



SCIENCES SUP

Cours et exercices corrigés

Licence 1^{re} et 2^e années

COURS DE PHYSIQUE

OPTIQUE

2^e édition

Jean-Paul Parisot
Patricia Segonds
Sylvie Le Boiteux

DUNOD

COURS DE PHYSIQUE
OPTIQUE

Consultez nos catalogues
sur le Web

<http://www.dunod.com>

SCIENCES ET TECHNIQUES

INFORMATIQUE
Dunod & Microsoft Press

GESTION MANAGEMENT

SCIENCES HUMAINES

Acheter en ligne

Nouveautés

DUNOD
Microsoft Press
EdiScience ETSF
InterÉditions

Compléments en ligne

Magazine et interviews d'auteurs

COURS DE PHYSIQUE

OPTIQUE

Jean-Paul Parisot

Professeur à l'université Bordeaux I

Patricia Segonds

Maître de conférences à l'université Joseph Fournier de Grenoble

Sylvie Le Boiteux

Professeur à l'université Bordeaux I

Préfacé par

André Ducasse

Professeur à l'université Bordeaux I

2^e édition

DUNOD

Illustration de couverture : Albert Arnaud

Ce pictogramme mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du **photocopillage**.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les

établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la

possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation du Centre français d'exploitation du

droit de copie (**CFC**, 20 rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2003

ISBN 2 10 006846 6

Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite selon le Code de la propriété intellectuelle (Art L 122-4) et constitue une contrefaçon réprimée par le Code pénal. • Seules sont autorisées (Art L 122-5) les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, ainsi que les analyses et courtes citations justifiées par le caractère critique, pédagogique ou d'information de l'œuvre à laquelle elles sont incorporées, sous réserve, toutefois, du respect des dispositions des articles L 122-10 à L 122-12 du même Code, relatives à la reproduction par reprographie.

PRÉFACE

Durant les deux dernières décennies, une véritable révolution s'est déroulée dans le domaine de l'optique. En effet, après la découverte des lasers dans les années soixantes et leur développement extrêmement rapide dans les laboratoires de recherche au cours des deux décennies suivantes, une multitude d'applications ont émergé, sortant des laboratoires pour toucher notre vie de tous les jours : compacts-disques, lectures de codes-barres dans les caisses enregistreuses de grandes surfaces, communications par fibres optiques... Ainsi, de nouvelles technologies optiques sont venues modifier notre environnement, comme l'ont fait auparavant les technologies électroniques puis les technologies informatiques. Cependant, ces deux dernières disciplines se sont pratiquement créées en même temps qu'émergeaient leurs applications. L'optique, au contraire, bénéficie d'une très longue histoire et son évolution dans les dernières années présente des aspects tout à fait originaux.

De nouveaux domaines sont nés, bien sûr, avec l'avènement des sources lasers cohérentes de l'optique : la physique des lasers, l'optique non-linéaire, l'optique quantique, en particulier. Ils ont fait l'objet de beaucoup d'attention de la part des chercheurs et de nombreux ouvrages ont été publiés pour faire le point concernant nos connaissances sur le sujet. La nouvelle vision que nous avons maintenant de l'optique a cependant profondément modifié aussi la façon dont nous percevons ses bases anciennes. L'originalité de la propagation des ondes lasers cohérentes met en évidence directement les limitations de l'optique géométrique qui traite simplement la lumière comme un ensemble de rayons lumineux. Cette optique géométrique peut néanmoins continuer à être utilisée avec beaucoup de profit dans un grand nombre d'applications de sources lasers, à condition que ses limitations soient bien dominées. De même, l'optique physique (qui analyse les phénomènes d'interférences et de diffractions) et le traitement général des ondes électromagnétiques, ne peuvent plus être présentés de la même manière depuis que l'on dispose des sources cohérentes, si l'on souhaite permettre une formation bien connectée avec les soucis actuels des expérimentateurs. Or, dans tous ces derniers domaines, peu d'efforts pédagogiques ont été réalisés pour adapter notre ancienne façon de percevoir les phénomènes optiques aux nouvelles données expérimentales. C'est dans ce contexte que les auteurs de cet ouvrage, très familiers des technologies actuelles lasers, proposent très opportunément une présentation originale de l'optique géométrique.

L'enseignement de l'optique géométrique, tel qu'il est encore pratiqué le plus souvent, laisse une image un peu poussiéreuse de simple application mathématique des relations de Chasles ou de la géométrie des triangles, la physique sous-jacente étant réduite à quelques considérations très générales. Il ne peut alors vraiment intéresser que les étudiants férus de géométrie, qui vont d'ailleurs vite

se laisser d'une utilisation répétitive de notions mathématiques très simples. En fait, l'optique géométrique est un outil judicieux pour apprendre à manipuler la lumière, pour comprendre simplement des phénomènes physiques complexes ou encore pour interpréter la perception que nous avons du monde, via ce sens extraordinaire qu'est notre vision. La présentation de l'optique géométrique ne doit donc pas être uniquement une succession de relations indiquant comment un rayon lumineux se propage dans des milieux de différents indices. Elle doit permettre de trouver des solutions à des problèmes mettant en jeu la lumière, doit donner des clés pour des observations surprenantes du monde qui nous entoure.

C'est ce point de vue qu'ont choisi très opportunément les auteurs. Ainsi, dans leur introduction, ils indiquent la place de l'optique géométrique parmi les traitements de la lumière et, plus généralement, parmi les présentations des propagations d'ondes électromagnétiques. L'historique qui est donné souligne bien l'importance ancestrale du sujet et indique surtout comment se sont complétées peu à peu nos connaissances sur les propriétés de la lumière, avec une accélération remarquable dans les dernières décennies. Dans le cœur de l'ouvrage, on retrouve, bien sûr, toutes les notions de base essentielles pour dominer cette science des rayons lumineux. Mais elles sont le plus souvent accompagnées de considérations historiques, d'applications technologiques très actuelles ou encore d'interprétations de phénomènes naturels, ce qui ancre les notions mathématiques dans le contexte physique qui est leur raison d'être. Ainsi sont présentées, par exemple, des explications claires des phénomènes solaires surprenants (parabélies, arc-en-ciel, aplatissement du Soleil, rayon vert), des mirages, de la vision sous l'eau. Les techniques récemment développées de fibres optiques, de rétroreflecteurs solides, de lames séparatrices par réflexion totale frustrée sont données en illustration. Enfin, la partie consacrée aux instruments de l'optique géométrique commence par une description détaillée de notre œil considéré comme un récepteur complexe mais dont on peut avoir une vue schématique qui rend compte de beaucoup de ses caractéristiques, aussi bien sur le plan optique que physiologique. Les instruments « artificiels » de l'optique géométrique sont également présentés avec une grande simplicité, leurs propriétés essentielles étant bien mises en exergue.

La forme de l'ouvrage est bien adaptée au souci manifeste des auteurs de faire passer un message simple, clair grâce à un texte attractif. Les explications détaillées ont été préférées aux successions fastidieuses de relations, les schémas illustratifs sont faciles à lire, une utilisation systématique des encarts permet une première lecture rapide. Je voudrais enfin insister sur le bon choix qui a été fait d'exercices avec solutions présentés au lecteur à chaque chapitre. Ceux-ci doivent lui permettre de toucher du doigt systématiquement l'importance des notions qu'il vient d'apprendre.

Cet ouvrage constitue donc une présentation de l'optique géométrique qui arrive fort à propos lorsque l'on considère les besoins déjà importants et qui vont

encore beaucoup grossir, en formation dans cette matière ancienne venant de complètement se renouveler. Certes, l'ouvrage s'adresse en priorité aux étudiants de première et deuxième années des universités ou aux élèves de classes préparatoires des lycées qui trouveront là, sous forme très attractive, toutes les notions de base qu'ils doivent acquérir. Je ne doute cependant pas que nombre d'autres scientifiques non opticiens utilisent avec beaucoup de profit cet ouvrage pour satisfaire leur curiosité tant en ce qui concerne un certain nombre de nouvelles technologies que pour comprendre enfin quelques phénomènes naturels.

André Ducasse
Professeur de Physique
Université Bordeaux 1

AVANT-PROPOS

« On s'étonne trop de ce que l'on voit rarement et pas assez de ce qu'on voit tous les jours »

COMTESSE DE GENLIS

Dans la nature se produisent spontanément des phénomènes lumineux variés et spectaculaires dont les plus connus sont les arcs-en-ciel et les mirages. La représentation de la lumière à l'origine des phénomènes lumineux est faite ici dans le formalisme de l'optique géométrique qui privilégie son caractère de propagation. L'optique géométrique est une approximation de très grande importance et son développement est étroitement lié à notre histoire des sciences, domaine dans lequel sa contribution est particulièrement originale.

L'optique géométrique est une bonne approximation tant que les dimensions du système étudié sont grandes devant la longueur d'onde de la lumière qui s'y propage. Nous montrons alors que le principe de Fermat permet d'établir les lois de Snell-Descartes qui sont les fondements de l'optique géométrique. Ces lois sont appliquées à de nombreux exemples de dioptrés plans (lames à faces parallèles, miroir plans, prisme...). Leur influence sur le parcours de la lumière étant expliqué, on introduira les conséquences sur la vision à travers ces systèmes.

Nous définissons ensuite la condition de l'approximation de Gauss qui permet d'établir la fameuse relation de conjugaison qui relie les positions d'un objet et de son image à travers n'importe quel dispositif optique (dioptré, miroir sphérique ou lentille mince) mais aussi à travers des combinaisons comme la lentille épaisse, l'oculaire ou le microscope. Cette généralisation au formalisme de l'optique géométrique apporte une énorme simplification qui permet de déduire par des raisonnements simples toutes les autres relations nécessaires à la caractérisation d'un instrument.

Dans chaque chapitre nous proposerons des exemples dans le cours ou sous forme d'exercices accompagnés de leurs solutions afin d'insister sur la portée pratique dans la vie de tous les jours des différentes notions traitées. Si la représentation de la lumière par l'optique géométrique ne suffit pas pour expliquer toutes les curiosités naturelles, elle permet de démystifier de nombreux phénomènes lumineux. Nous aurons déjà un nouveau regard envers la nature !

Pour retenir l'esprit sans contrainte un enseignement doit intéresser par toutes ses applications ! C'est ainsi que dans une deuxième partie, nous attirerons l'attention, en relation directe avec le formalisme classique de l'optique géométrique, sur la description d'instruments classiques comme la loupe, le microscope, la lunette ou les jumelles, qui passionnent les jeunes générations. La connaissance de leur principe de fonctionnement assurera leur utilisation dans de bonnes conditions.

Remerciements

Pendant l'écriture de ce livre, nous avons bénéficié de l'aide d'un grand nombre de collègues auxquels nous voudrions rendre hommage.

Nous voudrions tout d'abord remercier Bruno Chassagne, Bernard Pouligny et Jacques Baudon qui ont consacré beaucoup de temps à une lecture critique du manuscrit.

Nous souhaitons également témoigner des discussions toujours enrichissantes que nous avons pu avoir avec Laurent Sarger et autres enseignants et chercheurs de notre entourage.

Enfin, nous remercions André Ducasse d'avoir accepté de préfacer cet ouvrage.

Les auteurs

TABLE DES MATIÈRES

<i>Préface</i>	V
<i>Avant-propos</i>	VIII
Chapitre 1. La lumière et l'optique géométrique	1
1. « Qu'est-ce que la lumière ? » : bref historique	1
2. La lumière dans le vide	3
3. Propagation de la lumière dans les milieux matériels	9
4. L'optique géométrique	11
5. Conclusion	13
<i>À retenir</i>	14
<i>QCM</i>	15
<i>Exercices</i>	16
<i>Solutions</i>	18
Chapitre 2. Du principe de Fermat aux lois de Snell-Descartes	21
1. Principe de Fermat	21
2. Énoncé des lois de Snell-Descartes	26
3. Principe du retour inverse de la lumière	27
4. Interprétation des lois de Snell-Descartes	28
5. Construction géométrique du rayon réfracté par les surfaces d'indices (construction de Huygens)	32
6. Approximation des petits angles : loi de Kepler	33
7. Applications	34
<i>À retenir</i>	36
<i>Annexe 1. Rappels sur les fonctions trigonométriques</i>	38
<i>QCM</i>	40
<i>Exercices</i>	41
<i>Solutions</i>	46
Chapitre 3. Le prisme	53
1. Définitions	53
2. Influence d'un prisme sur la marche d'un rayon	54
3. Analyse des formules du prisme	55
4. Influence de l'angle A du prisme sur l'angle de déviation D	59
5. Application aux mesures de l'indice absolu d'un milieu	60
6. Prismes à réflexion totale	64
<i>À retenir</i>	69
<i>QCM</i>	70
<i>Exercices</i>	71
<i>Solutions</i>	78
Chapitre 4. La vision des images et les conditions de Gauss	87
1. Vision d'images	87
2. Critères de qualité d'un système	97
3. Images réelles et images virtuelles	100
4. Objets réels et objets virtuels	100
5. Classification des systèmes optiques	101

