Analyse complexe
Cours de L3, ENS Lyon, automne 2014

Jean-Claude Sikorav

version finale

1 Préliminaires : notations, point à l'infini, fonctions élémentaires

1.1 Les deux points de vue sur $\mathbb{C}$

Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes peut se voir de deux façons différentes, algébro-analytique ou géométrique :

• Extension du corps $\mathbb{R}$ par ajout d'une racine carrée de -1 ; corps algébriquement clos, muni d'une norme le rendant complet.

• Plan vectoriel euclidien orienté muni d'une base $(1, i)$. On identifie alors le nombre complexe $z = x+iy$ avec le point (x, y). Une variante de cette interprétation est de voir tout nombre complexe non nul comme une similitude vectorielle directe d'un plan vectoriel euclidien : la multiplication par i est le quart de tour autour de l'origine dans le sens trigonométrique, la propriété $i^2 = -1$ exprime le fait que deux quarts de tours donnent un demi-tour. En général, le nombre complexe $a + ib = re^{i\theta}$ est la similitude de rapport r et d'angle θ.

1.2 Notations

Si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in]0, +\infty[$, on note $\Delta(z_0, r)$ le disque ouvert $\Delta(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$. Par convention, $\Delta(z_0, \infty) = \mathbb{C}$. Si $r \neq \infty$, le disque fermé est noté $\overline{\Delta}(z_0, r)$, et son bord, le cercle de rayon r, $\partial\Delta(z_0, r)$. On note $\Delta(0, 1) = \Delta$, disque unité ouvert. Son bord est noté $\partial\Delta$, ou $\mathbb{U}$ si on le considère comme le groupe des nombres complexes de module un. On note $\Delta^*(z_0, r) = \Delta(z_0, r)\setminus\{z_0\}$ le *disque épointé*, en particulier $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$.

On note $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ le *demi-plan supérieur*, appelé aussi *demi-plan de Poincaré* (ou parfois *de Lobatchevski*).

Si I, J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, on note $I+iJ$ le rectangle $\{x+iy : x \in I, y \in J\}$. En particulier, $\mathbb{R} + iI$ est une bande horizontale, $I + i\mathbb{R}$, une bande verticale.

Un ouvert de $\mathbb{C}$ non vide et connexe par arcs sera appelé une *région*.

1.3 Point à l'infini, sphère de Riemann

Il est souvent commode d'ajouter à $\mathbb{C}$ un *point à l'infini* noté ∞. L'ensemble $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ est appelé *sphère de Riemann*. Nous le noterons $\overline{\mathbb{C}}$.

Remarque.* Du point de vue de la géométrie algébrique, il est noté $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et appelé *droite projective complexe.

Structure d'espace topologique. On définit une topologie sur $\overline{\mathbb{C}}$ en disant que U est ouvert si

• $U \cap \mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$

• si $\infty \in U$, il existe $R \in]0, +\infty[$ tel que $U \supset \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}(0, R)$.

Propriétés (exercice)

1) C'est bien une topologie.

2) On a les équivalences suivantes :

• *pour une suite de nombres complexes :* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n} = 0$.

• *pour une fonction définie au voisinage de* $z_0 \in \mathbb{C}$ *:* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$.

• *pour une fonction définie pour* $|z| > r$ *:* $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = w_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to 0} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = w_0$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to 0} \left[f\left(\dfrac{1}{z}\right)\right]^{-1} = 0$

3) L'application $z \in \mathbb{C} \mapsto \left(\dfrac{2z}{|z|^2 + 1}, \dfrac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)$, $\infty \mapsto (0, 0, 1)$ *est l'inverse de la projection stéréographique* $(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \mapsto \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$, $(0, 0, 1) \mapsto \infty$, *et donne un homéomorphisme de*

$\overline{\mathbb{C}}$ *sur la sphère unité* $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$*. En particulier,* $\overline{\mathbb{C}}$ *est métrisable et compact.*

1.4 Polynômes

Si $P(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{d} a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme à une variable complexe, on lui associe la fonction polynomiale $f_P(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{d} a_n z^n$. Comme $\mathbb{C}$ est infini, on peut identifier $f_P = P$ et appeler donc la fonction aussi «polynôme». Nous noterons $\mathbb{C}[z]$ l'anneau des polynômes complexes à une variable, vus comme fonctions.

Extension à l'infini. Un polynôme P peut être vu comme une fonction de $\overline{\mathbb{C}}$ dans lui-même en posant $P(\infty) = \infty$ si P n'est pas constant, $P(\infty) = P(0)$ si P est constant. Avec la topologie que nous avons définie, elle reste clairement continue.

Polynômes de degré un : groupe affine. Les polynômes de degré un forment un groupe pour la composition, le *groupe affine complexe à une variable*, noté $\mathrm{Aff}(1, \mathbb{C})$. Géométriquement, il s'agit des similitudes directes.

Propriété. *Le groupe* $\mathrm{Aff}(1, \mathbb{C})$ *est* exactement 2-transitif *sur* $\mathbb{C}$ *: si* z_1, z_2 *sont des nombres complexes distincts, il existe un unique polynôme de degré un tel que* $P(0) = z_1$*,* $P(1) = z_2$*.*

**Remarque.* Cette adjonction d'un point à l'infini peut se généraliser à tout espace topologique localement compact X, l'espace obtenu $\overline{X} = X \cup \{\infty\}$ étant appelé *compactifié d'Alexandroff.* Ce qui est particulier aux espaces $\mathbb{R}^n$, c'est que cette compactification est de nouveau un espace homogène (le groupe des homéomorphismes est transitif). En fait, la projection stéréographique marche en toute dimension pour prouver que $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ est homéomorphe à la sphère S^n. Si $n \geq 2$, elle préserve aussi les angles (sa différentielle en tout point est une similitude).*

1.5 Fonctions rationnelles

Une *fonction rationnelle* est une fonction complexe de la forme $\dfrac{P}{Q}$, où P et Q sont deux polynômes avec Q non nul, que l'on peut supposer premiers entre eux. A priori, elle est définie sur $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$. Mais il est commode de l'étendre en une application de $\overline{\mathbb{C}}$ dans $\overline{\mathbb{C}}$ en posant

- $f(z_0) = \infty$ si $Q(z_0) = 0$ (et donc $P(z_0) \neq 0$)
- $f(\infty) = \begin{cases} \infty \text{ si } \deg(P) > \deg(Q) \\ \dfrac{a_d}{b_d} \text{ si } \deg(P) = \deg(Q) = d \text{ et } a_d, b_d \text{ sont les coefficients directeurs de } P, Q \\ 0 \text{ si } \deg(P) < \deg Q. \end{cases}$

Exercice : vérifier que f est continue sur $\overline{\mathbb{C}}$ au sens $\displaystyle\lim_{z \to z_0} P(z) = P(z_0)$, pour tout $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$.

Nous noterons $\mathbb{C}(z)$ le corps des fonctions rationnelles, vues comme fonctions.

Fonctions rationnelles de degré un : groupe de Möbius. Les fonctions rationnelles de degré 1, $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, appelées aussi *homographies*, sont particulièrement intéressantes. D'abord, les propriétés $(az+b) \wedge (cz+d) = 1$, $\max(\deg(az+b), \deg(cz+d)) = 1$ se traduisent par $ad - bc \neq 0$, soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, nous noterons $h_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Propriétés (exercice). *1) Toute homographie* h_A *est bijective sur* $\overline{\mathbb{C}}$*, son inverse étant l'homographie* $h_{A^{-1}}$*.*

2) Les homographies forment un groupe pour la composition, appelé groupe de Möbius *et que nous noterons* $\mathrm{M\ddot{o}b}(\overline{\mathbb{C}})$*.*

3) L'application $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$ est un homomorphisme de groupes, surjectif et de noyau $\mathbb{C}^*\mathrm{Id}_2$ (les matrices scalaires). Il reste surjectif si on le restreint à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{M}(\mathbb{C}) : \det(A) = 1\}$; son noyau devient alors $\{\pm\mathrm{Id}_2\}$.

4) Le groupe $\mathrm{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$ est exactement 3-transitif *sur $\overline{\mathbb{C}}$: si z_1, z_2, z_3 sont des éléments distincts de $\overline{\mathbb{C}}$, il existe une unique homographie f telle que $P(0) = z_1$, $P(1) = z_2$, $P(\infty) = z_3$.*

5) Le sous-groupe de $\mathrm{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$ laissant invariant le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ est l'image de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Il est exactement 3-transitif sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

6) L'homographie $z \mapsto w = \dfrac{z-i}{z+i}$ donne une bijection de $\mathbb{H}$ sur Δ, d'inverse $w \mapsto i\dfrac{1+w}{1-w}$.

7) Le sous-groupe des homographies qui préserve Δ est exactement 3-transitif sur $\partial\Delta$.

**Remarque.* On a deux caractérisations géométrique des homographies :

1) Une homographie est une similitude directe ou la composée (dans n'importe quel ordre) d'une similitude indirecte et d'une inversion par rapport à un cercle.

2) Une homographie est une bijection de $\overline{\mathbb{C}}$ qui transforme tout (cercle ou droite) en (cercle ou droite) et préserve l'orientation. Noter que l'équation générale d'un (cercle ou droite) est $az\overline{z} + bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0$, avec $(a,b) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}) \setminus \{(0,0)\}$ et $|b|^2 - ac > 0$.*

1.6 Fonctions algébriques, fonctions puissances

Une *fonction algébrique* est une fonction complexe f, définie et continue sur une région U, telle qu'il existe un polyôme à deux variables complexes non nul, $P(X,Y)$ vérifiant $P(z, f(z)) = 0$ sur U. Si $P(X,Y)$ est irréductible, on dit que f est une *branche* de la «solution w de $P(z,w) = 0$».

Exemple : les fonctions racines n-ièmes. Soit n un entier ≥ 2. Si $P(X,Y) = Y^n - X$, on obtient les déterminations de la fonction $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$. En particulier, on a la branche principale définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ [qui utilise l'exponentielle rappelée plus loin] :

$$z = re^{i\theta}\ ,\ r > 0\ ,\ |\theta| < \pi\ \mapsto r^{1/n}e^{i\theta/n}.$$

Plus généralement, si f est une fonction continue sur une région U, une branche de $\sqrt[n]{f}$ sur U est une fonction continue g telle que $g^n = f$.

La racine n-ième se généralise aux *fonctions puissances* (fractionnaires) z^a, $a \in \mathbb{C}$. Par exemple, si $z \notin \mathbb{R}_-$ on peut définir la branche principale $(re^{i\theta})^a = e^{a\log r + ia\theta}$. Voir plus loin la définition générale de f^a.

Exercice. Si $n > 1$, n'y a aucune branche de la racine n-ième qui soit définie sur un voisinage de 0.

Fonctions algébriques explicites ou non. Une fonction algébrique est dite *explicite* si on peut l'obtenir à partir des polynômes par extractions successives de racines («équation résoluble par radicaux»). C'est le cas si $\deg_w(P) \leq 4$ d'après Tartaglia-del Ferro-Ferrari. En revanche, si $\deg_w(P) \geq 5$, f n'est en général pas explicite d'après Abel et Galois. Exemple : $P(z,w) = w^5 - w + z$.

On peut se demander dans ce cas comment décrire les branches de f. C'est ce que permet de faire le *théorème des fonctions implicites* de Newton et Cauchy (dans le cadre analytique ou holomorphe).

1.7 Exponentielle

La fonction exponentielle $e^z = \exp(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ vérifie $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$: c'est un homomorphisme du groupe additif $\mathbb{C}$ vers le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$. Si $z = x + iy$, on a $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$. Donc exp est surjectif, et $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$. En particulier, sa restriction à une bande semi-ouverte $\mathbb{R} + i[b, b+2\pi i[$ est bijective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$. Et aussi de $\mathbb{R} + i]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, avec l'avantage que l'inverse est continu.

Exercice. Montrer que l'exponentielle n'est pas algébrique sans sortir de $\mathbb{R}$.

1.8 Logarithme

Une *branche du logarithme* est une fonction continue, notée log, définie sur une région U, qui est un inverse de l'exponentielle, soit $e^{\log(z)} = z$ sur U. Exemple : la *branche principale* est celle qui envoie $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ sur $\mathbb{R} + i]-\pi, \pi[$. La partie réelle de $\log z$ est toujours bien définie et vaut $\log|z|$. Sa partie imaginaire est une branche de l'argument de z, c'est-à-dire l'angle entre 1 et z :

$$\log z = \log|z| + i\mathrm{arg}\ z.$$

Plus généralement, si f est une fonction continue qui ne s'annule pas sur une région U, une branche de $\log f$ sur U est une fonction continue $\log f$ telle que $e^{\log f} = f$. Une telle branche permet de définir une branche de $\sqrt[n]{f}$: $\sqrt[n]{f} = \exp(\frac{1}{n} \log f$, et plus généralement $f^a = \exp(a \log f)$.

Exercices. 1) Il n'y a aucune branche de $\log z$ définie sur un voisinage épointé de 0.

2) Si U est une région admettant une branche $(\log f)_0$ de $\log f$, toutes les branches sur U sont de la forme $(\log f)_0 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) Si f est une fonction continue jamais nulle sur U admettant une racine n-ième, a-t-elle un logarithme ?

4) La fonction log n'est pas algébrique.

1.9 Fonctions élémentaires

Définition. Une *fonction élémentaire* est une fonction continue sur une région U de $\mathbb{C}$, qui est localement obtenue par opérations algébriques et composition de fonctions algébriques, exponentielle et logarithmes.

Exemples :

- les fonctions trigonométriques $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = i\dfrac{1 + e^{2iz}}{1 - e^{2iz}}$
- leurs inverses (à plusieurs branches) : $\arcsin z = -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2})$, $\arccos z = -i \log(z + \sqrt{z^2 - 1})$, $\arctan z = \dfrac{i}{2} \log \dfrac{z + i}{z - i}$
- les analogues hyperboliques $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin(iz)$, $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh(iz)$, $\mathrm{th} z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z} = \dfrac{1 + e^{2z}}{1 - e^{2z}}$
- les fonctions puissances $z^a = \exp(a \log z)$, $a \in \mathbb{C}$.

2 Fonctions holomorphes d'une variable complexe

1.1 Fonctions $\mathbb{C}$-dérivables, fonctions holomorphes

Définitions. Soit U une région (rappelons que c'est un ouvert de $\mathbb{C}$ non vide et connexe). Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-*dérivable* en un point $z_0 \in U$ si la limite

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

existe. On la note $f'(z_0)$, et on l'appelle dérivée de f en z_0. La fonction f est *holomorphe sur* U si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U. La fonction $z \in U \mapsto f'(z) \in U$ est appelée dérivée de f.

Si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, on dit que c'est une *fonction entière.*

Notation. Nous noterons $\mathcal{O}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Propriétés équivalentes. *Soit f une fonction définie au voisinage de z_0. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.

2) f est différentiable en z_0 et sa différentielle $Df(z_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

3) f est différentiable en z_0 et sa différentielle $Df(z_0)$ est une similitude directe ou est nulle.

4) f est différentiable en z_0 et la dérivée $e^{-i\theta}\frac{d}{dt}_{|t=0} f(z_0+te^{i\theta})$ ne dépend pas de θ.

5) Notant $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0 = x_0+iy_0$, les fonctions (de deux variables réelles) u et v sont différentiables en (x_0,y_0) et vérifient en ce point les équations de Cauchy-Riemann *(découvertes par Euler)*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

6) Autre forme des équations de Cauchy-Riemann : f est différentiable en (x_0,y_0) et $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) = 0$, où $\frac{\partial f}{\partial \bar z} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)$. On appelle $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ l'opérateur (différentiel) de Cauchy-Riemann.

Démonstration. Par définition, 1) équivaut à l'existence de $a \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - a = o(1)$ quand z tend vers z_0, soit $f(z)-f(z_0)-a(z-z_0) = o(|z-z_0|)$. Ceci équivaut à ($f$ est différentiable en z_0 et sa différentielle est $z \mapsto az$ pour un certain $a \in \mathbb{C}$). Comme les applications $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont les multiplications par des scalaires $z \mapsto az$, $a \in \mathbb{C}$, 1) $\Leftrightarrow$ 2).

L'équivalence de 2) et 3) est claire puisque les similitudes vectorielles directes sont les applications $z \mapsto az$ avec $a \in \mathbb{C}^*$.

Pour l'équivalence de 2) et 4), nous utilisons le

Lemme. *Une application $\mathbb{R}$-linéaire $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'écrit de façon unique $u(z) = az + b\bar z$, $a, b \in \mathbb{C}$.*

Preuve du lemme. Si $az + b\bar z = 0$ identiquement, en appliquant à $z = 0$ et 1 il vient $a + b = 0 = i(a-b)$ donc $a = b = 0$. Donc l'espace des applications $az + b\bar z$ est de dimension deux sur $\mathbb{C}$, donc quatre sur $\mathbb{R}$. Comme il; est contenu dans $\mathrm{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, il lui est égal, donc u s'écrit sous la forme indiquée, de façon unique puisque $az + b\bar z$ est identiquement nul seulement si $(a,b) = (0,0)$. Explicitement, on calcule

$$a = \frac{1}{2}(u(1) - iu(i))\ ,\ b = \frac{1}{2}(u(1) + iu(i)).$$

Nous pouvons maintenant prouver 2)$\Leftrightarrow$ 4) : si $Df(z_0).h = ah + b\bar h$, on a

$$e^{-i\theta}\frac{d}{dt}_{|t=0} f(z_0+te^{i\theta}) = e^{-i\theta} Df(z_0).e^{i\theta} = a + be^{-2i\theta}.$$

Ceci est indépendant de θ si et seulement si $b = 0$, cqfd.

Pour finir, nous prouvons 2) $\Leftrightarrow$ 5),6). La différentiabilité de f en z_0 équivaut à celles de u et de v en (x_0, y_0). De plus :

$$Df(z_0).1 = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \ , \ Df(z_0).i = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

La $\mathbb{C}$-linéarité de $Df(z_0)$ équivaut à $Df(z_0).i = i(Df(z_0).1)$, ce qui s'écrit sous les deux formes suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x} \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}.$$

La première forme équivaut à 6), et la seconde à 5). Noter que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$ est le coefficient b dans la décomposition $Df(z_0).h = ah + b\overline{h}$.

Remarque. Une fonction holomorphe, vue comme application d'un ouvert du plan dans le plan, est donc caractérisée par le fait que sa différentielle préserve les angles et l'orientation là où elle est non nulle. Une application dont la différentielle (là ou elle est non nulle) préserve les angles est dite *conforme*. Une application conforme est soit holomorphe soit la conjuguée d'une fonction holomorphe (on dit alors qu'elle est anti-holomorphe). En fait, on emploie souvent «conforme» pour «holomorphe» quand on veut insister sur l'aspect géométrique.

Exercice : montrer que la projection stéréographique est une application conforme de $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ sur $\mathbb{C}$.

**Remarque.* En dimension ≥ 3 (y compris infinie), il y a très peu d'applications conformes : un théorème de Liouville dit que toute application conforme est localement une similitude ou une inversion ou le produit d'une inversion par une symétrie par rapport à un hyperplan.*

Dérivées successives. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable sur U et que sa dérivée est aussi $\mathbb{C}$-dérivable, on note $(f')' = f''$. Si f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur U (on verra que c'est toujours le cas dès que f est $\mathbb{C}$-dérivable sur U), on obtient ainsi les dérivées successives $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, avec $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$etc.

Proposition. *Si f est holomorphe dans une région U et $f' = 0$ sur U, f est constante sur U.*

Démonstration. En effet, f une application différentiable sur un ouvert connexe par arcs et sa différentielle est partout nulle.

2.2 Exemples de fonctions holomorphes

Clairement, toute fonction affine $z \mapsto az + b$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée constante égale à a. Ensuite, exactement comme sur $\mathbb{R}$, on prouve le

Théorème. *Toute fonction obtenue à partir de fonctions holomorphes par des opérations algébriques (addition, soustraction, multiplication, division)et par composition est holomorphe. Si $f, g \in \mathcal{O}(U)$, on a*

$$(f+g)' = f' + g' \ , \ (fg)' = f'g + fg' \ , \ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \text{ là où } g \text{ ne s'annule pas}$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g' \ , \ (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \text{ si } f \text{ a un inverse holomorphe pour la composition.}$$

Donc tout polynôme est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et l'expression de sa dérivée est la même que pour un polynôme réel :

$$\Big(\sum_{n=0}^{d} a_n z^n)' = \sum_{n=1}^{d} n a_n z^{n-1}.$$

De même, toute fonction rationnelle $f = \frac{P}{Q}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$, avec $f' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$.

Enfin, $\mathcal{O}(U)$ est un anneau commutatif unitaire pour toute région U.

Exponentielle. Comme dans le cas réel, on a

$$(e^z)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = \lim_{h\to 0} e^z \frac{e^h - 1}{h} = e^z \text{ en utilisant } \left|\frac{e^h - 1}{h} - 1\right| \leq \frac{e^{|h|} - 1}{|h|} - 1.$$

Logarithme. Montrons (**ce qui n'a pas été fait oralement**) que toute branche du logarithme est dérivable, sa dérivée étant $\frac{1}{z}$. Nous le déduirons de la proposition suivante.

Proposition. *Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un point z_0, qui admet un inverse à droite continu g défini au voisinage de $w_0 = f(z_0)$, tel que $g(w_0) = z_0$. Si $f'(z_0) \neq 0$, g est dérivable en w et $g'(w) = \frac{1}{f'(z_0)}$.*

Démonstration. Soit $w \in V$ tendant vers $w_0 = f(z_0)$, alors $z = g(w) \to z_0$, donc $f(z) - f(z_0) - f'(z_0).(z - z_0) = o(|z - z_0|)$. Donc pour w assez proche de w_0 on a $|f(z) - f(z_0)| \geq \frac{|f'(z_0)|}{2}|z - z_0|$, soit $|z - z_0| \leq \frac{2}{|f'(z_0)|}|f(z) - f(z_0)| = \frac{2}{|f'(z_0)|}|w - w_0|)$. Comme $f'(z_0) \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} g(w) - g(w_0) = z - z_0 &= \frac{1}{f'(z_0)}(f(z) - f(z_0)) + o(|z - z_0|) \\ &= \frac{1}{f'(z_0)}(w - w_0) + o(|w - w_0|). \end{aligned}$$

Ceci prouve la proposition.

Si log est une branche du logarithme définie au voisinage d'un point w_0, on peut appliquer la proposition avec $f = \exp$ et $z_0 = e^{w_0}$, puisque $f'(z_0) = e^{z_0} \neq 0$. Donc

$$\log'(w_0) = \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}.$$

Donc $\log'(z) = \frac{1}{z}$, cqfd.

Remarque. Nous verrons dans le théorème d'inversion locale que, à la différence du cas réel, la non-nuillté de $f'(z_0)$ résulte de l'existence d'un inverse à droite local continu.

Fonctions algébriques. On prouve l'holomorphie de $z^{1/n}$ en l'écrivant $e^{\log z/n}$, d'où $(z^{1/n})' = \frac{z^{1/n-1}}{n} = \frac{(z^{1/n})^{1-n}}{n}$ où l'on utilise la même branche de $z^{1/n}$ (plus généralement, $(z^a)' = az^{a-1}$). D'où l'holomorphie et le calcul des dérivées des fonctions algébriques explicites. En particulier, on a $(\sqrt[n]{f})' = \frac{1}{n}f'(\sqrt[n]{f})^{1-n}$. Et plus généralement $(f^a)' = af^{a-1}$.

L'holomorphie des fonctions algébriques implicites résultera du théorème des fonctions implicites. Nous l'admettons pour l'instant.

Fonctions élémentaires. Il résulte de ce qui précède que toute fonction élémentaire est holomorphe sur tout ouvert où elle est définie.

2.3 Exemples de fonctions non holomorphes

La conjugaison complexe $\sigma : z \mapsto \overline{z}$ n'est nulle part $\mathbb{C}$-dérivable, puisque sa différentielle $D\sigma(z)$ est partout σ et que $\sigma(i) = -i = -i\sigma(1) \neq i\sigma(1)$. Un autre exemple est donné par la fonction $f(x + iy) = x$. En effet sa différentielle est partout de rang 1, alors qu'une application $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ a un rang 0 ou 2 (sur $\mathbb{R}$!)

Exercice. Montrer qu'une fonction holomorphe à valeurs réelles est constante.

3 Formule et représentation intégrales de Cauchy

3.1 Intégrale d'une fonction le long d'un chemin, d'un lacet

Définitions. Un *chemin* est une application de classe C^1 par morceaux $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, c'est-à-dire **continue** et telle qu'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \cdots, t_n = b$ pour laquelle $f|[t_i, t_{i+1}]$ est de classe C^1. En particulier, f est de classe C^1 en-dehors des t_i, et admet une dérivée à droite en $t_i, i < n$ et à gauche en $t_i, i > 0$.

Si $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z_1$ c'est un chemin de z_0 à z_1. Si $z_0 = z_1$, c'est un *lacet*. Un *reparamétrage* de γ est un chemin $\gamma \circ \varphi : [c,d] \to U$ où φ est un difféomorphisme de classe C^1 par morceaux de $[c,d]$ sur $[a,b]$. Il est *direct* (resp. *indirect*) si $\varphi' > 0$ (resp. $\varphi' < 0$) là où il est défini. Une *courbe fermée* est l'image d'un lacet $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ injectif sur $[a,b[$ et dont les dérivées à droite et à gauche ne s'annulent jamais.

Proposition. *Si U est une région, deux points $z_0, z_1 \in U$ sont reliés par un chemin dans U de classe C^∞, et a fortiori de classe C^1 par morceaux.*

Démonstration. Par hypothèse de connexité par arcs, il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to U$ de z_0 à z_1. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout point à distance au plus ε de $\gamma([0,1])$ est dans U : en effet, sinon on trouve des suites $z_n \in \mathbb{C} \setminus U$, $t_n \in [0,1]$ telles que $|z_n - \gamma(t_n)| \to 0$. Quitte à extraire, on peut supposer $t_n \to t_\infty \in [0,1]$, donc $z_n \to \gamma(t_\infty)$. Comme $\mathbb{C} \setminus U$ est fermé, $\gamma(t_\infty) \in \mathbb{C} \setminus U$, contradiction. Ensuite, appliquant le théorème d'approximation de Weierstrass on trouve $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to U$ de classe C^∞ tel que $\max\limits_{[0,1]} ||\widetilde{\gamma} - \gamma|| \leq \varepsilon$, donc $\widetilde{\gamma}([0,1]) \subset U$, cqfd.

Remarques. 1) Rappelons une preuve du théorème d'approximation de Weierstrass, énoncé sous la forme suivante. *Toute application continue $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ [ou dans un espace vectoriel normé E] est limite uniforme d'applications polynômiales [applications de la forme $\sum_{k=0}^{d} x^k v_k$, $v_k \in \mathbb{R}^m$ [ou $v_k \in E$] $P_{n,\gamma}$, et a fortiori d'applications de classe C^∞. On peut de plus imposer $P_{n,\gamma}(0) = \gamma(0)$, $P_{n,\gamma}(1) = \gamma(1)$.*

On pose $P_{n,\gamma}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^k \gamma(\frac{k}{n})$ (polynôme d'approximation de Bernstein). On a clairement $P_{n,\gamma}(0) = \gamma(0)$, $P_{n,\gamma}(1) = \gamma(1)$. On calcule

$$\begin{aligned}
P_{n,1} &= (t + (1-t)^n = 1 \\
P_{n,t} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} (\frac{k}{n}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} t^k (1-t)^{n-k} = t P_{n-1,1} = t \\
P_{n,t^2} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} (\frac{k}{n})^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{k}{n} t^k (1-t)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \Big(\binom{n-2}{k-2} \frac{n-1}{n} + \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{n} \Big) t^k (1-t)^{n-k} = \frac{(n-1)t^2}{n} + \frac{t}{n}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \big(\frac{k}{n} - t\big)^2 &= P_{n,t^2} - 2t P_{n,t} + t^2 P_{n,1} \\
&= \frac{(n-1)t^2}{n} + \frac{t}{n} - 2t^2 + t^2 = \frac{t(1-t)}{n}.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de γ, il existe $\delta > 0$ tel que $|\gamma(t) - \gamma(u)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ si $|t-u| \leq \delta$. Pour $t \in [0,1]$, on décompose $\{0, \cdots, n\} = I'_t \cup I''_t$, où I' est formé des k tels que $|\left|\frac{k}{n} - t\right| \leq \delta$, et I'' de ceux tels que $\left|\frac{k}{n} - t\right| > \delta$, soit $1 \leq \delta^{-2}\big(\frac{k}{n} - t\big)^2$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in I'_t} \binom{n}{k} t^k(1-t)^k \big|\gamma(t) - \gamma(\frac{k}{n})\big| &\leq \sum_{k=0}^{n} t^k(1-t)^k . \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon \\
\sum_{k \in I''_t} \binom{n}{k} t^k(1-t)^k \big|\gamma(t) - \gamma(\frac{k}{n})\big| &\leq \sum_{k=0}^{n} t^k(1-t)^k \delta^{-2}\big(\frac{k}{n} - t\big)^2 . 2 \max_{[0,1]} |\gamma| \\
&= 2\delta^{-2} \max_{[0,1]} |\gamma| . \frac{t(1-t)}{n} \\
&\leq \frac{M}{n\delta^2}\ ,\ M = \max_{[0,1]} |\gamma|.
\end{aligned}$$

Donc $|\gamma(t) - P_{n,\gamma}(t)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{M}{n\delta^2}$. Si n est assez rand ceci est $\leq \varepsilon$, cqfd.

