pm\dfrac{\alpha^2}{c} \Leftrightarrow x = \pm a$

donc les directrices passent par F et F'.

La réponse B est bonne.

• Une équation polaire de C_a est :

$$\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta = 2a^2 \quad \text{soit} \quad \rho^2\cos(2\theta) = 2a^2$$

La réponse C est fausse.

NON

• Pour les mêmes raisons qu'à la question 2, C_a a pour équation polaire :

$$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \quad \text{avec} \quad \cos(2\theta) > 0$$

$$\mathrm{C}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} : \ \rho = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \quad \text{et} \quad L_{\frac{1}{\sqrt{2}}} : \ \rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$$

On peut déjà remarquer que $O \notin \mathrm{C}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, alors que $O \in L_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$. Donc $\mathcal{G}\left(\mathrm{C}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$ ne peut pas contenir O. **La réponse D est fausse.**

Plus précisément : $M(z) \in \mathrm{C}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\, e^{i\theta} \quad (\cos(2\theta) > 0)$

$M' = \mathcal{G}(M)$ **a pour affixe :** $z' = \dfrac{1}{\bar{z}} = \sqrt{\cos(2\theta)}\, e^{-i\theta} = \sqrt{\cos(-2\theta)}\, e^{-i\theta} \quad 0.$

Donc : $M \in \mathrm{C}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow M' \in L_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ **et** $M \quad O$

soit : $$\mathcal{G}\left(\mathrm{C}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = L_{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \{O\}$$

→ QCM 4 Géométrie de l'espace et coniques

• Question 1 : aucune réponse n'est bonne

• $\mathrm{D} \cap \mathrm{D}' : \begin{cases} y = 0 \\ z = -a \\ x = 0 \\ z = a \end{cases} \Rightarrow a = 0$: impossible, donc $\mathrm{D} \cap \mathrm{D}' = \varnothing$, ce qui signifie que D' est strictement parallèle à D, ou que D et D′ sont non coplanaires.

$$D\ :\ \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-a \end{cases} \text{ est dirigée par } \vec{u}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}\text{, et } D'\ :\ \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=a \end{cases} \text{ est dirigée par } \vec{u}'\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\vec{u}\,.\,\vec{u}'=0$ **donc** $D\perp D'$**, et D et D′ sont non coplanaires.**

La réponse A est fausse.

- $M\begin{vmatrix} \lambda \\ 0 \\ -a \end{vmatrix}$ et $M'\begin{vmatrix} 0 \\ \mu \\ a \end{vmatrix}$ $(\lambda,\mu\geq 0)$ donc $\overrightarrow{MM'}\begin{vmatrix} \lambda \\ \mu \\ -a \end{vmatrix}$

d'où les équations paramétriques de (MM') : $\begin{cases} x=\lambda-\lambda t \\ y=\mu t \\ z=a(2t-1) \end{cases}$

Les réponses B et C sont fausses.

- $\{H\}=(MM')\cap P\ :\begin{cases} x=\lambda-\lambda t \\ y=\mu t \\ z=a(2t-1) \\ z=0 \end{cases}$ donc $t=\dfrac{1}{2}$ et $H\begin{vmatrix} \lambda/2 \\ \mu/2 \\ 0 \end{vmatrix}$

La réponse D est fausse.

Question 2 : réponses B et C

Distance d'un point à une droite

La distance d'un point A à une droite $\Delta=B+\mathbb{R}\,\vec{u}$ est : $d(A,\Delta)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

- (MM') tangente à $S_a\Leftrightarrow\ d(O,(MM'))=a\ \ (1)$. Or : $\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MM'}\begin{vmatrix} a\mu \\ -a\lambda \\ \lambda\mu \end{vmatrix}$ donc :

$$(1)\ \Leftrightarrow\ \frac{\|\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{MM'}\|^2}{\|\overrightarrow{MM'}\|^2}=a^2\ \Leftrightarrow\ \frac{a^2\mu^2+a^2\lambda^2+\lambda^2\mu^2}{\lambda^2+\mu^2+4a^2}=a^2\ \Leftrightarrow\ \lambda\mu=2a^2$$

(car $\lambda\mu\geq 0$)

La réponse C est bonne.

• $H \in \Gamma \iff \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \begin{cases} x = \lambda/2 \\ y = \mu/2 \\ \lambda\mu = 2a^2 \end{cases} \iff xy = \dfrac{a^2}{2}$

Donc Γ est l'hyperbole de P d'équation $xy = \dfrac{a^2}{2}$.

La réponse D est fausse.

• Question 3 : réponse C

$$\lambda = \mu = a \quad \text{donc } M(a,\ 0,\ -a) \text{ et } M'(0,\ a,\ a).$$

Intersection d'une sphère et d'un plan – projection d'un cercle sur un plan

• L'intersection d'une sphère et d'un plan est soit vide, soit un point (plan tangent à la sphère), soit un cercle.
• La projection d'un cercle d'un plan P sur un plan Q est soit un cercle (si P//Q), soit un segment (si P⊥Q), soit une ellipse.

Les réponses A et B sont fausses.

• $N(x,y,z) \in \Sigma \iff \overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NM'} = 0 \iff x^2 + y^2 + z^2 - ax - ay - a^2 = 0$

$$N(x,y,z) \in Q \iff \text{dét}(\overrightarrow{ON},\ \overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{OM'}) = \begin{vmatrix} x & a & 0 \\ y & 0 & a \\ z & -a & a \end{vmatrix} = 0 \iff x - y + z = 0$$

$$\text{Donc} \quad \mathscr{C} = \Sigma \cap Q : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - ax - ay - a^2 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

La réponse C est bonne.

• Soit p la projection orthogonale sur le plan P.
$p : M(x,y,z) \mapsto m(x,y,0)$.

$$m(x,y,0) \in \mathscr{E} \iff \exists\, z \in \mathbb{R},\ M(x,y,z) \in \mathscr{C}$$

$$\iff \exists\, z \in \mathbb{R}, \begin{cases} z = y - x \\ x^2 + y^2 + (y-x)^2 - ax - ay - a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2xy - ax - ay - a^2 = 0$$

La réponse D est fausse.

L'équation de l'assertion D représente l'intersection de la sphère et du plan.

• Question 4 : réponses B et C

• Le discriminant de l'équation de $\mathscr{C}_a$ vaut : $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$
Donc, si $\mathscr{C}_a$ est une conique, c'est une ellipse.

La réponse A est fausse.

• $r_{\frac{\pi}{4}}$: $\vec{i} \mapsto \vec{i}' \left| \begin{array}{l} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{array} \right.$ et $\vec{j} \mapsto \vec{j}' \left| \begin{array}{l} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{array} \right.$ donc, si (x,y) sont les coordonnées de M dans $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ et (x', y') celles dans $\left(O,\ \vec{i}',\ \vec{j}'\right)$:

$$\begin{cases} x = 1/\sqrt{2}\,(x' - y') \\ y = 1/\sqrt{2}\,(x' + y') \end{cases}$$

alors : $x^2 + y^2 - xy - \dfrac{a}{2}x - \dfrac{a}{2}y - \dfrac{a^2}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'^2 + 3y'^2 - a\sqrt{2}x' - a^2 = 0 \qquad (1)$

La réponse B est bonne.

• (1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\left(x' - \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\dfrac{3a^2}{2}} - \dfrac{y'^2}{\dfrac{a^2}{2}} = 1$: $\mathscr{C}_a$ est donc l'ellipse de centre $\Omega \left| \begin{array}{l} \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \\ 0 \end{array} \right.$ d'axe focal $(\Omega x')$, de longueur du ½ grand axe $a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, et de longueur du ½ petit axe $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

chapitre 5

Applications – Structures $\mathbb{N}$-$\mathbb{Z}$-$\mathbb{Q}$-$\mathbb{R}$

QCM 1 Injections - Surjections – Bijections

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Pour tout point M, on note (x, y) ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et $z = x + iy$ son affixe.
Soit f l'application de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $z' = z^2 + z$.

Question 1

Soient E et F deux ensembles, et φ une application de E dans F. A désigne une partie de E, et B une partie de F.

A F est l'ensemble des images par φ des éléments de E.

B Si : $\forall (x, x') \in E^2, \ (\varphi(x) \neq \varphi(x') \Rightarrow x \neq x')$, alors φ est injective.

C Pour qu'il existe une application induite par φ de A dans B, il faut que $\varphi(A) \subset B$.

D Pour que φ induise une bijection de A dans B, il suffit de montrer que tout élément de B admet un unique antécédent dans A.

Question 2

Soit : $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto e^z \end{array}$, $U = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$, $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \Re e(z) = \Im m(z)\}$.

A φ est une application surjective.

B $\varphi^{-1}(U) = \mathbb{R}i$

C $\varphi(\Delta) = \Delta$

D Soit $A = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \Re e(z) \geq 0 \ \ et \ \ \Im m(z) \in [0, 2\pi[\}$ et
$B = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \geq 1\}$.

φ induit une bijection de A dans B.

Question 3

A f est surjective.

B f est injective.

C $\forall (M,N) \in \mathrm{P}^2,\ (f(M) = f(N)) \iff (M = N \text{ ou } M = s(N))$
où s est la symétrie de centre Ω d'affixe ½.

D Soit $\mathrm{G} = \left\{ M(x,y) \in \mathrm{P} \ / \ y > 0 \ \ ou \ \left(y = 0 \ \ et \ \ x \geq -\dfrac{1}{2} \right) \right\}$.
f induit une bijection de G dans P.

Question 4

D(C, r) désigne le disque ouvert de centre C et de rayon r ($r > 0$) :

$$\mathrm{D}(C,r) = \{ M \in P \ / \ CM < r \}$$

Soient I et J les points d'affixes respectives $-\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{4}$, et soit Δ la droite d'équation $y = x$.

$f^{-1}\left[\mathrm{D}(J,r)\right]$ est :

A le disque D(I, r). **B** le disque D(I, r^2).

$f(\Delta)$ est :

C une droite. **D** une parabole.

QCM 2 Dénombrement

Une serrure de sécurité possède n boutons numérotés de 1 à n ($n \geq 1$). Une « combinaison » consiste à pousser dans un certain ordre **tous** les boutons. Chaque bouton n'est poussé qu'une seule fois, mais il est possible de pousser simultanément plusieurs boutons.

On note $A_n = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ l'ensemble des entiers de 1 à n.

Par définition, une <u>n-combinaison</u> est une suite ordonnée $\left(P_1, P_2, \ldots, P_j\right)$ de j parties $P_1, P_2, \ldots, P_j$ de A_n ($1 \leq j \leq n$), ces parties formant une partition de A_n, c'est-à-dire qu'elles sont non vides, deux à deux disjointes, et que leur réunion est égale à A_n.

On note a_n le nombre de n-combinaisons.

<u>Exemples :</u>

- <u>$n = 1$</u> : il y a une seule 1-combinaison : $(\{1\})$, donc $a_1 = 1$.
- <u>$n = 2$</u> : il y a trois 2-combinaisons : $(\{1\},\{2\}), (\{2\},\{1\}), (\{1, 2\})$ donc $a_2 = 3$.

$(\{1\}, \{2\})$ consiste à appuyer d'abord sur le bouton 1, puis sur le bouton 2.

$(\{1, 2\})$ consiste à appuyer simultanément sur les boutons 1 et 2.

Question 1

A $a_3 = 13$ | **B** $a_3 = 12$

Pour n donné, le nombre de n-combinaisons telles que les boutons soient poussés les uns après les autres, c'est-à-dire que les parties P_i ($1 \leq i \leq n$) soient des singletons, est :

C $n!$ | **D** n^n

Question 2

Soit $S = \left(P_1, P_2, \ldots, P_j\right)$ une n-combinaison quelconque ($n \geq 1$).

Soit un entier k ($1 \leq k < n$). Pour une partie P_1 fixée de cardinal k, le nombre de n-combinaisons est :

A $(n - k)!$ | **B** a_{n-k}

Donc le nombre de n-combinaisons total est :

C $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a_{n-k}$ | **D** $a_n = 1 + \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} a_p$

QCM 3 Groupes et morphismes

On définit dans $\mathbb{R}^2$ la loi notée * par :

$$\forall((x,\ y),(x',\ y')) \in (\mathbb{R}^2)^2,\quad (x,\ y) * (x',\ y') = (x + x',\ y\,e^{x'} + y'\,e^{-x})$$

Soit l'équation (1) d'inconnue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\forall\ (x,\ x') \in \mathbb{R}^2,\quad f(x + x') = f(x)\,e^{x'} + f(x')\,e^{-x} \qquad (1)$$

Question 1

Soit f une solution de (1).

- **A** $f(0) = 0$
- **B** $f(0) = 1$
- **C** $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(1 + x) = f(x + 1)$ donc $f(x) = f(1)\operatorname{sh} x$
- **D** $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, l'application $f_\lambda\ :\ x\ \mapsto\ \lambda \operatorname{sh} x$ est solution de (1).

Question 2

- **A** * est une loi de composition interne commutative dans $\mathbb{R}^2$.
- **B** $(\mathbb{R}^2,\ *)$ est un groupe, et $\mathbb{R} \times \{0\}$ est un sous-groupe.
- **C** ${\mathbb{R}_+}^2$ est stable pour la loi *.
- **D** $({\mathbb{R}_+}^2,\ *)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2,\ *)$.

Question 3

Pour une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note $\Gamma = \left\{ (x, f(x)) \ / \ x \in \mathbb{R} \right\}$ son graphe.

A Γ est stable pour * si et seulement si $f = \text{sh}$.

On prend dans la suite pour Γ le graphe de la fonction sh.

$$\text{Soit } \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x, \ \text{sh}\, x) \end{array}$$

B φ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\left(\mathbb{R}^2, \ *\right)$, donc Γ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}^2, \ *\right)$.

C φ n'est pas injectif.

D φ induit un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\Gamma, \ *)$.

QCM 4 Anneaux - Corps – Arithmétique

Certaines questions de ce QCM sont réservées à la filière MPSI.

On pose :

$$\text{E} = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \exists\, (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \ \ x = m + n\sqrt{2} \right\}$$

$$\text{F} = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \exists\, (u, v) \in \mathbb{Q}^2, \ \ x = u + v\sqrt{2} \right\}$$

Soit dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :

$$m^2 - 2n^2 = 1 \qquad (1)$$

$$m^2 - 2n^2 = -1 \qquad (2)$$

Question 1

A L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & u + v\sqrt{2} \end{array}$ n'est pas injective.

B E est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

C $\sqrt{2}$ et $\left(1 + \sqrt{2}\right)$ ne sont pas inversibles dans E.

D F n'est pas un sous-corps de $\mathbb{R}$.

• Question 2

Pour tout élément $x = m + n\sqrt{2}$ de E, on note : $\tilde{x} = m - n\sqrt{2}$.

Soit N l'application définie sur E par : $N(x) = x\,\tilde{x}$.

Soit : $\quad G = \left\{ x \in E \ / \ x = m + n\sqrt{2} \text{ et } (m,n) \text{ solution de (1) ou (2)} \right\}$.

A L'équation $N(x) = 0$ n'a pas de solution dans E.

B Si (m, n) est solution de (1) ou (2), alors $x = m + n\sqrt{2}$ est inversible dans E.

C N est un morphisme de groupe de $(E, \times)$ dans $(\mathbb{Z}, \times)$

D G est l'ensemble des éléments inversibles de E.

• Question 3 **(assertion D réservée aux MPSI)**

Pour $p \in \mathbb{N}$, $u_p = \left(1+\sqrt{2}\right)^p \in E$, donc il existe deux entiers a_p et b_p tels que :

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^p = a_p + b_p\sqrt{2}$$

A $a_p - b_p\sqrt{2} = \left(1-\sqrt{2}\right)^p$

B $\forall\, p \in \mathbb{N}\ \left(a_p,\ b_p\right)$ est solution de (1).

C $\left(1+\sqrt{2}\right)^p + \left(1-\sqrt{2}\right)^p$ est la partie entière de u_p.

D a_p et b_p sont premiers entre eux.

Question 4 (MPSI)

$$\text{Soit : } \quad z = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

On considère l'équation :

$$x^3 - 6x - 40 = 0 \qquad (3)$$

A z est solution de (3).

B (3) a trois racines réelles.

On cherche les solutions rationnelles positives de (3) sous la forme $x = \dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux.

C q divise p^3, ce qui est impossible puisque p et q sont premiers entre eux, donc (3) n'a pas de solution rationnelle, et $z \notin \mathbb{Q}$.

D p divise 40, et (3) a une unique solution rationnelle, donc $z \in \mathbb{Q}$.

→ QCM 1 Injections - Surjections – Bijections

• Question 1 : réponse C

NON F est l'ensemble d'arrivée ; c'est l'ensemble des images si et seulement si φ est surjective. **La réponse A est fausse.**

• $\forall (x, x') \in E^2, \ (\varphi(x) \neq \varphi(x') \quad \Rightarrow \quad x \neq x')$ signifie qu'un élément de E a au plus une image, ce qui est vrai pour toute application φ.

$$\varphi \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x, x') \in E^2, \ \left(x \neq x' \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \neq \varphi(x') \right)$$

La réponse B est fausse.

• $A \subset E$, donc on peut restreindre φ à A : $\quad \varphi|_A : \begin{array}{rcl} A & \to & F \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$

Pour que l'application $\varphi' : \begin{array}{rcl} A & \to & B \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$ existe, il faut que tout élément x de A soit tel que $\varphi(x) \in B$, c'est-à-dire que $\varphi(A) \subset B$.

La réponse C est bonne.

NON φ induit une bijection φ' de A dans B si $\varphi(A) \subset B$ **et** si φ' est bijective, c'est-à-dire que tout élément de B admet un unique antécédent dans A. **La réponse D est fausse.**

Par exemple : $\forall\, y \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists!\, x \in \mathbb{R}_+, \ y = x^2$,

mais il n'existe pas d'application : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ car 0 n'a pas d'image.

• Question 2 : réponses B et D

NON $\forall\, z \in \mathbb{C}, \ e^z \neq 0$, donc 0 n'a pas d'antécédent par φ, et **φ n'est pas surjective**. **La réponse A est fausse.**

$\varphi^{-1}(\mathrm{U}) = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ \varphi(z) \in \mathrm{U} \}$. Soit $z = x + i\,y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $e^z = e^x\, e^{iy}$.

$$z \in \varphi^{-1}(\mathrm{U}) \iff \left|e^z\right| = 1 \iff e^x = 1 \iff x = 0 \iff z \in \mathbb{R}\,i$$

donc $\varphi^{-1}(\mathrm{U}) = \mathbb{R}\,i$. **La réponse B est bonne.**

NON $\varphi(z) \neq 0$ donc $\varphi(\Delta) \subset \mathbb{C}^*$ or $0 \in \Delta$ donc $\varphi(\Delta) \neq \Delta$.

La réponse C est fausse.

$\mathrm{A} = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ z = x + i\,y,\ x \geq 0 \ \ et \ \ y \in [0,\ 2\pi[\}$. Soit $z \in \mathrm{A}$: $e^z = e^x\, e^{iy}$.

$x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1$ donc $\left|e^z\right| \geq 1$: $\varphi(z) \in \mathrm{B}$,

et φ <u>induit une application de A dans B</u>.

$$\varphi' : \begin{array}{l} \mathrm{A} \to \mathrm{B} \\ z \mapsto e^z \end{array} \quad \text{est-elle bijective ?}$$

Soit $Z \in$ B, on cherche $z = x + i\,y \in \mathrm{A}$ tel que : $e^z = Z$ (1)

$$(1) \iff e^x\, e^{iy} = |Z|\, e^{i \arg Z} \iff \begin{cases} e^x = |Z| \\ y \equiv \arg Z \ \ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \ln|Z| \\ y \equiv \arg Z \ \ [2\pi] \end{cases}$$

Or :
- $Z \in$ B, donc $|Z| \geq 1$, donc $x \geq 0$ et x est unique.
- $y \in [0,\ 2\pi[$ et $y \equiv \arg Z \ \ [2\pi]$ donc y est unique.

Donc **φ' est bien bijective de A dans B.**

La réponse D est bonne.

• Question 3 : réponses A et D

Soit $Q(Z) \in \mathrm{P}$, on cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $Z = z^2 + z$ (2).

$$(2) \iff z^2 + z - Z = 0 \qquad \Delta = 1 + 4Z$$

- Si $Z = -\dfrac{1}{4}$: (2) a une racine double $z_0 = -\dfrac{1}{2}$

- Si $Z \neq -\dfrac{1}{4}$: (2) a 2 racines distinctes.

Donc : $\forall\, Z \in \mathbb{C},\ \exists\, z \in \mathbb{C},\ Z = z^2 + z$ et ***f* est surjective.**

La réponse A est bonne.

NON En revanche, $Q(Z)$ peut avoir 2 antécédents par f, donc **f n'est pas injective**.

La réponse B est fausse.

• Soit $M(z)$ et $N(z')$: $f(M) = f(N) \Leftrightarrow z^2 + z = z'^2 + z'$

$$f(M) = f(N) \Leftrightarrow (z - z')(z + z' + 1) = 0 \Leftrightarrow z = z' \text{ ou } z = -z' - 1$$
$$\Leftrightarrow M = N \text{ ou } M = s(N)$$

où $s : N(z') \mapsto M(z)$ est telle que $z = -z' - 1$ soit $\dfrac{z + z'}{2} = -\dfrac{1}{2}$

Donc s est la symétrie de centre I $(-½)$.

La réponse C est fausse.

On a vu que f est surjective, et que tout point $Q(Z)$ $(Z \neq -¼)$ a deux antécédents par f, symétriques par rapport à I $(-½)$.

Or, G est une partie de P telle que, si $M \neq I$: $M \in \mathrm{G} \Leftrightarrow s(M) \notin \mathrm{G}$.

Donc **f induit une bijection de G dans P.**

La réponse D est bonne.

• Question 4 : réponse D

$$\mathrm{D}(I,r) = \left\{ M(z) \in \mathrm{P} \ / \ \left| z + \frac{1}{2} \right| < r \right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{D}(J,r) = \left\{ M(z) \in \mathrm{P} \ / \ \left| z + \frac{1}{4} \right| < r \right\}$$

$$f^{-1}\left[\mathrm{D}(J,r)\right] = \left\{ M(z) \in \mathrm{P} \ / \ f(M) \in \mathrm{D}(J,r) \right\}$$

$$M(z) \in f^{-1}\left[\mathrm{D}(J,r)\right] \Leftrightarrow \left| z^2 + z + \frac{1}{4} \right| < r \Leftrightarrow \left| z + \frac{1}{2} \right|^2 < r$$

$$M(z) \in f^{-1}\left[\mathrm{D}(J,r)\right] \Leftrightarrow \left| z + \frac{1}{2} \right| < \sqrt{r} \Leftrightarrow M \in \mathrm{D}\left(I, \sqrt{r}\right)$$

Donc $f^{-1}\left[\mathrm{D}(J,r)\right] = \mathrm{D}\left(I,\sqrt{r}\right)$.

Les réponses A et B sont fausses.

$$M(z) \in \Delta \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R},\ z = x(1+i)$$
$$M'(z') \in f(\Delta) \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R},\ z' = x^2(1+i)^2 + x(1+i)$$
$$\Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R},\ z' = x + \left(2x^2 + x\right)i$$

Notons (x', y') les coordonnées de M' : $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x^2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \quad y' = 2x'^2 + x'$

Donc $f(\Delta)$ est la parabole d'équation cartésienne $y = 2x^2 + x$.

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

→ QCM 2 Dénombrement

• Question 1 : réponses A et C

$n = 3 \quad : \quad A_3 = \{1,\ 2,\ 3\}$. Dénombrons les 3-combinaisons :

- $(\{i\},\ \{j\},\ \{k\})$: il y a $3! = 6$ possibilités ;
- $(\{i\},\ \{j,\ k\})$: ce qui revient à choisir $\{i\}$: il y a 3 possibilités ;
- $(\{i,\ j\},\ \{k\})$: ce qui revient à choisir $\{k\}$: il y a 3 possibilités ;
- $(\{1,\ 2,\ 3\})$: 1 seule possibilité.

On obtient au total : $\quad a_3 = 6 + 3 + 3 + 1 = 13.$

La réponse A est bonne et la réponse B est fausse.

Si les parties sont toutes des singletons, choisir une n-combinaison revient à choisir l'ordre des boutons poussés. Il y a $n!$ telles n-combinaisons.

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

• Question 2 : réponses B et D

• Pour P_1 fixé de cardinal k $(1 \leq k < n)$, il reste à choisir $(P_2, \ldots, Pj)$ dans $A_n - P_1$, ce qui correspond à une $(n - k)$ -combinaison de $A_n - P_1$.
Pour P_1 fixé de cardinal k $(k < n)$, le nombre de n-combinaisons est donc a_{n-k}.

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

• Pour $1 \leq k \leq n$, notons C_k l'ensemble des n-combinaisons $(P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_j)$ telles que $\text{Card } P_1 = k$.
Les $(C_k)_{1 \leq k \leq n}$ forment une partition de l'ensemble des n-combinaisons de A_n.

$$\text{Donc :} \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Card } C_k.$$

Soit $\left(P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_j\right) \in C_k$:

- Pour $1 \leq k \leq n-1$: il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles de P_1 de cardinal k, et pour P_1 fixé il y a a_{n-k} n-combinaisons, donc : Card $C_k = \binom{n}{k}\ a_{n-k}$.
- Pour $k = n$: $C_n = (A_n)$ donc Card $C_n = 1$.

$$\text{Finalement : } \quad a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}\ a_{n-k}\ .$$

La réponse C est fausse.

• Posons : $\begin{cases} p = n-k \\ 1 \leq p \leq n-1 \end{cases}$ alors a_n s'écrit: $a_n = 1 + \sum\limits_{p=1}^{n-1} \binom{n}{n-p}\ a_p$

Or : $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ donc $a_n = 1 + \sum\limits_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p}\ a_p$

La réponse D est bonne.

→ QCM 3 Groupes et morphismes

• Question 1 : réponses A et D

$x = x' = 0$ dans (1) donne : $f(0) = 2f(0)$ soit $f(0) = 0$.

La réponse A est bonne et la réponse B est fausse.

$f\left(1+x\right) = f(1)\, e^{x} + f(x)\, e^{-1}$ et $f\left(x+1\right) = f(x)\, e + f(1)\, e^{-x}$

$$1 + x = x + 1 \quad \text{donc} \quad f(1+x) = f(x+1) \quad (2)$$

$$(2) \iff f(1)\, e^{x} + f(x)\, e^{-1} = f(x)\, e + f(1)\, e^{-x}$$

$$\iff f(x)\left(e - e^{-1}\right) = f(1)\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$(2) \iff f(x)\,\mathrm{sh}\, 1 = f(1)\,\mathrm{sh}\, x \quad \text{or} \quad \mathrm{sh}\, 1 \neq 0, \text{ donc :}$$

$$(2) \iff f(x) = \frac{f(1)}{\mathrm{sh}\, 1}\,\mathrm{sh}\, x \quad \text{or} \quad \mathrm{sh}\, 1 \neq 1 \quad \text{donc} \quad f(x) \neq f(1)\,\mathrm{sh}\, x.$$

La réponse C est fausse.

$$f_\lambda(x+x') = \lambda\ sh(x+x') = \frac{\lambda}{2}\left[\ e^{x+x'} - e^{-(x+x')}\right]$$

$$f_\lambda(x)\ e^{x'} + f_\lambda(x')\ e^{-x} = \frac{\lambda}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) e^{x'} + \frac{\lambda}{2}\left(e^{x'} - e^{-x'}\right) e^{-x}$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left[\ e^{x+x'} - e^{-(x+x')}\right]$$

$$f_\lambda(x+x') = f_\lambda(x)\ e^{x'} + f_\lambda(x')\ e^{-x}$$ **(1) est vérifiée**

La réponse D est bonne.

Si f est solution de (1) : $f(x) = \dfrac{f(1)}{\text{sh}\,1}\,\text{sh}\,x = \lambda\,\text{sh}\,x$ avec $\lambda = \dfrac{f(1)}{\text{sh}\,1}$.
Réciproquement, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, f_λ est solution de (1).
Donc, les solutions de (1) sont les fonctions $f_\lambda : x \mapsto \lambda\,\text{sh}\,x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Question 2 : réponses B et C

$$\forall\ (x,\ y),\ (x',\ y') \in \mathbb{R}^2,\quad \left(x+x',\ y\,e^{x'} + y'\,e^{-x}\right) \in \mathbb{R}^2$$

Donc * est une loi de composition interne dans $\mathbb{R}^2$.

NON

Il semble que la loi * ne soit pas commutative. Vérifions-le à l'aide d'un contre-exemple :

$(1,\ 0) * (2,\ 1) = \left(3,\ e^{-1}\right)$ et $(2,\ 1) * (1,\ 0) = (3,\ e)$

$e^{-1} \neq e$ donc $(1,\ 0) * (2,\ 1) \neq (2,\ 1) * (1,\ 0)$ et la loi * **n'est pas commutative**.

La réponse A est fausse.

• Étudions l'associativité de la loi * :

$\forall\ (x,\ y),\ (x',\ y'),\ (x'',\ y'') \in \mathbb{R}^2$:

$$-\ (x,\ y) * \left[(x',\ y') * (x'',\ y'')\right] = (x,\ y) * \left(x'+x'',\ y'\,e^{x''} + y''\,e^{-x'}\right)$$

$$= \left(x + (x'+x''),\ y\,e^{x'+x''} + \left(y'\,e^{x''} + y''\,e^{-x'}\right) e^{-x}\right)$$

$$= \left(x+x'+x'',\ y\,e^{x'+x''} + y'\,e^{x''-x} + y''\,e^{-(x+x')}\right)$$

$$-\ \left[(x,\ y) * (x',\ y')\right] * (x'',\ y'') = \left(x+x',\ y\,e^{x'} + y'\,e^{-x}\right) * (x'',\ y'')$$

$$= \left((x+x') + x'',\ \left(y\,e^{x'} + y'\,e^{-x}\right) e^{x''} + y''\,e^{-(x+x')}\right)$$

$$= \left(x+x'+x'',\ y\,e^{x'+x''} + y'\,e^{x''-x} + y''\,e^{-(x+x')}\right)$$

Donc $(x,\ y) * \left[(x',\ y') * (x'',\ y'')\right] = \left[(x,\ y) * (x',\ y')\right] * (x'',\ y'')$, et la loi * est **associative** dans $\mathbb{R}^2$.

- $\forall\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$: $(x,\ y) * (0,\ 0) = (x,\ y)$ et $(0,\ 0) * (x,\ y) = (x,\ y)$ donc (0,0) est l'**élément neutre** pour la loi * dans $\mathbb{R}^2$.
- Cherchons si $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ admet un symétrique $(x',\ y')$ pour la loi * :

$$\begin{cases} (x,\ y) * (x',\ y') = (0,\ 0) & (1) \\ (x',\ y') * (x,\ y) = (0,\ 0) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \iff \begin{cases} x + x' = 0 \\ y\, e^{x'} + y'\, e^{-x} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = -x \\ (y + y')\underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

$$(2)\ :\ (-x,\ -y) * (x,\ y) = \left(-x + x,\ -y\, e^{x} + y\, e^{x}\right) = (0,\ 0)$$

Donc tout $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ **admet un symétrique** $(-x,\ -y)$ pour la loi *.

Donc $\left(\mathbb{R}^2,\ *\right)$ est un **groupe non abélien**.

$\mathbb{R} \times \{0\} = \left\{\ (x,\ 0) / x \in \mathbb{R}\ \right\}$ est-il un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}^2,\ *\right)$?

- $(0,\ 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ donc $\mathbb{R} \times \{0\} \neq \varnothing$
- $(x,\ 0) * (x',\ 0) = (x + x',\ 0)$ donc $\mathbb{R} \times \{0\}$ est **stable** pour la loi *, et la loi * est **commutative**.
- $(-x,\ 0)$, symétrique de $(x,\ 0)$, appartient à $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Donc $\mathbb{R} \times \{0\}$ est un sous-groupe commutatif de $\left(\mathbb{R}^2,\ *\right)$.

La réponse B est bonne.

$\forall\ (x,\ y),\ (x',\ y') \in \mathbb{R}_+^2$:

$$x + x' \geq 0 \quad \text{et} \quad y\, e^{x'} + y'\, e^{-x} \geq 0 \quad \text{donc} \quad (x,\ y) * (x',\ y') \in \mathbb{R}_+^2$$

Donc $\mathbb{R}_+^2$ est stable pour la loi *. **La réponse C est bonne.**

NON

Si $(x,\ y) \in \mathbb{R}_+^2$, son symétrique $(-x,\ -y) \notin \mathbb{R}_+^2$ si $x \neq 0$ par exemple.

Donc $\mathbb{R}_+^2$ **n'est pas un sous-groupe** de $\left(\mathbb{R}^2,\ *\right)$.

La réponse D est fausse.

Question 3 : réponses B et D

- Γ est stable pour la loi $*$ $\Leftrightarrow$ $\forall\ (x,\ x') \in \mathbb{R}^2,\ \ (x,\ f(x)) * (x',\ f(x')) \in \Gamma$

$$\Leftrightarrow\ \forall\ (x,\ x') \in \mathbb{R}^2,\ \ \left(x + x',\ f(x)\, e^{x'} + f(x')\, e^{-x}\right) \in \Gamma$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\ (x,\ x') \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x + x') = f(x)\, e^{x'} + f(x')\, e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow\ f \text{ est solution de } (1)$$

La réponse A est fausse.

- D'après la question 1, $f = \text{sh}$ est solution de (1), donc Γ est stable pour la loi $*$.

$(\mathbb{R}, +)$ et $\left(\mathbb{R}^2,\ *\right)$ sont des groupes.

Cherchons si φ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\left(\mathbb{R}^2,\ *\right)$.

Soit $(x,\ x') \in \mathbb{R}^2$:

- $\varphi(x + x') = \left(x + x',\ \text{sh}(x + x')\right)$
- $\varphi(x) * \varphi(x') = (x,\ \text{sh}\, x) * (x',\ \text{sh}\, x') = \left(x + x',\ (\text{sh}\, x)e^{x'} + (\text{sh}\, x')e^{-x}\right)$

$\varphi(x) * \varphi(x') = \left(x + x',\ \text{sh}(x + x')\right)$ car $f = \text{sh}$ est solution de (1)

donc : $\varphi(x + x') = \varphi(x) * \varphi(x')$:

φ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\left(\mathbb{R}^2,\ *\right)$**.**

Or $\Gamma = \text{Im}\ \varphi$, donc **$\Gamma$ est un sous-groupe** de $\left(\mathbb{R}^2,\ *\right)$.

La réponse B est bonne.

φ injectif $\Leftrightarrow$ $\text{Ker}\ \varphi = \{0\}$

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$x \in \text{Ker}\ \varphi \ \Leftrightarrow\ \varphi(x) = (0,\ 0) \ \Leftrightarrow\ (x,\ \text{sh}\, x) = (0,\ 0)$$

$$x \in \text{Ker}\ \varphi \ \Leftrightarrow\ x = 0$$

Donc $\text{Ker}\ \varphi = \{0\}$ et φ est **injectif**.

La réponse C est fausse.

φ est donc un morphisme de groupe **injectif** de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\left(\mathbb{R}^2,\ *\right)$.
$\text{Im}\ \varphi = \Gamma$, donc φ n'est pas surjectif.
Mais φ induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans Γ.
Donc φ induit un **isomorphisme** de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\Gamma,\ *)$.

La réponse D est bonne.

→ QCM 4 Anneaux - Corps – Arithmétique

• Question 1 : réponse B

• Soit $u,\ v,\ u',\ v' \in \mathbb{Q}$, supposons que : $\varphi(u,\ v) = \varphi(u',\ v')$

$$\varphi(u,\ v) = \varphi(u',\ v') \quad \Leftrightarrow \quad u + v\sqrt{2} = u' + v'\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad u - u' = (v' - v)\sqrt{2}$$

Si $v' \neq v$ alors $\sqrt{2} = \dfrac{u-u'}{v'-v}$ donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible.

Donc $v' = v$ et par suite $u' = u$.

Finalement : $\varphi(u,\ v) = \varphi(u',\ v') \quad \Rightarrow \quad (u,\ v) = (u',\ v')$ donc **φ est injective**.

La réponse A est fausse.

En conclusion, l'écriture de $x \in$ F (ou $x \in$ E) sous la forme $x = u + v\sqrt{2}$ (ou $x = m + n\sqrt{2}$) est unique.

• E est-il un sous-anneau de $\mathbb{R}$? $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps.

- 1, **élément unité** de $\mathbb{R}$, appartient à E car : $1 = 1 + 0 \times \sqrt{2}$.

- Soient $x,\ x' \in$ E, $x = m + n\sqrt{2}$ et $x' = m' + n'\sqrt{2}$ avec $m,\ n,\ m',\ n' \in \mathbb{Z}$:

$$x - x' = (m - m') + (n - n')\sqrt{2}$$

$$\text{donc} \quad (x - x') \in \mathrm{E} \quad \text{car} \quad (m - m',\ n - n') \in \mathbb{Z}^2.$$

$$x\,x' = \left(m + n\sqrt{2}\right)\left(m' + n'\sqrt{2}\right) = (m\,m' + 2\,n\,n') + (m\,n' + m'n)\sqrt{2}$$

$$\text{donc} \quad x\,x' \in \mathrm{E} \quad \text{car} \quad (m\,m' + 2\,n\,n',\ m\,n' + m'n) \in \mathbb{Z}^2$$

Donc **E est un sous-anneau** de $\mathbb{R}$. **La réponse B est bonne.**

• $\sqrt{2}$ a pour inverse $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$. A-t-on $\dfrac{1}{2}\sqrt{2} \in$ E ?

On cherche s'il existe $m,\ n \in \mathbb{Z}$ tel que : $\dfrac{1}{2}\sqrt{2} = m + n\sqrt{2}$.

D'après l'assertion A (unicité de l'écriture) : $(m,\ n) = \left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Or $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, donc $\sqrt{2}$ **n'est pas inversible dans E.**

$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)} = \sqrt{2} - 1 \in$ E, donc $\left(1+\sqrt{2}\right)$ **est inversible dans E.**

La réponse C est fausse.

• F est-il un sous-corps de $\mathbb{R}$?

En remplaçant les entiers m et n par les rationnels u et v dans la démonstration de E sous-anneau de $\mathbb{R}$, on obtient que F est aussi un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

$$\text{Soit} \quad x = u + v\sqrt{2} \in \mathrm{F}^* \quad \text{avec} \quad (u,v) \in \mathbb{Q}^2 - \{0,\ 0\}.$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{u+v\sqrt{2}} = \frac{u-v\sqrt{2}}{u^2-2v^2} = \underbrace{\frac{u}{u^2-2v^2}}_{u'} + \underbrace{\frac{-v}{u^2-2v^2}}_{v'}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad (u',v') \in \mathbb{Q}^2$$

soit $\dfrac{1}{x} \in \mathrm{F}$.

Donc F est un sous-corps de $\mathbb{R}$. **La réponse D est fausse.**

• Question 2 : réponses B et D

• $N(x) = m^2 - 2n^2$

$$\text{donc :} \quad N(x) = 0 \iff x\tilde{x} = 0 \iff m^2 - 2n^2 = 0 \iff m^2 = 2n^2.$$

Si $n \neq 0$, $2 = \dfrac{m^2}{n^2}$ donc $\sqrt{2} = \left|\dfrac{m}{n}\right| \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible, donc $n = 0$ et par suite $m = 0$.

Finalement, $N(x) = 0$ a pour unique solution $x = 0$, élément de E.

La réponse A est fausse.

• Si $(m,\ n)$ est tel que $m^2 - 2n^2 = 1$ ou $m^2 - 2n^2 = -1$:

$\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{m+n\sqrt{2}} = \dfrac{m-n\sqrt{2}}{m^2-2n^2} = \dfrac{\tilde{x}}{\mathrm{N(x)}} = \pm\,\tilde{x}$ donc $\dfrac{1}{x} \in E$ et ***x*** **est inversible dans E.** **La réponse B est bonne.**

NON $\forall\, x \in E,\ N(x) = m^2 - 2n^2$ donc $N(x) \in \mathbb{Z}$ et $N : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & N(x) \end{array}$

$(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe, donc N n'est pas un morphisme de groupe.

La réponse C est fausse.

En revanche : $x\,x' = \left(m + n\sqrt{2}\right)\left(m' + n'\sqrt{2}\right) = (m\,m' + 2\,n\,n') + (m\,n' + m'n)\sqrt{2}$

donc : $\widetilde{x\,x'} = (m\,m' + 2\,n\,n') - (m\,n' + m'n)\sqrt{2} = \tilde{x}\,\tilde{x}'$

et $N(x\,x') = x\,x'\widetilde{x\,x'} = x\,x'\tilde{x}\,\tilde{x}' = N(x)\,N(x')$

N **est donc un morphisme de (E, ×) dans ($\mathbb{Z}$, ×).**

• Notons H l'ensemble des éléments inversibles de E.

D'après l'assertion B, $G \subset H$.

A-t-on $H \subset G$? Soit x inversible dans E, alors, N étant un morphisme, $N(x)$ est inversible dans $(\mathbb{Z}, \times)$, donc $N(x) = \pm 1$ et $x \in G$, soit $H \subset G$ et finalement $H = G$. **La réponse D est bonne.**

• Question 3 : réponses A et D

• $$\left(1+\sqrt{2}\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \sqrt{2}^k = \underbrace{\sum_{0 \le 2q \le p} \binom{p}{2q} 2^q}_{a_p} + \underbrace{\left[\sum_{0 \le 2q+1 \le p} \binom{p}{2q+1} 2^q\right]}_{b_p} \sqrt{2}$$

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(-\sqrt{2}\right)^k = a_p - b_p\sqrt{2}$$ **La réponse A est bonne.**

• (a_p, b_p) est solution de (1) $\Leftrightarrow \quad a_p^{\,2} - 2\,b_p^{\,2} = 1$

Or : $a_p^{\,2} - 2\,b_p^{\,2} = \left(a_p + b_p\sqrt{2}\right)\left(a_p - b_p\sqrt{2}\right) = \left(1+\sqrt{2}\right)^p\left(1-\sqrt{2}\right)^p = (1-2)^p = (-1)^p$

Donc (a_p, b_p) est solution de (1) si p est **pair**, et de (2) si p est **impair**.

La réponse B est fausse.

• Soit : $e_p = \left(1+\sqrt{2}\right)^p + \left(1-\sqrt{2}\right)^p = 2\,a_p$ donc $e_p \in \mathbb{Z}$.

A-t-on $e_p \le u_p < e_p + 1$, soit $0 \le u_p - e_p < 1$?

$u_p - e_p = -\left(1-\sqrt{2}\right)^p = (-1)^{p+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^p$ or $0 < \left(\sqrt{2}-1\right)^p < 1$

donc e_p est la partie entière de u_p si $(-1)^{p+1} = 1$, c'est-à-dire si p est **impair**.

La réponse C est fausse.

• On a $a_p^{\,2} - 2\,b_p^{\,2} = \pm 1$ donc $a_p\left(\varepsilon\,a_p\right) - b_p\left(2\,\varepsilon\,b_p\right) = 1$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Donc, d'après le théorème de Bézout, a_p et b_p sont premiers entre eux.
La réponse D est bonne.

• Question 4 : réponses A et D

• $$z = \underbrace{\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}}_{a} + \underbrace{\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}}_{b} = a+b$$

$$z^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3\,ab\,(a+b) = 40 + 3\,ab\,(a+b)$$

$$ab = \sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\left(20-14\sqrt{2}\right)} = \sqrt[3]{20^2 - 2 \times 14^2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

d'où : $z^3 = 40 + 6z$ soit $z^3 - 6z - 40 = 0.$

Donc z est solution de (3). **La réponse A est bonne.**

• Soit f : $x \mapsto x^3 - 6x - 40$ Alors $f'(x) = 3\left(x^2 - 2\right) = 3\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$

D'où le tableau de variation ci-après, avec :

$$M = f\left(-\sqrt{2}\right) < 0 \quad \text{et} \quad m = f\left(\sqrt{2}\right) < 0.$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists!\ \alpha > \sqrt{2},\ \ f(\alpha) = 0.$$

Donc (3) admet une unique racine réelle $\alpha > 0$. **La réponse B est fausse.**

• $x = \dfrac{p}{q}$ est solution de (3) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{p}{q}\right)^3 - 6\,\dfrac{p}{q} - 40 = 0 \Leftrightarrow p^3 - 6pq^2 - 40q^3 = 0$

donc $p\left(p^2 - 6q^2\right) = 40q^3$ et $p^3 = 2q^2(3p + 20q)$

$$\left.\begin{array}{l} p \text{ divise } 40q^3 \\ p \text{ premier avec } q \text{, donc avec } q^3 \end{array}\right\}$$

donc, d'après le théorème de Gauss, ***p* divise 40**.

$$\left.\begin{array}{l} q \text{ divise } p^3 \\ q \text{ premier avec } p \end{array}\right\} \text{ donc } q = 1.$$

La réponse C est fausse.