<i>À retenir</i>	102
<i>Annexe 2. Vision du poisson sous l'eau</i>	103
<i>QCM</i>	107
<i>Exercices</i>	108
<i>Solutions</i>	112
Chapitre 5. Les dioptrés sphériques	119
1. Définitions	119
2. De la loi de Snell-Descartes à la relation de conjugaison	121
3. Analyse de la relation de conjugaison	124
4. Étude des foyers d'un dioptré	127
5. Autres formulations de la relation de conjugaison	129
6. Relation de Newton	130
7. Construction d'images à travers un dioptré sphérique	131
8. Grandissement transversal ou transverse γ	134
9. Grandissement longitudinal g	136
10. Déformation d'images à travers les dioptrés sphériques	137
<i>À retenir</i>	138
<i>QCM</i>	140
<i>Exercices</i>	141
<i>Solutions</i>	145
Chapitre 6. Les miroirs sphériques	151
1. Le miroir sphérique : définition	151
2. De la loi de Snell-Descartes à la relation de conjugaison pour un miroir sphérique	153
3. Étude de la relation de conjugaison du miroir sphérique	155
4. Étude des foyers d'un miroir sphérique	157
5. Nature de l'image formée par un miroir sphérique	158
6. Autres formulations de la relation de conjugaison	159
7. Relation de Newton	161
8. Construction d'images à travers un miroir sphérique	161
9. Le grandissement transversal γ et le grandissement longitudinal g	164
10. Un miroir sphérique n'est pas stigmatique	165
11. Un miroir stigmatique est parabolique	167
<i>À retenir</i>	167
<i>QCM</i>	169
<i>Exercices</i>	170
<i>Solutions</i>	175
Chapitre 7. Les lentilles minces	187
1. Lentilles minces : définition et symbole	187
2. Relation de conjugaison des lentilles minces	190
3. Foyers et plans focaux d'une lentille mince	192
4. Autres formes de la relation de conjugaison	193
5. Analyse de l'effet d'une lentille mince	194
6. Images et grandissement	194
7. Exemples de lentilles minces	199
8. Les lentilles accolées	201
9. Lentilles mince séparant deux milieux d'indice différent	202
<i>À retenir</i>	203
<i>QCM</i>	205
<i>Exercices</i>	206
<i>Solutions</i>	211

Chapitre 8. Les combinaisons ou associations	219
1. Introduction	219
2. Formules universelles	220
3. Mise en équation d'un doublet quelconque	221
4. Foyers d'un doublet	222
5. Relation de Newton	222
6. Distances focales d'un doublet	223
7. Points principaux H et H' et relation de Descartes	225
8. Rapport des distances focales	228
9. Vergence d'une association : la formule de Gullstrand	228
10. Construction d'images et grandissement	229
11. Application	231
12. Formulation matricielle de l'étude des associations	234
À retenir	238
QCM	239
Exercices	240
Solutions	250
Chapitre 9. L'œil	263
1. Introduction	263
2. Description de l'œil	263
3. Quelques caractéristiques de l'œil	266
4. Schéma optique de l'œil	267
5. Œil emmétrope (normal)	269
6. Les défauts de l'œil et comment les corriger	270
À retenir	274
QCM	275
Exercices	276
Solutions	279
Chapitre 10. Instruments et photométrie	285
1. Définitions	285
2. Description de quelques instruments	296
3. Quelques éléments de photométrie énergétique	303
À retenir	304
QCM	311
Exercices	312
Solutions	316
Constructions	323
1. Miroirs plans	323
2. Dioptries sphériques	324
3. Miroirs sphériques	326
4. Lentilles minces	328
5. Associations	333
6. Boîtes mystérieuses	337
Solutions	338
Index	353

CHAPITRE 1

LA LUMIÈRE ET L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Pré-requis

Ce chapitre reprend l'essentiel des notions élémentaires sur les ondes lumineuses utiles à l'optique géométrique. Quelques-unes d'entre elles ont été vues au lycée.

Objectif

Après un bref rappel historique sur la lumière au fil des siècles, ce chapitre présente le spectre des ondes électromagnétiques. La description de la propagation de la lumière dans le vide ou dans des milieux matériels isotropes et transparents est abordée à partir de principes. Enfin, nous définissons le cadre dans lequel s'inscrit l'emploi de l'optique géométrique.

1. « QU'EST-CE QUE LA LUMIÈRE ? » : BREF HISTORIQUE

L'étude des phénomènes lumineux a de tout temps passionné l'homme et l'histoire des sciences a été marquée par de nombreux débats concernant la nature de la lumière. À la question simple, « qu'est-ce que la lumière », les réponses ont été variées. Cependant, différentes descriptions de la lumière, basées sur l'observation quotidienne, se sont développées au cours des siècles.

Ainsi, dans l'Antiquité on pensait que la lumière était issue de leurs propres yeux sous une forme alimentée par une sorte de feu. Cette théorie du feu visuel affirmait que c'était l'œil qui émettait de la lumière, permettant ainsi la vision des objets. Euclide, un fervent défenseur de ces idées, a fondé une théorie basée uniquement sur la notion de rayon lumineux ; elle a permis d'en déduire les principes du retour inverse et de la propagation rectiligne de la lumière.

Peu à peu, les savants ont compris que la lumière était une entité propre, indépendante du sujet qui la regarde. Ibn al-Haitham, plus connu sous le nom d'Ahlazen, scientifique arabe du XI^e siècle, alors fort lu en Occident, a été l'un des premiers à développer cette

idée. Il imagine diverses expériences destinées à mettre en évidence l'influence de la lumière sur l'œil. En effet, comment une lumière intense, celle du soleil par exemple, issue de l'œil de l'observateur, peut-elle le blesser et l'aveugler ? De la même façon, comment expliquer que la finesse des détails d'un objet ne soit observable que lorsque les conditions d'éclairement sont bien maîtrisées ? Enfin, ce n'est pas parce que l'on ferme les yeux que l'image du ciel à travers une fenêtre disparaît. Toutes ces observations sont la preuve évidente que la lumière a une identité propre et que nous ne faisons que la subir à travers notre vision. Ahlazen a proposé de nombreuses expériences, faisant ainsi preuve d'une créativité tout à fait exceptionnelle.

Jusqu'au XIII^e siècle, aucune idée nouvelle n'est apparue ; pourtant, certaines observations, comme le phénomène de l'arc-en-ciel ou la décomposition de la lumière par un prisme de verre, suggèrent bien l'existence d'une double nature de la lumière, ondulatoire et corpusculaire.

Au XVII^e siècle, les scientifiques se sont largement querellés à ce sujet sans qu'un réel accord puisse être trouvé. Galilée, après avoir construit un des premiers microscopes, s'émerveille de l'observation des planètes. Selon lui, la lumière est composée de grains rebondissant sur une surface réfléchissante. Au contraire, s'appuyant sur les phénomènes de réflexion, Descartes et Newton sont de fervents défenseurs de la nature corpusculaire de la lumière. Parallèlement, Fermat établit que la lumière se propage selon un principe de moindre temps, plus vite dans le vide que dans les autres milieux. Il lutte ainsi contre les idées de Descartes, selon lesquelles la lumière va plus vite dans la matière que dans le vide. En 1685, les premières expériences de diffraction faites par Grimaldi, faisant passer la lumière à travers un fil ou un cheveu, démontrent le caractère ondulatoire de la lumière. En effet, un fil placé sur le trajet d'un faisceau lumineux produit une figure de diffraction composée de structures complexes qui font penser au comportement des rides provoquées à la surface de l'eau par un caillou.

En 1821, Augustin Fresnel définit la lumière comme une onde, c'est-à-dire comme une perturbation voyageant ou se propageant sans déplacement de matière. C'est un phénomène bien connu de tous les enfants habitués à faire des ricochets dans l'eau : les rides provoquées par un caillou à la surface de l'eau se propagent circulairement autour d'un point d'impact sans produire de transport d'eau. On parle dans ce cas d'ondes mécaniques ; celles-ci existent dans des milieux dont les propriétés élastiques leur permettent de revenir à leur état d'équilibre. Au XIX^e siècle, Faraday, puis Maxwell, montrent que la lumière est une onde électromagnétique. Il semble alors exclu d'attribuer une nature autre qu'ondulatoire à la lumière.

Pourtant, en 1887, Hertz découvre l'effet photoélectrique : si l'on envoie sur un matériau métallique un faisceau dont la longueur d'onde est supérieure à un certain seuil, on lui arrache des électrons. La valeur du seuil est directement reliée à la nature même du métal. Aucune interprétation de l'effet photoélectrique n'était possible avec une théorie ondulatoire. De même, un morceau de métal chauffé à très haute température (1 500 °C) émet un rayonnement, appelé rayonnement du corps noir, qui ne dépend pas de la nature du corps, mais uniquement de sa température.

En 1905, Albert Einstein publie un article révolutionnaire qui lui vaut le prix Nobel, dans lequel il interprète ces deux expériences. Il prouve ainsi la nature corpusculaire de la lumière et montre que, si elle est composée de photons de même fréquence ν qui se déplacent à la vitesse de la lumière, ils ont tous la même énergie.

Enfin, l'avancée du XX^e siècle, avec le développement de la dualité onde-corpuscule dû à de Broglie, à Heisenberg et à Dirac, met un point final à cette querelle : la lumière a

effectivement ce double aspect et les échelles de mesure auxquelles on travaille peuvent mettre en avant l'une ou l'autre nature, ondulatoire ou corpusculaire.

2. LA LUMIÈRE DANS LE VIDE

Les ondes électromagnétiques sont des phénomènes périodiques qui, contrairement au son, se propagent aussi bien dans un milieu matériel que dans le vide. Les physiciens du XIX^e siècle avaient d'ailleurs imaginé un milieu matériel remplissant l'univers, l'éther, porteur des ondes électromagnétiques. Les expériences de Michelson ont complètement anéanti ce concept.

2.1. Le spectre électromagnétique dans le vide

Les ondes électromagnétiques sont constituées d'un champ électrique \vec{E} et d'un champ magnétique \vec{B} qui varient périodiquement dans le temps. Considérons le cas simple d'ondes sinusoïdales se propageant dans le vide. Dans ce cas, les deux champs \vec{E} et \vec{B} sont situés dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde repérée par le vecteur \vec{k} et ces trois vecteurs forment un trièdre direct $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$.

La plupart des effets lumineux étant directement reliés à l'existence du champ électrique, l'optique s'intéresse essentiellement à l'évolution de \vec{E} . Si l'on suppose ce dernier dirigé selon l'axe Ox , il oscille en fonction du temps le long de cet axe comme $E_x(\vec{r}, t) = E_0(\vec{r}) \sin \frac{2\pi t}{T}$; E_0 est l'amplitude du champ électrique et sa direction définit ce que l'on appelle la polarisation du champ. Cette dernière notion n'intervenant pas en optique géométrique, elle ne sera pas détaillée ici.

En raison de leur caractère périodique, les ondes électromagnétiques sinusoïdales se reproduisent identiques à elles-mêmes au bout d'un certain temps T , appelé période temporelle et exprimé en secondes; la période est l'inverse de la fréquence ν , exprimée en hertz (symbole Hz). Le MHz (10^6 Hz) et le GHz (10^9 Hz) sont des multiples de fréquence couramment utilisés. On peut aussi définir ω , la pulsation, exprimée en radians par seconde, par : $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$.

Si l'on mesure la distance parcourue par le champ électrique pendant la période T , on obtient sa longueur d'onde λ . Elle est exprimée en mètres ou en sous-multiples comme par exemple le micromètre appelé micron (10^{-6} m, symbole μm), le nanomètre (10^{-9} m, symbole nm) ou l'angström (10^{-10} m, symbole Å), le picomètre (10^{-12} m, symbole pm), le femtomètre (10^{-15} m, symbole fm).

Lorsqu'une seule fréquence ν (ou, de manière équivalente, une des quantités T , ω ou λ) caractérise une onde électromagnétique, elle est dite monochromatique. Dans le cas contraire, elle est polychromatique.

Les ondes électromagnétiques couvrent une très large gamme de fréquences, depuis les ondes radio, dont la fréquence est voisine de quelques 10^3 Hz, jusqu'aux rayons γ de très haute énergie, de fréquence 10^{19} Hz à 10^{22} Hz, provenant naturellement de l'espace

interstellaire ou du soleil. Dans le vide ou dans la matière, les ondes électromagnétiques obéissent à une même classification selon la valeur de leur fréquence ν , présentée dans le tableau 1.1. On peut aussi choisir de définir les différentes parties du spectre électromagnétique par leur longueur d'onde (voir *tableau 1.1*); cependant, cette distinction dépend de la relation qui lie λ à ν et donc du milieu dans lequel l'onde se déplace.

Tableau 1.1 • Présentation du spectre électromagnétique dans le vide

Fréquences $\nu = 1/T$		Longueur d'onde λ dans le vide		Type d'ondes
Hz	Autre unité	m	Autre unité	
$3 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^5$	3 – 300 KHz	$10^3 - 10^5$		Radio basse fréquence (LF)
$3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^6$	0,3 – 3 MHz	$10^2 - 10^3$		Radio moyenne fréquence
$3 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^7$		$10 - 10^2$		Radio haute fréquence
$3 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^8$		1 – 10		Radio VHF
$3 \cdot 10^8 - 3 \cdot 10^9$	0,3 – 3 GHz	$10^{-1} - 1$		Radio UHF
$3 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^{11}$		$10^{-3} - 10^{-1}$		Micro-ondes
$3 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{14}$	0,3 – 400 THz	$0,7 \cdot 10^{-6} - 10^{-3}$		IR
$4 \cdot 10^{14} - 7,5 \cdot 10^{14}$		$0,4 \cdot 10^{-6} - 0,7 \cdot 10^{-6}$	0,4 μm – 0,7 μm	Visible
$7,5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17}$		$10^{-9} - 0,4 \cdot 10^{-6}$		UV
$3 \cdot 10^{17} - 3 \cdot 10^{19}$		$10^{-11} - 10^{-9}$	10 pm – 1 nm	Rayons X
$3 \cdot 10^{19} - 3 \cdot 10^{22}$		$10^{-14} - 10^{-11}$	10 fm – 10 pm	Rayons γ

Ainsi, dans le vide, la fréquence d'une onde électromagnétique ν est reliée à sa longueur d'onde λ par la relation $\lambda\nu = c$, où c est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide. C'est en fait la plus grande vitesse qui puisse exister dans l'univers. La vitesse c est l'une des constantes fondamentales de la physique et vaut 299 792,458 $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. On utilise souvent sa valeur approchée $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. L'encart historique présente des expériences qui ont permis de la mesurer.