2) On peut aussi plus simplement approximer γ par des chemins polygonaux (ou affines par morceaux). Il suffit de poser $\gamma_n(t) = (k+1-nt)\gamma(\frac{k}{n}) + (nt-k)\gamma(\frac{k+1}{n})$ sur $I_{n,k} = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$. Si $\varepsilon > 0$ est donné, par continuité uniforme, pour n assez grand on a $(\forall t)$ $|\gamma(t) - \gamma(\frac{k}{n})|, \big|\gamma(t) - \gamma(\frac{k+1}{n})\big| \leq \varepsilon$. Donc

$$\begin{aligned}
\max_{[0,1]} |\gamma - \gamma_n| &\leq \max_{0 \leq k < n} \Big((k+1-nt)\big|\gamma(t) - \gamma(\frac{k}{n})\big| + (nt-k)\big|\gamma(t) - \gamma(\frac{k+1}{n})\big|\Big) \\
&\leq \max_{0 \leq k < n} \big((k+1-nt) + (nt-k)\big)\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Définition. Si $\gamma : [a,b] \to U$ est un chemin à valeurs dans un ouvert U et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue, *l'intégrale de f le long de γ* est $\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.

Remarque. Bien sûr, on peut (si z a déjà un autre sens) utiliser une autre lettre muette dans l'intégrale : $\int_\gamma f(x)dx, \int_\gamma f(t)dt \cdots$ On prend souvent ζ à cause de sa ressemblance avec z.

Cas particuliers. 1) Si z_0, z_1 sont deux points de $\mathbb{C}$ et si f est définie et continue au voisinage du segment $[z_0, z_1]$, on note $\int_{[z_0,z_1]} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$ où $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$.

2) Si $z_0 \in \mathbb{C}, r \in]0, +\infty[$ et si f est définie et continue au voisinage de $\partial\Delta(z_0, r)$, on note $\int_{\partial\Delta(z_0,r)} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$ où $\gamma(t) = z_0 + re^{i\theta}$ sur $[0, 2\pi]$, soit

$$\int_{\partial\Delta(z_0,r)} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta.$$

L'intégrale d'une fonction le long d'un chemin se décrit en termes d'intégrales curvilignes de formes différentielles. En effet, écrivant $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ et $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ on a

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b \big(u(\gamma(t))x'(t) - v(\gamma(t))y'(t) + i(v(\gamma(t))x'(t) + u(\gamma(t))y'(t)\big)dt \\
&= \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy.
\end{aligned}$$

On a donc la

Propriété 1. *L'intégrale de f le long d'un chemin est invariante au signe près par reparamétrage : si $\gamma \circ \varphi$ est un reparamétrage de γ, on a $\int_\gamma f(z)dz = \mathrm{sgn}(\varphi') \int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz$. En particulier, elle est invariante par reparamétrage direct.*

Propriété 2 (évidente). *On a $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \max_\gamma |f|.\mathrm{long}(\gamma)$, où $\mathrm{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$ est la longueur de γ.*

Propriété 3. *Soit f holomorphe de classe C^1 sur U, c'est-à-dire $\mathbb{C}$-dérivable avec f' continue. Si γ est un chemin de z_0 à z_1 dans U, on a $\int_\gamma f'(z)dz = f(z_1) - f(z_0)$. En particulier, $\int_\gamma f'(z)dz = 0$ si γ est un lacet.*

Corollaire. *Si f est holomorphe de classe C^1 sur un ouvert contenant un domaine compact Ω, on a $\int_{\partial\Omega} f'(z)dz = 0$.*

Démonstration. Cela résulte de la formule de dérivation de $f \circ \gamma$:

$$(f\circ\gamma)'(t) = Df(\gamma(t)).\gamma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Donc

$$\int_\gamma f'(z)dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma(t))dt = \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)dt = \Big[f\circ\gamma(t)\Big]_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Par contre, la fonction $\dfrac{1}{z-z_0}$ est localement une dérivée, sa primitive étant $\log(z - z_0)$, mais elle n'est une dérivée sur aucun disque épointé $\Delta(z_0, r)$, car cette primitive varie de $2\pi i$ quand on fait un tour du bord dans le sens trigonométrique :

Propriété 4. *On a $\int_{\partial\Delta(z_0,r)} \dfrac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$, soit $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(z_0,r)} \dfrac{dz}{z-z_0} = 1$.*

Démonstration. On calcule

$$\int_{\partial\Delta(z_0,r)} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta = \int_0^{2\pi} id\theta = 2\pi i.$$

3.2 Intégrale sur le bord d'un domaine compact

Définitions. Un *domaine compact* est un compact non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui est l'adhérence de son intérieur, et dont la frontière est une réunion finie de courbes fermées disjointes $C_1, \cdots, C_k$. Cette frontière, appelée *bord* et notée $\partial\Omega$, est orientée de sorte que $\mathrm{Int}(\Omega)$ est à gauche quand on la parcourt dans le sens positif.

L'orientation du bord permet de définir l'intégrale d'une fonction continue sur Ω : $\int_{\partial\Omega} f(z)dz = \sum_{i=1}^k \int_{C_i} f(z)dz$, où les intégrales de droite se calculent via des paramétrages directs des C_i.

Composantes connexes d'un domaine et de son complémentaire. Nous utiliserons, mais ne démontrerons pas, les énoncés suivants, que l'on peut considérer comme des exercices de Topologie :

- Si Ω est un domaine compact, ses composantes connexes sont ses composantes connexes par arcs, et sont aussi des domaines compacts. Elles sont en nombre fini.

- Si Ω est un domaine compact connexe, son complémentaire comprend une composante connexe non bornée, dite *extérieure*, et n (peut-être 0) composantes connexes bornées. Chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ a pour frontière une composante connexe de $\partial\Omega$, et l'adhérence de chaque composante bornée est un domaine compact.

Exemple : disque à n trous. Un *disque à n trous (ronds)* est un domaine de la forme $\Omega = \overline{\Delta}(z_0, r) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \Delta(z_i, r)$, avec $r_i < |z_i - z_0|$, $i \geq 1$ et $r_i + r_j < |z_i - z_j|$, $i, j \geq 1$.

Remarque. On peut montrer (mais ce n'est pas facile) que tout domaine compact connexe est homéomorphe à un disque à n trous par un homéomorphisme de $\mathbb{C}$ tout entier, et par un C^∞-difféomorphisme si les bords sont de classe C^∞. Et aussi (c'est un peu plus facile) que deux disques à n trous sont homéomorphes via un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{C}$ tout entier.

Notation algébrique du bord orienté. Si Ω est un domaine compact connexe de bord $\partial\Omega = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$ où C_0 est la composante extérieure, on oriente chaque composante comme le bord du domaine compact qu'elle borde. Alors $\partial\Omega = C_0 - (C_1 + \cdots + C_n)$, ce qui veut dire que pour toute fonction f continue sur $\partial\Omega$ on a $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz - \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(z)dz$.

3.3 Formule intégrale de Cauchy

Le théorème suivant et la formule $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(z_0,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1$ (propriété 4)) sont à l'origine de toute la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Théorème. *Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert contenant un domaine compact Ω, on a* $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 0$.

Démonstration. (cf. [Goursat 1884-1900]) 1) Traitons d'abord le cas le plus simple où Ω est un rectangle $R_0 = [a, b] \times [c, d]$, ce qui permettra de mieux voir l'idée essentielle.

Fixons $\varepsilon > 0$. Il suffit de montrer que $\displaystyle\Big|\int_{\partial\Omega} f(z)dz\Big| \leq C\varepsilon$ pour une constante indépendante de ε. Pour $n \in \mathbb{N}$, on découpe Ω en 4 sous-rectangles $R_{1,k}, k = 1, 2, 3, 4$, de côtés $\frac{1}{2}(b - a)$ et $\frac{1}{2}(d - c)$. Puisque les intégrales sur les parties intérieures des bords se compensent, on a $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f(z)dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial R_{1,k}} f(z)dz$. Donc il existe un rectangle $R_1 = R_{1,k}$ tel que $\displaystyle\Big|\int_{\partial R_1} f(z)dz\Big| \geq \frac{1}{4}\Big|\int_{\partial\Omega} f(z)dz\Big|$. En itérant ce procédé, on trouve une suite $(R_n), n \in \mathbb{N}$ de rectangles emboîtés de côtés $2^{-n}(b - a)$ et $2^{-n}(d - c)$, telle que

$$(*) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \ \Big|\int_{\partial R_n} f(z)dz\Big| \geq 4^{-n}\Big|\int_{\partial\Omega} f(z)dz\Big|.$$

L'intersection des R_n est un point z_0, et puisque f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, on a $|f(z) - (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0|$ sur R_n pour n assez grand, d'où

$$\Big|\int_{\partial R_n} f(z)dz - \int_{\partial R_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))dz\Big| \leq \varepsilon|z - z_0|.\text{long } \partial R_n \leq \varepsilon\text{diam } R_n.\text{long } \partial R_n.$$

Or $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ est la dérivée de $z \mapsto f(z_0)z + \frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2$. Donc son intégrale sur ∂R_n est nulle par la propriété 3, et il reste

$$\Big|\int_{\partial R_n} f(z)dz\Big| \leq \varepsilon\text{diam } R_n.\text{long } \partial R_n = \varepsilon\sqrt{2}.2^{-n}(b - a).2^{-n}(d - c) = 4^{-n}C\varepsilon.$$

En comparant avec $(*)$, il vient $\left|\int_{\partial\Omega} f(z)dz\right| \leq C\varepsilon$, cqfd.

2) Traitons maintenant le cas général. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous allons découper Ω par des verticales $x = x_n + 2^{-n}p$ et des horizontales $y = y_n + 2^{-n}q$, p et q entiers. Nous admettrons qu'on peut trouver (x_n, y_n) tel qu'aucune de ces droites ne soit tangente à $\partial\Omega$: c'est clair pour tous les domaines que l'on rencontre dans la pratique, car le bord n'a qu'un nombre fini d'abscisses de points à tangente verticale et d'ordonnées de points à tangente horizontale.

*En général, cela résulte du lemme de Morse-Sard (en dimension un) : l'ensemble des valeurs critiques $E = f((f')^{-1}(\{0\}))$ d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est de mesure nulle (c'est-à-dire contenu pour tout ε dans une réunion au plus dénombrable d'intervalles de somme des longueurs $< \varepsilon$), et en particulier nulle part dense.

Preuve du lemme de Morse-Sard en dimension un : soit $\eta \in]0, \varepsilon/(b-a)[$. Alors $C_\eta = (f')^{-1}(]-\eta, \eta[)$ est ouvert dans $[a,b]$, donc une réunion finie ou dénombrable d'intervalles disjoints I_n, et l'image de chacun est un intervalle de longueur au plus $\eta\mathrm{long}(I_n)$ par l'inégalité des accroissements finis. Comme $E \subset f(C_\eta)$, E est contenu dans une réunion au plus dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs est au plus $\eta \sum \mathrm{long}(I_n) \leq \eta(b-a) < \varepsilon$.*

Le domaine Ω est alors découpé en sous-domaines Ω_k, tel que chaque Ω_k est

- soit un carré C_k de côté 2^{-n}
- soit contenu dans un tel carré C_k, avec $\partial\Omega_k \subset \partial C_k \cup (\partial\Omega \cap \Omega_k)$.

On a alors $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f(z)dz = \sum_k \int_{\partial\Omega_k} f(z)dz$, car $\partial\Omega = \bigcup_k (\partial\Omega \cap \Omega_k)$ et les contributions des $\partial\Omega_k \setminus \partial\Omega$, qui sont celles des $\partial\Omega \cap \partial C_k$, s'éliminent deux à deux.

Lemme. *Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une subdivision comme ci-dessus telle que de plus chaque Ω_k contient un point z_k tel que*

$$(*) \qquad (\forall z \in \Omega_k) \quad |f(z) - f(z_k) - f'(z)(z - z_k)| \leq \varepsilon |z - z_k|.$$

Preuve du lemme. Si ce n'est pas vrai, en prenant des subdivisions de plus en plus fines on trouve une suite de sous-domaines emboîtés $\Omega \supset \Omega_1 \supset \Omega_2 \cdots$ telle que $\mathrm{diam}(\Omega_k) \to 0$ et Ω_k ne contient aucun point z_k vérifiant $(*)$. L'intersection des Ω_k est un point $z_0 \in \Omega$. Puisque f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(\forall z \in \Delta(z_0, \delta)) \quad |f(z) - f(z_0) - f'(z)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|.$$

Pour k assez grand, $\Omega_k \subset \Delta(z_0, \delta)$, donc $z_k = z_0$ vérifie $(*)$, contradiction.

Fin de la preuve du théorème. Fixons $\varepsilon > 0$, et soit (Ω_k) une subdivision vérifiant $(*)$, le côté des carrés C_k étant 2^{-n} avec $n \geq 1$. Par la propriété 2, on a donc

$$\left|\int_{\partial\Omega_k} f(z)dz - \int_{\partial\Omega_k} (f(z_k) + f'(z_k)(z - z_k))dz\right| \leq \varepsilon|z - z_k|.\mathrm{long}\ \partial\Omega_k \leq \varepsilon \mathrm{diam}\ \Omega_k.\mathrm{long}\ \partial\Omega_k.$$

Comme en 1), $\displaystyle\int_{\partial\Omega_k} (f(z_k) + f'(z_k)(z - z_k))dz = 0$ est nulle, et il reste

$$\left|\int_{\partial\Omega_k} f(z)dz\right| \leq \varepsilon \mathrm{diam}\Omega_k.\mathrm{long}\ \partial\Omega_k.$$

On a $\mathrm{diam}\ \Omega_k \leq \mathrm{diam}\ C_k = 2^{-n}\sqrt{2}$, $\mathrm{long}\ \partial C_k = 4.2^{-n}$, $\mathrm{aire}\ C_k = 4^{-n}$. Et, puisque $\partial\Omega_k \subset \partial C_k \cup (\partial\Omega \cap \Omega_k)$:

$$\mathrm{long}\ \partial\Omega_k \leq \mathrm{long}\ \partial C_k + \mathrm{long}(\partial\Omega \cap \Omega_k) = 4.2^{-n} + \mathrm{long}(\partial\Omega \cap C_k).$$

Donc (puisque $n \geq 1$)

$$\text{diam } \Omega_k.\text{long } \partial\Omega_k \leq 2^{-n}\sqrt{2}\Big(4.2^{-n} + \text{long}(\partial\Omega \cap C_k)\Big) \leq 8.\text{aire } C_k + \text{long}(\partial\Omega \cap \Omega_k).$$

Puisque $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f(z)dz = \sum_k \int_{\partial\Omega_k} f(z)dz$, il vient

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\partial\Omega} f(z)dz\Big| &\leq \sum_k \Big|\int_{\partial\Omega_k} f(z)dz\Big| \leq \varepsilon\Big(8\sum_k \text{aire } C_k + \sum_k \text{long}(\partial\Omega \cap \Omega_k)\Big) \\ &\leq \varepsilon(8.\text{aire } \widetilde{\Omega} + \text{long } \partial\Omega), \end{aligned}$$

où $\widetilde{\Omega}$ est le 1-voisinage de Ω pour la distance $\max(|x-x'|, |y-y'|)$. Puisque ε est arbitrairement petit, $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 0$, cqfd.

Remarques. 1) On peut donner une autre preuve de la formule de Cauchy pour une fonction holomorphe de classe C^1, en utilisant la «boîte noire» suivante :

Formule de Green-Riemann. On suppose que $p(x,y), q(x,y)$ sont de classe C^1 sur un ouvert contenant un domaine compact Ω. Alors

$$\int_{\partial\Omega} p(x,y)dx + q(x,y)dy = \iint_{\Omega} \Big(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\Big)(x,y)dxdy.$$

Pour une démonstration, voir [Cartan].

Écrivant $f = u + iv$, il s'agit de montrer que les intégrales réelles $\displaystyle\int_{\partial\Omega} udx - vdy$ et $\displaystyle\int_{\partial\Omega} vdx + udy$ sont nulles. . Puisque u et v sont de classe C^1, on peut appliquer Green-Riemann :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} udx - vdy &= \iint_{\Omega} \Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)dxdy = 0 \\ \int_{\partial\Omega} vdx + udy &= \iint_{\Omega} \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dxdy = 0. \end{aligned}$$

Par les équations de Cauchy-Riemann, les seconds membres sont nuls, cqfd.

On verra que toute fonction holomorphe est de classe C^1, mais ceci utilise la représentation intégrale de Cauchy, qui repose elle-même sur la formule de Cauchy !

2) Une autre façon de prouver la formule de Cauchy est de traiter d'abord le cas d'un rectangle (ou d'un triangle) comme nous l'avons fait. On en déduit que toute fonction holomorphe est localement une dérivée (cf. 2.6). De plus, ceci reste vrai (avec un peu plus de travail) si la fonction est continue et holomorphe sauf en un point. On peut alors l'appliquer à la fonction $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ pour obtenir la formule de Cauchy pour un domaine à bord connexe contenu dans un ouvert étoilé où f est holomorphe. Pour le cas général, on prouve d'abord une forme plus générale de la formule de Cauchy, utilisant la notion d'indice d'un lacet par rapport à un point (ou d'un point par rapport à un lacet) : oir le chapitre 8.

Affaiblissement de l'hypothèse. *La formule de Cauchy reste valable sous l'hypothèse plus faible que f est continue sur Ω et holomorphe dans* $\text{Int}(\Omega)$.

Esquisse de preuve. Nous admettrons qu'il existe une suite croissante de domaines $\Omega_n \subset \text{Int } \Omega$ telle que $\displaystyle\int_{\partial\Omega_n} f(z)dz \to \int_{\partial\Omega} f(z)dz$ pour toute fonction f continue sur Ω. Il suffit pour cela que $\partial\Omega_n$ tende vers $\partial\Omega$ au sens C^0 et $\text{long}(\partial\Omega_n)$ reste bornée. Par exemple, si Ω est étoilé par rapport à 0, $\Omega_n = (1 - 2^{-n})\Omega$ convient. Et en général, on peut prendre pour Ω_n la réunion des carrés de côté 2^{-n}, à sommets dans $2^{-n}\mathbb{Z}^2$, qui sont entièrement contenus dans Ω, plus deux petits triangles rectangles en chaque sommet z de cette réunion qui est seulement sur deux carrés ne se rencontrant qu'en z.

Si f est continue sur Ω et holomorphe dans $\mathrm{Int}(\Omega)$, on applique la formule de Cauchy à $\partial\Omega_n$ et l'on passe à la limite, d'où le résultat.

Exercice. Soit $\gamma_n : [a,b] \to U$ une suite de chemins qui converge uniformément vers un chemin γ, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ continue.

1) Donner un exemple où $\displaystyle\int_{\gamma_n} f(z)dz \not\to \int_\gamma f(z)dz$.

2) Si de plus $\mathrm{long}(\gamma_n)$ reste bornée, montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_n} f(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz$.

3) (à faire après avoir vu ce chapitre) Si f est holomorphe, montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_n} f(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz$. Plus généralement, montrer que si γ_n converge uniformément vers γ qui n'est que continu, la suite $\displaystyle(\int_{\gamma_n} f(z)dz))_n$ converge vers $I(f,\gamma)$ qui ne dépend que de f et de γ (pas de la suite (γ_n)).

3.4 Représentation intégrale de Cauchy

Théorème. *Soit f une fonction continue sur un domaine compact Ω et holomorphe dans* $\mathrm{Int}(\Omega)$*. Alors*

$$(\forall z \in \mathrm{Int}(\Omega)) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le disque $\overline{\Delta}(z,\varepsilon)$ est contenu dans $\mathrm{Int}(\Omega)$ et $\Omega_\varepsilon = \Omega\backslash\Delta(z,\varepsilon)$ est un domaine compact dont le bord orienté est $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega - \partial\Delta(z_0,\varepsilon)$. La fonction $g(\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est continue sur Ω_ε et holomorphe sur $\mathrm{Int}(\Omega_\varepsilon)$, donc $\displaystyle\int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(\zeta)d\zeta = 0$. Autrement dit :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Le second membre vaut (cf. la propriété 4) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\varepsilon e^{i\theta})d\theta$. Quand $\varepsilon \to 0$, $f(z+\varepsilon e^{i\theta}) \to f(z)$ uniformément, donc ceci tend vers $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)d\theta = f(z)$, cqfd.

3.5 Analyticité des fonctions holomorphes

Définition. Soit U une région. Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est *analytique* sur U si pour tout point $z_0 \in U$ il existe un disque ouvert $\Delta(z_0,r) \subset U$ tel que $f(z)$ s'écrit comme une série entière en $z - z_0$ convergente sur $\Delta(z_0,r)$: $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Ou de façon équivalente $\displaystyle f(z_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$ pour tout $h \in \Delta(0,r)$.

Propriétés. *1) Si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge en un point $z_1 \neq z_0$, elle converge absolument et uniformément sur $\Delta(z_0,r)$ pour tout $r < |z_1 - z_0|$. Donc il y a un disque ouvert maximal de convergence $\Delta(z_0,\rho)$ (avec éventuellement $\rho = 0$ ou $\rho = \infty$), et la série converge absolument et uniformément sur $\overline{\Delta}(z_0,r)$ pour tout $r < \rho$.*

2) Si $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, convergente sur $\Delta(z_0,r)$, elle est analytique et holomorphe sur $\Delta(z_0,r)$. Sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme : $\displaystyle f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$, convergente *sur $\Delta(z_0, r)$. Donc f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable. En particulier, toute fonction analytique est holomorphe.*

3) Sous l'hypothèse 2), on a $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$: la série entière est la série de Taylor de f en z_0. En particulier, la série entière en z_0 est uniquement déterminée par f au voisinage de z_0.

Démonstration. 1) La suite $a_n(z_1 - z_0)^n$ tend vers 0 donc est bornée : $|a_n.(z - z_0)^n| \leq C$. Donc si $|z - z_0| < |r| < |z_1 - z_0|$, on a

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(z - z_1)^n|.\Big(\frac{|z - z_0|}{|z - z_1|}\Big)^n \leq C\Big(\frac{r}{|z - z_1|}\Big)^n,$$

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ est majorée par une série géométrique convergente, donc elle converge absolument et uniformément sur $\Delta(z_0, r)$.

2) Fixons $z \in \Delta(z_0, r)$. Si $|z - z_0| + |h| < r$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|z - z_0| + |h|)^n$ converge, donc quand on développe les termes $((z - z_0) + h)^n$ dans $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n((z - z_0) + h)^n$, on peut les réarranger librement. Donc

$$\begin{aligned} f(z + h) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (z - z_0)^{n-p} + h^p = \sum_{p=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p} a_n(z - z_0)^{n-p} \Big) h^p \\ &= f(z) + \sum_{p=1}^{\infty} s_p(z)h^p \ , \ s_p(z) = \sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p} a_n(z - z_0)^{n-p}. \end{aligned}$$

Donc $f(z + h)$ est la somme d'une série entière en h, donc f est analytique sur $\Delta(z_0, r)$. De plus, la série $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} s_p(z)h^{p-1}$ converge sur $\Delta(0, r - |z|)$, donc représente une fonction continue en 0. Donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en z, avec $f'(z) = s_1(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$. Ceci prouve 1).

2) Par récurrence, $f^{(k)}(z) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} n(n - 1)\cdots(n - k + 1)a_n(z - z_0)^{n-k}$, donc $f^{(k)}(z_0) = k!a_k$ soit $a_k = \dfrac{f^{k)}(z_0)}{k!}$.

Le théorème suivant montre la dfiférence énorme qui existe entre la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

Théorème. *Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert $\Delta(z_0, r)$.*

1) La fonction f est la somme d'une série entière en $z - z_0$ convergente sur $\Delta(z_0, r)$.

2) Si de plus f est continue sur le disque fermé $\overline{\Delta}(z_0, r)$, le coefficient de $(z - z_0)^n$ est

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(z_0,r)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-n-1}d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})r^{-n}e^{-in\theta}d\theta.$$

Corollaires. *1) Une fonction holomorphe est la même chose qu'une fonction analytique.*

2) Toute fonction holomorphe est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable, et ses dérivées sont holomorphes.

Preuve du théorème. Par unicité de la série entière, il suffit de prouver 2). Soit $z \in \Delta(z_0, r)$. Puisque $|(\zeta - z_0)^{-1}(z - z_0)| < 1$ sur $\partial\Delta(z_0, r)$, on peut développer en série

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = (\zeta - z_0)^{-1} \frac{1}{1 - (\zeta - z_0)^{-1}(z - z_0)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - z_0)^{-n-1}(z - z_0)^n.\end{aligned}$$

Substituant dans la représentation intégrale de Cauchy, qui a lieu puisque $\overline{\Delta}(z_0, r) \subset U$, il vient

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(z_0,r)} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-n-1}(z - z_0)^n\Big) d\zeta.$$

Puisque la série $\sum_{n=0}^{\infty} |f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-n-1}(z - z_0)^n|$ converge uniformément pour $\zeta \in \partial\Delta(z_0, r)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour échanger série et intégrale :

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial\Delta(z_0,r)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-n-1}(z - z_0)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \Big(\int_{\partial\Delta(z_0,r)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-n-1} d\zeta\Big)(z - z_0)^n.\end{aligned}$$

Ceci prouve 1) et 2).

Remarque. La deuxième forme pour a_n équivaut à dire que $a_n r^n$ est le n-ième coefficient de Fourier de $\theta \mapsto f(z_0 + re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$.

Exemples. Considérons les branches principales de $\log(1 + z)$ et de $(1 + z)^\alpha$, qui sont définies sur le disque maximal $\Delta(0, 1) = \Delta$. Les dérivées successives sont données par

$$\begin{aligned}\log(1 + z)^{(n)} &= \Big(-\frac{1}{1 + z}\Big)^{(n-1)} = \frac{(-1)^n(n - 1)!}{(1 + z)^n} \quad (\forall n \geq 1) \\ ((1 + z)^\alpha)^{(n)} &= \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)(1 + z)^{\alpha - n}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\log(1 + z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n(n - 1)! = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n \\ (1 + z)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n,\end{aligned}$$

où $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}$, coefficient binômial de Newton.

3.6 Réciproque de la représentation de Cauchy

Théorème. *Soit f une fonction continue sur une région U telle que pour tout $z_0 \in U$ il existe un disque fermé $\overline{\Delta}(z_0, r) \subset U$ tel que $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ sur $\Delta(z_0, r)$. Alors $f \in \mathcal{O}(U)$.*

Démonstration. La preuve de l'analyticité de la section précédente montre que f est analytique. Donc f est holomorphe.

3.7 Caractérisation des fonctions holomorphes par la formule de Cauchy (théorème de Morera)

Théorème. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ continue et vérifiant $\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 0$ pour tout domaine compact $\Omega \subset U$, ou même seulement pour tout triangle $T \subset U$. Alors f est holomorphe.*

Démonstration. Supposons que $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ pour tout triangle $T \subset U$. On se convainc aisément que ceci est équivalent à la «formule de Chasles» $\int_{[a,c]} f(z)dz = \int_{[b,c]} f(z)dz + \int_{[b,c]} f(z)dz$ pour tous a, b, c dont l'enveloppe convexe $\text{conv}(a, b, c)$ est contenue dans U, même si a, b, c sont alignés ou ne définissent pas l'orientation du bord.