• (3) devient $p\left(p^2 - 6\right) = 40$ donc $1 \le p^2 - 6 \le 40$ soit $7 \le p^2 \le 46$.

Seule la valeur $p = 4$ convient.

Donc $x = 4$ est l'unique solution de (3).

Donc $z = 4$ et $z \in \mathbb{Q}$. **La réponse D est bonne.**

chapitre 6

Suites réelles et complexes

QCM 1 Suite récurrente

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

avec : $f : x \mapsto \dfrac{1}{3}\left|x^2 - 4\right|$

• Question 1

De manière générale, soit l'application $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_0 \in \mathrm{I}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \varphi(v_n)$.

A Si I n'est pas stable par φ, il existe des valeurs de v_0 telles que v_n n'existe pas à partir d'un certain rang.

On suppose dans la suite de la question que I *est stable par* φ.

B Si φ est décroissante sur I, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

C Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, $\ell \in \mathrm{I}$.

D Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, $\varphi(\ell) = \ell$ dès que φ est continue en ℓ.

• Question 2

Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x) - x$. On a donc :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ g(u_n) = u_{n+1} - u_n.$$

A Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, $\ell = 1$ ou $\ell = 4$.

B Sur $[0,\ 1[$, $g(x) \geq 0$, donc si $u_0 \in [0,\ 1[$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

C Sur $[4,\ +\infty[$, $g(x) \geq 0$, donc si $u_0 \in [4,\ +\infty[$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

D Si $u_0 \in [4,\ +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Question 3

On suppose dans cette question que $u_0 \in [\,0,\ 2\,]$.

A $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n \in \left[0,\ \dfrac{4}{3}\right].$

B La suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

C $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ |u_{n+1}-1| \ \leq\ \dfrac{7}{9}\ |u_n - 1|\,.$

D $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - 1| \ \leq\ \left(\dfrac{7}{9}\right)^n |u_0 - 1|$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Question 4

On suppose dans cette question que $u_0 \in \,]2,\ 4[\,$.

A $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

B $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in \,]2,\ 4[\,.$

C $]2,\ 4[$ ne contient aucun point fixe de f, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

D Il existe un entier N tel que $u_N \in [\,0,\ 2\,]$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

QCM 2 Relation de comparaison

Question 1

A Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.
Si (u_n) admet une limite, $u_n \sim u_{n+1}$.

B $n^{\ln n} = o\big((\ln n)^n\big).$

C Soit $u_n = \left[\ln\left(e + \dfrac{1}{n}\right)\right]^n.\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\ln\left(e+\dfrac{1}{n}\right)\right] = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.$

D Soit $u_n = (\operatorname{ch} n)^{1/n}.\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1\,.$

Question 2

Soient : $u_n = n\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$ et $v_n = \dfrac{1}{n}\ln(\text{ch } n - 1)$.

A $\sqrt[n]{n} \sim \sqrt[n]{n+1} \sim 1$ donc $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim 0$.

B $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

C $\text{ch } n - 1 \sim \dfrac{n^2}{2}$ donc $v_n \sim \dfrac{n}{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

D $\ln(\text{ch } n - 1) \sim n$ et $v_n - 1 \sim \dfrac{\ln 2}{n}$.

Question 3 (d'après EPL 2007)

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n}{1+n^2}\left[(-1)^n e^{\pi} - 1\right]$.

A $\forall\ n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq \dfrac{n}{1+n^2}$

B $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être convergente car elle n'est pas de signe constant.

C $\forall\ n \geq 2,\ |u_n| \leq \dfrac{n\left(e^{\pi}+1\right)}{\left|n^2-1\right|}$

D $u_n \sim \dfrac{e^{\pi}-1}{n}$

Question 4 (d'après EPL 2004)

Soit A un nombre réel non nul, et $\alpha \in \left]1,\ +\infty\right[$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0.

On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \theta_n = u_n^{\,1-\alpha} - u_{n+1}\, u_n^{\,-\alpha}$ et $x_n = u_{n+1}^{\,1-\alpha} - u_n^{\,1-\alpha}$.

On suppose que $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers A.

A $A < 0$.

B $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \sim -\dfrac{A}{u_n^{-\alpha}}$

C $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente car $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n = u_n^{1-\alpha}\left[\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{1-\alpha} - 1\right]$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{1-\alpha} = +\infty$.

D $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{1-\alpha} - 1 \sim (1-\alpha)\left[\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right]$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\alpha - 1)A$.

QCM 3 Suites produits

Question 1

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels non nuls. On lui associe la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \prod_{p=1}^{n} u_p = u_1\, u_2\, u_3\, \dots\, u_n. \quad \text{On a donc : } \frac{p_{n+1}}{p_n} = u_{n+1}.$$

On dit que le produit $(p_n)_{n\geq 1}$ converge si et seulement si la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite finie **non nulle**. Sinon, on dit que $(p_n)_{n\geq 1}$ diverge.

A Pour que le produit $(p_n)_{n\geq 1}$ converge, il faut que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1.

Soit : $p_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{p}\right)$. Alors :

B $p_n = n$

C $p_n = n + 1$

D $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1 $\Rightarrow (p_n)_{n\geq 1}$ converge.

Question 2

Soit $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$v_1 = a \quad (a \in \,]0,\ 1[) \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = f(v_n).$$

A $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ v_n \in]0,\ 1[$.

B $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to +\infty} v_n = +\infty$.

C f admet un unique point invariant $x = 1$, or $1 \notin]0,\ 1[$,
donc $(v_n)_{n\geq 1}$ diverge.

D On pose $a = \cos t \quad (t \in]0,\ \pi/2[)$. Alors: $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ v_n = \cos\left(\dfrac{t}{2^{n-1}}\right)$.

• Question 3 (d'après EPL 2008)

Pour $t \in \left]0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, on pose :

$$p_n = \prod_{p=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^{p-1}}\right) \quad \text{et} \quad q_n = p_n \sin\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right).$$

A $(p_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par 1, donc $(p_n)_{n\geq 1}$ converge.

B $(q_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

C $(p_n)_{n\geq 1}$ et $(q_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

D $(p_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1.

• Question 4

Soit $u_n = 1 + a^{2^n} \quad (a \in]0,\ 1[)$. On pose :

$$p_n = \prod_{p=1}^{n} u_p \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{p=1}^{n} a^{2^p}.$$

A S_n est la somme des termes d'une suite géométrique.

B $\forall\, x \in]0,\ 1[,\ \ \ln(1+x) \leq x$ donc $\ln(p_n) \leq S_n \leq \dfrac{1}{1-a}$.

C $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n > 1$ et $(p_n)_{n\geq 1}$ est croissante, donc $(p_n)_{n\geq 1}$ diverge.

D Le produit $(p_n)_{n\geq 1}$ converge.

QCM 4 Bornes inférieure et supérieure

(d'après EPL 2004)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels. On définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\quad y_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}x_k.$$

On désigne par $\inf\limits_{p\geq n}(x_p)$ (respectivement $\sup\limits_{p\geq n}(x_p)$) la borne inférieure (respectivement supérieure) de l'ensemble $\{x_p\ /\ p\geq n\}$.

Question 1

La suite $\left(\inf\limits_{p\geq n}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- **A** convergente car décroissante et minorée.
- **B** croissante et majorée, mais divergente car elle n'est pas de signe constant.
- **C** croissante, minorée et convergente.
- **D** convergente car toute suite bornée converge.

Question 2

- **A** $\forall\ n\in\mathbb{N},\ \sup\limits_{p\geq n}(-x_p)=\inf\limits_{p\geq n}(x_p)$.
- **B** Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang, $\left(\inf\limits_{p\geq n}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

La suite $\left(\inf\limits_{p\geq n}(y_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- **C** décroissante et minorée, car elle a les mêmes propriétés que $\left(\inf\limits_{p\geq n}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **D** croissante et majorée, donc convergente.

Question 3

On considère dans cette question le cas particulier où la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\forall\ x\in\mathbb{N},\ \ x_n=(-1)^n$

On a alors :

A $y_n=0$ si n est impair, et $y_n=\dfrac{1}{n+1}$ si n est pair.

B $y_n=-\dfrac{1}{n+1}$ si n est impair, et $y_n=0$ si n est pair.

C $\forall\ n\in\mathbb{N},\ \ \sup\limits_{p\geq n}\left(y_p\right)=\dfrac{1}{n+1}$

D $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{p\geq n}\left(x_p\right)\right)<\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{p\geq n}\left(y_p\right)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{p\geq n}\left(y_p\right)\right)<\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{p\geq n}\left(x_p\right)\right)$

Question 4

On peut avoir, pour certaines suites bornées $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

A $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente et $\left(\inf\limits_{p\geq n}\left(x_p\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente.

B $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente et $\left(\inf\limits_{p\geq n}\left(x_p\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

Pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a l'implication :

C $\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ convergente}\right]$

$$\Rightarrow\left[\left(\inf_{p\geq n}\left(x_p\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\text{ et }\left(\sup_{p\geq n}\left(x_p\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\text{ convergentes et ont la même limite}\right]$$

D $\left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ convergente}\right]$

$$\Rightarrow\left[\left(\inf_{p\geq n}\left(x_p\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\text{ et }\left(\sup_{p\geq n}\left(x_p\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\text{ convergentes et ont la même limite}\right]$$

corrigés

→ QCM 1 Suite récurrente

• Question 1 : réponses A et D

• I est stable par $\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathrm{I},\ \ \varphi(x) \in \mathrm{I}$.

Si I est stable par φ et si $v_0 \in$ I, on montre par récurrence simple que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n \ \text{ existe et } \ v_n \in \mathrm{I}.$$

I n'est pas stable par $\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x \in \mathrm{I},\ \ \varphi(x) \notin \mathrm{I}$. Donc, pour $v_0 = x$, $v_1 = \varphi(v_0)$ et $v_1 \notin$ I, donc $\varphi(v_1)$ n'existe pas, donc v_2 n'existe pas.

La réponse A est bonne.

• $v_{n+2} - v_{n+1} = \varphi(v_{n+1}) - \varphi(v_n)$. Donc, si φ est décroissante sur I, $v_{n+2} - v_{n+1}$ est de signe contraire à $v_{n+1} - v_n$, donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

La réponse B est fausse.

• Si I est stable par φ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$, ℓ peut ne pas appartenir à I. Par exemple :

pour $\varphi :\ x \ \mapsto\ \dfrac{1}{2}x$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ est stable par φ, et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $v_0 = 1$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. Donc : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{2^n} > 0 \quad$ et $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ n'appartient pas à I.

La réponse C est fausse.

• Si $\begin{cases} \varphi \text{ est continue en } \ell \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell \end{cases}$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(v_n) = \varphi(\ell) \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_{n+1} = \ell \end{cases}$

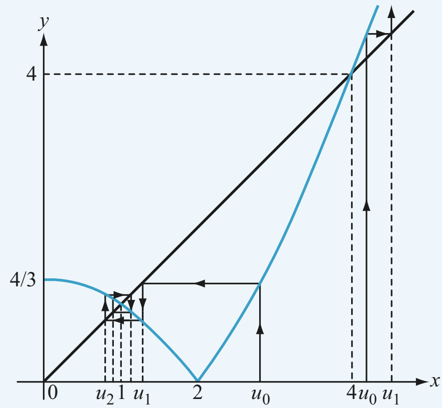
Or $\quad v_{n+1} = \varphi(v_n) \quad$ donc $\quad \varphi(\ell) = \ell$. **La réponse D est bonne.**

• Question 2 : réponses A et C

• Pour étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on commence par représenter le graphe de f sur $\mathbb{R}_+$, puis on place pour quelques valeurs de u_0 les premiers termes de la suite.

$$\begin{cases} \text{si } x \in [0,\ 2[\ : \ f(x) = \dfrac{1}{3}\left(4 - x^2\right) \\ \text{si } x \in [2,\ +\infty[\ : \ f(x) = \dfrac{1}{3}\left(x^2 - 4\right) \end{cases}$$

d'où le graphe ci-contre.



Les points fixes de f sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f et de la première bissectrice :

$$f(x) = x \iff \frac{1}{3}\left|x^2 - 4\right| = x \iff \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ \dfrac{1}{3}\left(x^2 - 4\right) = x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ \dfrac{1}{3}\left(x^2 - 4\right) = -x \end{cases}$$

$$f(x) = x \iff \begin{cases} x \geq 2 \\ x = -1 \ \text{ ou } \ x = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x < 2 \\ x = 1 \ \ ou \ \ x = -4 \end{cases}$$

donc $\quad x = 1$ ou $x = 4$.

<u>f admet donc deux points fixes : 1 et 4</u>.

f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc, d'après l'assertion D de la question 1, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, $f(\ell) = \ell$. Par conséquent : $\quad \ell = 1$ ou $\ell = 4$.

La réponse A est bonne.

x	0		1	4/3	2		4		$+\infty$
$f(x)$	4/3		1		0		4		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−		−	0	+	

NON Si $u_0 \in [0,\ 1[$: $\quad f([0,\ 1[) =]1,\ 4/3]$, donc $[0,\ 1[$ n'est pas stable par f, mais $f(]1,\ 4/3]) \subset [0,\ 1[$, donc $u_0 < u_1$ et $u_1 > u_2$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

La réponse B est fausse.

• Si $u_0 \in [4, +\infty[$: $f([4, +\infty[) = [4, +\infty[$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in [4, +\infty[$.

Or $g(x) \geq 0$ sur $[4, +\infty[$, donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

La réponse C est bonne.

NON Si $u_0 = 4$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante qui converge vers 4.

La réponse D est fausse.

• Si $u_0 > 4$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite ℓ finie, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0 > 4$ donc $\ell \geq u_0 > 4$, ce qui est en contradiction avec l'assertion A. Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

• Question 3 : réponses A et C

• $f([0, 2]) = \left[0, \frac{4}{3}\right]$, donc $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ est stable par f : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

La réponse A est bonne.

NON Si $u_0 = 2$, $u_1 = 0$ et $u_2 = \frac{4}{3}$, donc $u_2 < u_0$. **La réponse B est fausse.**

• $|u_{n+1} - 1| = |f(u_n) - 1| = \left| \frac{1}{3} \left| u_n^2 - 4 \right| - 1 \right|$ or $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$

donc : $|u_{n+1} - 1| = \left| \frac{1}{3}(4 - u_n^2) - 1 \right| = \frac{1}{3}\left|1 - u_n^2\right| = \frac{1}{3}|u_n + 1|\,|u_n - 1|$.

Or $|u_n + 1| \leq \frac{4}{3} + 1$, donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ |u_{n+1} - 1| \leq \frac{7}{9}|u_n - 1|$.

La réponse C est bonne.

NON Reprenons $u_0 = 2$, $u_1 = 0$: $|u_1 - 1| = |u_0 - 1| = 1$

donc $|u_1 - 1| > \frac{7}{9}|u_0 - 1|$. **La réponse D est fausse.**

On a en fait, par récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - 1\right| \leq \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} |u_1 - 1|$ or $\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$ converge vers 0, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

• **Question 4 : réponse D**

NON • $]2,\ 4]$ n'est pas stable par f. Pour $u_0 = 3$, $u_1 = \dfrac{5}{3}$ et $u_2 = \dfrac{11}{27}$: $u_2 \in [0,\ 1]$ donc, d'après l'assertion B de la question 2, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone. **Les réponses A et B sont fausses.**

• $f(]2,\ 4]) =]0,\ 4[$, or $]0,\ 4[$ est stable par f et contient le point fixe 1, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger. **La réponse C est fausse.**

• Raisonnons par l'absurde, et supposons que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \notin [0,\ 2]$.

$f([0,\ 4[) = [0,\ 4[$, donc $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,\ 4[$ et $u_n \notin [0,\ 2]$,
donc : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \in]2,\ 4[$.

Sur [2, 4], $g(x) \leq 0$ donc $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 2, donc converge vers une limite ℓ telle que : $2 \leq \ell \leq u_0 < 4$.

Or, il n'y a pas de point fixe dans [2, 4[, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger et l'hypothèse est absurde.
Donc $\exists\ N \in \mathbb{N},\ u_N \in [0,\ 2]$ et, d'après la question 3, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

La réponse D est bonne.

→ QCM 2 Relation de comparaison

Comparaison de deux suites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes.

• (u_n) est négligeable devant (v_n) $\Leftrightarrow$ $u_n = \varepsilon_n v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

On note : $u_n = o(v_n)$ ou $u_n << v_n$. $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 0$ (si $v_n \neq 0$).

• (u_n) est équivalente à (v_n) $\Leftrightarrow$ $u_n = v_n + o(v_n)$. On note : $u_n \sim v_n$.

$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = \alpha_n v_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 1$ (si $v_n \neq 0$).

Question 1 : réponse B

Si (u_n) admet une limite finie $\ell \neq 0$, $u_{n+1} \sim u_n \sim \ell$. Ce n'est pas forcément vrai si $\ell = 0$. Par exemple, $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ admet pour limite $\ell = 0$, et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} \neq \ell$.

La réponse A est fausse.

$$n^{\ln n} = o\left((\ln n)^n\right) \iff \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}\right) = 0 \quad (n \geq 1). \quad \text{Notons : } \quad u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$

$$\ln(u_n) = \ln\left(n^{\ln n}\right) - n\ln(\ln n) = (\ln n)^2 - n\ln(\ln n) = n\left[\frac{(\ln n)^2}{n} - \ln(\ln n)\right]$$

Or : $(\ln n)^2 = o(n)$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right) = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty$

Alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{\ln(u_n)} = 0$

La réponse B est bonne.

> **Équivalents et fonctions logarithmique et exponentielle**
>
> - Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$ et $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.
> - Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ alors $\ln(u_n) \sim u_n - 1$.
> - Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 1$ $(u_n > 0)$, et si $u_n \sim v_n$ alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
> - $u_n \sim v_n$ alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ <u>seulement si</u> $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[\ln\left(e + \frac{1}{n}\right)\right] = \ln(e) = 1$ et $\ln(u_n) = n\ln\left[\ln\left(e + \dfrac{1}{n}\right)\right]$.

$$\ln\left[\ln\left(e+\frac{1}{n}\right)\right] \sim \ln\left(e+\frac{1}{n}\right) - 1 \sim \ln\left(e+\frac{1}{n}\right) - \ln(e) \sim \ln\left(1+\frac{1}{ne}\right) \sim \frac{1}{ne}$$

Finalement : $\ln(u_n) \sim n\dfrac{1}{ne} \sim \dfrac{1}{e}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n) = \frac{1}{e}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{1/e}$.

La réponse C est fausse.

- $\ln(u_n) \sim \dfrac{1}{n}\ln(\operatorname{ch} n)$ or $\operatorname{ch} n \sim \dfrac{e^n}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{e^n}{2}\right) = +\infty\ (\neq 1)$

donc $\ln(\operatorname{ch} n) \sim \ln\left(\dfrac{e^n}{2}\right) \sim n - \underbrace{\ln 2}_{<<n} \sim n$ et $\ln(u_n) \sim \dfrac{1}{n} n \sim 1.$

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$ **La réponse D est fausse.**

Question 2 : réponse B

- $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$.

De même $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{n+1}\right) = 1$ donc $\sqrt[n]{n+1} \sim \sqrt[n]{n} \sim 1$.

On n'additionne pas les équivalents. En effet, $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim 0$ signifie que $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = 0$ à partir d'un certain rang, ce qui n'est pas le cas.

La réponse A est fausse.

$$u_n = n\left(e^{\frac{1}{n}\ln(n+1)} - e^{\frac{1}{n}\ln n}\right) = n\, e^{\frac{\ln n}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} - 1\right) = n\, e^{\frac{\ln n}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right)$$

Or $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$, donc : $\dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$ et $e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 \sim \dfrac{1}{n^2}$

Par ailleurs $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{\ln n}{n}}\right) = 1$ donc $u_n \sim n\dfrac{1}{n^2}$ soit $u_n \sim \dfrac{1}{n}$

La réponse B est bonne.

- $\operatorname{ch} n - 1 \sim \operatorname{ch} n \sim \dfrac{e^n}{2}$ car $1 << \operatorname{ch} n \to +\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{e^n}{2}\right) = +\infty\ (\neq 1)$

donc $\ln(\operatorname{ch} n - 1) \sim \ln\left(\dfrac{e^n}{2}\right) \sim n - \ln 2 \sim n$ et $v_n \sim \dfrac{1}{n} n \sim 1$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

La réponse C est fausse.

- $v_n - 1 = \dfrac{1}{n}\left[\ln(ch\, n - 1) - n\right] = \dfrac{1}{n}\left[\ln(ch\, n - 1) - \ln(e^n)\right] = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{ch\, n - 1}{e^n}\right)$

Or $\dfrac{ch\, n - 1}{e^n} \sim \dfrac{e^n}{2e^n} \sim \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\dfrac{ch\, n - 1}{e^n}\right) = -\ln 2$ et $v_n - 1 \sim -\dfrac{\ln 2}{n}$.

La réponse D est fausse.

Question 3 : réponse C

NON Pour $n = 1$: $|u_1| = \frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right) > \frac{1}{2}$ et $\frac{n}{1+n^2} = \frac{1}{2}$. La réponse A est fausse.

$\frac{(-1)^n}{n}$ change de signe et converge vers 0 . La réponse B est fausse.

- $\forall\, n \geq 2,\quad |u_n| \leq \frac{n\left(\left|(-1)^n e^{\pi}\right|+1\right)}{1+n^2} \leq \frac{n\left(e^{\pi}+1\right)}{1+n^2} \leq \frac{n\left(e^{\pi}+1\right)}{n^2-1}$

  car $\quad 0 \leq n^2-1 \leq n^2+1$

Finalement : $\forall\, n \geq 2,\quad |u_n| \leq \frac{n\left(e^{\pi}+1\right)}{\left|n^2-1\right|}$ **La réponse C est bonne.**

- $\frac{n}{1+n^2} \sim \frac{n}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ donc $u_n \sim \frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{n}$, soit $u_{2n+1} \sim -\left(\frac{e^{\pi}+1}{2n+1}\right)$ et $u_{2n} \sim \frac{e^{\pi}-1}{2n}$

La réponse D est fausse.

Question 4 : réponse D

- $\theta_n = u_n^{-\alpha}\left(u_n - u_{n+1}\right)$ donc $u_{n+1} - u_n = -\,\theta_n\, u_n^{\alpha}$.

Si $A < 0$, alors, à partir d'un certain rang, on aurait $\theta_n < 0$ soit $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait croissante. Or, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0 = \sup(u_n)$, donc on aurait $u_n \leq 0$ à partir d'un certain rang, ce qui est impossible.
Donc $A > 0$. **La réponse A est fausse.**

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = -\frac{\theta_n}{u_n^{1-\alpha}}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = A \neq 0$ donc $\theta_n \sim A$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \sim -\frac{A}{u_n^{1-\alpha}}$.

L'assertion B est bonne si : $u_n^{1-\alpha} \sim u_n^{-\alpha}$ soit $u_n \sim 1$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \neq 1$, donc u_n n'est pas équivalent à 1. **La réponse B est fausse.**

- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n = u_n^{1-\alpha}\left[\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{1-\alpha} - 1\right]$.

Or, on a établi que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \sim -\frac{A}{u_n^{1-\alpha}}$.

$1-\alpha < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{A}{u_n^{1-\alpha}}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1$.

> **Équivalent et puissance**
>
> Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ alors $u_n^{\alpha} - 1 \sim \alpha\left(u_n - 1\right)$.

Donc : $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{1-\alpha} - 1 \sim (1-\alpha)\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) \sim -\dfrac{(1-\alpha)A}{u_n^{1-\alpha}}$ et $x_n \sim (\alpha-1)A$

soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = (\alpha-1)A$

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

→ QCM 3 Suites produits

• Question 1 : réponses A et C

• Si $(p_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\ell \neq 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{p_{n+1}}{p_n}\right) = \dfrac{\ell}{\ell} = 1.$

Alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ **converge vers 1.** **La réponse A est bonne.**

• $p_n = \prod\limits_{p=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{p}\right) = \prod\limits_{p=1}^{n}\left(\dfrac{p+1}{p}\right) = \dfrac{2\times 3\times 4\times \ldots \times n\times(n+1)}{1\times 2\times 3\times \ldots \times(n-1)\times n} = n+1$

La réponse B est fausse et la réponse C est bonne.

• $u_n = 1+\dfrac{1}{n}$ converge vers 1, et $p_n = n+1$ diverge. **La réponse D est fausse.**

• Question 2 : réponses A et D

• f est continue sur $[-1, +\infty[$, dérivable sur $]-1, +\infty[$, de dérivée positive, donc croissante sur $[-1, +\infty[$. $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $f(1) = 1$, donc

$f\left(]0, 1[\right) = \left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[\subset]0, 1[.$

$]0, 1[$ est stable par f. Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \in]0, 1[$.

La réponse A est bonne.

NON

D'après l'assertion A, $(v_n)_{n\geq 1}$ est bornée, donc v_n ne peut pas tendre vers $+\infty$. **La réponse B est fausse.**

• Sur $[-1, +\infty[$,

$$f(x) = x \iff \sqrt{\frac{1+x}{2}} = x \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1 \text{ ou } x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc le seul point invariant de f sur $[-1, +\infty[$ est $x = 1$.

$$v_{n+1}-v_n=\sqrt{\frac{1+v_n}{2}}-v_n=\frac{\frac{1+v_n}{2}-v_n^{\,2}}{\sqrt{\frac{1+v_n}{2}}+v_n}\quad\text{est du signe de}\quad -2v_n^{\,2}+v_n+1.$$

Or $\quad -2v_n^{\,2}+v_n+1=-2\left(v_n+\dfrac{1}{2}\right)(v_n-1)>0 \quad$ car $\;v_n\in\,]0,\,1[$, $\;$ alors $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante, majorée par 1, donc elle converge vers $\ell\in[0,\,1]$.

f étant continue : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)=f(\ell) \quad$ or $\quad v_{n+1}=f(v_n) \quad$ et $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1}=\ell$

donc $\;f(\ell)=\ell\;$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1. **La réponse C est fausse.**

• Vérifions par récurrence si : $\quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\;\; v_n=\cos\left(\dfrac{t}{2^{n-1}}\right)$

- pour $n=1$: $\quad v_1=\cos t=\cos\left(\dfrac{t}{2^0}\right)$

- Soit $\;n\in\mathbb{N}^*$. Supposons : $\;v_n=\cos\left(\dfrac{t}{2^{n-1}}\right)$. On a $\;\dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}=\cos^2\theta\;$ donc :

$$v_{n+1}=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)}{2}}=\left|\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)\right|=\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)\quad\text{car}\quad \frac{t}{2^n}\in\left]0,\,\frac{\pi}{2}\right[$$

Donc : $\quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\;\; v_n=\cos\left(\dfrac{t}{2^{n-1}}\right)$ **La réponse D est bonne.**

• Question 3 : réponse B

• $p_n>0 \quad$ et $\quad \dfrac{p_{n+1}}{p_n}=\cos\left(\dfrac{t}{2^n}\right)<1 \quad$ donc $(p_n)_{n\geq 1}$ est **décroissante**.
La réponse A est fausse.

$$\bullet\; q_{n+1}=\left[\prod_{p=1}^{n+1}\cos\left(\frac{t}{2^{p-1}}\right)\right]\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)$$
$$=\underbrace{\left[\prod_{p=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^{p-1}}\right)\right]}_{p_n}\underbrace{\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}_{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)}=\frac{1}{2}q_n\,.$$

Donc $(q_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. **La réponse B est bonne.**

• $q_1 = \frac{1}{2}\sin(2t)$ donc $q_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2}\sin(2t) = \frac{\sin(2t)}{2^n}$ et $\lim_{n\to+\infty} q_n = 0$.

$\sin\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right) \sim \frac{t}{2^{n-1}}$ et $\sin\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right) > 0$ donc $p_n = \frac{\sin(2t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)} \sim \frac{\sin(2t)}{2t}$

$$\text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{\sin(2t)}{2t} \neq 0 \quad \text{car} \quad t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$(p_n)_{n\geq 1}$ et $(q_n)_{n\geq 1}$ n'ayant pas la même limite, elles ne sont pas adjacentes.

La réponse C est fausse.

• $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1 \iff \sin(2t) = 2t \iff t = 0$: impossible.

La réponse D est fausse.

Question 4 : réponses B et D

NON $\left(a^{2^n}\right)$ n'est pas une suite géométrique, mais elle est extraite de la suite géométrique (a^n).

La réponse A est fausse.

• Sur [0, 1], $\varphi(x) = \ln(1+x) - x$ est décroissante car $\varphi'(x) = -\frac{x}{1+x} \leq 0$.

Or: $\varphi(0) = 0$ donc $\forall x \in]0, 1[$, $\varphi(x) \leq 0$ soit $\ln(1+x) \leq x$.

Alors : $\ln(p_n) = \sum_{p=1}^{n} \ln\left(1 + a^{2^p}\right) \leq \sum_{p=1}^{n} a^{2^p}$ donc $\ln(p_n) \leq S_n$.

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} a^{2^p} \leq \sum_{p=0}^{2^n} a^p \quad \text{or} \quad \sum_{p=0}^{2^n} a^p = \frac{1 - a^{2^n+1}}{1-a} < \frac{1}{1-a} \quad \text{car} \quad 0 < a < 1.$$

Donc : $\ln(p_n) \leq S_n \leq \frac{1}{1-a}$

La réponse B est bonne.

• $\frac{p_{n+1}}{p_n} = u_{n+1} > 1$ alors $(p_n)_{n\geq 1}$ est croissante, et majorée par $e^{\frac{1}{1-a}}$ d'après B, donc $(p_n)_{n\geq 1}$ converge

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

→ QCM 4 Bornes inférieure et supérieure

• Question 1 : réponse C

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $\left(\inf\limits_{p\geq n}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. $\inf\limits_{p\geq n}(x_p)$ est un minorant de $(x_p)_{p\geq n+1}$ et $\inf\limits_{p\geq n+1}(x_p)$ en est le plus petit, donc $\inf\limits_{p\geq n+1}(x_p) \geq \inf\limits_{p\geq n}(x_p)$ et $\left(\inf\limits_{p\geq n}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc convergente

Les réponses A et B sont fausses, la réponse C est bonne.

NON Toute suite convergente est bornée, mais toute suite bornée n'est pas forcément convergente, comme par exemple $(-1)^n$.

La réponse D est fausse.

• Question 2 : réponses B et D

• $\forall\ p\geq n,\quad \inf\limits_{p\geq n}(x_p) \leq x_p \leq \sup\limits_{p\geq n}(x_p)\quad (1)$ et $\inf\limits_{p\geq n}(-x_p) \leq -x_p \leq \sup\limits_{p\geq n}(-x_p)\quad (2)$

donc : $-\sup\limits_{p\geq n}(x_p) \leq -x_p \leq -\inf\limits_{p\geq n}(x_p)\quad (3)$ et $-\sup\limits_{p\geq n}(-x_p) \leq x_p \leq -\inf\limits_{p\geq n}(-x_p)\ (4)$

De (1) et (4), on déduit: $-\sup\limits_{p\geq n}(-x_p) \leq \inf\limits_{p\geq n}(x_p)$, soit $\sup\limits_{p\geq n}(-x_p) \geq -\inf\limits_{p\geq n}(x_p)$.

De (2) et (3), on déduit : $\sup\limits_{p\geq n}(-x_p) \leq -\inf\limits_{p\geq n}(x_p)$. Donc: $\sup\limits_{p\geq n}(-x_p) = -\inf\limits_{p\geq n}(x_p)$.

La réponse A est fausse.

• Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang n_0, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, minorée, converge vers $\ell = \inf\limits_{p\geq n_0}(x_p)$. Alors : $\forall\ n\geq n_0,\ \inf\limits_{p\geq n}(x_p) = \ell$.

Donc $\left(\inf\limits_{p\geq n}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est **stationnaire**. **La réponse B est bonne.**

• $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : $\exists\,(m,\ M)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\ k\in\mathbb{N},\ m\leq x_k\leq M$.

Alors : $\forall\ n\in\mathbb{N},\quad \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} m \leq y_n \leq \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} M$, soit : $m\leq y_n\leq M$.

Donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et on lui applique les résultats établis pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$\left(\inf\limits_{p\geq n}(y_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante**, **majorée** (et **minorée**), et **convergente.**

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

Question 3 : réponses A et D

- Si n impair : $y_n = \dfrac{1-1+\ldots-1}{n+1} = 0$ et si n pair: $y_n = \dfrac{1-1+\ldots-1+1}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

La réponse A est bonne et la réponse B est fausse.

- $(y_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc :

$$\sup_{p\geq n}\left(y_p\right) = \sup_{2k\geq n}\left(y_{2k}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{1}{n+2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

La réponse C est fausse.

- $\inf\limits_{p\geq n}\left((-1)^p\right) = -1$, $\sup\limits_{p\geq n}\left((-1)^p\right) = 1$, $\inf\limits_{p\geq n}\left(y_p\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{p\geq n}\left(y_p\right)\right) = 0$

La réponse D est bonne.

Question 4 : réponses B et C

NON

- D'après la question 1, $\left(\inf\limits_{p\geq n}\left(x_p\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

La réponse A est fausse.

- D'après la question 3, $(x_n) = \left((-1)^n\right)$ est divergente.

La réponse B est bonne.

- Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N\in\mathbb{N},\ \forall\, p\geq N,\qquad \ell-\varepsilon \leq x_p \leq \ell+\varepsilon$$

soit :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N\in\mathbb{N},\ \forall\, p\geq N,\qquad \ell-\varepsilon \leq \inf_{p\geq N}\left(x_p\right) \leq x_p \leq \sup_{p\geq N}\left(x_p\right) \leq \ell+\varepsilon$$

Donc $\left(\inf\limits_{p\geq n}\left(x_p\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sup\limits_{p\geq n}\left(x_p\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ.

La réponse C est bonne.

NON

Dans la question 3 où $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, $\left(\inf\limits_{p\geq n}\left(x_p\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sup\limits_{p\geq n}\left(x_p\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite.

La réponse D est fausse.

chapitre 7

Limites – Continuité – Dérivation

QCM 1 Limites et continuité sur un intervalle (D'après EPL 2008 et 2006)

Question 1

A $\ln\left(1+\dfrac{x}{2}+\sin^2 x\right) \underset{0}{\sim} \ln(1+x)$ car $1+\dfrac{x}{2}+\sin^2 x \underset{0}{\sim} 1+x$.

B $\ln(|\sin x|) \underset{0}{\sim} \ln(|x|)$ car $|\sin x| \underset{0}{\sim} |x|$ et $|x| \neq 1$ sur un voisinage de 0.

C Pour $\beta \neq 0$ et α réels, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln[\cos(\alpha x)]}{\ln[\cos(\beta x)]} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$.

D $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \left[\tan\left(\frac{3x}{2}\right)\right]^{\tan(3x)} = e$.

Question 2

Soit la fonction réelle f de la variable réelle t définie par :

$$\forall\ t \geq 0,\ \ f(t) = \ln(1+t) + \frac{t^2}{1+t^2}$$

A f est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, et croissante.

B f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa bijection réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car toute bijection dérivable admet une réciproque dérivable.

C f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa bijection réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car $\forall\ t \geq 0,\ \ f'(t) \neq 0$.

D La courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = 1$.

Question 3

En utilisant f définie à la question 2, on peut montrer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ \exists!\ a_n \in \mathbb{R}_+,\ \ f(a_n) = \frac{1}{n}.$$

A $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante car f^{-1} est décroissante et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

B $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puisque f^{-1} est continue en 0.

C $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ \ a_n \geq 0$.

D $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

• Question 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x \tan x$.

Soit l'équation :

$$f(x) = 1 \quad (1)$$

Pour tout entier naturel n, on note I_n l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ \dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

L'équation (1) :

A admet au moins deux solutions dans l'intervalle I_n.

B admet une solution unique x_n dans l'intervalle I_n, qui appartient, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n\pi\right[$.

C admet une solution unique x_n dans l'intervalle I_n, telle que : $x_n = \arctan\left(e^{-x_n}\right)$

D admet une solution unique x_n dans l'intervalle I_n, telle que :

$$x_n = n\pi + e^{-n\pi} + o\left(e^{-n\pi}\right).$$

→ QCM 2 Dérivées $n^{\text{èmes}}$ et prolongement de fonctions

• Question 1

Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$f_n :\ x \mapsto x^{n-1}\, e^{1/x}.$$

A f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et se prolonge par continuité en 0.

B $\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ f_1'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\ e^{1/x}$ et $f_2''(x) = -\dfrac{1}{x^3}\ e^{1/x}$.

C $\forall\ n \geq 2,\ f_{n+1}' = n f_n + f_{n-1}$.

D $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}\ e^{1/x}$ (attention : c'est le même n).

Question 2

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x^x \quad \text{et} \quad f(0) = 1\,.$$

A f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, continue et dérivable en 0.

On admet que : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = f(x) + f(x)\ln x$ (1)

et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$$

B $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ (\ln)^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

En dérivant n fois (1) et en utilisant la formule de Leibniz, on obtient :

C $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)}\frac{(-1)^{n-k-1}}{x^{n-k}} f^{(k)}(x)$

D $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left[\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1}}{n-k} a_k\right) + a_n\right]$.

Question 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = a & \text{où } a \text{ est un réel fixé} \end{cases}$$

A f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$, donc $f'(0) = 0$ et f est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Pour que f soit continue en 0, il faut poser :

B $a = 1$

C $a = 0$

On suppose dans la suite de cette question et dans la question 4 que a prend la valeur qui rend f continue.

D $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = x^{-3n}\, e^{-1/x^2} P_n(x)$, où P_n est un polynôme.

Question 4

On utilise la fonction f de la question précédente.

On définit la suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\begin{cases} P_1 = 2 \\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ P_{n+1}(x) = \left(2 - 3n\, x^2\right) P_n(x) + x^3\, P'_n(x) \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

A $P_n\,(0) = 2^n$

B $P_n\,(0) = 2n$

C $f^{(n)}(x) \underset{0}{\sim} x^{-3n}\, e^{-1/x^2}$

D $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$, donc on montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f \text{ est } C^n \text{ sur } \mathbb{R}.$$

QCM 3 Accroissements finis

(d'après EPL 2005)

On désigne par a un réel strictement positif, et par f_a la fonction définie sur $[0,\ +\infty[$ par : $f_a(x) = a\, e^{-x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in [0,\ +\infty[\\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f_a(u_n) \end{cases}$

On suppose qu'il existe un et un seul $x \in [0,\ +\infty[$ qui vérifie l'équation : $f_a\,(x) = x$

On note ℓ_a cette solution.

Question 1

Le réel ℓ_a vérifie :

A $\forall\ a \in\,]0,\ +\infty[,\ \ \ell_a < a < \ell_a + \dfrac{\ell_a^{\ 2}}{2}$

B De l'étude de $g:\ x\ \mapsto\ x\, e^x$, on peut déduire que la fonction qui à a associe ℓ_a est décroissante sur $[0,\ +\infty[$.

C On a $\ln(\ell_a) \leq \ell_a - 1$, ce qui permet de montrer que $\lim\limits_{a \to +\infty} \ell_a = +\infty$.

D $\ell_a \sim \ln(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Question 2

Si, pour un réel strictement positif a et un réel positif ou nul u_0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ_a lorsque n tend vers $+\infty$, alors :

A $u_{n+1} - u_n \sim \ell_a (u_n - u_{n-1})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

B $|u_{n+1} - \ell_a| \sim \ell_a |u_n - \ell_a|$ lorsque n tend vers $+\infty$.

C il existe un entier k tel que $|u_{n+1} - u_n| = \ell_a^{\,n-k} |u_{k+1} - u_k|$ pour $n > k$.

D $\ell_a \leq 1$ ou bien $u_0 = \ell_a$.

Question 3

Soient x et y deux réels vérifiant $0 \leq x < y \leq a$.

A $0 < f_a(x) - f_a(y) < f_a(x)\,(y - x)$ **B** $0 < f_a(x) - f_a(y) < (y - x)\left(\dfrac{a}{e}\right)$

C $|f_a(x) - \ell_a| < |f_a(y) - \ell_a|$ **D** $|f_a(x) - \ell_a| < a\,|x - \ell_a|$.

Question 4

Dans le cas où $a < 1$, pour tout u_0 strictement positif :

A la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

B $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leq a^n$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

C il existe un entier k tel que $(u_n)_{n>k}$ soit monotone, et $\forall\, n > k,\ u_n \in [\,0,\ a\,]$.

D $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell_a| \leq a^{n+1}$.

QCM 4 Convexité

Question 1

A La fonction e^x est strictement convexe sur $\mathbb{R}$, donc $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 1 + x < e^x$.

B $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{1\},\ 1 + x \leq e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$

C $\forall\, x \in]0,\ 1[,\ 1 + x < e^x < \dfrac{1}{1-x}$

D $\forall\, y > 1,\ \ln\left(\dfrac{y+1}{y}\right) < \dfrac{1}{y} < \ln\left(\dfrac{y}{y-1}\right)$.

Question 2

Pour $n \geq 2$ et $k \geq 1$ fixés, on pose : $u_n = \sum_{p=0}^{(k-1)n} \frac{1}{n+p}$

On note L la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$, si elle existe.

A $\frac{k+1}{kn} < u_n < \frac{k+1}{n}$ donc $L = 0$.

B $\ln\left(\frac{1+kn}{n}\right) < u_n < \ln\left(\frac{kn}{n-1}\right)$

C $L = \frac{\ln(k)}{2}$

D $L = +\infty$.

Question 3

Soit f une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$, non constante et telle que f, f' et f'' soient positives sur $\mathbb{R}$.

A Certaines fonctions f n'ont pas de limite en $-\infty$.

B f et f' admettent des limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

C $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

D $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Question 4

On utilise la fonction f de la question précédente.

$$\text{Soit } \varphi : \quad x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x} \quad \text{sur } \mathbb{R}^*.$$

A φ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, on montre que :

B $\forall\, x < 0,\ f'(x) \leq \varphi(x)$, donc $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = 0$

C $\forall\, x > 0,\ \varphi(x) \leq f'(x) \leq \frac{f(2x)-f(x)}{x}$

D $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ si et seulement si $\frac{f(x)}{x}$ a une limite finie en $+\infty$.

→ QCM 1 Limites et continuité sur un intervalle

• Question 1 : réponse C

Équivalents et fonction logarithmique

Soient a et b deux fonctions réelles à valeurs strictement positives, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $a(x) \underset{\alpha}{\sim} b(x)$:

- si $\lim\limits_{x\to\alpha} a(x) \neq 1$, alors : $\ln(a(x)) \underset{\alpha}{\sim} \ln(b(x))$
- si $\lim\limits_{x\to\alpha} a(x) = 1$, alors : $\ln(a(x)) \underset{\alpha}{\sim} a(x)-1$.

• $1+\dfrac{x}{2}+\sin^2 x \underset{0}{\sim} 1$ et $1+x \underset{0}{\sim} 1$ donc $1+\dfrac{x}{2}+\sin^2 x \underset{0}{\sim} 1+x$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}+\sin^2 x\right)=0 \quad \text{donc} \quad \ln\left(1+\frac{x}{2}+\sin^2 x\right) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}+\sin^2 x$$

or $\sin^2 x \underset{0}{\sim} x^2$ donc $\sin^2 x = o\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et $\ln\left(1+\dfrac{x}{2}+\sin^2 x\right) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$

or $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$. **La réponse A est fausse.**

NON $|\sin x| \underset{0}{\sim} |x|$, mais il ne suffit pas que $|x| \neq 1$ sur un voisinage de 0 pour conclure que $\ln(|\sin x|) \underset{0}{\sim} \ln(|x|)$; il faut surtout remarquer que $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0 \neq 1$. **La réponse B est fausse.**

• Pour $\alpha = 0$: $\dfrac{\ln[\cos(\alpha x)]}{\ln[\cos(\beta x)]} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[\cos(\alpha x)]}{\ln[\cos(\beta x)]} = 0 = \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$

Pour $\alpha \neq 0$: cos (αx) et cos (βx) tendent vers 1 quand x tend vers 0, donc :

$$\frac{\ln[\cos(\alpha x)]}{\ln[\cos(\beta x)]} \underset{0}{\sim} \frac{\cos(\alpha x)-1}{\cos(\beta x)-1} \underset{0}{\sim} \frac{-\dfrac{(\alpha x)^2}{2}}{-\dfrac{(\beta x)^2}{2}} \underset{0}{\sim} \frac{\alpha^2}{\beta^2} \neq 0$$

d'où $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[\cos(\alpha x)]}{\ln[\cos(\beta x)]} = \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$ **La réponse C est bonne.**

- Posons $x = \dfrac{\pi}{6} + h$, ce qui permet de se ramener au voisinage de 0 pour h :

$$g(h) = \ln\left(\left[\tan\left(\frac{3x}{2}\right)\right]^{\tan(3x)}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 3h\right)\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3h}{2}\right)\right]$$

Or $\quad \tan(3h) \underset{0}{\sim} 3h \quad$ et $\quad \lim\limits_{h \to 0} \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3h}{2}\right) = 1$

$$\text{donc : } g(h) = \frac{-1}{\tan(3h)} \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3h}{2}\right)\right] \underset{0}{\sim} \frac{-1}{3h}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3h}{2}\right) - 1\right)$$

$$\underset{0}{\sim} \frac{-1}{3h}\left(\frac{1 + \tan\left(\frac{3h}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{3h}{2}\right)} - 1\right)$$

$$g(h) \underset{0}{\sim} \frac{-2\tan\left(\frac{3h}{2}\right)}{3h\left[1 - \tan\left(\frac{3h}{2}\right)\right]} \underset{0}{\sim} \frac{-3h}{3h} \underset{0}{\sim} -1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \left[\tan\left(\frac{3x}{2}\right)\right]^{\tan(3x)} = \frac{1}{e}$$

La réponse D est fausse.