Précisons que l'on devrait en fait parler de célérité de la lumière, car le terme de vitesse est en général réservé à un transport matériel, celui de célérité aux ondes; l'usage veut cependant que l'on parle de vitesse de la lumière.

Dans le vide, la fréquence d'une onde électromagnétique monochromatique ν est reliée à sa longueur d'onde λ par la relation :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = cT$$

c est sa vitesse dans le vide, célérité ou vitesse de la lumière.

$c = 299\,792,458 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. On utilise couramment la valeur approchée $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Encart historique. Quelques mesures historiques de la vitesse de la lumière

Galilée (1564-1642) a tenté de mesurer directement la vitesse de la lumière en plaçant deux personnes à quelques kilomètres de distance. Chacune était équipée d'une lanterne. La première éteignait sa lampe et mettait son chronomètre (un sablier !) en route ; la seconde, apercevant l'extinction de la première lanterne, éteignait la sienne. À l'extinction, le premier observateur arrêtait son chronomètre. À condition de réagir instantanément, le temps mesuré correspondait donc au temps mis par la lumière pour effectuer l'aller et retour. Galilée ne soupçonnait pas que, compte tenu du temps de réaction des observateurs, la lumière avait le temps d'effectuer pendant l'expérience un parcours équivalent à plusieurs fois le tour de la Terre !

L'existence de c en tant que vitesse finie a été prouvée pour la première fois en 1676 par un astronome danois Olaüs Römer (1644-1710) qui travaillait à l'Observatoire de Paris. Il avait remarqué, depuis la découverte par Galilée, en 1610, des satellites de Jupiter, un décalage systématique du début des éclipses de ces satellites par la planète. Römer attribua cette variation à une modification, d'une éclipse à l'autre, de la distance à parcourir par la lumière entre le satellite L et la Terre. Entre les positions extrêmes Terre-Jupiter (notées 1 et 3 sur la figure 1.1), l'instant de disparition du satellite s'effectue avec un retard ou une avance qui peut atteindre 996 secondes. C'est le temps mis par la lumière pour traverser le diamètre de l'orbite terrestre, soit environ $2 \times 150 \cdot 10^6 \text{ km}$. On peut ainsi accéder à la vitesse de la lumière en écrivant :

$$c = \frac{2 \times 150 \cdot 10^6}{996} \approx 300\,000 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$$

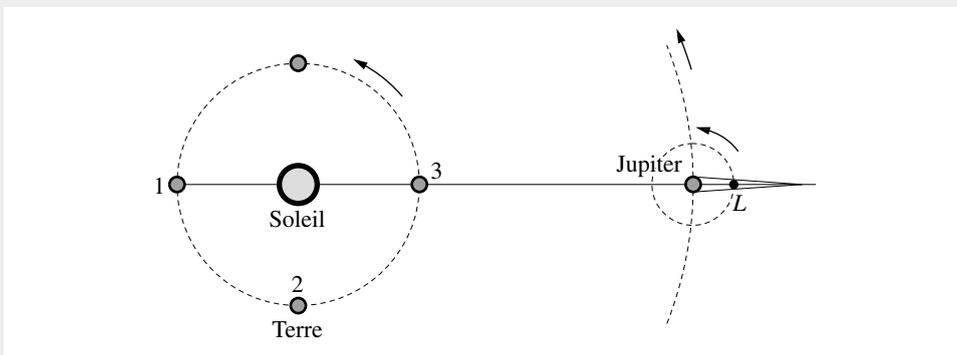


Figure 1.1 • Principe de la mesure de la vitesse de la lumière d'après les éclipses des satellites de Jupiter.

Depuis ces premières expériences, bien d'autres tentatives de mesure de la vitesse de la lumière ont été menées, utilisant cette fois des méthodes entièrement terrestres. En 1920, Albert Michelson a obtenu pour la première fois une valeur, par la suite confirmée par des centaines d'expériences. Dans son expérience, une source de lumière émet un rayonnement lumineux depuis le mont Wilson en direction d'un miroir tournant situé à 35 km de distance sur le mont Baldy. Seule une position déterminée du miroir permet de renvoyer le faisceau dans la direction opposée. Grâce à une mesure topographique précise à 0,3 cm près, et connaissant la vitesse de rotation du miroir de renvoi, on peut relier le temps $t = \frac{2l}{c}$ que met le rayon lumineux à revenir à son point de départ à la vitesse de rotation du miroir. Plusieurs centaines de mesures aboutirent à une valeur de la vitesse de la lumière égale à $299\,796\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

En fait, la précision atteinte sur la mesure de c est limitée par celle que l'on peut avoir sur les mesures de longueur et de temps. Le mètre étalon de 1960 était défini à partir de la longueur d'onde dans le vide d'une transition de l'atome de krypton 86. Cependant, sa précision était limitée. Le développement des lasers continus, dont la fréquence peut être donnée à quelques kHz près, a permis une définition plus précise du mètre : « **le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $1/299\,792\,458^{\circ}$ de seconde** ». Cette définition a été adoptée le 20 octobre 1983 à la 17^e Conférence générale des poids et mesures.

La lumière que nous voyons n'est qu'une petite partie du vaste spectre électromagnétique défini dans le tableau 1.1, appelée « le visible ». Généralement, dans le vide comme à l'intérieur de la matière, elle résulte de la superposition de plusieurs ondes électromagnétiques monochromatiques (lumière polychromatique). Dans le vide, les longueurs d'onde des radiations visibles sont comprises entre environ $\lambda = 400\text{ nm}$ et $\lambda = 800\text{ nm}$ ($\nu = 750 \cdot 10^{12}\text{ Hz}$ et $\nu = 375 \cdot 10^{12}\text{ Hz}$). En fait, les limites du spectre visible varient selon l'acuité de l'œil de l'observateur et selon l'intensité perçue.

Les origines des différentes sources visibles peuvent être très variées. Ainsi, l'éclairage issu du Soleil ou fourni par une lampe à filament est composé de toutes les longueurs d'onde du visible ; c'est un spectre continu. En revanche, l'éclairage souvent employé dans les tunnels d'autoroute est fourni par des lampes contenant par exemple des vapeurs de sodium (Na). Elles n'émettent donc, en accord avec le spectre de raies caractéristique du gaz utilisé, que quelques longueurs d'onde du visible ; ce spectre est dit « discret », par opposition au spectre continu de la lampe à filament. Enfin, la plupart des caisses de supermarchés sont équipées de systèmes de lecture de codes barres qui utilisent un faisceau visible monochromatique fourni par une diode laser dont la longueur d'onde se situe aux alentours de 670 nm. Le spectre lumineux d'émission de la diode laser est dans ce cas monochromatique.

Pour séparer les différentes longueurs d'onde d'une source, une méthode expérimentale est proposée au chapitre 3. Elle consiste en l'observation du spectre lumineux à travers un prisme de verre.

Les longueurs d'onde ultraviolettes et infrarouges forment deux régions adjacentes du spectre visible qui peuvent être également assimilées au spectre lumineux. Les limites du spectre visible lui-même sont d'ailleurs mal définies et on convient souvent de dire que le rayonnement ultraviolet s'étale dans le vide de 400 nm à 10 nm. Il est présent dans la lumière solaire où il est très utile car il produit chez l'homme la vitamine D, et provoque

le bronzage. De même, la région infrarouge (entre 800 nm et 1 mm) est perçue par les êtres humains comme de la chaleur : ce sont par exemple les radiations produites par un radiateur que nous ressentons sans les voir. C'est aussi grâce à ce rayonnement que les animaux à vision nocturne détectent les radiations émises par les corps chauds. Il est aussi couramment utilisé en technologie médicale pour la détection d'anomalies telles que des tumeurs cancéreuses qui apparaissent comme des zones plus chaudes que les tissus sains. Aujourd'hui, les ondes infrarouges jouent aussi un rôle très important dans les télécommunications optiques et dans les applications militaires.

Les autres parties du spectre électromagnétique ne sont pas perçues par l'œil ; néanmoins, les technologies du xx^e siècle nous les ont rendues familières. Nous allons les passer en revue.

- Les **micro-ondes** (comprises entre $3 \cdot 10^9$ et $3 \cdot 10^{11}$ Hz) sont utilisées dans les radars et les communications interurbaines (comme les conversations téléphoniques) grâce à des antennes hautes fréquences. En médecine, elles détruisent sélectivement les cellules cancéreuses plus aptes à absorber leur énergie que les cellules non atteintes. Enfin, elles se sont largement démocratisées avec l'arrivée des fours à micro-ondes dans les ménages. Ceux-ci fonctionnent à une fréquence nominale de 2 450 MHz.
- Les **signaux de radio et de télévision** couvrent une gamme de fréquences comprise entre $3 \cdot 10^3$ et $3 \cdot 10^9$ Hz.
- Les **rayons X** (compris entre $3 \cdot 10^{17}$ et $3 \cdot 10^{19}$ Hz) sont principalement utilisés en imagerie médicale. Ils sont émis par la matière lorsqu'elle subit le choc d'électrons très rapides. Dans l'univers, de nombreuses sources X sont observées par les astronomes. Leur dénomination est due à Röntgen qui les a découverts en 1895 et pour qui leur nature paraissait mystérieuse.
- Les **rayons γ** sont beaucoup plus énergétiques que les rayons X et se rencontrent dans le même type d'applications. Ils sont émis par des corps radioactifs et se situent dans une gamme de fréquences supérieures à $3 \cdot 10^{19}$ Hz.

2.2. La propagation de la lumière dans le vide

Les observations courantes nous amènent à considérer le vide comme un milieu homogène et isotrope ; ceci signifie que les propriétés de propagation des ondes électromagnétiques (et donc de la lumière) ne varient pas sur leur trajet et qu'il n'y a pas de direction privilégiée. L'expérience montre alors que la lumière se propage en ligne droite. Cette propriété s'énonce sous forme du principe de la propagation rectiligne :

Principe de la propagation rectiligne I. Dans le vide, la lumière se propage en ligne droite de manière isotrope avec une vitesse c constante.

La notion de propagation rectiligne nous est naturelle. Observons par exemple un point particulier d'un objet. Si l'on interpose par exemple un livre entre notre œil et ce point, nous ne le voyons plus. On en déduit facilement que la lumière, qui va du point à l'œil, a suivi un segment de droite. Pour matérialiser la propagation rectiligne, on a l'habitude de représenter des « rayons lumineux » sous forme de lignes droites issues de la source (figure 1.2). Une flèche indique le sens de déplacement. Si cette formalisation n'a pas

de support physique (on n'a jamais réellement observé de rayon unique matérialisé par une ligne droite !), elle est très pratique pour la compréhension des phénomènes. De nombreux rayons très serrés issus de la même source forment *un pinceau*. Enfin, en raison du principe de propagation rectiligne de la lumière, sa trajectoire ne dépend pas de *son sens* de propagation.



Figure 1.2 • Propagation rectiligne de la lumière.

La conséquence la plus immédiate de la propagation rectiligne est l'existence de l'ombre. Quand une lampe éclaire un objet opaque, on observe derrière lui une zone d'ombre. Si l'on coupe cette ombre par un écran, on obtient la silhouette de l'objet. Ceci peut être facilement vérifié en interposant nos deux mains (l'objet) entre un mur et une lampe. C'est sur cette expérience simple que se base le principe des ombres chinoises où l'on peut reconstituer avec un peu d'imagination des silhouettes d'animaux. De même, la nature nous offre des jeux d'ombre naturels à travers les éclipses de Lune et de Soleil (encart 1.1).

Encart 1.1. L'éclipse de Soleil

Le principe de la propagation rectiligne est aussi très bien vérifié dans l'exemple d'une éclipse de Soleil au cours de laquelle les astronomes prédisent la propagation des zones d'ombre et de pénombre avec une précision inférieure à la seconde. Ces prédictions reposent complètement sur la construction d'ombres géométriques qui se forment derrière la Lune et dans laquelle on applique le principe de propagation rectiligne (figure 1.3).

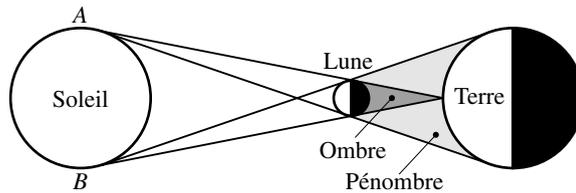


Figure 1.3 • Pour rendre compte d'une éclipse de soleil par exemple, la propagation rectiligne de la lumière s'applique parfaitement.

Sur la figure 1.3, Lune, Soleil et Terre sont assimilés à des sphères. Parmi les rayons envoyés par le Soleil, certains sont arrêtés par la Lune, ce qui forme une zone d'ombre de forme conique (triangulaire dans le plan de la figure). Comme la source lumineuse (le Soleil) n'est pas ponctuelle, la zone d'ombre présente une structure complexe.

Si de chaque point du Soleil (on en choisit par exemple deux diamétralement opposés, A et B), on dessine les faisceaux qui éclairent la Lune, on visualise la structure de l'ombre. Ainsi, on observe sur la figure 1.3 :

- un cône d'ombre très petit où l'obscurité est complète. Un observateur terrestre situé dans le cône d'ombre ne voit pas le Soleil. Pour lui, l'éclipse est totale ;
- une région de transition appelée pénombre où la luminosité augmente progressivement quand on s'éloigne de l'axe du cône. Un observateur placé dans la pénombre voit le Soleil partiellement éclipsé.

À partir des tracés géométriques, on peut calculer exactement dans les zones éclipsées les instants de passage dans la pénombre et dans l'ombre.

De la même façon, on peut décrire une éclipse de Lune en interchangeant sur la figure 1.3 les rôles de la Terre et de la Lune.

On peut trouver une étude plus détaillée du phénomène des éclipses dans l'exercice 4.