Si $z_0 \in U$, soit $\Delta(z_0, r)$ un disque contenu dans U. Si $z \in \Delta(z_0, r)$, on pose $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta$. Fixons $z \in \Delta(z_0, r)$. Si h est assez petit, on a $z + h \in \Delta(z_0, r)$ donc $\text{conv}(z_0, z, z + h) \subset \Delta(z_0, r)$. La formule de Chasles donne $F(z + h) = F(z) + \int_{[z,z+h]} f(z)dz$ Puisque f est continue, il vient $F(z + h) - F(z) = (f(z) + o(1))h$. Donc F est holomorphe et $F' = f$, donc f est holomorphe.

4 Zéros, principe du maximum, théorème de Liouville

4.1 Zéros des fonctions holomorphes, degré en un point

Définition. Si A est une partie de $\mathbb{C}$, un point $a \in A$ est *isolé* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Delta(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$, ou de façon équivalente s'il n'est pas la limite d'une suite de points de A distincts. Si A est formé de points isolés, A est *discrète.*

Propriétés. *1) Si A est discrète, elle est au plus dénombrable.*

2) Supposons $A \subset B$ et A relativement fermée dans B. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est discrète.

(ii) A rencontre tout compact de B suivant un ensemble fini.

3) Si U est une région et $D \subset U$ est discret et fermé dans U, $U \setminus D$ est encore une région.

Démonstration. 1) Pour $a \in A$, posons $\varepsilon_a = \frac{1}{2} d(a, A \setminus \{a\})$. L'hypothèse dit que $\varepsilon_a > 0$. Les disques $\Delta(a, \varepsilon_a)$ sont disjoints et chacun ne rencontre A qu'en un point. Comme chacun contient un point de $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}i$ qui est dénombrable, ils sont en nombre au plus dénombrable, donc A aussi.

2) Si (i) est vrai et K est un compact de B, tout $a \in A$ admet un ouvert U_a tel que $U_a \cap A = \{a\}$. De plus, $A \cap K = \overline{A} \cap K$ est fermé donc compact, donc le recouvrement ouvert $(U_a), a \in A$ de $A \cap K$ admet un sous-recouvrement fini $(U_{a_i}), i = 1, \cdots, n$. Donc $A \cap K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{a_i} \cap K) = \{a_1, \cdots, a_n\}$.

Si (ii) est vrai et $a \in A$, a est isolé, sinon il serait limite d'une suite (a_n) de points de A distincts, or $K = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est compact et contenu dans A donc dans B. (Ici on n'utilise pas le fait que A est fermée dans B).

3) Soient z, z' deux points de $U \setminus D$. Il existe un chemin polygonal $\gamma : [0, 1] \to U$ de z à z'. Ce chemin est d'image compacte, donc rencontre au plus un nombre fini de points $z_1, \cdots, z_n$ de D. Soit $r > 0$ assez petit pour que les disques $\overline{\Delta}(z_i, r)$ soient disjoints et ne contiennent ni z ni z', ni aucun point de $D \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$. Pour tout $i = 1, \cdots, n$, l'ensemble $\gamma^{-1}(\Delta(z_i, r))$ est une réunion finie d'intervalles ouverts $I_{j,k}$, et les $I_{j,k}$ sont tous disjoints. On remplace γ sur chaque $I_{,k}$ par un arc du cercle $\partial\Delta(z_i, r)$ ayant les mêmes extrémités, obtenant ainsi un chemin de z à z' dans $U \setminus D$.

Remarque. Cet argument est valable dans un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$ puisque la sphère de dimension $n - 1$ est connexe par arcs. Mais le résultat est évidemment faux dans $\mathbb{R}$.

Théorème des zéros isolés. *Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur une région U.*

1) Les zéros de f sont isolés. De façon équivalente, puisque $f^{-1}(\{0\})$ est fermé dans U : $f^{-1}(\{0\})$ n'a qu'un nombre fini de points dans chaque compact de U.

2) Pour tout $z_0 \in U$ il existe un unique couple $(d, g) \in \mathbb{N} \times \mathcal{O}(U)$ tel que $f = (z - z_0)^d g$ avec $g(z_0) \neq 0$. On appelle d le degré *de f en z_0, et on le note $\deg_{z_0}(f)$. On étend la définition en posant $\deg_{z_0}(f) = +\infty$ si f s'annule au voisinage de* 0. **Dans le cours oral,** $\deg_{z_0}(f)$ **n'a été défini que si** $f(z_0) = 0$**. Si** $f(z_0) \neq 0$**,** $\deg_{z_0}(f) = 0$**.**

3) On a $\deg_{z_0}(f) = 0$ si et seulement si $f(z_0) \neq 0$, et $\deg_{z_0}(f) = 1$ si et seulement si $f'(z_0) \neq 0$.

Corollaire. *1) Si f, g sont holomorphes sur U et coïncident sur un ensemble ayant un point non isolé, elles sont égales. C'est en particulier vrai si elles coïncident sur un ouvert non vide.*

2) L'anneau $\mathcal{O}(U)$ est intègre.

Preuve du théorème. Notons que 2)⇒1) puisque g est continue donc ne s'annule pas sur un disque $\Delta(z_0, r)$: donc $f = z - z_0)^d g$ ne s'annule pas sur le disque épointé $\Delta^*(z_0, r)$.

Prouvons 2). Considérons la série de Taylor $s_{z_0}(z - z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Notons que z_0 est un zéro si et seulement si $a_0 = 0$.

Supposons d'abord que cette série n'est pas identiquement nulle. Soit d le plus petit entier ≥ 1 tel que $a_d \neq 0$. Soit $r > 0$ tel que $\Delta(z_0, r) \subset U$, donc s_{z_0} converge sur $\Delta(z_0, U)$. Alors la fonction

$$g(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=d}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-d} \text{ sur } \Delta(z_0, r) \\ \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^d} \text{ sur } U \setminus \{z_0\} \end{cases}$$

est bien définie et holomorphe sur U. Elle est non nulle en z_0 et $f = (z - z_0)^d g$. Enfin, g est déterminé par f et d, et d est clairement unique, donc (d, g) est unique. Explicitement : d est le plus petit entier tel que $a_d \neq 0$, soit $f^{(d)}(z_0) \neq 0$.

Si au contraire $s_{z_0} = 0$, f est nulle sur un voisinage de z_0. Nous allons montrer que ceci est impossible. Définissons la fonction $h : U \to \{0, 1\}$ par

$$h(z) = \begin{cases} 0 \text{ si } f \text{ est identiquement nulle sur un voisinage de } z \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est localement constante. En effet, si $h(z) = 1$, f est identiquement nulle sur un disque $\Delta(z, r)$, et $h = 0$ sur $\Delta(z, r)$. Et si $h(z) = 1$, f ne s'annule pas sur un disque épointé $\Delta^*(z, r)$, donc $h = 1$ sur $\Delta(z_0, r)$. De plus, $h(z_0) = 1$, et comme par hypothèse f n'est pas identiquement nulle, h prend la valeur 1. Puisque U est connexe par arcs, ceci contredit le théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

3) est immédiat par la définition du degré.

Preuve du corollaire. 1) On applique le théorème à $f - g$.

2) Soient $f, g \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$. Alors $f^{-1}(\{0\}) \cup g^{-1}(\{0\})$ est la réunion de deux parties discrètes de U, donc est discrète : si $z_0 \in U$, il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que $\Delta(z_0, r_1) \cap f^{-1}(\{0\}) = \{z_0\} = \Delta(z_0, r_2) \cap g^{-1}(\{0\})$, donc $\big(f^{-1}(\{0\}) \cup g^{-1}(\{0\})\big) \cap U = \{z_0\}$. Donc $f^{-1}(\{0\}) \cup g^{-1}(\{0\}) \neq U$, soit $fg \neq 0$.

Autre nom. On appelle aussi $\deg_z(f)$ *multiplicité* de z comme zéro de f, on le note alors $\mathrm{mult}_{z_0}(f)$. Si f est un polynôme, on retrouve la définition habituelle. («degré» est lié à un point de vue topologique, «multiplicité» à un point de vue algébrique.) En particulier, un point z_0 tel que $f'(z_0) \neq 0$ est un *zéro simple* de $f - f(z_0)$.

Remarque. Si $\deg_z(f) = d$ et $f = (z - z_0)^d g$ avec g holomorphe en z_0, on a $g(z_0) = \dfrac{f^{(d)}(z_0)}{d!}$ d'après la formule de Taylor.

4.2 Prolongement analytique

Définition. Si f est une fonction holomorphe sur une région U et si V est une région contenant U, un *prolongement analytique* de f sur V est une fonction holomorphe sur V qui coïncide avec f sur U. Par isolation des zéros, un tel prolongement est unique s'il existe.

Une façon de trouver un tel prolongement est de considérer le disque de convergence $\Delta(z_0, r)$ de la série de Taylor $s_{z_0}(z - z_0)$ de f en $z_0 \in U$: s'il n'est pas contenu dans U, on peut prolonger analytiquement f à $U \cup \Delta(z_0, r)$ en posant $f(z) = s_{z_0}(z - z_0)$ sur $\Delta(z_0, r) \setminus U$.

En principe, on peut trouver n'importe quel prolongement analytique en itérant ce procédé.

Si l'on part d'une fonction $f \in \mathcal{O}(U)$ et que l'on considère tous ses prolongements analytiques possibles (ou, ce qui est plus agréable, tous ses prolongements méromorphes à un ouvert de $\overline{\mathbb{C}}$ possible, définis de façon analogue), il y a deux possibilités :

• On trouve un prolongement holomorphe maximal $(\widetilde{U} \subset \mathbb{C}, \widetilde{f})$ [ou un prolongement méromorphe maximal $(\widetilde{U} \subset \overline{\mathbb{C}}, \widetilde{f})$], nécessairement unique.

• Il existe deux prolongements (V_1, f_1) et (V_2, f_2) et un point $z_1 \in V_1 \cap V_2$ tel que $f_1(z_1) \neq f_1(z_2)$. Par exemple, si $(U, f) = (\Delta(1,1), \log)$ (branche principale), on peut prendre $V_1 = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-)$, $V_2 = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$ et $z_1 \in \mathbb{R}_-^*$: on a $f_1(z) = \log|z| + \pi i$, $f_2(z) = \log|z| - \pi i$.

Dans ce second cas, pour décrire le «prolongement maximal» il faut introduire la notion de *surface de Riemann d'une fonction holomorphe*. Par exemple, la surface de Riemann du logarithme est $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z = e^w\}$ muni de la projection $(z, w) \mapsto z$. On peut la voir comme le graphe de la *fonction multivoque* log.

De même, si $P(z, w)$ est un polynôme irréductible de deux variables complexes, la surface de Riemann de la fonction implicite $P(z, w) = 0$ est la courbe algébrique $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : P(z, w) = 0\}$ munie de la projection $(z, w) \mapsto z$. On peut de même la voir comme le graphe d'une fonction multivoque (avec cette fois un nombre fini de valeurs).

*Dans ce dernier cas, il est plus joli de considérer la courbe algébrique dans le plan projectif complexe $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\})/\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{C})_\infty$ analogue de la sphère de Riemann : on rajoute les points à l'infini, ou directions à l'infini. L'avantage est que cette courbe est compacte. Un théorème de Riemann affirme la réciproque : *si la surface de Riemann (convenablement définie) d'une fonction holomorphe est compacte, celle-ci est algébrique.**

Exercice 1. Si $U = \Delta$ et $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$, montrer que $\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta}) = +\infty$ pour tout $\theta \in \pi\mathbb{Q}$. En déduire que f n'a aucun prolongement analytique strict. On dit que $\partial\Delta$ est une *frontière naturelle* pour f.

Exercice 2. 1) Soit $f \in \mathcal{O}(\Delta(z_0, r))$ telle que pour tout $z_0 \in \partial\Delta$ il existe un prolongement analytique à $\Delta \cup V$ où V est un voisinage de z_0. Alors f a un prolongement holomorphe à $\Delta(0, 1 + \varepsilon)$.

2) En déduire que si la série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence ρ non nul et fini, sa somme f a un point z_1 sur le cercle de convergence tel que f ne s'étend analytiquement à $\Delta \cup V$ pour aucun voisinage V de z_1.

3) Trouver f comme dans 2) telle que $f^{(n)}$ s'étend continûment à $\overline{\delta}$ pour tout n. Remarque : ceci implique que f s'étend en une fonction C^∞ sur $\mathbb{C}$.

4.3 Principe du maximum

Théorème. *Si f est holomorphe sur U et $|f|$ a un maximum local en un point $z_0 \in U$, f est constante sur U.*

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $\overline{\Delta}(z_0, r) \subset U$. La représentation de Cauchy implique

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Donc

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \Big| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \Big| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \max_{z \in \partial\Delta(z_0,r)} |f|.$$

Donc $|f(z_0)| \leq \max_{z \in \partial\Delta(z_0,r)} |f|$. Puisque z_0 est un maximum local, on a égalité pour r assez petit, ce qui force f à être constante sur $\partial\Delta(z_0, r)$: en effet, l'égalité à droite dit que $|f|$ est constante sur $\partial\Delta(z_0, r)$, et celle au milieu dit que l'argument de f est aussi constant. D'après le théorème des zéros isolés, f est constante sur U, cqfd.

Autre preuve. Soit $\sum a_n(z - z_0)^n$ la série de Taylor de f en z_0. Si $a_0 = 0$, alors $f \equiv 0$. Supposons $a_0 \neq 0$ et f non constante, nous allons aboutir à une contradiction. Puisque $f - a_0$ n'est pas identiquement nulle, il existe $d > 0$ tel que $a_d \neq 0$ et $a_n = 0$ si $0 < n < d$. Donc

$$f(z) = a_0 + a_d(z - z_0)^d(1 + o(1)) = a_0\big(1 + \frac{a_d}{a_0}(z - z_0)^d(1 + o(1))\big) \ , \ z \to z_0.$$

Soit α une racine d-ième de $\frac{a_0}{a_d}$, et posons $z_\varepsilon = z_0 + \varepsilon\alpha$, $\varepsilon > 0$. Quand $\varepsilon \to 0$, on a $f(z_\varepsilon) = a_0(1 + \varepsilon^d(1 + o(1)))$, donc pour ε assez petit il vient

$$|f(z_\varepsilon)| \geq |a_0||1 + \varepsilon^d/2| > |f(z_0)|,$$

contredisant l'hypothèse que $|f|$ a un maximum en z_0.

Exercice. Que peut-on dire d'un minimum local de $|f|$?

4.4 Théorème de Liouville

Définition. Une *fonction entière* est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, soit un élément de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$. D'après la représentation intégrale de Cauchy, c'est la même chose qu'une fonction développable en série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente sur $\mathbb{C}$.

Théorème. *Toute fonction entière bornée est constante.*

Démonstration. On sait que $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sur $\mathbb{C}$ tout entier. De plus, pour tout $r > 0$ on a

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(0,r)} f(z)z^{-n-1}dz\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})r^{-n}e^{-in\theta}d\theta\right| \leq Cr^{-n}.$$

Faisant tendre $r \to +\infty$, il vient $a_n = 0$ pour tout $n > 0$, cqfd.

Corollaire : preuve du théorème fondamental de l'algèbre. (**non faite oralement**) Si $P(z)$ est un polynôme non constant, il a un zéro car sinon $1/P(z)$ serait une fonction entière tendant vers 0 à l'infini et a fortiori bornée, donc serait constante ce qui contredit l'hypothèse.

5 Dérivées, intégrales, suites de fonctions holomorphes

5.1 Représentation intégrale des dérivées et holomorphie d'une intégrale à paramètre

Proposition. *Soit f continue sur un domaine compact Ω et holomorphe dans* $\mathrm{Int}(\Omega)$. *Alors on peut dériver la représentation de Cauchy sous le signe intégral :*

$$(\forall z \in \mathrm{Int}(\Omega)) \qquad f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Démonstration. On a

$$\Big|\frac{1}{\zeta-(z+h)} - \frac{1}{\zeta - z} - \frac{h}{(\zeta-z)^2}\Big| = \frac{|h|^2}{|(\zeta-z)^2(\zeta-(z+h))|} = O(|h|^2) = o(|h|),$$

uniformément pour $h \to 0$ et $z, z+h$ dans un compact K contenu dans $\mathrm{Int}(\Omega)$. Donc

$$\begin{aligned}\Big|f(z+h) - f(z) - \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}\Big).h\Big| &= \Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} f(\zeta)\Big(\frac{1}{\zeta-(z+h)} - \frac{1}{\zeta-z} - \frac{h}{(\zeta-z)^2}\Big)d\zeta\Big| \\ &= o(|h|),\end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est holomorphe et f' a l'expression voulue.

Théorème. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, , et $F = F(z,t) : [a,b] \times U \to \mathbb{C}$ une fonction continue en (z,t) et holomorphe en z. On pose $f(z) = \int_a^b F(z,t)dt$. Alors f est holomorphe. De plus, $\frac{\partial F}{\partial z}$ est continue en (z,t) et $f'(z)$ s'obtient en dérivant sous l'intégrale : $f'(z) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial z}(z,t)dt$.*

Démonstration. Soit $\overline{\Delta}(z_0,r)$ un disque fermé contenu dans U. Pour $z \in \Delta(z_0,r)$, remplaçons $F(.,t)$ par sa représentatuion de Cauchy dans la définition de $f(z)$:

$$f(z) = \int_a^b \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\partial\Delta(z_0,r)} \frac{F(\zeta,t)d\zeta}{\zeta - z}\Big)dt$$

Inversant des variables dans une intégrale double, il vient

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(z_0,r)}\Big(\int_a^b F(\zeta,t)dt\Big)\frac{d\zeta}{\zeta-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(z_0,r)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Donc f est analytique sur $\Delta(z_0,r)$, et donc holomorphe sur U. Par la proposition, on a $f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(z_0,r)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}$. Remplaçant $f(z)$ par sa définition et inversant les variables dans l'intégrale double, il vient

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(z_0,r)}\Big(\int_a^b F(\zeta,t)dt\Big)\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2} = \int_a^b\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(z_0,r)}\frac{F(t,\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}\Big)dt.$$

Puisque $F(.,t)$ est holomorphe, l'intégrande est égal à $\frac{\partial F}{\partial z}(z,t)$ par la proposition. On a donc bien $f'(z) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial z}(z,t)dt$, l'intégrande étant continu grâce à la représentation intégrale.

Remarque. La même preuve donne l'holomorphie de $f(z) = \int_X F(z,t)d\mu(t)$ où (X,μ) est un espace compact muni d'une mesure borélienne et $F : U \times X \to \mathbb{C}$ est continue en (z,t) et holomorphe en z. On a de même la formule $f'(z) = \int_X \frac{\partial F}{\partial z}(z,t)d\mu(t)$. En fait, il suffit que F soit mesurable en (z,t), localement bornée et holomorphe en z.

Corollaire. *On peut dériver indéfiniment la représentation de Cauchy sous le signe intégral :* $f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{k!f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta$.

Démonstration. Il suffit d'écrire $\partial\Omega$ comme réunion d'arcs C^1 plongés, disjoints sauf en leurs extrémités (on coupe les composantes aux points anguleux), d'où

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int_0^1 \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N} \frac{f(\gamma_k(t))}{\gamma_k(t) - z}\gamma'(t)dt = \int_0^1 F(z,t)dt,$$

où F vérifie les hypothèses du théorème. Donc on peut dériver un nombre arbitraire de fois sous l'intégrale :

$$f^{(k)}(z) = \int_0^1 \frac{\partial^k F}{\partial z^k}(z,t)dt = \int_0^1 \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N} \frac{k!f(\gamma_k(t))}{(\gamma_k(t) - z^{k+1}}\gamma'(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{k!f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

5.2 Estimée de Cauchy sur les dérivées

Proposition. *Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\Delta}(z,r)$. Alors*

$$\forall k \in \mathbb{N}) \qquad |f^{(k)}(z)| \le \frac{k!}{r^k}\max_{\partial\Delta(z,r)} |f|.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(z)| &= \Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(z,r)} \frac{k!f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta\Big| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\frac{k!}{r^{k+1}}.\max_{\partial\Delta(z_0,r)} |f|.\text{long } \partial\Delta(z,r) \\ &= \frac{k!}{r^k}\max_{\partial\Delta(z,r)} |f|. \end{aligned}$$

5.3 Suites de fonctions holomorphes

Définition. Une suite de fonctions (f_n) sur U converge *localement uniformément* sur U si tout point de U admet un voisinage sur lequel (f_n) converge uniformément.

Ceci équivaut à : (f_n) converge uniformément sur tout compact contenu dans U. En effet, un disque fermé est compact, donc la convergence uniforme sur tout compact implique la convergence localement uniforme. Et si (f_n) converge localement uniformément et K est un compact contenu dans U, tout point $z \in K$ admet un voisinage ouvert $V_z \subset U$ sur lequel (f_n) converge uniformément. Par compacité, K est recouvert par un nombre fini d'ouverts V_{z_i}, $i = 1, \cdots, n$. La convergence est alors uniforme sur $V_{z_1} \cup \cdots \cup V_{z_n}$, donc sur K.

Théorème 1 (Weierstrass). *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge localement uniformément sur U vers une fonction f.*

1) La fonction f est holomorphe sur U.

2) La suite (f_n') converge localement uniformément (ou : uniformément sur tout compact) vers f'.
3) plus généralement, pour tout $k \geq 0$ la suite $(f_n^{(k)})$ converge localement uniformément (ou : uniformément sur tout compact) vers $f^{(k)}$.

Démonstration. 1) Si T est un triangle contenu dans U, c'est un compact, donc (f_n) converge uniformément sur T, donc $\int_{\partial T} f(z)dz = \lim \int_{\partial T} f_n(z)dz = 0$. Par le critère de Morera, f est holomorphe.

2) Si $\overline{\Delta}(z_0, r) \subset U$ et $z \in \Delta(z_0, r)$, la compacité de $\overline{\Delta}(z_0, r)$ implique

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(z_0,r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2} = \lim \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(z_0,r)} \frac{f_n(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2} = \lim f_n'(z).$$

3) C'est immédiat par récurrence sur k.

Théorème 2 (Montel). *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans une région U, qui est localement uniformément bornée (ou : uniformément bornée sur tout compact) sur U. Alors (f_n) a une sous-suite qui converge localement uniformément (ou : uniformément sur tout compact) sur U*

Démonstration. On suppose U connexe. Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur U, qui est localement uniformément bornée (ou : uniformément bornée sur tout compact) sur U. Alors (f_n) a une sous-suite qui converge localement uniformément sur U.

Démonstration. Le point clé est que la suite (f_n') est aussi localement uniformément bornée, donc équilipschitzienne : donc on peut appliquer le théorème d'Ascoli (ou Ascoli-Arzelà). Nous donnons la preuve sans utiliser celui-ci (en fait, nous le prouvons dans ce cas particulier).

Soit $z \in U$. Par hypothèse, il existe un disque $\Delta(z, r_z) \subset U$ et une constante K_z tels que $|f_n \leq K_z$ sur $\overline{\Delta}(z, r)$. Par la majoration de Cauchy, $|f_|' \leq \frac{2K_z}{r_z}$ sur $\Delta(z, r_z/2) = V_z$. Par inégalité des accroissements finis et convexité de V_z, on a

$$(\forall z_1, z_2 \in V_z)\ |f_n(z_1) - f_{n_k}(z_2)| \leq 2C_z|z_1 - z_2|.$$

Soit $(z_r)_{r\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans U, par exemple une énumération des points dans $(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})\cap U$. Puisque $(f_n(z_r))_n$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente. Et par procédé diagonal de Cantor, on trouve une sous-suite de (f_n) qui converge en chaque z_r : explicitement, on construit des extractions successives $\varphi_0, \cdots, \varphi_k, \cdots$ telles que $(f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}(z_r))_n$ converge pour $r \leq k$. On pose $\varphi(n) = \varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(n)$: si r est quelconque, $(\varphi(n)_n)$ est une extraction de $\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_r$ pour $n \geq r$, donc $(f_{\varphi(n)}(z_r))_n$ converge.

On peut donc supposer que $(f_n(z_r))_n$ converge pour tout $r \in \mathbb{N}$. Fixons $z \in U$. Pour $\varepsilon > 0$, soit r tel que $|z_r - z| < \frac{\varepsilon}{\max(2, 3C_z)}$, qui existe par densité. Puisque $(f_n(z_r))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il existe N tel que $|f_n(z_r) - f_m(z_r)| < \varepsilon/3$ si $n, m \geq N$. En particulier, $z_r \in V_z$. Alors, si $w \in V_z$ et $n, m \geq N$ on a

$$\begin{aligned} |f_n(w) - f_m(w)| &\leq |f_n(w) - f_n(z_r)| + |f_n(z_r) - f_m(z_r)| + |f_m(z_r) - f_m(w)| \\ &< C_z\frac{\varepsilon}{3C_z} + \frac{\varepsilon}{3} + C_z\frac{\varepsilon}{3C_z} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc (f_n) est uniformément de Cauchy sur V, donc elle converge uniformément, cqfd.

5.4 Séries, produits

Proposition. *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur U. On suppose que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge localement normalement uniformément sur U, autrement dit que tout point de U a un voisinage V tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $\sum_{n>N} |f_n(z)| < \varepsilon$ pour tout $z \in V$.*

1) La somme $f = \sum_{n=0} f_n$ *est holomorphe,* $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ *converge localement normalement uniformément sur* U *et* $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$.

2) On suppose de plus que U *est connexe et qu'aucune des fonctions* f_n *n'est identiquement égale à* -1*. Alors le produit* $\prod_{n=0}^{\infty}(1+f_n)$ *converge localement uniformément sur* U *vers une fonction holomorphe* g*. De plus,* g *a pour zéros la réunion des* $(1+f_n)^{-1}(\{0\})$*, avec mulitplicités c'est-à-dire*

$$(\forall z \in U)\ \deg_z(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \deg_z(1+f_n)\ ,\ \text{la somme étant finie.}$$

De plus on a $\frac{g'}{g} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n}{1+f_n}$ *sur* $U \setminus g^{-1}(\{0\})$*, la convergence étant localement normalement uniforme.*

Démonstration. Le 1) est une application immédiate du théorème de Weierstrass à la suite $(f_0 + \cdots + f_n)$. Pour le 2), on peut supposer qu'il existe N tel que $\sum_{n>N} |f_n(z)| < \frac{1}{2}$ sur U. Pour $n > N$, on peut alors définir la branche principale $h_n = \log(1+f_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} f_n^k$. La série $\sum_{n>N} |h_n|$ converge normalement uniformément, donc $H = \sum_{n>N} g_n$ est holomorphe. Donc $\prod_{n=N+1}^{M} (1+f_n) = \exp(\sum_{n=N+1}^{M} g_n)$ converge uniformément vers la fonction holomorphe e^H. Donc $\prod_{n=0}^{\infty}(1+f_n)$ converge uniformément sur U vers la fonction holomorphe $g = e^H \prod_{n=0}^{N}(1+f_n)$. Comme e^H et les $1+f_n$, $n > N$, ne s'annulent jamais, les affirmations sur $g^{-1}(\{0\})$ et sur $\deg_z(g)$ sont claires.

Enfin, d'après 1) la série $\sum_{n>N} g'_n = \sum_{n>N} \frac{f'_n}{1+f_n}$ est localement normalement convergente, et sa somme vaut H'. Donc $\frac{g'}{g} = H' + \sum_{n=0}^{N} \frac{f'_n}{1+f_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'_n}{1+f_n}$, la convergence étant localement normalement uniforme sur $U \setminus g^{-1}(\{0\})$.

Exemple (Weierstrass) : fonction entière à zéros donnés. Soit (z_n) une suite de points tendant vers l'infini dans $\mathbb{C}$, on veut construire une fonction entière f ayant pour zéros exactement les z_n avec multiplicités c'est à-dire que pour tout $z \in U$ on a $\deg_z(f) = \mathrm{card}(\{n \in \mathbb{N} : z_n = z\})$. Si $z_n = 0$ pour $n \le n_0$ et $z_n \ne 0$ pour $n > n_0$, il suffit de construire g entière ayant pour zéros exactement les z_n avec $n > n_0$ (avec multiplicités), car ensuite on posera $f = z^{n_0} g$.