Question 2 : réponses A et C

Sur $\mathbb{R}_+$, $1 + t \geq 1$, donc f est, par opérations et composition, indéfiniment dérivable.

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2} > 0 \qquad \text{donc } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.$$

La réponse A est bonne.

- f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = \left[f(0), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}_+$ et f admet une bijection réciproque f^{-1} de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ qui est continue et strictement croissante.
  f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$. **La réponse B est fausse.**

- $\forall\, t \geq 0,\ f'(t) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

La réponse C est bonne.

- $$\frac{f(t)}{t} = \frac{\ln(1+t)}{t} + \frac{t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \frac{\ln(t+1)}{t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} = 0.$$

La courbe représentative de f admet une **branche parabolique** de direction (Ox). **La réponse D est fausse.**

Question 3 : réponses B et D

• f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, donc :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ \exists!\ a_n \in \mathbb{R}_+,\ \ f(a_n) = \frac{1}{n}$$

$a_n = f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ or $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et f^{-1} est croissante,

donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. **La réponse A est fausse.**

• f^{-1} est continue en 0, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right) = f^{-1}(0) = 0.$

La réponse B est bonne.

NON La suite $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive, mais tend vers 1.
La réponse C est fausse.

• $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$ et $\dfrac{t^2}{1+t^2} \underset{0}{\sim} t^2 << t$ d'où $f(t) \underset{0}{\sim} t$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

donc $f(a_n) \underset{+\infty}{\sim} a_n$. Finalement : $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

La réponse D est bonne.

Question 4 : réponse D

• f est continue et dérivable sur I_n, et : $f'(x) = e^x \underbrace{\left(\tan^2 x + \tan x + 1\right)}_{\text{du type } X^2 + X + 1 > 0} > 0.$

Donc f est strictement croissante, et définit une bijection de I_n dans $f(\mathrm{I}_n) = \mathbb{R}$.
Alors, 1 possède un unique antécédent x_n dans I_n.

La réponse A est fausse.

• $1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $f\left(\left]n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[\right) = \mathbb{R}_+^*$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $x_n \in \left]n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$. **La réponse B est fausse.**

• $e^{x_n} \tan x_n = 1 \iff \tan x_n = e^{-x_n}$.

Or $n\pi < x_n < \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ donc $0 < x_n - n\pi < \dfrac{\pi}{2}$ et $\tan(x_n - n\pi) = e^{-x_n}$

soit finalement : $x_n - n\pi = \arctan\left(e^{-x_n}\right)$. **La réponse C est fausse.**

La réponse C est bonne pour $n = 0$.

- $x_n > n\pi$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-x_n} = 0$ alors $\arctan\left(e^{-x_n}\right) \underset{\infty}{\sim} e^{-x_n}$

d'où $x_n - n\pi \underset{+\infty}{\sim} e^{-x_n}$.

Équivalent et fonction exponentielle

Si $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$, alors on a : $e^{u_n} \underset{\infty}{\sim} e^{v_n} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

$x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$, or $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - n\pi) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-x_n} = 0$

donc $e^{-x_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{-n\pi}$.

Finalement : $x_n = n\pi + e^{-n\pi} + o\left(e^{-n\pi}\right)$

La réponse D est bonne.

→ QCM 2 Dérivées $n^{\text{èmes}}$ et prolongement de fonctions

• Question 1 : réponse D

- $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^{n-1}$ sont C^∞ sur leurs ensembles de définition, donc, par opérations et composition, f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

Posons $t = \frac{1}{x}$: $f_n\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{e^t}{t^{n-1}}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f_n\left(\frac{1}{t}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0_+} f_n(x) = +\infty$

donc f_n n'est pas prolongeable par continuité en 0.

La réponse A est fausse.

- $f_1(x) = e^{1/x}$ donc $f_1'(x) = -\frac{1}{x^2}\, e^{1/x}$

$f_2(x) = x\, e^{1/x}$ donc $f_2'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{1/x}$ et $f_2''(x) = \frac{1}{x^3}\, e^{1/x}$

La réponse B est fausse.

- $f_{n+1}(x) = x^n\, e^{1/x}$ et $f'_{n+1}(x) = n\, x^{n-1}\, e^{1/x} - x^{n-2}\, e^{1/x} = n f_n(x) - f_{n-1}(x)$.

Donc : $f'_{n+1} = n f_n - f_{n-1}$ (1) **La réponse C est fausse.**

• On a déjà : $f_1^{(1)}(x) = -\dfrac{1}{x^2}\, e^{1/x} = \dfrac{(-1)^1}{x^{1+1}}\, e^{1/x}$ et $f_2^{(2)}(x) = \dfrac{1}{x^3}\, e^{1/x} = \dfrac{(-1)^2}{x^{2+1}}\, e^{1/x}$.

La proposition est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. Raisonnons par récurrence sur n.
Pour $n \geq 2$, supposons que : $f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}\, e^{1/x}$ et $f_{n-1}^{(n-1)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{x^n}\, e^{1/x}$.
Dérivons la relation (1) à l'ordre n :

$$f_{n+1}^{(n+1)} = n f_n^{(n)} - f_{n-1}^{(n)} = n f_n^{(n)} - \left[f_{n-1}^{(n-1)}\right]'$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\quad f_{n+1}^{(n+1)}(x) = n\,\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\, e^{1/x} - (-1)^{n-1} e^{1/x}\left[-\frac{n}{x^{n+1}} - \frac{1}{x^{n+2}}\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}\, e^{1/x}$$

La proposition est vraie à l'ordre n+1. Donc, d'après le théorème de récurrence. **La réponse D est bonne.**

• Question 2 : réponses B et D

• $f(x) = e^{x \ln x}$ donc, par opérations et composition, f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\lim_{x\to 0}(x \ln x) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1 = f(0) : \quad f \text{ est continue en } 0.$$

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^{x\ln x} - 1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x \ln x}{x} \underset{0}{\sim} \ln x, \qquad \text{donc } \lim_{x\to 0} \tau(x) = -\infty.$$

Donc f n'est pas dérivable en 0. **La réponse A est fausse.**

• Sur $\mathbb{R}_+^*$: $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, $(\ln)''(x) = -x^{-2}$, $(\ln)^{(3)}(x) = 2x^{-3}$, $(\ln)^{(4)}(x) = -6x^{-4}$

Pour $n \geq 1$, supposons que : $(\ln)^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ alors, en dérivant :

$$(\ln)^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\left(-n\,x^{-n-1}\right) = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}} \quad : \quad \text{vrai à l'ordre } n+1.$$

La réponse B est bonne.

Dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit (formule de Leibniz)

Si u et v sont n fois dérivables : $(u\,v)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}\, v^{(n-k)}$

- $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = f(x) + f(x)\ln x.$

Dérivons n fois cette relation :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\ \ln^{(n-k)}(x)$$

Pour $n - k \geq 1$, d'après B :

$$(\ln)^{(n-k)}(x) = \frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{x^{n-k}} \quad \text{et} \quad \ln^{(0)}(x) = \ln x$$

Donc : $f^{(n+1)}(x) = (1 + \ln x) f^{(n)}(x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{x^{n-k}} f^{(k)}(x) \qquad (2)$

La réponse C est fausse.

- $a_n = \dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} \quad \Leftrightarrow \quad f^{(n)}(1) = n!\ a_n$

$x = 1$ dans (2) donne :

$$(n+1)!\ a_{n+1} = n!\ a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!\ (-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{k!\ (n-k)!}\ k!\ a_k$$

Soit : $\quad a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left[\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1}}{n-k} a_k\right) + a_n\right]$

La réponse D est bonne.

• Question 3 : réponses C et D

Par opérations et composition, f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Et :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$$

Posons $t = \dfrac{1}{x^2}$: $\quad |f'(x)| = 2\,t^{3/2}\,e^{-t} \quad$ et $\quad \displaystyle\lim_{t \to +\infty} |f'(x)| = 0$

$$\text{donc} \quad \lim_{x \to 0} f'(x) = 0.$$

Pour montrer que f est dérivable en 0 en utilisant la limite de la dérivée, il faut que f soit continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Or $\quad \displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad$ et $\quad f(0) = a \quad$ donc, si $a \neq 0$, f n'est pas continue en 0.

La réponse A est fausse.

• Si $a = 0$, f est continue et dérivable en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$ et f est C^1 sur $\mathbb{R}$.

La réponse B est fausse et la réponse C est bonne.

• $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = x^{-3}\, e^{-1/x^2} \underbrace{2}_{P_1(x)}$ et $f''(x) = x^{-6}\, e^{-1/x^2} \underbrace{\left(-6x^2+4\right)}_{P_2(x)}$: la proposition est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.

Pour $n \geq 2$, supposons : $f^{(n)}(x) = x^{-3n}\, e^{-1/x^2} P_n(x)$

$$f^{(n+1)}(x) = x^{-3(n+1)}\, e^{-1/x^2} \underbrace{\left[\left(-3n\,x^2+2\right)P_n(x) + x^3\, P_n'(x)\right]}_{P_{n+1}(x)\ :\ \text{polynôme}} \quad : \quad \text{vrai à l'ordre } n+1.$$

Donc :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n)}(x) = x^{-3n}\, e^{-1/x^2} P_n(x) \text{ avec } \begin{cases} P_1(x) = 2 \\ P_{n+1}(x) = \left(-3n\,x^2+2\right)P_n(x) + x^3\, P_n'(x) \end{cases}$$

La réponse D est bonne.

• Question 4 : réponses A et D

• $P_1(0) = 2$; $P_2(x) = -6x^2 + 4$ et $P_2(0) = 2^2$; $P_3(x) = 24\,x^4 - 36\,x^2 + 8$ et $P_3(0) = 2^3$.

$P_{n+1}(x) = \left(-3n\,x^2+2\right)P_n(x) + x^3\, P_n'(x)$ et $P_{n+1}(0) = 2\,P_n(0)$ donc la suite $\left(P_n(0)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison 2, et puisque $P_1(0) = 2$: $P_n(0) = 2^n$.

La réponse A est bonne et la réponse B est fausse.

• $\lim\limits_{x\to 0} P_n(x) = P_n(0) = 2^n$ donc $f^{(n)}(x) \underset{0}{\sim} 2^n\, x^{-3n}\, e^{-1/x^2}$

La réponse C est fausse.

• Posons $t = \dfrac{1}{x^2}$: $\left|x^{-3n}\, e^{-1/x^2}\right| = t^{(3n)/2}\, e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

On a établi que f est C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, supposons que f est C^n sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$.

f est C^{n+1} sur $\mathbb{R}^*$, donc $f^{(n)}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Or : $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$ donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$, donc $f^{(n)}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et f est C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.

On a ainsi montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, f$ est C^n sur $\mathbb{R}$.

Donc : f est C^∞ sur $\mathbb{R}$. **La réponse D est bonne.**

→ QCM 3 Accroissements finis

Question 1 : réponses C et D

• $\ell_a = f_a(\ell_a) \Leftrightarrow a\,e^{-\ell_a} = \ell_a \Leftrightarrow \ell_a\,e^{\ell_a} = a \Leftrightarrow g(\ell_a) = a.$

$a \in [0,\ +\infty]$ donc $\ell_a > 0$ d'où $e^{\ell_a} > 1$ et $\ell_a\,e^{\ell_a} > \ell_a$ soit $a > \ell_a$.

NON Pour $a = e$: $\ell_e\,e^{\ell_e} = e \Leftrightarrow \ell_e = 1$ or $\ell_e + \dfrac{\ell_e^2}{2} = \dfrac{3}{2} < e.$

La réponse A est fausse.

• Sur $\mathbb{R}^+$, $g'(x) = e^x(x+1) > 0$, donc g est strictement croissante, continue sur $\mathbb{R}^+$, alors g réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $g(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. Sa réciproque g^{-1} est aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et : $g(\ell_a) = a \Leftrightarrow \ell_a = g^{-1}(a)$.

Donc la fonction $a \mapsto \ell_a$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

La réponse B est fausse.

• La fonction ℓ_n est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa tangente en 1 a pour équation :

$$y = x - 1$$

Donc : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x \le x - 1$ et en particulier $\ln(\ell_a) \le \ell_a - 1$ (1).

$\ell_a\,e^{\ell_a} = a \Leftrightarrow \ln(\ell_a) + \ell_a = \ln(a)$ (2) et d'après (1) $\ell_a \ge \dfrac{1}{2}\left[\ln(a) + 1\right]$.

Or : $\lim\limits_{a \to +\infty} \ln(a) = +\infty$ donc $\lim\limits_{a \to +\infty} \ell_a = +\infty$

La réponse C est bonne.

• $\ln(\ell_a) \underset{+\infty}{=} o(\ell_a)$ donc, d'après (2) : $\ell_a \underset{+\infty}{\sim} \ln(a)$

La réponse D est bonne.

Question 2 : réponses B et D

• $u_n = u_{n+1} \Leftrightarrow u_n = \ell_a \Leftrightarrow u_0 = \ell_a$ car f est bijective. Or, $u_0 \ne \ell_a$ donc $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \ne \ell_a$. f_a est continue, dérivable et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ car $f'_a(x) = -a\,e^{-x} < 0$. $f_a(\mathbb{R}_+) =]0,\ a]$ donc $\forall\ n \ge 1,\ u_n \in]0,\ a]$.

$u_{n+1} - u_n = f_a(u_n) - f_a(u_{n-1})$ et f_a est décroissante, donc $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ sont de signes contraires. Or $\ell_a > 0$, et deux suites équivalentes ont même signe à partir d'un certain rang. **La réponse A est fausse.**

• $|u_{n+1}-\ell_a| = |f_a(u_n) - f_a(\ell_a)|$. On peut appliquer le théorème des accroissements finis à f_a entre u_n et ℓ_a :

il existe un réel c_n compris entre u_n et ℓ_a tel que :

$$|f_a(u_n) - f_a(\ell_a)| = |f'_a(c_n)|\,|u_n - \ell_a|$$

Or : $f'_a(c_n) = -a\,e^{-c_n} = -f_a(c_n)$ donc $|u_{n+1}-\ell_a| = f_a(c_n)\,|u_n - \ell_a|$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell_a$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \ell_a$ or f_a est continue en c_n, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} f_a(c_n) = f_a(\ell_a) = \ell_a > 0,\ f_a(c_n) \underset{+\infty}{\sim} \ell_a \quad \text{et} \quad |u_{n+1}-\ell_a| \underset{+\infty}{\sim} \ell_a\,|u_n - \ell_a|$$

La réponse B est bonne.

NON $\ell_e = 1$ donc, pour $a > e$: $\ell_a > 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} {\ell_a}^{n-k} = +\infty$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$. **La réponse C est fausse.**

• Supposons $\ell_a > 1$ et $u_0 \neq \ell_a$, donc $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \neq \ell_a$.

Posons : $v_n = \dfrac{|u_{n+1}-\ell_a|}{|u_n - \ell_a|}$.

D'après l'assertion B : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \ell_a$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_a > 1$.

Soit $q \in \left]1,\ \ell_a\right[$ et $\varepsilon = \dfrac{\ell_a - q}{2}$.

À partir d'un certain rang k : $\ell_a - \varepsilon \le v_n \le \ell_a + \varepsilon$.

Donc $\forall\ n \ge k,\ v_n \ge q$ et, tous les termes étant strictement positifs :

$$\prod_{p=k}^{n} v_p \ \ge\ q^{n-k+1}, \text{ soit } \frac{|u_{n+1}-\ell_a|}{|u_k - \ell_a|} \ \ge\ q^{n-k+1} \text{ et } \quad |u_{n+1}-\ell_a| \ \ge\ q^{n-k+1}\,|u_k - \ell_a|.$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n-k+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_{n+1}-\ell_a| = 0$: impossible

La réponse D est bonne.

• Question 3 : réponses A et D

• f_a étant strictement décroissante : $f_a(x) - f_a(y) > 0$. On applique le théorème des accroissements finis à f_a entre x et y :

$$\exists\ c \in [x,\ y],\ \frac{f_a(x) - f_a(y)}{x-y} = f'_a(c) = -f_a(c)$$

$y - x > 0$ et $f_a(c) < f_a(x)$ car f_a est strictement décroissante, donc :

$f_a(x) - f_a(y) \ <\ f_a(x)\,(y-x)$ **La réponse A est bonne.**

• Si $a < 1$ alors $c < 1$ et $f_a(c) = \dfrac{a}{e^c} > \dfrac{a}{e}$

donc $\quad f_a(x) - f_a(y) \; > \; (y-x)\left(\dfrac{a}{e}\right)$. **La réponse B est fausse.**

• Pour $y = \ell_a$, l'inégalité de l'assertion C s'écrit : $|f_a(x) - \ell_a| \; < \; 0$: impossible.

La réponse C est fausse.

• Pour $x \in \left]0,\ a\right]$: $\quad |f'_a(x)| = a\,e^{-x} < a \quad$ car $\quad e^{-x} < 1$.

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis : $|f_a(x) - \ell_a| \; < \; a\,|x - \ell_a|$

La réponse D est bonne.

• Question 4 : réponses A et D

• D'après la question 3 assertion D, f_a est lipschitzienne de rapport $a < 1$ sur $\left]0,\ a\right[$.

De plus : $\qquad f_a\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \left]0,\ a\right[\qquad$ donc $\qquad \forall\ n \geq 1,\ \ u_n \in \left]0,\ a\right[$.

Alors, $\forall\ n \geq 1\ $: $\qquad |u_{n+1} - \ell_a| = |f(u_n) - f(\ell_a)| \; \leq \; a\,|u_n - \ell_a|$

et, par récurrence simple : $\qquad |u_{n+1} - \ell_a| \; \leq \; a^n |u_1 - \ell_a| \quad (2)$

Or : $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0 \quad$ car $\quad a < 1 \quad$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell_a > 0$.

La réponse A est bonne et la réponse B est fausse.

NON On a vu que $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ étaient de signes contraires.

La réponse C est fausse.

• u_1 et ℓ_a sont dans l'intervalle $\left]0,\ a\right[$, donc $|u_1 - \ell_a| \leq a$

et, d'après (2) : $\qquad |u_{n+1} - \ell_a| \; \leq \; a^{n+1}$ **La réponse D est bonne.**

→ QCM 4 Convexité

• Question 1 : réponses C et D

• exp est strictement convexe car $\left(e^x\right)'' = e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc, pour tout $x \neq 0$, la tangente à la courbe de exp en $x = 0$ est strictement en dessous de la courbe : $\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ \ 1 + x < e^x \quad (1)$.

En revanche, il y a égalité en $x = 0$: $\quad 1 + 0 = e^0$.

La réponse A est fausse.

NON Pour $x = 2$: $\qquad \dfrac{1}{1-x} < \ 0 < \ e^x$ **La réponse B est fausse.**

• $\forall\ x \in [0,\ 1],\quad 1+x\ <\ e^x$ et, en remplaçant x par $-x$ dans (1), on obtient :

$0 <\ 1-x\ <\ e^{-x} \quad\Leftrightarrow\quad e^x < \dfrac{1}{1-x}$

La réponse C est bonne.

On applique la double inégalité C à $x = \dfrac{1}{y} \in [0,\ 1]$: $0\ <\ \dfrac{y+1}{y}\ <\ e^{1/y}\ <\ \dfrac{y}{y-1}$

Soit, en composant par ln, fonction croissante : $\ln\left(\dfrac{y+1}{y}\right)\ <\ \dfrac{1}{y}\ <\ \ln\left(\dfrac{y}{y-1}\right)$

La réponse D est bonne.

• Question 2 : réponse B

$n > 1$ donc, d'après l'assertion D de la question 1 :

pour $0 \leq p \leq (k-1)n$: $\qquad \ln\left(\dfrac{n+p+1}{n+p}\right)\ <\ \dfrac{1}{n+p}\ <\ \ln\left(\dfrac{n+p}{n+p-1}\right)$

En sommant de $p = 0$ à $p = (k-1)n$, et en remplaçant les sommes des logarithmes par les logarithmes des produits, on obtient :

$\ln\left(\displaystyle\prod_{p=0}^{(k-1)n} \dfrac{n+p+1}{n+p}\right)\ <\ u_n\ <\ \ln\left(\displaystyle\prod_{p=0}^{(k-1)n} \dfrac{n+p}{n+p-1}\right)$ soit, en simplifiant :

$$\ln\left(\frac{1+kn}{n}\right)\ <\ u_n\ <\ \ln\left(\frac{kn}{n-1}\right) \qquad (2)$$

La réponse B est bonne.

• $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1+kn}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{kn}{n-1} = k$ donc, dans (2), les deux suites encadrant u ont la même limite $\ln k$, et $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers $L = \ln k$.

Les réponses A, C et D sont fausses.

• Question 3 : réponses B et D

• Sur $\mathbb{R}$, f et f' sont croissantes, et f est convexe.

Donc, d'après le théorème de la limite monotone, f et f' admettent des limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

NON f et f' sont minorées par 0, donc f et f' admettent en $-\infty$ des limites finies, qui coïncident avec les bornes inférieures des fonctions. Toutefois, la borne inférieure n'est pas nécessairement 0, comme dans l'exemple de la fonction $f(x) = e^x + 1$ pour laquelle $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

La réponse C est fausse.

• f est croissante et non constante, donc : $\exists\, c \in \mathbb{R},\ f'(c) > 0$.

La tangente en $x = c$ a pour équation : $y = f(c) + f'(c)(x - c)$.

f étant convexe : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$.

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

La réponse D est bonne.

• Question 4 : réponses B et C

• f est convexe sur $\mathbb{R}$, donc, d'après la croissance des pentes, φ est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. **La réponse A est fausse.**

• f est continue et dérivable sur $[x,\ 0]$ $(x < 0)$ et, f' étant croissante :

$$\forall\, t \in [x,\ 0],\ f'(t) \geq f'(x)$$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$f'(x) \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \qquad \text{soit} \qquad 0 \leq f'(x) \leq \varphi(x) \qquad (3)$$

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ est finie, donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$ et, d'après (3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = 0$

La réponse B est bonne.

• Pour $x > 0$, on obtient, en utilisant l'inégalité des accroissements finis :

– sur $[0,\ x]$: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} \leq f'(x)$

– et de même, sur l'intervalle $[x,\ 2x]$: $f'(x) \leq \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$

soit finalement : $\forall\, x > 0,\ \varphi(x) \leq f'(x) \leq \dfrac{f(2x) - f(x)}{x} \qquad (4)$

La réponse C est bonne.

• D'après (4) : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \leq f'(x) \leq 2\,\dfrac{f(2x)}{2x} - \dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{f(x)}{x}$ or φ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

donc φ admet une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ alors, d'après (4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

et : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

La réponse D est fausse.

chapitre 8

Espaces vectoriels

QCM 1 Sous-espaces vectoriels

(D'après EPL 2008)

Question 1

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

A Si $F \subset G$, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Supposons l'existence d'un $x \in F$ et $x \notin G$, alors :

B $\forall\, g \in G,\quad (F \cup G \text{ sous-espace vectoriel de E} \;\Rightarrow\; x + g \in F)$.

C Si l'assertion B est vraie, $F \cup G$ ne peut être un sous-espace vectoriel de E.

D $F \cup G$ ne peut être un sous-espace vectoriel de E que si $F \subset G$.

Question 2

Soit, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$u = (1,\ 2,\ 3,\ 0),\ v = (0,\ -1,\ 2,\ -2),\ w = (3,\ 7,\ 7,\ 2),\ t = (1,\ 2,\ 3,\ 1)$$

Soit $F = \text{Vect}\,(u,\ v,\ w)$ le sous-espace vectoriel engendré par (u, v, w), et $H = \mathbb{R}t$ la droite dirigée par t.

Soient :

$$G = \left\{ (a,\ b,\ c,\ d) \in \mathbb{R}^4 \ /\ a + b - d = 0 \right\}$$

$$K = \left\{ (\alpha,\ -\alpha + 3\beta,\ 3\beta,\ 2\alpha - 2\beta)\ /\ (\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

A F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimension 3.

B $G \cup H$ est un sous-espace vectoriel.

C H est un supplémentaire de G.

D K est un sous-espace vectoriel de dimension 2, et $F + K = \mathbb{R}^4$.

Question 3

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de I dans $\mathbb{R}$.

A $(\mathrm{ch}\, x,\ \mathrm{sh}\, x)$ est une famille liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

B $\forall\ a \in \mathbb{R},\ \left(\mathrm{ch} x,\ \mathrm{sh}\, x,\ e^{ax}\right)$ est une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

C $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \left(1,\ \ln x,\ (\ln x)^2,\ \ldots,\ (\ln x)^n\right)$ est une famille libre dans $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\right)$.

D $\left(1,\ \arctan x,\ \arctan \dfrac{1}{x}\right)$ est une famille liée dans $\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^*,\mathbb{R}\right)$.

Question 4

Soient H et K deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Soit $(e_1,\ \ldots,\ e_k)$ une base de K, et $a \in$ H.

A $\mathrm{Dim}\left(\mathrm{Vect}\,(e_1 + a,\ \ldots,\ e_k + a)\right) < k$.

B $\mathrm{Vect}\,(e_1 + a,\ \ldots,\ e_k + a)$ est supplémentaire à H.

C $\mathrm{Vect}\,(e_1 + a,\ \ldots,\ e_k + a) = \mathrm{K}$.

D On peut montrer ici que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins deux supplémentaires.

QCM 2 Applications linéaires – Noyau et image (d'après EPL 2006 et 2008)

Les questions 1 et 2 sont liées.

Soit l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ sa base canonique.
Soit f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $(x,\ y,\ z)$ associe le vecteur $(x + 3z,\ 0,\ y - 2z)$.

Question 1

A $f(e_1) = e_1 + 3e_3, f(e_2) = 0, f(e_3) = e_2 - 2e_3$.

B $f(e_1) = e_1, f(e_2) = e_3, f(e_3) = 3e_1 - 2e_3$.

C f est de rang 3 car E est de dimension 3.

D f est de rang 2 car (e_1, e_3) est une base de Imf.

Question 2

A $\text{Ker} f = \{0\}$.

B Ker f est de dimension 1 car $\dim \text{Ker } f = \dim E - \text{rg } f$.

C Ker f est un sous-espace vectoriel de Im f car $\dim \text{Ker } f \leq \dim \text{ Im } f$.

D L'égalité « $\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{ Im } f$ » suffit pour affirmer que Im f et Ker f sont supplémentaires.

Les questions 3 et 4 sont liées.

E est un espace vectoriel sur un corps K, et $\mathscr{L}$(E) désigne l'ensemble des endomorphismes de E.

Pour $f \in \mathscr{L}$ (E), on note $f^0 = Id$ et $\forall\ n \in \mathbb{N},\ f^{n+1} = f^n \circ f$.

Question 3

A $\text{Ker} f^2 \subset \text{Ker} f \quad \Leftrightarrow \quad \text{Ker} f \cap \text{Im } f = \{0\}$.

B $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im } f + \text{Ker} f = \text{E}$.

On suppose dans la suite que **E** ***est de dimension finie.***

Les conditions suivantes sont équivalentes à $\text{E} = \text{Im } f \oplus \text{Ker} f$:

C $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2$

D $f^2 = f$ (f est un projecteur).

• Question 4

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que :

$\exists\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\},\ f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$ (on dit que f est nilpotent d'indice n).

- **A** $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$ est libre.
- **B** $\exists\, x \in \mathrm{E},\ \left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$ est libre.

On suppose dans la suite que* E *est de dimension n.

- **C** $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-2}(x)\right)$ où x est tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
- **D** $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\left(f^{n-1}(x)\right)$ où x est tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

→ QCM 3 Endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(d'après EPL 2007)

Dans l'espace vectoriel F des fonctions réelles définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble E des fonctions de la forme $P(x)\,\mathrm{ch}\,x + Q(x)\,\mathrm{sh}\,x$, où P et Q sont deux fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

On désigne par $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = \mathrm{ch}\,x,\ f_2(x) = \mathrm{sh}\,x,\ f_3(x) = x\,\mathrm{ch}\,x$$

$$f_4(x) = x\mathrm{sh}\ x,\ f_5(x) = x^2\mathrm{ch}\ x,\ f_6(x) = x^2\mathrm{sh}\ x$$

• Question 1

L'ensemble E :

- **A** est un anneau.
- **B** n'est pas un sous-espace vectoriel de F.
- **C** est un espace vectoriel engendré par la famille $(f_i)_{1 \le i \le 6}$.
- **D** est un groupe pour la loi de multiplication des fonctions.

Question 2

On pose :

$$f(x) = \left(\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2\right) \text{ ch } x + \left(\mu_1 + \mu_2 x + \mu_3 x^2\right) \text{ sh } x.$$

A La fonction $f(x)\,e^{-x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ quelque soit les réels λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3.

B La fonction $f(x)\,e^{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$ si et seulement si $\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \lambda_3 - \mu_3 = 0$.

C La famille $(f_i)_{1 \le i \le 6}$ est une famille liée de E.

D La famille $(f_i)_{1 \le i \le 6}$ est une base de E.

Question 3

On note D l'application de F dans F qui à une fonction f associe sa dérivée f'.

A D n'est pas un endomorphisme de F.

B D ne réalise pas une bijection de F sur lui-même car $D(f+k) = D(f)$ où k est une fonction constante donnée.

C D induit un endomorphisme de E.

D D ne réalise pas une bijection de E sur lui-même car elle n'est pas injective.

Question 4

On note id l'application identique de F dans lui-même.
L'image de E par l'application $(D^2 - id)$:

A est l'espace vectoriel de dimension 4 engendré par la famille (f_1, f_2, f_3, f_4).

B est un espace de dimension 3.

Le noyau de l'application $(D^2 - id)$:

C est l'espace des solutions de l'équation différentielle $(f')^2 - f = 0$.

D est l'espace de dimension 2 engendré par la famille (f_1, f_2).

QCM 4 Endomorphismes solutions d'une équation

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
On rappelle que l'ensemble $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ des endomorphismes de E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau.
α et β étant des réels, on étudie des endomorphismes f de E tels que :

$$f^2 + \alpha f + \beta\, Id = 0.$$

Question 1

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que :

$$f^2 + \alpha f = 0 \quad (1)$$

A Si $\alpha = 0$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

B $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, f n'est pas bijective.

C Si $\alpha \neq 0$, $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que λf soit un projecteur.

D Si l'assertion C est jugée exacte, on en déduit que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}\left(f + \alpha\, Id\right)$ sont supplémentaires.

Question 2

Dans cette question, $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$. On note $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)$ la base canonique de E.
Soit D la droite dirigée par $u = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.
On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall\ i \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ f(e_i) = u - e_i.$$

On note $g = f + Id$.

A $f(u) = 2u$.

B $\forall\ h \in \operatorname{Ker} g,\ \ f(h) = -h$ d'où $\mathrm{D} \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$.

C $\operatorname{Im} g = \mathrm{D}$ donc D et $\operatorname{Ker} g$ sont supplémentaires.

D $g^2 = 4\,g$ donc $f^2 - 2f + 3\,Id = 0$.

Question 3

Dans cette question, f désigne un endomorphisme de E tel que :

$$f^2 - 2f - 3\,Id = 0 \quad (2)$$

Pour tout réel λ, on note $F_\lambda = \{ u \in E \ / \ f(u) = \lambda u \}$.

- **A** $f^2 - 2f - 3\,Id = (f + Id)\ o\ (f - 3\,Id)$ donc $f = -Id$ et $f = 3Id$ sont les seules solutions de (2).
- **B** f est un automorphisme de E, et f^{-1} est combinaison linéaire de f et Id.
- **C** Pour certaines valeurs de λ, F_λ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
- **D** F_{-1} et F_3 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Question 4

Soit p un projecteur de E, $p \neq 0$ et $p \neq Id$. On note $q = Id - p$ le projecteur associé. On définit :

$$\mathcal{F}_p = \{ \alpha p + \beta q \ / \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

- **A** $\mathcal{F}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 2.
- **B** $\mathcal{F}_p$ n'est pas un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$.

Dans la suite, f désigne un endomorphisme de E tel que $f^2 - 2f - 3\,Id = 0$ (2), et on note $p = \dfrac{1}{4}(f + Id)$.

- **C** p est un projecteur, et $\forall\ n \in \mathbb{N},\ f^n = 3^n p + (-1)^n q$.
- **D** $(p,\ q)$ est une base de $\mathcal{F}_p$.

corrigés

→ QCM 1 Sous-espaces vectoriels

• Question 1 : réponses A et B

• Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ est un sous-espace vectoriel de E.

La réponse A est bonne.

• $\exists\, x \in F,\ \ x \notin G$ donc $F \not\subset G$.

Si $F \cup G$ est sous-espace vectoriel de E, alors, par stabilité pour +, $x + g \in F \cup G$.

Supposons $x + g \notin F$, alors $x + g \in G$, or $x = \underbrace{x+g}_{\in G} - \underbrace{g}_{\in G} \in G$ par stabilité pour –, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Donc : $x + g \in F$.

La réponse B est bonne.

On a donc : $g = \underbrace{x+g}_{\in F} - \underbrace{x}_{\in F} \in F$ autrement dit : $\forall\, g \in G,\ \ g \in F$, soit $G \subset F$. On a ainsi montré que :

$$(F \not\subset G \ \text{ et } \ F \cup G \text{ sous-espace vectoriel}) \ \Rightarrow \ G \subset F$$

Les réponses C et D sont fausses.

• Question 2 : réponse C

• Pour déterminer la dimension de F, il faut trouver le rang de (u, v, w) ou une base de F. Appliquons la méthode du pivot (les pivots sont encadrés) :

$$\begin{array}{c|cccc} u & \boxed{1} & 2 & 3 & 0 \\ v & 0 & \boxed{-1} & 2 & -2 \\ w & 3 & 7 & 7 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} u & \boxed{1} & 2 & 3 & 0 \\ v & 0 & \boxed{-1} & 2 & -2 \\ w-3u & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \quad \text{soit} \quad 3u - v - w = 0$$

Donc (u, v, w) est une famille liée de rang 2, $\dim F = 2$ et (u,v) est une base de F.

La réponse A est fausse.

• G est l'hyperplan d'équation $a + b - d = 0$, ce qui suffit à montrer que G est un sous-espace vectoriel de dimension $4 - 1 = 3$. $\dim H = 1$, donc $G \not\subset H$. Donc, d'après la question 1, $G \cup H$ est un sous-espace vectoriel si $H \subset G$.
Or, $H = \mathbb{R}t$ et $t = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$ ne vérifie pas l'équation de G, donc $H \not\subset G$ et $G \cup H$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

La réponse B est fausse.

• $\dim H = 1$, $\dim G = 3$ et $t \notin G$ donc : $H \cap G = \{0\}$

et $\dim H + \dim G = 4 = \dim \mathbb{R}^4$.

H et G sont donc supplémentaires.

La réponse C est bonne.

• $(\alpha,\ -\alpha + 3\beta,\ 3\beta,\ 2\alpha - 2\beta) = \alpha\,(1,\ -1,\ 0,\ 2) + \beta\,(0,\ 3,\ 3,\ -2)$
donc K est l'ensemble des combinaisons linéaires de $u' = (1,\ -1,\ 0,\ 2)$ et $v' = (0,\ 3,\ 3,\ -2)$.

De plus, (u', v') est une famille libre (2 pivots), donc $K = \text{Vect}\,(u',\ v')$, ce qui suffit à montrer que K est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de base (u', v').

On a alors : $\dim F + \dim K = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ et
$F + K = \text{Vect}\,(u,\ v,\ u',\ v')$.

Donc : $F + K = \mathbb{R}^4$ si $(u,\ v,\ u',\ v')$ est une famille libre.

Or :
$$\begin{array}{c|cccc} u & \boxed{1} & 2 & 3 & 0 \\ v & 0 & \boxed{-1} & 2 & -2 \\ u' & 1 & -1 & 0 & 2 \\ v' & 0 & 3 & 3 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} u & \boxed{1} & 2 & 3 & 0 \\ v & 0 & \boxed{-1} & 2 & -2 \\ u'-u & 0 & -3 & -3 & 2 \\ v' & 0 & 3 & 3 & -2 \end{array}$$

soit $\quad u' + v' - u = 0$

Donc $(u,\ v,\ u',\ v')$ est une famille liée et $F + K \neq \mathbb{R}^4$.

La réponse D est fausse.

Question 3 : réponse C

NON

• $(\text{ch}\,x,\ \text{sh}\,x)$ est une famille libre car $\text{ch} \neq 0$ et $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \text{ch} \neq \lambda\,\text{sh}$ puisque ch est paire et que sh est impaire. **La réponse A est fausse.**

• Pour $a = 1$, on a $\text{ch}\,x + \text{sh}\,x = e^x$. **La réponse B est fausse.**

Pour montrer qu'une famille $(u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_n)$ est libre pour tout n, on peut utiliser une récurrence.

• Ici, notons $f_k : x \mapsto (\ln x)^k$, et montrons par récurrence sur n que $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

– $f_0 : x \mapsto 1$ est libre car $f_0 \neq 0$.

– Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons que $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre, et montrons que $(f_0, f_1, \ldots, f_{n+1})$ est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que : $\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_{n+1} f_{n+1} = 0.$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \alpha_0 + \alpha_1 \ln x + \alpha_2 (\ln x)^2 + \ldots + \alpha_n (\ln x)^n + \alpha_{n+1} (\ln x)^{n+1} = 0 \quad (1)$$

Dérivons (1) : $\dfrac{\alpha_1}{x} + \dfrac{2\alpha_2}{x} \ln x + \ldots + \dfrac{n\alpha_n}{x} (\ln x)^{n-1} + \dfrac{(n+1)\alpha_{n+1}}{x} (\ln x)^n = 0$

soit : $\alpha_1 + 2\alpha_2 \ln x + \ldots + n\alpha_n (\ln x)^{n-1} + (n+1)\alpha_{n+1} (\ln x)^n = 0$

donc : $\alpha_1 f_0 + 2\alpha_2 f_1 + \ldots + n\alpha_n f_{n-1} + (n+1)\alpha_{n+1} f_n = 0$

Or, $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre, d'où : $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n+1} = 0$ et, en remplaçant dans (1) : $\alpha_0 = 0$ c'est-à-dire que $(f_0, f_1, \ldots, f_{n+1})$ est libre.

La réponse C est bonne.

Pour montrer qu'une famille de fonctions est libre, on peut donner des valeurs particulières à x, prendre des limites ou dériver.

• Supposons que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\quad \alpha + \beta \arctan x + \gamma \arctan \dfrac{1}{x} = 0 \quad (2)$

$$\text{(2) donne : } \begin{cases} \text{pour } x = 1 \;:\; \alpha + (\beta + \gamma)\dfrac{\pi}{4} = 0 \\ \text{quand } x \text{ tend vers } 0_+ \;:\; \alpha + \gamma\dfrac{\pi}{2} = 0 \\ \text{quand } x \text{ tend vers } 0_- \;:\; \alpha - \gamma\dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$

La réponse D est fausse.

Question 4 : réponse B

NON Pour $a = 0$: Vect $(e_1 + a, \ldots, e_k + a) = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{K}$, de dimension k.

La réponse A est fausse.

• $\mathrm{H} \oplus \mathrm{K} = \mathrm{E}$ donc : $\mathrm{H} \cap \mathrm{K} = \{0\}$ et, si $\dim \mathrm{E} = n$: $\dim \mathrm{H} = n - k$.

Soit $\mathrm{K}_a = \text{Vect}\,(e_1 + a, \ldots, e_k + a)$. Déterminons $\dim \mathrm{K}_a$.

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (e_i + a) = 0$.

Alors : $\displaystyle\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i}_{\in \mathrm{K}} = \underbrace{-\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) a}_{\in \mathrm{H}} \in \mathrm{H} \cap \mathrm{K} = \{0\}$, d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i = 0$

or, $(e_1, \ldots, e_k)$ est libre, donc $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ et $(e_1 + a, \ldots, e_k + a)$ est libre, soit $\dim \mathrm{K}_a = k$.

Déterminons $\mathrm{H} \cap \mathrm{K}_a$. Soit $u \in \mathrm{K}_a$ $\displaystyle u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (e_i + a)$.

Si $u \in \mathrm{H}$: $\displaystyle\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i}_{\in \mathrm{K}} = \underbrace{u - \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) a}_{\in \mathrm{H}} \in \mathrm{H} \cap \mathrm{K} = \{0\}$, soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i = 0$

d'où $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.
Donc : $u = 0$ et $H \cap K_a = \{0\}$ or $\dim \mathrm{H} + \dim \mathrm{K}_a = n$ donc $\mathrm{H} \oplus \mathrm{K}_a = \mathrm{E}$

La réponse B est bonne.

• Si Vect $(e_1 + a, \ldots, e_k + a) = \mathrm{K}$, alors : $e_i + a \in \mathrm{K}$. Or $\underbrace{a}_{\in \mathrm{H}} = \underbrace{(e_i + a)}_{\in \mathrm{K}} - \underbrace{e_i}_{\in \mathrm{K}}$

donc : $a \in \mathrm{H} \cap \mathrm{K} = \{0\}$, soit $a = 0$. **La réponse C est fausse.**

NON Si $\mathrm{K} = \{0\}$, K n'admet qu'un seul supplémentaire : E.

La réponse D est fausse.

QCM 2 Applications linéaires – Noyau et image

Question 1 : réponses B et D

- $f(e_1) = (1, 0, 0) = e_1, \quad f(e_2) = (0, 0, 1) = e_3, \quad f(e_3) = (3, 0, -2) = 3\,e_1 - 2\,e_3$

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

- $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$

Or $\quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big) = \operatorname{Vect}(e_1, e_3, 3e_1 - 2e_3)$

$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(e_1, e_3, 3e_1 - 2e_3) = 2$ car (e_1, e_3) est libre et $(e_1, e_3, 3e_1 - 2e_3)$ est liée.

Donc : $\quad \operatorname{rg} f = 2$ et (e_1, e_3) est une base de $\operatorname{Im} f$.

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

Question 2 : réponse B

- D'après le théorème du rang : $\quad \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathrm{E} - \operatorname{rg} f = 3 - 2 = 1$
  donc $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1 (droite).

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

- $\mathrm{F} \subset \mathrm{G} \;\Rightarrow\; \dim \mathrm{F} \leq \dim \mathrm{G}$, mais la réciproque est fausse. Vérifions le ici :

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f \;\Leftrightarrow\; f(x, y, z) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; (x, y, z) = z(-3, 2, 1).$$

$(-3, 2, 1) = -3\,e_1 + 2\,e_2 + e_3 \notin \operatorname{Vect}(e_1, e_3)$ donc $\operatorname{Ker} f \not\subset \operatorname{Im} f$.

La réponse C est fausse.

NON

- $(\mathrm{F}$ et G sont supplémentaires$) \;\Leftrightarrow\; \big(\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G}$ et $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}\big)$.

La réponse D est fausse.

Question 3 : réponses A et C

- $x \in \operatorname{Ker} f \;\Leftrightarrow\; f(x) = 0 \;\Rightarrow\; f^2(x) = 0 \;\Rightarrow\; x \in \operatorname{Ker} f^2$

donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.

– Supposons que $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$:

$$x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x) = 0 \\ \exists\, x' \in \mathrm{E},\ x = f(x') \quad (1) \end{cases}$$

Alors $f^2(x') = f(x) = 0$ et $x' \in \mathrm{Ker} f^2 \subset \mathrm{Ker} f$, donc $x' \in \mathrm{Ker} f$ soit $f(x') = 0$ d'où $x = 0$ d'après (1). Finalement : $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.

– Supposons que $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$: $x \in \mathrm{Ker} f^2 \Leftrightarrow f(x) \in \mathrm{Ker} f$.

Or $f(x) \in \mathrm{Im} f$ d'où $f(x) = 0$ soit $x \in \mathrm{Ker} f$, donc $\mathrm{Ker} f^2 \subset \mathrm{Ker} f$.

Finalement : $\mathrm{Ker} f^2 \subset \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$

La réponse A est bonne.

NON

$f^2(x) = f(f(x))$ donc, on a toujours : $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$.