3. PROPAGATION DE LA LUMIÈRE DANS LES MILIEUX MATÉRIELS

3.1. Classification des ondes électromagnétiques

Nous avons vu au paragraphe 2.1 que, dans le vide, une onde était définie par sa fréquence, mais aussi par sa longueur d'onde. La fréquence ν ne dépend pas du milieu dans lequel se propage la lumière (vide ou matériel) ; par contre, la longueur d'onde est modifiée car la lumière se propage dans les milieux matériels à une vitesse V différente de la célérité c , avec $V = c/n$ où n est l'indice absolu du milieu. C'est une caractéristique intrinsèque du milieu ; n étant toujours supérieur ou égal à 1, la lumière se propage toujours moins vite dans un milieu matériel que dans le vide. On a donc une relation entre c et V . Pour un milieu matériel, $V = \lambda\nu$.

Dans un milieu d'indice absolu n ($n \geq 1$), la fréquence d'une onde électromagnétique monochromatique ν est reliée à sa longueur d'onde λ par la relation $\lambda\nu = V$ avec $V = c/n$,

V est la vitesse de l'onde électromagnétique dans le milieu, elle est toujours inférieure ou égale à c .

L'indice n dépend de la longueur d'onde de la lumière qui traverse le milieu ; d'une manière générale, lorsque la longueur d'onde diminue, l'indice augmente. On appelle ce phénomène la dispersion optique qui peut-être quantifié grâce à la **loi de Cauchy** :

$$n(\lambda) = A_1 + \frac{B_1}{\lambda^2} \text{ où } \lambda \text{ est exprimé en } \mu\text{m.}$$

D'autres lois sont utilisées pour calculer les indices comme la loi de Sellmeier donnée par : $n^2(\lambda) = 1 + a + \frac{b}{\lambda^2 - c}$ où a, b, c sont aussi des constantes. Cette dernière est souvent utilisée pour calculer les indices de verres ou de cristaux.

Dans tous les cas, les coefficients sont caractéristiques du milieu considéré. Le tableau 1.2 donne les valeurs des indices de l'eau et d'un verre pour quelques longueurs d'onde caractéristiques de l'émission de certains atomes.

Tableau 1.2 • Indices de réfraction de l'eau et du verre ordinaire

Longueur d'onde λ (μm)	0,486 (raie bleue de l'hydrogène)	0,589 (raie jaune D du sodium)	0,656 (raie H de l'hydrogène)
Eau	1,3371	1,3330	1,3311
Verre	1,5157	1,5100	1,5076

L'exercice 6 propose une loi qui rend compte de la dépendance en longueur d'onde de l'indice de ces milieux.

3.2 Propagation de la lumière dans un milieu transparent et isotrope

L'amplitude du champ E_0 n'est pas modifiée lors de la traversée de milieux isotropes et transparents et ses propriétés de propagation sont indépendantes de la direction suivie. Le verre mais aussi l'air, milieu naturel dans lequel nous vivons, en sont des exemples. Si le milieu est homogène, il est caractérisé, pour une longueur d'onde donnée, par un seul indice absolu. Le principe de propagation rectiligne énoncé pour le vide est alors toujours vérifié. Cependant, la lumière est ralentie, sa vitesse de propagation V étant inférieure à la célérité c .

Principe de la propagation rectiligne II. Dans un milieu transparent, isotrope et homogène, la lumière se propage en ligne droite avec une vitesse V indépendante de la direction.

L'indice absolu peut également varier d'un point à l'autre du milieu traversé ; on dit que le milieu est inhomogène (air chaud, passage de l'eau dans l'air...). L'indice de réfraction est alors lié essentiellement à la quantité de matière présente dans le milieu. Pour représenter cette variation, on peut utiliser la **loi de Gladstone** qui s'écrit :

$$\frac{n - 1}{\rho} = \text{cste}$$

où ρ est la masse volumique du milieu, fonction de la pression et de la température. On verra au chapitre 4 que des phénomènes atmosphériques tels que les mirages observés sur des routes surchauffées ou le fameux rayon vert du soleil sont dus à de telles dépendances.

Si le milieu est inhomogène, la lumière ne se propage donc plus en ligne droite. Dans ce cas, si l'on veut expliquer cette propagation, une bonne approximation consiste à décomposer le milieu en une série de couches homogènes d'indices différents dans lesquelles la trajectoire du rayon lumineux est rectiligne. Le **principe de Snell-Descartes**, présenté au chapitre 2, permettra de rendre compte de façon simple des phénomènes de mirages ou de réfraction atmosphérique décrits au chapitre 4.

4. L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Les différents exemples abordés illustrent bien le fait que l'observation d'un phénomène lumineux est possible si l'on dispose d'une **source de lumière**, d'un milieu dans lequel elle se propage et d'un **récepteur** qui peut-être un écran, l'œil... Afin d'expliquer les phénomènes observés, l'optique propose plusieurs formalismes que nous allons rappeler.

4.1. Cadre général de l'optique

Le mot optique est la transcription du mot grec qui signifie « je vois ». Il nous rappelle qu'à l'origine on ne distinguait pas nettement l'étude des sens de la vue de celle de la lumière. Aujourd'hui, c'est l'optique physiologique qui s'occupe des sensations visuelles. Dans cet ouvrage, nous appliquons principalement l'optique à des sources lumineuses du domaine visible. Cependant, l'optique ne se limite pas seulement aux phénomènes lumineux proprement dits mais englobe aussi les rayonnements invisibles comme l'infrarouge (IR), l'ultraviolet (UV), les rayons X..., qui obéissent aux mêmes lois. La lumière pourra donc être éventuellement définie dans un sens plus large que celui de rayonnement visible.

Historiquement, l'optique couvre trois domaines différents : l'optique géométrique, l'optique ondulatoire et l'optique quantique, qui sont apparus en ordre de difficulté croissante tant expérimentale que mathématique. Il ne s'agit pas d'outils contradictoires mais de trois visions différentes des mêmes phénomènes (tableau 1.3). L'optique géométrique n'est pas autre chose qu'une méthode de calcul simple s'appliquant sous certaines conditions. Nous verrons qu'elle est construite de manière logique et rigoureuse moyennant quelques principes comme, par exemple, le principe de propagation rectiligne que nous avons déjà énoncé.

Tableau 1.3 • Les trois grandes subdivisions de l'optique

	Optique géométrique	Optique ondulatoire	Optique quantique
Validité	Dimensions du système grandes devant la longueur d'onde qui se propage	Dimensions du système de l'ordre de la longueur d'onde qui se propage	Dimensions du système petites devant la longueur d'onde qui se propage
Préoccupations	Rayon lumineux Réflexion Réfraction Dispersion Photométrie	Onde lumineuse Vibration électrique Interférence Diffraction Diffusion Polarisation	Processus atomiques Vibrations électromagnétiques Champ électrique et magnétique
Apparition	XVIII ^e siècle	XIX ^e siècle	XX ^e siècle

4.2. La place de l'optique géométrique et ses préoccupations

L'optique géométrique, développée entre le XII^e et le XVII^e siècle, est une approximation justifiée quand les dimensions du système optique étudié sont grandes devant la longueur d'onde de la lumière qui s'y propage. Par exemple, elle explique parfaitement l'arc-en-ciel provoqué par les grosses gouttes de pluie, alors qu'elle est incapable d'expliquer les auréoles appelées couronnes qui apparaissent autour de lampadaires plongés dans le brouillard. Elle ne rend pas compte de phénomènes à une échelle microscopique tels que la diffraction ou les interférences, produits par exemple quand la lumière passe à travers des orifices réduits, ce qui montre que le principe de propagation rectiligne n'est plus vérifié et doit être abandonné ; ces derniers phénomènes s'expliquent dans le cadre de l'optique ondulatoire.

En fait, l'optique géométrique ignore complètement les phénomènes de composition des ondes et se borne à additionner les effets des ondes indépendantes ; c'est la raison pour laquelle la longueur d'onde intervient rarement dans la description de la propagation, si ce n'est éventuellement à travers l'indice absolu du milieu ou pour distinguer un rayonnement d'un autre. L'optique géométrique ignore aussi la notion de photons car l'énergie véhiculée par l'onde n'a pas d'influence sur sa propagation.

L'optique géométrique utilise des **sources**. D'une manière générale, le mot source désigne tout ce qui envoie de la lumière à travers un dispositif, formé par exemple de lentilles ou de miroirs ; la distinction classique entre **source primaire** et **source secondaire** n'a donc plus d'importance. Par exemple, la Lune et les planètes sont des sources secondaires dans le sens où elles n'émettent pas directement de la lumière, mais réfléchissent la lumière reçue du soleil, dite source primaire. En dépit de cette distinction, l'optique géométrique s'applique dans les deux cas.

Lorsque les sources sont placées à grande distance (lampadaire, Lune, Soleil ou étoiles), les rayons sont pratiquement parallèles ; on dit qu'ils forment un faisceau de rayons parallèles et que le faisceau est cylindrique. D'une manière générale, un faisceau peut avoir différentes configurations spatiales représentées dans la figure 1.6.

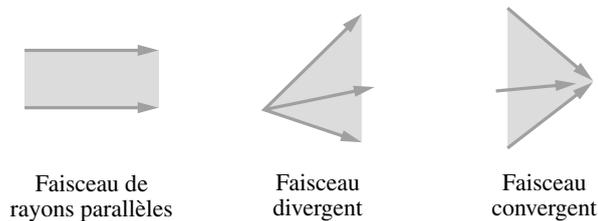


Figure 1.6 • Différentes allures de faisceaux.

En optique géométrique, on simplifie souvent le formalisme en faisant appel à des **sources ponctuelles** ou peu étendues. On les réalise soit avec une source de faible taille, soit avec une source étendue placée à grande distance. Par exemple, une étoile, de très grande taille (plusieurs millions de kilomètres de diamètre), a depuis la Terre la taille d'une flamme de bougie placée à 600 km. D'une manière générale, lorsqu'une source est étendue, on peut la considérer comme un ensemble de sources ponctuelles. Expérimentalement, un diaphragme permet d'en isoler une toute petite fraction.

Enfin, jusqu'à présent, nous avons décrit la lumière comme une onde électromagnétique, caractérisée par sa fréquence ν ou sa longueur d'onde λ , sans parler de couleur.

Cependant, notre système visuel distingue avant tout les différentes sources lumineuses par leur couleur. Par là même, la société actuelle fait souvent appel au codage par la couleur plutôt que par la fréquence ou la longueur d'onde. Notre choix est délibéré. En effet, l'œil ne perçoit pas toutes les couleurs avec la même efficacité et sa sensibilité est généralement maximale pour la couleur jaune (voir chapitre 9). En vision photopique (de jour), il perçoit de façon à peu près identique le rouge et le bleu, mais il est peu sensible au violet et au rouge extrême et a du mal à en distinguer les différentes nuances. Enfin, un objet n'apparaît coloré que s'il est éclairé par une source primaire. Ainsi, éclairé en lumière blanche, un objet paraît rouge parce qu'il réfléchit les radiations rouges et absorbe les autres. Si l'objet présente des irrégularités de surface, il en résulte une diffusion non sélective qui adoucit sa couleur. Nous conviendrons à partir de ces quelques remarques que la notion de couleur est subjective. Elle n'interviendra donc pratiquement pas dans ce cours d'optique géométrique et on caractérisera tout d'abord une source par sa fréquence ν , ou sa longueur d'onde λ ; une référence à sa couleur pourra éventuellement être utilisée afin de permettre au lecteur de se repérer.

Encart historique. Pourquoi ne parle-t-on que de sept couleurs ?

Dans le domaine de la perception des couleurs, des idées fortement ancrées par le passé ont toujours cours, comme celle des sept couleurs de l'arc-en-ciel. C'est Newton, qui après avoir découvert la décomposition de la lumière blanche en couleurs, en a parlé le premier. Le nombre « 7 », symbole de l'harmonie des mondes, se retrouve dans les « 7 planètes » des Babyloniens, les 7 jours de la semaine, les 7 péchés capitaux, les 7 sacrements de l'Église, les 7 merveilles du monde... Depuis plus de 300 ans, nous sommes tenus d'ajouter le mystérieux indigo aux six couleurs familières (le rouge, le bleu, le jaune, le vert, l'orange et le violet).

Cependant, dans l'observation d'un arc-en-ciel, il est difficile d'identifier plus de 6 couleurs. Il semble que 6 ou 7 niveaux soient la limite de perception de nos sens. En effet, Hipparque avait décrit 6 niveaux de luminosité des étoiles, les musiciens ont défini 7 notes dans la gamme, 7 niveaux sonores de pianissimo à fortissimo...

On peut retenir l'ordre des 7 couleurs de l'arc-en-ciel avec le mot VIBUJOR

Violet-Indigo-Bleu-Vert-Jaune-Orangé-Rouge

5. CONCLUSION

C'est grâce à la lumière que nous pouvons découvrir le monde qui nous entoure. Nous en avons défini l'essentiel. Dans la nature se produisent spontanément des phénomènes lumineux variés et spectaculaires comme les arcs-en-ciel et les mirages. Les différentes conditions météorologiques que l'on peut rencontrer leur offrent parfois de surprenants visages. Sujet en apparence banal, le phénomène lumineux naturel intrigue et émerveille tous ceux qui ont eu envie de s'arrêter pour l'observer. Qui n'a pas alors été tenté de l'immortaliser sur la pellicule d'un appareil photo ou de le filmer afin de le partager avec ses amis ? Ces observations suscitent alors des interrogations auxquelles nous proposons dans ce livre des éléments de réponse simples dans le cadre de l'optique géométrique. Nous y décrivons également un certain nombre d'instruments classiques et modernes.