On pose

$$g = \prod_{n>n_0} (1 - \frac{z}{z_n}) \exp\Big[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big(\frac{z}{z_n}\Big)^n\Big] = \prod_{n>n_0} g_n.$$

Montrons que ce produit converge uniformément sur tout disque $\Delta(0,r)$. Il suffit de considérer les facteurs d'indice $n > n_r$ assez grand pour que $|z_n| > 2r$ Si $z \in \Delta(0,r)$ et $n > n_r$, on a $\left|\frac{z}{z_n}\right| < \frac{1}{2}$, donc $g_n(z) = \exp(h_n(z))$ avec

$$\begin{aligned} h_n(z) &= \log(1 - \frac{z}{z_n}) + \frac{z}{z_n} + \cdots + \Big(\frac{z}{z_n}\Big)^n \text{ (branche principale du logarithme)} \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\Big(\frac{z}{z_n}\Big)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big(\frac{z}{z_n}\Big)^k \\ &= -\sum_{k>n} \frac{1}{k}\Big(\frac{z}{z_n}\Big)^k. \end{aligned}$$

Donc $|h_n(z)| < \sum_{k>n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$. Donc $\sum_{n>n_r} h_n$ converge normalement uniformément vers H sur $\Delta(0,r)$, donc $\prod_{n>n_r} g_n = \prod_{n>n_r} e^{h_n}$ converge uniformément sur $\Delta(0,r)$, vers une fonction e^H. Donc $\prod_{n>n_0} g_n$ converge uniformément sur $\Delta(0,r)$ vers $g = e^H \prod_{n=n_0+1}^{n_r} g_n$. Puisque e^H ne s'annule pas, on a $\deg_z(g) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N} : z = z_n\}$ pour tout $z \in \Delta(0,r)$. Ceci étant vrai pour tout r, g a la propriété voulue.

Remarque. Un théorème de Mittag-Leffler généralise ce résultat : si U est un ouvert quelconque et $D \subset U$ une partie discrète et fermée dans U, il existe $f \in \mathcal{O}(U)$ ayant pour zéros exactement D avec des multiplicités imposées $m_z, z \in D$.

5.5 Familles sommables, sommation par paquets

Il est commode d'introduire le concept suivant, qui généralise celui de série normalement convergente sans être obligé d'indexer l'ensemble des indices par $\mathbb{N}$.

Définition. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments dans un espace de Banach, par exemple un espace vectoriel normé de dimension finie. Elle est *sommable* s'il existe une constante $C > 0$ tel que pour toute partie finie $F \subset I$ on a $\sum_{i\in F} ||x_i|| < C$.

Exemple. La famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum x_n$ est normalement convergente (ou absolument convergente).

Proposition. *On suppose que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille sommable dans E espace de Banach.*
1) L'ensemble $D = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.
2) Il existe un unique $y \in E$ tel que

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists F_0 \subset I \text{ finie})\ (\forall F \subset I \text{ finie },\ F \supset F_0) \quad ||\sum_{i\in F} x_i - y|| < \varepsilon.$$

On appelle y la somme *de la famille (x_i).*
3) On suppose $(x_i)_{i\in I}$ sommable de somme y, et I dénombrable. Alors pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ converge vers y, la convergence étant normale (ou absolue).

Démonstration. 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'hypothèse implique que $I_n = \{i \in I \mid ||x_i|| \geq 1/n\}$ est fini, avec au plus nC éléments. Donc $D = \bigcup I_n$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis, et donc D est au plus dénombrable.

2) Soit C la borne supérieure des sommes finies $\sum_{i\in F} ||x_i||$. Pour pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $I_n \subset I$ finie telle que $\sum_{i\in I_n} ||x_i|| > C - 1/n$. Donc si F est une partie finie quelconque de $I \setminus I_n$, on a $\sum_{i\in F} ||x_i|| < 1/n$.

On pose $y_n = \sum_{i\in I_n} x_i$. Si $m > n$, on a $||y_m - y_n|| \leq \sum_{i\in I_m\setminus I_n} ||x_i|| \leq 1/n$. Donc la suite (y_n) est de Cauchy, et par hypothèse de complétude elle converge vers un vecteur y. Si $\varepsilon > 0$, soit $n > 2\varepsilon^{-1}$. Si $F \subset I$ est finie et contient I_n, on a

$$||\sum_{i\in F} x_i - y|| \leq ||\sum_{i\in I_n} x_i - y|| + \sum_{i\in F\setminus I_n} ||x_i|| < 1/n + 1/n < \varepsilon.$$

Reste à montrer l'unicité de y. Si z est aussi une somme de (x_i), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $F_n \subset I$ finie telle que $||\sum_{i\in F} x_i - z|| < 1/n$ pour toute partie finie F contenant F_n. Prenant $F = I_n \cup F_n$, on a $||\sum_{i\in F} x_i - y|| < 2/n$, d'où $||y - z|| < 3/n$. Comme ceci est vrai pour tout n, $z = y$, cqfd.

3) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $F_0 \subset I$ finie telle que $||\sum_{i\in F} x_i - y|| < \varepsilon/2$ pour toute partie, finie $F \supset F_0$. Alors pour n assez grand $\{\varphi(k) \mid k \leq n\}$ contient F_0 donc

$$||\sum_{k=0}^{n} x_{\varphi(k)} - y|| < \varepsilon,$$

d'où la convergence de la série $\sum x_{\varphi(n)}$ vers la somme de la famille (x_i).

Propriété (évidente). *Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable dans E, $(||x_i||_{i\in I})$ est sommable dans $\mathbb{R}$, et* $\left|\left|\sum_{i\in I} x_i\right|\right| \leq \sum_{i\in I} ||x_i||$.

Notation. Si (a_i) est une famille non sommable dans $\mathbb{R}_+$, on note $\sum_{i\in I} a_i = +\infty$. Donc la sommabilité d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ dans E équivaut à $\sum_{i\in I} ||x_i|| < \infty$.

Sommation par paquets *Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille sommable et $I = \amalg_{i\in J} I_j$ une partition de l'ensemble des indices, chaque famille $(x_i)_{i\in I_j}$ est sommable et $\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} x_i = \sum_{i\in I} x_i$.*

Dans le cas des fonctions holomorphes, on a l'application suivante.

Proposition. *Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions dans $\mathcal{O}(U)$. On suppose qu'elle est* localement uniformément sommable*, c'est-à-dire que tout point $z \in V$ admet un voisinage $V \subset U$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $F \subset I$ fini tel que $\sum_{i\in I\setminus F} |f_i(z)| < \varepsilon$ sur V. Alors la fonction $f(z) = \sum_{i\in I} f_i(z)$ est holomorphe, et sa dérivée est $f'(z) = \sum_{i\in I} f_i'(z)$, la famille (f_i') étant aussi localement uniformément sommable.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'hypothèse donne $F_n \subset I$ fini tel que $\sum_{i\in I\setminus F_n} |f_i(z)| < 2^{-n}$ sur V. Posons $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, de sorte que $f_i = 0$ sur V si $i \notin F$. On peut supposer F infini, et énumérer les éléments de $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$: $F = \{i_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec les i_n distincts. Alors $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{i_n}(z)$, série normalement uniformément convergente sur V.

Donc f est holomorphe sur V, et $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{i_n}'(z)$, série localement normalement uniformément convergente sur V. Puisque $f_i' = 0$ sur V si $i \notin F$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} f_{i_n}'(z) = \sum_{i\in I} f_i'(z)$, la famille $(f_i'(z))_{i\in I}$

étant localement normalement uniformément sommable sur V. Comme V est un voisinage d'un point arbitraire de U, on peut remplacer V par U dans ces assertions, cqfd.

5.6 Quelques exemples classiques

1) Considérons la fonction $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$. La somme converge localement normalement uniformément sur $\mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z}$. En effet, par $\mathbb{Z}$-périodicité on peut supposer $|\text{Re}\ z| \leq \frac{1}{2}$. Pour $|n| \geq 1$, on a $\left|\frac{1}{(z-n)^2}\right| \leq \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2}$ $(\leq \frac{4}{n^2})$. Noter qu'on a convergence uniforme de $\sum_{n\neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] + i\mathbb{R}$.

Donc f est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z}$, de plus elle est $\mathbb{Z}$-périodique et $f(z) - \frac{1}{z^2}$ est holomorphe en 0. La fonction $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ a les mêmes propriétés, donc $g(z) = f(z) - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ est entière et $\mathbb{Z}$-périodique. Par ailleurs, $|\sin^2 \pi(x+iy)| = \cosh^2 \pi y - \cos^2 \pi x$, donc $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ tend uniformément vers 0 quand $|\text{Im}\ z| \to \infty$.

Enfin, puisque $\sum_{n\neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] + i\mathbb{R}$ converge uniformément sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] + i\mathbb{R}$ et que chaque terme tend uniformément vers 0 quand $|\text{Im}\ z| \to +\infty$, $f(z)$ tend uniformément vers 0 quand $|\text{Im}\ z| \to +\infty$. Donc finalement g est une fonction entière $\mathbb{Z}$-périodique et qui tend uniformément vers 0 quand $|\text{Im}\ z| \to +\infty$. Donc $g = 0$, soit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}.$$

2) La série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n}$ n'est pas sommable, mais $f(z) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{z-n}$ existe puisque $\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} = \frac{2z}{z^2-n^2}$. Dérivant terme à terme, on a

$$f'(z) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=-m}^{m} -\frac{1}{(z-n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{1}{(z-n)^2} = -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = (\pi\text{cotg}\ \pi z)'.$$

Donc la fonction $f(z) - \pi\text{cotg}\ \pi z$ est constante. De plus, elle est impaire, donc nulle. Donc

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2} = \pi\text{cotg}\ \pi z.$$

3) Considérons $f(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$. On a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (\log f(z))' = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z/n^2}{(1-z^2/n^2)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2} = \pi\text{cotg}\ \pi z = \frac{(\sin \pi z)'}{\sin \pi z}.$$

Donc $\left(\frac{f(z)}{\sin \pi z}\right)' = \frac{f'(z)\sin \pi z - f(z)(\sin \pi z)'}{\sin^2 \pi z} = 0$, donc $\frac{f(z)}{\sin \pi z}$ est constante. Cette constante vaut

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{\sin \pi z} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{\pi z} = \frac{1}{\pi}.$$

D'où finalement

$$z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})=\frac{\sin\pi z}{\pi}.$$

4) La *fonction zêta* est définie sur le demi-plan $P=\{z:\text{Re }z>1\}$ par $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}$ où $n^{-z}=\exp(z\log n)$ avec la branche principale du logarithme. Puisque $|n^{-z}|=n^{-\text{Re }z}$, on a convergence normale localement uniforme sur P, donc ζ est holomorphe sur P.

Par ailleurs, le produit $\displaystyle\prod_{p\ \text{premier}}\frac{1}{1-p^{-z}}$ converge aussi sur P puisque $\displaystyle\sum_{p\ \text{premier}}|p^{-z}|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|n|^{-z}$. De même le produit $\displaystyle\prod_{p\ \text{premier}}\frac{1}{1-|p^{-z}|}$ converge, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}|p^{-kz}|<\infty$. En développant formellement ce produit, on trouve la somme

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{(k_1,\cdots,k_m)\in\mathbb{N}^m}|p_1^{-k_1z}|\cdots|p_n^{-k_mz}|=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{(k_1,\cdots,k_m)\in\mathbb{N}^m}|(p_1^{k_1}.\cdots.p_m^{k_m})^{-z}|.$$

On a donc une famille sommable $(|(p_1^{k_1}.\cdots.p_m^{k_m})^{-z}|)$, donc la somme est égale au produit. Il en est donc de même quand on enlève les modules :

$$(\forall z\in P)\ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{(k_1,\cdots,k_m)\in\mathbb{N}^m}(p_1^{k_1}.\cdots.p_m^{k_m})^{-z}=\prod_{p\ \text{premier}}\frac{1}{1-p^{-z}}$$

Par existence et unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers, les $p_1^{k_1}.\cdots.p_m^{k_m}$ représentent exactement les entiers naturels et de façon unique. Donc la somme de gauche est $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}$, d'où

$$(\forall z\in P)\ \zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}=\prod_{p\ \text{premier}}\frac{1}{1-p^{-z}}.$$

Remarque. Cette formule due à Euler indique une première relation entre les nombres premiers et la fonction zêta. Par la suite, Riemann montre que ζ admet une extension méromorphe (cf. chapitre 5) à $\mathbb{C}$ tout entier, avec un unique pôle en 1 et des zéros «triviaux» $-2n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Riemann donne une formule explicite pour le nombre de nombres premiers $<x$, faisant intervenir de façon essentielle la fonction zêta et ses zéros éventuels dans la «bande critique» $\{0\leq|\text{Re }z|\leq 1\}$. En particulier, la formule est beaucoup plus jolie (et a des conséquences innombrables en théorie des nombres) si tous les zéros sont sur la «droite critique» Re $z=\frac{1}{2}$, ce qui est la fameuse «hypothèse de Riemann».

6 Séries de Laurent, résidu en un point, fonctions méromorphes

6.1 Séries de Laurent

Définitions. Si $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, on définit *l'anneau* (ou *anneau rond*)

$$A(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\} = \Delta(0, r_2) \setminus \overline{\Delta}(0, r_1).$$

Il est dégénéré si $r_1 = 0$ ou $r_2 = \infty$. Sinon, son adhérence $\overline{A}(r_1, r_2) = \overline{\Delta}(0, r_2) \setminus \Delta(0, r_1)$ est un domaine à bord, ce bord étant algébriquement $\partial\Delta(0, r_2) - \partial\Delta(0, r_1)$.

Une *série de Laurent* est une série de la forme $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Elle converge en un point z si les séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ convergent.

Propriétés. *1) Si une série de Laurent converge en z_1 et en z_2 avec $|z_1| < |z_2|$, elle converge normalement uniformément sur tout anneau $A(r_1, r_2)$ tel que $r_1 < |z_1| < |z_2| < r_2$. Elle admet alors un anneau maximal de convergence $A(r_1, r_2)$, et sa somme est holomorphe sur cet anneau.*
2) Le développement en série de Laurent d'une fonction f sur $A(r_1, r_2)$ est unique s'il existe.

Démonstration. 1) La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_2^n$ converge, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge normalement uniformément sur $\Delta(0, r_2)$ si $r_2 < |z_2|$. De même, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z_1^{-n}$ converge, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^n$ converge de façon normale sur $\Delta(0, \rho_1)$ si $r_1 < |z_1|^{-1}$. Autrement dit, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ converge normalement uniformément sur $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}(0, r_1)$ si $r_1 > |z_1|$. Donc $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ converge normalement uniformément sur $\Delta(0, r_2) \setminus \overline{\Delta}(0, r_1) = A(r_1, r_2)$.

La réunion des anneaux où la série converge est clairement un anneau maximal de convergence. Et sur cet anneau, la somme est une limite localement uniforme de fonctions holomorphes, donc est holomorphe.

2) Ceci résulte de l'interprétation des a_n comme coefficients de Fourier : puisque $f(re^{i\theta}) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$, avec convergence normal uniforme si $r \in]r_1, r_2[$, on a

$$a_n = r^{-n} \int_0^{2\pi} f(re^{in\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Notons que ceci s'écrit aussi

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(z_0, r)} f(\zeta) \zeta^{-n-1} d\zeta.$$

Nous allons le retrouver dans le théorème ci-dessous.

Théorème. *Soit f une fonction holomorphe sur $A(r_1, r_2)$. On a une décomposition en série de Laurent sur $A(r_1, r_2)$, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. De plus, si $\partial\Delta(z_0, r) \subset A(r_1, r_2)$, on a*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(z_0, r)} f(\zeta) \zeta^{-n-1} d\zeta.$$

Démonstration. On peut supposer $0 < r_1 <_2 < \infty$ et f continue sur l'anneau fermé $\overline{A}(r_1, r_2)$ et contenant l'anneau ouvert $A(r_1, r_2)$. Appliquant la représentation intégrale de Cauchy, on a

$$(\forall z \in A(r_1, r_2)) \;\; f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,r_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,r_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Comme dans le cas de $\Delta(z_0, r)$, l'intégrale sur le bord extérieur vaut $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, où

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,r_2)} f(\zeta)\zeta^{-n-1} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,r)} f(\zeta)\zeta^{-n-1} d\zeta \;\; \text{en appliquant Cauchy à } \overline{A}(r, r_2). \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale sur le bord intérieur, où $|z^{-1}\zeta| < 1$, en développant en série

$$\frac{1}{\zeta - z} = -z^{-1}(1 - \zeta z^{-1})^{-1} = -z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \zeta^{-n-1} z^n.$$

Echangeant intégrale et série, l'intégrale sur le bord intérieur vaut $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$, où

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,r_1)} f(\zeta)\zeta^{-n-1} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,r)} f(\zeta)\zeta^{-n-1} d\zeta \;\; \text{en appliquant Cauchy à } \overline{A}(r_1, r). \end{aligned}$$

6.2 Singularités isolées

Définitions. Une fonction holomorphe a une *singularité isolée* en un point z_0 si elle est définie sur un voisinage épointé de z_0. Cette singularité est

- une *singularité levable* si f se prolonge holomorphiquement en z_0
- un *pôle* si $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$
- une *singularité essentielle* sinon.

Si la série de Laurent de f est $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, la *partie principale* de f en z_0 est

$$f_{princ}(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n.$$

Noter que cette série converge pour tout $z \neq z_0$, donc $f_{princ}(z) = g(1/(z - z_0))$ où g est une fonction entière.

6.3 Singularités levables

Proposition. *Soit f une fonction ayant une singularité isolée en z_0, de série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) f a une singularité levable en z_0
2) $a_n = 0$ pour $n < 0$, soit $f_{princ} = 0$
3) $f(z)$ est bornée quand $z \to 0$
4) si f est définie sur $\overline{\Delta}^*(z_0, r) \setminus \{0\}$, on a $f_{|\Delta^*(z_0,r)} \in L^2$ soit $\displaystyle\int_0^r \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta < \infty$.

Démonstration. Si 1) est vraie, f est la somme d'une série entière, d'où 2) par unicité de la série de Laurent. Les implications 2)⇒3)⇒4) sont claires. Enfin, on a

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^r \int_0^{2\pi} |\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^n e^{in\theta}|^2 \rho d\rho d\theta$$
$$= \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi |a_n|^2 \int_0^r \rho^{2n+1} d\rho.$$

Si $n < 0$, $\displaystyle\int_0^r \rho^{2n+1} d\rho = +\infty$, d'où 4)⇔1).

Remarque. L'exposant 2 est exact, puisque $\dfrac{1}{z} \in L^{2-\varepsilon}(\Delta^*)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

6.4 Pôles

Proposition. *Soit f une fonction holomorphe sur $\Delta^*(z_0, r)$, de série de Laurent $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) f a un pôle en z_0
2) $1/f$ s'étend holomorphiquement par 0 en z_0
3) Il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_n = 0$ pour $n < -d$ et $a_{-d} \neq 0$, c'est-à-dire que f_{princ} est un polynôme de degré d en $1/(z - z_0)$
4) Il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $(z - z_0)^d f(z)$ s'étend holomorphiquement avec une valeur non nulle en z_0.
5) Il existe deux fonctions p, q holomorphes près de z_0 telles que $f = \dfrac{p}{q}$ et $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$.

Démonstration. Si 1) est vraie, $1/f$ s'étend continûment par 0 en z_0, donc elle a une singularité levable et cette extension est holomorphe, donc 2) est vrai.

Si 2) est vrai, $1/f(z) = (z - z_0)^d g(z)$ où g est holomorphe et non nulle en z_0. Donc on a un développement en série entière

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \ , \ b_0 \neq 0$$

d'où

$$f(z) = \frac{(z - z_0)^d}{g(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^{n-d} \ , \ b_0 \neq 0,$$

ce qui donne 3).

Si 3) est vrai, $(z - z_0)^d f(z)$ se développe en série entière, donc 4) est vrai. Si 4) est vrai, 5) est vrai avec $q(z) = (z - z_0)^d$, $p(z) = f(z)(z - z_0)^d$ étendue holomorphiquement. Enfin, 5)⇒1) est clair.

Définitions. L'entier d des propriétés 3) et 4) ci-dessus, qui est clairement unique et égal au degré en z_0 de l'extension holomorphe de $1/f$, est appelé *l'ordre du pôle z_0*, ou aussi *multiplicité*. Un pôle d'ordre un est dit *simple*.

Extension à une fonction vers $\overline{\mathbb{C}}$. Si f a un pôle en z_0, on peut la prolonger par $f(z_0) = \infty$ en une fonction continue à valeurs dans $\overline{\mathbb{C}}$.

6.5 Fonctions méromorphes

Définition. Soit U une région. Une *fonction méromorphe* sur U est une fonction $f : U \setminus D \to \mathbb{C}$ où D n'a pas de point d'accumulation dans U, qui est holomorphe sur $U \setminus D$ et a un pôle en chaque point de D.

On note $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U. En imposant $f_{|D} = \infty$, on en fait un ensemble de fonctions continues de U vers $\overline{\mathbb{C}}$ qui contient $\mathcal{O}(U)$.

Exemple. Toute fonction rationnelle est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Proposition. *Soit f une fonction méromorphe non identiquement nulle dans une région U, d'ensemble de pôles D.*
1) L'ensemble $D' = f^{-1}(\{0\})$ n'a pas de point d'accumulation dans U.
2) La fonction $\frac{1}{f}$ est méromorphe sur U. Ses zéros sont les pôles de f, et ses pôles les zéros de f.
3) L'ensemble $\mathcal{M}(U)$ est un corps pour les opérations habituelles.

Démonstration. 1) Puisque f est holomorphe sur $U \setminus D$ et que $D' = (f_{|U\setminus D})^{-1}(\{0\})$, D' n'a pas de point d'accumulation dans $U \setminus D$. Comme il est contenu dans $U \setminus D$ et fermé dans U puisque f est continue, il n'a pas de point d'accumulation dans D.

2) La fonction $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur $U \setminus (D \cup D')$. De plus, si $z_0 \in D$, on écrit $f = \frac{g}{(z-z_0)^d}$ avec $d > 0$ et$g(z_0) \neq 0$. Alors $\frac{1}{f} = \frac{(z-z_0)^d}{g}$ est holomorphe et a un zéro d'ordre d en z_0. Et si $z_0 \in D'$, $\frac{1}{f}$ a un pôle en z_0, ce qui prouve 2).

3) La seule (petite) difficulté est de montrer que la somme de deux fonctions méromorphes $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(U)$ est méromorphe. En un point z_0 où les deux sont holomorphes, $f_1 + f_2$ est holomorphe. Si l'une d'elles est holomorphe, disons f_1, et si f_2 a un pôle, on écrit $f_2 = \frac{g_2}{(z-z_0)^d}$ avec $d > 0$ et $g_2(z_0) \neq 0$. Alors $f_1 + f_2 = \frac{f_1(z-z_0)^d + 1}{(z-z_0)^d}$ a un pôle en z_0, de même ordre que f_2. Enfin, si f et g ont un pôle en z_0, on écrit $f_1 = \frac{g_1}{(z-z_0)^{d_1}}$, $f_2 = \frac{g_2}{(z-z_0)^{d_2}}$ avec $d_1, d_2 > 0$ et $g_1(z_0), g_2(z_0) \neq 0$. On peut supposer $d_1 \geq d_2$, d'où

$$f_1 + f_2 = \frac{g_1(z-z_0)^{d_1-d_2} + g_2}{(z-z_2)^{d_2}}.$$

Si $d_1 > d_2$ ou si $d_1 = d_2$ et $g_1(z_0) + g_2(z_0) \neq 0$ $f_1 + f_2$ a un pôle d'ordre d_2 en z_0. Si $d_1 = d_2$ et $g_1 + g_2 = 0$, $f_1 + f_2 = 0$ donc est holomorphe en z_0. Enfin, dans le cas restant on a $g_1 + g_2 = (z-z_0)^e h$ avec $e > 0$ et $h(z_0) \neq 0$. Si $e \geq d_2$, $f_1 + f_2$ est holomorphe en z_0, sinon elle a un pôle d'ordre $d_2 - e$.

Remarque. Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Nous avons vu au 5.4 une construction de Weierstrass d'une fonction entière p ayant pour zéros exactement les pôles de f avec multiplicités. Donc $p = qg$ s'étend en une fonction entière, ainsi $f = \frac{p}{q}$ est le quotient de deux fonctions entières. D'après Mittag-Leffler, ce résultat s'étend à tout ouvert U. En particulier, si U est connexe cela veut dire que $\mathcal{M}(U)$ est le corps des fractions de $\mathcal{O}(U)$.

6.6 Fonctions méromorphes sur un ouvert de $\overline{\mathbb{C}}$

Définitions. Si U est un ouvert non vide de $\overline{\mathbb{C}}$, $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$ est méromorphe si elle est méromorphe sur $U \cap \mathbb{C}$ (ouvert de $\mathbb{C}$) et si $z \mapsto f(1/z)$ est aussi méromorphe. Ses pôles sont les éléments de $f^{-1}(\infty)$.

Exemple. Toute fonction rationnelle, prolongée à $\overline{\mathbb{C}}$ comme on l'a vu, est méromorphe sur $\overline{\mathbb{C}}$. En effet, elle est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et $f(1/z)$ est encore une fonction rationnelle.

Le théorème suivant généralise celui de Liouville.

Théorème. *Toute fonction méromorphe sur $\overline{\mathbb{C}}$ est une fraction rationnelle.*

Démonstration. Soit f méromorphe sur $\overline{\mathbb{C}}$. Alors $f^{-1}(\{\infty\})$ est discret et fermé dans $\overline{\mathbb{C}}$ qui est compact, donc il est fini : $f^{-1}(\{\infty\}) = \{z_1, \cdots, z_n\}$ ou $\{z_1, \cdots, z_n\} \cup \{\infty\}$, avec $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$. Soient $d_1, \cdots, d_n, d_\infty$ les ordres de ces pôles ($d_\infty = 0$ si f est holomorphe en ∞).

On a $|f(z^{-1})| \leq C|z|^{-d_\infty}$ si $|z^{-1}| < \varepsilon$, soit $|f(z)| \leq C|z|^{d_\infty}$ si $|z| > \varepsilon^{-1}$. Considérons la fonction

$$p(z) = f(z)\prod_{i=1}^{n}(z - z_i)^{d_i}.$$

Elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $|p(z)| \leq C|z|^{d_\infty}\prod|z - z_0|^{d_i}$ pour $|z| > \varepsilon^{-1}$, d'où $|p(z)| \leq 2C|z|^d$ pour $|z| > r_0$ assez grand, avec $d = d_1 + \cdots + d_k$. Donc si $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, pour tout $r > r_0$ on a

$$|a_n| = \Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(0,r)} f(z)z^{-n-1}dz\Big| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})r^{-n}e^{-in\theta}d\theta\Big| \leq Cr^{d-n}.$$

Faisant tendre $r \to +\infty$, il vient $a_n = 0$ pour tout $n > d$, donc $p(z)$ est un polynôme. Donc $f(z) = \dfrac{p(z)}{\prod(z - z_i)^{d_i}}$ est une fraction rationnelle.

6.7 La fonction Gamma

Soit

$$f_n(z) = \frac{1}{z}\prod_{k=1}^{n}\Big(1 + \frac{z}{k}\Big)^{-1}(n+1)^z = \frac{1.2.\cdots.n}{z(z+1)\cdots(z+n)}.(n+1)^z.$$

Alors f_n ne s'annule pas et a des pôles simples en $0, -1, \cdots, -n$, de plus

$$\frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)} = \frac{n}{z+n}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^z = \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^{-1}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^z,$$

donc

$$\log\frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)} = -\log\Big(1 + \frac{z}{n}\Big) + z\log\Big(1 + \frac{1}{n}\Big).$$

Sur tout compact, ceci est majoré par Cn^{-2}, série convergente, donc le produit converge uniformément sur tout compact vers une fonction sans zéro et ayant des pôles simples en $-n, n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, c'est la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{n}\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^{-1}n^z = \lim_{n\to\infty}\frac{1.2.\cdots.n}{z(z+1)\cdots(z+n)}.(n+1)^z.$$

Sa propriété la plus «caractéristique» est

$$(*) \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

En effet :

$$f_n(z+1) = \frac{1.2.\cdots.n}{(z+1)\cdots(z+n)(z+n+1)}(n+1)^{z+1} = z\frac{n+1}{z+n+1}f_n(z).$$

Par ailleurs, on a

$$f_n(1) = \frac{1.2.\cdots.n}{1.2\cdots.(n+1)}.(n+1) = 1,$$

donc $\Gamma(1) = 1$. Combiné avec $(*)$, il vient $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Une autre propriété est

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

En effet :

$$\begin{aligned} f_n(z)f_n(-z) &= \frac{1}{1-z}.\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{n}\Big[\Big(1+\frac{z}{k}\Big)^{-1}\Big(1+\frac{1-z}{k}\Big)^{-1}\Big](n+1)^z(n+1)^{1-z} \\ &= \frac{1}{1-z}.\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{n}\Big[\Big(1+\frac{z}{k}\Big)^{-1}\Big(1-\frac{z}{k+1}\Big)^{-1}\frac{k}{k+1}\Big](n+1) \\ &= \frac{1}{1-z}.\frac{1}{z}(1-z)\prod_{k=1}^{n}\Big[\Big(1+\frac{z}{k}\Big)^{-1}\Big(1-\frac{z}{k}\Big)^{-1}\Big] \\ &= \Big[z\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{z^2}{n^2}\Big]^{-1}. \end{aligned}$$

D'où le résultat puisque $z\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{z^2}{n^2}\Big) = \frac{\sin \pi z}{\pi}$.