Mais on n'a pas toujours : $\mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f = \mathrm{E}$. Par exemple, soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que : $f(e_1) = 0$ et $f(e_2) = f(e_3) = e_1$ avec (e_1, e_2, e_3) base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Alors : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f = \mathbb{R} e_1$ donc $\mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f = \mathbb{R} e_1 \neq \mathbb{R}^3$.

La réponse B est fausse.

• $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{rg} f = \mathrm{rg} f^2$, et d'après le théorème du rang :

$\dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2$, or $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$ donc $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$ et, d'après l'assertion A : $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.

De plus : $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{E}$ donc $\mathrm{E} = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Réciproquement, si $\mathrm{E} = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$: pour $x \in \mathrm{E}$, $y = f(x) \in \mathrm{Im} f$ et :

$$\exists!\ x_1 \in \mathrm{Ker} f \ ,\ \exists!\ x_2 \in \mathrm{Im} f \ \text{ et } \exists\ x_3 \in \mathrm{E},\ x = x_1 + x_2 = x_1 + f(x_3).$$

$$\text{Donc :}\quad y = f(x) = f\left(x_1 + f(x_3)\right) = \underbrace{f(x_1)}_{0} + f^2(x_3) = f^2(x_3) \in \mathrm{Im} f^2$$

et $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$. **La réponse C est bonne.**

NON

Si $f^2 = f$, alors $\mathrm{E} = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$. En revanche la réciproque est fausse. Soit par exemple une symétrie f : $f \neq Id$, $f\, o\, f = Id$ et f est bijective, donc $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{E}$ d'où $\mathrm{E} = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$, or $f^2 \neq f$.

La réponse D est fausse.

Question 4 : réponses B et D

NON Pour $x=0$, $\left(x,\ f(x),\ f^2(x),\ \ldots,\ f^{n-1}(x)\right)$ est liée . **La réponse A est fausse.**

• $f^{n-1} \neq 0$ donc $\exists\, x \in \mathrm{E},\ f^{n-1}(x) \neq 0$. Pour cet x, soit $(\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}) \in \mathrm{K}^n$ tel que :

$$\alpha_0\, x + \alpha_1 f(x) + \alpha_2 f^2(x) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x) = 0 \qquad (2)$$

Composons (2) par f^{n-1} :

$$f^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x)\right) = 0 \iff \alpha_0 f^{n-1}(x) = 0 \quad \text{car} \quad f^{n-1+i} = 0 \ \text{ pour } i \geq 1.$$

Or : $\quad f^{n-1}(x) \neq 0$ donc $\alpha_0 = 0$ et (2) $\iff \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f^i(x) = 0$

On compose alors par f^{n-2} pour obtenir $\alpha_1 = 0$, et ainsi de suite jusqu'à avoir :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0 \ \text{ donc } \left(x,\ f(x),\ f^2(x),\ \ldots,\ f^{n-1}(x)\right) \text{ est libre.}$$

La réponse B est bonne.

• Si $\dim \mathrm{E} = n$, la famille précédente de n vecteurs, libre, est une base de E. Donc :

$$\mathrm{Vect}\left(x,\ f(x),\ f^2(x),\ \ldots,\ f^{n-1}(x)\right) = \mathrm{E}$$

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left(f(x),\ f^2(x),\ \ldots,\ \underbrace{f^n(x)}_{0}\right) = \mathrm{Vect}\left(f(x),\ f^2(x),\ \ldots,\ f^{n-1}(x)\right)$$

donc $\mathrm{Im}\, f \neq \mathrm{E}$. **La réponse C est fausse.**

• $\left(f(x),\ f^2(x),\ \ldots,\ f^{n-1}(x)\right)$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$, donc, d'après le théorème du rang :

$\dim \mathrm{Ker} f = 1$ or $f\left(f^{n-1}(x)\right) = 0$ d'où $f^{n-1}(x) \in \mathrm{Ker} f$ et $f^{n-1}(x) \neq 0$

donc $\quad f^{n-1}(x)$ est une base de $\mathrm{Ker}\, f$. **La réponse D est bonne.**

→ QCM 3 Endomorphisme de $C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

• Question 1 : réponse C

• $F = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel et un anneau.
Si E est un anneau, E est stable pour $\times$ et $+$, et on a :
$f_1^2 - f_2^2 = \mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1 \in \mathrm{E}$.

Donc il existe 2 polynômes P et Q tels que : $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \ P(x)\mathrm{ch}\, x + Q(x)\mathrm{sh}\, x = 1$

$$\text{soit : } \frac{1}{2}\,[P(x)+Q(x)]e^{x} + \frac{1}{2}\,[P(x)-Q(x)]e^{-x} = 1 \ \text{ avec }\ P \neq 0 \ \text{ ou } Q \neq 0.$$

Or, la limite du membre de gauche quand x tend vers $+\infty$ est $\pm\infty$ et non pas 1.
Donc $1 \notin \mathrm{E}$ et E n'est pas un anneau. **La réponse A est fausse.**

$$\mathrm{E} = \left\{ f : x \mapsto \left(a\,x^2 + b\,x + c\right)\mathrm{ch}\, x + \left(a'x^2 + b'x + c'\right)\mathrm{sh}\, x \;/\; \left(a, b, c, a', b', c'\right) \in \mathbb{R}^6 \right\}$$

autrement dit : $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\left(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\right)$

La réponse B est fausse et la réponse C est bonne.

NON $0 \in \mathrm{E}$ et 0 n'a pas d'inverse pour x. **La réponse D est fausse.**

• Question 2 : réponses B et D

$$\bullet\ f(x) = \frac{1}{2}\left[(\lambda_1+\mu_1)+(\lambda_2+\mu_2)\,x+(\lambda_3+\mu_3)\,x^2\right]e^{x}$$
$$+\frac{1}{2}\left[(\lambda_1-\mu_1)+(\lambda_2-\mu_2)\,x+(\lambda_3-\mu_3)\,x^2\right]e^{-x}$$

$$f(x)\,e^{-x} = \underbrace{\frac{1}{2}\left[(\lambda_1+\mu_1)+(\lambda_2+\mu_2)\,x+(\lambda_3+\mu_3)\,x^2\right]}_{g(x)}$$
$$+\underbrace{\frac{1}{2}\left[(\lambda_1-\mu_1)+(\lambda_2-\mu_2)\,x+(\lambda_3-\mu_3)\,x^2\right]e^{-2x}}_{h(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0 \ \text{ donc } \ \lim_{x\to+\infty} f(x)\,e^{-x} = 0 \iff \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \iff g = 0$$

soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,e^{-x} = 0 \iff \lambda_1+\mu_1 = \lambda_2+\mu_2 = \lambda_3+\mu_3 = 0$.

La réponse A est fausse.

- $$f(x)\,e^{x} = \underbrace{\frac{1}{2}\left[(\lambda_1+\mu_1)+(\lambda_2+\mu_2)\,x+(\lambda_3+\mu_3)\,x^2\right]e^{2x}}_{k(x)}$$
$$+\underbrace{\frac{1}{2}\left[(\lambda_1-\mu_1)+(\lambda_2-\mu_2)\,x+(\lambda_3-\mu_3)\,x^2\right]}_{m(x)}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)=0$,

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,e^{x}=0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_1-\mu_1=\lambda_2-\mu_2=\lambda_3-\mu_3=0$

La réponse B est bonne.

- Cherchons si $(f_i)_{1\le i\le 6}$ est liée. Soit $(\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3,\,\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3)\in\mathbb{R}^6$ tel que :

$$\lambda_1 f_1+\mu_1 f_2+\lambda_2 f_3+\mu_2 f_4+\lambda_3 f_5+\mu_3 f_6=0$$

c'est-à-dire : $\forall\ x\in\mathbb{R},\quad f(x)=0$

En prenant les limites en $+\infty$ de $f(x)\,e^{-x}$, et en $-\infty$ de $f(x)\,e^{x}$, on obtient :

$$\begin{cases}\lambda_1+\mu_1=\lambda_2+\mu_2=\lambda_3+\mu_3=0\\ \lambda_1-\mu_1=\lambda_2-\mu_2=\lambda_3-\mu_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$$

Donc $(f_i)_{1\le i\le 6}$ est libre. Or, elle est génératrice de E, donc c'est une base de E.

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

Question 3 : réponses B et C

NON La dérivation est linéaire : $(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'$.

La réponse A est fausse.

- $D(f+k)=f'=D(f)$ car $D(k)=0$ donc D n'est pas injective, donc pas bijective.

La réponse B est bonne.

- Si $f\in\mathrm{E}$: $\forall\ x\in\mathbb{R}\ f(x)=P(x)\mathrm{ch}\,x+Q(x)\mathrm{sh}\,x$, avec $\deg P\le 2$ et $\deg Q\le 2$.

$f'(x)=[P'(x)+Q(x)]\mathrm{ch}\,x+[P(x)+Q'(x)]\,\mathrm{sh}\,x$, $\deg(P'+Q)\le 2$ et $\deg(P+Q')\le 2$.

Donc $f' \in \mathrm{E}$. Or, D est linéaire, donc D induit un endomorphisme de E.

La réponse C est bonne.

NON

• Soit Δ l'endomorphisme induit par D dans E : $f \in \operatorname{Ker}\Delta \iff f' = 0$.

$$f'(x) = \left[\lambda_2 + \mu_1 + (2\lambda_3 + \mu_2)x + \mu_3 x^2\right]\operatorname{ch}x + \left[\lambda_1 + \mu_2 + (\lambda_2 + 2\mu_3)x + \lambda_3 x^2\right]\operatorname{sh}x$$

$f' = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ donc $\operatorname{Ker}\Delta = \{0\}$, donc Δ est injective.

Or, E est de dimension finie, donc Δ est bijective.

La réponse D est fausse.

• Question 4 : réponses A et D

• $\operatorname{Im}\left(D^2 - id\right) = \operatorname{Vect}\left(\left(D^2 - id\right)(f_i)\right)_{1 \le i \le 6}$. Les calculs donnent :

$$\left(D^2 - id\right)(f_1) = 0\,,\ \left(D^2 - id\right)(f_2) = 0\,,\ \left(D^2 - id\right)(f_3) = 2f_2\,,\ \left(D^2 - id\right)(f_4) = 2f_1$$

$$\left(D^2 - id\right)(f_5) = 2f_1 + 4f_4\,,\ \left(D^2 - id\right)(f_6) = 2f_2 + 4f_3.$$

$$\operatorname{Im}\left(D^2 - id\right) = \operatorname{Vect}\left(f_1,\ f_2,\ 2f_1 + 4f_4,\ 2f_2 + 4f_3\right) = \operatorname{Vect}\left(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4\right).$$

Or $\left(f_1, f_2, f_3, f_4\right)$ est libre, donc c'est une base de $\operatorname{Im}\left(D^2 - id\right)$, qui est donc de dimension 4. **La réponse A est bonne et la réponse B est fausse.**

• $f \in \operatorname{Ker}\left(D^2 - id\right) \iff D^2(f) - f = 0 \iff f'' - f = 0 \quad (1)$

La réponse C est fausse.

• (1) a pour équation caractéristique : $r^2 - 1 = 0$ et pour racines : $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$

donc, les solutions de (1) sont les fonctions :

$$f : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Alors, $\operatorname{Ker}\left(D^2 - id\right)$ est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$. Or, f_1 et f_2 sont solutions de (1), et $\left(f_1, f_2\right)$ est libre, donc c'est une base de $\operatorname{Ker}\left(D^2 - id\right)$. **La réponse D est bonne.**

→ QCM 4 Endomorphismes solutions d'une équation

• Question 1 : réponses C et D

NON

• Si $\alpha = 0$: (1) $\Leftrightarrow\ f^2 = 0\ \Leftrightarrow\ \forall\, x \in \mathrm{E},\ f\,(f(x)) = 0$
$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in \mathrm{E},\ f(x) \in \operatorname{Ker} f\ \Leftrightarrow\ \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

Si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ et E de dimension $n \geq 2$:

$n = \dim\ \operatorname{Im} f + \dim\ \operatorname{Ker} f = 2\ \dim\ \operatorname{Ker} f$.

Si n est impair, cela est impossible. **La réponse A est fausse.**

• Pour $\alpha = -1$, $f = Id$ vérifie (1) et est bijective. **La réponse B est fausse.**

• Pour $\alpha \neq 0$ et $\lambda \neq 0$: $p = \lambda f$ projecteur $\Leftrightarrow\ \lambda^2 f^2 = \lambda f\ \Leftrightarrow\ f^2 = \dfrac{1}{\lambda} f$.

$\lambda = -\dfrac{1}{\alpha}$ convient, donc : f solution de (1) $\Rightarrow\ -\dfrac{1}{\alpha} f$ projecteur

La réponse C est bonne.

• Si $-\dfrac{1}{\alpha} f$ est un projecteur : $\operatorname{Ker}\left(-\dfrac{1}{\alpha} f\right) \oplus \operatorname{Im}\left(-\dfrac{1}{\alpha} f\right) = \mathrm{E}$

Or : $\operatorname{Ker}\left(-\dfrac{1}{\alpha} f\right) = \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im}\left(-\dfrac{1}{\alpha} f\right) = \operatorname{Ker}\left(Id + \dfrac{1}{\alpha} f\right) = \operatorname{Ker}(f + \alpha\, Id)$

car $Id + \dfrac{1}{\alpha} f$ est le projecteur associé à $-\dfrac{1}{\alpha} f$.

Donc : $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}\,(f + \alpha\, Id) = \mathrm{E}$. **La réponse D est bonne.**

• Question 2 : réponses B et C

NON

$f(u) = f\,(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = \sum_{i=1}^{4} f\,(e_i) = \sum_{i=1}^{4} (u - e_i) = 4\,u - u = 3\,u$.

La réponse A est fausse.

• $h \in \operatorname{Ker} g\ \Leftrightarrow\ g(h) = 0\ \Leftrightarrow\ f(h) + h = 0\ \Leftrightarrow\ f(h) = -h$.

Soit $x \in \mathrm{D} \cap \operatorname{Ker} g : x = \lambda\, u$ donc $f(x) = \lambda f(u) = 3\lambda\, u = 3\,x$.

Or : $x \in \operatorname{Ker} g$ donc $f(x) = -x$ d'où $3x = -x$ soit $x = 0$.

Donc : $D \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$ **La réponse B est bonne.**

- $\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}\left(g(e_i)\right)_{1 \le i \le 4}$ or $g(e_i) = (f + Id)(e_i) = f(e_i) + e_i = u$

donc $\operatorname{Im} g = D$,

soit $\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$. De plus : $\dim \operatorname{Im} g + \dim \operatorname{Ker} g = \dim E = 4$.

Donc : $D \oplus \operatorname{Ker} g = E$ **La réponse C est bonne.**

- $\forall\, i \in [\![1, 4]\!]$: $g^2(e_i) = g(u) = f(u) + u = 3u + u = 4u = 4g(e_i)$

donc $g^2 = 4g$.

Or : $g = f + Id$ donc $(f + Id)^2 = 4(f + Id)$ soit $f^2 - 2f - 3Id = 0$.

La réponse D est fausse.

• Question 3 : réponses B et D

NON

On vérifie aisément : (2) $\Leftrightarrow$ $(f + Id)\ o\ (f - 3Id) = 0$

$\mathscr{L}(E)$ a des diviseurs de zéro, donc $f = -Id$ et $f = 3Id$ sont des solutions de (2), mais ce ne sont pas les seules : f définie à la question 2 est également solution. **La réponse A est fausse.**

- $f^2 - 2f - 3Id = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\left(f^2 - 2f\right) = Id \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}(f - 2Id)\ o f = Id$.

Donc f est une bijection et : $f^{-1} = \dfrac{1}{3}(f - 2Id)$

La réponse B est bonne.

NON

- $F_\lambda = \{\, u \in E \ /\ f(u) - \lambda u = 0 \,\} = \operatorname{Ker}(f - \lambda Id)$ donc F_λ est toujours un sous-espace vectoriel de E. **La réponse C est fausse.**

- $F_{-1} = \operatorname{Ker}(f + Id) = \{\, u \in E \ /\ f(u) = -u \,\}$

et $F_3 = \operatorname{Ker}(f - 3Id) = \{\, u \in E \ /\ f(u) = 3u \,\}$.

Cherchons si $F_{-1} \oplus F_3 = E$, c'est-à-dire si :

$$\forall\, u \in E,\ \exists!\ (v, w) \in F_{-1} \times F_3,\ \ u = v + w$$

Soit $u \in$ E, on cherche v et w tels que : $\begin{cases} f(v) = -v \\ f(w) = 3w \\ v + w = u \end{cases}$

Si v et w existent : $f(v+w) = f(u)$ soit $f(v) + f(w) = f(u)$ donc :

$$\begin{cases} v + w = u \\ -v + 3w = f(u) \end{cases}$$

de solution unique : $v = \dfrac{1}{4}\,(3u - f(u))$ et $w = \dfrac{1}{4}\,(u + f(u))$.

Montrons que v et w conviennent, c'est-à-dire que $v \in F_{-1}$ et $w \in F_3$.

- $f(v) = \dfrac{1}{4}\left(3f(u) - f^2(u)\right) = \dfrac{1}{4}\left(3f(u) - (2f(u) + 3u)\right) = \dfrac{1}{4}\left(f(u) - 3u\right) = -v$ car f vérifie (2), donc $v \in F_{-1}$.

- De même : $f(w) = \dfrac{1}{4}\left(f(u) + f^2(u)\right) = \dfrac{1}{4}\left(3f(u) + 3u\right) = 3w$ donc $w \in F_3$.

Finalement : $F_{-1} \oplus F_3 = E$ **La réponse D est bonne.**

Question 4 : réponses A et C

Projecteur

Soit p un projecteur sur F suivant G tel que : $E = F \oplus G$.

- Le projecteur associé à p est le projecteur q sur G suivant F, tel que $q = Id - p$.

$$F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} q \quad , \quad G = \operatorname{Im} q = \operatorname{Ker} p \quad , \quad p \circ q = q \circ p = 0 \,.$$

Tout vecteur $u \in E$ s'écrit de manière unique $u = v + w$ avec $v \in F$, $w \in G$.

$p : u \mapsto v$ et $q : u \mapsto w$

- p projecteur de E $\Leftrightarrow$ $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$.

• $\mathscr{F}_p = \mathrm{Vect}\,(p,\ q)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ engendré par $(p,\ q)$.

$p \neq 0$ et $p \neq Id$ donc $q \neq 0$.

Cherchons si $(p,\ q)$ est libre :

$$\alpha\, p + \beta\, q = 0 \quad \Rightarrow \quad p\, o\, (\alpha\, p + \beta\, q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\, p^2 + \beta\, p\, o\, q = 0\,.$$

Or : $\quad p^2 = p \neq 0$ et $p\, o\, q = 0$ donc $\alpha = 0$.

de plus $\quad q \neq 0 \quad$ d'où $\quad \beta = 0$.

Donc, $(p,\ q)$ est libre, et est une base de $\mathscr{F}_p$, de dimension 2.

La réponse A est bonne.

• $\mathscr{F}_p$ est un groupe pour +, car c'est un espace vectoriel.

– $Id = p + q \in \mathscr{F}_p$.

– $(\alpha\, p + \beta\, q)\, o\, (\alpha' p + \beta' q) = \alpha\alpha' p^2 + \alpha\beta' p\, o\, q + \alpha'\beta\, q\, o\, p + \beta\beta' q^2$

$$= \alpha\alpha' p + \beta\beta' q \in \mathscr{F}_p$$

Donc $\mathscr{F}_p$ est un sous-anneau de $\mathscr{L}\,(\mathrm{E})$. **La réponse B est fausse.**

• $p = \dfrac{1}{4}(f + Id)$ donc $p^2 = \dfrac{1}{16}(f + Id)^2 = \dfrac{1}{16}\left(f^2 + 2f + Id\right)$

or $\quad f^2 = 2f + 3\,Id$

d'où $\quad p^2 = \dfrac{1}{16}(4f + 4\,Id) = \dfrac{1}{4}(f + Id) = p$: $\quad p$ est un projecteur.

– $f^0 = Id = p + q = 3^0 p + (-1)^0 q$

– $f^1 = f = 4\,p - Id = 3\,p - q = 3^1 p + (-1)^1 q$

– p et q commutent , donc on peut appliquer la formule du binôme :

$$f^n = (3\,p - q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, 3^k\, p^k\, (-q)^{n-k}$$

Or : $\quad p\, o\, q = q\, o\, p = 0$ et $\forall\ k \geq 2,\ \ p^k = p$ et $q^k = q$ d'où:

$f^n = 3^n p + (-1)^n q$ **La réponse C est bonne.**

NON $f = -Id$ est solution de (2), et donne $p = 0$: dès lors, $(p,\ q)$ n'est pas une base de $\mathscr{F}_p$. **La réponse D est fausse.**

chapitre 9

Polynômes et fractions rationnelles

QCM 1 Degré et racines

Question 1

Soit $n,\ p \in \mathbb{N}^*,\ A = aX^n$ et $B = bX^{n-1}$ $\left(a, b \in \mathbb{R}^*\right)$.

On cherche la valeur maximale m du degré du polynôme $(AP' + BP)$ lorsque P décrit l'ensemble des polynômes de degré p.

A Pour que m soit le maximum recherché, il suffit de montrer que :

$$\deg(AP' + BP) \leq m \quad \text{pour tout polynôme } P \text{ de degré } p.$$

B $\deg(AP') = \deg(BP) = n + p - 1$ donc $\deg(AP' + BP) = n + p - 1$.

C $\deg(AP' + BP) \leq n + p - 1$ donc $m = n + p - 1$.

D Il existe des valeurs de a, b pour lesquelles $m = n + p - 2$.

Question 2 (d'après EPL 1993)

Soit, dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$ et $j = e^{i\,2\pi/3}$.

De l'étude de P et P', on déduit que :

A j et $\overline{j}$ sont racines de P et de P'.

B $\deg P = 6$ et P admet une racine double réelle.

Soient Q et R les polynômes tels que : $\begin{cases} P = \left(X^2 + X + 1\right) Q + R \\ \deg R \leq 1 \end{cases}$

C R n'existe pas.

D $R = X + 1$.

Question 3 (d'après EPL 2008)

A $\forall\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0,\ 1,\ 2\},\ P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ possède au moins une racine multiple car : $P_n' = P_{n-1}$.

B $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$ est l'unique polynôme vérifiant :

$$P_n - P'_n = \frac{X^n}{n!}$$

C $P = X^3 + pX + q$ admet une racine α d'ordre 2 si et seulement si :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$$

D $P = X^3 + pX + q$ admet une racine d'ordre 2 si et seulement si :

$$\begin{cases} 4p^3 + 27q^2 = 0 \\ p \neq 0 \end{cases}$$

• Question 4 (d'après EPL 2008)

On considère un polynôme P non nul tel que : $P\left(X^2\right) - P(X+1)P(X) = 0$

A Si a est une racine de P, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, a^{2n} et $(a-1)^{2n}$ sont aussi racines de P.

B Si a est une racine de P, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, a^{2^n} et $(a-1)^{2^n}$ sont aussi racines de P.

C Si a est une racine non nulle de P, a et $a - 1$ sont des racines de l'unité.

D Si P n'est pas constant, les racines de P sont 0, 1, $-j$ et $-\overline{j}$.

QCM 2 Polynômes scindés

• Question 1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 2$, scindé et à racines simples dans $\mathbb{R}$.

Soit $Q = P^2 + a^2 \quad \left(a \in \mathbb{R}^*\right)$.

A P n'a aucune racine multiple, donc P' n'a aucune racine réelle.

B P' a $(n-1)$ racines réelles distinctes.

C Q admet au moins une racine réelle.

D Q admet $2n$ racines simples dans $\mathbb{C}$.

• Question 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

Soit H l'hyperbole équilatère d'équation : $xy = 1$

Un cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega\ (a, b)$, $\Omega \neq O$, coupe H en quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 d'abscisses respectives x_1, x_2, x_3 et x_4.

A x_1, x_2, x_3 et x_4 sont les racines d'une équation du 4e degré.

B On a : $x_1\ x_2\ x_3\ x_4 = 1$ et $x_2\ x_3\ x_4 + x_1\ x_3\ x_4 + x_1\ x_2\ x_4 + x_1\ x_2\ x_3 = -2\,b$.

C $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\,a$ et $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4} = b$.

D L'isobarycentre G de M_1, M_2, M_3 et M_4 est le milieu de $[O\Omega]$.

• Question 3 (réservée aux MPSI)

Soit P un polynôme de degré n ($n \geq 1$).
On note k le nombre de racines distinctes de P.
Le PGCD $\Delta = P \wedge P'$ est de degré $n - k$:

A si $P \in \mathbb{C}[X]$.

B si $P \in \mathbb{R}[X]$.

On suppose que $P \in \mathbb{C}[X]$ et que P' divise P. Alors :

C $n = 2k$

D $k = 1$

QCM 3 Polynômes de Tchebychev

(d'après EPL 2007 et 2008)

Les polynômes de Tchebychev $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, s'ils existent, vérifient :

$$\forall\ \theta \in \mathbb{R},\quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \qquad (1)$$

• Question 1

A Si T_n et $\widetilde{T}_n$ sont deux polynômes de Tchebychev, alors ils sont égaux car : $\forall\ x \in [-1,\ 1],\ \ T_n(x) = \widetilde{T}_n(x)$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique.

B $T_n = \displaystyle\sum_{0 \leq 2p \leq n} (-1)^p \binom{n}{p} X^{n-2p} \left(1 - X^2\right)^p$

C $T_n = \displaystyle\sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} X^{n-2p} \left(X^2 - 1\right)^p$

D T_n est à coefficients non entiers.

• Question 2

A $T_2 = 2\,X^2 - 1$

B $T_2 = 2\,X^2 + 1$

C $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ T_{n+1} - T_{n-1} = X\,T_n$

D $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ T_{n+1} + T_{n-1} = 2\,X\,T_n$.

Question 3

Pour $n > 0$, lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction polynôme $T_n(x)$ est équivalente à :

A $2^n x^n$

B $2^{n-1} x^n$

C $T_n(1) = 0$ et T_n est impair si n est impair.

D $T_n(1) = 1$ et T_n est pair si n est pair.

Question 4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

A T_n a des racines n'appartenant pas à $[-1, 1]$.

B T_n a exactement n racines : $x_k = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$, $k \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n-1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\quad A_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)$.

De la factorisation de T_n et de la valeur de $T_n(1) = 1$, on déduit :

C $A_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2^n}$

D $A_n = \dfrac{1}{2^n}$

Question 5 (réservée aux MPSI)

Pour $k \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n-1$, on note $\theta_k = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$ et $x_k = \cos\theta_k$.

Soit la fraction rationnelle $F_n = \dfrac{1}{T_n}$.

A $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \exists\ (U,V) \in \mathbb{C}[X]^2,\ \ UT_n + VT_{n+1} = 1$

B $\forall\ \theta \in \mathbb{R},\ \ T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta)$.

La décomposition en éléments simples de F_n est :

C $F_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin(\theta_k)}{X - x_k}$

D $F_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{X - x_k}$

QCM 4 Espaces vectoriels et polynômes

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose : $P_k = X^k$

$$N_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\ k \geq 1,\ N_k = \frac{1}{k!} X(X-1)(X-2)\ldots(X-k+1)$$

et pour $k \leq n$: $\quad Q_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

Question 1

A La famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E_n.

B La famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ n'est pas une base de E_n.

C Pour tout polynôme S de E_n, la famille $\left(S, S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(n)}\right)$, où $S^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de S, est une base de E_n.

D La famille $(N_0, N_1, \ldots, N_n)$ est une base de E_n.

Question 2

A $\forall\ n \geq 1,\ N_n(X+1) - N_n(X) = N_{n-1}(X)$.

B $n\, N_n(X) = (X-n)\, N_{n-1}(X)$

C $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ N_k(n) \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad N_k(-1) = (-1)^k$.

D $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq 2,\ N_k(-n) \notin \mathbb{Z}$.

Question 3

Soit Δ l'endomorphisme de E défini par : $\forall\ P \in E,\ \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$

A Soit $P \in \operatorname{Ker} \Delta$ et $Q = P - P(0)$. On peut montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ Q(n) = 0$, donc $\operatorname{Ker} \Delta = E_0$ (polynômes constants).

B Δ induit un endomorphisme Δ_n de E_n de rang $(n-1)$ car $\dim(\operatorname{Ker} \Delta_n) = 1$.

Soit $Q \in$ E, et l'équation linéaire (1) : $\Delta(P) = Q$ d'inconnue $P \in$ E.

C $\operatorname{Im}(\Delta_n) = E_{n-1}$, or $\operatorname{Ker} \Delta \neq \{0\}$ donc Δ n'est pas surjective, donc (1) n'a pas toujours de solution dans E.

D Pour $Q = a_0\, N_0 + a_1\, N_1 + \ldots + a_n\, N_n$, $P_0 = a_0\, N_1 + a_1\, N_2 + \ldots + a_n\, N_{n+1}$ est l'unique solution de (1).

→ QCM 1 Degré et racines

• Question 1 : réponse D

• Soit $E = \{ \deg (AP' + BP) / \deg P = p \}$. m est le plus grand élément de E si et seulement m est un majorant tel que :

$$\exists P \in \mathbb{R}[X], \quad \deg P = p, \quad m = \deg(AP' + BP)$$

$\deg (AP' + BP) \leq m$ signifie seulement que m est un majorant de E.

La réponse A est fausse.

Degré d'une somme de polynômes

$$\deg(P+Q) \leq \operatorname{Max}(\deg P, \ \deg Q)$$

$\left(\deg(P+Q) = \operatorname{Max}(\deg P, \ \deg Q)\right)$

$\Leftrightarrow$ $(\deg P \neq \deg Q)$ ou (deg $P = \deg Q$ et la somme des coefficients dominants de P et Q est non nulle).

• $\deg A = n$ et $\deg P = p$ donc $\deg P' = p - 1$ car $p \geq 1$.

$\deg(AP') = \deg A + \deg P' = n + p - 1$ et $\deg(BP) = \deg B + \deg P = n - 1 + p$

donc $\deg(AP') = \deg(BP) = n + p - 1$ et $\deg(AP' + BP) \leq n + p - 1$.

Soit α_p le coefficient dominant de P $(\alpha_p \neq 0)$:

$P = \alpha_p X^p + P_1$ avec $\deg P_1 \leq p - 1$.

$$P' = p\,\alpha_p X^{p-1} + P_1' \quad \text{avec} \quad \deg P_1' \leq p - 2\,.$$

Donc le coefficient de X^{n+p-1} dans $(AP' + BP)$ est :

$$\beta = a\,p\,\alpha_p + b\,\alpha_p = \alpha_p(a\,p + b)$$

or $\alpha_p \neq 0$ donc : $\beta \neq 0 \Leftrightarrow a\,p + b \neq 0$.

En conclusion : $m = n + p - 1 \Leftrightarrow a\,p + b \neq 0$.

Les réponses B et C sont fausses.

• <u>Si $a\,p + b = 0$:</u> alors $\beta = 0$ donc $\deg(AP' + BP) \leq n + p - 2$.

Le coefficient de X^{n+p-2} dans $(AP' + BP)$ est $\left[a(p-1) + b\right]\alpha_{p-1} = -a\,\alpha_{p-1} \neq 0$ pour $P = X^p + X^{p-1}$ par exemple.

Donc $m = n + p - 2$.

La réponse D est bonne

• Question 2 : réponse A

• $P=(X+1)^7-X^7-1$ donc $P'=7\left[(X+1)^6-X^6\right]$.

P et P' sont à coefficients réels, donc, si z_0 est racine de P (respectivement P'), $\overline{z}_0$ l'est aussi. Ainsi, il suffit de calculer $P(j)$ et $P'(j)$.

$j=e^{i\,2\pi/3}$ est une racine cubique de 1, donc : $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$.

- $P(j)=(j+1)^7-j^7-1=\left(-j^2\right)^7-j-1=-j^2-j-1=0$

- $P'(j)=7\left[(j+1)^6-j^6\right]=7\left[\left(-j^2\right)^6-1\right]=7\,(1-1)=0$

Donc j et $\overline{j}$ sont racines au moins doubles de P.

La réponse A est bonne.

• $\deg\,(X+1)^7=\deg\left(X^7+1\right)=7$ donc $\deg P\le 7$.

$P=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}X^k-X^7-1=\sum_{k=1}^{6}\binom{7}{k}X^k$, donc $\deg P=6$ et 0 est racine de P.

Par ailleurs, en factorisant :

$$P=(X+1)^7-(X+1)\left(X^6-X^5+X^4-X^3+X^2-X+1\right).$$

Donc -1 est racine de P. De plus, $P'(0)\neq 0$ et $P'(-1)\neq 0$.

Donc les racines de P sont 0 et -1 qui sont simples, et j et $\overline{j}$ qui sont doubles. On a ainsi obtenu toutes les racines de P puisque $\deg P=6$.

La réponse B est fausse.

• Q et R sont le quotient et le reste de la division euclidienne de P par X^2+X+1.

Or $X^2+X+1=(X-j)\left(X-\overline{j}\right)$, et j et $\overline{j}$ sont racines de P, donc X^2+X+1 divise P.

Les réponses C et D sont fausses.

Question 3 : réponses B et D

• $P'_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k\,X^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{X^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{X^k}{k!} = P_{n-1}.$

Pour que P_n ait une racine multiple α, il faut : $P_n(\alpha) = P'_n(\alpha) = 0.$

$P_n = \dfrac{X^n}{n!} + P_{n-1}$ donc $P_n(\alpha) = P'_n(\alpha) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\alpha^n}{n!} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0.$

Or, 0 n'est pas racine de P_n .

La réponse A est fausse.

• On a vu que $P_n - P'_n = \dfrac{X^n}{n!}$ donc P_n est solution de : $y' - y = \dfrac{x^n}{n!}$ (1)

Les solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ sont : $x \mapsto \lambda\, e^x$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Donc, les solutions de (1) sont les fonctions : $f : x \mapsto \mathrm{P_n}(x) + \lambda\, e^x$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

f est un polynôme si et seulement si $\lambda = 0$.

La réponse B est bonne.

Racine d'ordre *m* d'un polynôme *P*

$(\alpha$ est racine d'ordre m de $P) \Leftrightarrow \big((X-\alpha)^m$ divise P et $(X-\alpha)^{m+1}$ ne divise pas $P\big)$

$\Leftrightarrow \big(\exists\, Q \in K[X],\; P = (X-\alpha)^m Q,\; Q(\alpha) \neq 0\big)$

$\Leftrightarrow \big(P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0,\; P^{(m)}(\alpha) \neq 0\big)$

NON Ici, α est racine multiple, pas nécessairement d'ordre 2, car il manque $P''(\alpha) \neq 0$.

La réponse C est fausse.

• P admet une racine d'ordre 2 si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = 0 \\ P''(\alpha) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 + p\,\alpha + q = 0 \\ 3\,\alpha^2 + p = 0 \\ 6\,\alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = -\dfrac{p}{3} & (1) \\ \dfrac{2\,p}{3}\alpha + q = 0 & (2) \\ \alpha \neq 0 & (3) \end{cases}$$

D'après (1) et (2) :

- $\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = q = 0$, et 0 est alors racine triple de P.

- Si $\alpha \neq 0, p \neq 0$, et : $\quad (2) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -\dfrac{3\,q}{2\,p}$ et (1) devient : $\quad 4\,p^3 + 27\,q^2 = 0$.

Donc, α existe si et seulement si : $\begin{cases} 4\,p^3 + 27\,q^2 = 0 \\ p \neq 0 \end{cases}$

La réponse D est bonne.

• Question 4 : réponses B et C

• Soit $P \neq 0$ tel que : $\quad P\left(X^2\right) = P(X+1)\,P(X) \quad (1)$

Si a est racine de P : $\quad P(a) = 0$ et, d'après (1), $P\left(a^2\right) = 0$, donc a^2 est racine de P.

En réitérant le raisonnement précédent pour a^2, on obtient $\left(a^2\right)^2 = a^{2^2}$ racine de P, et ainsi de suite (récurrence simple). Donc : $\quad P(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad P\left(a^{2^n}\right) = 0$.

$P\left((a-1)^2\right) = P(a)\,P(a-1) = 0 \quad$ donc, de même, $(a-1)^{2^n}$ est racine de P

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

Remarquons que l'on n'a pas montré que $(a - 1)$ est racine de P $(n \geq 1)$.

• P admet un nombre fini de racines ($P \neq 0$) donc les suites a^{2^n} et $(a-1)^{2^n}$ ont un nombre fini de valeurs, autrement dit, concernant a^{2^n} :

$$\exists\ (p,q) \in \mathbb{N}^{*2},\quad a^{2^p} = a^{2^q}$$

Or, $a \neq 0$, et par exemple $p > q$, donc $a^{2^p - 2^q} = 1$, donc a est racine de l'unité.

On raisonne de même concernant $(a-1)^{2^n}$, donc $(a-1)$ est racine de l'unité.

La réponse C est bonne.

• Si P n'est pas constant, P a au moins une racine $a \in \mathbb{C}$.

D'après ce qui précède, soit $a = 0$, soit $a = 1$, soit $|a| = |a-1| = 1$,

donc $a = e^{i\theta}$.

Or :

$$\left|e^{i\theta} - 1\right| = 1 \iff (\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta = 1 \iff \cos\theta = \frac{1}{2} \iff \theta \equiv \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Alors :

$$|a| = |a-1| = 1 \iff a = e^{+i\pi/3} \text{ ou } a = e^{-i\pi/3} \iff a = -j \text{ ou } a = -\overline{j}.$$

Donc, 0, 1, $-j$ et $-\overline{j}$ sont les seules racines possibles de P.

Si $a = -j$ est racine de P, $a^2 = \overline{j}$ n'est pas racine, ce qui contredit l'assertion B.

De même, si $a = -\overline{j}$ est racine de P, $a^2 = j$ n'est pas racine.

Donc, les seules racines de P sont 0 et 1.

La réponse D est fausse.

→ QCM 2 Polynômes scindés

• Question 1 : réponses B et D

• P admet n racines réelles distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$.

P est continue et dérivable, et $P(x_1) = P(x_2) = \ldots = P(x_n)$, donc on peut appliquer le théorème de Rolle aux $(n-1)$ intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq n-1$:

$$\forall\ i \in [\![1, n-1]\!],\ \exists\ x'_i \in [x_i, x_{i+1}],\ P'(x'_i) = 0$$

Donc P' admet $(n-1)$ racines réelles distinctes, et P' est scindé car $\deg P' = n-1$.

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

NON $Q(x)=0 \iff P^2(x) = -a^2 < 0$ ce qui est impossible.

Donc Q n'a aucune racine réelle. **La réponse C est fausse.**

• $\deg Q = 2n$, donc Q admet $2n$ racines dans $\mathbb{C}$, qui ne sont pas réelles.

Soit z_0 une racine de Q dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}$: $Q(z_0) = 0$

et $Q'(z_0) = 2\,P(z_0)\,P'(z_0) \neq 0$ car P et P' n'ont que des racines réelles.

Donc z_0 est racine simple de Q.

La réponse D est bonne.

• Question 2 : réponses A et D

• $\mathscr{C}$: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \iff x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

avec $c = a^2 + b^2 - R^2$.

$$M(x,\ y) \in \mathscr{C} \cap \mathrm{H} \iff \begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2ax - \dfrac{2b}{x} + c = 0 & (1) \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$(1) \iff x^4 - 2a\,x^3 + c\,x^2 - 2b\,x + 1 = 0$ **La réponse A est bonne.**

• Écrivons les relations entre les coefficients et les racines de (1) :

$$(1) \iff (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = 0$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2a \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = c \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = 2b \\ x_1 x_2 x_3 x_4 = 1 \end{cases}$$

La réponse B est fausse.

- $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}=\dfrac{x_2\,x_3\,x_4+x_1\,x_3\,x_4+x_1\,x_2\,x_4+x_1\,x_2\,x_3}{x_1\,x_2\,x_3\,x_4}=\dfrac{2b}{1}=2b$

La réponse C est fausse.

- Les coordonnées de G sont :

$$x_G=\frac{1}{4}\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)=\frac{a}{2}=\frac{x_O+x_\Omega}{2}$$

$$y_G=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)=\frac{b}{2}=\frac{y_O+y_\Omega}{2}$$

Donc G est le milieu de $[O\,\Omega]$. **La réponse D est bonne.**

Question 3 : réponses A et D

- Si $P\in\mathbb{C}[X]$: P est scindé. Notons $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_k$ les racines de P, d'ordres respectifs $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k$. P s'écrit :

$$P=\lambda\left(X-z_1\right)^{m_1}\left(X-z_2\right)^{m_2}\ldots\left(X-z_k\right)^{m_k}\quad\text{avec}\quad m_1+m_2+\ \ldots\ +m_k=n.$$

$$\begin{cases} m_i=1 & \Leftrightarrow\ z_i \text{ est racine simple de } P\text{, et } \left(X-z_i\right)^{m_i-1}=1\\ m_i\geq 2 & \Leftrightarrow\ z_i \text{ est racine multiple d'ordre } m_i \text{ de } P,\\ & \quad\ \text{donc racine d'ordre } \left(m_i-1\right) \text{ de } P' \end{cases}$$

d'où : $P'=\left(X-z_1\right)^{m_1-1}\left(X-z_2\right)^{m_2-1}\ldots\left(X-z_k\right)^{m_k-1}Q$

et $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_k$ ne sont pas racines de Q, donc Q est premier avec P, soit :

$$P\wedge P'=\left(X-z_1\right)^{m_1-1}\left(X-z_2\right)^{m_2-1}\ldots\left(X-z_k\right)^{m_k-1}$$

$\deg\left(P\wedge P'\right)=m_1+m_2+\ \ldots\ +m_k-k=n-k$

La réponse A est bonne.

NON

Si $P\in\mathbb{R}[X]$: le résultat est faux, car P peut ne pas être scindé. Par exemple, si $P=X^2\left(X^2+1\right)$, $n=4, k=1$ et $P'=2X\left(2X^2+1\right)$, donc $P\wedge P'=2X$ et $\deg\left(P\wedge P'\right)=1\neq n-k=3$.

La réponse B est fausse.

• P' divise $P \Rightarrow \quad P \wedge P' = P'$ or : deg $P' = n-1$ et dans $\mathbb{C}$: deg$(P \wedge P') = n-k$.

donc $n-1 = n-k$ soit $k=1$.

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

Autrement dit, P n'a qu'une racine : $P = \lambda\,(X - z_1)^n$.

→ QCM 3 Polynômes de Tchebychev

• Question 1 : réponses A et C

• Soient T_n et $\widetilde{T}_n$ tels que : $\forall\ \theta \in \mathbb{R},\ \ T_n(\cos\theta) = \widetilde{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

$\cos\theta$ décrit $[-1,\ 1]$, donc : $\forall\ x \in [-1,\ 1],\ \ T_n(x) = \widetilde{T}_n(x)$ soit encore : $\forall\ x \in [-1,\ 1],\ \ (T_n - \widetilde{T}_n)(x) = 0$ alors, le polynôme $T_n - \widetilde{T}_n$ admet une infinité de racines, donc $T_n - \widetilde{T}_n = 0$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique.

La réponse A est bonne.

• D'après la formule de Moivre : $\cos(n\theta) = \Re e\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^n\right]$.

Or, d'après la formule du binôme :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos\theta)^{n-k}\ i^k\ (\sin\theta)^k$$

Il est préférable d'affecter l'exposant k à $(i\sin\theta)$ plutôt qu'à $(\cos\theta)$.

Or : $i^{2p} = (-1)^p$ et $i^{2p+1} = i\ (-1)^p$.

Donc : $$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) = \sum_{0 \le 2p \le n} \binom{n}{2p} (\cos\theta)^{n-2p}\ (-1)^p\ \underbrace{(\sin\theta)^{2p}}_{(1-\cos^2\theta)^p}$$

soit :

$$T_n = \sum_{0 \le 2p \le n} (-1)^p \binom{n}{2p} X^{n-2p}\left(1 - X^2\right)^p = \sum_{0 \le 2p \le n} \binom{n}{2p} X^{n-2p}\left(X^2 - 1\right)^p$$

La réponse B est fausse et la réponse C est bonne.

NON $\binom{q}{k} \in \mathbb{N}$ donc les coefficients de T_n appartiennent à $\mathbb{Z}$.

La réponse D est fausse.

Question 2 : réponses A et D

- $T_2(\cos\theta) = \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ donc $T_2 = 2X^2 - 1$.

La réponse A est bonne et la réponse B est fausse.