À RETENIR

- Les **ondes électromagnétiques** se propagent dans le vide et dans les milieux matériels. Elles couvrent une très large gamme de fréquences depuis les ondes radio ($\nu = 3 \cdot 10^3$ Hz) jusqu'aux rayons γ ($\nu = 10^{22}$ Hz).
- Les ondes électromagnétiques sinusoïdales se reproduisent identiques à elles-mêmes au bout d'un certain temps appelé période T , exprimé en secondes, inverse de la fréquence ν , exprimée en Hertz. La distance entre deux points successifs séparés par le temps T est la longueur d'onde λ . *Une onde est dite **monochromatique** si elle est caractérisée par une seule valeur de ν , de T ou de λ .* Généralement elle est une superposition de plusieurs ondes électromagnétiques monochromatiques : *elle est alors **polychromatique**.*
- La lumière n'est qu'une petite partie du vaste spectre électromagnétique appelée le visible ; *dans le vide, le visible est compris entre $\lambda = 400$ nm et $\lambda = 800$ nm.*
- **Principes de la propagation rectiligne :**
 - *dans le vide*, la lumière se propage en ligne droite, indépendamment du sens de propagation, avec une vitesse c indépendante de la direction ; on a toujours $\lambda\nu = c$.
 - *dans un milieu transparent, isotrope et homogène* la lumière se propage en ligne droite avec une vitesse V indépendante de la direction ; on a $\lambda\nu = V$.
- c est la vitesse de la lumière dans le vide ; c'est la plus grande vitesse de propagation qui puisse exister dans l'Univers. C'est une constante fondamentale de la physique. Sa valeur approchée est $c \approx 3 \cdot 10^8$ m \cdot s $^{-1}$.

Dans un milieu matériel, la vitesse de la lumière est $V = c/n$, où n , **indice absolu du milieu**, dépend de la longueur d'onde. n est toujours supérieur ou égal à 1 (donc $V < c$).

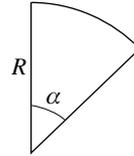
- n dépend aussi des conditions thermodynamiques locales (densité, pression et température) lorsqu'elles sont différentes d'un point à l'autre d'un milieu ; on dit alors que le milieu est **inhomogène**.
- Le formalisme de l'optique géométrique, qui décrit la propagation de la lumière émise par des **sources ponctuelles** ou de faible taille (source placée à grande distance), est applicable quand les dimensions du système étudié sont grandes devant la longueur d'onde λ .

QCM

- 1** Les ondes électromagnétiques sinusoïdales sont des phénomènes périodiques caractérisés par leur période T (s) ou leur fréquence ν (Hz), on a
- (1) $T = 2\pi\nu$
- (2) $T = 1/(2\pi\nu)$
- (3) $T = 1/\nu$
- 2** Les ondes électromagnétiques sinusoïdales sont classées dans le vide en fonction de leur fréquence ν (Hz) ou de leur longueur d'onde λ (m), on a
- (1) $\lambda = c\nu$
- (2) $\lambda\nu = c$
- (3) $\nu = c\lambda$
- 3** Soit une onde électromagnétique sinusoïdale du domaine visible dont la longueur d'onde dans le vide est $\lambda = 600$ nm. Que vaut sa pulsation ω (rad/s) ?
- (1) $1,2 \cdot 10^{-14}$ rad \cdot s $^{-1}$
- (2) $3,14 \cdot 10^{15}$ rad \cdot s $^{-1}$
- (3) $1,13 \cdot 10^3$ rad \cdot s $^{-1}$
- 4** Dans un milieu matériel transparent, isotrope et homogène la lumière se propage à la vitesse V telle que :
- (1) $V < c$
- (2) $V = c$
- (3) $V > c$
- 5** Quelle est la relation entre la vitesse de propagation de la lumière dans le vide c et celle dans un milieu matériel, d'indice absolu n , V ?
- (1) $V = c$
- (2) $V = nc$
- (3) $V = c/n$
- 6** Une onde électromagnétique sinusoïdale de fréquence $\nu = 3 \cdot 10^{14}$ Hz se propage dans un milieu d'indice absolu $n = 1,5$. Quelle est sa longueur d'onde λ (m) ?
- (1) $6 \cdot 10^{22}$ m
- (2) $6,6 \cdot 10^{-7}$ m
- (3) $1,5 \cdot 10^6$ m
- 7** Une onde polychromatique sinusoïdale est composée de
- (1) aucune longueur d'onde.
- (2) une seule longueur d'onde.
- (3) plusieurs longueurs d'onde.
- 8** Le domaine du visible comprend les longueurs d'onde λ (m) du domaine
- (1) 10^{-3} à $0,8 \cdot 10^{-6}$
- (2) $0,4 \cdot 10^{-6}$ à $0,8 \cdot 10^{-6}$
- (3) $0,4 \cdot 10^{-6}$ à 10^{-8}
- 9** Comment sont les dimensions du système par rapport à la longueur d'onde λ qui se propage, pour que l'emploi de l'optique géométrique soit valide ?
- (1) $\lambda \ll$ dimensions du système
- (2) $\lambda =$ dimensions du système
- (3) $\lambda \gg$ dimensions du système
- 10** Quel mot permet de retenir les sept couleurs de l'arc-en-ciel que notre œil distingue ?
- (1) ZIBUJON
- (2) ZONJOUR
- (3) VIBUJOR
- Réponses : 1. 3, 2. 2, 3. 2, 4. 1, 5. 3, 6. 2, 7. 3, 8. 2, 9. 1, 10. 3.

EXERCICES

1 a) Soit un objet formé d'un secteur circulaire de rayon $R = 100$ m et d'angle $\alpha = 45^\circ$. Calculer la longueur du périmètre.



b) La Lune de diamètre $d = 3\,400$ km située à $D = 384\,000$ km de la Terre, est vue sous un angle α . Calculer $\tan \alpha$ et α en radians, degrés et minutes. Vérifier que $\tan \alpha \approx \alpha$ si α est exprimé en radians.

c) La longitude de Bordeaux est de 2 min 18 s Ouest. Exprimer cette longitude en secondes d'heures (s), minutes d'heures (min), heures, en degrés, minutes d'arc ('), secondes d'arc (") et radians.

2 Le Soleil est à une hauteur $h = 30^\circ$ au-dessus de l'horizon. Un individu de hauteur $AB = 1,8$ m regarde son ombre projetée sur le sol horizontal.

a) Quelle est la longueur AC de l'ombre ?

b) Le Soleil a un diamètre angulaire de $30'$. B , le haut de la tête, donne donc une pénombre de longueur CC' où C et C' sont les ombres formées respectivement par les rayons provenant de la base du soleil (30° de hauteur) et par les rayons lumineux provenant du haut du soleil. Calculer cette longueur.

c) Quelle est la longueur de la pénombre formée au niveau de la taille D ($AD = 1$ m) ?

3 Un disque opaque D de 1 cm de diamètre est placé à 1 m d'une source ponctuelle S . On place un écran E à 3 m de la source. Quelle est

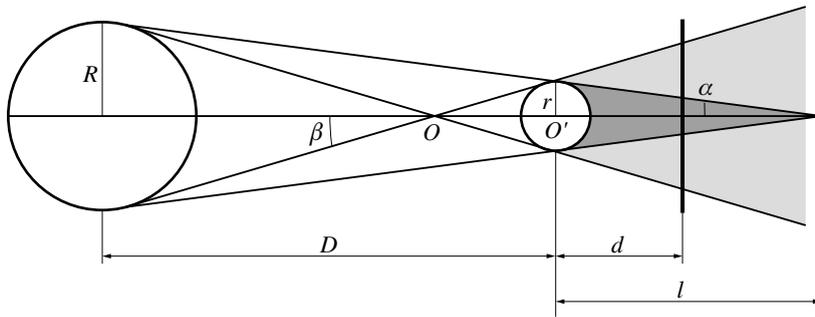
– la dimension de l'ombre ?

– l'angle au sommet α du cône d'ombre ?

4 Un astre de rayon r éclairé par le soleil de rayon R crée derrière lui une zone d'ombre et une zone de pénombre. La zone d'ombre a une forme conique (triangulaire dans le plan de la figure).

a) Déterminer la longueur l du cône d'ombre en fonction de R , r et de D , la distance entre le soleil et l'astre ($r \ll l$).

b) À la distance d de l'astre, l'ombre et la pénombre ont une forme circulaire de rayons ρ_1 et ρ_2 . Déterminer les expressions de ρ_1 et de ρ_2 en fonction de r , R , D et d .



c) Application aux éclipses de Lune (l'astre est la Terre et la Lune est à une distance d de la Terre) :

R = rayon du soleil = 690 000 km,

$D = 150 \cdot 10^6$ km = distance Soleil-Terre,

r = rayon de la Terre = 6 370 km,

d = distance Terre-Lune = 384 000 km.

Calculer l , ρ_1 et ρ_2 .

d) Application aux éclipses de Soleil (l'astre est la Lune et la Terre est à une distance d de la Lune) :

R = rayon du soleil = 690 000 km,

$D = 150 \cdot 10^6$ km,

r = rayon de la Lune = 1 700 km.

Calculer l , ρ_1 et ρ_2 pour une distance Terre-Lune égale à $d = 349 000$ km.

Si la distance Terre-Lune vaut 384 000 km, le raisonnement précédent est-il applicable ? Calculer ρ_1 et ρ_2 .

Reprendre la même question pour une distance $d = 415 000$ km.

5 Placé à une distance de 200 m d'un édifice de 410 m de haut, le toit d'une maison est à 20 m du sol. À quelle distance minimale doit se trouver un individu de 1,7 m de haut et dont les yeux sont placés à 15 cm du sommet du crâne pour apercevoir le sommet de l'édifice au-dessus du toit de sa maison ?

6 Reprenons le tableau 1.2 qui donne les valeurs de l'indice de l'eau et du verre pour trois longueurs d'onde données. Sachant que la loi de dispersion s'écrit : $n^2 \cong A_0 + A_1 \lambda^2 + \frac{A_2}{\lambda^2}$, où λ est exprimée en microns, calculer pour l'eau et le verre les valeurs A_0 , A_1 et A_2 .

Solutions

1 a) $R(2 + \alpha) = 278,54$ m et non 4 700 m, car α doit être exprimé en radians.

b) $\tan \alpha = d/D = 8,854166 \cdot 10^{-3}$. $\alpha = 8,853935 \cdot 10^{-3}$ radians $= 0,507293^\circ = 30,437'$.

c) 2 min 18 s = 138 s = 2,3 min = $3,8333 \cdot 10^{-2}$ h.

La terre faisant 360° en 24 heures, on a aussi 2 min 18 s = $0,575^\circ = 34,5' = 2070'' = 0,0100356$ radians.

2 a) $AC = \frac{AB}{\tan h} = 3,117$ m

b) $AC' = \frac{AB}{\tan 30,5} = 3,055$ m. La pénombre est donnée par :

$$CC' = AC - AC' = 6,12 \text{ cm.}$$

c) Le calcul de la pénombre au niveau de la taille se fait comme précédemment :

$$D'D'' = AD' - AD'' = AD \left(\frac{1}{\tan 30} - \frac{1}{\tan 30,5} \right) = 3,44 \text{ cm.}$$

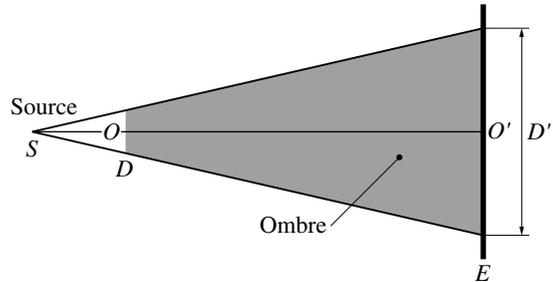
3 L'ombre est également un disque ;
Si D' est la dimension de l'ombre,

$$\text{on a : } \frac{D}{SO} = \frac{D'}{SO'},$$

ce qui donne $D' = 3$ cm.

Si α est l'angle au sommet, on a

$$\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{D'}{2SO'}, \text{ soit } \alpha = 0,57^\circ.$$



4 a) Le demi-angle α du cône d'ombre est tel que : $\tan \alpha = \frac{R}{l+D} = \frac{r}{l}$, soit $l = \frac{rD}{R-r}$.

b) De même, $\tan \alpha = \frac{\rho_1}{l-d} = \frac{r}{l}$, soit : $\rho_1 = \frac{rD - dR + dr}{D}$.

En posant $OO' = x$, on a $\tan \beta = \frac{R}{D-x} = \frac{r}{x} = \frac{\rho_2}{d+x}$,

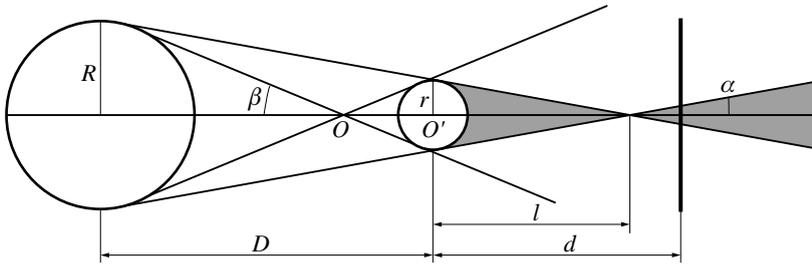
soit, en éliminant x , $\rho_2 = \frac{rD + dR + rd}{D}$.

c) $l = 1\,397\,686$ km ; $\rho_1 = 4\,620$ km et $\rho_2 = 8\,153$ km.

d) $l = 370\,478$ km ; Si $d = 349\,000$ km, $\rho_1 = 98,5$ km et $\rho_2 = 3\,309$ km.

Si $d = 384\,000$ km, $d > l$, ce qui conduit à une structure d'ombre différente, indiquée sur la figure ci-après. Le diamètre du cône d'ombre est donné par : $\tan \alpha = -\frac{\rho_1}{l-d} = \frac{r}{l}$, soit

$\rho_1 = -\frac{rD - dR + dr}{D}$. La structure de pénombre (non représentée) n'est pas changée.



On trouve $\rho_1 = 62 \text{ km}$ et $\rho_2 = 3\,470 \text{ km}$.