Enfin, on a la représentation intégrale, valable sur le demi-plan $\{\mathrm{Re}\ z > 0\}$:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt.$$

En effet, notons $F(z)$ la fonction de droite. L'intégrale converge pour $\mathrm{Re}\ z = x > 0$ puisque $|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{x-1}$ (noter qu'elle est impropre en ∞ et aussi en 0 si $x \in]0,1[$. De plus, la convergence est uniforme sur $\varepsilon, +\infty[+i\mathbb{R}$, donc $F(z) = \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{n} e^{-t}t^{z-1}dt$, limite localement uniforme. Donc F est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}\ z > 0\}$. En intégrant par parties, on a

$$F(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt = \Big[e^{-t}t^z\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}zt^{z-1}dt = zF(z).$$

Donc $f(z) = \frac{F(z)}{\Gamma(z)}$ est 1-périodique, ce qui permet de l'étendre en une fonction entière. Ensuite, si $z = x+iy$ avec $x \in [1,2]$, on a $|F(z)| \le F(x) \le F(3) = 2$, $\Gamma(x) \ge 1$ et

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{F(x)}{\Gamma(x)}\Big|\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(z)}\Big| \le 2\Big|\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(z)}\Big| = 2\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\Big|1+\frac{iy}{k+x}\Big| = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{y^2}{(k+x)^2}\Big)^{1/2} \\ &\le 2\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{y^2}{k^2}\Big)^{1/2} = 2\Big(\frac{\sinh \pi y}{\pi y}\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

On peut écrire $f(z) = g(e^{2\pi i z})$ avec $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$. Si $w = e^{2\pi i(x+iy)} = e^{-2\pi y}e^{2\pi i x}$, il vient

$$|g(w)| \le 2\Big(\frac{\sinh \pi y}{\pi y}\Big)^{1/2} \le C(e^{2\pi|y|})^{1/4} = C(\max, |w|, |w|^{-1})^{1/4},$$

donc g a une singularité levable en 0 et aussi en ∞, donc elle est constante. Cette constante est 1 puisque $\Gamma(1) = 1 = F(1)$, donc $F = \Gamma$.

6.8 Singularités essentielles

Rappelons qu'une fonction f ayant une singularité isolée en z_0 a une singularité essentielle en z_0 si elle n'a ni une singularité levable ni un pôle. Cela équivaut à l'existence d'une infinité de termes négatifs non nuls $a_n(z-z_0)^n$, $n<0$, dans le développement de Laurent, donc f_{princ} n'est pas un polynôme en $1/(z-z_0)$.

Théorème (Casorati-Weierstrass). *Si f a une singularité essentielle en z_0, $f(\Delta^*(z_0,\varepsilon))$ est dense dans $\mathbb{C}$ pour tout ε tel que f est définie sur $\Delta^*(z_0,\varepsilon)$.*

Démonstration. Montrons la contraposée, c'est-à-dire que si $f(\Delta^*(z_0,\varepsilon))$ évite un disque $\Delta(w_0,\delta)$, f a une singularité levable ou un pôle. Posons $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-w_0}$: alors $g(\Delta^*(z_0,\varepsilon))\subset\overline{\Delta}(0,\delta^{-1})$, donc g a une singularité levable, donc elle s'étend par $g(z_0)=w_1$ en une fonction holomorphe sur $\Delta(z_0,r)$. Alors $f(z)=w_0+\dfrac{1}{g(z)}$ a une singularité levable ou un pôle suivant que $w_1\neq 0$ ou $w_1=0$.

Remarque. Le *grand théorème de Picard* dit beaucoup plus : si f a une singularité essentielle en z_0, f prend toutes les valeurs sauf au plus une dans tout voisinage de z_0 (ou : une infinité de fois). Autrement dit, une fonction ayant une singularité isolée et évitant deux points a une singularité levable ou un pôle. Le *petit théorème de Picard* dit que toute fonction entière qui n'est pas un polynôme prend toutes les valeurs sauf au plus une une nombre infini de fois.

Exemple : la fonction exponentielle prend toutes les valeurs sauf 0 une infinité de fois. Donc la fonction $e^{1/z}$ prend toutes les valeurs sauf 0 dans tout voisinage de 0.

7 Formule des résidus

7.1 Résidu en un point

Définition. Soit f une fonction holomorphe ayant une singularité isolée en z_0. Elle a donc un développement en série de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Le *résidu* de f en z_0 est $\text{rés}_{z_0}(f) = a_{-1}$.
Si f est continue sur $\overline{\Delta}^*(z_0, r) \setminus \{0\}$ et holomorphe sur $\Delta^*(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, on a

$$\text{rés}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(z_0,r)} f(z)dz.$$

Proposition. *On a* $\text{rés}_{z_0}(f) = 0$ *si et seulement si* f *a une primitive définie sur un voisinage époiné de* z_0*.*

Démonstration. Si f a une primitive F sur un tel voisinage V, on a

$$\int_{\partial\Delta(z_0,r)} f(z)dz = \int_{\partial\Delta(z_0,r)} F'(z)dz = 0$$

pour tout cercle $\partial\Delta(z_0, r) \subset V$, donc $\text{rés}_{z_0}(f) = 0$. Réciproquement, si $\text{rés}_{z_0}(f) = 0$, posons $G(z) = \sum_{n\neq -1} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$: cette série converge normalement sur un voisinage épointé de 0, donc est holomorphe et se dérive terme à terme, soit $G'(z) = \sum_{n\neq -1} a_n(z - z_0)^n = f(z)$.

7.2 Formule des résidus

Théorème. *Soient* Ω *un domaine compact,* $z_1, \cdots, z_n$ *un nombre fini de points dans* $\text{Int}(\Omega)$*, et* f *une fonction continue sur* $\Omega \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$ *et holomorphe sur* $\text{Int}(\Omega) \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$*. Exemple :* f *continue sur* $\Omega \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$ *et méromorphe sur* $\text{Int}(\Omega)$*. Alors*

$$\int_{\partial\Omega} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{rés}_{z_j}(f).$$

Démonstration. Soit $r > 0$ assez petit pour que chaque disque $\overline{\Delta}(z_j, r)$ soit contenu dans $\text{Int}(\Omega)$. Alors $\Omega_r = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \Delta(z_j, r)$ est un domaine compact de bord orienté $\partial\Omega - \sum_{j=1}^{n} \partial\Delta(z_j, r)$, et f est holomorphe sur un ouvert contenant Ω_r. Par la formule de Cauchy,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} f(z)dz &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Delta(z_j,r)} f(z)dz \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{rés}_{z_j}(f) \text{ d'après 7.1.}\end{aligned}$$

Exemple. Si $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ est une fraction rationnelle avec $\deg(Q) - \deg(P) \geq 2$ et Q sans zéro réel, l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$ est convergente. Elle se calcule assez simplement par la formule des résidus : pour $r > 0$, soit Ω_r le demi-disque $\overline{\Delta}(0, r) \cap \overline{\mathbb{H}} = \{z : |z| \leq r \text{ et } \text{Im } z \geq 0\}$ (on pourrait aussi prendre le rectangle $[-r,r]+i[0,r]$). Alors Ω_r est un domaine à bord et $\partial\Omega_r = [-r,r]+\partial\Delta_r^+$, le segment orienté positivement et le demi-cercle dans le sens trigonométrique. On a

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_r} R(z)dz &= \int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{\partial\Delta_r^+} R(z)dz \\ &= \int_{-r}^{r} R(x)dx + O(\mathrm{long}(\partial\Delta_r^+).\max_{\partial\Delta_r^+}|r|) \\ &= I + o(1) + O(\pi r.r^{\deg P-\deg Q})\ ,\ r\to+\infty \\ &= I+o(1) \text{ puisque } \deg P - \deg Q \leq -2.\end{aligned}$$

Par ailleurs, soient $z_1,\cdots,z_n$ les pôles de R (=zéros de Q) dans le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$. Pour r assez grand, ils sont tous dans $\mathrm{Int}(\Omega_r)$. Par la formule des résidus, $\displaystyle\int_{\partial\Omega_r} R(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{n} \mathrm{rés}_{z_j}(R)$: ceci est indépendant de r et tend vers I, d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\mathrm{rés}_{z_j}(R).$$

Par exemple, si $R_n(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^n}$ de sorte que le seul pôle dans $\mathbb{H}$ est i. Calculons son résidu. Si $z=i+h$ avec $h\to 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z^2)^n} &= \frac{1}{(z-i)^n}\frac{1}{(z+i)^n} = \frac{1}{h^n}\frac{1}{(2i+h)^n} \\ &= \frac{1}{h^n}\frac{1}{(2i)^n}(1+\frac{h}{2i})^{-n} \\ &= \frac{1}{h^n}\frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}\left(\frac{h}{2i}\right)^k.\end{aligned}$$

Le résidu est le coefficient de h^{-1}, correspondant à $k=n-1$ (pas la peine de compter les i et les -1, on sait que ça doit donner $-ia$ avec $a>0$!) :

$$\mathrm{rés}_i(R_n) = \frac{1}{(2i)^n}\binom{-n}{n-1}\frac{1}{(2i)^{n-1}} = -i\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{2^{2n-1}(n-1)!} = -2^{1-2n}i\binom{2n-2}{n-1}.$$

D'où

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n} = 4^{1-n}\pi\binom{2n-2}{n-1} = \pi 2^{1-n}\frac{1.3.\cdots.(2n-3)}{(n-1)!}.$$

7.3 Principe de l'argument

Théorème. *1) Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant un domaine compact Ω. On suppose que f ne s'annule pas sur $\partial\Omega$. Alors le nombre de zéros de f dans* Int Ω*, comptés avec multiplicités, est*

$$Z_{\mathrm{Int}\ \Omega}(f) := \sum_{z\in f^{-1}(\{0\})\cap\mathrm{Int}\ \Omega}\deg_z(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

2) Plus généralement, soit f une fonction méromorphe sur un ouvert U contenant un domaine compact Ω. On suppose que f n'a ni zéro ni pôle sur $\partial\Omega$. Alors la différence entre le nombre de zéros et de pôles de f dans Int Ω*, comptés avec multiplicités, est*

$$Z_{\mathrm{Int}\ \Omega}(f) - P_{\mathrm{Int}\ \Omega}(f) := \sum_{z\in f^{-1}(\{0\})\cap\mathrm{Int}\ \Omega}\deg_z(f) - \sum_{z\in f^{-1}(\{\infty\})\cap\Omega}\mathrm{ord}_z(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Démonstration. La fonction $\dfrac{f'}{f}$ est méromorphe sur U et holomorphe sur $\partial\Omega$. De plus, si z_0 est un zéro de f, on a $f(z) = (z - z_0)^d g(z)$ avec g holomorphe, $g(z_0) \neq 0$ et $d = \deg_z(f)$, d'où $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{d}{z - z_0} + \dfrac{g'(z)}{g(z)}$, donc $\text{rés}_{z_0}\left(\dfrac{f'}{f}\right) = d$. De même, si z_0 est un pôle de f, on a $f(z) = (z - z_0)^{-d} g(z)$ avec g holomorphe, $g(z_0) \neq 0$ et $d = \text{ord}_z(f)$, d'où $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = -\dfrac{d}{z - z_0} + \dfrac{g'(z)}{g(z)}$, donc $\text{rés}_{z_0}\left(\dfrac{f'}{f}\right) = -d$.

Appliquant la formule des résidus à $\dfrac{f'}{f}$, on obtient le résultat annoncé.

Remarque. Ce résultat est traditionnellement appelé «principe de l'argument» car l'intégrale de droite est la variation de l'argument de $f(z)$ le long du bord, exprimé en tours.

Exemple : théorème fondamental de l'algèbre. Soit $P(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{d} a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré $d > 0$. Les zéros de P sont en nombre fini donc pour r assez grand $|P|$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}\backslash\Delta(0, r)$. Donc

$$
\begin{aligned}
N_{\mathbb{C}}(P) = N_{\overline{\Delta}(0,r)}(P) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} P'(Re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{da_d + \displaystyle\sum_{k=1}^{d} (d-k) a_{d-k} r^{-k} e^{-ik\theta}}{a_d + \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_{d-k} r^{-k} e^{-ik\theta}} d\theta.
\end{aligned}
$$

Quand $r \to \infty$, l'intégrande tend uniformément vers d. Donc $N_{\mathbb{C}}(P) = d$, ce qui prouve le théorème fondamental de l'algèbre.

Corollaire 1 : théorème de Rouché. *Si f, g sont holomorphes sur un ouvert U contenant Ω et si $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ sur $\partial\Omega$ [donc f et g ne s'annulent pas sur $\partial\Omega$], on a $Z_{\text{Int }\Omega}(f) = Z_{\text{Int }\Omega}(g)$.*

Démonstration. Si $t \in [0, 1]$, la fonction $f_t = f + t(g - f)$ est holomorphe sur U et ne s'annule pas sur $\partial\Omega$. On a

$$Z_{\text{Int }\Omega}(f_t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f_t'(z)}{f_t(z)} dz,$$

le membre de gauche est entier et celui de droite est continu en t. Donc $Z_{\text{Int }\Omega}(f_t)$ est constant, d'où

$$Z_{\text{Int }\Omega}(f) = Z_{\text{Int }\Omega}(f_0) = Z_{\text{Int }\Omega}(f_1) = Z_{\text{Int }\Omega}(g).$$

Corollaire 2 : injectivité d'une limite de fonctions injectives. *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes injectives sur une région U, qui converge sur U vers une fonction holomorphe f. Alors f est constante ou injective.*

Démonstration. Montrons la contraposée : si f n'est pas injective, les f_n ne sont pas injectives pour n assez grand. Par hypothèse, il existe $z_1 \neq z_2$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$. Par principe des zéros isolés, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Delta(z_2, \varepsilon) \subset U \setminus \{z_1\}$ et $f - f(z_1)$ ne s'annule pas sur $\overline{\Delta}(z_2, \varepsilon) \setminus \{z_2\}$. Pour n assez grand, on a $|f_n(z) - f(z_1) - (f(z) - f(z_1)| < |f(z) - f(z_1)|$ sur $\partial\Delta(z_2, \varepsilon)$. Donc

$$Z_{\Delta(z_2,\varepsilon)}(f_n - f_n(z_1)) = Z_{\Delta(z_2,\varepsilon)}((f - f(z_1)) > 0,$$

donc il existe $z \in \Delta(z_2, \varepsilon)$ tel que $f_n(z) = f_n(z_1)$, et comme $z \neq z_1$, f_n n'est pas injective.

8 Propriétés locales des fonctions holomorphes

8.1 Ouverture d'une fonction holomorphe

Théorème 1. *Toute fonction holomorphe non constante sur une région U est ouverte : l'image par f d'un ouvert contenu dans U est ouverte.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si $z_0 \in U$, l'image de tout disque ouvert $\Delta(z_0, r) \subset U$ contient un disque ouvert $\Delta(f(z_0), \varepsilon)$. Il suffit de le faire pour tout r assez petit. Puisque f est non constante, on a $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^d g(z)$ avec g holomorphe, $g(z_0) \neq 0$ et $d = \deg_z(f)$.

Pour r assez petit, g ne s'annule pas sur $\overline{\Delta}(z_0, r)$. Donc f ne s'annule pas sur $\overline{\Delta}^*(z_0, r)$. Donc $|f - f(z_0)|$ a un minimum $\varepsilon > 0$ sur $\partial\Delta(z_0, r)$. Donc si $w \in \Delta(f(z_0), \varepsilon)$, $f - w$ est holomorphe sur $\overline{\partial}\Delta(z_0, r)$ et ne s'annule pas sur $\partial\Delta(z_0, r)$. Donc le nombre de zéros de $f - w$ dans $\overline{\Delta}(z_0, r)$, comptés avec multiplicités, est

$$N_{\overline{\Delta}(z_0,r)}(f - w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(z_0,r)} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz.$$

C'est une fonction continue de w par continuité d'une intégrale à paramètre, et elle est à valeurs entières. Puisque $\Delta(z_0, r)$ est connexe, elle est constante. Donc

$$N_{\overline{\Delta}(z_0,r)}(f - w) = N_{\overline{\Delta}(z_0,r)}(f) = \sum_{z \in f^{-1}(\{0\}) \cap \Delta(z_0,r)} \deg_z(f) = \deg_{z_0}(f) = d.$$

Comme $d > 0$, on a $f(\Delta(z_0, r)) \supset \Delta(f(z_0), \varepsilon)$, cqfd.

Cette preuve donne un résultat plus précis :

Théorème 2. *Soit f holomorphe et non constante au voisinage de z_0, de degré $\deg_{z_0}(f) = d \in \mathbb{N}^*$. Alors tout point proche de $f(z_0)$ et différent de z_0 a exactement d images réciproques proches de z_0, qui sont toutes de degré un pour f.*

Plus précisément, il existe $r, \varepsilon > 0$ tels que, pour tout $w \in \Delta^*(f(z_0), \varepsilon)$, $f^{-1}(\{w\})$ est formé de d points $z_1, \cdots, z_d$ distincts avec $\deg_{z_i}(f) = 1$ soit $f'(z_i) \neq 0$.

Démonstration. Soient g, r, ε comme dans la preuve du théorème 1. Si $w \in \Delta(f(z_0), \varepsilon)$, $f^{-1}(\{w\}) = \{z_1, \cdots, z_k\}$ avec $\sum_{i=1}^{k} \deg_{z_i}(f) = d$. Si de plus $w \neq f(z_0)$, les z_i sont $\neq z_0$, donc $g(z_i) \neq 0$, d'où

$$f'(z_i) = d(z_i - z_0)^{i-1} g(z_i) + (z_i - z_0)^d g'(z_i) = (z - z_0)^{d-1}(g(z_i) + (z_i - z_0)g'(z_i)).$$

Puisque $g(z_0) \neq 0$, quitte à diminuer r on peut supposer que $g(z) + (z - z_0)g'(z)$ ne s'annule pas sur $\Delta^*(z_0, r)$, donc $f(z_i) \neq 0$ soit $\deg_{z_i}(f) = 1$. Donc $k = d$, ce qui achève la preuve du théorème 2.

8.2 Théorème d'inversion locale

Théorème. *Soit f une fonction holomorphe au voisinage de z_0 telle que $f'(z_0) \neq 0$. Soit r assez petit pour que f soit holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{\Delta}(z_0, r)$ et $f - f(z_0)$ ne s'annule pas sur $\overline{\Delta}^*(z_0, r)$. On note ε le minimum de $|f|$ sur $\partial\Delta(z_0, r)$, qui est donc > 0.*

*Alors f induit une bijection d'inverse holomorphe de $f^{-1}(\Delta(f(z_0), \varepsilon))$, ouvert contenant z_0, sur $\Delta(f(z_0), \varepsilon)$. *De plus, l'inverse est donné par la formule explicite*

$$f^{\circ -1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(z_0,r)} z \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz.*$$

Démonstration. Par hypothèse, $\deg_{z_0}(f) = 1$. D'après la preuve du théorème d'ouverture, on a $N_{\overline{\Delta(z_0,r)}}(f - w) = 1$ pour tout $w \in \Delta(f(z_0), \varepsilon)$. Autrement dit, $f^{-1}(\{w\})$ est réduit à un point $z = f^{\circ -1}(w)$ tel que $\deg_z(f - w) = 1$. Donc f induit une bijection de $f^{-1}(\Delta(f(z_0), \varepsilon))$ sur $\Delta(f(z_0), \varepsilon)$.

Ensuite, soit $g(w)$ la fonction définie par la formule explicite. Fixons w. Si $z_0 = f^{\circ -1}(w)$, on a

$$\begin{aligned} g(w) &= \sum_{z \in f^{-1}(\{w\}) \cap \Delta(z_0,r)} \deg_z(f - w) \operatorname{rés}_z\Big(z\frac{f'(z)}{f(z) - w}\Big) \\ &= \operatorname{rés}_{z_0}\Big(z\frac{f'(z)}{f(z) - w}\Big) \end{aligned}$$

Près de z_0, on a $f(z) - w = (z - z_0)g(z)$ avec $g(z_0) \neq 0$, donc

$$z\Big(\frac{f'(z)}{f(z) - w}\Big) = z\Big(\frac{1}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}\Big) = \frac{z_0}{z - z_0} + 1 + z\frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Donc $\operatorname{rés}_{z_0}\Big(z\frac{f'(z)}{f(z) - w}\Big) = z_0$, soit $f^{\circ -1} = g$. Enfin, l'holomorphie d'une intégrale à paramètre montre que $f^{\circ -1}$ est holomorphe.

8.3 Représentation conforme

Définition. Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{C}$. Une *représentation conforme* de U sur V est une bijection holomorphe ainsi que son inverse. Ceci implique que f' ne s'annule pas et que $(f^{\circ -1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$. On l'appelle aussi *biholomorphisme.* Si $U = V$, on dit que f est un *automorphisme holomorphe* ou *automorphisme conforme* de U.

En fait, l'holomorphie de l'inverse est automatique :

Proposition. *Toute fonction holomorphe injective $f : U \to \mathbb{C}$ a une image ouverte et est une représentation conforme de U sur $f(U)$. En particulier f' ne s'annule pas.*

Démonstration. On sait déjà que $f(U)$ est ouvert. D'après le théorème 2 de la section précédente, si $\deg_{z_0}(f) = d$ tout point de $f(U)$ proche de $f(z_0)$ et différent de $f(z_0)$ a d images réciproques proches de z_0. Comme f est injective, $d = 1$ soit $f'(z_0) \neq 0$. Le théorème d'inversion locale montre que $f^{\circ -1}$ est holomorphe en $f(z_0)$, qcfd.

8.4 Forme normale locale d'une fonction holomorphe

Théorème. *Soit f une fonction holomorphe non constante sur $\Delta(z_0, r)$. Il existe un voisinage ouvert V de z_0 et un biholomorphisme $\varphi : V \to \Delta(0, \varepsilon)$ tels que $\varphi(z_0) = 0$ et $f \circ \varphi^{-1}(z) = z^d$, $d = \deg_z(f)$.*

Démonstration. Quitte à diminuer r, on a $f = (z - z_0)^d g$ avec $\operatorname{Re}\Big(\frac{g(z)}{g(z_0)}\Big) > 0$. Donc la branche principale de $\Big(\frac{g(z)}{g(z_0)}\Big)^{1/d}$ est définie et holomorphe sur $\Delta(z_0, r)$. Posons $\varphi(z) = a\Big(\frac{g(z)}{g(z_0)}\Big)^{1/d}(z - z_0)$, où a est une racine d-ième de $g(z_0)$. Alors $\varphi(z_0) = 0$, φ est holomorphe et $\varphi'(z_0) = a \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites, φ induit un biholomorphisme d'un ouvert V contenant z_0 sur $\Delta(0, \varepsilon)$. Comme

$$\varphi(z)^d = g(z_0)\frac{g(z)}{g(z_0)}(z - z_0)^d = g(z)(z - z_0)^d = f(z),$$

on a bien $f \circ \varphi^{-1}(z) = z^d$.

8.5 Théorème des fonctions implicites

Définition. Une fonction *holomorphe de deux variables* est une fonction $F = F(z, w)$ définie sur un ouvert de $\mathbb{C}^2$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, qui est continue en (z, w) et holomorphe en z et en w. Exemple : un polynôme à deux variables complexes.

Proposition. *Si $F(z, w)$ est holomorphe, $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial w}$ sont aussi holomorphes.*

Démonstration. Il suffit de le prouver pour $\dfrac{\partial F}{\partial z}$. Si F est holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{\Delta}(z_0, r_1) \times \Delta(w_0, r_2)$, on a

$$(\forall (z, w) \in \Delta(z_0, r_1) \times \Delta(w_0, r_2)) \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(z_0, r)} \frac{F(\zeta, w)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Donc la proposition résulte des théorèmes de continuité et d'holomorphie d'intégrales à paramètre.

Théorème. *Soit $F : \Delta(z_0, r_1) \times \Delta(w_0, r_2) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe de deux variables. On suppose que*

$$F(z_0, w_0) = 0 \ , \ \frac{\partial F}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0.$$

1) Il existe $r < r_1$ et $\rho_2 < r_2$ tels que F ne s'annule pas sur $\Delta(z_0, r) \times \partial \Delta(w_0, \rho_2)$.

2) Si 1) est vérifié, il existe $f \in \mathcal{O}(\Delta(z_0, r))$, à valeurs dans $\Delta(w_0, \rho_2)$, telle que

$$(\forall (z, w) \in \Delta(z_0, r) \times \Delta(w_0, \rho_2)) \qquad F(z, w) = 0 \Leftrightarrow w = f(z).$$

**De plus, on a la formule explicite*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(w_0, \rho_2)} w \frac{(\partial F / \partial w)(z, w)}{F(z, w)} dw \, * \, .$$

Démonstration. Notons $\dfrac{\partial F}{\partial w}(z_0, w_0) = a \neq 0$. On a $F(z_0, w) = a(w - w_0) + o(|w - w_0|)$ donc il existe $\rho_2 < r_2$ tel que F ne s'annule pas sur $\{z_0\} \times \partial \Delta(w_0, \rho_2)$. Donc $|F|$ a un minimum $m > 0$ sur le compact $\partial \{z_0\} \times \Delta(w_0, \rho_2)$. Par continuité uniforme de F sur $\overline{\Delta}(z_0, r_1/2) \times \partial \Delta(w_0, \rho_2)$, il existe $r < r_1/2$ tel que F ne s'annule pas sur $\Delta(z_0, r) \times \partial \Delta(w_0, \rho_2)$.

2) Fixons $z \in \Delta(z_0, r)$. Alors la fonction $g_z = F(z, .)$ est holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{\Delta}(w_0, \rho_2)$ et ne s'annule pas sur $\partial \Delta(w_0, \rho_2)$. Donc le nombre des solutions $w \in \Delta(w_0, \rho_2)$ de $F(z, w) = 0$, compté avec multiplicités, est

$$\begin{aligned} \delta(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(w_0, \rho_2)} \frac{g_z'(w)}{g_z(w)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(w_0, \rho_2)} \frac{(\partial F / \partial w)(z, w)}{F(z, w)} dw. \end{aligned}$$

C'est une fonction continue à valeurs entières, donc

$$\delta(z) = \delta(z_0) = \sum_{w \in \Delta(w_0, \rho_2), g_{z_0}(w) = 0} \deg_{w_0}(g_{z_0}) = 1.$$

Donc pour tout $z \in \Delta(z_0, r)$ il y a un unique $w \in \Delta(w_0, \rho_2)$ on a $F(z, w) = 0$. Donc on a bien une fonction $f : \Delta(z_0, r) \to \Delta(w_0, \rho_2)$ telle que $F(z, w) = 0 \Leftrightarrow w = f(z)$.

Prouvons la formule explicite. Soit $g(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial\Delta(w_0,\rho_2)} w\frac{(\partial F/\partial w)(z,w)}{F(z,w)}dw$, on veut montrer $g = f$. On a

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{w\in\Delta(w_0,\rho_2),g_z(w)=0} \text{rés}_w\Big(w\frac{g_z'(w)}{g_z(w)}\Big) \\ &= \text{rés}_{f(z)}\Big(w\frac{g_z'(w)}{g_z(w)}\Big). \end{aligned}$$

Comme $\deg_{f(z)}(g_z) = 1$, ceci vaut $f(z)$ par le même calcul que pour l'inversion locale. Enfin, l'holomorphie d'une intégrale à paramètre montre que f est holomorphe.