Transformation trigonométrique somme → produit

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

- Pour $n \geq 1$, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$:

$$T_{n+1}(\cos\theta) + T_{n-1}(\cos\theta) = \cos\big((n+1)\theta\big) + \cos\big((n-1)\theta\big) = 2\cos(n\theta)\cos\theta$$

$$T_{n+1}(\cos\theta) + T_{n-1}(\cos\theta) = 2\,T_n(\cos\theta)\cos\theta \iff (T_{n+1} + T_{n-1} - 2XT_n)(\cos\theta) = 0$$

$(T_{n+1} + T_{n-1} - 2XT_n)$ a alors une infinité de racines $(x \in [-1,\ 1])$, donc :

$$T_{n+1} + T_{n-1} - 2XT_n = 0 \quad \text{soit} \quad T_{n+1} + T_{n-1} = 2XT_n$$

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

Question 3 : réponses B et D

- Lorsque x tend vers $+\infty$, $T_n(x)$ est équivalent à son terme dominant.

$$T_n = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} X^{n-2p}(X^2-1)^p \quad \text{et} \quad \deg\left[X^{n-2p}(X^2-1)^p\right] = n - 2p + 2p = n\,.$$

Le coefficient de X^n est : $\displaystyle\sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} = a_n$.

Posons : $b_n = \displaystyle\sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1}$.

On a : $\begin{cases} a_n + b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \\ a_n - b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0 \end{cases}$

d'où : $a_n = 2^{n-1}$ et $T_n(x) \underset{+\infty}{\sim} 2^{n-1}\, x^n$

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

NON $T_n(1) = \sum_{0 \le 2p \le n} \binom{n}{2p} 1^{n-2p} \underbrace{(1-1)^p}_{0 \text{ sauf si } p=0} = 1$ donc $T_n(1) = 1$

La réponse C est fausse.

• Parité de T_n : $T_n(-X) = \sum_{0 \le 2p \le n} \binom{n}{2p} (-1)^{n-2p} X^{n-2p} \left(X^2 - 1\right)^p$

- Si n est <u>pair</u> : $n - 2p$ est pair, donc $T_n(-X) = T_n(X)$ et T_n est <u>pair</u>.
- Si n est <u>impair</u> : $n - 2p$ est impair, donc $T_n(-X) = -T_n(X)$ et T_n est <u>impair</u>.

La réponse D est bonne.

• Question 4 : réponses B et C

• Cherchons les racines x de T_n dans $[-1,\ 1]$.

$$x \in [-1,\ 1] \iff \exists!\, \theta \in [0,\ \pi],\ x = \cos\theta \iff \theta = \arccos x$$

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 &\iff T_n(\cos\theta) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \\ &\iff n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ et } \theta \in [0,\ \pi] \\ &\iff \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n},\quad 0 \le k \le n-1 \\ &\iff x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right),\quad 0 \le k \le n-1 \quad (k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

cos est bijective de $[0,\ \pi]$ dans $[-1,\ 1]$, donc on a trouvé n racines distinctes de T_n dans $[-1,\ 1]$: $x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n-1$, soit toutes les racines de T_n puisque $\deg T_n = n$.

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

• Finalement : $T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n} \right) \right)$

$$T_n(1) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} 2 \sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n} \right) = 2^{2n-1} A_n^2 .$$

On a vu que : $T_n(1) = 1$ d'où $A_n^2 = \dfrac{1}{2^{2n-1}} = \dfrac{2}{(2^n)^2}$ or $0 \leq \dfrac{(2k+1)\pi}{4n} \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Donc : $\sin\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{4n} \right) > 0$ et $A_n > 0$. Finalement : $A_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2^n}$

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

• Question 5 : réponses A et C

• $\exists\ (U,V) \in \mathbb{C}[X]^2,\ \ U\,T_n + V\,T_{n+1} = 1 \iff T_n \wedge T_{n+1} = 1.$

Or, dans $\mathbb{C}[X]$, des polynômes sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont aucune racine commune.

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x_k) &= T_{n+1}\left[\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \right] = \cos\left[\frac{(n+1)(2k+1)\pi}{2n} \right] \\ &= \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right] \\ &= -\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} \right] \sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right] \\ &= (-1)^{k+1} \sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right] = (-1)^{k+1} \sin(\theta_k) \end{aligned}$$

Or $\theta_k \in [0,\ \pi]$, d'où $\sin\theta_k \neq 0$ et $T_{n+1}(x_k) \neq 0$. Donc les racines x_k de T_n ne sont pas racines de T_{n+1}, soit $T_n \wedge T_{n+1} = 1$.

La réponse A est bonne.

• Dérivons (1) par rapport à θ : $\forall\ \theta \in \mathbb{R},\ \ T_n'(\cos\theta)(-\sin\theta) = -n\ \sin(n\theta)$

soit : $T_n'(\cos\theta)\ \sin\theta = n\ \sin(n\theta)$ (2)

La réponse B est fausse.

F_n admet une décomposition en éléments simples :

$$F_n = \frac{1}{2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - x_k} \quad \text{avec} \quad \lambda_k = \frac{1}{T_n{}'(x_k)}.$$

D'après (2) : $\quad T_n{}'(x_k)\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right] = n\,\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{2}\right] = n\,(-1)^k$

Donc : $\quad \lambda_k = \frac{(-1)^k}{n}\sin\theta_k \quad$ et $\quad F_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\sin(\theta_k)}{X - x_k}$

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

→ QCM 4 Espaces vectoriels et polynômes

• Question 1 : réponses A et D

• $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de E et $(P_0,\ P_1,\ \ldots,\ P_n)$ est la base canonique de E_n.

La réponse A est bonne.

• $\dim E_n = n+1$ et $(Q_0,\ Q_1,\ \ldots,\ Q_n)$ est une famille de $(n+1)$ vecteurs, donc c'est une base si elle est libre.

Soit $\quad \alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0\,Q_0 + \alpha_1\,Q_1 + \ \ldots\ \alpha_n\,Q_n = 0 \quad (1)$

(1) : $\quad \alpha_0(1-X)^n + \alpha_1\,X(1-X)^{n-1} + \ \ldots\ + \alpha_n\,X^n = 0$

Pour $X = 0$, (1) devient $\alpha_0 = 0$ et donc :

$$\alpha_1\,X(1-X)^{n-1} + \ \ldots\ + \alpha_n\,X^n = 0$$

On simplifie par X, puis on substitue à X la valeur 0, donc : $\quad \alpha_1 = 0$.

En réitérant le procédé, on obtient (récurrence simple) : $\alpha_0 = \alpha_1 = \ \ldots\ = \alpha_n = 0$.

Donc $(Q_0,\ Q_1,\ \ldots,\ Q_n)$ est libre.

La réponse B est fausse.

- $\left(S,\ S^{(1)},\ S^{(2)},\ \dots,\ S^{(n)}\right)$ est une famille de $(n+1)$ vecteurs.

- Si $\deg S = n$, $\left(S,\ S^{(1)},\ S^{(2)},\ \dots,\ S^{(n)}\right)$ est une famille échelonnée du degré n au degré 0, donc c'est une base.
- Si $\deg S \neq n$, par exemple si $S = 0$, $\left(S,\ S^{(1)},\ S^{(2)},\ \dots,\ S^{(n)}\right)$ n'est pas une base.

La réponse C est fausse.

- $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \ \deg N_k = k$ donc $\left(N_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de E et $\left(N_0,\ N_1,\ \dots,\ N_n\right)$ est une base de E_n.

La réponse D est bonne.

Question 2 : réponses A et C

- $$\forall\ n \geq 1,\ \ N_n(X+1) - N_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-1)\ \dots\ (X-n+2)\underbrace{\left[(X+1)-(X-n+1)\right]}_{n}$$

Donc : $\quad N_n(X+1) - N_n(X) = N_{n-1}(X)$

La réponse A est bonne.

- $$n\,N_n(X) = \frac{1}{(n-1)!} X(X-1)\dots(X-n+2)(X-n+1) = N_{n-1}(X)(X-n+1)$$

La réponse B est fausse.

- $$\forall\ k \in \mathbb{N},\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ N_k(n) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} \in \mathbb{N}^*$$

et : $\quad N_k(-1) = \dfrac{(-1)(-2)\ \dots\ (-k)}{k!} = (-1)^k$

La réponse C est bonne.

- $$N_k(-n) = \frac{(-n)(-n-1)\ \dots\ (-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \in \mathbb{Z}$$

La réponse D est fausse.

Question 3 : réponse A

- Soit $P \in \operatorname{Ker} \Delta$: $P(X+1) = P(X)$ d'où $\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(n) = P(0)$ et $Q(n) = 0$.

Donc Q, admettant une infinité de racines, est nul, et $P = P(0)$ est constant.
Réciproquement, si P est constant : $P(X+1) = P(X)$ et $P \in \operatorname{Ker} \Delta$.

Donc : $\operatorname{Ker} \Delta = \mathrm{E}_0$

La réponse A est bonne.

- $\forall\ P \in \mathrm{E}_n$, $\deg \Delta(P) \leq n$ donc $\Delta(P) \in \mathrm{E}_n$ et Δ induit un endomorphisme de E_n de noyau E_0 : $\operatorname{rg}(\Delta_n) = \dim \mathrm{E}_n - \dim \mathrm{E}_0 = (n+1) - 1 = n$.

La réponse B est fausse.

- $P(X+1)$ et $P(X)$ ont même terme dominant, donc : $\deg \Delta(P) < \deg P$ soit $\operatorname{Im} \Delta_n \subset \mathrm{E}_{n-1}$ or $\operatorname{rg}(\Delta_n) = n$ et $\dim \mathrm{E}_{n-1} = n$ d'où $\operatorname{Im} \Delta_n = \mathrm{E}_{n-1}$.

$\operatorname{Ker} \Delta \neq \{0\}$, donc Δ n'est pas injective, mais Δ est surjective car :

$$\forall\ Q \in \mathrm{E},\ \exists\ n \in \mathbb{N},\ Q \in \mathrm{E}_n$$

Or $\mathrm{E}_n = \operatorname{Im} \Delta_{n+1}$ donc $\exists\ P \in \mathrm{E}_{n+1},\ \Delta(P) = Q$.

La réponse C est fausse.

- $Q = a_0\ N_0 + a_1\ N_1 + \ \ldots\ + a_n\ N_n \in \mathrm{E}_n$.

$\Delta(P_0) = a_0\ \Delta(N_1) + a_1\ \Delta(N_2) + \ \ldots\ + a_n\ \Delta(N_{n+1})$,

or $\Delta\ (N_k) = N_{k-1}$ (question 2).

Donc $\Delta(P_0) = Q$ et P_0 est solution particulière de l'équation linéaire (1).
On obtient toutes les solutions de (1) en ajoutant à P_0 les solutions de $\Delta(P) = 0$, c'est-à-dire les polynômes de $\operatorname{Ker} \Delta$.

Les solutions de (1) sont donc les polynômes : $P_0 + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

La réponse D est fausse.

chapitre 10

Matrices – Déterminants – Systèmes

QCM 1 Ensemble de matrices – Calcul de puissances

Rappel : l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau non commutatif. On note I la matrice identité.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = aI + bA$.

Soit E l'ensemble des matrices $M(a,b)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Question 1

A $A^2 = 2A + I$

B $A^2 = A - 2I$

C A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(I - A)$.

D $(A + I)(A - 2I) = 0$

Question 2

A E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau commutatif.

B (I,A) est une famille génératrice de E, mais n'est pas une base de E.

C Soient M et M' des matrices de E. On a :
$MM' = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 0$ ou $M' = 0$.

D $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $a \neq b$ et $a \neq -2b$.

Question 3

Calcul de A^n.

A Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que :

$$A^n = a_n I + b_n A$$

Dans le cas où l'assertion A est jugée exacte, (a_n) et (b_n) vérifient :

B $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ b_{n+1} - b_n + 2\, b_{n-1} = 0$

C $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ a_n = b_{n-1}$

D $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ A^n = \frac{1}{3}\left[2(-1)^n + 2^n\right] I + \frac{1}{3}\left[(-1)^n + 2^n\right] A$

Question 4

Soit $B = A + I, C = A - 2I,\ D = B + I$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k$

A $B^2 = 3B$ et $C^2 = -3C$, donc $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \ B^k = 3^{k-1} B$ et $C^k = (-3)^{k-1} C$

B On peut toujours appliquer la formule du binôme de Newton dans $\mathcal{M}$.

C $A^n = \frac{1}{3^n}(2B + C)^n$. donc, en appliquant la formule du binôme pour $n \geq 1$:

$$A^n = \frac{1}{3}\left[2^n B + (-1)^{n-1} C\right]$$

D Pour $n \geq 1$, on a $D^n = \frac{1}{3}\left(4^n - 1\right) B + I$.

QCM 2 Matrices nilpotentes – Changement de base

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$.
Soit N une matrice carrée d'ordre 3 nilpotente d'indice 3, c'est-à-dire que $N^3 = 0$ et $N^2 \neq 0$.

N est la matrice de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dans la base $\mathcal{B}$.

• Question 1

A $N^3 = 0$ donc $N = 0$.

B $N^2 \neq 0$ donc $N \neq 0$.

C $\forall\ u \in \mathbb{R}^3,\ f^2(u) \neq 0$

D Il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(u) \neq 0$.

• Question 2

Soit $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(u) \neq 0$.

A $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, donc toute famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est une base.

B $\left(f^2(u),\ f(u),\ u\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

C $\left(f^2(u),\ f(u),\ u\right)$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

D Il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 3

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$, et $M = I + A + A^2$.

Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1 = f^2(e_3)$, $e'_2 = f(e_3)$, $e'_3 = e_3$.

A A n'est pas nilpotente d'indice 3.

B $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

C $(A - I)M = I$

D M est inversible et $M^{-1} = I - A$.

Question 4

Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $g(e_1) = e'_1$, $g(e_2) = e'_2$, $g(e_3) = e'_3$.

La matrice B de g dans la base $\mathscr{B}$ est :

A $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

C g est une symétrie par rapport à une droite suivant un plan.

D B est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ donc $A' = B\,A\,B$.

QCM 3 Résolution d'un système
(EPL 2007)

Question 1

On désigne par j le nombre complexe $e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$. On considère le système (E) :

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c \end{cases}$$

où $a,\ b,\ c$ désignent trois nombres complexes donnés.
Le nombre complexe j vérifie :

A $j^2=1$

B $j^3-1=0$

C $1+j+j^2=0$

D $1-j-j^2=0$

Question 2

Les nombres complexes $x,\ y,\ z$ vérifiant le système (E) sont tels que :

A $3y+(x+z)(1+j+j^2)=a+bj^2+cj$

B $3y+(x+z)(1+j+j^2)=a+b+c$

C $3y+(x+z)(1+j+j^2)=a+bj+cj^2$

D $3x+(y+z)(1+j+j^2)=a+bj^2+cj$

Question 3

Le système (E) :

A n'admet pas de solution.

B admet au moins deux solutions.

C admet une solution unique $(x,y,z)=\left(\frac{a+b+c}{3},\frac{a+bj^2+cj}{3},\frac{a+bj+cj^2}{3}\right)$.

D admet une solution unique $(x,y,z)=\left(\frac{a+b+c}{3},\frac{a+bj+cj^2}{3},\frac{a+bj^2+cj}{3}\right)$.

• Question 4

Une condition nécessaire et suffisante pour que x, y, z vérifiant le système (E) soient des nombres réels est :

A a, b, c réels.

B a, b, c complexes non réels.

C a réel et $b = c = 0$.

D a réel et b et c complexes conjugués.

→ QCM 4 Matrice d'un endomorphisme

(EPL 2004)

• Question 1

$\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe le triplet :

$$((b+c)x + (c-a)y + (b-a)z,\ (c-b)x + (a+c)y + (a-b)z,\ (b-c)x + (a-c)y + (a+b)z)$$

où a, b, c sont des réels distincts deux à deux.

La matrice A de f par rapport à la base $\mathcal{B}$ s'écrit :

A $\begin{pmatrix} (b+c) & (c-b) & (b-c) \\ (c-a) & (a+c) & (a-c) \\ (b-a) & (a-b) & (a+b) \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} (b+c) & (c-a) & (b-a) \\ (c-b) & (a+c) & (a-b) \\ (b-c) & (a-c) & (a+b) \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} (2b+2c-2a) & 0 & 0 \\ 0 & (2a+2c-2b) & 0 \\ 0 & 0 & (2a+2b-2c) \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} (b-a) & (c-a) & (b+c) \\ (a-b) & (a+c) & (c-b) \\ (a+b) & (a-c) & (b-c) \end{pmatrix}$

Question 2

On note I la matrice unité d'ordre 3.
Pour tout λ réel, la matrice $A - \lambda I$ a pour déterminant Δ :

A $\Delta = (2c-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & (c-b) & (b-c) \\ 0 & (a+b-\lambda) & (a-b) \\ 0 & (a-b) & (a+b-\lambda) \end{vmatrix}$

B $\Delta = (2c-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & (a+b-\lambda) & (a-b) \\ 1 & (a+c-\lambda) & (a-c) \\ 0 & (a-b) & (a+b-\lambda) \end{vmatrix}$

C $\Delta = (2a-\lambda)(2c-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (c-b) & (2b-\lambda) & (a-b) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

D $\Delta = \lambda^3 - \lambda^2(2a+2b+2c) + \lambda(4ab+4ac+4bc) - 8abc$

Question 3

La matrice A :

A est égale à sa transposée pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

B est inversible pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

C n'est pas inversible car son déterminant est nul $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

D est inversible si et seulement si a et b sont non nuls.

→ QCM 1 Ensemble de matrices – Calcul de puissances

• Question 1 : réponse D

• $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I$ soit $A^2 - A - 2I = 0$ (1)

Les réponses A et B sont fausses.

Détermination de l'inverse d'une matrice

Si on connaît une relation du type $a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0$ avec $a_0 \neq 0$, alors :

$$-\frac{1}{a_0}\left(a_n A^{n-1} + \ \ldots + a_1 I\right) A = I \quad \text{d'où} \quad A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(a_n A^{n-1} + \ \ldots + a_1 I\right)$$

• L'équation (1) s'écrit : $\frac{1}{2}A(A-I) = \frac{1}{2}(A-I)A = I$

Donc A est inversible et : $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-I)$

La réponse C est fausse.

• (1) $\Leftrightarrow$ $A^2 - A - 2I = 0$ $\Leftrightarrow$ $(A+I)(A-2I) = 0$

Pour déterminer cette factorisation, on considère le polynôme $P = x^2 - x - 2$, que l'on factorise dans $\mathbb{R}$:

$$P = (x+1)\ (x-2) \quad \text{et} \quad (1) \ \Leftrightarrow \ P(A) = 0$$

La réponse D est bonne.

• Question 2 : réponses A et D

Méthode pour montrer que E est un espace vectoriel

• On cherche d'abord si E est inclus dans un espace vectoriel connu.
• On essaye ensuite de déterminer une famille génératrice de E.

Ici, $E = \text{Vect}\,(I,\ A)$, donc E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ engendré par (I, A) et (I, A) est une famille génératrice de E.

NON

Par ailleurs, (I, A) est une famille libre car A n'est pas colinéaire à I :

$$A \neq \lambda I \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Donc (I, A) est une base de E.

La réponse B est fausse.

• $\mathcal{M}$ est un anneau ;

- $(E, +)$ est un groupe commutatif puisque E est un espace vectoriel ;

- $M(a,b) \times M(a',b') = (aI + bA)(a'I + b'A) = aa'I + (ab' + a'b)A + bb'A^2$

$$M(a,b) \times M(a',b') = (aa' + 2bb')I + (ab' + a'b + bb')A \quad \text{d'après (1)}$$

Donc E est stable pour la multiplication des matrices, et la multiplication des matrices est commutative dans E.

- I appartient à E.

Donc E est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}$.

La réponse A est bonne.

NON

$(1) \quad \Leftrightarrow \quad (A + I)\,(A - 2I) = 0$

Donc $A + I \neq 0$ et $A - 2I \neq 0$ sont des diviseurs de zéro, et E n'est pas intègre.

La réponse C est fausse.

$$\begin{aligned} M(a,b) \text{ est inversible } &\Leftrightarrow \exists!(a',b') \in \mathbb{R}^2 \,/\, M(a,b) \times M(a',b') = I \\ &\Leftrightarrow \exists!(a',b') \in \mathbb{R}^2 \,/ \begin{cases} aa' + 2bb' = 1 \\ ba' + (a+b)b' = 0 \end{cases} \quad (S) \\ &\Leftrightarrow \text{dét } S \neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{dét } S = \begin{vmatrix} a & 2b \\ b & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab - 2b^2 = (a-b)(a+2b)$$

donc : $\quad M(a,b)$ est inversible $\Leftrightarrow \quad a \neq b \;\; et \;\; a \neq -2b$

La réponse D est bonne.

• Question 3 : réponse A

• Démontrons par récurrence la proposition (2) : $\quad A^n = a_n I + b_n A$

– $A^0 = I$ donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$: la proposition est vraie à l'ordre zéro.

– $A^1 = A$ donc $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$: la proposition est vraie à l'ordre 1.

– Supposons la proposition vraie à l'ordre $n \geq 1$:

$$A^{n+1} = A^n A = a_n A + b_n A^2 = a_n A + b_n (2I + A) = 2b_n I + (a_n + b_n)A = a_{n+1} I + b_{n+1} A$$

La proposition est vraie à l'ordre $n + 1$.

La réponse A est bonne.

• D'après ce qui précède : $\begin{cases} a_{n+1} = 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$

$$\text{Donc } \forall\ n \in \mathbb{N}^* \ \begin{cases} b_{n+1} - b_n - 2b_{n-1} = 0 \\ a_n = 2b_{n-1} \end{cases}$$

Les réponses B et C sont fausses.

• On reconnaît une récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\begin{cases} b_0 = 0,\ b_1 = 1 \\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ b_{n+1} - b_n - 2b_{n-1} = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Équation caractéristique de (3) : $\quad r^2 - r - 2 = 0 \iff r = -1 \text{ ou } r = 2$

donc $\quad b_n = \alpha(-1)^n + \beta\ 2^n \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \alpha = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{3}$$

Finalement : $\quad \forall\ n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^n = \frac{1}{3}\left[2(-1)^n + 2^n\right] I + \frac{1}{3}\left[(-1)^{n+1} + 2^n\right] A$

La réponse D est fausse.

• Question 4 : réponses C et D

• $B^2 = (A + I)^2 = \underbrace{A^2}_{A+2I} + 2\ A + I = 3(A + I) = 3\ B$

$C^2 = (A - 2I)^2 = \underbrace{A^2}_{A+2I} - 4A + 4I = -3(A - 2I) = -3\ C$

Donc, par récurrence immédiate : $\forall\ k \in \mathbb{N}^*,\ B^k = 3^{k-1} B \ \ et \ \ C^k = (-3)^{k-1} C$

Ces résultats sont vrais pour $k = 1$, mais faux pour $k = 0$ puisque $B^0 = C^0 = I$.

La réponse A est fausse.

NON La formule du binôme $(A + B)^n$ est valable dans un anneau à condition que A et B commutent ($AB = BA$), ce qui est le cas dans E, mais pas dans $\mathcal{M}$. **La réponse B est fausse.**

- $A = \frac{1}{3}(2B + C)$ donc $A^n = \frac{1}{3^n}(2B + C)^n = \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2B)^k C^{n-k}$

D'après l'assertion D de la question 1 : $(A + I)(A - 2I) = 0$
donc $BC = CB = 0$.
Dès lors, il ne reste que le premier et le dernier terme :

$$A^n = \frac{1}{3^n}\left[(2B)^n + C^n\right] = \frac{1}{3}\left[2^n B + (-1)^{n-1} C\right]$$

La réponse C est bonne.

- $D^n = (B + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B^k = I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} B = I + \frac{1}{3} S_n B$

Or : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k - 1 = (3+1)^n - 1 = 4^n - 1$

donc : $D^n = \frac{1}{3}\left(4^n - 1\right)B + I$

La réponse D est bonne.

→ QCM 2 Matrices nilpotentes – Changement de base

• Question 1 : réponses B et D

NON Dans l'ensemble des matrices, il existe des diviseurs de zéro.

La réponse A est fausse.

- $N = 0 \Rightarrow N^2 = 0$ donc, par contraposée : $N^2 \neq 0 \Rightarrow N \neq 0$

La réponse B est bonne.

- $N = 0 \Leftrightarrow f = 0$ donc $N^2 \neq 0 \Leftrightarrow f^2 \neq 0$

$$f^2 = 0 \Leftrightarrow \forall\, u \in \mathbb{R}^3,\ f^2(u) = 0$$

donc, en prenant les négations :

$$f^2 \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, u \in \mathbb{R}^3,\ f^2(u) \neq 0$$

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

• Question 2 : réponses B et D

NON dim $\mathbb{R}^3 = 3$, donc toute famille **libre** de 3 vecteurs est une base.

La réponse A est fausse.

• Cherchons si $\left(f^2(u),\ f(u),\ u\right)$ est libre.

Supposons que $\forall u \in \mathbb{R}^3,\ \ \alpha f^2(u) + \beta f(u) + \gamma u = 0 \quad (1)$

alors :

$$\forall u \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} \alpha f^2(u) + \beta f(u) + \gamma u = 0 & (1) \\ f\left(\alpha f^2(u) + \beta f(u) + \gamma u\right) = \alpha f^3(u) + \beta f^2(u) + \gamma f(u) = f(0) & (2) \\ f^2\left(\alpha f^2(u) + \beta f(u) + \gamma u\right) = \alpha f^4(u) + \beta f^3(u) + \gamma f^2(u) = f^2(0) & (3) \end{cases}$$

f est linéaire, donc : $\quad f(0) = f^2(0) = 0$

De plus, $N^3 = 0$ donc : $\quad f^3(u) = f^4(u) = 0 \quad$ et $\quad f^2(u) \neq 0$

Alors : $$\forall u \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} \alpha f^2(u) + \beta f(u) + \gamma u = 0 & (1) \\ \beta f^2(u) + \gamma f(u) = 0 & (2) \\ \gamma f^2(u) = 0 & (3) \end{cases}$$

d'où : $\quad \alpha = \beta = \gamma = 0$.

$\left(f^2(u),\ f(u),\ u\right)$ est donc une famille **libre** de $\mathbb{R}^3$.

La réponse B est bonne.

• $\left(f^2(u),\ f(u),\ u\right)$ est donc une base, et par conséquent une famille **génératrice** de $\mathbb{R}^3$.

La réponse C est fausse.

• La matrice de f dans la base $\left(f^2(u),\ f(u),\ u\right)$ est obtenue en mettant en colonne les cordonnées des images par f des vecteurs de cette base dans cette base.

– $f\left(f^2(u)\right) = f^3(u) = 0$ a pour coordonnées (0, 0, 0) ;

– $f\left(f(u)\right) = f^2(u)$ a pour coordonnées (1, 0, 0) ;

– $f(u)$ a pour coordonnées (0, 1, 0).

Donc $\left(f^2(u),\ f(u),\ u\right)$ est la base dans laquelle la matrice de f s'écrit A'.

La réponse D est bonne.

Question 3 : réponses B et D

• $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ et $A^3 = 0$ donc A est nilpotente d'indice 3.

La réponse A est fausse.

• $\mathscr{B}'$ est la base $\left(f^2(u), f(u), u\right)$ pour $u = e_3$ donc, d'après l'assertion D de la question 2.

La réponse B est bonne.

• $(A-I)M = (A-I)\left(A^2 + A + I\right) = A^3 - I^3$ (formule de Bernoulli)

donc : $(A-I)M = -I$ **La réponse C est fausse.**

Finalement : $(I-A)M = M(I-A) = I$

donc M est inversible et $M^{-1} = I - A$.

La réponse D est bonne.

Question 4 : réponse D

• $g(e_1) = e'_1 = f^2(e_3) = A^2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g(e_1) = e'_2 = f(e_3) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $g(e_3) = e'_3 = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Les réponses A et B sont fausses.

Symétrie orthogonale

$$g \text{ symétrie} \iff g \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right) \quad et \quad g \circ g = Id$$

Dans ce cas, g est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(g - Id)$ suivant $\operatorname{Ker}(g + Id)$.

• Le calcul donne $B^2 = I$ donc g est une symétrie.

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(g - Id) \iff (B-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff x + y = 0$$

donc $\operatorname{Ker}(g - Id)$ est le plan d'équation $x + y = 0$.

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(g + Id) \iff (B + I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

donc Ker $(g + Id)$ est la droite d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$.

La réponse C est fausse.

• g est une symétrie, donc : $g^{-1} = g$, $B^{-1} = B$ et $A' = B^{-1}AB = B\,A\,B$

La réponse D est bonne.

→ QCM 3 Résolution d'un système

• Question 1 : réponses B et C

Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

L'ensemble U_n des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est :

$$\mathrm{U}_n = \left\{ e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\} \right\}$$

soit encore, en posant $\omega = e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$:

$$\mathrm{U}_n = \left\{ 1,\ \omega,\ \omega^2,\ \ldots,\ \omega^{n-1} \right\}$$

La somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle, et leurs images forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

• Pour $n = 3$:

$$\mathrm{U}_3 = \left\{ 1,\ j,\ j^2 \right\} \quad \text{avec} \quad j = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

NON $j^2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \neq 1.$

La réponse A est fausse.

- $j^3 = 1$

La réponse B est bonne.

- $j^2 = \bar{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

Question 2 : réponse A

- Effectuons des combinaisons linéaires des équations :

$$\begin{cases} x + y + z = a & (1) \\ x + j\,y + j^2 z = b & (2) \\ x + j^2 y + j\,z = c & (3) \end{cases}$$

$(1) + j^2(2) + j\,(3)$ s'écrit :

$$\left(1 + j^2 + j\right)x + \left(1 + \underbrace{j^3}_{1} + \underbrace{j^3}_{1}\right)y + \left(1 + \underbrace{j^4}_{j} + j^2\right)z = a + bj^2 + cj$$

soit : $$3y + (x + z)\left(1 + j + j^2\right) = a + bj^2 + cj \qquad (4)$$

La réponse A est bonne et la réponse D est fausse.

- $(1) + (2) + (3)$ s'écrit :

$$3x + \left(1 + j + j^2\right)y + \left(1 + j^2 + j\right)z = a + b + c$$

soit :

$$3x + (y + z)\left(1 + j + j^2\right) = a + b + c \qquad (5)$$

La réponse B est fausse.

- $(1) + j\,(2) + j^2(3)$ s'écrit :

$$\left(1 + j + j^2\right)x + \left(1 + j^2 + \underbrace{j^4}_{j}\right)y + \left(1 + \underbrace{j^3}_{1} + \underbrace{j^3}_{1}\right)z = a + bj + cj^2$$

soit :

$$3z + (x + y)\left(1 + j + j^2\right) = a + bj + cj^2 \qquad (6)$$

La réponse C est fausse.

• Question 3 : réponse C

Le déterminant du système (E) s'écrit : $\text{dét}\,(\mathrm{E}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix}$

En effectuant la transformation $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ on obtient :

$$\text{dét}\,(\mathrm{E}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & j-1 & j^2-1 \\ 0 & j^2-1 & j-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j-1 & j^2-1 \\ j^2-1 & j-1 \end{vmatrix} = (j-1)^2 - \left(j^2-1\right)^2 = 3\left(j^2 - j\right)$$

$\text{dét}\,(\mathrm{E}) \neq 0$ donc (E) est un système de Cramer admettant une solution unique.

En remplaçant dans les équations (4), (5) et (6) $1 + j + j^2$ par 0, on obtient :

$$(x, y, z) = \left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a+bj^2+cj}{3}, \frac{a+bj+cj^2}{3}\right)$$

La réponse C est bonne, les réponses A, B et D sont fausses.

Il est judicieux d'imaginer ici des combinaisons linéaires qui font apparaître la quantité $1 + j + j^2 = 0$, et de ne pas résoudre par substitution.

• Question 4 : réponse D

NON

Si $(a,b,c) = \left(1, j, j^2\right)$, alors $(x,y,z) = (0,1,0)$: x, y, et z sont tous réels, mais a, b et c ne sont pas tous réels (condition non nécessaire).

Les réponses A et C sont fausses.

• Si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors, d'après l'équation (1), $a = x + y + z$ est réel.

La réponse B est fausse.

• Si a est réel, et b et c complexes conjugués : $\bar{b} = c$, et $b + c$ est réel.
Alors :

– $x = \dfrac{a+b+c}{3}$ est réel.

– $y = \dfrac{a+bj^2+cj}{3}$ et $\bar{y} = \dfrac{a+\bar{b}\,\overline{j^2}+\bar{c}\,\bar{j}}{3} = \dfrac{a+cj+bj^2}{3} = y$, donc y est réel.

– $z = \dfrac{a+bj+cj^2}{3}$ et $\bar{z} = \dfrac{a+\bar{b}\,\bar{j}+\bar{c}\,\overline{j^2}}{3} = \dfrac{a+cj^2+bj}{3} = z$, donc z est réel.

La condition de l'assertion D est suffisante.

Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

– d'après (1) : $a = x + y + z$ est réel.
– d'après (2) et (3) : $b = x + j\,y + j^2 z$ et $\bar{b} = x + \bar{j}\,y + \overline{j^2} z = x + j^{\,2} y + jz = c$
donc b et c sont complexes conjugués.

La condition de l'assertion D est nécessaire.

La réponse D est bonne.

Il faut absolument éviter de manipuler dans cette question les expressions algébriques des complexes, l'exploitation des relations entre complexes conjugués étant beaucoup plus rapide.

→ QCM 4 Matrice d'un endomorphisme

• Question 1 : réponse B

La matrice A est obtenue par la définition analytique de l'endomorphisme f :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad A = \begin{pmatrix} (b+c) & (c-a) & (b-a) \\ (c-b) & (a+c) & (a-b) \\ (b-c) & (a-c) & (a+b) \end{pmatrix}$$

La réponse B est bonne, les réponses A, C et D sont fausses.

• Question 2 : réponses A et C

• La matrice $A - \lambda I$ s'écrit : $A - \lambda I = \begin{pmatrix} (b+c)-\lambda & (c-a) & (b-a) \\ (c-b) & (a+c)-\lambda & (a-b) \\ (b-c) & (a-c) & (a+b)-\lambda \end{pmatrix}$

et son déterminant Δ s'écrit : $\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)-\lambda & (c-a) & (b-a) \\ (c-b) & (a+c)-\lambda & (a-b) \\ (b-c) & (a-c) & (a+b)-\lambda \end{vmatrix}$

Il serait hasardeux de tenter d'ajouter ou retrancher des lignes et des colonnes à Δ jusqu'à obtenir l'un des déterminants des assertions A, B et C. Il est en effet difficile de prévoir les combinaisons « gagnantes », et par ailleurs certaines assertions sont fausses. Nous calculerons donc séparément chaque déterminant.

On effectue tout d'abord sur Δ la transformation : $L_1 \leftarrow L_1 + L_3, L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2b-\lambda & 0 & 2b-\lambda \\ 0 & 2a-\lambda & 2a-\lambda \\ (b-c) & (a-c) & (a+b)-\lambda \end{vmatrix} = (2a-\lambda)(2b-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ (b-c) & (a-c) & (a+b)-\lambda \end{vmatrix}$$

On effectue ensuite la transformation : $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$$\Delta = (2a-\lambda)(2b-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ (b-c) & (a-c) & (a+c)-\lambda \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne :

$$\Delta = (2a-\lambda)(2b-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (a-c) & (a+c)-\lambda \end{vmatrix} = (2a-\lambda)(2b-\lambda)(a+c-\lambda-a+c)$$

$$= (2a-\lambda)(2b-\lambda)(2c-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2(2a+2b+2c) - \lambda(4ab+4ac+4bc) + 8abc$$

La réponse D est fausse.

• Comparons maintenant le résultat obtenu à ceux des assertions A, B et C.

En développant par rapport à la première colonne le déterminant de l'assertion A, on obtient :

$$(2c-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & (c-b) & (b-c) \\ 0 & (a+b-\lambda) & (a-b) \\ 0 & (a-b) & (a+b-\lambda) \end{vmatrix} = (2c-\lambda)\begin{vmatrix} (a+b-\lambda) & (a-b) \\ (a-b) & (a+b-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= (2c-\lambda)\left[(a+b-\lambda)^2 - (a-b)^2\right]$$

$$= (2a-\lambda)(2b-\lambda)(2c-\lambda)$$

La réponse A est bonne.

- En développant par rapport à la première colonne le déterminant de l'assertion B, on obtient :

$$(2c-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & (a+b-\lambda) & (a-b) \\ 1 & (a+c-\lambda) & (a-c) \\ 0 & (a-b) & (a+b-\lambda) \end{vmatrix} = -(2c-\lambda)\begin{vmatrix} (a+b-\lambda) & (a-b) \\ (a-b) & (a+b-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= -(2c-\lambda)\left[(a+b-\lambda)^2-(a-b)^2\right]$$

$$= -(2a-\lambda)(2b-\lambda)(2c-\lambda)$$

La réponse B est fausse.

- En développant par rapport à la deuxième colonne le déterminant de l'assertion C, on obtient :

$$(2a-\lambda)(2c-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (c-b) & (2b-\lambda) & (a-b) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2a-\lambda)(2b-\lambda)(2c-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2a-\lambda)(2b-\lambda)(2c-\lambda)$$

La réponse C est bonne.

• Question 3 : aucune réponse n'est bonne

- La matrice $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ n'est pas égale à sa transposée pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, car elle n'est pas symétrique pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Par exemple :

$$a_{12}=c-a\ ,\ a_{21}=c-b\text{, et si } a\neq b\ :\quad a_{12}\neq a_{21}$$

La réponse A est fausse.

NON

Le déterminant de A est égal au déterminant Δ pour la valeur $\lambda=0$:

$$\text{dét}\, A = 8abc$$

A est inversible si et seulement si $\text{dét}\, A\neq 0$.

Donc, A est inversible si et seulement si a, b et c sont non nuls.

Les réponses B, C et D sont fausses.

chapitre 11

Développements limités

« **Développement limité d'ordre n au voisinage de a » est noté ici « $DL_n(a)$ ».**

QCM 1 Prolongement par continuité, branches infinies

Question 1

Soient les fonctions $u : x \mapsto \frac{1}{x}\ln(x+\cos x)$ et $f : x \mapsto (x+\cos x)^{1/x}$ définies au voisinage de 0.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

A Pour obtenir un $DL_2(0)$ de f, il suffit de prendre un $DL_2(0)$ de $\ln(x+\cos x)$.

B $f(x) = e^{u(x)}$ donc, si $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ est la partie régulière du $DL_2(0)$ de u, alors on peut utiliser le $DL_2(0)$ de exp pour écrire :

$$f(x) = 1 + p(x) + \frac{p(x)^2}{2!} + o(x^2)$$

C Le $DL_2(0)$ de f est : $f(x) = e\left[1 - x - \frac{4}{3}x^2\right] + o(x^2)$.

D Du $DL_2(0)$ de f, on déduit un prolongement par continuité de f en 0 en une fonction dérivable en 0, et un positionnement de $\mathscr{C}$ au-dessus de sa tangente au point $A(0, e)$.

Question 2 (d'après EPL 2008)

Soit la fonction réelle f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

A Aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, on a :

$$\sqrt{x(x+2)} = x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

B En $+\infty$, $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = x + 2$, et $\mathscr{C}$ est au-dessus de son asymptote.

C En $-\infty$, $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = x + 2$, et $\mathscr{C}$ est en dessous de son asymptote.

D En $-\infty$, $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = -x - 2$, et $\mathscr{C}$ est en dessous de son asymptote.

Question 3

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$. On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

A $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

B Le $DL_2(0)$ de $\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est: $\dfrac{\pi}{2} - x + x^2 + o\left(x^2\right)$.

Le DL_2 de f au voisinage de 1 est :

C $\dfrac{\pi}{2} + (\pi - 1)(x-1) + \left(\dfrac{\pi}{2} - 2\right)(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$

D $\dfrac{\pi}{2} + (\pi - 1)(x-1) + \left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$.

Question 4

On étudie dans cette question le comportement au voisinage de $+\infty$ de la fonction f définie à la question 3.

A $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ donc le développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ à la précision $\dfrac{1}{x}$ est de la forme : $f(x) = x + b + \dfrac{c}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

B Dans le cas où l'assertion A est jugée exacte, il faut, pour obtenir ce développement asymptotique, déterminer le DL_2 de $\arctan\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

C Le développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ à la précision $\dfrac{1}{x}$ est : $f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{3x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

D En $+\infty$, $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = x + 1$, et $\mathscr{C}$ est au-dessus de son asymptote.

QCM 2 Dérivabilité et équation différentielle

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Question 1

A Si f admet un $DL_2(0)$: $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + o(x^2)$, f étant impaire, on en déduit que $\gamma = 0$, donc f n'a pas de $DL_2(0)$, mais seulement un $DL_1(0)$.

B $\operatorname{ch} x - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et $x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} \alpha x^3$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ donc, pour obtenir un $DL_3(0)$ de f, il faut utiliser des $DL_5(0)$ de $x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ et de $\operatorname{ch} x - 1$.

Le $DL_3(0)$ de f est :

C $f(x) = \dfrac{2}{3} x + \dfrac{1}{90} x^3 + o(x^3)$

D $f(x) = \dfrac{2}{3} x + \dfrac{1}{60} x^3 + o(x^3)$

Question 2

Dans cette question, on pose $f(0) = 0$.

A f est continue mais non dérivable en 0.

B f est 3 fois dérivable en 0, car toute fonction admettant un $DL_n(a)$ est n fois dérivable en a.

Du $DL_3(0)$ de f, on déduit que $\mathscr{C}$ admet une tangente Δ au point O, et que :

C $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ

D $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ pour $x > 0$, et en dessous pour $x < 0$.

• Question 3

Soit l'équation différentielle :

$$(\mathrm{ch}\, x - 1)\, y' + y\, \mathrm{sh}\, x = x\, \mathrm{sh}\, x \qquad \text{(E)}$$

A $\Phi : x \mapsto x\, \mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\varphi : x \mapsto x\, \mathrm{sh}\, x$.

B Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$x \mapsto f(x) + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

C $g : x \mapsto f(x) - \dfrac{e^{-1}}{\mathrm{ch}\, x - 1}$ est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$ telle que $g(1) = 0$.

D f est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

QCM 3 Courbe paramétrée

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (xOy).

Soit $\mathscr{C}$ la courbe paramétrée définie par $F = (x, y)$, avec :

$$M(t) : \begin{cases} x(t) = (t-2)\, e^{-1/t} \\ y(t) = t + \dfrac{4}{t} \end{cases} \qquad \left(t \in \mathbb{R}^*\right)$$

• Question 1

A $\forall\, t \in \mathbb{R}^*,\ x'(t)$ est du signe de $t^2 + t - 2$.

B $\forall\, t \in \mathbb{R}^*,\ y'(t) \geq 0$.

C $M(-2)$ est l'unique point singulier de $\mathscr{C}$.

D En $M(2)$, la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe (Oy).

Question 2

Le DL_3 de $\dfrac{1}{-2+h}$ au voisinage de 0 s'écrit :

A $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{h}{2}+\dfrac{h^2}{4}+\dfrac{h^3}{8}+o\left(h^3\right)$

B $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{h}{4}-\dfrac{h^2}{8}-\dfrac{h^3}{16}+o\left(h^3\right)$

Le DL_3 de $e^{\left(\frac{1}{2-h}\right)}$ au voisinage de 0 s'écrit :

C $e^{1/2}\left(1+\dfrac{h}{4}+\dfrac{5\,h^2}{32}+\dfrac{37\,h^3}{384}\right)+o\left(h^3\right)$

D $e^{1/2}\left(1-\dfrac{h}{4}+\dfrac{5\,h^2}{32}-\dfrac{37\,h^3}{384}\right)+o\left(h^3\right)$

Question 3

Le DL_3 de x au voisinage de -2 est :

A $x\,(-2+h)=e^{1/2}\left(-4-2\,h-\dfrac{3}{8}\,h^2-\dfrac{11}{48}\,h^3\right)\;+o\left(h^3\right)$

B $x\,(-2+h)=e^{1/2}\left(-4-\dfrac{3}{8}\,h^2-\dfrac{11}{48}\,h^3\right)\;+o\left(h^3\right).$

Des DL_3 de x et de y au voisinage de -2, on déduit que :

C $M\,(-2)$ est un point d'inflexion car 2 est le plus petit $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $F^{(p)}(-2)\neq 0$ et 3 est le plus petit entier $q>p$ tel que $F^{(q)}(-2)\neq 0$.

D $F''(-2)\neq 0$, donc la tangente à $\mathscr{C}$ en $M\,(-2)$ est dirigée par $\vec{u}\left(3\,e^{1/2},4\right)$ et $F^{(3)}(-2)$ est non colinéaire à $F''(-2)$, donc $M\,(-2)$ est un point de rebroussement de 1ère espèce.

• Question 4

A En $\pm\infty$, $x(t) \sim t$ et $y(t) \sim t$, donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

Du DL_1 de $y - x$ au voisinage de $\pm\infty$, on déduit que :

B la droite d'équation $y = x + 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$;

C $\mathscr{C}$ est au-dessus de son asymptote ;

D au voisinage de 0_-, $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy).