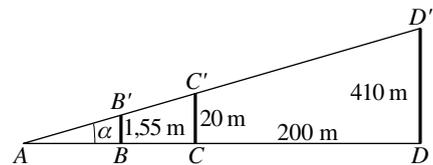
Si $d = 415\,000 \text{ km}$, $\rho_1 = 204 \text{ km}$ et $\rho_2 = 3\,613,7 \text{ km}$.

5 L'homme, noté BB' , est situé en B .

$$\text{On a } \frac{DD'}{AC + CD} = \frac{CC'}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CD \cdot CC'}{DD' - CC'} = 10,25 \text{ m.}$$

$$\text{Par ailleurs } \frac{CC'}{AC} = \frac{BB'}{AB} \Rightarrow AB = AC \frac{BB'}{CC'}$$

$$\text{et } BC = AC - AB = AC \left(1 - \frac{BB'}{CC'}\right) = 9,45 \text{ m.}$$



6 En remplaçant dans l'équation donnant n en fonction de λ , on a pour chaque matériau, un système de trois équations à trois inconnues :

$$n_1^2 = n^2(\lambda_1) = A_0 + A_1 \lambda_1^2 + \frac{A_2}{\lambda_1^2}$$

$$n_2^2 = n^2(\lambda_2) = A_0 + A_1 \lambda_2^2 + \frac{A_2}{\lambda_2^2}$$

$$n_3^2 = n^2(\lambda_3) = A_0 + A_1 \lambda_3^2 + \frac{A_2}{\lambda_3^2}$$

A_0 , A_1 et A_2 sont les trois inconnues et l'on connaît pour chaque équation la valeur $n_i(\lambda)$.

En résolvant le système d'équations (pour l'eau, puis pour le verre), on trouve :

Constantes	A_0	A_1	A_2
Eau	1,76183	- 0,0142211	0,00693626
Verre	2,24503	- 0,0029501	0,0125214

CHAPITRE 2

DU PRINCIPE DE FERMAT AUX LOIS DE SNELL-DESCARTES

Pré-requis

Nous avons vu au chapitre 1 que l'optique géométrique privilégiait la propagation de la lumière. Elle met donc uniquement en jeu des rayons lumineux de fréquence ou de longueur d'onde donnée. Nous avons aussi mentionné une observation importante selon laquelle la propagation de la lumière dans le vide ou dans un milieu transparent homogène et isotrope était rectiligne. Cette propagation se fait, dans le vide, à la célérité c et, dans un milieu isotrope et transparent, à la vitesse $V = c/n$ (où n est l'indice absolu du milieu : $n \geq 1$).

Objectif

Dans ce chapitre, nous présentons l'effet sur le chemin d'un rayon lumineux d'une surface, appelée dioptre, séparant deux milieux d'indices différents. Nous montrons dans ce chapitre que, dans le cadre de l'optique géométrique, le rayon se sépare en un rayon réfléchi et un rayon transmis obéissant aux lois de Snell-Descartes. Celles-ci découlent d'un principe général de la physique appelé le principe de Fermat. Deux situations se distinguent selon que le rapport des indices des deux milieux est inférieur ou supérieur à 1. Nous les étudierons en détail.

1. PRINCIPE DE FERMAT

Une méthode élégante pour étudier le trajet d'un rayon lumineux réfracté et/ou réfléchi par une surface de séparation, appelée dioptre, a été suggérée par Pierre de Fermat en 1658. Elle s'intéresse au temps de propagation plutôt qu'au trajet géométrique suivi par la lumière et définit ainsi un principe de moindre temps. Comme tous les principes (synonyme de loi en physique), celui-ci s'énonce sous la forme d'une affirmation non démontrée, mais vérifiée par ses conséquences. On peut l'écrire :

Pour aller d'un point à un autre, la lumière suit, parmi toutes les trajectoires possibles, celle dont le temps de parcours est extrémal.

La formulation générale du principe de Fermat est présentée dans l'encart 2.1.

Encart 2.1. Forme générale du principe de Fermat

Soit dl le déplacement élémentaire du chemin géométrique effectué pour aller de A vers C dans un milieu d'indice n . Ce dernier peut varier d'un point à l'autre du milieu. La longueur dl parcourue pendant le temps élémentaire dt est

$$dt = \frac{dl}{V} = n(l) \frac{dl}{c}.$$

La durée du parcours AC est donc $t = \frac{1}{c} \int_A^C n(l) dl$. Elle s'écrit aussi $t = \frac{L_{AC}}{c}$; on

appelle $L_{AC} = \int_A^C n(l) dl$ le **chemin optique** de A à C .

Le principe de Fermat s'énonce donc sous sa forme générale comme :

Parmi toutes les trajectoires possibles, celle effectivement suivie par un rayon lumineux correspond à un chemin optique L extrémal.

Il paraît évident que, si la lumière se propage dans un milieu donné (vide ou matériel) transparent isotrope et homogène, $n(l)$ est une constante. Le temps de parcours est alors minimal et correspond à une propagation rectiligne, quel que soit le sens adopté par la lumière. Le principe de Fermat permet donc de démontrer le principe de la propagation rectiligne. Nous allons montrer sur deux exemples qu'il permet aussi de prévoir les phénomènes de réflexion et de réfraction d'un rayon lumineux se propageant dans deux milieux différents et d'établir simplement les lois de Snell-Descartes. Notons qu'il s'agit dans ce cas d'une inhomogénéité particulière de l'indice qui passe brutalement d'une valeur n à une autre valeur n' .

Il est entendu que, si le dioptre est totalement réfléchissant (comme un miroir), le rayon incident ne subit qu'une réflexion. Dans le cas d'un dioptre transparent, le rayon incident traverse la surface et subit aussi une « réfraction ». L'amplitude du rayon réfracté est en général bien plus importante que celle du rayon réfléchi (ces amplitudes peuvent être calculées dans le cadre de l'électromagnétisme).

1.1. Réflexion sur un miroir plan

Considérons tout d'abord un miroir plan, objet simple et familier (figure 2.1). Il est totalement réfléchissant pour le rayonnement utilisé et permet d'illustrer le phénomène de **réflexion**. Nous allons étudier de quelle manière se propage la lumière d'un point A vers un point C fixés, après s'être réfléchi sur le miroir plan en un point B dont on déterminera la position. Plusieurs chemins sont *a priori* possibles. Sur la figure 2.1, nous avons représenté deux chemins différents, passant par B ou B' . En appliquant le principe de Fermat au temps de parcours du rayon AC , il est possible de déterminer les coordonnées du point d'impact réel de la lumière sur le miroir, correspondant effectivement à celui du chemin réel.

Les trois points A , B et C définissent un plan que l'on choisira comme étant (Ox, Oy) . Connaissant les coordonnées des points de départ $A(X_A, 0)$ et d'arrivée $C(X_C, Y_C)$, on cherche à déterminer le point $B(0, y)$ qui vérifie le principe de Fermat¹. Ce principe dit

1. Prendre le point B en $x = 0$ simplifie la discussion sans lui enlever sa généralité.

que pour aller de A vers C , la lumière suit un chemin passant par B tel que le temps de parcours soit extrémal. Nous allons donc exprimer la durée du parcours AC et, en annulant sa dérivée, fixer la coordonnée y du point B .

Comme on ne change pas de milieu, la vitesse de la lumière est la même sur les deux segments AB et BC , de longueurs respectives $AB = \sqrt{X_A^2 + y^2}$ et $BC = \sqrt{X_C^2 + (Y_C - y)^2}$.

On a $\sin i = \frac{y}{AB}$ et $\sin j = \frac{Y_C - y}{BC}$ où i et j sont respectivement les angles que font les rayons incident et réfléchi par rapport à la normale au miroir. Ils sont ici compris entre 0 et 90° .

Si V est la vitesse de propagation, le temps de parcours et sa dérivée par rapport à y (coordonnée de B cherchée) sont donnés par :

$$t = \frac{AB + BC}{V} = \frac{\sqrt{X_A^2 + y^2} + \sqrt{X_C^2 + (Y_C - y)^2}}{V}$$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{V} \left[\frac{y}{\sqrt{X_A^2 + y^2}} - \frac{(Y_C - y)}{\sqrt{X_C^2 + (Y_C - y)^2}} \right]$$

On obtient une dérivée nulle pour : $\frac{y}{AB} = \frac{Y_C - y}{BC} \implies \sin i = \sin j$ soit encore : $i = j$.

On établit ainsi qu'à la réflexion sur un miroir plan, les angles d'incidence i et de réflexion j sont égaux. Ceci est encore vérifié lorsque la surface est de forme quelconque et, éventuellement, non totalement réfléchissante. C'est ce que l'on appelle la loi de la réflexion ou **première loi de Snell-Descartes**.

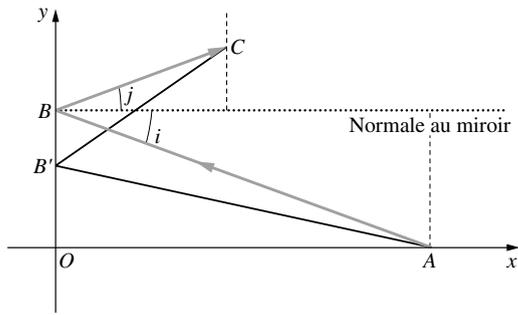


Figure 2.1 • La lumière va de A à C en se réfléchissant en B sur un miroir plan. La position de B est donnée par le principe de Fermat.

1.2. Changement de milieu : transmission

Le même type de démonstration peut être effectué lorsque la lumière change de milieu après avoir rencontré une surface transparente. On dit alors que le rayon AC est **réfracté**. Par souci de simplicité on choisira à nouveau une surface plane située dans le plan (Ox, Oy) . Les vitesses de déplacement dans les deux milieux sont différentes car leurs indices ne sont pas les mêmes (figure 2.2). Dans l'exemple choisi, on a considéré $n > n'$.

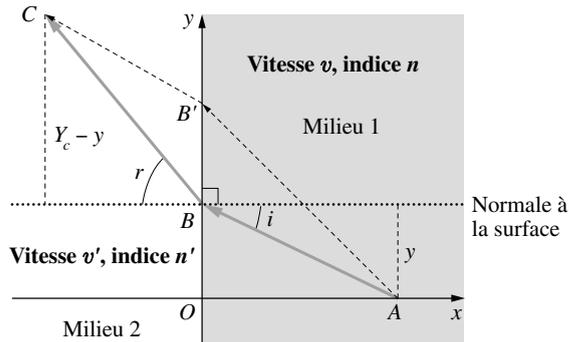


Figure 2.2 • Pour aller de A à C , la lumière traverse la surface de séparation au point B défini par le principe de Fermat.

Si V et V' sont les vitesses respectives de déplacement dans les deux milieux séparés par un plan, on a : $V = \frac{c}{n}$ et $V' = \frac{c}{n'}$. De plus on a toujours : $\sin i = \frac{y}{AB}$ et $\sin r = \frac{Y_C - y}{BC}$ où i et r sont maintenant les angles que font le rayon incident et le rayon transmis par rapport à la normale à la surface de séparation.

Comme dans l'exemple précédent, nous devons calculer le temps de parcours de la lumière et sa dérivée par rapport à y soit :

$$t = \frac{AB}{V} + \frac{BC}{V'} = \frac{\sqrt{X_A^2 + y^2}}{V} + \frac{\sqrt{X_C^2 + (Y_C - y)^2}}{V'}$$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{y}{V\sqrt{X_A^2 + y^2}} - \frac{(Y_C - y)}{V'\sqrt{X_C^2 + (Y_C - y)^2}}$$

Cette dérivée est nulle si $\frac{\sin i}{V} = \frac{\sin r}{V'}$, ce qui s'écrit aussi : $n \sin i = n' \sin r$.

Les angles d'incidence i et de réfraction r sont donc différents. On établit ainsi qu'à la traversée d'une surface, la lumière change de direction ; r est défini par la relation simple $n \sin i = n' \sin r$, qui constitue la **deuxième loi de Snell-Descartes**. On peut définir l'indice de réfraction du deuxième milieu par rapport au premier comme le rapport des deux indices $n_r = \frac{n'}{n}$ et réécrire la deuxième loi de Snell-Descartes sous la forme $\sin i = n_r \sin r$. L'annexe 1 proposée en fin de chapitre est un rappel mathématique sur les fonctions trigonométriques et en particulier sur les propriétés essentielles de la fonction sinus, indispensables pour manipuler aisément les lois de Snell-Descartes.

Lorsque l'on annule la dérivée d'une expression, on indique seulement l'existence d'un extremum de la fonction sans en préciser sa nature (minimum ou maximum). Le calcul du temps de parcours et de l'annulation de sa dérivée nous ont permis d'établir sur deux exemples les deux lois de Snell-Descartes. Remarquons que nous n'avons jamais eu besoin de terminer la démonstration établissant si le temps du parcours AC qui vérifie les lois de Snell-Descartes est *minimal* ou *maximal*.

C'est ce que nous nous proposons de faire dans l'encart 2.2 à partir de l'étude de miroirs plans puis quelconques.

Encart 2.2. Le temps de parcours est-il minimal ou maximal ?

Revenons tout d'abord sur l'exemple du miroir plan. Le temps de parcours a été donné par :

$$t = \frac{\sqrt{X_A^2 + y^2} + \sqrt{X_C^2 + (Y_C - y)^2}}{V}$$

On a trouvé que sa dérivée première s'annulait pour un point $B(0, y)$ tel que :

$$\frac{y}{\sqrt{X_A^2 + y^2}} = \frac{(Y_C - y)}{\sqrt{X_C^2 + (Y_C - y)^2}}$$

Cette équation est une équation du second degré en y que l'on peut résoudre. On obtient pour $Y_C > 0$:

$$y = \frac{X_A Y_C}{X_A + X_C}$$

Le cas $Y_C < 0$ amène au même résultat.

