XM6-CPGE My Youssef

Résumé de cours

Équations différentielles

Rabat le 2 avril 2010

Blague du jour :
Faites vous partie de la nouvelle économie ? La réponse serait oui, si :
• Pour demander a votre voisin s'il veut aller déjeuner avec vous, vous lui envoyez un mail et il vous répond - également par mail - OK, laisse-moi 5 minutes.
• Vous discutez âprement via un forum avec un type habitant en Amérique du Sud alors que vous n'avez jamais dit bonjour a votre voisin de quartier.

Mathématicien du jour **Lipschitz**
Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1832-1900) était un mathématicien allemand, étudiant de Dirichlet. Lipschitz a laissé son nom aux applications à dérivée bornée (Application lipschitzienne). Son travail s'étend sur d'autres domaines : la théorie des nombres, l'analyse, la géométrie différentielle et la mécanique classique. Lipschitz a en outre donné un critère de convergence des développements en série de Fourier.

Remerciements : à David Delaunay (Paris) pour la source de ce résumé de cours.

Table des matières

1 Équations différentielles linéaires. **1**
1.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1. 1
1.1.1 Équation différentielle scalaire. 1
1.1.2 Système différentiel. 2
1.1.3 Équation différentielle matricielle. 2
1.1.4 Équation différentielle vectorielle. 2
1.1.5 Problème de Cauchy 2
1.1.6 Équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants 3
1.2 Équations linéaires scalaires d'ordre 2 3

2 Équations différentielles non linéaires. **4**
2.1 Équation différentielle scalaire non linéaire d'ordre 1. 5
2.2 Équations autonomes 5
2.2.1 Équation autonome d'ordre 1 5
2.2.2 Système autonome de taille 2. 5
2.2.3 Équation autonome d'ordre 2 6

Dans tout le chapitre I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1 Équations différentielles linéaires.

1.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1.

1.1.1 Équation différentielle scalaire.

Définition

On appelle équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 1 définie sur I toute équation de la forme $x' = a(t)x + b(t)$ avec $t \mapsto a(t)$ et $t \mapsto b(t)$ fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$ et d'inconnue $t \mapsto x(t)$ fonction dérivable de I vers $\mathbb{K}$.

Théorème.

Pour $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{K}$, l'équation $x' = a(t)x + b(t)$ possède une unique solution sur I vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$, donnée par la formule de Duhamel :

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} b(u)e^{-A(u)}du\right) e^{A(t)} \text{ où } A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)du.$$

1.1.2 Système différentiel.

Définition

On appelle système différentiel de taille n linéaire d'ordre 1 défini sur I tout système de la forme $\begin{cases} x_1' = a_{1,1}(t)x_1 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n,1}(t)x_1 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$
avec $t \mapsto a_{i,j}(t)$ et $t \mapsto b_i(t)$ fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$ et d'inconnue $t \mapsto (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ fonction dérivable de I vers $\mathbb{K}^n$.

1.1.3 Équation différentielle matricielle.

Définition

On appelle équation différentielle matricielle de taille n linéaire d'ordre 1 définie sur I toute équation de la forme : $X' = A(t)X + B(t)$ avec $t \mapsto A(t)$ fonction continue de I vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $t \mapsto B(t)$ fonction continue de I vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et d'inconnue $t \mapsto X(t)$ fonction dérivable de I vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Remarque : Par l'identification usuelle entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, systèmes différentiels et équations matricielles se correspondent.

1.1.4 Équation différentielle vectorielle.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 à valeurs dans E définie sur I toute équation de la forme $x' = a(t)(x) + b(t)$ avec $t \mapsto a(t)$ fonction continue de I vers $\mathcal{L}(E)$, $t \mapsto b(t)$ fonction continue de I vers E et d'inconnue $t \mapsto x(t)$ fonction dérivable de I vers E.

Remarques :

1) L'équation différentielle vectorielle généralise les autres types d'équations :
   - Pour $E = \mathbb{K}$: les équations scalaires.
   - Pour $E = \mathbb{K}^n$: les systèmes différentiels.
   - Pour $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: les équation matricielles.