9 Indice, cycles, formule de Cauchy générale

9.1 Homotopie de lacets

Définition. Si $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to$ sont deux lacets définis sur le même segment $[a,b]$, une *homotopie* de γ_0 à γ_1 dans U est une application $H : [0,1] \times [a,b]$ dans U, telle que

$$H(0,t) = \gamma_0(t)\ ,\ H(1,t) = \gamma_1(t)\ ,\ H(s,a) = H(s,b),$$

et qui est de classe C^1 par morceaux : ceci veut dire que H est continue et qu'il existe des subdivisions $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ et $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ telle que $H_{|[s_i,s_{i+1}]\times[t_j,t_{j+1}]}$ est de classe C^1. Noter que $\gamma_s = H(s,.)$ est un lacet pour tout $s \in [0,1]$.

Il est clair que $(s,t) \mapsto \gamma(s)$ est une homotopie de γ_0 à lui-même, et que $(s,t) \mapsto H(1-s,t)$ est une homotopie de γ_1 à γ_0. De plus, si $(s,t) \mapsto H_1(s,t)$ est une homotopie de γ_1 à γ_2, on peut définir une homotopie de γ_0 à γ_2 par *concaténation* :

$$(H * H_1)(s,t) = \begin{cases} H(2s,t) \text{ si } s \leq \dfrac{1}{2} \\ H_1(2s-1,t) \text{ si } s \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Donc la relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur les lacets $[a,b] \to U$. Cette relation se note $\gamma_0 \simeq_U \gamma_1$, ou $\gamma \simeq \gamma_1$ en sous-entendant U.

9.2 Indice d'un lacet par rapport à un point

Définition. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z\}$ un lacet. *L'indice de γ par rapport à z :*

$$\mathrm{Ind}_z(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{\zeta - z}.$$

On l'appelle aussi *indice de z par rapport à γ*, et on le note alors $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$. Le théorème suivant exprime le fait que $\mathrm{Ind}_z(\gamma)$ est le «nombre de tours que fait γ autour de z».

Théorème

1) L'indice de γ par rapport à z est un entier.

2) Si $n \in \mathbb{Z}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\mathrm{Ind}_z(\gamma) = n$

b) γ est homotope dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ à $\gamma_n : t \mapsto z_0 + \exp(2\pi i n \frac{t-a}{b-a})$.

3) La fonction Ind_γ *est constante sur chaque composante connexe de* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma)$. *Elle est nulle sur la composante non bornée.*

Démonstration. Quitte à remplacer γ par $z_0 + \gamma(a + (b-a)t)$, on peut supposer $z_0 = 0$ et $[a,b] = [0,1]$. Donc $\gamma_n(t) = \exp(2\pi i n t)$.

1) Posons

$$\ell_\gamma(t) = \int_{\gamma_{|[0,t]}} \frac{dz}{z} = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds,$$

de sorte que $\mathrm{Ind}_0(\gamma(0)) = \dfrac{\ell_\gamma(1)}{2\pi i}$. Puisque $\dfrac{1}{z}$ est la dérivée du logarithme, $\ell_\gamma(t)$ est une branche de $\log \gamma(t)/\gamma(0)$. Précisément, on a

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t)e^{-\ell_\gamma(t)}) = (\gamma'(t) - \gamma(t)\ell'_\gamma(t))e^{-\ell_\gamma(t)} = \Big(\gamma'(t) - \gamma(t)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\Big)e^{-\ell_\gamma(t)} = 0.$$

Donc $\gamma(t)e^{-\ell_\gamma(t)} = \gamma(0)$ soit $\gamma(t) = \gamma(0)e^{\ell_\gamma(t)}$. Puisque $\gamma(0) = \gamma(1)$, $\ell_\gamma(1) - \ell_\gamma(0) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, ce qui prouve 1).

2) Si $\gamma = \gamma_n$, on a $\ell_\gamma(t) = 2\pi int$ donc $\mathrm{Ind}_0(\gamma_n) = n$. Montrons l'invariance de l'indice par homotopie. Soit $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}^*$ une homotopie C^1 par morceaux, de sorte que $\gamma_s = H(s,.)$ est un lacet. Alors

$$\mathrm{Ind}(\gamma_s) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_s'(t)}{\gamma_s(t)}dt.$$

Par continuité d'une intégrale à paramètre, la fonction $s \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma_s)$ est continue. Comme elle est à valeurs entières, elle est constante, d'où $\mathrm{Ind}_z(\gamma_0) = \mathrm{Ind}_z(\gamma_1)$ ce qui prouve l'invariance par homotopie.

Donc $\mathrm{Ind}_0(\gamma) = n$ si γ est homotope à γ_n dans $\mathbb{C}^*$. Réciproquement, supposons $\mathrm{Ind}_0(\gamma) = n$, soit $\ell_\gamma(1) = 2\pi in$. Soit λ tel que $e^\alpha = \gamma(0)$. Alors $H(s,t) = e^{(1-s)\alpha}\gamma(t)$ donne une homotopie dans $\mathbb{C}^*$ de γ à $\widetilde{\gamma}$ tel que $\widetilde{\gamma}(0) = 1$. On peut donc supposer $\gamma(0) = 1$. Posons

$$H(s,t) = \exp((1-s)\ell_\gamma(t)) + s.2\pi int)$$

Alors

$$\begin{aligned}&H(0,t) = \exp(\ell_\gamma(t)) = \gamma(t)\ ,\ H(1,t) = \exp(2\pi int) = \gamma_n(t)\\ &H(s,0) = 1\ ,\ H(s,1) = \exp(2\pi in) = 1.\end{aligned}$$

Donc H est une homotopie de lacets dans $\mathbb{C}^*$ de γ à γ_n, cqfd.

3) La fonction $z \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma)$ et à valeurs entières, donc constante sur chaque composante connexe. Sur la composante non bornée, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = O(|z|^{-1})$ quand $z \to \infty$. Donc $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ sur cette composante.

9.3 Chaînes et cycles

Définitions. Soit U une région. Notant $C(U)$ l'ensemble des chemins à valeurs dans U, on définit le groupe des *chaînes* $\mathcal{C}(U)$ comme le $\mathbb{Z}$-module libre de base $C(U)$, soit $\mathcal{C}(U) = \mathbb{Z}^{C(U)}$. Une chaîne est donc une combinaison linéaire à coefficients entiers d'un nombre fini d'éléments de $C(U)$:

$$c = n_1c_1 + \cdots + n_kc_k\ ,\ n_i \in \mathbb{Z}.$$

Si les cI sont distincts et les n_i non nuls, cette représentation est finie. On note alors $\mathrm{supp}(c) = \mathrm{im}\ c_1 \cup \cdots \cup \mathrm{im}\ c_k$, appelé *support* de c. Si $k = 0$, on obtient la chaîne nulle, de support $\emptyset$.

Si f est une fonction continue sur U, on définit

$$\int_c f(z)dz = \sum_{i=1}^k n_i \int_{c_i} f(z)dz.$$

On définit une relation d'équivalence

$$c \sim c' \Leftrightarrow (\forall f \in C^0(U,\mathbb{C}))\quad \int_c f(z)dz = \int_{c'} f(z)dz.$$

En particulier, on reste dans la même classe d'équivalence si l'on subdivise les chemins c_i, ou si l'on remplace ou si on les reparamètre de façon directe. On a aussi $c \sim -c'$ si c' est un reparamétrage indirect de γ. De plus, cette relation est clairement compatible avec la loi de groupe.

Cycles. Un *cycle* dans U est une chaîne équivalente à une combinaison linéaire de lacets. Les cycles forment clairement un sous-groupe de $\mathcal{C}(U)$, que nous noterons $\mathcal{Z}(U)$. Les deux exemples de cycles les plus importants sont :

• $\gamma = c - c'$, où c et c' sont deux chemins de mêmes extrémités

• si Ω est un domaine compact, son bord orienté donne une classe d'équivalence de cycles, ayant un représentant de support $\partial\Omega \subset \mathbb{C}$. On notera aussi $\partial\Omega \in \mathcal{Z}(U)$ n'importe quel représentant ayant ce support. La notation $\displaystyle\int_{\partial\Omega}$ garde le même sens qu'avant.

Proposition. *Soit* $\gamma = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i c_i$ *une chaîne dans* U*.*

1) C'est un cycle si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i(c_i(1) - c_i(0)) = 0$ *comme combinaison linéaire formelle de points de* U*, soit*

$$(\forall z \in U) \qquad \sum_{i, c_i(1)=z} n_i - \sum_{i, c_i(0)=z} n_i = 0.$$

2) Si γ *est un cycle, il est équivalent à une combinaison linéaire de lacets de supports contenus dans* $\mathrm{supp}(c)$*.*

Démonstration. 1) Supposons que γ est un cycle. Si $z \in U$, il existe $f \in \mathcal{O}(U)$ telle que $f(z) = 1$, $f(c_i(0)) = 0$ si $c_i(0) \neq z$, $f(c_i(1)) = 0$ si $c_i(1) \neq z$ (par exemple un polynôme). Alors

$$\int_c f'(\zeta) d\zeta = 0 = \sum_{i=1}^{k} n_i(f(c_i(1)) - f(c_i(0)) = \sum_{i, c_i(1)=z} n_i - \sum_{i, c_i(0)=z} n_i.$$

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i(c_i(1) - (c_i(0)) = 0$.

Réciproquement, supposons que cette propriété est satisfaite. Remplaçant c_i par un reparamétrage indirect si $n_i < 0$, ce qui conserve la propriété et la classe d'équivalence, on peut supposer que tous les n_i sont positifs.

On prouve que γ est un cycle par récurrence sur $n_1 + \cdots + n_k$. Il existe $i_1 \in \{1, \cdots, k\}$ tel que $c_{i_1}(0) = c_1(1)$, puis i_2 tel que $c_{i_2}(0) = c_{i_1}(1)$, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à $i_k = 1$. Alors $\gamma_1 = c_1 + c_{i_1} + \cdots + c_{i_{k-1}}$ est équivalent au lacet $c_1 * c_{i_1} * \cdots * c_{i_{k-1}}$ donc est un cycle. La chaîne $\gamma - \gamma_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i c_i$ vérifie $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i(c_i(1) - c_i(0)) = 0$, ainsi que $m_i \geq 0$ et $m_1 + \cdots + m_k = n_1 + \cdots + n_k - k < n_1 + \cdots + n_k$. Par hypothèse de récurrence, c'est un cycle, donc γ aussi.

2) Dans la preuve de 1), nous avons montré que tout cycle $\gamma = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i c_i$ est équivalent à une somme de lacets qui sont obtenus par concaténation des c_i ou de reparamétrages indirects, donc de support contenus dans $\mathrm{supp}(\gamma)$.

Indice d'un point par rapport à un cycle. Si γ est un cycle dans U et $z \notin \mathrm{supp}(\gamma)$, on définit l'indice de γ par rapport à z comme pour un lacet :

$$\mathrm{Ind}_z(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Puisque γ est équivalent à une somme de lacets dans $U \setminus \{z\}$, $\mathrm{Ind}_z(\gamma)$ est un entier. Et comme dans le cas d'un lacet, la fonction Ind_γ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\gamma)$, et nulle sur la composante non bornée.

Cycles homologues à zéro. On dit que $\gamma \in \mathcal{Z}(U)$ est *homologue à zéro* dans U si $\mathrm{Ind}_z(\gamma) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus U$. L'ensemble des cycles homologues à zéro (ou «bords») est un sous-groupe de $\mathcal{Z}(U)$ noté $\mathcal{B}(U)$.

9.4 Indice du bord d'un domaine par rapport à un point

Théorème. *Soit Ω un domaine compact.*

1) Si $z \notin \Omega$, $\mathrm{Ind}_z(\partial\Omega) = 0$.

2) Si $z \in \mathrm{Int}(\Omega)$, $\mathrm{Ind}_z(\partial\Omega) = 1$.

Démonstration. 1) Cela résulte de la formule de Cauchy appliquée à $\zeta \mapsto \dfrac{1}{\zeta - z}$, fonction holomorphe au voisinage de Ω.

2) Les composantes connexes de Ω sont encore des domaines compacts. Le point z est dans un seul d'entre eux, son indice par rapport au bord des autres est nul d'après 1). Donc on peut supposer Ω connexe. Alors $\mathbb{C} \setminus \Omega$ a une composante connexe non bornée et n composantes connexes bornées $U_1, \cdots, U_n$. On choisit R assez grand pour que $\Omega \subset \Delta(0, R)$. Alors

$$\Omega_0 = \overline{\Delta}(0, R) \setminus (\mathrm{Int}\,\Omega \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n)\ ,\ \Omega_i = \overline{U}_i\ ,\ i = 1, \cdots, n,$$

sont des domaines compacts ne contenant pas z.

Écrivons $\partial\Omega = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$ où C_0 est le bord de la composante connexe bornée et $C_i = \partial\Omega_i$, $i \geq 1$. Orientant C_0 comme partie du bord de Ω et C_i, $i \geq 1$, comme bord de U_i, on a les égalités de classes d'équivalence de cycles :

$$\begin{aligned} \partial\Omega &= C_0 - (C_1 + \cdots + C_n) \\ \partial\Omega_0 &= \partial\Delta(0, R) - C_0 \\ \partial\Omega_i &= C_i\ ,\ i \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $\partial\Omega = \partial\Delta(0, R) - \partial\Omega_0 + \sum_{i=1}^{n} \partial\Omega_i$, d'où $\mathrm{Ind}_z(\partial\Omega) = \mathrm{Ind}_z(\partial\Delta(0, R)) - \mathrm{Ind}_z(\partial\Omega_0) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}_z(\partial\Omega_i)$. Puisque les Ω_i ne contiennent pas z, d'après 1) il reste $\mathrm{Ind}_z(\partial\Omega) = \mathrm{Ind}_z(\partial\Delta(0, R))$. Puisque $z \in \Delta(0, R)$, ceci vaut 1, cqfd.

9.5 Formules de Cauchy et des résidus générales

Lemme (approximation d'une région par un domaine). *Si U est une région de $\mathbb{C}$ et K un compact de U, il existe un domaine compact connexe $\Omega \subset U$ tel que $K \subset \mathrm{Int}(\Omega)$.*

Démonstration. On découpe le plan en carrés fermés de côté $\varepsilon/2$ d'intérieurs disjoints. Soit E la réunion des carrés qui rencontrent K et sont contenus dans U. Puisque la distance de K à $\mathbb{C} \setminus U$ est minorée, E contient K pour ε assez petit. Il est compact puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de carrés.

On rend E connexe en ajoutant un nombre fini de chemins polygonaux horizontaux et verticaux, obtenant ainsi un compact E_1. Puis on rajoute tous les points qui sont à une distance horizontale ou verticale de E_1 au plus égale à δ, où δ est assez petit. On obtient ainsi le domaine Ω cherché.

Corollaire. *Soit γ un cycle homologue à zéro dans U. Alors il existe un domaine compact connexe Ω contenant* $\mathrm{supp}(\gamma)$ *dans son intérieur et tel que γ est homologue à zéro dans* $\mathrm{Int}(\Omega)$.

Démonstration. Par hypothèse, $\mathrm{Ind}_z(\gamma) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus U$. C'est aussi vrai pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta(0R)$ si R est assez grand pour que $\mathrm{supp}(\gamma) \subset \Delta(0, R)$. Donc $\mathrm{Ind}_z(\gamma) = 0$ sur le compact $C = \mathrm{Fr}(\Omega) \cup \partial\Delta(0, R)$. Donc pour ε assez petit on a $\mathrm{Ind}_z(\gamma) = 0$ sur $U \setminus K_\varepsilon$, où $K_\varepsilon = \{z \in U \cap \Delta(0, R) : d(z, C) \leq \varepsilon\}$. Par le lemme, il existe Ω domaine compact connexe contenu dans U et contenant K_ε dans son intérieur. Donc $\mathrm{Ind}_z(\gamma) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Théorème. *Soient U une région de $\mathbb{C}$ et $\gamma \in \mathcal{B}(U)$ un cycle homologue à zéro.*

1) Si $f \in \mathcal{O}(U)$, on a $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$.

2) Si $f \in \mathcal{O}(U)$ et $z \in U \setminus \operatorname{supp}(\gamma)$, on a $\displaystyle\operatorname{Ind}_z(\gamma)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$.

3) Soit $f \in \mathcal{O}(U \setminus D)$ où $D \subset U$ est discret et fermé et $\operatorname{supp}(\gamma) \cap D = \emptyset$. Alors $\{z \in D : \operatorname{ind}_z(\gamma) \neq 0\}$ est fini et $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{z \in D} \operatorname{Ind}_z(\gamma)\text{rés}_w(f)$.

1) Soit Ω donné par le corollaire. On a donc $\operatorname{Ind}_z(\gamma) = 0$ si $z \in \partial\Omega$. Appliquant à $f(z)$, $z \in \operatorname{supp}(\gamma)$, la représentation de Cauchy sur Ω et intégrant sur γ, il vient

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_\gamma \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\Big)dz \\ &= \int_{\partial\Omega} f(\zeta)\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{\zeta - z}\Big)d\zeta \\ &= -\int_{\partial\Omega} f(\zeta)\operatorname{Ind}_\zeta(\gamma)d\zeta \\ &= 0.\end{aligned}$$

2) Pour $z \in U$ fixé, la fonction

$$\zeta \mapsto g_z(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \text{ si } \zeta \neq z \\ f'(z) \text{ si } \zeta = z \end{cases}$$

est holomorphe sur U. Supposons maintenant $z \notin \operatorname{supp}(\gamma)$. Appliquant 1), puisque $\zeta \neq z$ si $\zeta \in \operatorname{supp}(\gamma)$, il vient

$$\int_\gamma g_z(\zeta) = 0 = \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \int_\gamma \frac{f(z)d\zeta}{\zeta - z}$$

Donc

$$\operatorname{Ind}_z(\gamma)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

3) D'après 1), $E = \{z \in D : \operatorname{Ind}_z(\gamma) \neq 0\}$ est contenu dans $\{z \in \mathbb{C} : d(z, \operatorname{Fr}(U)) \geq \varepsilon\}$, est contenau dans Ω donc ne rencontre qu'un nombre fini de points de D.

Ensuite, pour chaque $z \in D$ choisissons un disque $\overline{\Delta}(z, r_z)$ contenu dans $U \setminus \operatorname{supp}(\gamma)$, et que tous ces disques soient disjoints. Considérons le cycle

$$\gamma' = \gamma - \sum_{z \in D} \operatorname{Ind}_z(\gamma)\partial\Delta(z, r_z) \in \mathcal{Z}(U \setminus D).$$

Si $z \in D$ on a $\operatorname{Ind}_z(\gamma') = \operatorname{Ind}_z(\gamma) - \displaystyle\sum_{w \in D} \operatorname{Ind}_w(\gamma)\operatorname{Ind}_z(\partial\Delta(w, r_w))$. Puisque les disques $\overline{\Delta}(w, r_w)$ sont disjoints, $\operatorname{Ind}_z(\partial\Delta(w, r_w)) = 1$ si $w = z$ et 0 sinon, donc $\operatorname{Ind}_z(\gamma') = 0$. Donc γ' est homologue à zéro dans $U \setminus D$. On peut donc appliquer 1) à $U \setminus D$, γ' et f :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma'} f(z)dz = 0 &= \int_\gamma f(z)dz - \sum_{w \in D} \operatorname{Ind}_w(\gamma)\int_{\partial\Delta(w, r_w)} f(z)dz \\ &= \int_\gamma f(z)dz - \sum_{w \in D} \operatorname{Ind}_w(\gamma)\text{rés}_w(f).\end{aligned}$$

Ceci prouve 3).

10 Régions simplement connexes

10.1 Régions simplement connexes et ouverts homologiquement triviaux

Définitions. Une région est *simplement connexe* si tout lacet dans U est homotope à un lacet constant dans U. Elle est *homologiquement triviale* si tout cycle $\gamma \in \mathcal{Z}(U)$ est homologue à zéro dans U, soit $\mathrm{Ind}_z(\gamma) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus U$.

Proposition. *Si U est simplement connexe, U est homologiquement trivial.*

Démonstration. Cela résulte de l'invariance de l'indice par homotopie et du fait que $\mathrm{Ind}_z(\gamma) = 0$ si γ est un lacet constant.

Remarque. Nous verrons que la réciproque est vraie.

Exemples. Tout ouvert convexe, ou plus généralement étoilé par rapport à un point $z_0 \in U$, est simplement connexe : on a une homotopie de γ à la constante z_0 donnée par $H(s,t) = (1-s)\gamma(t) + sz_0$. En particulier, c'est le cas de Δ ou de $\mathbb{H}$.

En revanche, $\mathbb{C}^*$ n'est pas n'est pas homologiquement trivial, donc pas simplement connexe : le lacet $\exp(2\pi i t)$ a un indice non nul, donc n'est pas homotope à une constante.

Remarque. Le théorème d'uniformisation de Riemann impliquera la réciproque de cette proposition.

Proposition. *Supposons que U est homologiquement trivial (en particulier simplement connexe), et soit $f \in \mathcal{O}(U)$. Alors*

1) On a $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$ pour tout cycle $\gamma \in \mathcal{Z}(U)$.

2) Si c est un chemin dans U de z_0 à z_1, l'intégrale $\displaystyle\int_c f(z)dz$ ne dépend que de z_0 et z_1, donc on peut la noter $\displaystyle\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$.

3) La fonction f a une primitive, donnée par $F(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ où $z_0 \in U$ est fixé.

4) Si f ne s'annule pas, elle admet un logarithme holomorphe, et une racine n-ième holomorphe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. 1) est une application immédiate de la formule de Cauchy générale. 2) résulte de 1) dans le cas particulier $\gamma = c_1 - c$, où c_1 est un autre chemin de $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$. 3) est un argument déjà vu au début du cours, utilisant la «formule de Chasles» :

$$F(z+h) - F(z) = \Big(\int_{z_0}^{z} f(z)dz + \int_{z}^{z+h} f(z)dz \Big) - \int_{z_0}^{z} f(z)dz = \int_{z}^{z+h} f(z)dz = (f(z) + o(1))h.$$

Donc F est $\mathbb{C}$-dérivable en z et $F'(z) = f(z)$.

4) Un logarithme holomorphe de f est $F(z) = c + \displaystyle\int_{z_0}^{z} \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ où c est un logarithme de $f(z_0)$. En effet, $(fe^{-F})' = (f' - fF')e^F = 0$. Donc $f = Ce^F$, et $C = 1$ puisque $e^{F(z_0)} = f(z_0)$, donc $e^F = f$. Une racine n-ième de f est alors $\exp \dfrac{F}{n}$.

Proposition. *Si U est une région, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) U est homologiquement trivial

2) $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ est connexe.

3) Toute composante connexe de $\mathbb{C} \setminus U$ est non bornée.

Démonstration. 2) $\Leftrightarrow$ 3). Si C est une composante de $\mathbb{C} \setminus U$, son adhérence $\overline{C}$ dans $\overline{\mathbb{C}}$ est C si elle borné, $C \cup \{\infty\}$ si elle est non bornée. Donc 3) équivaut à : toute composante connexe de $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ contient ∞, c'est-à-dire : $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ est connexe.

3) $\Rightarrow$ 1). Pour tout cycle γ dans U, $\mathrm{Ind}_z(\gamma)$ est constant sur toute composante connexe de $\mathbb{C} \setminus U$. Comme celle-ci est non bornée et $\mathrm{Ind}_z(\gamma) = 0$ hors du compact $\mathrm{supp}(\gamma)$, $\mathrm{Ind}_z(\gamma) = 0$ sur $\mathbb{C} \setminus U$ totu entier. Donc U est homologiquement trivial.

1) $\Rightarrow$ 3). Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$. Soit $\Omega \subset U$ un domaine compact. Alors la composante connexe de z_0 dans $\mathbb{C} \setminus \Omega$ n'est pas bornée : en effet, elle serait alors l'intérieur d'un domaine compact Ω_0, et $\partial\Omega_0$ serait un cycle dans U tel que $\mathrm{Ind}_z(\partial\Omega_0) = 1$, contredisant le fait que U est homologiquement trivial.

Par le lemme d'approximation, on peut écrire U comme une réunion de domaines compacts Ω_n, $n \in \mathbb{N}$, avec $\Omega_n \subset \mathrm{Int}(\Omega_{n+1})$. Soit C_n la composante connexe de z_0 dans $\mathbb{C} \setminus \Omega_n$. L'adhérence $\overline{C}_n$ dans $\overline{\mathbb{C}}$ est compacte, connexe, contient $\{\infty\}$ puisque C_n est non bornée, et $\overline{C}_n \supset \overline{C}_{n+1}$. Donc l'intersection des $\overline{C}_n$ est connexe et contient $\{z_0, \infty\}$. De plus, elle est contenue dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$, donc la composante connexe de z_0 dans $\mathbb{C} \setminus U$ est non bornée.

Remarque. Si $\mathbb{C} \setminus U$ est connexe et non borné, $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ est son adhérence dans $\overline{\mathbb{C}}$, donc est connexe. Si $\mathbb{C} \setminus U$ est connexe et borné, $\{\infty\}$ est une composante connexe de $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$. C'est la seule, c'est-à-dire que $U = \mathbb{C}$.

En revanche, on peut avoir $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ connexe et $\mathbb{C} \setminus U$ non connexe, même avec un nombre non dénombrable de composantes connexes : $U = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\theta} : r \geq 1 \text{ et } e^{i\theta} \in V\}$, où V est un ouvert quelconque de S^1, par exemple le complémentaire d'un Cantor.

10.2 Lemme de Schwarz

Théorème. *Soit f une fonction holomorphe telle que $f(\Delta) \subset \Delta$ et $f(0) = 0$.*

1) On a $|f'(0)| \leq 1$.

2) Si $|f'(0)| = 1$, on a $f(z) = f'(0)z$. Géométriquement, f est une rotation de centre 0.

3) On a $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \Delta$. Si on a égalité en un point $z \neq 0$, f est une rotation de centre 0.

Démonstration. 1) La fonction $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ se prolonge holomorphiquement à Δ en posant $g(0) = f'(0)$. Par principe du maximum, pour tout $r \in]0, 1[$ on a

$$|g_{|\Delta(0,r)}| \leq \max_{\partial\Delta(0,r)} |g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Faisant tendre r vers 1, on obtient $|g| \leq 1$ et en particulier $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.

2) Puisque $|g| \leq r^{-1}$ sur Δ_r, on a $|g| \leq 1$ sur Δ. Donc $|g|$ a un maximum en 0, donc g est constante égale à $g(0) = f'(0)$, soit $f(z) = f'(0)z$.

3) Puisque $|g(z)| \leq 1$, on a $|f(z)| = |zg(z)| \leq |z|$. Si on a égalité en un point $z \neq 0$, $|g|$ a un maximum local égal à 1 en ce point, donc est une constante de module 1. Autrement dit, f est une rotation de centre 0.

10.3 Automorphismes du disque ou du demi-plan

Nous avons vu que le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ agit par automorphismes holomorphes (ou conformes) sur le demi-plan supérieur, par homographies :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto h_A\ ,\ h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Par ailleurs, il y a une représentation conforme du demi-plan sur le disque unité Δ :

$$z \in \mathbb{H} \mapsto w = \varphi(z) = \frac{z-i}{z+i} \in \Delta \ , \ \varphi^{-1}(w) = i\frac{1+w}{1-w}.$$

Donc on a une action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur Δ via $\widetilde{h}_A = \varphi \circ h_A \circ \varphi^{-1}$. Le groupe $H(\Delta)$ d'automorphismes de Δ ainsi obtenu est celui des homographies h_A, $A = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ telles que $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Elles s'écrivent aussi sous une forme un peu plus parlante :

$$h_{a,e^{i\theta}}(z) = e^{i\theta}\frac{z+a}{1+\overline{a}z} \ , \ e^{i\theta} \in \mathbb{U} \ , \ a \in \Delta.$$

En particulier, nous noterons

$$h_a(z) = h_{a,1}(z) = \frac{z+a}{1+\overline{a}z}.$$

Notons que $h_a(0) = a$, $h_a^{-1} = h_a$ et que $h_a'(0) = 1 - |a|^2$, $h_a'(-a) = (1-|a|^2)^{-1}$.

Théorème. *Les automorphismes holomorphes de Δ sont exactement $H(\Delta)$.*

Démonstration. Soit φ un tel automorphisme. Notons $\varphi(0) = a \in \Delta$, $\psi = h_{-a} \circ \varphi$, automorphisme de Δ fixant 0. Par lemme de Schwarz appliqué à ψ et à ψ^{-1}, $|\psi'(0)| = 1$, donc $\psi(z) = e^{i\theta}z$, soit $\varphi = h_{ae^{i\theta},e^{i\theta}}$, cqfd.