À titre d'exemple, on a tracé sur la figure 2.3 le temps de parcours en fonction de y pour $C(2,5; 5)$ et $A(5; 0)$. On voit bien que le temps est extrémal (ici minimal) pour $y = 3,33$.

Mathématiquement, le signe de la dérivée seconde du temps de parcours permet de déterminer la nature de l'extremum. Dans l'exemple choisi, on a :

$$\frac{d^2t}{dy^2} = \frac{1}{V} \left(\frac{X_A^2}{AB^3} + \frac{X_C^2}{BC^3} \right) > 0$$

On retrouve ainsi le fait que le temps de parcours est minimal.

Dans le cas d'un dioptre plan (figure 2.2), on montre de la même façon que le temps de parcours est minimal. Nous proposons de généraliser ce résultat à une surface de forme quelconque, par exemple le miroir représenté sur la figure 2.4. Pour simplifier le calcul, on place les deux points A et C de départ et d'arrivée du rayon sur l'axe Ox , symétriques par rapport à l'origine des coordonnées et l'on considère le plan (Ox, Oy) , ce qui n'enlève rien à la généralité de la discussion. La réflexion sur le miroir se fait au point B , seul point qui vérifie le principe de Fermat.

On a $t = \frac{BA + BC}{V} = \frac{1}{V} (\sqrt{(x+a)^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2})$.

Posons $BA + BC = l$, où l est une constante. Nous allons démontrer que le lieu des points vérifiant cette égalité est un ellipsoïde. On a :

$$BA^2 = (l - BC)^2 = l^2 + BC^2 - 2l \cdot BC$$

soit, en introduisant les coordonnées de A et B :

$$(x+a)^2 + y^2 = l^2 + (x-a)^2 + y^2 - 2l \cdot BC$$

soit :

$$BC = \frac{l}{2} - \frac{2ax}{l}$$

Si l'on élève au carré et que l'on écrit l'expression de BC en fonction de x et y , on obtient l'équation de l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{(l/2)^2} + \frac{y^2}{(l^2/4 - a^2)} = 1$$

Le lieu des points B correspondant à un temps de parcours l/V se trouve donc sur un ellipsoïde particulier. Quelle que soit la valeur de l , les foyers des ellipsoïdes ainsi

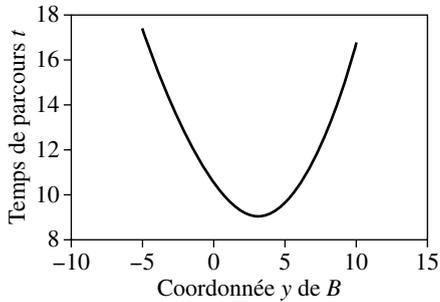


Figure 2.3 • Temps de parcours du rayon lumineux lorsqu'il se réfléchit sur un miroir plan.

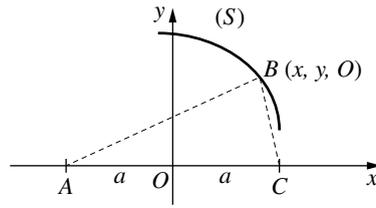


Figure 2.4 • Évaluation du chemin parcouru par un rayon se réfléchissant sur un miroir.

définis sont toujours A et C . L'un des ellipsoïdes est tangent à la surface du miroir. Le point B ainsi déterminé satisfait donc simultanément à l'équation de l'ellipsoïde et à celle qui décrit la surface du miroir. C'est celui qui correspond au temps de parcours extrémal.

À titre d'exemple, la figure 2.5 illustre cette propriété. On conviendra que, dans le cas du miroir S_2 (concave), le point B_2 correspond à un temps de parcours maximal. Au contraire, dans le cas du miroir S_1 (convexe), le point B_1 correspond à un temps de parcours minimal.

On reviendra sur le principe de Fermat dans le cas particulier des dioptries et des miroirs sphériques dans les annexes des chapitres 5 et 6.

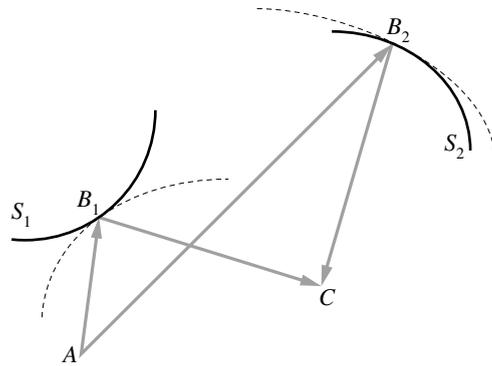


Figure 2.5 • Évolution du temps de parcours en fonction du type de miroir.

2. ÉNONCÉ DES LOIS DE SNELL-DESCARTES

De manière plus générale, on considère un rayon lumineux, appelé rayon incident, se propageant dans un premier milieu et rencontrant en un point I une surface de séparation avec un autre milieu. Celle-ci, appelée dioptrie, peut avoir une forme quelconque. Si le deuxième milieu est aussi transparent, isotrope et homogène, mais d'indice absolu différent, ce rayon se partage généralement en deux parties, le rayon **réfléchi** (on parle de réflexion partielle) et le rayon **réfracté**. Les phénomènes étant locaux, on en simplifie la description en se plaçant dans le plan tangent au point I à la surface du dioptrie ; I est appelé **point d'incidence** (figure 2.6). Dans les problèmes rencontrés en physique où les surfaces sont continues et régulières, il est alors généralement possible de considérer la normale IN au dioptrie. Celle-ci définit donc alors avec le rayon incident un plan appelé **plan d'incidence**, normal, par construction, à la surface de séparation.

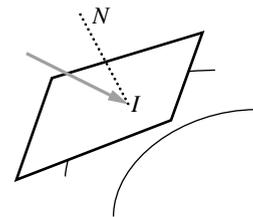


Figure 2.6 • Définition du plan d'incidence formé par la normale à la surface et le rayon incident.

Dans la suite nous travaillerons toujours dans ce plan d'incidence auquel appartiennent les trois rayons incident, réfléchi et réfracté. On définit dans ce plan les trois angles, i , j et r par rapport à la normale :

- i : l'angle d'incidence,
- j : l'angle de réflexion,
- r : l'angle de réfraction.

Ils sont représentés sur la figure 2.7. Dans ce chapitre, il n'est pas nécessaire d'orienter les angles.

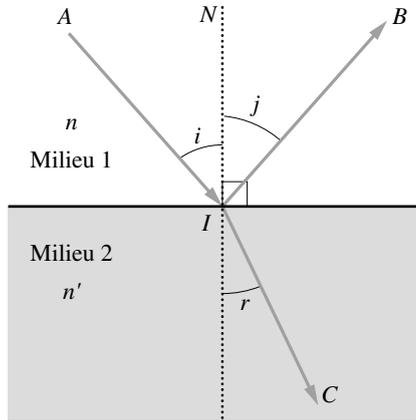


Figure 2.7 • Définition des angles d'incidence (i), de réfraction (r) et de réflexion (j) et des rayons correspondants dans le plan d'incidence.

Les lois de Snell-Descartes établissent des relations entre ces trois angles :

- 1) le rayon réfléchi fait avec la normale un angle j égal à l'angle d'incidence ($i = j$) ;
- 2) le rayon réfracté fait avec le prolongement de la normale un angle r tel que $n \sin i = n' \sin r$, où n et n' sont les indices absolus respectivement du premier et du deuxième milieu.

3. PRINCIPE DU RETOUR INVERSE DE LA LUMIÈRE

Les deux exemples traités au paragraphe 1 ont permis d'énoncer les lois de Snell-Descartes. Elles permettent de déterminer le chemin choisi par la lumière pour aller de A vers C en passant par un point B situé sur la surface de séparation. Il est évident que si la lumière se propageait dans le sens opposé, (de C vers A en passant toujours par cette surface), le principe de moindre temps conduirait à la même trajectoire passant par B . En effet, si l'on change le sens de propagation de la lumière en conservant les mêmes notations pour les différents angles, seul le rôle des rayons est inversé. La relation de Snell-Descartes s'écrit toujours $\sin i = n_r \sin r$ et ceci nous amène à compléter le principe de propagation rectiligne de la lumière énoncé au chapitre 1 par celui du retour inverse de la lumière.

Principe du retour inverse de la lumière. Si l'on inverse son sens de propagation, un rayon lumineux suit le même chemin, même à travers une surface de séparation entre deux milieux (dioptré).

4. INTERPRÉTATION DES LOIS DE SNELL-DESCARTES

L'angle d'incidence i peut prendre toutes les valeurs possibles comprises entre 0° et 90° . L'énoncé de la première loi de Snell-Descartes $i = j$ permet de tirer la même conclusion pour l'angle réfléchi j .

Les valeurs prises par l'angle réfracté r sont liées à celles de l'indice de réfraction $n_r = \frac{n'}{n}$ et à celles de l'angle d'incidence i . Deux types de situations peuvent apparaître selon que n_r est supérieur ou inférieur à 1. Avant de les décrire nous donnerons deux définitions :

- si $n_r > 1$, soit $n' > n$, le deuxième milieu est *plus réfringent* (et non réfractant !) que le premier ;
- inversement, si $n_r < 1$ soit $n' < n$, le deuxième milieu est *moins réfringent* que le premier.

4.1. Propagation vers un milieu plus réfringent : réfraction limite

Dans ce cas, n_r est plus grand que 1, ce qui signifie que l'indice absolu du deuxième milieu, n' , est plus grand que celui du premier milieu, n . C'est par exemple la situation rencontrée à une interface air-verre ($n = 1$ et $n' = 1,5$) ou air-eau ($n = 1$ et $n' = 1,33$). Dans le cas d'une propagation vers un milieu plus réfringent, les angles d'incidence i et de réfraction r sont liés par la deuxième loi de Snell-Descartes : $\sin i = n_r \sin r$, avec $n_r > 1$. Cette relation traduit le fait que $\sin i$ d'une part et $n_r \sin r$ d'autre part ont une même ordonnée, correspondant sur la figure 2.8 à une droite horizontale.

Les deux fonctions $\sin i$ et $n_r \sin r$ sont représentées sur la figure 2.8 pour $n_r = 1,5$ lorsque i et r varient indépendamment entre 0° et 90° . La fonction sinus étant monotone et croissante entre 0° et 90° , pour une valeur de i donnée, la deuxième loi de Snell-Descartes implique que r soit toujours inférieur à i .

On conclut donc que :

Soit un rayon lumineux rencontrant un milieu plus réfringent avec un angle d'incidence i . Après réfraction, il est dévié et fait par rapport à la normale un angle r , toujours plus petit que i ; le rayon réfracté se rapproche donc de cette normale (figure 2.9).

La figure 2.10 montre l'évolution de l'angle de réfraction r quand i augmente de 0° à 90° . On a choisi à titre d'exemple $n = 1$, $n' = 1,5$ soit $n_r = 1,5$. Les valeurs numériques correspondantes sont rassemblées dans le tableau 2.1.

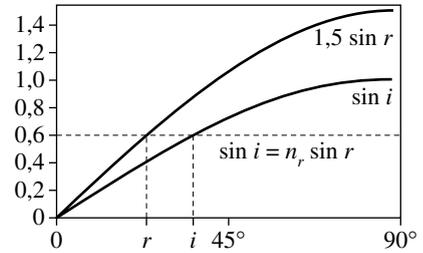


Figure 2.8 • Comparaison entre $\sin i$ et $1,5 \sin r$ ($n_r > 1$).

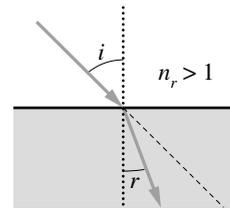


Figure 2.9 • Si l'indice de réfraction n_r est plus grand que 1, le rayon réfracté se rapproche toujours de la normale car $r < i$.

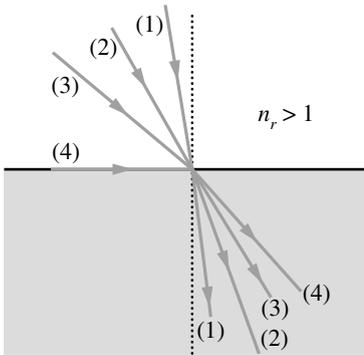


Figure 2.10 • Quand l'angle i augmente, l'angle de réfraction r augmente aussi, mais moins vite. Quand le rayon incident est rasant (la position 4 correspond à $i = 90^\circ$), l'angle réfracté atteint une valeur limite, appelée réfraction limite.

Tableau 2.1 • Comparaison entre i et r avec $\sin i = 1,5 \sin r$ ($n_r = 1,5 > 1$). Si $i = 90^\circ$, $r = 41,81^\circ$ est l'angle limite de réfraction.

Angle d'incidence i ($^\circ$)	Angle de réfraction r ($^\circ$)
0	0
10	6,65
20	13,18
30	19,47
40	25,37
50	30,71
60	35,26
70	38,79
80	41,04
90	41,81

La figure 2.10 et plus particulièrement le tableau 2.1 montrent que lorsque l'angle d'incidence i varie de 0 à 90° , l'angle de réfraction existe toujours. Il atteint une valeur limite appelée angle de réfraction limite, donnée par $i = 90^\circ$. Pour l'exemple choisi, $n_r = 1,5$ et donc $r_{\text{lim}} = 41,81^\circ$. Plus généralement, cette valeur correspond à $\sin r_{\text{lim}} = 1/n_r$. Elle est donc imposée uniquement par la valeur de l'indice de réfraction (ou, ce qui est équivalent, par celles des indices absolus n et n'). Aucun rayon lumineux n'existe dans le deuxième milieu au-delà de cet angle car la condition $\sin r > 1$ est impossible. Ceci crée une zone d'ombre ($41,81^\circ < r < 90^\circ$) dans laquelle il n'existe aucun rayon réfracté provenant du premier milieu. On conclura donc que :

Soit un rayon lumineux rencontrant un milieu plus réfringent avec un angle d'incidence i . Le rayon réfracté r (plus petit que i) existe toujours, mais atteint une valeur limite appelée angle de réfraction limite.