2) Pour alléger les écritures, on adopte la notation fx au lieu de $f(x)$. L'équation étudiée s'écrit alors $x' = a(t)x + b(t)$.

3) En introduisant une base $\mathcal{B}$ de E et en posant $A(t) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(a(t)), B(t) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b(t))$ et $X(t) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x(t))$, l'équation vectorielle $x' = a(t)x+b(t)$ équivaut à l'équation matricielle $X' = A(t)X+B(t)$. Ainsi toute équation vectorielle équivaut à une équation matricielle ou encore à un système différentiel.

4) D'un point de vue théorique, on préfère manipuler la notion d'équation vectorielle. D'un point de vue pratique, on transpose en terme de système différentiel ou d'équation matricielle en travaillant dans une base bien choisie.

1.1.5 Problème de Cauchy

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*, a : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ des fonctions continues. On étudie l'équation différentielle $x' = a(t)x + b(t)$ de fonction inconnue $x : I \longrightarrow E$ dérivable. Soient $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$. On appelle problème de Cauchy la détermination des solutions de l'équation $x' = a(t)x + b(t)$ vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Théorème de Cauchy-Lipshcitz linéaire

L'équation différentielle $x' = a(t)x + b(t)$ possède une unique solution sur I vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Corollaire

L'ensemble S_0 des solutions sur I de l'équation homogène $x' = a(t)x$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de dimension $n = \dim E$.
On appelle système fondamental de solutions de l'équation homogène $x' = a(t)x$ toute base $(x_1, \ldots, x_n)$ de l'espace S_0. la solution générale homogène est $x(t) = \lambda_1 x_1(t) + \cdots + \lambda_n x_n(t)$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Définition

On appelle wronskien dans une base $\mathcal{B}$ de E d'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de solutions de l'équation $x' = a(t)x$, la fonction $w_{\mathcal{B}} : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par : $w_{\mathcal{B}}(t) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))$.

Théorème

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $(x_1, \cdots, x_n)$ est un système fondamental de solutions,
2) $\forall t_0 \in I, w_{\mathcal{B}}(t_0) \neq 0$,
3) $\exists t_0 \in I, w_{\mathcal{B}}(t_0) \neq 0$.

Théorème Méthode de la variation des constantes :

Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est un système fondamental de solutions de l'équation homogène $x' = a(t)x$, alors on peut trouver une solution particulière de l'équation $x' = a(t)x + b(t)$ de la forme $x(t) = \lambda_1(t)x_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)x_n(t)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ fonctions dérivables.

Remarques :

1) La solution générale de l'équation complète $x' = a(t)x + b(t)$ s'écrit sous la forme $x = x_H + x_0$, où x_H solution générale de l'équation homogène $x' = a(t)x$ et x_0 une solution générale de l'équation complète $x' = a(t)x + b(t)$.
2) L'ensemble S des solutions sur I de $x' = a(t)x + b(t)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de direction S_0 (et donc de dimension n).

1.1.6 Équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

Définition

On appelle équation différentielle à valeurs dans E linéaire d'ordre 1 à coefficient constant définie sur I toute équation différentielle de la forme $x' = ax + b(t)$ avec $a \in \mathcal{L}(E), t \mapsto b(t)$ continue de I vers E et d'inconnue $t \mapsto x(t)$ dérivable de I vers E.

Remarque.
Via l'introduction d'une base de E, une telle équation différentielle correspond :

1) à une équation matricielle $X' = AX + B(t)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
2) à un système différentiel : $\begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n + b_n(t) \end{cases}$

   avec $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ et $t \mapsto b_i(t)$ fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$ et d'inconnue $t \mapsto (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ fonction dérivable de I vers $\mathbb{K}^n$.

Rappel :

1) Pour $a \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\exp(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \in \mathcal{L}(E)$.
2) $\exp(0) = \mathrm{Id}_E$.
3) Si $a, b \in \mathcal{L}(E)$ commutent alors $\exp(a) \circ \exp(b) = \exp(a + b) = \exp(b) \circ \exp(a)$.
4) l'application $t \mapsto \exp(ta)$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ et $\exp(ta)' = a \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ a$.