QCM 4 Formule de Taylor-Young

• Question 1 (d'après EPL 2004)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sin x}{x} \quad si \quad x \neq 0 \\ g(0) = a \quad (a \text{ réel fixé}) \end{cases}$$

A g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}(x - \tan x)$.

B En utilisant des DL de $\cos x$ et $\sin x$ au voisinage de 0, on montre que :

$$\lim_{x \to 0} g'(x) = 0$$

C Si l'assertion B est jugée exacte, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

D Pour $a = 1$, g est continue mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Question 2

On considère une fonction f de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ telle que :

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ \dots \ = f^{(n+1)}(0) = 0.$$

A Soit $m, p \in \mathbb{N}$ et h une fonction telle que, au voisinage de 0, $h(x) = o(x^m)$.

Alors : $h(x) = o(x^p)$ si $p \geq m$

B Soit $q \in \mathbb{N}$, $0 \leq q \leq n+1$. f étant de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Young au voisinage de 0 à $f^{(q)}$ à l'ordre n.

C $\forall\, q \in [\![0, n+1]\!]$, $f^{(q)}(x) = o(x^{n+1-q})$

D Pour $0 \leq k \leq p \leq n$, $f^{(p-k)}(x) = o(x^{k+1})$

Question 3

On reprend la fonction f de la question 2.
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

A $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet une dérivée d'ordre k sur $\mathbb{R}^*$ telle que pour $0 \leq k \leq p \leq n$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} u^{(k)}(x)\, f^{(p-k)}(x) = 0$$

B En utilisant la formule de Leibniz, on obtient pour $0 \leq p \leq n$ et $x \neq 0$:

$$\varphi^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} u^{(k)}(x)\, f^{(p-k)}(x)$$

C $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \varphi^{(p)}(x) = 0$, donc on peut montrer, en utilisant une récurrence, que φ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

D Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{(sh\, x - x)^2}{x} & si \quad x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$

On peut déduire des résultats précédents que h est de classe C^5 sur $\mathbb{R}$.

→ QCM 1 Prolongement par continuité, branches infinies

• Question 1 : réponse D

• $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(x+\cos x)} = e^{u(x)}$. Pour déterminer un $DL_2(0)$ de f, il faut un $DL_2(0)$ de $u(x)$, donc un $DL_3(0)$ de $\ln(x+\cos x)$.

La réponse A est fausse.

• $\ln(x+\cos x) = \ln\left(x+1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right) = \ln(1+v)$, avec $v = x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$.

$v \underset{0}{\sim} x$ donc : $o(v^3) = o(x^3)$.

Écrivons un $DL_3(0)$ de $\ln(1+v)$:

$$\ln(1+v) = v-\frac{v^2}{2}+\frac{v^3}{3}+o(v^3) = x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^3+o(x^3)$$

$$= x-x^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)$$

Donc : $u(x) = \dfrac{1}{x}\ln(x+\cos x) = 1-x+\dfrac{5}{6}x^2+o(x^2)$ et $p(x) = 1-x+\dfrac{5}{6}x^2$.

Alors : $$f(x) = e^{u(x)} = e^{p(x)+o(x^2)}$$

Or, on a : $e^u = 1+u+\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$ <u>si u est au voisinage de 0</u>,

or : $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 1$.

La réponse B est fausse.

• $f(x) = e^{1-x+\frac{5}{6}x^2+o(x^2)} = e\, e^t$ avec $t = -x+\dfrac{5}{6}x^2+o(x^2)$

or $t \underset{0}{\sim} -x$, donc : $o(x^2) = o(t^2)$ et un $DL_2(0)$ de e^t s'écrit :

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

• D'où :

$$f(x) = e\left[1-x+\frac{5}{6}x^2+\frac{1}{2}\left(-x+\frac{5}{6}x^2\right)^2+o(x^2)\right] = e\left[1-x+\frac{4}{3}x^2+o(x^2)\right]$$

La réponse C est fausse.

• $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e$, donc on peut prolonger f par continuité en posant $f(0) = e$.

f admet alors un $DL_1(0)$, donc f est dérivable en 0, $f'(0) = -e$, et la tangente T à $\mathscr{C}$ en $A(0, e)$ a pour équation $y = e(1-x)$.

$f(x) - e(1-x) \underset{0}{\sim} \dfrac{4}{3} e x^2 \geq 0$, donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de T.

La réponse D est bonne.

Question 2 : réponse B

• $\sqrt{x(x+2)} = \sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} = |x|\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{1/2}.$

Écrivons un DL_2 de $(1+u)^{1/2}$ au voisinage de 0 :

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)u^2 + o\left(u^2\right) = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o\left(u^2\right).$$

Donc, aux voisinages de $\pm\infty$: $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{1/2} = 1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{x}\right) - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{2}{x}\right)^2 + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

soit : $\sqrt{x(x+2)} = |x|\left[1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right].$

La réponse A est fausse (en $-\infty$).

• $f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$.

Soit : $\dfrac{1}{x} = u$. Un $DL_2(0)$ de e^u s'écrit : $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$.

Donc : $e^{1/x} = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

et :

$$f(x) = |x|\left[\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = |x|\left[1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right].$$

- En $+\infty$: $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

- En $-\infty$: $f(x) = -x - 2 - \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Donc, en $+\infty$, $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = x + 2$, et $\frac{1}{x} > 0$ donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de son asymptote.

La réponse B est bonne.

- Par ailleurs, en $-\infty$, $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = -x - 2$, et $-\frac{1}{x} > 0$ donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de son asymptote.

Les réponses C et D sont fausses.

Question 3 : réponse C

- Soit : $g(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$.

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0 \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \text{si } x > 0, & g(x) = k_1 \\ \text{si } x < 0, & g(x) = k_2 \end{cases}$$

$$g(1) = \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad k_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad g(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad k_2 = -\frac{\pi}{2}.$$

Finalement : $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = (\operatorname{sgn} x)\,\frac{\pi}{2}$.

La réponse A est fausse.

- $\forall\, x > 0,\quad \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$.

Un $DL_2(0)$ de $\arctan x$ s'obtient par intégration de $\frac{1}{1+x^2}$.

Or :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + o(x) \text{ donc } \arctan x = x + o\left(x^2\right) \text{ et } \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - x + o\left(x^2\right).$$

La réponse B est fausse.

En outre, la fonction arctan étant impaire, son DL ne peut contenir de terme en x^2.

- Cherchons un DL_2 de f au voisinage de 1. Soit $x = 1 + h$:

$$f(x) = (1+h)^2 \arctan\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\pi}{2} + (\pi - 1)\,h + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)h^2 + o\left(h^2\right)$$

soit finalement : $f(x) = \frac{\pi}{2} + (\pi - 1)(x-1) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$.

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

• Question 4 : réponses A et D

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ donc $\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$,

soit : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2 \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} x$

La réponse A est bonne.

NON $f(x) = x\left[x \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)\right]$, et pour obtenir un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire :

$$f(x) = x + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = x\left[1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

il faut un DL_2 de $x \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$ au voisinage de $+\infty$, donc un DL_3 de $\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

La réponse B est fausse.

• $\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right) = \arctan\left(\frac{h}{1-h}\right)$

avec $h = \frac{1}{x}$ au voisinage de 0.

$$u = \frac{h}{1-h} = h\frac{1}{1-h} = h\left[1 + h + h^2 + o\left(h^2\right)\right] = h + h^2 + h^3 + o\left(h^3\right).$$

Or : $u \underset{0}{\sim} h$ donc $o\left(h^3\right) = o\left(u^3\right)$ et on doit déterminer un DL_3 (0) de $\arctan u$, donc un DL_2 (0) de sa dérivée :

$\frac{1}{1+u^2} = 1 - u^2 + o\left(u^2\right)$ or $\arctan 0 = 0$ donc $\arctan u = u - \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)$.

$$f(x)=x^2\left[h+h^2+h^3-\frac{1}{3}h^3+o\left(h^3\right)\right]=x^2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right].$$

Finalement : $f(x)=x+1+\dfrac{2}{3x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. **La réponse C est fausse.**

• En $+\infty$, $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y=x+1$, et $\dfrac{2}{3x}>0$, donc $\mathscr{C}$ est <u>au-dessus</u> de son asymptote.

La réponse D est bonne.

→ QCM 2 Dérivabilité et équation différentielle

• Question 1 : réponses B et C

NON

f est impaire, donc la partie régulière d'un $DL_n(0)$ de f est impaire et ne contient donc pas de termes en x^{2k}. Par conséquent : $\alpha=\gamma=0$.

En revanche, $f(x)=\beta x+o\left(x^2\right)$ est toujours un $DL_2(0)$ de f.

La réponse A est fausse.

• $\operatorname{ch}x-1\underset{0}{\sim}\dfrac{x^2}{2}$, $x\operatorname{ch}x\underset{0}{\sim}x$ et $\operatorname{sh}x\underset{0}{\sim}x$ donc, pour trouver un équivalent de $x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x$, il faut déterminer un $DL_3(0)$, donc un $DL_2(0)$ de ch x et un $DL_3(0)$ de sh x :

$$x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x=x\left(1+\frac{x^2}{2}\right)-\left(x+\frac{x^3}{6}\right)+o\left(x^3\right)=\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$$

d'où: $$x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x\underset{0}{\sim}\frac{1}{3}x^3$$

$$f(x)=\frac{x^3\left(\dfrac{1}{3}+v(x)\right)}{\dfrac{x^2}{2}\left(1+w(x)\right)}=2x\left(\frac{1}{3}+v(x)\right)\frac{1}{\left(1+w(x)\right)}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}v(x)=\lim\limits_{x\to 0}w(x)=0$.

Pour obtenir un $DL_3(0)$ de f, il faut un $DL_2(0)$ de $\dfrac{f(x)}{x}$, soit des $DL_2(0)$ de $\dfrac{1}{3}+v(x)=\dfrac{x\,\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x}{x^3}$ et de $1+w(x)=\dfrac{2(\mathrm{ch}\,x-1)}{x^2}$, donc des $DL_5(0)$ de $x\,\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x$ et de $\mathrm{ch}\,x-1$

La réponse B est bonne.

- $\mathrm{ch}\,x=1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^5)$ et $\mathrm{sh}\,x=x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{5!}+o(x^5)$.

$$f(x)=\frac{x+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^5}{4!}-x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^5}{5!}+o(x^5)}{x^2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2}{4!}+o(x^3)\right)}=\frac{\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{30}+o(x^5)}{\dfrac{x^2}{2}\left(1+\dfrac{x^2}{12}+o(x^3)\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{2}{3}\left(x+\dfrac{x^3}{10}+o(x^3)\right)}{\left(1+\dfrac{x^2}{12}+o(x^3)\right)}$$

Soit $u=\dfrac{x^2}{12}+o(x^3)$:

$u \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{12}$ donc $u^2 << x^3$ et $\dfrac{1}{1+u}=1-u+u^2+o(u^2)=1-\dfrac{x^2}{12}+o(x^3)$.

Finalement : $f(x)=\dfrac{2}{3}\left(x+\dfrac{x^3}{10}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{12}\right)+o(x^3)=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{90}x^3+o(x^3)$.

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

• Question 2 : réponse D

- $f(0)=0$ et, d'après le $DL_3(0)$ de f : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ donc f est continue en 0.

$f(x)=f(0)+\dfrac{2}{3}x+o(x)$, donc f admet un $DL_1(0)$, donc f est dérivable en 0 et :

$$f'(0)=\frac{2}{3}$$

La réponse A est fausse.

NON

Si une fonction est de classe C^n, d'après la formule de Taylor-Young, elle admet un DL_n. Mais la réciproque est fausse.

Par exemple, soit $\varphi : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Au voisinage de 0 : $\varphi(x) = o\left(x^2\right)$ donc, en définissant $\varphi(0) = 0$, φ admet un $DL_2(0)$, $\varphi'(0) = 0$, et : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \varphi'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Or : $\dfrac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x} = 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0, donc φ n'est pas deux fois dérivable en 0. **La réponse B est fausse.**

- D'après le DL_3 (0) de f, la tangente à $\mathscr{C}$ en O est la droite Δ d'équation $y = \frac{2}{3}x$.

$f(x) - \frac{2}{3}x \underset{0}{\sim} \frac{1}{90}x^3$ du signe de x, donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ pour $x > 0$, et en dessous pour $x < 0$.

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

• Question 3 : réponses A et D

- $\Phi'(x) = \operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x = x \operatorname{sh} x$

La réponse A est bonne.

- (E) est une équation différentielle linéaire du 1^er^ordre, et $\operatorname{ch} x - 1 = 0$ en 0, donc on résout (E) sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$.

$\operatorname{sh} x$ est la dérivée de $\operatorname{ch} x - 1$, donc le premier membre de (E) est la dérivée du produit $(\operatorname{ch} x - 1)\, y$.

$$\text{(E)} \iff (\operatorname{ch} x - 1)\, y = \Phi(x) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$\iff y = \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C}{\operatorname{ch} x - 1} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Donc, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ (ou sur $\mathbb{R}_-^*$) sont les fonctions :

$$x \mapsto f(x) + \frac{C}{\operatorname{ch} x - 1} \quad (C \in \mathbb{R})$$

La réponse B est fausse.

• Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^*$ sont : $\begin{cases} \text{si } x > 0,\ \ y = f(x) + \dfrac{C_1}{\operatorname{ch} x - 1} & (1) \\ \text{si } x < 0,\ \ y = f(x) + \dfrac{C_2}{\operatorname{ch} x - 1} & (2) \end{cases}$

$$\begin{aligned} y(1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 1 + C_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad C_1 = -e^{-1}. \end{aligned}$$

C_2 n'est pas fixé, donc g est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, mais ce n'est pas le cas sur $\mathbb{R}^*$.

La réponse C est fausse.

• Si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, y est solution sur $\mathbb{R}^*$, donc vérifie (1) et (2).

y est continue en 0, or $f(0) = 0$ et f est continue en 0.

Si $C_1 \neq 0$, $\lim\limits_{x \to 0_+} y(x) = \pm\infty$, donc il faut $C_1 = 0$.

Si $C_2 \neq 0$, $\lim\limits_{x \to 0_-} y(x) = \pm\infty$, donc il faut $C_2 = 0$.

Donc f est la seule solution possible de (E). Or, d'après la question 2, f est dérivable en 0, donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$

La réponse D est bonne.

→ QCM 3 Courbe paramétrée

• Question 1 : réponses A et C

• $\forall\ t \in \mathbb{R}^*$, $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{(t^2 + t - 2)\, e^{-1/t}}{t^2} & \text{du signe de } t^2 + t - 2 \\ y'(t) = \dfrac{t^2 - 4}{t^2} & \text{du signe de } t^2 - 4 \end{cases}$

La réponse A est bonne.

• $y'(t) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \in \left]-\infty,\ -2\right[\cup \left]2,\ +\infty\right[$ **La réponse B est fausse.**

Point singulier

$M(t)$ est un point singulier si et seulement si : $x'(t) = y'(t) = 0$.

- $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \;\; ou \;\; t = 1$

  $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \;\; ou \;\; t = 2$.

Donc $M(-2)$ est l'unique point singulier de $\mathscr{C}$.

La réponse C est bonne.

- $x'(2) \neq 0$ et $y'(2) = 0$, donc la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(2)$ est parallèle à l'axe (Ox).

La réponse D est fausse.

Question 2 : réponses B et C

- $$\frac{1}{-2+h} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{h}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{h}{2} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^3 + o\left(h^3\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{h}{4} - \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{16} + o\left(h^3\right)$$

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

- $$e^{\left(\frac{1}{2-h}\right)} = e^{\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16} + o\left(h^3\right)}_{u(h)}} = e^{\frac{1}{2}} e^{u(h)}$$

or $u(h) \underset{0}{\sim} \dfrac{h}{4}$ donc $o\left(u^3\right) = o\left(h^3\right)$.

On écrit alors un $DL_3(0)$ de e^u : $\quad e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)$.

$$e^{u(h)} = 1 + \left(\frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{4} + \frac{h^2}{8}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{h}{4}\right)^3 + o\left(h^3\right)$$

$$e^{u(h)} = 1 + \frac{h}{4} + \frac{5h^2}{32} + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{384}\right)h^3 + o\left(h^3\right).$$

Finalement : $$e^{\left(\frac{1}{2-h}\right)} = e^{1/2}\left(1 + \frac{h}{4} + \frac{5h^2}{32} + \frac{37h^3}{384}\right) + o\left(h^3\right).$$

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

• Question 3 : réponses B et D

• Cherchons les $DL_3\,(-2)$ de x et de y.
On pose $t=-2+h$ avec h au voisinage de 0.

$$x(-2+h)=(-4+h)\,e^{\frac{1}{2-h}}=e^{1/2}(-4+h)\left(1+\frac{h}{4}+\frac{5h^2}{32}+\frac{37h^3}{384}+o\left(h^3\right)\right)$$

$$x(-2+h)=e^{1/2}\left(-4-\frac{3}{8}h^2-\frac{11}{48}h^3\right)+o\left(h^3\right)$$

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

• $y(-2+h)=-2+h+\dfrac{4}{-2+h}=-2+h-2\,\dfrac{1}{1-\dfrac{h}{2}}$

$$=-2+h-2\left(1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+\frac{h^3}{8}\right)+o\left(h^3\right)$$

soit : $\qquad y(-2+h)=-4-\dfrac{h^2}{2}-\dfrac{h^3}{4}+o\left(h^3\right).$

Alors : $F(-2+h)=\begin{vmatrix}-4\,e^{1/2}\\-4\end{vmatrix}+h\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}+h^2\begin{vmatrix}-\dfrac{3}{8}\,e^{1/2}\\-\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}+h^3\begin{vmatrix}-\dfrac{11}{48}\,e^{1/2}\\-\dfrac{1}{4}\end{vmatrix}+o\left(h^3\right).$

F est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, donc le $DL_3(-2)$ de F est le développement de Taylor-Young en -2, soit :

$$F(-2+h)=F(-2)\;+\;h\,F'(-2)\;+\;\frac{h^2}{2}F''(-2)\;+\;\frac{h^3}{6}F^{(3)}(-2)\;+\;o\left(h^3\right)$$

On retrouve $F'(-2)=0$ ($M(-2)$ est un point singulier).

$F''(-2)\begin{vmatrix}-\dfrac{3}{4}\,e^{1/2}\\-1\end{vmatrix}$ est colinéaire à $\vec{u}\begin{vmatrix}3\,e^{1/2}\\4\end{vmatrix}$ qui dirige donc la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(-2)$, $F^{(3)}(-2)$ est colinéaire à $\vec{v}\begin{vmatrix}11\,e^{1/2}\\12\end{vmatrix}$, et $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ sont non colinéaires.

Donc 2 est le plus petit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $F^{(p)}(-2) \neq 0$, et 3 est le plus petit $q > p$ tel que $\left(F^{(p)}(-2),\ F^{(q)}(-2)\right)$ libres, donc $M(-2)$ est un point de rebroussement de 1$^{\text{ère}}$ espèce.

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

• Question 4 : réponse B

NON

$\lim\limits_{t \to \pm\infty} e^{-1/t} = 1$ donc $x(t) \underset{\pm\infty}{\sim} t$ or $y(t) \underset{\pm\infty}{\sim} t$ d'où $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1$

Donc la droite d'équation $y = x$ est direction asymptotique de $\mathscr{C}$, mais il faut étudier la limite de $y - x$ quand $t \to \pm\infty$ avant de conclure à une asymptote. **La réponse A est fausse.**

• $y(t) - x(t) = t + \dfrac{4}{t} - (t-2)\, e^{-1/t} = t\left[1 + \dfrac{4}{t^2} - \left(1 - \dfrac{2}{t}\right) e^{-1/t}\right].$

Cherchons un $DL_1(\pm\infty)$ de $y(t) - x(t)$, donc un $DL_2(\pm\infty)$ du crochet :

$$y(t) - x(t) \;=\; t\left[1 + \frac{4}{t^2} - \left(1 - \frac{2}{t}\right)\left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)\right] \;=\; 3 + \frac{3}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$$

soit : $\quad y(t) - x(t) - 3 = \dfrac{3}{2t} + o\left(\dfrac{1}{t}\right)$ $\quad$ donc la droite Δ d'équation $y = x + 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $\pm\infty$, et $\dfrac{3}{2t}$ est du signe de t, donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ en $+\infty$, et en dessous de Δ en $-\infty$.

La réponse B est bonne et la réponse C est fausse.

• $x(t) \underset{0_-}{\sim} -2\, e^{-1/t}$ donc $\lim\limits_{t \to 0_-} x(t) = -\infty$ et $y(t) \underset{0_-}{\sim} \dfrac{4}{t}$ donc $\lim\limits_{t \to 0_-} y(t) = -\infty$.

$$\frac{y(t)}{x(t)} \underset{0_-}{\sim} -\frac{2}{t}\, e^{1/t}$$

Posons : $\quad X = \dfrac{1}{t} \underset{t \to 0_-}{\longrightarrow} -\infty$ $\quad$ alors $\quad -\dfrac{2}{t}\, e^{1/t} = -2X\, e^{X} \underset{X \to -\infty}{\longrightarrow} 0$

et $\lim\limits_{t \to 0_-} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$ donc $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction (Ox).

La réponse D est fausse.

→ QCM 4 Formule de Taylor-Young

• Question 1 : réponse B

NON Sur $\mathbb{R}^*$, g est C^∞ par opérations, et : $g'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

Si $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$: $g'(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}(x - \tan x)$. **La réponse A est fausse.**

• $x\cos x \underset{0}{\sim} x$ et $\sin x \underset{0}{\sim} x$ donc il faut un $DL_2(0)$ du numérateur :

$$g'(x) = \frac{x(1+o(x)) - (x + o(x^2))}{x^2} = \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$

La réponse B est bonne.

NON Pour utiliser la limite de la dérivée, il faut que g soit continue en 0, ce qui n'est vrai que si $a = 1$. **La réponse C est fausse.**

• Si $a = 1$, g est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$, donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$, donc g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

La réponse D est fausse.

• Question 2 : réponses C et D

NON • Si $p \geq m$: $\dfrac{x^p}{x^m} = x^{p-m} \underset{x\to 0}{\to} 0$ donc $x^p << x^m$: **la réponse A est fausse.**

• Si f est C^{n+1}, $f^{(q)}$ est C^{n+1-q} et on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre $n+1-q$.

La réponse B est fausse (sauf pour q = 1).

• $f^{(q)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1-q} \frac{f^{(q+k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^{n+1-q}\right)$

or $0 \leq q + k \leq n+1$ donc $f^{(q+k)}(0) = 0$

et finalement : $f^{(q)}(x) = o\left(x^{n+1-q}\right)$ (1)

La réponse C est bonne.

• $0 \leq k \leq p \leq n$ donc $0 \leq p - k \leq n$, et en remplaçant q par p–k dans (1), on obtient :

$$f^{(p-k)}(x) = o\left(x^{n+1-p+k}\right)$$

Or : $n+1-p+k = k+1+n-p \geq k+1$ donc $x^{n+1-p+k} \underset{0}{<<} x^{k+1}$.

Finalement : $f^{(p-k)}(x) = o\left(x^{k+1}\right)$ **La réponse D est bonne.**

Question 3 : réponses A et C

- u est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $u''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ et par récurrence :

$$u^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} \quad \text{donc} \quad u^{(k)}(x)\, f^{(p-k)}(x) = (-1)^k\, k!\, \frac{o\left(x^{k+1}\right)}{x^{k+1}} \underset{x\to 0}{\to} 0$$

La réponse A est bonne.

- Appliquons la formule de Leibniz à $\varphi(x) = u(x)\, f(x)$:

$$\varphi^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{\mathrm{p}}{\mathrm{k}} u^{(k)}(x)\, f^{(p-k)}(x)$$

La réponse B est fausse.

- D'après l'assertion A : $\lim\limits_{x\to 0} \varphi^{(p)}(x) = 0$.

Montrons par récurrence sur $p \in [\![0, n]\!]$ que φ est de classe C^p sur $\mathbb{R}$.

- Pour $p = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = f'(0) = 0 = \varphi(0)$, donc φ est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$.

- Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$, supposons que φ est de classe C^p sur $\mathbb{R}$, $\varphi^{(p)}(0) = 0$.

Montrons que φ est de classe C^{p+1} sur $\mathbb{R}$.

$$\left(\varphi \text{ est } \mathrm{C}^p \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \varphi \text{ est } \mathrm{C}^{p+1} \text{ sur } \mathbb{R}^*\right) \Leftrightarrow$$
$$\left(\varphi^{(p)} \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ et } \varphi^{(p)} \text{ est } \mathrm{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*\right)$$

$\lim\limits_{x\to 0} \varphi^{(p+1)}(x) = 0$ donc $\varphi^{(p)}$ est dérivable en 0 et $\varphi^{(p+1)}(0) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} \varphi^{(p+1)}(x)$.

Par conséquent $\varphi^{(p+1)}$ est continue en 0, et φ est de classe C^{p+1} sur $\mathbb{R}$.
Donc, par récurrence (finie), φ est C^n sur $\mathbb{R}$.

La réponse C est bonne.

• On peut appliquer les résultats précédents avec $f : x \mapsto (\operatorname{sh} x - x)^2$ si :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad f(0) = f'(0) = \ \ldots \ = f^{(n+1)}(0) = 0$$

f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et un $DL_{n+1}(0)$ donnera le résultat.

Pour que h soit C^5, il faut montrer que $n = 5$, donc écrire un $DL_6(0)$ de f.

Or : $\quad \operatorname{sh} x - x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{3!} \quad$ donc $\quad f(x) = \left[\dfrac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right]^2 = \dfrac{1}{36} x^6 + o\left(x^6\right).$

Par conséquent : $\quad f(0) = f'(0) = \ \ldots \ = f^{(5)}(0) = 0 \quad$ mais $\quad f^{(6)}(0) \neq 0.$

Donc $n = 4$, et h est de classe C^4 sur $\mathbb{R}$.

La réponse D est fausse.

chapitre 12

Intégration

QCM 1 Existence et propriétés de l'intégrale

Question 1 (d'après EPL 2008)

Soit $f : x \mapsto \int_0^x 3^{-[t]}\, dt$ où $[t]$ désigne la partie entière de t.

A Pour justifier l'existence de f sur $\mathbb{R}$, il suffit de constater que $t \mapsto 3^{-[t]}$ admet des limites finies à droite et à gauche en tout point.

B Pour montrer qu'une fonction g admet une limite en $+\infty$, il suffit de montrer que la suite $\left(g(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite.

C $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(n) = \dfrac{3}{2}\left(1 - 3^{-(n+1)}\right)$.

D f est croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une limite en $+\infty$ qui est la même que celle de $\left(f(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$: $\dfrac{3}{2}$.

Question 2

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\quad I_n = \int_0^1 t^n f(t)\, dt\,.$$

A De l'inégalité de la moyenne, on peut déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

B On suppose que f est C^1 sur $[0, 1]$. Alors : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{f(1)}{n}$.

On prend dans la suite : $f\ :\ t \mapsto \sin(\pi t)$.

C $f(1) = 0$ donc $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$.

D En intégrant par parties, on obtient : $(n+1)(n+2)\, I_n = \pi - \pi^2\, I_{n+2}$ donc : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{n^2}$.

Question 3 (d'après EPL 2008)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

A $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt$

B Soit $u_n = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k)}$. $\quad u_n = n\,e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{e}$.

On prend dans la suite $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue $(a < b)$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

C ln est concave, donc, pour $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\big(f(x_k)\big) \geq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)$$

D En utilisant les sommes de Riemann, on montre que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln\big(f(x)\big)\,dx \leq \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right)$$

Question 4 (d'après EPL 2008)

A La formule de Taylor avec reste intégral permet d'écrire :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad e^x = \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n\,e^t\,dt$$

B $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad e^x \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{x^k}{k!}$

C $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad e^x \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{x^k}{k!}$

D $\forall\, x \in \mathbb{R}_-,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad e^x \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{x^k}{k!}$

QCM 2 Intégrale dépendant d'un paramètre (d'après EPL 2007)

Pour tout paramètre réel x, on définit les fonctions φ_x et ψ_x par :

$$\varphi_x : u \mapsto \frac{1}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} \quad \text{et} \quad \psi_x : u \mapsto \frac{\sin u}{x^2\cos^2 u + \sin^2 u} \quad (u \in [0, \pi/2])$$

On pose, pour $x \neq 0$: $J(x) = \int_0^{\pi/2} \varphi_x(u)\,du$ et $K(x) = \int_0^{\pi/2} \psi_x(u)\,du$

• Question 1

Les fonctions φ_x et ψ_x sont :

A définies sur $[0, \pi/2]$ pour tout réel x.

B définies et continues sur $[0, \pi/2]$ pour tout réel x non nul.

Les intégrales $J(x)$ et $K(x)$ sont :

C définies pour tout réel x non nul, car toute fonction définie sur un segment est intégrable sur ce segment.

D définies pour tout réel x non nul, car toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment.

Dans la suite du QCM, on suppose $x > 0$.

Question 2

On pose, pour $U \in [0, \pi/2]$: $\quad F(U) = \int_0^U \varphi_x(u)\, du$

A Pour $U \in [0, \pi/2[$, en faisant le changement de variable $t = \dfrac{\tan u}{x}$, on obtient :

$$F(U) = \int_0^U \frac{1}{x\left(1+t^2\right)}\, dt$$

B F est continue en $\pi/2$, donc $J(x) = \lim\limits_{U \to \pi/2} F(U) = \dfrac{\pi}{2x}$.

Soit f l'application définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x \int_0^{\pi/2} u\varphi_x(u)\, du$.

En utilisant le changement de variable $s = \pi/2 - u$, on montre que :

C $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x\pi^2}{4}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$.

D $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi^2}{4}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$.

Question 3

A En faisant le changement de variable $v = \cos u$ dans $K(x)$, on obtient :

$$K(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 v^2 + 1 - v^2}\, dv$$

B On a la décomposition en éléments simples : $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t}\right)$

d'où, pour $x \in]0, 1[$: $\quad K(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)$.

C Pour $x \in]0, 1[$, $\quad K(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \operatorname{argth} \sqrt{1-x^2}$.

D Pour $x > 1$, $\quad K(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \arctan \sqrt{x^2-1}$.

• Question 4

Soient $x \in]0,\ 1[$ et $y = \text{argth}\,(1-x)$.

A $1 - \text{th}\,y \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-2y}$

B $\text{argth}\,(1-x) \underset{0}{\sim} -\ln x$

Au voisinage de 0, $K(x)$ est équivalente à :

C $-\ln x$

D $-\dfrac{1}{2}\ln x$

QCM 3 Intégration et algèbre linéaire

(d'après EPL 2009)

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $f \in$ E, on note $\varphi_a(f)$ l'application définie par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\ x \neq a, \quad \varphi_a(f)(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \varphi_a(f)(a) = f(a)\ .$$

• Question 1

A Si o indique la composition de deux applications, (E, o) est un groupe.

B Si + indique la somme de deux applications, (E, +) est un groupe commutatif d'élément neutre $Id_{\text{E}} : x \mapsto x$.

C Si . note la multiplication d'une application par un scalaire, (E, +, .) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.

D Si $\times$ note la multiplication de deux applications, (E, +, $\times$) est un corps.

• Question 2

A Pour toute fonction g définie sur $\mathbb{R}$, l'application $x \mapsto \int_a^x g(t)\,dt$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

B $\varphi_a(f)$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$–$\{a\}$.

C $\forall (f,\ g) \in \text{E}^2$, $\varphi_a(f+g) = \varphi_a(f) + \varphi_a(g)$, ce qui prouve que φ_a est linéaire.

D $\forall\ f \in$ E, $\varphi_a(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc φ_a définit un endomorphisme de E.

Question 3

Pour $b \in \mathbb{R}$, on note $g_b : x \mapsto |x - b|$.

A $\forall\, b \in \mathbb{R}$, g_b est continue sur $\mathbb{R}$, et $\varphi_a(g_a) = \frac{1}{2}\, g_a$.

B Ker $\varphi_a \neq \{0\}$ car il y a des fonctions non nulles dont l'intégrale est nulle.

C Ker $\varphi_a = \{0\}$, donc φ_a est injective, donc surjective.

D Si $b \neq a$, g_b n'est pas dérivable en b, donc φ_a n'est pas surjective.

Question 4

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{F} = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, de base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.

A $\forall\, i \in [\![0, n]\!]$, $\varphi_a(X^i) = \dfrac{1}{i+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{i} a^k\, X^{i+1-k}$.

B φ_a induit un endomorphisme ψ_a de F car $\forall\, i \in [\![0, n]\!]$, $\varphi_a(X^i) \in \mathrm{F}$.

C On a $\dim \mathrm{F} = n$ et φ_a est injective, donc ψ_a est injective, donc bijective.

D ψ_a ne peut pas être surjective puisque φ_a ne l'est pas.

QCM 4 Fonction définie par une intégrale

Soit la fonction f définie par :

$$f : t \mapsto \frac{1}{t + 1 - e^{-t}}$$

Pour tout réel $x \neq 0$, on pose :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

Question 1

A $\forall\ t \in \mathbb{R},\ \ t+1-e^{-t} > 0$, donc f est définie, continue, positive sur $\mathbb{R}$.

B $\forall\ t \in \mathbb{R},\ \ t+1-e^{-t} = 0 \iff t = 0$, donc f est définie, continue, positive sur $\mathbb{R}^*$.

C f est continue sur $\mathbb{R}^*$, et au voisinage de 0 : $\ f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2t}$.

D On pose $f(0)=0$. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ existe, car f est alors continue par morceaux sur $[-1, 1]$.

Question 2

A Φ est une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$, donc $\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ \ \Phi'(x) = f(x)$.

B Φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ \ \Phi'(x) = f(2x) - f(x)$.

C Φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, $\Phi'(x) = \dfrac{\left(e^{-x}-1\right)^2}{\left(2x+1-e^{-2x}\right)\left(x+1-e^{-x}\right)}$.

D Φ est croissante, positive sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Question 3

A Φ admet une limite en $+\infty$, car toute fonction continue sur un intervalle $]a, +\infty[$ admet une limite en $+\infty$ et à droite en a.

B $\forall\ t \in [0, +\infty[,\ \ \dfrac{1}{t+1} \leq f(t) \leq \dfrac{1}{t}$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = \ln 2$.

C f est décroissante sur $]-\infty, 0[$, donc, pour $x < 0$,

$$\operatorname*{Sup}_{t \in [2x, x]} |f(t)| = |f(2x)|.$$

D En utilisant l'inégalité de la moyenne, on montre que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$.

Question 4

A Soit ε une application continue sur $\mathbb{R}^*$ telle que $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Alors $\displaystyle\int_0^x t\,\varepsilon(t)\,dt$ existe et, au voisinage de 0 : $\displaystyle\int_0^x t\,\varepsilon(t)\,dt = o\left(x^2\right)$.

B En utilisant un $DL_3(0)$ de e^{-t}, on montre que f admet un développement asymptotique au voisinage de 0 :

$$f(t) = \frac{1}{2t} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24}t + t\,\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$$

Φ admet pour $DL_2(0)$:

C $\Phi(x) = \dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{1}{8}x - \dfrac{1}{64}x^2 + o\left(x^2\right)$

D $\Phi(x) = \dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{1}{8}x - \dfrac{1}{16}x^2 + o\left(x^2\right)$

→ QCM 1 Existence et propriétés de l'intégrale

• Question 1 : réponse D

Existence de l'intégrale

- L'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} h(t)\,dt$ existe si la fonction h est continue par morceaux sur un segment I contenant α et β.
- h est continue par morceaux sur un segment I si h est continue sur I sauf sur un <u>nombre fini de points</u>, et si, en ces points, h admet des limites <u>finies</u> à droite et à gauche.

NON La condition proposée est insuffisante. **La réponse A est fausse.**

$t \mapsto 3^{-[t]}$ est continue par morceaux sur tout segment $[a, b]$ ($a < b$), car il y a un nombre fini d'entiers dans $[a, b]$ et la partie entière $t \mapsto [t]$ admet une limite finie à droite et à gauche en tout $n \in \mathbb{Z}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe.

- Si $(g(n))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite, on ne peut pas conclure que g admet une limite quand x tend vers $+\infty$. <u>Par exemple</u>, si $g(x) = \cos(2\pi x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(n) = 1$ donc la suite $(g(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, mais $g\left(n + \frac{1}{4}\right) = 0$, donc g n'admet pas de limite quand x tend vers $+\infty$. **La réponse B est fausse.**

- $f(n) = \int_0^n 3^{-[t]}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} 3^{-k}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} 3^{-k} = \dfrac{1-3^{-n}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}\left(1-3^{-n}\right).$

La réponse C est fausse.

- Or : $\forall t \in [a, b]$, $3^{-[t]} \geq 0$ donc $\int_a^b 3^{-[t]}\,dt \geq 0$ et $f(b) \geq f(a)$.

Donc f est croissante, donc <u>f admet une limite</u> $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ a la même limite ℓ, or $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{3}{2}$, d'où $\ell = \frac{3}{2}$.

La réponse D est bonne.

• Question 2 : réponses A et D

Inégalité de la moyenne

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[\,a,\ b\,]\,(a<b)$:

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leq \operatorname*{Sup}_{[a,b]}|f|\int_a^b |g(t)|\,dt$$

Il ne faut pas oublier les valeurs absolues.

• Si f est continue sur [0, 1], $M=\operatorname*{Sup}_{[0,1]}|f|$ existe. D'après l'inégalité de la moyenne :

$$\left|\int_0^1 t^n f(t)\,dt\right| \leq M\int_0^1 t^n\,dt \leq \frac{M}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

La réponse A est bonne.

• f est C^1 sur [0, 1], donc on peut intégrer par parties.

On pose : $\begin{cases} u'(t)=t^n \\ v(t)=f(t) \end{cases}$ donc: $\begin{cases} u(t)=\dfrac{t^{n+1}}{n+1} \text{ par exemple} \\ v'(t)=f'(t) \end{cases}$

$$I_n=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}f(t)\right]_0^1-\int_0^1\frac{t^{n+1}}{n+1}f'(t)\,dt=\underbrace{\frac{1}{n+1}\left[f(1)-I'_{n+1}\right]}_{(1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\left[f(1)-I'_{n+1}\right]$$

avec $I'_{n+1}=\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt$.

f est C^1 sur [0, 1], donc f' est continue, et d'après l'assertion A :

$$\lim_{n\to+\infty} I'_{n+1}=0$$

- Si $f(1)\neq 0$: $I'_{n+1} << f(1)$ donc $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{f(1)}{n}$.
- Si $f(1)=0$: $I_n \underset{+\infty}{\sim} 0 \Leftrightarrow I_n=0$ à partir d'un certain rang.

Or, pour $f: t \mapsto 1-t$, on a :

$$I_n=\int_0^1\left(t^n-t^{n+1}\right)dt=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\neq 0$$

La réponse B est fausse.

• Si $f(t)=\sin(\pi t)$, $f(1)=0$. Or, $\forall\ t\in[0,1]$, $f(t)\geq 0$ donc $I_n\geq 0$.

De plus, $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ et f continue en $\frac{1}{2}$, donc $I_n > 0$. **La réponse C est fausse.**

• Appliquons (1) à $f(t) = \sin(\pi t)$:

$$I_n = -\frac{1}{n+1}\, I'_{n+1} \;= -\frac{\pi}{n+1}\int_0^1 t^{\,n+1}\cos(\pi t)\,dt\,.$$

On intègre à nouveau par parties :

$$I_n \;=\; -\frac{\pi}{n+1}\left[-\frac{1}{n+2} + \frac{\pi}{n+2}\int_0^1 t^{\,n+2}\sin(\pi t)\,dt\right] = \frac{\pi\,(1-\pi\, I_{n+2})}{(n+1)(n+2)}\,.$$

$$\lim_{n\to+\infty}(\pi\, I_{n+2}) = 0 \;\text{ donc }\; \pi\, I_{n+2} << 1 \;\text{ et }\; I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2}$$

La réponse D est bonne.

• Question 3 : réponse D

Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[\,a,\; b\,]$ $(a < b)$. La somme de Riemann $R_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$ a pour limite $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ quand n tend vers + ∞.

Ce résultat reste vrai pour : $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$.

NON Il manque le facteur $(b–a)$. **La réponse A est fausse.**

• $u_n = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k)} = \left[n^n\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]^{1/n} = n\, e^{\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)} = n\, e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$

$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ est la somme de Riemann de $f :\; x \;\mapsto\; \ln(1+x)$ sur [0, 1].

Or : $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \Big[(1+x)\ln(1+x) - x\Big]_0^1 = 2\ln 2 - 1 = \ln\left(\frac{4}{e}\right)$

$$\text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)} = \frac{4}{e} \neq 0 \quad \text{et} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n}{e}.$$

La réponse B est fausse.

Inégalité de convexité

Soit f une fonction convexe sur I, $\lambda_k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Alors, pour $a_k \in \mathrm{I}$: $\quad f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k).$

• L'inégalité inverse s'applique à ln, <u>concave</u> sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $\lambda_k = \dfrac{1}{n}$, donne :

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)$$

or $\quad f : [a, b] \to \mathbb{R}_+^* \quad$ donc, pour $\; a_k = f(x_k)$:

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\big(f(x_k)\big) \quad (2)$$

La réponse C est fausse.

• En prenant $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$, on a les sommes de Riemann suivantes :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \to \int_a^b f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\big(f(x_k)\big) \to \int_a^b \ln\big(f(t)\big)\,dt$$

d'où : $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \to \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\big(f(x_k)\big) \to \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln\big(f(t)\big)\,dt.$$

En prenant les limites dans (2), on obtient :

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln\big(f(x)\big)\,dx$$

La réponse D est bonne.

Question 4 : réponses B et D

Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I, et $a \in$ I :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

NON Ici, $f(x) = e^x$ et $a = 0$, mais il manque le terme $k = 0$.

La réponse A est fausse.

- $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt$

- Si $x \geq 0$: $x - t \geq 0$ donc $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt \geq 0$ et $e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

- Si $x < 0$: $x \leq t \leq 0$ donc $(x-t)^n$ est du signe de $(-1)^n$,

et $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt = -\int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt$ est du signe de $(-1)^{n+1}$, donc :

$$\begin{cases} \text{si } n \text{ est pair : } & e^x \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} \\ \text{si } n \text{ est impair : } & e^x \geq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \end{cases}$$

Les réponses B et D sont bonnes, la réponse C est fausse.

QCM 2 Intégrale dépendant d'un paramètre

Question 1 : réponses B et D

- $x^2 \cos^2 u + \sin^2 u = 0 \iff x \cos u = 0$ *et* $\sin u = 0 \iff x = 0$.

Donc, si $x \neq 0$, φ_x et ψ_x sont définies et continues sur $[0, \pi/2]$, et φ_0 et ψ_0 sont définies sur $]0, \pi/2]$.

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

- Les fonctions intégrables sur un segment sont les fonctions continues par morceaux sur ce segment

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

• Question 2 : réponses B et D

• $u \mapsto t = \dfrac{\tan u}{x}$ est C^1 sur $[0, \pi/2[$, donc :

$$dt = \frac{1+\tan^2 u}{x}\,du \quad \text{et} \quad du = \frac{x}{1+x^2t^2}\,dt$$

$$\cos^2 u = \frac{1}{1+\tan^2 u} = \frac{1}{1+x^2t^2} \quad \text{et} \quad \sin^2 u = 1-\cos^2 u = \frac{x^2t^2}{1+x^2t^2}.$$

Si $U \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$F(U) = \int_0^{\frac{\tan U}{x}} \frac{x}{\left(1+x^2t^2\right)\left(\dfrac{x^2}{1+x^2t^2}+\dfrac{x^2t^2}{1+x^2t^2}\right)}\,dt = \int_0^{\frac{\tan U}{x}} \frac{1}{x\left(1+t^2\right)}\,dt.$$

La borne supérieure est erronée. **La réponse A est fausse.**

• φ_x est continue sur $[0, \pi/2]$, donc F est une primitive de φ_x sur $[0, \pi/2]$, F est dérivable donc <u>continue</u> sur $[0, \pi/2]$ et : $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = J(x) = \lim\limits_{U\to\pi/2} F(U)$.

$$F(U) = \frac{1}{x}\left[\arctan t\right]_0^{\frac{\tan U}{x}} = \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{\tan U}{x}\right).$$

$$x > 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{U\to\pi/2} \frac{\tan U}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{U\to\pi/2} \arctan\left(\frac{\tan U}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc : $J(x) = F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2x}$ **La réponse B est bonne.**

• $$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\int_0^{\pi/2} \frac{u\,du}{\dfrac{1}{x^2}\cos^2 u + \sin^2 u} = x\int_0^{\pi/2} \frac{u\,du}{\cos^2 u + x^2\sin^2 u},$$

$s = \dfrac{\pi}{2} - u$, $ds = -\,du$.