Corollaire. *Les automorphismes holomorphes de $\mathbb{H}$ sont les homographies associées à* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

10.4 Théorème de représentation conforme de Riemann

Théorème. *Soit U un ouvert simplement connexe, ou plus généralement homologiquement trivial, différent de $\mathbb{C}$. Alors admet une représentation conforme sur le disque unité Δ. De plus, celle-ci est unique si l'on impose $f(z_0) = 0$ et $f'(z_0) > 0$.*

Démonstration. On va seulement utiliser l'existence d'une racine carrée holomorphe pour toute fonction holomorphe ne s'annulant pas. L'idée (s'inspirant du cas d'égalité dans le lemme de Schwarz) est de trouver f en maximisant $|f'(z_0)|$.

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus U$, la fonction $z - a$ ne s'annule pas sur U, donc admet une racine carrée g. Cette fonction est holomorphe et non constante donc est ouverte : $g(U)$ contient un disque fermé $\overline{\Delta}(w_0, r)$. Par ailleurs, elle ne prend jamais deux valeurs opposées $g(z_1) = -g(z_2)$, puisque $g(z_i)^2 = z_i - a$ et $z_1 - z_2 \neq 0$. Donc $g(U) \cap \overline{\Delta}(-w_0, r) = \emptyset$, soit $|g(z) + w_0| > r$ sur U. Donc la fonction

$$f_0 = \frac{1}{2}\Big(\frac{r}{g+w_0} - \frac{r}{g(z_0)+w_0}\Big)$$

est holomorphe et à valeurs dans Δ. Elle est aussi clairement injective, et vérifie $f(z_0) = 0$. Notons que l'injectivité implique $f_0'(z_0) \neq 0$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{O}(U)$ qui sont injectives, à valeurs dans Δ, telles que $f(z_0) = 0$ et $|f'(z_0)| \geq |f_0'(z_0)| > 0$. Si $f \in \mathcal{F}$, notons $r_f = \min\{|z| : z \in \Delta \setminus f(U)\}$ si $f(U) \neq \Delta$, 1 sinon.

Lemme. *Si $f \in \mathcal{F}$, il existe $g \in \mathcal{F}$ telle que* $\dfrac{|g'(z_0)|}{|f'(z_0)|} = \dfrac{1+r_f}{2r_f}$.

Démonstration. Si $r_f = 1$, il n'y a rien à montrer. Si $r_f < 1$, il existe $a \in \Delta \setminus f(U)$ tel que $|a| = r_f$. On pose $g(z) = h_{-\sqrt{-a}}(\sqrt{h_{-a}(f(z))}$ où $\sqrt{\ }$ est une branche de la racine carrée définie sur

$h_{-a}(f(U))$, ouvert simplement connexe ne contenant pas 0, et $\sqrt{-a}$ sa valeur en $-a = h_{-a}(f(z_0))$. Cette fonction est holomorphe et injective dans U, $g(z_0) = 0$, et l'on a

$$\begin{aligned}\frac{g'(z_0)}{f'(z_0)} &= h'_{-\sqrt{-a}}(-\sqrt{-a}).\frac{1}{2\sqrt{-a}}.h'_{-a}(0) = \\ &= (1-|a|)^{-1}.\frac{1}{2\sqrt{-a}}.(1-|a|^2).f'(z_0) \\ &= \frac{1+|a|^2}{2\sqrt{|a|}} = \frac{1+r_f}{2r_f}.\end{aligned}$$

Premiȓe preuve du théorèm d'uniformisation. La famille $\mathcal{F}$ est uniformément bornée, donc on peut lui appliquer le théorème de Montel : toute suite dans $\mathcal{F}$ a une sous-suite convergente. De plus, toutes les dérivées sont localament uniformément bornées. Donc il existe une suite $(f_n \in \mathcal{F})$ telle que $|f'_n(z_0)| \to \sup_{g\in\mathcal{F}} |g'(z_0)| < \infty$. Quitte à extraire, f_n converge vers f holomorphe de U dans Δ. De plus, $|f'(z_0)| \geq |f'_0(z_0)| > 0$, donc f est injective par Rouché, donc $f \in \mathcal{F}$. Donc f maximise $|f'(z_0)|$ dans $\mathcal{F}$. Si f n'était pas surjective, on aurait $r_f > 1$, et le lemme donnerait $\dfrac{|g'(z_0)|}{|f'(z_0)|} > 1$, contredisant la maximalité de $|f''z_0)|$. Donc f est surjective, donc c'est un biholomorphisme de I sur Δ.

Seconde preuve (à préciser en exercice). Partant de f_0 et appliquant le lemme de façon répétée, on construit une suite $(f_n \in \mathcal{F})$ telle que, si $r_{f_n} = r_n$, on a $r_n \leq r_{n+1} \leq 1$ et $\dfrac{|f'_{n+1}(z_0)|}{|f'_n(z_0)|} = \dfrac{1+r_n}{2\sqrt{r_n}}$. Puisque $|f'_n(z_0)| \leq C < \infty$, $\prod \dfrac{1+r_n}{2\sqrt{r_n}} < \infty$, donc $r_n \to 1$. Il existe une sous-suite f_{n_k} qui converge vers $f \in \mathcal{F}$. De plus, la suite $f_{n_k}^{-1}$ est définie sur $\Delta(0, r_{n_k})$ et vérifie $f_{n_k}^{-1}(0) = z_0$, $|(f_{n_k}^{-1})'(0)| \leq |(f_0^{-1})'(0)| < \infty$. Donc elle a une sous-suite convergente $f_{n_{k_\ell}} \to g$. Finalement, g est l'inverse de f, donc f est un biholomorphisme.

Unicité. On vient de trouver une représentation conforme $f : U \to \Delta$ telle que $f(z_0) = 0$. Quitte à remplacer f par $e^{i\theta}f$, on peut imposer $f'(z_0) > 0$. Si g est une autre application avec les mêmes propriétés, $\varphi = g \circ f^{-1}$ est un automorphisme de Δ tel que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = f'(z_0)g'(z_0)^{-1} > 0$. Donc φ est l'identité, soit $f = g$. Ceci achève la preuve du théorème.

11 Métrique hyperbolique

11.1 Lemme de Schwarz-Pick

Théorème. *Soit f une fonction holomorphe telle que $f(\Delta) \subset \Delta$.*

1) Pour tout $z \in \Delta$, on a $\dfrac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \dfrac{1}{1-|z|^2}$. De plus, si on a égalité en un point, f est un automorphisme de Δ et on a égalité partout.

2) Si $z_1 \neq z_2$, on a $\left|\dfrac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right| \leq \left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\overline{z}_1 z_2}\right|$. De plus, si on a égalité pour un couple (z_1, z_2), f est un automorphisme de Δ et on a toujours égalité.

Démonstration. 1) Soit $g = h_{-f(z)} \circ f \circ h_z$. Alors $g(\Delta) \subset \Delta$ et $g(0) = 0$, donc $|g'(0)| \leq 1$ par le lemme de Schwarz. Or

$$g'(0) = h'_{-f(z)}(f(z)).f'(z).h'_z(0) = \frac{1}{1-|f(z)|^2}.f'(z).(1-|z|^2)$$

Donc on a l'inégalité annoncée. Si f est un automorphisme, g aussi et puisque $g(0) = 0$ on a $g(z) = e^{i\theta}z$ donc $|g'(0l)| = 1$, on a égalité. Réciproquement, si on a égalité, alors $|g'(0)| = 1$ donc $g(z) = e^{i\theta}z$, donc g est un automorphisme, donc f aussi.

2) Soit $g = h_{f(z_1)} \circ f \circ h_{z_1}^{-1}$. Alors $g(\Delta) \subset \Delta$ et $g(0) = 0$. Donc $|g(h_{z_1}(z_2))| \leq |h_{z_1}(z_2)|$, autrement dit $|h_{f(z_1)}(f(z_2))| \leq |h_{z_1}(z_2)|$, ce qui est l'inégalité annoncée. Si f est un automorphisme, g est une rotation de centre 0 donc on a égalité. Et si on a égalité pour un couple (z_1, z_2), puisque $h_{z_1}(z_2) \neq 0$ la fonction g est une rotation de centre 0, donc f est un automorphisme.

11.2 Métrique et distance hyperbolique sur Δ

Métrique conforme, ρ-longueur. Si ρ est une fonction C^∞ d'une région U dans $]0, +\infty[$, l'expression $\rho(z)|dz|$ est appelée *métrique conforme* sur U. Si $\gamma : [a, b] \to U$ est un chemin, on définit sa ρ-longueur

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)|dz| = \int_a^b \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt \in \mathbb{R}_+.$$

Il est facile de voir que c'est invariant par tout reparamétrage, direct ou indirect. En particulier, $\ell_1(\gamma)$ est la longueur usuelle, ou euclidienne.

Métrique et longueur hyperbolique. Si $U = \Delta$, la métrique conforme $\dfrac{2|dz|}{1-|z|^2}$ est appelée *métrique hyperbolique*. La longueur $\ell_\rho(\gamma)$ est la *longueur hyperbolique* de γ, nous la noterons $\ell_{hyp}(\gamma)$:

$$\ell_{hyp}(\gamma) = \int_\gamma \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt.$$

Proposition. *Soit f holomorphe de Δ dans Δ. Si γ est un chemin dans Δ, $\ell_{hyp}(f \circ \gamma) \leq \ell_{hyp}(\gamma)$. De plus, on a égalité si f est un automorphisme, et seulement dans ce cas si γ n'est pas constant.*

Démonstration. Puisque $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)).\gamma'(t)$, on a, en utilisant le lemme de Schwarz-Pick :

$$\ell(f \circ \gamma) = \int_a^b \frac{2|f'(\gamma(t))|}{1-|f(\gamma(t))|^2}|\gamma'(t)|dt \leq \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt = \ell_{hyp}(\gamma).$$

De plus, si f est un automorphisme on a égalité. Et si on a égalité et γ n'est pas constant, il existe t tel que $\dfrac{|f'(\gamma(t))|}{1-|f(\gamma(t))|^2}| = \dfrac{1}{1-|\gamma(t)|^2}$, donc f est un automorphisme.

Définition. Si $z_1, z_2 \in \Delta$, la *distance hyperbolique* $d_{hyp}(z_1, z_2)$ est

$$d_{hyp}(z_1, z_2) = \inf_\gamma \ell_{hyp}(\gamma) = \inf_\gamma \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt,$$

où l'inf est pris sur tous les chemins de z_1 à z_2 dans Δ.

Théorème. *1) La distance hyperbolique est invariante par* $\mathrm{Aut}(\Delta)$.

2) C'est effectivement une distance sur Δ, qui définit la même topologie que la distance euclidienne. On a la formule explicite $d_{hyp}(z_1, z_2) = 2\mathrm{argth}\ |h_{z_1}(z_2)| = 2\mathrm{argth}\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right|$.

3) L'inf dans la définition est atteint pour exactement un chemin $\gamma : [0, d_{hyp}(z_1, z_2)] \to \Delta$ paramétré par longueur d'arc, c'est-à-dire $\frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} = d_{hyp}(z_1, z_2)$. On l'appelle chemin géodésique.

4) Si $z_1 \neq z_2$, ce chemin géodésique est contenu dans l'unique (cercle ou droite) qui passe par z_1, z_2 et est orthogonal au bord $\partial\Delta$: c'est un diamètre si z_1, z_2 et 0 sont colinéaires, un cercle sinon.

5) Les isométries de la distance hyperbolique sont les automorphismes holomorphes et leurs conjugués.

Démonstration. 1) Cela résulte du fait que $\ell(f \circ \gamma) = \ell(\gamma)$ si $f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$.

2) Il est clair que $d_{hyp}(z, z) = 0$ et $d_{hyp}(z_1, z_2) = d_{hyp}(z_2, z_1)$. L'inégalité triangulaire résulte de la concaténation des chemins. La non-dégénérescence vient de ce que $\ell_{hyp}(\gamma) \geq \ell_1(\gamma) = 2|z_1 - z_2|$.

Ensuite, soient $z_1, z_2 \in \Delta$ distincts. Il existe $f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ tel que $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = a > 0$: explicitement, on peut prendre $f = e^{i\theta} h_{z_1}$, où $\theta = -\arg\ h_{z_1}(z_2)$, et l'on a $a = |h_{z_1}(z_2)|$.

Pour calculer $d_{hyp}(0, a)$, il suffit de considérer des chemins γ tels que $\gamma(]0, 1])$ ne contient pas 0. Donc $|\gamma|$ est C^1 par morceaux sur $]0, 1]$ (peut-être pas sur $[0, 1]$, mais peu importe). Puisque $||\gamma|'| \leq |\gamma'|$, on a $\ell_{hyp}(\gamma) \leq \ell_{hyp}(|\gamma|)$. Or $|\gamma|$ paramètre le segment $[0, a]$ de 0 à a, donc sa longueur hyperbolique est au moins égale à celle de $t \mapsto at$. Comme ce dernier chemin est lisse, il minimise ℓ_{hyp}, d'où

$$d_{hyp}(z_1, z_2) = \int_0^a \frac{2dt}{1 - t^2} = 2\mathrm{argth}\ a = 2\mathrm{argth}\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right|.$$

Sur tout disque $\overline{\Delta}(0, r)$, $r < 1$, d_{hyp} est uniformément équivalente à d_{eucl}, donc elle définit la même topologie, ce qui achève la preuve de 2).

3) Il suffit de le prouver si $z_1 = 0$, $z_2 = a > 0$. Si γ est un chemin C^1 par morceaux de 0 à a minimisant $\ell_{hyp}(\gamma)$ et paramétré par longueur d'arc, alors $\ell_{hyp}(\gamma) = \ell_{hyp}(|\gamma|)$ donc $||\gamma|'| = |\gamma'|$ presque partout, donc $\arg\ \gamma$ est constant, donc γ paramètre le segment $[0, a]$. Enfin, pour que γ paramètre $[0, a]$ par longueur d'arc il suffit que $d_{hyp}(0, \gamma(t)) = t d_{hyp}(0, a)$ soit $\mathrm{argth}\gamma(t) = t\mathrm{argth}\ (ta)$ soit $\gamma(t) = \mathrm{th}(t\ \mathrm{argth}\ a)$.

4) Le résultat est vrai si $z_1 = 0$ et $z_2 = a > 0$ car le segment $[0, a]$ est contenu dans un diamètre, c'est-à-dire une droite orthogonale au bord, et il n'y a aucun cercle passant par 0 et orthogonal à $\partial\Delta$. Le résultat général en découle car il existe toujours un automorphisme de Δ envoyant (z_1, z_2) sur $(0, a)$ avec $a > 0$, et un tel automorphisme est une homographie préservant $\partial\Delta$. Or toute homographie transforme (cercle ou droite) en (cercle ou droite) et préserve les angles.

5) On sait déjà que tout automorphisme est une isométrie d_{hyp}, il en est clairement de même du conjugué d'un automorphisme. Réciproquement, soit g une isométrie hyperbolique. Il existe un automorphisme f du disque tel que $f(0) = g(0)$, donc en remplaçant g par $f^{-1} \circ g$ on peut supposer que $g(0) = 0$. Comme g est isométrique, elle préserve les géodésiques, donc elle envoie tout diamètre sur un diamètre. Le rayon $t \mapsto te^{i\theta}$ est envoyé sur un rayon paramétré à la même vitesse, $t \mapsto te^{i\alpha(\theta)}$. Enfin, g préserve les angles en 0 car $d_{hyp}(te^{i\theta}, te^{i\varphi}) \sim 2t\left|\sin(\frac{\theta - \varphi}{2})\right|$. Donc $\alpha(\theta) = \pm\theta + \theta_0$, donc $g(z) = e^{i\theta_0} z$ ou $e^{i\theta_0}\overline{z}$, ce qui achève la preuve de 5).

Reformulation du lemme de Schwarz-Pick. *Soit f une fonction holomorphe de Δ dans Δ.*

1) La fonction f a une différentielle de norme ≤ 1 pour la métrique hyperbolique, et isométrique si f est un automorphisme. Si cette norme est 1 en un point, f est un automorphisme et la norme est partout 1.

2) On a toujours $d_{hyp}(f(z), f(z')) \leq d_{hyp}(z, z')$. Si $z \neq z'$ et on a égalité, f est un automorphisme et on a toujours égalité.

11.3 Courbure d'une métrique conforme

Définitions. Si ρ est une métrique conforme, sa *courbure* est $K(\rho) = -\rho^2 \Delta \log \rho$ Si $f : U \to V$, $z \mapsto w = f(z)$ est un biholomorphisme et $\rho(w)|dw|$ une métrique conforme sur V, on définit une métrique conforme $\rho_f(z)dz$ en identifiant les expressions formelles

$$\rho_f(z)dz = \rho(f(z))|df(z)| = \rho(f(z))|f'(z)||dz|,$$

autreent dit $\rho_f = (\rho \circ f)|f'|$.

Proposition. *1) La courbure est invariante par biholomorphisme : si $f : U \to V$ est un biholomorphisme et si $\rho(w)|dw|$ est une métrique conforme sur V, on a $K(\rho_f) = K(\rho) \circ f$.*

2) Si $\rho_0 = \dfrac{2|dz|}{1 - |z|^2}$, on a $K(\rho_0) = -1$.

3) Si $\rho(z)|dz|$ est une métrique conforme sur Δ telle que $K(\rho) \leq -1$, alors $\rho \leq \rho_0$.

4) Si de plus $K(\rho) = -1$ et $\rho \to +\infty$ quand $|z| \to 1$, $\rho = \rho_0$.

Démonstration. 1) On a $\Delta \log \rho_f = \Delta \log(\rho \circ f) + \Delta \log |f'|$. Puisque $\log |f'|$ est (localement) la partie réelle d'une fonction holomorphe, $\Delta \log |f'| = 0$. Et en utilisant $\Delta = 4\partial\overline{\partial}$ et $\partial(g \circ f) = \partial g \circ f.f'$, $\overline{\partial}(g \circ f) = \overline{\partial} c \circ f.\overline{f}'$ (g de classe C^1, f holomorphe), il vient

$$\begin{aligned} \Delta(g \circ f) &= 4\partial(\overline{\partial} g \circ f.\overline{f}') \\ &= \Delta g \circ f.f'.\overline{f}' \\ &= |f'|^2 \Delta g \circ f. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} K(\rho_f) &= ((\rho \circ f)|f'|)^{-2} \Delta \log \rho_f \\ &= ((\rho \circ f)|f'|)^{-2} |f'|^2 (\Delta \log \rho) \circ f \\ &= (\rho^{-2} \Delta \log \rho) \circ f \\ &= K(\rho) \circ f. \end{aligned}$$

2) Posant $z = \dfrac{w - i}{w + i}$, $w \in \mathbb{H}$, il vient

$$\frac{2|dz|}{1 - |z|^2} = \frac{4|dw|}{|w + i|^2} \Big(1 - \Big|\frac{w - i}{w + i}\Big|^2\Big)^{-1} = \frac{4|dw|}{|w + i|^2 - |w - i|^2} = \frac{|dw|}{\mathrm{Im}\ w}.$$

Écivant $w = x + iy$, on a $\Delta \log \mathrm{Im}\ w = \Delta \log y = \dfrac{\partial^2}{\partial^2 y} \log y = -y^{-2}$, donc $K(\mathrm{Im}\ w) = y^2.(-y^{-2}) = -1$. Puisque K est invariante par biholomorphisme, on a aussi $K(\rho_0) = -1$.

3) Supposons d'abord ρ borné sur Δ. Alors $\log \rho_0 - \log \rho$ tend vers $+\infty$ quand $|z| \to 1$, donc cette fonction a un minimum en $z_0 \in \Delta$. On a $\Delta(\log \rho_0 - \log \rho)(z_0) \geq 0$, soit $\rho_0(z_0)^2 - \rho(z_0)^2 \geq 0$. Donc $(\log \rho_0 - \log \rho)(z_0) \geq 0$, et comme c'est un minimum $\log \rho_0 - \log \rho$ partout, soit $\rho \leq \rho_0$.

Dans le cas général, soit $\rho_r(z) = r\rho(rz)$, $0 < r < 1$. On a $K(\rho_r) = r^{-2} K(\rho(rz)) = -r^{-2} < -1$ et ρ_r est borné sur Δ, donc $\rho_r \leq \rho_0$. Passant à la limite $r \to 1$, on a $\rho \leq \rho_0$.

4) De même, soit $\lambda_r(z) = r\rho_0(rz)$, $0 < r < 1$. Alors $K(\lambda_r) = -r^{-2}$. La fonction $\log \rho - \log \lambda_r$ tend vers $+\infty$ quand $|z| \to 1$, donc elle a un minimum en $z_0 \in \Delta$. On a $\Delta(\log \rho - \log \lambda_r)(z_0) \geq 0$, soit $\lambda_r(z_0)^2 - \rho(z_0)^2 \geq 0$. Donc $(\log \rho - \log \lambda_r)(z_0) \geq 0$, et comme c'est un minimum $\log \rho - \log \lambda_r$ partout, soit $\lambda_r \leq \rho$. Passant à la limite $r \to 1$, on a $\rho_0 \leq \rho$ donc $\rho = \rho_0$

Bibliographie

[Ahlfors 1978] Lars V. Ahlfors, *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. Third edition*, McGraw-Hill, 1978.

[Burckel 1979] Robert B. Burckel, *An introduction to classical complex analysis. Volume 1*, Acad. Press 1979.

[Carathéodory 1912] Constantin Carathéodory, *Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten*, Math. Annalen 52 (1910), 107-144.

[Cauchy 1831-1841] Augustin Cauchy, *Cours d'analyse de l'École Royale polytechnique. Première partie : analyse algébrique*, Paris, 1821.

[Cartan 1977] Henri Cartan, *Cours de calcul différentiel. Édition refondue et corrigée*, Hermann, 1977.

[Chabat 1990] Boris Chabat, *Introduction à l'analyse complexe. Tome 1 Fonctions d'une variable*, Éditions Mir, 1990.

[Evgrafov et al. 1974] M. Evgrafov et al. *Recueil de problèmes sur la théorie des fonctions analytiques*, Éditions Mir, 1974.

[Goursat 1884-1900] Edouard Goursat, *Démonstration du théorème de Cauchy. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite*, Acta Math. 4 (1884), 197-200 ; *Sur la définition générale des fonctions implicites, d'après Cauchy*, Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), 14-16.

[Henrici 1974] Peter Henrici, *Applied and computational complex analysis. Volume 1 - Power series-Integration-Conformal mapping-Location of zeros*, Wiley, 1974.

[Knapp 1992] Anthony W. Knapp, *Elliptic curves*, Mathematical Notes 40, Princeton Univ. Press, 1992.

[Needham 1997] Tristan Needham, *Visual complex analysis*, Oxford University Press, 1997.

[Pick 1915] Georg Pick, *Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Bereiche*, Math. Annalen 77 (1915), 1-6.

[Polya-Szegö 1972] George Polya and Gabor Szegö, *Problems and theorems in analysis, Volume 1*, Springer Grundlehren der Math. Wiss. 193, 1972.

[Rudin 1987] Walter Rudin, *Real and complex analysis. Third edition*, McGraw-Hill, 1987.

[Serre 1970] Jean-Pierre Serre, *Cours d'arithmétique*, Preses Univ. de France, 1970.

[Siegel 1969] Carl Ludwig Siegel, *Topics in complex function theory, vol. 1 Ellitpic functions and uniformization theory*, Wiley, 1969.

Remarques. Le livre d'Ahlfors me semble la meilleure introduction. Celui de Chabat est presque aussi bien. Le livre de Needham est plus élémentaire, mais présente le point de vue géométrique de façon fascinante et très instructive.

Exercices d’analyse complexe
L3 ENS Lyon

Sylvain Courte et Mickaël Kourganoff

2014

Table des matières

1 Séries entières

Exercice 1. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que f est analytique sur $\Delta(0, R)$, c'est-à-dire f admet un développement en série entière centré en z_0 pour tout $z_0 \in \Delta(0, R)$.

Exercice 2. Soit $f = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1. Montrer que $F(z) = \frac{1}{1-z} f\left(\frac{z}{1-z}\right)$ est bien définie sur $\left\{\Re\text{é}\,(z) < \frac{1}{2}\right\}$. Puis, montrer que pour $|z| < \frac{1}{2}$, on a :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \right) z^n.$$

L'exercice suivant nécessite la définition d'intégrale sur un chemin (on peut le modifier pour éviter d'utiliser cette définition, mais on perd alors une partie de son intérêt).

Exercice 3 (Formules de Cauchy pour les séries entières)**.** Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $\mathcal{R}$.

1. Montrer que pour tout $0 < r < \mathcal{R}$,
$$\int_{\partial D(0,r)} f(z) \mathrm{d}z = 0.$$
2. Montrer que pour tout $0 < r < \mathcal{R}$ et $n \geq 0$,
$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \quad \left(= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}} \,\mathrm{d}\theta \right).$$
3. Montrer que si f est bornée de rayon de convergence infini, alors elle est constante (théorème de Liouville).
4. On suppose que f a rayon de convergence infini. On suppose qu'il existe $R > 0$ et $P \in \mathbf{R}_d[X]$ tels que pour $|z| > R$ on ait $|f(z)| < P(|z|)$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus d.

2 Homographies

Exercice 4. Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{C})$, on note $h_A : \overline{\mathbf{C}} \longrightarrow \overline{\mathbf{C}}$ la fonction définie comme suit :

— Dans tous les cas autres que les cas ci-dessous, $h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$;
— $h_A(\infty) = \frac{a}{c}$ si $c \neq 0$, et ∞ si $c = 0$;
— Si $cz + d = 0$, $h_A(z) = \infty$.

Ces fonctions sont appelées *homographies*.

1. Montrer que pour tout choix de matrice $A \in GL_2(\mathbf{C})$ et tout $z \in \mathbf{C}$, si $cz + d = 0$, alors $az + b \neq 0$. En déduire que pour toute $A \in GL_2(\mathbf{C})$ et toute suite z_n telle que $z_n \to z_\infty \in \overline{\mathbf{C}}$, on a $h_A(z_\infty) = lim_{n\to\infty} h_A(z_n)$.
2. Montrer que pour toutes $A, B \in GL_2(\mathbf{C})$, $h_A \circ h_B = h_{AB}$.

3. On note Möb($\mathbf{C}$) l'ensemble des homographies. Montrer que Möb($\mathbf{C}$) est un groupe isomorphe à $SL_2(\mathbf{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}$ (on note $PSL_2(\mathbf{C}) := SL_2(\mathbf{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}$).
4. Montrer que Möb($\mathbf{C}$) est exactement 3-transitif sur $\mathbf{C}$, c'est-à-dire que si z_1, z_2, z_3 sont des éléments distincts de $\overline{\mathbf{C}}$, il existe une unique homographie f telle que $f(0) = z_1$, $f(1) = z_2$, $f(\infty) = z_3$.
5. Soit $A \in SL_2(\mathbf{C})$. Montrer que $h_A(\mathbf{R} \cup \{\infty\}) = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ si et seulement si $A \in SL_2(\mathbf{R})$.
6. Soit $A \in SL_2(\mathbf{C})$. On considère le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im(z) > 0\}$. Montrer que $h_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ si et seulement si $A \in SL_2(\mathbf{R})$ (on pourra utiliser la question précédente).

3 Équations de Cauchy-Riemann

Exercice 5. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ holomorphe. Montrer que f est constante si l'une des hypothèses suivantes est satisfaite :

i) $f(\Omega) \subset \mathbf{R}$,

ii) $f(\Omega) \subset i\mathbf{R}$,

iii) $|f|$ est constant.

Exercice 6. On définit les opérateurs différentiels

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Soit Ω ouvert connexe de $\mathbf{C}$.

1. Soit $g : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction différentiable. Montrer que g est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$.
2. Montrer que si g est holomorphe, alors $\frac{\partial g}{\partial z} = g'$.
3. Montrer que pour $g : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ différentiable, $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial \bar{g}}{\partial z}}$.
4. Montrer que pour $g, h : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ différentiables et $\alpha \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, on a $\frac{\partial gh}{\partial z} = g\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z}h$, et $\frac{\partial g^\alpha}{\partial z} = \alpha g^{\alpha-1}\frac{\partial g}{\partial z}$ (si $\alpha < 1$, on suppose que g ne s'annule pas). De même pour $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.
5. Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(z) = \frac{z^3}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$. Montrer que f est de classe C^1, et déterminer ses points de $\mathbf{C}$-dérivabilité.
6. Montrer que $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{4}\Delta$, où Δ est le laplacien *complexe* : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, lorsque g est deux fois différentiable.
7. Pour toutes $g, h : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ holomorphes, montrer que $\Delta(g\bar{h}) = 4g'\overline{h'}$. En déduire que si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des fonctions holomorphes sur Ω (deux fois différentiables) telles que $\sum |f_j|^2$ est constant, alors toutes les f_j sont constantes.