Théorème

Pour $a \in \mathcal{L}(E)$ et $x_0 \in E$, l'unique solution à l'équation $x' = ax$ vérifiant $x(0) = x_0$ est la fonction $x : t \mapsto \exp(ta)x_0$.

1.2 Équations linéaires scalaires d'ordre 2

Définition

On appelle équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre 2 définie sur I toute équation de la forme $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ avec $a, b, c : I \mapsto \mathbb{K}$ continues et d'inconnue $x : I \mapsto \mathbb{K}$ deux fois dérivable.
Lorsque les fonctions a et b sont constantes, on parle d'équation à coefficients constants.

Remarque : l'équation $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ est équivalente au système différentiel de taille 2 : $\begin{cases} x' = y \\ y' = a(t)y + b(t)x + c(t) \end{cases}$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Soient $a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues, $t_0 \in I$ et $x_0, x'_0 \in \mathbb{K}$. L'équation différentielle $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ possède une unique solution sur I vérifiant les conditions initiales : $x(t_0) = x_0 et x'(t_0) = x_1$.

Corollaire

• L'ensemble S_0 des solutions sur I de l'équation homogène $x'' = a(t)x' + b(t)x$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de dimension 2.
• L'ensemble S des solutions sur I de l'équation complète $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ est un plan affine de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de direction S_0.

Exemple fondamental : Équation linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants.

Pour résoudre l'équation $y'' + ay' + by = 0$, on introduit son équation caractéristique $(*)$ $r^2 + ar + b = 0$ de discriminant Δ.

1) Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   - Si $\Delta \neq 0$, on a 2 solutions α, β de (*), alors $y(t) = \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
   - Si $\Delta \neq 0$, on 1 solution double α de (*), alors $y(t) = (\lambda + \mu t)e^{\alpha t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

2) Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   - Si $\Delta \geq 0$: pareil que le cas réel avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   - Si $\Delta < 0$, on a 2 solutions de (*) conjuguées $\alpha \pm i\omega$, alors $y(t) = e^{\alpha t}(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t))$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Définition

• On appelle système fondamental de solutions de l'équation homogène $x'' = a(t)x' + b(t)x$ toute base (x_1, x_2) de l'espace S_0.
• On appelle wronskien d'une famille (x_1, x_2) de solutions de l'équation homogène la fonction $t \mapsto w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x2(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) \end{vmatrix}$.

Théorème

Si x_1, x_2 sont solutions de l'équation homogène alors on a équivalence entre :
1) (x_1, x_2) est un système fondamental de solution,
2) $\forall t_0 \in I, \ w(t_0) \neq 0$,
3) $\exists t_0 \in I, \ w(t_0) \neq 0$.

Théorème : Méthode de variation des constantes.

On peut trouver une solution particulière sur I de l'équation $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ de la forme $x(t) = \lambda(t)x_1(t) + \mu(t)x_2(t)$ avec $\lambda, \mu : I \longrightarrow \mathbb{K}$ fonctions dérivables vérifiant : $\begin{cases} \lambda'(t)x_1(t) + \mu'(t)x_2(t) = 0 \\ \lambda'(t)x'_1(t) + \mu'(t)x'_2(t) = c(t) \end{cases}$

Méthode de Lagrange : Supposons connue une solution x_1 de l'équation homogène $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, ne s'annulant pas sur I, avec $a, b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues. On peut obtenir une solution x_2 indépendante de x_1 en la recherchant sous la forme $x_2(t) = \lambda(t)x_1(t)$ avec λ fonction deux fois dérivable.

Résolution de l'équation complète : Pour résoudre $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$:

• On cherche une solution particulière x_1 de l'équation homogène $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, polynomiales, développable en série entière, à l'aide d'un changement de variable ou de fonctions.

• On forme un système homogène (x_1, x_2) à l'aide de la méthode de Lagrange.

• On cherche un solution particulière de l'équation complète $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ sous la forme $x_0 = \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$ à l'aide de la méthode des variations des constantes.