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x\int_{\pi/2}^{0} \frac{(\pi/2 - s)(-\,ds)}{\sin^2 s + x^2\cos^2 s} = x\int_0^{\pi/2} \frac{(\pi/2 - s)\,ds}{x^2\cos^2 s + \sin^2 s} = \frac{\pi x}{2}J(x) - f(x).$$

$$\text{Donc} \quad f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

• Question 3 : réponses A et D

$$v = \cos u, \quad dv = -\sin u \, du \quad \text{et} \quad K(x) = \int_1^0 \frac{-dv}{x^2 v^2 + \left(1 - v^2\right)} = \int_0^1 \frac{dv}{x^2 v^2 + 1 - v^2}$$

La réponse A est bonne.

• $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t}\right) = \dfrac{1}{2} \dfrac{1+t+1-t}{(1-t)(1+t)} = \dfrac{1}{1-t^2}$: la décomposition est bonne.

Pour $x \in \,]0, 1[$: $K(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dv}{1-\left(1-x^2\right) v^2}$ et $0 < 1 - x^2 < 1$

Posons : $\alpha = \sqrt{1-x^2}$ alors : $\dfrac{1}{1-(\alpha v)^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-\alpha v} + \dfrac{1}{1+\alpha v}\right)$

$$K(x) = \frac{1}{2\alpha}\left[\int_0^1 \frac{\alpha}{1-\alpha v} dv + \int_0^1 \frac{\alpha}{1+\alpha v} dv\right] = \frac{1}{2\alpha}\left[-\ln(1-\alpha v) + \ln(1+\alpha v)\right]_0^1$$

$$K(x) = \frac{1}{2\alpha} \ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$$

La réponse B est fausse.

• Pour $x \in \,]0, 1[$: $K(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dv}{1-(\alpha v)^2}$ et on pose $\begin{cases} w = \alpha v \\ dw = \alpha \, dv \end{cases}$

$K(x) = \dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int_0^\alpha \frac{dw}{1-w^2} = \dfrac{1}{\alpha}\left[\operatorname{arg\,th} w\right]_0^\alpha$ car $w \in [0, \alpha]$ donc $w \in [0, 1]$.

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{argth} \sqrt{1-x^2}$$

La réponse C est fausse.

• Pour $x > 1$, on pose : $\beta = \sqrt{x^2 - 1}$

d'où $K(x) = \dfrac{1}{\beta} \displaystyle\int_0^1 \frac{\beta \, dv}{1+(\beta v)^2} = \dfrac{1}{\beta}\left[\arctan(\beta v)\right]_0^1$

et : $K(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \arctan \sqrt{x^2-1}$

La réponse D est bonne.

• Question 4 : réponses A et C

• $y = \text{argth}\,(1-x) \iff 1-x = \text{th}\, y$ et $y > 0$ car $1-x \in \,]0,\ 1[$.

$$1 - \text{th}\, y = \frac{2e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2e^{-y}}{e^y} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-2y}$$

La réponse A est bonne.

• $\dfrac{1-\text{th}\, y}{2} \underset{+\infty}{\sim} e^{-2y}$ et $\dfrac{1-\text{th}\, y}{2} = \dfrac{x}{2} \underset{y\to+\infty}{\to} 0 \neq 1$

$$\text{donc} \quad \ln\left(\frac{x}{2}\right) \underset{y\to+\infty}{\sim} \ln\left(e^{-2y}\right) \underset{+\infty}{\sim} -2y$$

$$\text{soit} \quad y \underset{x\to0}{\sim} -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x\to0}{\sim} -\frac{1}{2}(\ln x - \ln 2) \underset{x\to0}{\sim} -\frac{1}{2}\ln x$$

$$\text{car} \quad \ln x \to -\infty \quad \text{donc } \ln 2 << \ln x \quad \text{et} \quad \text{argth}\,(1-x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}\ln x.$$

La réponse B est fausse.

• $K(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{arg th}\sqrt{1-x^2} \underset{0}{\sim} \text{arg th}\sqrt{1-x^2}$ car $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{\sim} 1.$

$$\sqrt{1-x^2} = \left(1-x^2\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right) = 1 - u(x) \qquad \text{avec} \qquad u(x) \underset{x\to0}{\to} 0.$$

$$\text{Donc} \quad K(x) \underset{0}{\sim} \text{arg th}\,(1-u(x)) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}\ln(u(x))$$

$$\text{or} \quad u(x) = \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right) \underset{x\to0}{\to} 0 \neq 1$$

$$\text{d'où : } \ln(u(x)) \underset{0}{\sim} \ln\left(\frac{x^2}{2}\right) \text{ et } K(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{2}\right) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}(2\ln x - \ln 2) \underset{0}{\sim} -\ln x$$

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

→ QCM 3 Intégration et algèbre linéaire

• Question 1 : réponse C

NON La loi o est interne dans E car la composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais les applications continues ne sont pas toutes bijectives et n'ont donc pas d'inverse pour o (par exemple les fonctions constantes), donc (E, o) n'est pas un groupe.

La réponse A est fausse.

NON (E, +) est un groupe commutatif, mais son élément neutre n'est pas Id_E mais l'application nulle. **La réponse B est fausse.**

- (E, +, .) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Il contient l'espace vectoriel des fonctions polynômes qui est de dimension infinie, donc E est de dimension infinie **La réponse C est bonne.**

NON (E, +, ×) est un anneau commutatif, mais ce n'est pas un corps : $x \mapsto x$ n'a pas d'inverse dans E car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. **La réponse D est fausse.**

Question 2 : réponses B et D

NON $x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$ est une primitive de g si g est continue sur $\mathbb{R}$. **La réponse A est fausse.**

- f étant continue sur $\mathbb{R}$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f telle que $F(a) = 0$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$ est dérivable sur $\mathbb{R}-\{a\}$.

Donc $\varphi_a(f)$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}-\{a\}$.

La réponse B est bonne.

NON L'assertion C ne suffit pas à prouver que φ_a est linéaire. Il manque : $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \ \varphi_a(\lambda f) = \lambda\, \varphi_a(f)$. **La réponse C est fausse.**

- Si $x \neq a$,

$$\varphi_a(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x (\lambda f + g)(t)\,dt = \frac{1}{x-a}\left[\lambda \int_a^x f(t)\,dt + \int_a^x g(t)\,dt\right]$$

$$\text{donc} \quad \varphi_a(\lambda f + g)(x) = \lambda\,\varphi_a(f)(x) + \varphi_a(g)(x).$$

En $x = a$, $\varphi_a(\lambda f + g)(a) = (\lambda f + g)(a) = \lambda f(a) + g(a) = \lambda\,\varphi_a(f)(a) + \varphi_a(g)(a)$.

Donc φ_a est linéaire.

$\varphi_a(f)$ est continue sur $\mathbb{R}-\{a\}$.

$$\text{Si } x \neq a,\ \varphi_a(f)(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = F'(a) = f(a) = \varphi_a(f)(a)$, donc $\varphi_a(f)$ est continue en a, et $\varphi_a(f) \in E$, donc φ_a est un endomorphisme de E.

La réponse D est bonne.

Question 3 : réponses A et D

- g_b est continue sur $\mathbb{R}$, donc $g_b \in$ E, mais g_b n'est pas dérivable en b.

  - $\varphi_a(g_a)(a) = g_a(a) = |a - a| = 0$

  - Si $x > a$: $\varphi_a(g_a)(x) = \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x (t-a)\,dt = \dfrac{1}{x-a}\left[\dfrac{1}{2}(t-a)^2\right]_a^x$

  $$= \frac{1}{2}|x-a|$$

  - Si $x < a$: $\varphi_a(g_a)(x) = -\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x (t-a)\,dt = -\dfrac{1}{2}(x-a) = \dfrac{1}{2}|x-a|$

Donc : $\varphi_a(g_a) = \dfrac{1}{2}g_a$ **La réponse A est bonne.**

- $\operatorname{Ker}\varphi_a = \{f \in \mathrm{E} / \ \varphi_a(f) = 0\}$

$$\varphi_a(f) = 0 \iff \forall\, x \neq a,\ \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt = 0 \ \text{ et } \ f(a) = 0$$

$$\iff \forall\, x \neq a,\ \int_a^x f(t)\,dt = 0 \ \text{ et } \ f(a) = 0.$$

En notant toujours F la primitive de f telle $F(a) = 0$:

$\varphi_a(f) = 0 \iff \forall\, x \neq a,\ F(x) = 0$ et $f(a) = 0$ donc : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ F'(x) = 0$.

Or $F' = f$ donc $f = 0$ et $\operatorname{Ker}\varphi_a = \{0\}$. **La réponse B est fausse.**

Donc φ_a est injective. E n'étant pas de dimension finie, φ_a peut être injective sans être surjective. **La réponse C est fausse.**

- Si $b \neq a$: g_b n'est pas dérivable en b, or $\forall\, f \in \mathrm{E}$, $\varphi_a(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}-\{a\}$, donc en b. Donc $g_b \notin \operatorname{Im}\varphi_a$, et φ_a n'est pas surjective.

La réponse D est bonne.

Question 4 : réponse B

- Si $x \neq a$:

$$\varphi_a\left(X^i\right)(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x t^i\,dt = \frac{\left(x^{i+1} - a^{i+1}\right)}{(x-a)(i+1)} = \frac{1}{i+1}\left(x^i + x^{i-1}a + \ldots + a^i\right)$$

soit : $\varphi_a\left(X^i\right) = \dfrac{1}{i+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{i} a^k X^{i-k}$ (vrai pour $x = a$).

La réponse A est fausse.

- $\deg \varphi_a\left(X^i\right)=i$ donc $\varphi_a\left(X^i\right)\in \mathrm{F}$ et $\varphi_a(\mathrm{F})\subset \mathrm{F}$, donc φ_a induit un endomorphisme ψ_a de F **La réponse B est bonne.**

NON

- φ_a est injective, donc ψ_a est injective. Or, F est de dimension finie, donc :

ψ_a injective $\Leftrightarrow$ ψ_a bijective $\Leftrightarrow$ ψ_a surjective : **La réponse D est fausse.**

- En revanche : $\dim \mathrm{F}=n+1$. **La réponse C est fausse.**

→ QCM 4 Fonction définie par une intégrale

• Question 1 : réponse C

- Soit $\varphi(t)=t+1-e^{-t}$. $\varphi'(t)=1+e^{-t}>0$, donc φ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $\varphi(0)=0$, donc $\varphi(t)$ est du signe de t.

$t+1-e^{-t}=0 \Leftrightarrow t=0$, donc f est définie et continue (par opération) sur $\mathbb{R}^*$, et $f(t)$ est du signe de t. **Les réponses A et B sont fausses.**

- Au voisinage de 0 : $e^{-t}=1-t+o(t)$ donc $\varphi(t)=2t+o(t)\underset{0}{\sim}2t$ et $f(t)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{2t}$. **La réponse C est bonne.**

NON

$f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0_+} f(t)=+\infty$ donc f n'est pas continue par morceaux sur $[-1, 1]$. **La réponse D est fausse.**

• Question 2 : réponses C et D

NON

Φ n'est pas une primitive de f, car les deux bornes de l'intégrale $\Phi(x)$ dépendent de x. **La réponse A est fausse.**

- f est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, donc elle admet des primitives sur chaque intervalle. Soit F_1 une primitive sur $]0,+\infty[$ et F_2 une primitive sur $]-\infty, 0[$.

  - Si $x>0$: $[x, 2x]\subset\,]0,+\infty[$ donc $\Phi(x)=F_1(2x)-F_1(x)$.

  - Si $x<0$: $[2x, x]\subset\,]-\infty, 0[$ donc $\Phi(x)=F_2(2x)-F_2(x)$.

Donc Φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $\begin{cases}\Phi'(x)=2F_1'(2x)-F_1'(x) & \text{si } x>0\\ \Phi'(x)=2F_2'(2x)-F_2'(x) & \text{si } x<0\end{cases}$

soit : $\forall\, x\in\mathbb{R}^*,\ \Phi'(x)=2f(2x)-f(x)$. **La réponse B est fausse.**

• $\Phi'(x) = \dfrac{2}{2x+1-e^{-2x}} - \dfrac{1}{x+1-e^{-x}} = \dfrac{\left(e^{-x}-1\right)^2}{\left(2x+1-e^{-2x}\right)\left(x+1-e^{-x}\right)}$

La réponse C est bonne.

• $\Phi'(x)$ est du signe de $\left[\left(2x+1-e^{-2x}\right)\left(x+1-e^{-x}\right)\right]^{-1} = f(2x)\,f(x)$, or $f(x)$ est du signe de x, donc $\Phi'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^*$, et Φ est <u>croissante</u> sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

- Si $x > 0$: $x \le t \le 2x$ et $f(t) > 0$ donc $\Phi(x) \ge 0$.
- Si $x < 0$: $2x \le t \le x < 0$ et $f(t) < 0$ donc $\displaystyle\int_{2x}^{x} f(t)\,dt \le 0$ et $\Phi(x) \ge 0$.

Donc Φ est positive sur $\mathbb{R}^*$. **La réponse D est bonne.**

• Question 3 : réponses B et D

NON **La réponse A est fausse** : par exemple, la fonction sinus est continue sur $]0, +\infty[$, mais n'a pas de limite en $+\infty$ (vrai si on remplace « continue » par « monotone »).

• $\forall\, t \in]0, +\infty[$, $0 < e^{-t} < 1$ soit $-1 < -e^{-t} < 0$ et $0 < t < t+1-e^{-t} < t+1$

donc : $\dfrac{1}{t+1} < f(t) < \dfrac{1}{t}$

$x > 0$, donc $x \le 2x$ et on peut intégrer l'inégalité précédente entre x et $2x$:

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\,dt \le \Phi(x) \le \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt$$

$$\text{soit} \quad \left[\ln(t+1)\right]_x^{2x} \le \Phi(x) \le \left[\ln t\right]_x^{2x}$$

d'où : $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) \le \Phi(x) \le \ln 2$ or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) = \ln 2$

donc, d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln 2$

La réponse B est bonne.

• $f'(t) = -\dfrac{\left(1+e^{-t}\right)}{\left(t+1-e^{-t}\right)^2} < 0$ sur $]-\infty,\ 0[$, donc f est décroissante sur $]-\infty,\ 0[$.

$\left|f(t)\right| = -f(t)$ car $f(t) \leq 0$ donc $\underset{t\in[2x,\,x]}{\operatorname{Sup}} \left|f(t)\right| = -f(x) = \left|f(x)\right|$.

La réponse C est fausse.

• L'inégalité de la moyenne sur $[2x, x]$ $(x < 0)$ donne :

$$\left|\int_{2x}^{x} f(t)\,dt\right| \leq \underset{t\in[2x,\,x]}{\operatorname{Sup}} \left|f(t)\right|(x-2x) \leq -x\left|f(x)\right| \leq xf(x)$$

Or : $xf(x) = \dfrac{x}{x+1-e^{-x}} \underset{-\infty}{\sim} -\dfrac{x}{e^{-x}}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} xf(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$

La réponse D est bonne.

• Question 4 : réponses A et C

• On peut prolonger ε par continuité en 0 : $\varepsilon(0) = 0$ alors $\displaystyle\int_0^x t\varepsilon(t)\,dt$ existe.

$$\int_0^x t\,\varepsilon(t)\,dt = \int_0^x o(t)\,dt = o\left(x^2\right) \quad \text{par intégration du } DL_1\ (0) \text{ de } t\varepsilon\ (t)$$

La réponse A est bonne.

• $e^{-t} = 1 - t + \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{6}t^3 + o\left(t^3\right)$.

En posant $u = -\dfrac{1}{4}t + \dfrac{1}{12}t^2 + o\left(t^2\right)$, on obtient :

$$f(t) = \frac{1}{2t\left(1-\frac{1}{4}t + \frac{1}{12}t^2 + o\left(t^2\right)\right)} = \frac{1}{2t}\cdot\frac{1}{1+u} = \frac{1}{2t}\left(1-u+u^2+o\left(u^2\right)\right)$$

Finalement : $f(t) = \dfrac{1}{2t} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{96}t + o(t)$. **La réponse B est fausse.**

• $\Phi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{1}{2t} + \frac{1}{8} - \frac{1}{96}t + o(t)\right)dt = \frac{1}{2}\cdot\ln 2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{64}x^2 + o\left(x^2\right)$.

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

On peut prolonger Φ par continuité en 0 en posant $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}\ln 2$, et $\Phi'(0) = \dfrac{1}{8}$.

chapitre 13

Fonctions de deux variables – Intégrales doubles – Étude métrique des courbes

QCM 1 Fonction C^n - Extremum

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x, y) = x^2 \ln(x^2 + y^2) & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$

• Question 1

Soient $f_k : (x, y) \mapsto x^k \ln(x^2 + y^2) \quad (k \in \mathbb{N}^*)$

et $g : (x, y) \mapsto \dfrac{x^p y^q}{x^2 + y^2} \quad ((p, q) \in \mathbb{N}^2)$.

A $f_k(x, y) \leq 0$ sur le disque de centre (0, 0) et de rayon 1.

B Au voisinage de (0, 0), $|f_k(x, y)| \leq |f_k(x, 0)|$ donc :

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f_k(x, y) = 0$$

C Si $p + q = 2$, $g(x, x) = \dfrac{1}{2}$ donc $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} g(x, y) = \frac{1}{2}$

D Si $p + q \geq 3$, $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} g(x, y) = 0$

• Question 2

A f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, et :

$$\forall (x, y) \neq (0, 0) : \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \ln(x^2 + y^2) + \dfrac{2x^3}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

B f est continue sur $\mathbb{R}^2$, mais n'est pas C^1 en (0, 0) car pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'a pas de limite en (0, 0).

C Par définition : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \displaystyle\lim_{x \to 0} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$.

D f admet des dérivées partielles premières en (0, 0) et f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Question 3

A Les points $(a, 0)$ et $(0, b)$ $\left((a, b) \in \mathbb{R}^2\right)$ sont les points critiques de f.

B $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(0, 0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, x) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x} = 0$.

C $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$, donc f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

D $\varphi_1 : x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$ est dérivable en 0, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \varphi_1'(0)$.

Question 4

A f admet un maximum absolu sur $\mathbb{R}^2$.

B f admet un extremum relatif en tout point $(0, b)$, $b \in \mathbb{R}$.

C $h : x \mapsto f(x, 0)$ admet un minimum absolu atteint en $\dfrac{1}{e}$.

D f admet un minimum absolu strictement négatif.

QCM 2 Équation aux dérivées d'ordre 2 (d'après EPL 2009)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $c \neq 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$. On considère l'équation aux dérivées partielles, d'inconnue f de classe au moins C^2 sur $\mathbb{R}^2$:

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(E)}$$

Question 1

On effectue le changement de variable suivant :

$$u = x + \alpha y \qquad \text{et} \qquad v = x + \beta y \qquad \text{où} \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

On posera dans la suite de ce QCM :

$$g(u, v) = f\left(x(u, v), y(u, v)\right), \quad P = a + bX + cX^2 \quad \text{et} \quad K = 2a + b(\alpha + \beta) + 2c\alpha\beta$$

A L'application $H: \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (u, v) \end{array}$ est bijective si et seulement si $\alpha \neq \beta$, et sous cette condition H et H^{-1} sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
Donc : (f est au moins C^2 sur $\mathbb{R}^2$) $\Leftrightarrow$ (g est au moins C^2 sur $\mathbb{R}^2$).

B $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \alpha \dfrac{\partial f}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$

C $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \beta \dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \alpha \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$

D (f solution de (E))

$$\Leftrightarrow \left(g \text{ solution de (E)}' : P(\alpha) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + K \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + P(\beta) \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0 \right)$$

Question 2

On se place, dans cette question et dans la suivante seulement, dans le cas où $b^2 - 4ac > 0$.

A P possède deux racines distinctes r_1 et r_2 vérifiant $r_1 + r_2 = -\dfrac{a}{c}$ et $r_1 . r_2 = \dfrac{b}{c}$.

B P possède deux racines distinctes r_1 et r_2. On peut donc choisir deux réels α et β, différents et tels que $P(\alpha) = P(\beta) = 0$ et $K \neq 0$.

C $K = P'(\alpha) + P'(\beta)$, et pour que K soit nul il faudrait que α et β soient racines doubles de P, ce qui ici est impossible. Donc $K \neq 0$ pour tout $\alpha \neq \beta$.

D Il existe α et β tels que (E$'$) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.

Question 3

On est toujours dans le cas où $b^2 - 4ac > 0$. On note r_1 et r_2 les racines de P.

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ est équivalente à :

A $\dfrac{\partial g}{\partial u} = M$ où M est une constante réelle.

B $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v) = M(u)$ où M est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

De plus, si g est au moins C^2 sur $\mathbb{R}^2$, M est au moins C^1 sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de (E) sont les fonctions :

C $f : (x, y) \mapsto h_1(x + r_1 y) + h_2(x + r_2 y)$ où h_1 et h_2 sont des fonctions arbitraires de classe au moins C^2 sur $\mathbb{R}$.

D $f : (x, y) \mapsto h_1(x + r_1 y) . h_2(x + r_2 y)$ où h_1 et h_2 sont des fonctions arbitraires de classe au moins C^2 sur $\mathbb{R}$.

• Question 4

On se place dans cette question dans le cas où $b^2 - 4ac = 0$. On note r la racine double de P.

A Le raisonnement précédent reste valable, donc les fonctions solutions de (E) sont toutes de la forme $f(x, y) = h(x + ry)$ où h est une fonction arbitraire de classe au moins C^2 sur $\mathbb{R}$.

B On peut choisir $\alpha = r$ et $\beta = 0$, et (E') devient alors $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$.

C $f : (x, y) \mapsto x \cos(x + ry) + \sin(x + ry)$ est solution de (E).

D Les fonctions solutions de (E) sont toutes de la forme $f(x, y) = x\, h(x + ry)$, où h est une fonction arbitraire de classe au moins C^2 sur $\mathbb{R}$.

QCM 3 Aires – Intégrales doubles

• Question 1

Soit D le domaine du plan situé entre les paraboles d'équations $y^2 = x$ et $y = x^2$.
L'aire de D est :

A $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2} dy \right) dx$

B $\dfrac{1}{3}$

Soit D le domaine défini en coordonnées polaires par : $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \leq \rho \leq \dfrac{1}{1+\cos\theta} \end{cases}$

L'aire de D est :

C $\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{\pi/3}\left(1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 d\theta$ **D** $\dfrac{5}{9\sqrt{3}}$

• Question 2

Soit : $I = \displaystyle\iint_D y\,dx\,dy$ avec $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right\}$

et : $J = \displaystyle\iint_\Delta y\,dx\,dy$ avec $\Delta = \{(x, y) \in D \,/\, y \geq 0\}$.

En utilisant le changement de variables affine $\begin{cases} x = X \\ y = -Y \end{cases}$, on montre que :

A $I = 0$ **B** $I = 2J$ **C** $J = \dfrac{2}{3}a^2 b$ **D** $J = \dfrac{4}{3}a b^2$

• Question 3 (d'après EPL 2008)

Soit le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\}$ et $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

On note $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) & \mapsto & (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{array}$

A $\varphi^{-1}(D) = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \pi/6 \leq \theta \leq \pi/2,\ \ 1 \leq \rho \leq 2\sin\theta\}$

B $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\int_1^{2\sin\theta} \rho\,d\rho\right) d\theta$ **C** $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\int_1^{2\sin\theta} \rho^2\,d\rho\right) d\theta$ **D** $I = 2\sqrt{3} - \pi/9$

→ QCM 4 Étude métrique des courbes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'axes (Ox) et (Oy). Pour tout point M d'une courbe, on note s son abscisse curviligne, $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent orienté au point M, $\alpha = \widehat{\left(\vec{i}, \vec{T}\right)}\ [2\pi]$ la fonction angulaire et γ la courbure. En coordonnées polaires, on note :

$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}, \quad \vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta + \pi/2) \quad \text{et} \quad V = \widehat{\left(\vec{u}, \vec{T}\right)}\ [2\pi]$$

Question 1

Soit $R > 0$ et $\mathscr{C}$ la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

On note $M(t)$ le point de $\mathscr{C}$ de paramètre t.

A La droite d'équation $x = \pi R$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

B $M(t)$ est birégulier si et seulement si $t \in]0, 2\pi[$ et en $M(0)$ et $M(2\pi)$ la tangente est parallèle à (Ox).

C $\dfrac{ds}{dt} = 2R\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$ et la longueur de $\mathscr{C}$ est $4R$.

D Pour $t \in]0, 2\pi[$, $\alpha(t) = \left(\widehat{\vec{i}, \vec{T}(t)}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}$ et la courbure est :

$$\gamma = \frac{1}{4R\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Question 2

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation : $x^2 = 2py \quad (p > 0)$

A On peut paramétrer $\mathscr{P}$ par : $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{2p} \end{cases}$

On note $M(t)$ le point de paramètre t.

B La longueur de l'arc $\overset{\frown}{OM}$ de $\mathscr{P}$ entre O et M d'abscisse x est $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}}\, dt$.

C Le repère de Frénet en $M(t)$ est $\vec{T} \begin{vmatrix} 1 \\ \dfrac{t}{p} \end{vmatrix}$, $\vec{N} \begin{vmatrix} -\dfrac{t}{p} \\ 1 \end{vmatrix}$ et $\tan\alpha(t) = \dfrac{t}{p}$.

D En dérivant $\tan\alpha$, on obtient $(1 + \tan^2\alpha)\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{1}{p}$ et on peut en déduire que le rayon de courbure en O est p.

Question 3

Soit $a > 0$ et $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire : $\rho = a \sin^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right) \quad \left(\theta \in [\,0, 3\pi\,]\right)$.

On note $M(\theta)$ le point de $\mathscr{C}$ de paramètre θ : $OM(\theta) = \rho(\theta)\,\vec{u}(\theta)$.

A $M(\theta)$ est régulier si et seulement si $\theta \in \,]0, 3\pi[$ et $\dfrac{ds}{d\theta} = a \sin^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$.

B La longueur de $\mathscr{C}$ est : $\displaystyle\int_0^{3\pi} a \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\theta = 3a\pi$.

C $V = \dfrac{\theta}{3}\ [2\pi]$ donc $\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{1}{3}$ et $\gamma = \dfrac{1}{3a \sin^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)}$

D $\alpha = \dfrac{4\theta}{3}\ [2\pi]$ donc $\gamma = \dfrac{4}{3a \sin^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)}$

Question 4

Soit $\mathscr{S}$ la spirale d'Archimède d'équation polaire : $\rho = a\theta \quad (a > 0)$.

A $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{1+\theta^2}$

B Dans la base $\left(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)\right)$, $\vec{T} = \overrightarrow{\dfrac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} \left|\begin{matrix} 1 \\ \theta \end{matrix}\right.}$ et $\vec{N} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} \left|\begin{matrix} -\theta \\ 1 \end{matrix}\right.$

C Dans la base $\left(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)\right)$, $\dfrac{d\vec{T}}{d\theta} = \dfrac{1}{\left(1+\theta^2\right)^{3/2}} \left|\begin{matrix} -\theta \\ 1 \end{matrix}\right.$

or $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\,\vec{N}$ donc : $\gamma = \dfrac{1}{a\left(1+\theta^2\right)^{3/2}}$

D $\tan V = \theta$ donc $\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{1}{1+\theta^2}$ et $\gamma = \dfrac{2+\theta^2}{a\left(1+\theta^2\right)^{3/2}}$.

→ QCM 1 Fonction C^n - Extremum

• Question 1 : réponses B et D

• Sur le disque de centre (0, 0) et de rayon 1 : $x^2 + y^2 \leq 1$ soit $\ln\left(x^2 + y^2\right) \leq 0$.
Donc f_k est du signe de $-x^k$, lequel dépend de la parité de k et du signe de x.

La réponse A est fausse.

• $\left|f_k(x, y)\right| = \left|x^k\right|\left|\ln\left(x^2 + y^2\right)\right|$. Au voisinage de (0, 0) : $x^2 + y^2 \leq 1$ donc

$\left|\ln\left(x^2 + y^2\right)\right| = -\ln\left(x^2 + y^2\right)$ $x^2 + y^2 \geq x^2$ ·

Donc $\ln\left(x^2 + y^2\right) \geq \ln\left(x^2\right)$ car ln est croissante et
$-\ln\left(x^2 + y^2\right) \leq -\ln\left(x^2\right)$ soit $\left|\ln\left(x^2 + y^2\right)\right| \leq \left|\ln\left(x^2\right)\right|$.

D'où : $\left|f_k(x, y)\right| \leq \left|x^k\right|\left|\ln\left(x^2\right)\right|$ c'est-à-dire $\left|f_k(x, y)\right| \leq \left|f_k(x, 0)\right|$.

Or : $\lim\limits_{x \to 0} x^k \ln\left(x^2\right) = 0$ donc $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f_k(x, y) = 0$.

La réponse B est bonne.

• Si $p + q = 2$: $g(x, x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x, x) = \dfrac{1}{2}$.

Or : $p + q = 2 \Rightarrow p \neq 0$ ou $q \neq 0$.

Si $p \neq 0$, $g(x, 0) = 0 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et si $q \neq 0$, $g(0, y) = 0 \underset{y \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Donc g n'a pas de limite en (0,0). **La réponse C est fausse.**

• Si $p + q \geq 3$, on pose : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ soit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\left|g(x, y)\right| = \left|\frac{r^{p+q}\cos^p\theta\sin^q\theta}{r^2}\right| \leq r^{p+q-2} \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car} \quad p + q - 2 \geq 1.$$

Donc : $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} g(x, y) = 0$ **La réponse D est bonne.**

• Question 2 : réponse D

NON

Par opérations et compositions, f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

$$\forall\ (x,y) \neq (0,0) : \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \ln\left(x^2+y^2\right) + \dfrac{2x^3}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x^2 y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

La réponse A est fausse.

• $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0 = f(0,0)$ d'après la question 1-B.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x^2 y}{x^2+y^2} = g(x,y)$ pour $p=2$ et $q=1$, donc, d'après la question 1-D :

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

La réponse B est fausse.

• $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ est, si elle existe, la dérivée de $\varphi : x \mapsto f(x,0)$ en 0,

c'est-à-dire la limite : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$.

La réponse C est fausse.

L'assertion C n'est vraie que si $\varphi_1 : x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ est continue en 0.

• $\varphi : x \mapsto f(x,0) = x^2 \ln\left(x^2\right)$ si $x \neq 0$, et $\varphi(0) = f(0,0) = 0$.

$\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = x \ln\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$ donc φ est dérivable en 0, et $\varphi'(0) = 0$.

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

– $\psi : y \mapsto f(0,y) = 0$ est dérivable en 0, et $\psi'(0) = 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Or, on a vu que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est <u>continue</u> en (0, 0).

– Si $(x, y) \neq (0, 0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2\, f_1(x, y) + 2\, g(x, y)$ avec $p = 3$ et $q = 0$.

Alors, d'après la question 1 : $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est <u>continue</u> en (0, 0) et f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

La réponse D est bonne.

Question 3 : aucune réponse n'est bonne

• (x, y) est un point critique de f si et seulement si :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \quad (1)$$

(0, 0) est un point critique de f.

Si $(x, y) \neq (0, 0)$ (1) $\Leftrightarrow$ $x = 0$ ou $\begin{cases} y = 0 \\ 2x\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right) = 0 \end{cases}$

Or : $\ln\left(x^2\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ donc, l'ensemble des points critiques de f est : $\left\{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{e}}, 0\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}, 0\right), (0, b),\ b \in \mathbb{R}\right\}$.

La réponse A est fausse.

NON

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0, 0) = \psi_1'(0) \quad \text{avec} \quad \psi_1 : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0).$$

Or : $\psi_1'(0) = \displaystyle\lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x}$ **La réponse B est fausse.**

La limite proposée à l'assertion B est en fait $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)$.

• Soit : $\varphi_1 : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 2x\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\varphi_2 : y \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0$

$$\psi_1 : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0$$

$$\psi_2 : y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \psi_1{}'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \varphi_2{}'(0) = 0$$

Donc : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$ mais cela ne suffit pas pour conclure que f est C^2 en (0, 0). **La réponse C est fausse.**

• Le théorème de Schwarz dit que si f est C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$ mais la réciproque est fausse.

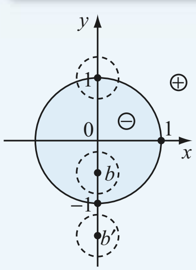
$\dfrac{\varphi_1(x) - \varphi_1(0)}{x} = 2\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right) \underset{x \to 0}{\to} -\infty$ donc φ_1 n'est pas dérivable en 0, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ n'existe pas en (0, 0) et f n'est pas C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

La réponse D est fausse.

• Question 4 : réponse D

NON $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x, 0) = +\infty$ donc f n'est pas majorée : **la réponse A est fausse.**

> **Extremums relatifs d'une fonction de deux variables**
> Si f est C^1 sur un ouvert et admet un extremum relatif, c'est en un point critique. Mais f n'admet pas nécessairement un extremum relatif en tout point critique.



• f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert, (0, b) est un point critique et f(0, b) = 0.

– 0 est maximum relatif en (0, b) $(b \in]-1, 1[)$ car sur un disque de centre (0, b), $f(x, y) \leq 0$.

– 0 est minimum relatif en (0, b) $(b \notin [-1, 1])$.

– En (0, 1) et en (0,–1), 0 n'est pas un extremum car dans tout disque de centre (0, 1) ou (0, –1), f (x, y) change de signe.

La réponse B est fausse.

- h est paire et C^1 sur $\mathbb{R}$.

Si $x \neq 0 \quad h'(x) = 2x\left(\ln\left(x^2\right)+1\right)$.

$-\dfrac{1}{e}$ est le minimum absolu de h sur $\mathbb{R}$, atteint en $\pm\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

x	$0 \quad 1/\sqrt{e} \quad +\infty$
$h'(x)$	$0 \quad - \quad 0 \quad + \quad +\infty$
$h(x)$	$0 \searrow -1/e \nearrow +\infty$

La réponse C est fausse.

- $x^2 + y^2 \geq x^2$ donc $\ln\left(x^2+y^2\right) \geq \ln\left(x^2\right)$ et $x^2 \geq 0$ d'où :

$$f(x, y) \geq f(x, 0) \geq -\frac{1}{e}$$

Donc $-\dfrac{1}{e}$ est le <u>minimum absolu, strictement négatif</u>, de f sur $\mathbb{R}$.

La réponse D est bonne.

→ QCM 2 Équation aux dérivées d'ordre 2

• Question 1 : réponses A et D

- $H : \begin{cases} u = x + \alpha y \\ v = x + \beta y \end{cases}$ $\quad H$ bijective $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \quad \alpha \neq \beta$

alors $\quad H^{-1} \begin{cases} x = \dfrac{\beta u - \alpha v}{\beta - \alpha} \\ y = \dfrac{-u+v}{\beta-\alpha} \end{cases}$ $\quad$ et H et H^{-1} sont C^∞ sur $\mathbb{R}^2$

On a : $\quad g = f \text{ o } H^{-1} \quad$ et $\quad f = g \text{ o } H$.

– Si g est au moins C^2 sur $\mathbb{R}^2$, H étant C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, par composition f est au moins C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

– Si f est au moins C^2 sur $\mathbb{R}^2$, H^{-1} étant C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, par composition g est au moins C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Donc : $\quad \left(f \text{ est au moins } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2\right) \Leftrightarrow \left(g \text{ est au moins } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2\right)$

La réponse A est bonne.

- $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{1}{\beta-\alpha}\left(-\alpha\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

La réponse B est fausse.

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$

et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \alpha\dfrac{\partial g}{\partial u} + \beta\dfrac{\partial g}{\partial v}$

donc l'assertion C est vraie si et seulement si $\alpha = 1$.

La réponse C est fausse.

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right)\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right)\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1}$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ car g étant C^2, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$.

En procédant de même, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \alpha\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (\alpha+\beta)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

et :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Donc :

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow a\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) + b\left(\alpha\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (\alpha+\beta)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$
$$+ c\left(\alpha^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \beta^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) = 0$$

Soit :

(f solution de (E))

$$\Leftrightarrow\left(g \text{ solution de (E')} : P(\alpha)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + K\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + P(\beta)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0\right)$$

La réponse D est bonne.

Question 2 : réponses B et D

- $P = cX^2 + bX + a$ et $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ donc P a deux racines distinctes r_1 et r_2 vérifiant : $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{c}$ et $r_1 . r_2 = \dfrac{a}{c}$ $(c \neq 0)$.

La réponse A est fausse.

• $r_1 \neq r_2$ et $\alpha \neq \beta$, donc on peut choisir $\alpha = r_1$ et $\beta = r_2$.
Dès lors, $P(\alpha) = P(\beta) = 0$

et : $K = 2a + b(\alpha + \beta) + 2c\alpha\beta = 2a + b\left(-\dfrac{b}{c}\right) + 2c\left(\dfrac{a}{c}\right) = -\dfrac{\Delta}{c} \neq 0$

La réponse B est bonne.

• $P' = 2cX + b$, $P'(\alpha) = 2c\alpha + b$, $P'(\beta) = 2c\beta + b$.

Alors : $P'(\alpha) + P'(\beta) = 2c(\alpha + \beta) + 2b$. Or: $K = 2a + b(\alpha + \beta) + 2c\alpha\beta$.

Donc, on n'a pas toujours $K = P'(\alpha) + P'(\beta)$.
Dans le cas où $K = P'(\alpha) + P'(\beta)$, $K = 0$ n'est pas équivalent à $P'(\alpha) = P'(\beta) = 0$.
Or : $(\alpha$ racine double de $P) \Leftrightarrow (P(\alpha) = P'(\alpha) = 0)$.

La réponse C est fausse.

• D'après l'assertion B, pour $\alpha = r_1$ et $\beta = r_2$, $P(\alpha) = P(\beta) = 0$ et $K \neq 0$.

Donc, pour ce choix : (E′) $\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$

La réponse D est bonne.

Question 3 : réponses B et C

• g est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ donc : $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right) = 0$

Pour u fixé, notons $\varphi_u : v \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 &\Leftrightarrow \forall\, u \in \mathbb{R},\ \varphi_u{}'(v) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall\, u \in \mathbb{R},\ \varphi_u \text{ est constante par rapport à } v \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u} \text{ ne dépend que de } u \\
&\Leftrightarrow \exists\, M : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = M(u).
\end{aligned}$$

La réponse A est fausse.

• g est au moins C^2 sur $\mathbb{R}^2$ donc $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ est au moins C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Or : $\quad M : u \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial u}(u, 0) \quad$ donc M est au moins C^1 sur $\mathbb{R}$.

La réponse B est bonne.

• Pour $\alpha = \mathrm{r}_1$ et $\beta = r_2$:

$$(\mathrm{E}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = M(u).$$

M est au moins C^1 sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une primitive $h_1 : u \mapsto h_1(u)$ qui est au moins C^2 sur $\mathbb{R}$.

Pour v fixé, notons $\psi_v : u \mapsto g(u, v)$.

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, v \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \psi_v'(u) = M(u) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, v \in \mathbb{R},\ \forall\, \mathrm{u} \in \mathbb{R}, \quad \psi_v(u) = h_1(u) + \underbrace{h_2(v)}_{\substack{\text{constante par} \\ \text{rapport à } u}} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u, v) = h_1(u) + h_2(v)\end{aligned}$$

g est au moins C^2 sur $\mathbb{R}^2$:

$g(u, 0) = h_1(u) + h_2(0)$, donc $h_1 : u \mapsto g(u, 0) - h_2(0)$ est au moins C^2 sur $\mathbb{R}$.

$g(0, v) = h_1(0) + h_2(v)$, donc $h_2 : v \mapsto g(0, v) - h_1(0)$ est au moins C^2 sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, si h_1 et h_2 sont au moins C^2 sur $\mathbb{R}$:

$g : (u, v) \mapsto h_1(u) + h_2(v)$ est au moins C^2 sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de (E') sont donc les applications :

$g : (u, v) \mapsto h_1(u) + h_2(v)$, h_1 et h_2 au moins C^2 sur $\mathbb{R}$.

Donc les solutions de (E) sont les applications :

$$\boldsymbol{f : (x, y) \mapsto h_1(x + r_1 y) + h_2(x + r_2 y),\ h_1 \text{ et } h_2 \text{ au moins } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

Question 4 : réponses B et C

NON On ne peut pas choisir $\alpha = \beta = r$, car H ne serait pas bijective.

La réponse A est fausse.

• $r = -\dfrac{b}{2c}$. Pour pouvoir choisir $\alpha = r$ et $\beta = 0$, il faut avoir $r \neq 0$.
Or, si $r = 0$ est racine double de P, $P = c\,X^2$, et $c \neq 0$, donc $a = b = 0$, ce qui est impossible. Par conséquent $r \neq 0$.

Donc on peut choisir $\alpha = r$ et $\beta = 0$, et dans ce cas, $K = -\dfrac{\Delta}{2c} = 0$.

On a alors : $(\mathrm{E}') \iff \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$ car $P(\beta) \neq 0$

La réponse B est bonne.

Pour u fixé, notons $\psi_u : v \mapsto g(u, v)$.

$(\mathrm{E}') \iff \forall\, u \in \mathbb{R},\ \psi_u'' = 0$

$\iff \forall\, u \in \mathbb{R},\ \psi_u : v \mapsto h_1 v + h_2$, h_1 et h_2 étant constantes par rapport à v, donc des fonctions de u.

$(\mathrm{E}') \iff \forall\, (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u, v) = h_1(u)\,v + h_2(u)$, h_1 et h_2 étant des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

De même qu'à la question précédente, on montre que :

$$\left(g \text{ au moins } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2\right) \iff \left(h_1 \text{ et } h_2 \text{ au moins } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}\right).$$

Donc, compte tenu qu'ici $v = x$, les solutions de (E) sont les fonctions :

$$\boldsymbol{f : (x, y) \mapsto x\,h_1(x + r\,y) + h_2(x + r\,y), \quad h_1 \text{ et } h_2 \text{ au moins } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

La réponse C est bonne et la réponse D est fausse.

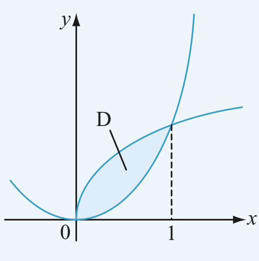
→ QCM 3 Aires – Intégrales doubles

• Question 1 : réponse B

• $\mathrm{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$.

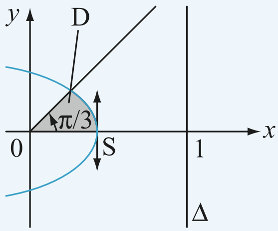
Donc : $\mathcal{A}(\mathrm{D}) = \displaystyle\iint_{\mathrm{D}} dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right) dx$.

La réponse A est fausse.



- $\mathcal{A}(\mathrm{D}) = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left[\frac{2\,x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$

soit : $\mathcal{A}(\mathrm{D}) = \frac{1}{3}$ **La réponse B est bonne.**



- $\rho = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$ est l'équation polaire de la parabole de foyer O, d'axe (Ox), de paramètre $p = 1$ et de directrice la droite Δ d'équation : $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta} \Leftrightarrow x = 1$.

$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \rho^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

Or : $1+\cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

donc $\dfrac{1}{(1+\cos\theta)^2} = \dfrac{1}{4\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \dfrac{1}{4}\left(1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2$

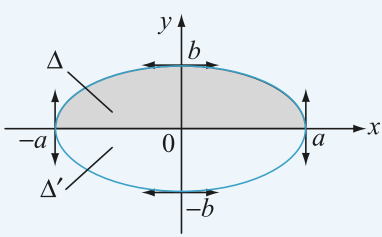
Alors : $\mathcal{A}(D) = \dfrac{1}{8}\displaystyle\int_0^{\pi/3}\left(1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 d\theta.$ **La réponse C est fausse.**

- Posons : $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) d\theta$, $\begin{cases} si\ \theta = 0,\ t = 0 \\ si\ \theta = \frac{\pi}{3},\ t = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$$\mathcal{A}(D) = \frac{1}{4}\int_0^{1/\sqrt{3}} \left(1+t^2\right)dt = \frac{1}{4}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9\sqrt{3}}\right)$$

Finalement : $\mathcal{A}(D) = \dfrac{5}{18\sqrt{3}}$. **La réponse D est fausse.**

Question 2 : réponse A



- Le domaine D correspond à l'intérieur d'une ellipse, et Δ à la partie grisée sur la figure ci-contre.

$$(X, Y) \xrightarrow{s_{Ox}} (X, -Y)$$

et $s_{Ox}(\Delta) = \Delta'$ avec $\mathrm{D} = \Delta \cup \Delta'$

$$I = \iint_{\Delta} y\,dx\,dy + \iint_{\Delta'} y\,dx\,dy = J + \iint_{\Delta} -Y\left|\text{dét}\left(s_{Ox}\right)\right| dX\,dY$$

$$\text{dét}\left(s_{Ox}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{donc} \quad \iint_{\Delta'} y\,dx\,dy = -\iint_{\Delta} Y\,dX\,dY = -J$$

et : $I = J - J = 0$. **La réponse A est bonne et la réponse B est fausse.**

- $\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; -a \leq x \leq a,\; 0 \leq y \leq b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}\right\}$

donc : $J = \displaystyle\int_{-a}^{a}\left[\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y\,dy\right] dx = \int_{-a}^{a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx = \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$

soit : $J = \dfrac{b^2}{2}\left[x - \dfrac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = \dfrac{2}{3}ab^2.$ **Les réponses C et D sont fausses.**

Question 3 : réponse C

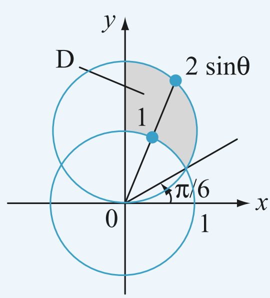
- $x^2 + y^2 \leq 2y \iff x^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

Les cercles ont pour équations polaires $\rho = 1$ et $\rho = 2\sin\theta$.