Exercice 7.
1. Montrer que les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires s'écrivent $\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$.
2. Soit P un polynôme non constant, supposé sans zéro. On pose alors $I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{P(re^{i\theta})}$. Montrer que $I'(r) = 0$. En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.

Exercice 8. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$. Déterminer toutes les fonctions holomorphes $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$, $f = u + iv$ avec $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $g = u^2 + iv^2$ soit holomorphe.

4 Intégrales sur des chemins

Exercice 9. 1. Soit $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it}$, prouver que pour toute fonction g continue sur $\partial D_1(0)$ on a

$$\overline{\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z} = -\int_\gamma \frac{\overline{g}(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z.$$

2. Soit P un polynôme complexe, $z_0 \in \mathbf{C}$, $r > 0$. Montrer que

$$\int_{\partial D_r(z_0)} \overline{P(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i r^2 \overline{P'(z_0)}.$$

Exercice 10. 1. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux. Montrer que

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \left|f(t)\right|\mathrm{d}t.$$

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$. Montrer que

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq l(\gamma) \sup_{z\in\Omega} \left|f(z)\right|$$

où $l(\gamma) = \int_0^1 \left|\gamma'(t)\right|\mathrm{d}t$ est la longueur du chemin γ.

5 Calcul d'intégrales avec la formule de Cauchy

Exercice 11 (Calculs d'intégrales)**.** Après avoir justifié leurs existences, calculer les intégrales suivantes :

1.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(i + t)^2}$$

2.
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

indication : intégrer $\frac{e^{iz}}{z}$ sur le bord du domaine $\{r \leq |z| \leq R, \Im\mathrm{m}\,(z) \geq 0\}$.

3. (Transformée de Fourier d'une gaussienne) Pour $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}x$$

Indication : intégrer $e^{-\pi z^2}$ sur le bord du domaine rectangulaire de sommets (dans l'ordre) $-R$, R, $R + i\xi$, $-R + i\xi$ avec $R > 0$; on utilisera aussi $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

4.
$$\int_0^\infty \cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^\infty \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$$

Indication : intégrer e^{-z^2} sur le bord du domaine $\left\{re^{i\theta} \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi/4\right\}$

6 Inégalités de Cauchy

Exercice 12. Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbf{C}$ et $f : \Omega \to \Omega$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = z_0$.

1. Montrer que $|f'(z_0)| \leq 1$.
2. On suppose $f'(z_0) = 1$. Montrer que $f = Id$.
   Indication : écrire $f(z_0 + z) = z_0 + z + a_n z^n + o(z^n)$ avec $a_n \neq 0$.

Exercice 13 (Autour du théorème de Liouville)**.** Soit f holomorphe sur $\mathbf{C}$.

1. On suppose qu'il existe $R > 0$ et $P \in \mathbf{R}_d[X]$ tels que pour $|z| > R$ on ait $|f(z)| < P(|z|)$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus d.
2. On suppose que f est non constante. Montrer que $f(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathbf{C}$.

Exercice 14 (Fonctions de type exponentiel)**.** On dit qu'une fonction entière est de *type exponentiel* s'il existe une constante C telle que $f(z) = O(e^{C|z|})$ quand $|z|$ tend vers l'infini. La borne inférieure des nombres C vérifiant cette propriété s'appelle le *type* de la fonction f.

1. Montrer que les fonction $z \mapsto e^z$ et $z \mapsto \sin(z)$ sont de type exponentiel 1.
2. Soit $C > 0$ et soit f une fonction entière de type exponentiel inférieur strict à C. On note c_n les coefficients de Taylor de f.
   (a) Montrer qu'il existe $A > 0$ tels que $|c_n|r^n \leq Ae^{Cr}$ pour tout $r \geq 0$.
   (b) En déduire que $c_n = O\left(\left(\frac{Ce}{n}\right)^n\right)$.
3. Réciproquement, soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ dont les coefficients vérifient $c_n = O\left(\left(\frac{Ce}{n}\right)^n\right)$. Vérifier que f est exponentiel de type inférieur ou égal à C.

Exercice 15. Soit $\eta \in \mathbf{R}$ et f une fonction holomorphe sur la bande

$$B = \{z \in \mathbf{C} \,\big|\, -1 < \Im\mathrm{m}(z) < 1\}$$

vérifiant pour tout $z \in B$

$$\left|f(z)\right| \leq A(1 + |z|)^\eta.$$

Montrer que pour tout $n \in N$, il existe $A_n \geq 0$ tel que

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq A_n(1 + |x|)^\eta, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

7 Logarithme

Exercice 16. Soit $\Omega \subseteq \mathbf{C}^*$. Un logarithme sur Ω est une fonction continue $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifiant $\exp \circ f = \mathrm{id}_\Omega$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction logarithme continue sur le cercle unité (on pourra utiliser le fait que pour $z_1 \in \mathbf{C}$, si $e^{z_1} = 1$, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $z_1 = 2ik\pi$).

2. Quel est le lien entre les différents logarithmes sur un ouvert connexe donné ?
3. Montrer que toute fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω, de dérivée $1/z$, est un logarithme sur Ω à constante additive près.
4. Soit D un disque ouvert et g une fonction holomorphe sur D. Montrer que g admet une primitive sur D, et que cette primitive est unique à une constante additive près (on pourra utiliser le fait qu'une fonction holomorphe sur un disque admet un développement en série entière sur ce disque).
5. Montrer que tout logarithme f sur un ouvert de $\mathbf{C}^*$ est holomorphe de dérivée $f'(z) = 1/z$.
6. Montrer qu'on peut définir une fonction logarithme sur $\mathbf{C}$ privé d'une demi-droite issue de 0 quelconque. On appelle détermination principale, et on note Log, la branche du logarithme définie sur $\Omega = \mathbf{C} -]-\infty; 0]$ s'annulant au point 1.
7. Calculer $\mathrm{Log}(re^{it})$ en fonction de $r > 0$ et $t \in]-\pi; \pi[$. Quelle est la restriction de Log à $]0; +\infty[$?
8. Montrer que la détermination principale du logarithme est développable en série entière autour de 1 et que $\mathrm{Log}(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$.
9. Déterminer $\Omega' := \mathrm{Log}(\Omega)$. Dessiner l'image par l'exponentielle du quadrillage en lignes horizontales et verticales de Ω'.
10. Soit f une fonction holomorphe sur un disque D, qui ne s'annule pas. Montrer que f admet un relèvement, c'est-à-dire qu'il existe g holomorphe sur D telle que $f = \exp \circ g$ (on pourra utiliser la question 4).
11. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f holomorphe sur $\mathbf{C}$ vérifiant $f \circ f = \exp$. On pourra commencer par montrer qu'une telle fonction admet un relèvement.

8 Zéros isolés

Exercice 17. Soit $f(z) = \sin(\frac{1}{1-z})$.

1. Montrer que f est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence égal à 1. Montrer que l'ensemble de ses zéros possède un point d'accumulation dans le disque fermé.
2. Y a-t-il une contradiction avec le principe des zéros isolés ?

Exercice 18. Trouver toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ vérifiant $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

L'exercice suivant utilise à la fois le principe des zéros isolés (plus précisément, l'intégrité de l'anneau des fonctions holomorphes), et les inégalités de Cauchy.

Exercice 19. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence ≥ 1. On suppose que f se prolonge en une fonction continue sur le disque unité fermé et que

$$\exists \alpha \in \mathbf{R} \quad \exists \theta > 0 \quad \forall t \in [\alpha, \alpha + \theta] \quad f(e^{it}) = 0.$$

Montrer que f est nulle.

9 Morera

Exercice 20 (Principe de réflexion de Schwarz)**.**

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ et D une droite affine de $\mathbf{C}$. Montrer que si une fonction f est holomorphe sur $\Omega \setminus (D \cap \Omega)$ et continue sur Ω, alors elle est holomorphe sur Ω.
2. Soit $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im\mathrm{m}\,(z) > 0\}$ et $f : \overline{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et holomorphe sur H telle que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier (c'est le principe de réflexion de Schwarz).

10 Principe du maximum

Exercice 21. Soif f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U contenant le disque unité fermé. On suppose que $f(z) \in \mathbf{R}$ si $|z| = 1$. Montrer que f est constante.

Indication : considérer e^{if}.

Exercice 22. Soient $w_1, \dots, w_n$ des nombres complexes de module 1. Montrer qu'il existe un nombre complexe w de module 1 tel que

$$\prod_{k=1}^{n} |w - w_k| = 1.$$

Exercice 23 (Théorème de Phragmén-Lindelöf)**.**

1. La fonction e^z sur la région $U = \{\Re\mathrm{é}\,(z) \geq 0\}$ vérifie-t-elle le principe du maximum sous la forme : si $|f(z)| \leq C$ pour $z \in \partial U$ alors $|f(z)| \leq C$ pour tout $z \in U$?
2. Soit $\beta \in]\frac{1}{2}, +\infty[$ et

$$S = \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbf{C}, r \in \mathbf{R}_+^* \;\middle|\; \theta \in]-\frac{\pi}{2\beta}, \frac{\pi}{2\beta}[\right\}.$$

Soit f une fonction continue sur $\overline{S}$ et holomorphe sur S telle que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \partial S$, et

$$|f(z)| \leq Ce^{c|z|^\alpha}, \quad \text{pour tout } z \in S$$

pour $c, C > 0$ et $0 < \alpha < \beta$. Montrer que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in S$.

Exercice 24 (Théorème des trois cercles d'Hadamard)**.** Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U contenant la couronne $C = \{z \in \mathbf{C};\ r \leq |z| \leq R\}$, où $r < R$ sont deux réels strictement positifs. Pour $\rho \in [r, R]$, on note

$$M(\rho) = \sup\{|f(z);\ |z| = \rho\}.$$

Pour la suite de l'exercice, on fixe $\rho \in [r, R]$.

1. Montrer qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que $\rho = r^\theta R^{1-\theta}$.
2. Montrer que, pour tous $p, q \in \mathbf{Z}$, $q > 0$

$$\rho^p M(\rho)^q \leq \max(r^p M(r)^q, R^p M(R)^q).$$

3. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, on a

$$\rho^\alpha M(\rho) \leq \max(r^\alpha M(r), R^\alpha M(R)).$$

4. En déduire que $M(\rho) \leq M(r)^\theta M(R)^{1-\theta}$.
5. Interpréter en termes de fonctions convexes.

11 Suites de fonctions holomorphes

L'exercice suivant utilise les notions de famille sommable et de sommation par paquets.

Exercice 25 (La fonction zêta)**.** La fonction zêta est définie sur le demi-plan

$$P = \{z \mid \mathfrak{R}\text{é}\,(z) > 1\}$$

par

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-z}$$

où $n^{-z} = exp(-z \log n)$, avec la branche principale du logarithme.

1. Montrer que ζ est holomorphe sur P.
2. Montrer que pour tout $z \in P$, on a

$$\zeta(z) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-z}}.$$

3. Montrer que la somme des inverses des nombres premiers diverge.

L'exercice suivant utilise la notion de produit infini.

Exercice 26. Soit (a_n) une suite de nombres complexes non nuls telle que $\sum \frac{1}{a_n}$ converge absolument. Trouver une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ dont les zéros sont exactement la suite a_n (avec multiplicité).

L'exercice suivant utilise le théorème de Montel.

Exercice 27. Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbf{C}$, f une fonction holomorphe de $\Omega \longrightarrow \Omega$. On suppose que f admet un point fixe a. On note f_n la n^e itérée de f.

1. Calculer $f_n'(a)$. En déduire que $|f'(a)| \leq 1$.
2. On suppose $f'(a) = 1$.
   - On suppose que $f \neq Id$. Montrer qu'il existe une constante $c \neq 0$ et un entier $k \geq 2$ tels que pour tout n on ait

   $$f_n(z) = z + nc(z-a)^k + o\left((z-a)^k\right)$$

   au voisinage de a.
   - En déduire que f est l'identité.
3. On suppose que $|f'(a)| = 1$. Montrer qu'il existe une suite croissante (p_n) tels que $f'(a)^{p_n}$ converge vers 1. En déduire que (f_n) admet une sous-suite (g_n) qui converge vers l'identité uniformément sur tout compact.
4. Montrer que $|f'(a)| = 1$ si et seulement si f est un biholomorphisme de Ω.
5. Montrer que si $|f'(a)| < 1$ alors (f_n) converge vers a uniformément sur tout compact.

Exercice 28 (Produit de Blaschke). 1. Soit $f : \Delta \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe bornée non constante. On note $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite de ses zéros (répétés avec multiplicité). On pose
$$b_n(z) = \frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n}z}.$$
   (a) Montrer que $|b_n(z)| = 1$ si $|z| = 1$.
   (b) En déduire que $\sum(1 - |a_n|) < \infty$ (*on pourra appliquer le principe du maximum à la fonction f/B_N avec $B_N(z) = \prod_{n=0}^{N} b_n(z)$*).

2. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de Δ vérifiant la condition (dite de *Blaschke*) $\sum(1 - |a_n|) < \infty$.
   (a) Montrer que le produit $\prod b_n$ converge localement uniformément sur Δ.
   (b) En déduire qu'il existe une fonction holomorphe bornée sur Δ admettant la suite a_n pour zéros comptés avec multiplicité.

12 Singularités, fonctions méromorphes

Exercice 29. Développer en série de Laurent la fonction
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$
sur les ouverts $\Delta(0,1)$, $A_0(1,2)$ et $A_0(2,+\infty)$, où
$$A_{z_0}(r,R) := \{z \in \mathbf{C} \,:\, r < |z - z_0| < R\}.$$

Exercice 30. Déterminer les points singuliers isolés des fonctions suivantes, puis déterminer leur nature (singularité levable, pôle, singularité essentielle) :
$$z \mapsto \exp(1/z) \qquad z \mapsto \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} \qquad z \mapsto \frac{1}{\exp(z) - 1} - \frac{1}{z}$$
$$z \mapsto \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) \quad z \mapsto \sin\left(\frac{1}{\sin(1/z)}\right)$$

Exercice 31. Soit f une fonction holomorphe sur l'ouvert $\Omega = D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$. Supposons
$$|f(z)| \leq A|z - z_0|^{-1+\epsilon}$$
pour $\epsilon > 0$, et z proche de z_0. Montrer que la singularité de f en z_0 est effaçable.

Exercice 32 (Prolongement méromorphe de la fonction ζ à $\mathbb{C}$). On définit les nombres de Bernoulli B_n par l'identité :
$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$
valable sur un voisinage épointé de 0.

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$ impair, on a $B_n = 0$.
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$?

3. Montrer que la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z+2n-1}$$
converge localement normalement uniformément sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, -3, -5, \dots\}$.
4. Montrer que pour tout z tel que $\Re\text{é}\,(z) > 2$, on peut écrire
$$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{1}{z+2n-1}.$$
5. On rappelle que la fonction Γ est définie sur $\{z \in \mathbf{C} \,|\, \Re\text{é}\,(z) > 0\}$ par
$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$
et que la fonction ζ est définie sur $\{z \in \mathbf{C} \,|\, \Re\text{é}\,(z) > 1\}$ par
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{-z} \mathrm{d}t.$$
Montrer que pour $s > 1$, on a
$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t.$$
6. Déduire de (4) et (5) que la fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un seul pôle simple en 1, et que l'on a $\zeta(0) = -1/2$ et $\zeta(-2k) = 0$ si $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$.

Exercice 33. 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$. Soient f et g holomorphes sur Ω, et $z_0 \in \Omega$ tel que $g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$. Montrer que
$$\mathrm{res}_{z_0}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$
2. Calculer les résidus de $f : z \mapsto \frac{1}{\sin(z)}$ en chacun de ses pôles.

L'exercice suivant nécessite le théorème de l'application ouverte.

Exercice 34. Montrer que toute fonction entière injective est de la forme $f(z) = az + b$ avec $a, b \in \mathbf{C}$ et $a \neq 0$.

Indication : Considérer $f(\frac{1}{z})$.

13 Calculs d'intégrales par résidus

Exercice 35.

1. Calculer pour tout $\xi \in \mathbf{R}$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix\xi}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$
2. Calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+x+1}\mathrm{d}x.$$
3. Montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\pi.$$
4. Montrer que pour $a > 0$,
$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a}\log a.$$
5. Montrer que pour $0 < \alpha < 1$,
$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Exercice 36. Soit $R = P/Q$ une fonction rationnelle avec $\deg Q \geq \deg P + 2$. Montrer que
$$\sum_{a\in\mathbf{C}} \text{rés}_a R = 0.$$

Exercice 37.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n+1}\mathrm{d}t$$
par la méthode des résidus.
2. Soit $p \in \mathbf{R}^*$. Calculer l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p+1}\mathrm{d}t.$$
Si nécessaire, on pourra modifier légèrement le contour utilisé dans la question précédente.

14 Théorème de Rouché

Exercice 38 (Théorème de Brouwer, version holomorphe)**.** Soit F une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ contenant $\overline{\Delta(0,1)}$, telle que $F(\overline{\Delta(0,1)}) \subseteq \overline{\Delta(0,1)}$. Montrer que F admet un point fixe.

Indication : on pourra appliquer le théorème de Rouché avec $f(z) = -2z$ et $g(z) = F(z) - z$.

Exercice 39. Quel est le nombre de racines du polynôme $z^4 - 3z + 1$ dans le disque unité ouvert ?

Exercice 40. Pour $a \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que, dans le disque unité, l'équation $az^n = e^z$ a n solutions si $|a| > e$ et aucune solution si $|a|e < 1$.

Exercice 41 (Continuité de l'application qui à un polynôme associe l'ensemble de ses racines)**.**

1. Démontrer directement le principe de l'argument dans le cas d'un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$, à savoir : pour tout domaine compact $K \subseteq \mathbf{C}$ tel que P ne s'annule pas sur ∂K, le nombre de zéros de P dans K est donné par la formule :
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{P'(z)}{P(z)} \mathrm{d}z.$$
2. Montrer que si P_k est une suite de polynômes complexes de degré n qui tend vers P, en notant $(a_1^k, \dots, a_n^k)$ les zéros de P_k avec multiplicité et $(b_1, \dots, b_n)$ les zéros de P avec multiplicité, on a :
$$\min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{i=1}^{n} \left|a_i^k - \sigma(b_i)\right| \underset{k \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
3. Soit $t \mapsto P_t$ un chemin C^k de $[0,1]$ dans l'ensemble des polynômes de degré n, avec $k \geq 0$. On suppose que z_0 est une racine de P_0.
   (a) Si z_0 est une racine simple de P_0, montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ et une application continue $t \mapsto z_t$ de $[0, \epsilon]$ dans $\mathbf{C}$ telle que z_t soit une racine de P_t pour tout $t \in [0, \epsilon]$.
   (b) On ne suppose plus que z_0 est une racine simple de P_t. Montrer qu'il existe une application continue $t \mapsto z_t$ de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ telle que z_t soit une racine de P_t pour tout $t \in [0,1]$.
   (c) Si z_t est une racine simple de P_t pour tout t, montrer que $t \mapsto z_t$ définie à la question précédente est C^k.
   (d) Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si l'on ne suppose pas que z_t est une racine simple pour tout t ?

15 Fonctions holomorphes injectives

Exercice 42. Existe-t-il une application holomorphe bijective de Δ dans $\mathbf{C}$?

16 Indice d'un chemin

Exercice 43. Soit $\gamma(t) = (1 + t(1-t))e^{4i\pi t}$ pour $t \in [0,1]$.

1. Calculer $\mathrm{Ind}_0(\gamma)$
2. Dessiner γ et vérifier visuellement son résultat.

Exercice 44 (Degré et indice)**.** Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, $f : U \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe non constante et $z_0 \in U$.

1. Montrer que, pour $r > 0$ assez petit, l'indice $\mathrm{Ind}_0(f(\partial\Delta(z_0, r)))$ est bien défini et indépendant de r, on le note $i_{z_0}(f)$.
2. Montrer que $i_{z_0}(fg) = i_{z_0}(f) + i_{z_0}(g)$, si g est une autre fonction holomorphe non constante.
3. Montrer que $i_{z_0}(f) = \deg_{z_0}(f)$.
4. Que se passe-t-il si f est seulement supposée continue ? L'indice est-t-il bien défini ? Peut-il être nul ? strictement négatif ?

Exercice 45. Soit γ un lacet dans $\mathbf{C}^*$. Notant $g(z) = z^n$, montrer que $\mathrm{Ind}_0(g \circ \gamma) = n\,\mathrm{Ind}_0(\gamma)$.

Exercice 46. Soit $\gamma(t)$ un chemin dans $\mathbf{C}^*$. On suppose que γ n'intersecte $\mathbf{R}_-$ qu'en un nombre fini d'instants $t_1, \ldots, t_n$, et que γ *traverse* $\mathbf{R}_-$ en chacun des t_i, c'est-à-dire que $\Im(\gamma(t))$ change de signe au voisinage de t_i ; on dira que la traversée est positive (resp. négative) si $\Im(\gamma(t) < 0$ (resp. > 0) sur $]t_i, t_i + \epsilon[$.

1. Montrer que $\mathrm{Ind}_0(\gamma)$ est égal au nombre de traversées comptées avec signe.
2. Dessiner un lacet compliqué et "calculer" l'indice du lacet par rapport à chaque point du complémentaire du lacet. Observer l'efficacité de la formule ci-dessus.

Exercice 47. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et γ un lacet dans U. Montrer que si γ est homotope à un lacet constant, alors γ est homologue à zéro. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 48. Montrer que toute fonction holomorphe $f : \mathbf{C} \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbf{C}^*$ est de la forme $(z - z_0)^m e^{g(z)}$ pour un certain entier m et une certaine fonction holomorphe $g : C \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbf{C}$.

Exercice 49. Trouver un domaine (le plus grand possible) sur lequel la fonction

$$f : z \mapsto \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$$

admet une branche holomorphe [1].

1. c'est-à-dire, sur lequel il existe f holomorphe telle que $f(z)^2 = (z-a)(z-b)(z-c)$

17 Représentation conforme

Exercice 50. Trouver un biholomorphisme entre $\mathbb{H} = \{z \mid \Im\mathrm{m}\,(z) > 0\}$ et $\mathbb{H} \setminus \{i\lambda \mid \lambda \in]0,1]\}$.

Exercice 51. Montrer que $f(z) = -\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ est une représentation conforme de $\Delta \cap H$ dans H.

Exercice 52. Existe-t-il une application holomorphe surjective de Δ dans $\mathbf{C}$?

Exercice 53. Soit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \int_0^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-\lambda)}} \end{aligned}$$

où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Donner un sens à l'expression de f.
2. Montrer que f s'étend continûment à $\overline{\mathbb{H}}$ et déterminer l'image de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est une représentation conforme de $\mathbb{H}$ sur un rectangle.

18 Biholomorphismes du disque

Exercice 54. Montrer qu'un biholomorphisme du disque ayant deux points fixes est égal à l'identité.

Exercice 55. Soit $f : \overline{\Delta} \longrightarrow \mathbf{C}$ continue sur $\overline{\Delta}$ et holomorphe sur Δ. On suppose que $|f(z)| \geq 1$ pour tout z tel que $|z| = 1$.

1. Montrer que si $f(\Delta) \cap \Delta \neq \emptyset$, alors $0 \in f(\Delta)$.
2. En déduire l'alternative suivante :
   — soit $\Delta \subseteq f(\Delta)$,
   — soit $f(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$.

Exercice 56. Pour tous $0 < r_1 < r_2$, on note

$$A_{r_1,r_2} = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$$

l'anneau centré en 0 de rayons r_1 et r_2. On appelle *module* de l'anneau le réel $\log(r_2/r_1)$.

On note également pour tout r, C_r le cercle de centre 0 et de rayon r.

1. Montrer que si deux anneaux ont même module, alors ils sont biholomorphes.
2. Soient $r, r' > 0$ et $f : A_{r,1} \longrightarrow A_{r',1}$ un biholomorphisme qui se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{A_{r,1}}$ vers $\overline{A_{r',1}}$. Montrer que $f(C_r)$ est soit $C_{r'}$, soit C_1. Montrer que $f(C_1)$ est soit $C_{r'}$, soit C_1.
3. On suppose seulement dans cette question que $f(C_r) = C_{r'}$. En utilisant le principe de réflexion de Schwarz, montrer que f se prolonge à un biholomorphisme du disque unité, puis que $r = r'$.
4. Dans le cas général, déterminer tous les biholomorphismes entre $A_{r,1}$ et $A_{r',1}$ qui se prolongent en homéomorphismes de $\overline{A_{r,1}}$ vers $\overline{A_{r',1}}$.

19 Problème : Theorème de Koebe

Exercice 57. On note $\Delta(z_0, r)$ le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r.

1. Soit $f : \Delta(0,1) \longrightarrow \mathbf{C}$ holomorphe, telle que $f(0) = 0$. En utilisant un théorème du cours, montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\Delta(0,r) \subseteq f(\Delta(0,1))$. On notera par la suite, pour une telle fonction f :
$$r_f = \sup\left\{r > 0 \,\middle|\, \Delta(0,r) \subseteq f(\Delta(0,1))\right\}.$$
2. Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions holomorphes *injectives* de $\Delta(0,1)$ dans $\mathbf{C}$ telles que $f_n(0) = 0$ et $r_{f_n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions holomorphes (pas nécessairement injectives) de $\Delta(0,1)$ dans $\mathbf{C}$ telles que $f_n(0) = 0$ et $f_n'(0) = 1$, et $r_{f_n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Le but de l'exercice est de montrer qu'une telle suite n'existe pas si l'on demande que les f_n soient injectives avec $f_n(0) = 0$ et $f_n'(0) = 1$. Autrement dit, on veut montrer qu'il existe $r_0 > 0$ tel que pour toute f holomorphe injective de $\Delta(0,1)$ dans $\mathbf{C}$ satisfaisant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, on ait $\Delta(0,r_0) \subseteq f(\Delta(0,1))$, et donner une valeur explicite pour r_0.
4. On admet le fait suivant, conséquence de la formule de Stokes : Soit $K \subseteq \mathbf{C}$ un compact à bord C^1. Alors l'aire de K est donnée par
$$\frac{1}{2i}\int_{\partial K} \bar{z}\mathrm{d}z.$$
   Soit $h : \Delta(0,1) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$ holomorphe et injective, admettant un développement en série de Laurent sur $\Delta(0,1) \setminus \{0\}$ de la forme :
$$h(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$
   (a) Soit $\rho \in]0,1[$. On note $K = \mathbf{C} \setminus h\left(\Delta(0,\rho) \setminus \{0\}\right)$.
      i. Montrer que K est compact.
      ii. Quel est le bord de K ? Justifier soigneusement.
      iii. Calculer l'aire de K en fonction des coefficients c_n et de ρ.

   (b) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} n|c_n|^2 \leq 1$.
5. Soit f holomorphe injective de $\Delta(0,1)$ dans $\mathbf{C}$ satisfaisant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On écrit $f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$.

   (a) Montrer qu'il existe g holomorphe injective de $\Delta(0,1)$ dans $\mathbf{C}$ satisfaisant $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$, avec pour tout $z \in \Delta(0,1)$, $g(z)^2 = f(z^2)$.

   (b) Montrer que $|a_2| \leq 2$. Montrer que l'on a égalité si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :
$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta}z)^2}.$$
   Indication : On pourra appliquer la question (4b) à $z \mapsto 1/g(z)$.

(c) Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ n'appartenant pas à l'image de $\Delta(0,1) \setminus \{0\}$ par $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$. On pose

$$F_{z_0}(z) = \frac{1}{\frac{1}{f(z)} - z_0}.$$

Montrer que F_{z_0} se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Delta(0,1)$ et calculer le coefficient de z^2 dans son développement en série entière, en fonction des a_n et de z_0.

(d) Montrer que $\Delta(0, \frac{1}{4}) \subseteq f(\Delta(0,1))$.

(e) Montrer que la constante $r_0 = \frac{1}{4}$ est optimale.