• La forme générale de la solution de l'équation complète $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ est $x(t) = (\lambda_1(t) + \lambda)x_1(t) + (\lambda_2 + \mu)x_2(t)$

2 Équations différentielles non linéaires.

Dans toute la suite U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2.1 Équation différentielle scalaire non linéaire d'ordre 1.

Définition

• Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On appelle solution de l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ sur I, toute fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable vérifiant :
$$\begin{cases} \forall x \in I, (x, y(x)) \in U \\ \forall x \in I, y'(x) = f(x, y(x)) \end{cases}.$$
• Une telle solution sur I est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$.
• Une solution est dite maximale si elle ne peut pas être prolongée en une solution définie sur un intervalle strictement plus grand.
• On appelle courbe intégrale toute courbe d'une solution maximale.

Propriétés :
• Une solution définie sur $\mathbb{R}$ est une solution maximale.
• Toute restriction d'une solution maximale est encore solution.
• Toute solution est restriction d'au moins une solution maximale.

Problème de Cauchy

Soit $(x_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy consiste à déterminer les solutions de l'équation $y' = f(x,y)$ satisfaisant la condition initiale : $y(x_0) = y_0$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si $(x_0, y_0) \in U$ et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors le problème de Cauchy possède une unique solution maximale.
De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et toute autre solution de ce problème de Cauchy est restriction de cette solution maximale.

Corollaire

Les courbes intégrales de l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ constituent alors une partition de U. En particulier si une fonction constante égale à λ est solution $\mathbb{R}$ alors aucune autre solution maximale ne prend la valeur λ.

Équations à variables séparables : Ce sont les équations de la forme $p(y)y' = q(x)$. Pour P et Q primitives de p et q, on obtient : $P(y) = Q(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. Si de plus, on peut inverser P, on obtient $y(x) = P^{-1}(Q(x) + C)$.

2.2 Équations autonomes

2.2.1 Équation autonome d'ordre 1

Définition

On appelle équation autonome d'ordre 1 toute équation différentielle de la forme $y' = f(y)$ avec $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction continue.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si $y_0 \in I$ et si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.
De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et toute autre solution de ce problème de Cauchy est restriction de cette solution maximale.

Corollaire

Les solutions de l'équation $y' = f(y)$ sont soit constantes ou injectives.

2.2.2 Système autonome de taille 2.

Définition

• Soient $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. On appelle système autonome de taille 2, tout système différentiel différentiel de la forme : $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$.
• On appelle solution sur I tout couple (x, y) formé de fonctions dérivables sur I vérifiant :
1) $\forall t \in I,\ (x(t), y(t)) \in U$,
2) $\forall t \in I,\ x'(t) = f(x(t), y(t))$ et $y'(t) = g(x(t), y(t))$.

Théorème

Si $(x_0, y_0) \in U$ et si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$.
De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et toute autre solution de ce problème de Cauchy en est une restriction.

Corollaire

Les solutions maximales d'un système autonome de taille 2 sont bien injectives, ou bien périodiques définies sur $\mathbb{R}$.

2.2.3 Équation autonome d'ordre 2

Définition

• On appelle équation autonome d'ordre 2, toute équation différentielle de la forme $x'' = f(x, x')$, où $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.
• On appelle solution sur I toute fonction $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et vérifiant :
1) $\forall t \in I, (x(t), x'(t)) \in U$,
2) $\forall t \in I, x''(t) = f(x(t), x'(t))$.
• Une telle solution est nécessairement une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Remarque : Toute équation autonome d'ordre 2 $x'' = f(x, x')$ peut être ramenée à un système autonome de taille 2, de la forme $\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x,y) \end{cases}$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si $(x_0, x'_0) \in U$ et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy formé par l'équation $x'' = f(x, x')$ et les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $x'(0) = x'_0$.
De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et toute autre solution de ce problème de Cauchy en est une restriction.

Corollaire

Si x est une solution maximale, alors ou bien $t \mapsto (x(t), x'(t))$ est injective ou bien x est périodique définie sur $\mathbb{R}$.

Fin !