Pour $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ $\quad 2\sin\theta = 1 \iff \theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Donc D est défini en coordonnées polaires par :

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 1 \leq \rho \leq 2\sin\theta$$



La réponse A est fausse (ρ peut être négatif).

- $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\int_1^{2\sin\theta} \rho^2\,d\rho\right) d\theta$

La réponse B est fausse et la réponse C est bonne.

- $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^{2\sin\theta} d\theta = \frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(8\sin^3\theta - 1\right) d\theta = \frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2} 8\sin^3\theta\,d\theta - \frac{\pi}{9}$.

En posant $u = \cos\theta$, $du = -\sin\theta du$, on obtient : $I = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2}\left(1 - u^2\right) du - \frac{\pi}{9}$.

Donc : $I = \sqrt{3} - \pi/9$. **La réponse D est fausse.**

→ QCM 4 Étude métrique des courbes

• Question 1 : réponse A

- $M\,(2\pi - t)\left|\begin{array}{l} 2\pi R - x(t) \\ y(t) \end{array}\right.$ est symétrique de $M(t)$ par rapport à $\Delta :\ x = \pi R$

La réponse A est bonne.

- $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}\left|\begin{array}{l} x' = R\,(1-\cos t) \\ y' = R\sin t \end{array}\right.$ et $M(t)$ singulier $\Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 2\pi$

$\dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} = \left|\begin{array}{l} x'' = R\sin t \\ y'' = R\cos t \end{array}\right. \neq \vec{0}$ donc $M(t)$ est birégulier si et seulement si $t \in \,]0, 2\pi[$.

$\dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}(0) = \dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}(2\pi) = R\,\vec{j}$ donc, aux points singuliers $M(0)$ et $M(2\pi)$, la tangente est parallèle à (Oy). **La réponse B est fausse.**

- $\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = \left\|\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|^2 = R^2\left(1 + \cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t\right) = 4R^2\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$

$\dfrac{t}{2} \in [\,0, \pi\,]$ donc $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \geq 0$ et $\dfrac{ds}{dt} = 2R\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$

$\ell(\mathrm{C}) = \displaystyle\int_0^{2\pi} 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = 2R\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 8R$ **La réponse C est fausse.**

- $\vec{T} = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{2R\sin(t/2)}\left|\begin{array}{l} 2R\sin^2(t/2) \\ 2R\cos(t/2)\sin(t/2) \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{array}\right.$

donc : $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}$ et $\gamma = \dfrac{d\alpha}{dt}\dfrac{dt}{ds} = -\dfrac{1}{4R\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$ **La réponse D est fausse.**

• Question 2 : réponses A et D

La réponse A est bonne.

• $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \begin{vmatrix} 1 \\ \dfrac{t}{p} \end{vmatrix}, \quad \dfrac{ds}{dt} = \sqrt{1+\dfrac{t^2}{p^2}}$ et $\begin{cases} \text{si } x>0, \ \ l(C) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+\frac{t^2}{p^2}}\,dt \\ \text{si } x<0, \ \ l(C) = \displaystyle\int_x^0 \sqrt{1+\frac{t^2}{p^2}}\,dt \end{cases}$

La réponse B est fausse.

• $\overrightarrow{T} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{t^2}{p^2}}} \begin{vmatrix} 1 \\ \dfrac{t}{p} \end{vmatrix}, \quad \overrightarrow{N} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{t^2}{p^2}}} \begin{vmatrix} -\dfrac{t}{p} \\ 1 \end{vmatrix}$ **La réponse C est fausse.**

• $\tan\alpha = \dfrac{t}{p}$ d'où, en dérivant par rapport à t : $\left(1+\tan^2\alpha\right)\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{1}{p}$ et :

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{p\left(1+\dfrac{t^2}{p^2}\right)^{3/2}} \text{ et en } O = M(0),\ \gamma = \frac{1}{p} \text{ d'où } R = \frac{1}{\gamma} = p.$$

La réponse D est bonne.

• Question 3 : réponses A et D

Dans $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$: $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = \begin{vmatrix} \rho'(\theta) \\ \rho(\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\sin^2(\theta/3)\cos(\theta/3) \\ a\sin^3(\theta/3) \end{vmatrix}$

et $\dfrac{ds}{d\theta} = \left\| \dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} \right\| = a\sin^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$.

M singulier $\Leftrightarrow$ $\sin\left(\dfrac{\theta}{3}\right) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\theta = 0$ ou $\theta = 3\pi$

La réponse A est bonne.

• $\ell(C) = \displaystyle\int_0^{3\pi} a\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)d\theta = \int_0^{3\pi} \frac{a}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right)d\theta = \frac{3a\pi}{2}$

La réponse B est fausse.

• Dans $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$: $\overrightarrow{T} = \begin{vmatrix} \cos\left(\dfrac{\theta}{3}\right) = \cos V \\ \sin\left(\dfrac{\theta}{3}\right) = \sin V \end{vmatrix}$ soit $V = \dfrac{\theta}{3}\,[2\pi]$ et $\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{1}{3}$.

Or : $\alpha = \theta + V = \dfrac{4\theta}{3}$ d'où $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = \dfrac{4}{3}$ et $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{4}{3}\dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{4}{3a\sin^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)}$

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

• Question 4 : réponses B et D

NON Dans $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$: $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = a\left|\begin{array}{l}1\\ \theta\end{array}\right.$ donc $\dfrac{ds}{d\theta} = a\sqrt{1+\theta^2}$.

La réponse A est fausse.

• $\vec{T} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\left|\begin{array}{l}1\\ \theta\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}\cos V\\ \sin V\end{array}\right.$ et $\vec{N} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\left|\begin{array}{l}-\theta\\ 1\end{array}\right.$

La réponse B est bonne.

Pour dériver $\vec{T}$, il ne faut pas oublier de dériver $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

• $\vec{T}(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\left(\vec{u}(\theta) + \theta\,\vec{v}(\theta)\right)$. Après calcul, on obtient :

dans $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$: $\dfrac{d\vec{T}}{d\theta} = \dfrac{1}{\left(1+\theta^2\right)^{3/2}}\left|\begin{array}{l}-1-\theta\left(1+\theta^2\right)\\ -\theta+1+\theta^2\end{array}\right.$

La réponse C est fausse.

• $\tan V = \theta$ d'où, en dérivant par rapport à θ : $\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{1}{1+\theta^2}$

Or $\alpha = \theta + V$ d'où : $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{d\alpha}{d\theta}\dfrac{d\theta}{ds} = \left(1 + \dfrac{1}{1+\theta^2}\right)\dfrac{1}{a\sqrt{1+\theta^2}} = \dfrac{2+\theta^2}{a\left(1+\theta^2\right)^{3/2}}$

La réponse D est bonne.

chapitre 14

Espaces vectoriels euclidiens – Transformations du plan et de l'espace

QCM 1 Produit scalaire et polynômes orthogonaux (d'après EPL 2009)

Les questions 1 et 2 sont liées.

• Question 1

On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues de [–1, 1] dans $\mathbb{R}$, et F l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.

On définit $\varphi : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ par : $\forall\ (f, g) \in \mathrm{E}^2,\ \ \varphi(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt.$

A Pour toute fonction h continue sur $]-1, 1[$, $\int_{-1}^{1} h(t)\, dt$ existe dans $\mathbb{R}$.

B Pour toute fonction h continue par morceaux, positive sur [–1, 1] :

$$\int_{-1}^{1} h(t)\, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 0.$$

C φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, c'est donc un produit scalaire, et (E, φ) est un espace vectoriel euclidien.

D φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, c'est donc un produit scalaire, mais (E, φ) n'est pas un espace vectoriel euclidien.

• Question 2

On munit E du produit scalaire φ, et on note, pour tout sous-espace vectoriel A, $\mathrm{A}^\perp$ l'orthogonal de A. On note $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{I}$) l'ensemble des fonctions continues paires (respectivement impaires) sur [–1, 1].

A $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \varnothing$.

B $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ car $\forall\ f \in \mathrm{E},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} - \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

et que cette écriture de f comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire est unique.

C $\forall\ (f, g) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I},\ \ \varphi(f, g) = 0$ donc $\mathcal{P} \subset \mathcal{I}^\perp$ et $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}^\perp$.

D soit $f \in \mathcal{P}^\perp$, comme $f \in \mathrm{E}, \exists!\left(f_p, f_i\right) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I},\ \ f = f_p + f_i$.

On montre alors que $f_p = 0$ donc $\mathcal{P}^\perp \subset \mathcal{I}$ et $\mathcal{P}^\perp = \mathcal{I}$.

Les questions 3 et 4 sont liées.

Question 3

On admet que : $(P, Q) \to (P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur $F = \mathbb{R}[X]$.

A On montre par récurrence qu'il existe une unique famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F telle que le terme dominant de P_n soit X^n.

Si l'assertion A est jugée exacte, par le procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt, on obtient :

B $P_0 = 1,\ \ P_1 = X - 1,\ \ P_2 = X^2 - \dfrac{1}{3}$

C $P_0 = 1,\ \ P_1 = X,\ \ P_2 = X^2 - \dfrac{2}{3}.$

D Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthogonale de F telle que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ \deg Q_n = n$, alors Q_n et P_n sont associés (c'est-à-dire : $\exists\, \lambda_n \neq 0,\ \ Q_n = \lambda_n P_n$).

Question 4

Soit $U_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n\, n!} U_n^{(n)}$, où $U_n^{(n)}$ désigne le polynôme dérivé $n^{\text{ème}}$ de U_n.

Soit $\Phi : F \to F$ définie par : $\Phi(P) = (X^2 - 1)\,P'' + 2XP'$.

A $\deg L_n = n$ et le coefficient dominant de L_n est $\dfrac{1}{2^n n!}\dbinom{2n}{n}.$

B On a : $(X^2 - 1)\,U_n' = 2nXU_n$, et en dérivant $(n + 1)$ fois cette relation, on montre que : $\Phi(L_n) = n(n+2)\,L_n$.

C $\forall\ (P, Q) \in F^2,\ \ (\Phi(P)|Q) = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)\,P'(t)\,Q'(t)\,dt$.

D Pour $n \neq p$, $(\Phi(L_n)|L_p) = (\Phi(L_p)|L_n)$, donc $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de F et $L_n = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{2n}{n} P_n$.

QCM 2 Automorphismes orthogonaux de E

E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}=\left(e_1, e_2, e_3\right)$. Le produit scalaire est noté $\langle . | . \rangle$.

• Question 1 (d'après EPL 2008)

Soit a un réel, et $u\ (\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{B}}$ un vecteur normé fixé de E.

On définit f_a par : $\forall\ x \in E,\ f_a(x)=x+a\langle x | u\rangle u$.

- **A** f_{-1} est un automorphisme orthogonal de E.
- **B** f_{-1} est une projection orthogonale de E.
- **C** f_a est un automorphisme orthogonal de E si et seulement si $a=-2$.
- **D** f_{-2} est une réflexion de E.

• Question 2

Soit $u=e_1+e_2-e_3$.

- **A** Il existe une rotation R d'axe $\mathbb{R}u$ telle que $R\left(e_1\right)=e_3$.

Soit R une rotation telle que $R\left(e_1\right)=-e_3$, la matrice de R dans $\mathcal{B}$ est de la forme :

- **B** $\begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **C** $\begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **D** Il existe une unique rotation R d'axe $\mathbb{R}u$ telle que $R\left(e_1\right)=-e_3$.

• Question 3

Soit R_1 le quart de tour direct d'axe $\mathbb{R}e_1$, R_2 le quart de tour direct d'axe $\mathbb{R}e_2$, et $f = R_2 \circ R_1$.

A La matrice de R_2 dans la base $\mathcal{B}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

B f est une rotation d'axe $\mathbb{R}\left(e_1 + e_2 - e_3\right)$, d'angle de mesure $\pi/3$.

Soit S l'endomorphisme de E de matrice : $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

C S est la réflexion par rapport au plan P d'équation : $x + y - 2z = 0$.

D Il existe une unique réflexion S' telle que $f = S' \circ S$.

→ QCM 3 Isométries et similitudes du plan

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note S_D la réflexion d'axe D, $r\ (\Omega, \theta)$ la rotation de centre Ω et d'angle θ, s_Ω la symétrie de centre Ω, et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

• Question 1

Soient les applications f et g définies analytiquement par :

$$f : \begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = -x + 2 \end{cases} \qquad g : \begin{cases} x' = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y - 1 \\ y' = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y + 2 \end{cases} \qquad \text{et} \quad h = f \circ g.$$

A f, g et h sont des déplacements.

B f est une rotation de centre $I\,(2, 0)$ et d'angle $\pi/2$.

C $g = s_D$ où D est dirigé par $\vec{u}\,(2, 1)$.

D $f = s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ avec Δ // D, donc h est la composée d'une réflexion et d'une translation de vecteur $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{u}$.

Question 2

Soit ABC un triangle. On note $\alpha = \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}, \beta = \widehat{\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)}, \gamma = \widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)}\ [2\pi]$.

A La composée de 2 rotations affines d'angles θ et θ' est une rotation d'angle $\theta + \theta'$, donc $r(B, \alpha)\ o\ r(C, -\alpha)$ est une rotation.

$f = r(B, \beta)\ o\ r(C, \gamma)\ o\ r(A, \alpha)$ est :

B une symétrie.

C une translation.

D $g = s_{(AB)}\ o\ t_{\overrightarrow{AB}}\ o\ s_{(AB)}$ est une rotation.

Question 3

Soit f l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1}{2}\left(1 + e^{i\theta}\right) z + e^{i\theta/2}, \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

A f est définie par une relation de la forme $z' = az + b$, donc f est une similitude directe du plan.

B Pour $\theta = 0$, f est une translation de vecteur d'affixe i.

C Pour $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$, f est une similitude directe de centre Ω d'affixe $\dfrac{i}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$, de rapport $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et d'angle $\dfrac{\theta}{2}$.

D f est une homothétie si et seulement si $\theta = \pi$.

QCM 4 Isométries de l'espace

L'espace euclidien E est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soit : $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Pour $T = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on définit la matrice $M_T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme φ_T de matrice M_T dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Question 1

A $\det M_T = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)$.

B M_T est orthogonale $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ ab+bc+ca=0 \end{cases}$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$, donc :

C φ_T est une rotation si et seulement si $\begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ca=0 \end{cases}$

D φ_T est une symétrie orthogonale si et seulement si $\begin{cases} b=c \\ a+b+c=-1 \\ ab+bc+ca=0 \end{cases}$

Question 2

On prend $T = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Soit f l'application de E définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x-2y-2z)+\alpha \\ y' = \frac{1}{3}(-2x+y-2z)+2(1-\alpha) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}). \\ z' = \frac{1}{3}(-2x-2y+z)+\alpha \end{cases}$$

A φ_T est la réflexion par rapport au plan P d'équation $x+y+z=0$.

B f est une isométrie d'application linéaire associée une réflexion, donc c'est une réflexion.

C $f = t_{\vec{w}} \circ \varphi_T$, avec $\vec{w}\,(\alpha, 2(1-\alpha), -\alpha)$, donc f est une réflexion si et seulement si $\vec{w} = \vec{0}$. Or $\vec{w} \neq \vec{0}$, donc f n'est pas une réflexion.

D f est une réflexion si et seulement si $\alpha = \frac{2}{3}$.

• Question 3

On prend $T = (0, 0, 1)$.

Soit g l'application de E définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = z + \beta \\ y' = x + 1 \\ z' = y + 2 \end{cases}$ $(\beta \in \mathbb{R})$.

A g est un déplacement car son application linéaire associée est une rotation d'axe $\mathbb{R}\,\vec{u}$ et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$.

B g est un vissage si et seulement si $\beta \neq -3$.

Si g est un vissage :

C son vecteur est $\vec{v} = (\beta + 3)\,\vec{u}$.

D son axe passe par le point $A\left(\dfrac{2\beta}{3}, \dfrac{\beta}{3}, 1\right)$.

→ QCM 1 Produit scalaire et polynômes orthogonaux

• Question 1 : réponse D

• $\int_{-1}^{1} h(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R}$ pour h continue par morceaux sur $[-1, 1]$. Or h, continue sur $]-1, 1[$, n'est continue par morceaux sur $[-1, 1]$ que si h admet des limites finies en -1 et 1. **La réponse A est fausse.**

NON Pour que $\int_{-1}^{1} h(t)\,dt = 0 \Rightarrow h = 0$, si h est positive, il faut que h soit <u>continue</u> sur $[-1, 1]$. **La réponse B est fausse.**

• f et g sont continues sur $[-1, 1]$, donc $\varphi(f, g) \in \mathbb{R}$, et φ est une <u>forme</u>.

$\varphi(\lambda f_1 + f_2, g) = \int_{-1}^{1} (\lambda f_1 + f_2)(t)\, g(t)\,dt$ or l'intégrale est linéaire, d'où :

$$\varphi(\lambda f_1 + f_2, g) = \lambda \int_{-1}^{1} f_1(t)\, g(t)\,dt + \int_{-1}^{1} f_2(t)\, g(t)\,dt = \lambda\, \varphi(f_1, g) + \varphi(f_2, g)$$

Donc φ est <u>linéaire</u> par rapport à f.

- φ est symétrique car $fg = gf$, donc $\varphi(f, g) = \varphi(g, f)$.

Donc φ est <u>bilinéaire symétrique</u>.

- $\varphi(f, f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)\,dt \geq 0$ car $-1 \leq 1$ et $\forall\, t \in [-1, 1],\ f^2(t) \geq 0$.

$\varphi(f, f) = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f^2(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow f^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ car f^2 est continue, positive.

Donc φ est <u>définie positive</u>.
Donc φ est un <u>produit scalaire</u> sur E.
(E, φ) <u>n'est pas un espace vectoriel euclidien</u> car E n'est pas de dimension finie.

La réponse C est fausse et la réponse D est bonne.

• Question 2 : réponses C et D

• $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E car $0 \in \mathcal{P}$ et $0 \in \mathcal{I}$, et toute combinaison linéaire de fonctions paires (resp. impaires) est paire (resp. impaire).
Mais $\mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ contient 0. **La réponse A est fausse.**

• $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in [-1, 1],\ f(x) = f(-x) = -f(x)$

donc $f = 0$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$.

$E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I} \quad \Leftrightarrow \quad (E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\})$.

$$\forall\, f \in E,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}\ .$$

Soit $f_p : x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f_p(-x) = f_p(x)$ donc $f_p \in \mathcal{P}$.

Soit $f_i : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, $f_i(-x) = -f_i(x)$ donc $f_i \in \mathcal{I}$.

Donc $\forall\, f \in E,\ \exists (f_p, f_i) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I},\ f = f_p + f_i$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$

soit $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

La réponse B est fausse (erreur de signe dans l'expression de *f* dans l'énoncé).

• Soit $f \in \mathcal{P}$, $g \in \mathcal{I}$ alors $f\,g \in \mathcal{I}$.

$\varphi(f, g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$. Posons : $u = -t,\ du = -dt$.

$$\varphi(f, g) = \int_{1}^{-1} f(-u)\, g(-u)(-du) = -\int_{-1}^{1} f(u)\, g(u)\, du = -\varphi(f, g) \text{ d'où } \varphi(f, g) = 0.$$

$$\text{Donc : } \quad \mathcal{P} \perp \mathcal{I} \quad \begin{cases} \forall\, f \in \mathcal{P},\ f \perp \mathcal{I} & \text{donc} \quad f \in \mathcal{I}^{\perp} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{P} \subset \mathcal{I}^{\perp} \\ \forall\, g \in \mathcal{I},\ g \perp \mathcal{P} & \text{donc} \quad g \in \mathcal{P}^{\perp} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{I} \subset \mathcal{P}^{\perp} \end{cases}$$

La réponse C est bonne.

• Soit $f \in \mathcal{P}^{\perp}$, $f = f_p + f_i$. On a $(f \mid f_p) = 0$ car $f \perp \mathcal{P}$ et $f_p \in \mathcal{P}$.

Or : $(f \mid f_p) = (f_p \mid f_p) + \underbrace{(f_i \mid f_p)}_{0} = 0$ donc $(f_p \mid f_p) = 0$ et $f_p = 0$ soit $f = f_i \in \mathcal{I}$.

Donc $\mathcal{P}^{\perp} \subset \mathcal{I}$, et puisque $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}^{\perp}$ d'après l'assertion B : $\mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{I}$

La réponse D est bonne.

On a ainsi montré que $\mathcal{I}$ est supplémentaire orthogonal de $\mathcal{P}$.
Dans un espace vectoriel euclidien de dimension finie, on sait que si $E = F + G$ et $F \perp G$ alors $G = F^{\perp}$. On ne peut pas appliquer ce résultat à E, car E n'est pas de dimension finie.

Question 3 : réponses A et D

- On cherche une famille de polynômes orthogonaux telle que $P_n = X^n + Q_n$ avec $\deg Q_n < n$. On utilise l'orthogonalisation de Gramm-Schmidt :

– $P_0 = 1$ convient et est unique.

– Soit $n \in \mathbb{N}$: supposons qu'il existe une unique famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ orthogonale telle que le terme dominant de P_k soit X^k.

On cherche $P_{n+1} = X^{n+1} + Q_{n+1}$ avec $\begin{cases} \deg Q_{n+1} \leq n \\ (P_0, P_1, \ldots, P_{n+1}) \text{ orthogonale} \end{cases}$

$(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car $\deg P_k = k$, d'où : $Q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$.

$$\forall q \in [|0, n|],\ (P_{n+1} | P_q) = 0 \iff \left(X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k \middle| P_q \right) = 0$$

$$\iff (X^{n+1} | P_q) + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (P_k | P_q) = 0 \qquad (1)$$

Or $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est orthogonale, donc $\forall q \neq k$, $(P_k | P_q) = 0$.

Alors : (1) $\iff (X^{n+1} | P_q) + \alpha_q \|P_q\|^2 = 0$ or $P_q \neq 0$ car de degré q

d'où $\|P_q\| \neq 0$ et $\forall q \in [|0, n|]$, $\alpha_q = -\dfrac{(X^{n+1} | P_q)}{\|P\|^2}$ est unique, donc

P_{n+1} <u>existe et est unique</u>, et par récurrence.

La réponse A est bonne.

- $P_0 = 1$, $P_1 = X + a$ et $(P_1 | P_0) = \int_{-1}^{1} (t + a)\, dt = 2a = 0$ d'où $a = 0$ et $P_1 = X$.

En calculant les produits scalaires, on obtient :

$$P_2 = X^2 + bP_1 + cP_0 \text{ or } (P_2 | P_0) = (X^2 | 1) + \mathrm{b}\,\underbrace{(P_1 | P_0)}_{0} + \mathrm{c}\,(1|1) = 0 \text{ d'où } c = -\frac{1}{3}$$

$$\text{et } (P_2 | P_1) = (X^2 | X) + \mathrm{b}\,(X | X) + \mathrm{c}\,\underbrace{(P_0 | P_1)}_{0} = 0 \text{ d'où } b = 0 \text{ soit } P_2 = X^2 - \frac{1}{3}.$$

Les réponses B et C sont fausses.

• Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthogonale telle que $\forall\ n$, $\deg Q_n = n$. Notons λ_n le coefficient dominant de Q_n. Alors $\dfrac{1}{\lambda_n} Q_n$ est de terme dominant 1, et $\left(\dfrac{1}{\lambda_n} Q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a les mêmes propriétés que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique, d'où :

$$\frac{1}{\lambda_n} Q_n = P_n$$

La réponse D est bonne.

Question 4 : réponses C et D

• $\deg U_n = 2n$ donc $\deg U_n^{(n)} = 2n - n = n$ soit $\deg L_n = n$.

Le coefficient dominant de $U_n^{(n)}$ est le coefficient dominant de $\left(X^{2n}\right)^{(n)}$, soit $2n(2n-1)\ \dots (n+1)$, donc le coefficient dominant de L_n est :

$$\frac{2n(2n-1)\ \dots (n+1)}{2^n\, n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$$

La réponse A est fausse.

• $U_n' = n\left(X^2-1\right)^{n-1} 2X$ donc $\left(X^2-1\right)U_n' = 2nXU_n$ (2)

On dérive (2) $(n+1)$-fois par la formule de Leibniz :

$$\left(X^2-1\right)U_n^{(n+2)} + 2X\binom{n+1}{1}U_n^{(n+1)} + 2\binom{n+1}{2}U_n^{(n)} = 2nXU_n^{(n+1)} + 2n\binom{n+1}{1}U_n^{(n)}$$

Soit : $\left(X^2-1\right)U_n^{(n+2)} + 2X\,U_n^{(n+1)} = n(n+1)\,U_n^{(n)}$ or $L_n = \dfrac{1}{2^n\, n!}U_n^{(n)}$

d'où $\left(X^2-1\right)L_n'' + 2X\,L_n' = n(n+1)\,L_n$ soit $\Phi\left(L_n\right) = n(n+1)\,L_n$.

La réponse B est fausse.

• $$\left(\Phi(P)|Q\right) = \int_{-1}^{1}\left[\left(t^2-1\right)P''(t) + 2t\,P'(t)\right]Q(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)P''(t)\,Q(t)\,dt}_{I} + \int_{-1}^{1} 2t\,P'(t)\,Q(t)\,dt$$

On intègre I par parties en posant : $\begin{cases} u = \left(t^2-1\right)Q(t) \\ v' = P''(t) \end{cases}$

$$\text{soit} \quad \begin{cases} u' = 2t\,Q(t) + (t^2-1)\,Q'(t) \\ v = P'(t) \end{cases}$$

$$I = \underbrace{\Big[(t^2-1)\,P'(t)\,Q(t)\Big]_{-1}^{1}}_{0} - \int_{-1}^{1} 2t\,P'(t)\,Q(t)\,dt \;-\; \int_{-1}^{1} (t^2-1)\,P'(t)\,Q'(t)\,dt$$

d'où : $\quad (\Phi\,(P)|\,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)\,P'(t)\,Q'(t)\,dt$

La réponse C est bonne.

- Pour $n \neq p$, $\left(\Phi\left(L_n\right)\middle|\,L_p\right) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)\,L'_n(t)\,L'_p(t)\,dt = \left(\Phi\left(L_p\right)\middle|\,L_n\right)$.

Or : $\Phi\,(L_k) = k\,(k+1)\,L_k$ $\quad$ donc $\quad n\,(n+1)\left(L_n\,\middle|\,L_p\right) = p\,(p+1)\left(L_n\,\middle|\,L_p\right)$.

Si $n \neq p$, $\;n\,(n+1) - p\,(p+1) = (n-p)\,(n+p+1) \neq 0$

donc $\quad \left(L_n\,\middle|\,L_p\right) = 0 \quad$ et $\left(L_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>orthogonale</u>.

$\deg L_n = n$ et le coefficient dominant de L_n est $\dfrac{1}{2^n}\dbinom{2n}{n}$ donc, d'après l'assertion D de la question 3 : $\quad L_n = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{2n}{n} P_n$

La réponse D est bonne.

→ QCM 2 Automorphismes orthogonaux de E

• Question 1 : réponses B et D

- f_{-1} : $x \;\mapsto x - \langle x|u\rangle\,u$, or $\langle x|u\rangle\,u = p\,(x)$, où p est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}u$. Donc $f_{-1} = Id - p$ est linéaire, et f_{-1} est la <u>projection orthogonale</u> sur $\mathbb{R}\,u^{\perp}$, donc <u>ce n'est pas un automorphisme de E.</u>

La réponse A est fausse et la réponse B est bonne.

- $f_a = Id + ap$ est linéaire.

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\quad \left\| f_a(x)\right\|^2 = \left\| x + a\,\langle x|u\rangle\,u\right\|^2 = \left\| x\right\|^2 + 2a\,\big\langle x\big|\langle x|u\rangle\,u\big\rangle + a^2\,\langle x|u\rangle^2$$

$$\left\| f_a(x)\right\|^2 = \left\| x\right\|^2 + \left(2a + a^2\right)\langle x|u\rangle^2$$

d'où $\quad \left\| f_a(x)\right\|^2 - \left\| x\right\|^2 = a\,(\,a+2)\,\langle x|u\rangle^2$

f_a est un automorphisme orthogonal de E

$$\Leftrightarrow \forall\ x \in \mathrm{E},\ a\,(a+2)\,\langle x|u\rangle^2 = 0 \tag{1}$$

Pour $x = u$, (1) devient : $\quad a\,(a+2)\,\underbrace{\langle u|u\rangle}_{1}{}^2 = 0.$

Donc, si f_a est un automorphisme orthogonal de E, $a = 0$ ou $a = -2$.
La réciproque est évidente. **La réponse C est fausse.**

- $f_{-2} = Id - 2p$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}u^{\perp}$, donc la réflexion par rapport au plan $\{u\}^{\perp}$. **La réponse D est bonne.**

• Question 2 : réponses B et D

NON

Une rotation conserve le produit scalaire, donc si R existe :

$$\langle R(e_1)|R(u)\rangle = \langle e_1|u\rangle \ \Leftrightarrow\ \langle e_3|u\rangle = \langle e_1|u\rangle \ \Leftrightarrow\ -1 = 1$$

La réponse A est fausse.

- Soit R une rotation telle que $R\left(e_1\right) = -e_3$.

$\left(R\left(e_1\right), R\left(e_2\right), R\left(e_3\right)\right) = \left(-e_3, R\left(e_2\right), R\left(e_3\right)\right)$ est une base orthonormée directe, donc : $\begin{cases} R\left(e_2\right) \perp e_3 & \text{soit} \quad R\left(e_2\right) = a e_1 + b e_2 \\ R\left(e_3\right) \perp e_3 & \text{soit} \quad R\left(e_3\right) = c e_1 + d e_2 \end{cases}$

et $\quad Mat_{\mathscr{B}}(R) = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & b & d \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

R induit un automorphisme orthogonal dans le plan $\left(e_1, e_2\right)$, de matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

dét $R = 1 = -$ dét $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est la matrice d'une symétrie,

soit : $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ et $\ Mat_{\mathscr{B}}(R) = \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La réponse B est bonne et la réponse C est fausse.

• Si R est d'axe $\mathbb{R}u$ telle que $R(e_1) = -e_3$:

$$R(u) = u \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cos\theta - \sin\theta = 1 \\ \sin\theta + \cos\theta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta = 0 \quad [2\pi]$$

donc $Mat_{\mathcal{B}}(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et R est unique.

La réponse D est bonne.

• Question 3 : réponse D

• $R_1 = r\left(\mathbb{R}e_1, \frac{\pi}{2}\right)$ et $\{e_1\}^{\perp} = P(e_2, e_3)$ orienté par (e_2, e_3).

Donc : $R_1(e_2) = e_3$ et $R_1(e_3) = -e_2$ soit $Mat_{\mathcal{B}}(R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$R_2 = r\left(\mathbb{R}e_2, \frac{\pi}{2}\right)$ et $\{e_2\}^{\perp} = P(e_3, e_1)$ orienté par (e_3, e_1).

Donc : $R_2(e_3) = e_1$ et $R_2(e_1) = -e_3$ soit $Mat_{\mathcal{B}}(R_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La réponse A est fausse.

• $Mat_{\mathcal{B}}(f) = Mat_{\mathcal{B}}(R_2) \times Mat_{\mathcal{B}}(R_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: on reconnaît la rotation de la question 2 D, donc d'axe $\mathbb{R}u$. Pour en déterminer l'angle α, on cherche la restriction de f au plan $\{u\}^{\perp}$. Pour cela, on construit la base orthonormée directe (u_1, u_2, u_3) telle que : $u_3 = \dfrac{u}{\|u\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 - e_3)$.

(u_1, u_2) est alors une base orthonormée directe de $\{u\}^{\perp}$,

et : $\quad f(u_1) = (\cos\alpha)\, u_1 + (\sin\alpha)\, u_2$ d'où $\begin{cases} \cos\alpha = \langle f(u_1) | u_1 \rangle \\ \sin\alpha = \langle f(u_1) | u_2 \rangle \end{cases}$

$u_1(x, y, z)_{\mathcal{B}} \perp u_3 \quad$ donc $\quad x + y - z = 0$.

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ convient par exemple, et : } \quad u_2 = u_3 \wedge u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$f(u_1)$ a pour coordonnées : $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\text{donc : } \begin{cases} \cos\alpha = \langle f(u_1) | u_1 \rangle = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha = \langle f(u_1) | u_2 \rangle = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \alpha = \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$$

La réponse B est fausse.

- Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de $A = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

On a : $\quad \| C_1 \|^2 = \| C_2 \|^2 = 1, \quad \langle C_1 | C_2 \rangle = 0$ et $C_1 \wedge C_2 = -C_3$ donc S est un automorphisme orthogonal <u>indirect</u>. Or, A est symétrique, d'où : ${}^tA = A = A^{-1}$.
S est donc une symétrie orthogonale par rapport aux invariants de S.

$$v(x, y, z) \text{ invariant } \Leftrightarrow (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z = 0.$$

S est donc la <u>réflexion</u> par rapport au plan P d'équation : $\quad x + y + 2z = 0$.

La réponse C est fausse.

Décomposition d'une rotation

Toute rotation R peut s'écrire sous la forme :

$$R = s_{P'} \circ s_P$$

avec $\quad P \cap P' = \Delta$ axe de R, un des deux plans P et P' étant arbitrairement choisi.

• $f = r\left(\mathbb{R}u, \dfrac{2\pi}{3}\right)$

or $u = e_1 + e_2 - e_3$, donc $u \in$ P d'Øquation : $x + y + 2z = 0$.

Donc il existe un plan P' tel que $f = S' o\, S$, où S' est la réflexion par rapport à P' (contenant u). $P' = r\left(\mathbb{R}u, \dfrac{\pi}{3}\right)(P)$ est unique.

La réponse D est bonne.

→ QCM 3 Isométries et similitudes du plan

• Question 1 : réponse C

• f est définie analytiquement par : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$, est la matrice d'une rotation, donc f est un déplacement. $A \neq I$ $(\theta \neq 0)$, donc f n'est pas une translation, mais une rotation de centre le point invariant $I \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ donc $I(2, 0)$ et $f = r\left(I, -\dfrac{\pi}{2}\right)$.

La réponse B est fausse.

• g est définie analytiquement par : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta = \arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)$, est la matrice d'une réflexion, donc g est une isométrie, mais ce n'est pas un déplacement.

La réponse A est fausse.

• g est une réflexion si l'ensemble des invariants est non vide.

$$M(x, y) \text{ invariant } \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{3}{5} - 1\right)x + \dfrac{4}{5}y - 1 = 0 \\ \dfrac{4}{5}x - \left(\dfrac{3}{5} + 1\right)y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y - 5 = 0 \\ 4x - 8y + 10 = 0 \end{cases}$$

Donc D : $2x-4y+5=0$ est la droite invariante par g, et g est la réflexion d'axe D dirigé par $\vec{u}\,(2,1)$. **La réponse C est bonne.**

Toute rotation peut se décomposer en deux réflexions, donc $f=s_{\Delta'}\,o\,s_{\Delta}$ avec $\Delta\cap\Delta'=I$ et $(\Delta,\Delta')=-\frac{\pi}{4}\ [\pi]$. On peut choisir la direction de l'une des deux droites, donc on choisit Δ // D.

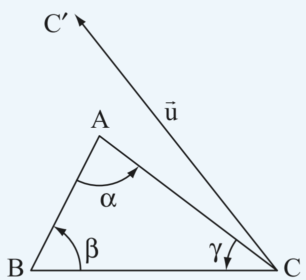
$h=f\,o\,g=s_{\Delta'}\,o\,s_{\Delta}\,o\,s_{D}=s_{\Delta'}\,o\,t_{\vec{v}}$ avec $\vec{v}\perp\vec{u}$. **La réponse D est fausse.**

• Question 2 : réponse B

Composée de deux rotations

La composée f de deux rotations affines d'angles θ et θ' est un déplacement, c'est-à-dire une rotation ou une translation.
La partie linéaire de f est la rotation vectorielle d'angle $\theta+\theta'$, et f est une translation si et seulement si : $\theta+\theta'=0\ [2\pi]$.

$\alpha-\alpha=0$, donc $r(B,\alpha)\,o\,r(C,-\alpha)=t_{\vec{u}}$ et $C\xrightarrow{r(C,-\alpha)}C\xrightarrow{r(B,\alpha)}C'$, donc $\vec{u}=\overrightarrow{CC'}$.
La réponse A est fausse.



• $f=r(B,\beta)\,o\,r(C,\gamma)\,o\,r(A,\alpha)$ est un déplacement d'application linéaire associée à la rotation d'angle $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Or : $r_{\pi}\neq Id$ donc f est une <u>symétrie centrale</u>.
La réponse B est bonne et la réponse C est fausse.

• $g=s_{(AB)}\,o\,t_{\overrightarrow{AB}}\,o\,s_{(AB)}$ est une isométrie de partie linéaire $s_{\left(\overrightarrow{AB}\right)}\,o\,Id\,o\,s_{\left(\overrightarrow{AB}\right)}=Id$, donc g est une translation. C'est une rotation si $g=Id$.

Or : $A\xrightarrow{s_{(AB)}}A\xrightarrow{t_{\overrightarrow{AB}}}B\xrightarrow{s_{(AB)}}B$ donc $g=t_{\overrightarrow{AB}}$. **La réponse D est fausse.**

Question 3 : aucune réponse n'est bonne

• L'application $f : M(z) \mapsto M'(z'),\ z' = az + b$ est une similitude directe du plan si $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Or : $a = \frac{1}{2}\left(1 + e^{i\theta}\right) = 0 \iff \theta = \pi$

donc, pour $\theta = \pi$, f n'est pas une similitude directe.

Les réponses A et D sont fausses.

• Si $\theta = 0$, $z' = z + 1$ et f est une translation de vecteur d'affixe 1.

La réponse B est fausse.

• Si $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$, $a \neq 0$ et $a \neq 1$, donc f est une similitude qui n'est pas une translation, donc elle admet un centre Ω d'affixe z_0 tel que :

$$z_0 = \frac{1}{2}\left(1 + e^{i\theta}\right) z_0 + e^{i\theta/2} \iff \frac{1}{2}\left(1 - e^{i\theta}\right) z_0 = e^{i\theta/2}$$

soit : $\frac{1}{2} e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right) z_0 = e^{i\theta/2} \iff -i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) z_0 = 1$

d'où : $$z_0 = \frac{i}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

De plus : $a = \frac{1}{2}\left(1 + e^{i\theta}\right) = e^{i\theta/2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ donc f est de rapport $k = \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$.

• **Si $\theta \in \left]0, \pi\right[$: $k = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et l'angle de f est $\frac{\theta}{2}$.**

Si $\theta \in \left]\pi, 2\pi\right[$: $k = -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et l'angle de f est $\frac{\theta}{2} + \pi$.

La réponse C est fausse.

→ QCM 4 Isométries de l'espace

Question 1 : réponses B et C

• dét $M_T = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}_{C_1\ C_2\ C_3} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}_{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$

dét $M_T = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right)$ **La réponse A est fausse.**

• M_T est orthogonale $\Leftrightarrow$ (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \|C_1\| = \|C_2\| = \|C_3\| = 1 \\ \langle C_1|C_2\rangle = \langle C_2|C_3\rangle = \langle C_3|C_1\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 & (1) \\ ab+bc+ca = 0 & (2) \end{cases}$$

La réponse B est bonne.

• φ_T est une rotation $\Leftrightarrow$ M_T est orthogonale et dét $M_T = 1$.

Or : (1) et (2) $\Rightarrow$ dét $M_T = a+b+c$

De plus : $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

d'où : φ_T rotation $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ ab+bc+ca = 0 \\ a+b+c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 1 \\ ab+bc+ca = 0 \end{cases}$

La réponse C est bonne.

NON

φ_T symétrie orthogonale

$$\Leftrightarrow \ M_T \text{ orthogonale et symétrique } \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a+b+c = \pm 1 \\ ab+bc+ca = 0 \end{cases}$$

La réponse D est fausse.

• Question 2 : réponses A et D

• $T = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. On a $\begin{cases} b = c \\ a+b+c = -1 \\ ab+bc+ca = 0 \end{cases}$ donc φ_T est une symétrie orthogonale.

$$M_T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

et $\vec{v}(x, y, z) \in \text{Ker}(\varphi_T - Id) \Leftrightarrow (M_T - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x+y+z = 0$

Donc φ_T est la réflexion par rapport au plan P d'équation : $x+y+z=0$

La réponse A est bonne.

• f est une application affine d'application linéaire associée φ_T, donc f est une isométrie. C'est une réflexion si $\operatorname{Inv} f \neq \varnothing$.

$$M(x,y,z) \in \operatorname{Inv} f \Leftrightarrow f(M)=M \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+2z=3\alpha \\ 2x+2y+2z=6(1-\alpha) \\ 2x+2y+2z=3\alpha \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\operatorname{Inv} f \neq \varnothing \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

Les réponses B et C sont fausses, la réponse D est bonne.

• Question 3 : réponses B et D

• $T=(0,0,1)$ et $M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ca=0 \end{cases}$ donc φ_T, application linéaire associée à g, est une rotation, et <u>g est un déplacement</u>.

• L'axe de φ_T est l'ensemble des invariants par φ_T.

$\vec{v}(x,y,z) \in \operatorname{Inv} \varphi_T \Leftrightarrow x=y=z$ donc φ_T est une <u>rotation</u> d'axe $\mathbb{R}\,\vec{u}$.

$$\text{Soit} \quad \vec{K} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \ \vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ et } \vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$\left(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ est une base orthonormée directe.

θ étant l'angle de g, $\quad g\left(\vec{I}\right) = (\cos\theta)\,\vec{I} + (\sin\theta)\,\vec{J} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$

$$\text{donc :} \quad \begin{cases} \cos\theta = g\left(\vec{I}\right).\vec{I} = -\dfrac{1}{2} \\[2mm] \sin\theta = g\left(\vec{I}\right).\vec{J} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \theta \equiv \frac{2\pi}{3} \ [2\pi]$$

La réponse A est fausse.

• g est un déplacement, donc une translation, une rotation ou un vissage. $M_T \neq I$, donc g n'est pas une translation. g est un vissage si et seulement si $\operatorname{Inv} g = \varnothing$.

$$M(x,y,z) \in \text{Inv } g \iff \begin{cases} x = z + \beta \\ y = x + 1 \\ z = y + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z + \beta \\ y = z - 2 \\ z - 2 = z + \beta + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z + \beta \\ y = z - 2 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

Donc : $\quad g$ est un vissage $\iff \text{Inv } g = \varnothing \iff \beta \neq -3$

La réponse B est bonne.

• Si $\beta \neq -3$: $\quad g = r\left(D, \dfrac{2\pi}{3}\right) o\, t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}}\, o\, r\left(D, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ où D est l'axe du vissage, dirigé par $\vec{u}$, et $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

Pour déterminer D et $\vec{v}$, on peut chercher $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$ tel que $h = t_{-\vec{v}}\; o\; g$ définie par $\begin{cases} x' = z + \beta - \lambda \\ y' = x + 1 - \lambda \\ z' = y + 2 - \lambda \end{cases}$ soit une rotation, c'est-à-dire $\text{Inv } h \neq \varnothing$.

$$M(x, y, z) \in \text{Inv } h \iff \begin{cases} x = z + \beta - \lambda \\ y = x + 1 - \lambda \\ z = y + 2 - \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = z + \beta - \lambda \\ y = z - 2 + \lambda \\ \boxed{\lambda = \dfrac{\beta}{3} + 1} \end{cases}$$

donc $\quad \vec{v} = \dfrac{1}{3}(\beta + 3)\,\vec{u}$.

La réponse C est fausse.

• $\text{D} = \text{Inv } h$: $\begin{cases} x = z + \dfrac{2\beta}{3} - 1 \\ y = z + \dfrac{\beta}{3} - 1 \end{cases}$

Si $z = 1$, $x = \dfrac{2\beta}{3}$ et $\quad y = \dfrac{\beta}{3}\quad$ donc $\quad A\left(\dfrac{2\beta}{3}, \dfrac{\beta}{3}, 1\right) \in \text{D}$.

La réponse D est bonne.