Cette limite donnée par $i = 90^\circ$ est définie par la relation $\sin r_{\text{lim}} = \frac{1}{n_r}$.

4.2. Propagation vers un milieu moins réfringent : réflexion totale

Considérons maintenant une valeur de l'indice relatif n_r , plus petite que 1 ; l'indice absolu du deuxième milieu, n' , est alors plus petit que celui du premier milieu, n . Cela peut être réalisé par exemple avec une interface verre-air ($n = 1,5$ et $n' = 1$) ou eau-air ($n = 1,33$ et $n' = 1$). Les angles d'incidence i et de réfraction r sont toujours liés par la deuxième loi de Snell-Descartes : $\sin i = n_r \sin r$, avec $n_r < 1$.

On a représenté comme précédemment $\sin i$ et $n_r \sin r$ pour i et r variant de 0 à 90° avec $n_r = 1/1,5$ (figure 2.11). Pour une valeur de i donnée, la deuxième loi de Snell-Descartes impose, dans ce cas, r toujours supérieur à i .

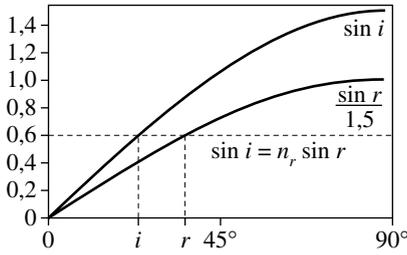


Figure 2.11 • Comparaison entre $\sin i$ et $\frac{\sin r}{1,5}$ ($n_r < 1$).

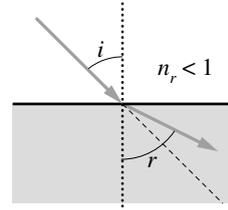


Figure 2.12 • Quand l'indice de réfraction n_r est plus petit que 1, le rayon réfracté s'éloigne toujours de la normale.

On conclut donc que :

Soit un rayon lumineux rencontrant un milieu moins réfringent avec un angle d'incidence i . Après réfraction, il est dévié et fait par rapport à la normale un angle r tel que $r > i$. Le rayon réfracté s'écarte donc de la normale (figure 2.12).

Comme précédemment, la figure 2.13 présente schématiquement l'évolution du rayon réfracté lorsque i augmente de 0° à 90° avec $n_r = \frac{1}{1,5}$. Le tableau 2.2 rassemble les valeurs numériques correspondantes.

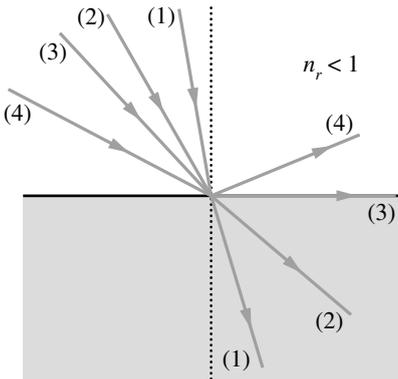


Figure 2.13 • Quand l'angle i augmente, l'angle de réfraction augmente aussi, mais plus vite. Quand le rayon incident correspond à la position 3, l'angle de réfraction atteint 90° . Si i augmente encore (position 4), le rayon ne peut plus se réfracter (on aurait $\sin r > 1$) et il se réfléchit totalement avec un angle $i = j$.

Tableau 2.2 • Comparaison entre i et r avec $\sin r = 1,5 \sin i$ ($n_r < 1$).

Angle d'incidence i ($^\circ$)	Angle de réfraction r ($^\circ$)
0	0
10	15,10
20	30,87
30	48,59
40	74,62
41,81	90
50	Impossible
60	Impossible
70	Impossible
80	Impossible
90	Impossible

La figure 2.13 et le tableau 2.2 montrent maintenant que, lorsque l'angle d'incidence i varie de 0 à 90° , l'angle de réfraction n'existe plus dans le deuxième milieu au-delà d'une certaine incidence i_{lim} . Toute incidence supérieure correspond à $\sin r > 1$; le rayon réfracté n'existe pas. Le rayon incident est donc complètement réfléchi avec un angle $j = i$. Cette limite est donnée par $r = 90^\circ$ et correspond à $\sin i_{\text{lim}} = n_r$, condition uniquement fixée par la valeur de l'indice de réfraction (ou, de manière équivalente, par celles des indices absolus n et n'). On est alors en condition de réflexion totale, bien que l'interface soit transparente. D'où la conclusion suivante :

Considérons un rayon lumineux rencontrant un milieu moins réfringent avec un angle d'incidence i . Le rayon réfracté r (plus grand que i) n'existe plus pour une incidence supérieure à une valeur limite fixée par $\sin i_{\text{lim}} = n_r$. On est alors en condition de réflexion totale.

Remarquons pour terminer que la deuxième loi de Snell-Descartes permet de démontrer la première. En condition de réflexion totale, le rayon reste dans le premier milieu. On peut écrire $n \sin i = n \sin j$, ce qui implique que $i = j$, (la fonction sinus étant bijective lorsque i est compris entre 0 et 90°). Remarquons aussi que l'on aurait pu raisonner dans ce paragraphe en appliquant directement au cas précédent le principe du retour inverse de la lumière (paragraphe 4.1). Pour cela, il aurait suffi d'inverser le sens de la lumière et donc les rôles de i et de r , tout en conservant les valeurs de n et n' . On serait alors dans la condition de réfraction limite trouvée dans le paragraphe précédent.

4.3. Déviation due à l'interface entre deux milieux

De manière générale, quelle que soit la situation de propagation vers un milieu plus ou moins réfringent, i est toujours différent de r . Le rayon incident est donc dévié d'une quantité mesurée par l'angle D , appelé « angle de déviation » ou plus couramment déviation. C'est l'angle dont il faut faire tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon réfracté. D est par définition un angle orienté. Avec les conventions habituelles, si le rayon tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, la déviation est négative (et inversement).

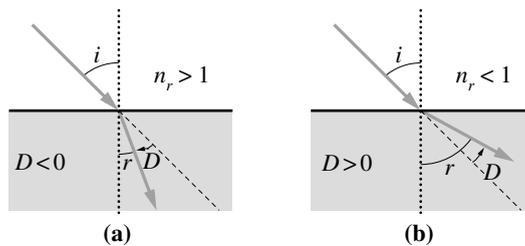


Figure 2.14 • Déviation subie par un rayon incident après réfraction vers un milieu plus réfringent (a) ou moins réfringent (b).

5. CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DU RAYON RÉFRACTÉ PAR LES SURFACES D'INDICES (CONSTRUCTION DE HUYGENS)

Le trajet du rayon réfracté peut être obtenu graphiquement à l'aide d'une construction due à Huygens. Elle donne la position du rayon réfracté en fonction de l'angle d'incidence i de la manière suivante :

Construction du rayon réfracté. On trace deux cercles concentriques centrés au point d'incidence I , de rayons n et n' . On dessine le rayon incident qui fait un angle i par rapport à la normale à la surface de séparation en I . Son prolongement coupe le cercle de rayon n en A . En A , on mène la perpendiculaire à la surface de séparation qui coupe donc le cercle de rayon n' en B . Le rayon IB constitue le rayon réfracté.

De manière évidente, il faudra distinguer les deux cas de propagation par deux types de constructions (selon que l'on se dirige vers un milieu plus réfringent $n' > n$ ou vers un milieu moins réfringent $n' < n$). Le premier cas est représenté sur la figure 2.15a, le second sur la figure 2.15b.

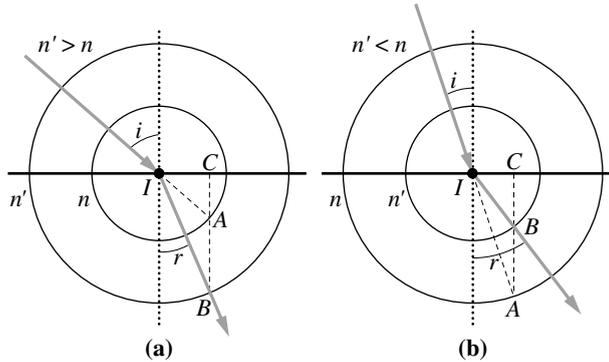


Figure 2.15 • Constructions de Huygens.

Dans chacun des cas, dans les triangles IAC et ICB , on a $\sin i = \frac{IC}{IA}$ et $\sin r = \frac{IC}{IB}$, d'où :

$$IC = IA \sin i = IB \sin r$$

Comme par ailleurs $IA = n$ et $IB = n'$, on retrouve bien pour le rayon réfracté la loi $n \sin i = n' \sin r$.

Dans le cas d'une propagation vers un milieu plus réfringent, la construction est toujours possible, en accord avec la discussion du paragraphe 4.1. On peut facilement matérialiser sur la construction la réfraction limite : les points A et C sont alors confondus et se trouvent sur la droite de séparation entre les deux milieux ($i = 90^\circ$). Dans ce cas limite :

$$\sin r_{\text{lim}} = \frac{IA}{IB} = \frac{1}{n_r}$$

Si la propagation se fait vers un milieu moins réfringent, la construction n'est pas toujours possible, en accord avec la discussion du paragraphe 4.2. À nouveau, on peut facile-

ment retrouver graphiquement le fait que r n'existe plus au-delà d'une certaine incidence : les points A et C sont à nouveau confondus sur la droite de séparation entre les deux milieux. Dans ce cas limite (principe de retour inverse de la lumière) :

$$\sin i_{\text{lim}} = \frac{IA}{IB} = \frac{1}{n_r}$$

Cette méthode, qui a joué un grand rôle à l'époque où les calculatrices n'existaient pas, est peu employée aujourd'hui. Elle est pourtant fort instructive car elle rend bien compte de la réalité à partir de constructions simples.

6. APPROXIMATION DES PETITS ANGLES : LOI DE KEPLER

Si l'angle d'incidence i est petit, on peut confondre la fonction sinus avec la valeur de l'angle exprimée en radians. Il en est alors de même pour r . On rappelle qu'au premier ordre $\sin i \approx i$ et $\cos i \approx 1$; on a de même $\sin r \approx r$ et $\cos r \approx 1$ (voir annexe 1). On peut obtenir dans ce cas une expression approchée de la loi de Snell-Descartes sous une nouvelle forme appelée loi de Kepler :

$$ni = n'r \quad \text{ou} \quad i = n_r r$$

Dans l'énoncé de cette loi, les angles peuvent être exprimés en radians ou en degrés.

Plus l'angle est grand et plus l'erreur de la loi de Kepler est importante. Le tableau 2.3, calculé pour $0^\circ < i < 90^\circ$, teste l'approximation des petits angles en termes d'erreur relative, définie par $\frac{i - \sin i}{\sin i}$; l'angle dans ce cas doit bien évidemment être exprimé en radians.

Tableau 2.3 • Erreur commise lorsque l'on utilise la loi de Kepler au lieu de celle de Snell-Descartes. Ces deux lois sont comparées sur la figure 2.16. On remarque qu'elles se séparent nettement à partir de $i = 20^\circ$.

$i(^{\circ})$	0	10	20	30	40	50	60	90
i (radians)	0	0,1745	0,349	0,523	0,698	0,872	1,047	1,571
$\sin i$	0	0,1736	0,342	0,5	0,643	0,766	0,866	1
Erreur (%) $= \frac{i(\text{radians}) - \sin i}{\sin i(\text{radians})}$	0	0,5	2	4,6	8,6	13,9	20,9	57

Loi de Kepler. Lorsque les angles d'incidence sont faibles, la loi de Snell-Descartes peut s'écrire :

$$i = n_r r$$

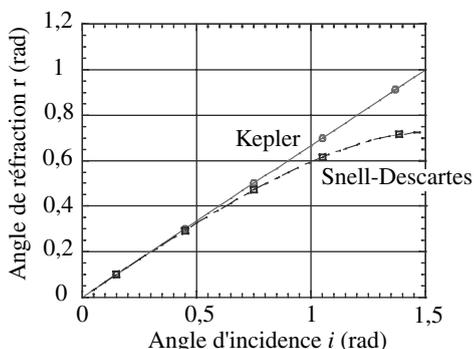


Figure 2.16 • Comparaison entre les lois de Kepler et de Snell-Descartes. Graphiquement, si $n = 1,5$, elles se séparent à partir d'angles de l'ordre 0,34 rad, soit 20°. Cette limite pourrait correspondre à ce que l'on appelle l'approximation des petits angles en optique géométrique.

Encart historique. Polémique d'auteurs

Des essais de Ptolémée (II^e siècle après J.C.) à la loi approchée de Kepler, les lois de la réfraction ont donné plus de mal aux physiciens que celles de la réflexion. La loi approchée a été utilisée la première fois par l'astronome allemand J. Kepler qui, grâce à elle, a développé la théorie des lentilles minces en 1611. Kepler, comme tous les savants de cette époque, recherchait la loi miraculeuse de la réfraction alors utilisée sous forme tabulée. Ainsi il trouve pour le verre une loi de la forme $\frac{i}{r} = \frac{3}{2}$.

Il semblerait qu'Harriott, en 1558, ait été le premier à donner la loi des sinus connue sous le nom de loi de Snell-Descartes.

Le hollandais Snell Van Royen Willebrod l'aurait établie expérimentalement vers 1620, mais sa découverte aurait été publiée tardivement en 1662, bien après sa mort.

La loi des sinus a été démontrée de façon fort critiquable, et publiée pour la première fois par le philosophe et mathématicien français René Descartes dans son ouvrage *Dioptrique* en 1637.

Enfin, c'est au mathématicien français Pierre de Fermat que revient le mérite d'avoir introduit en 1658 sous la forme générale du principe du moindre temps, l'énoncé de base de l'optique géométrique.

7. APPLICATIONS

Nous proposons dans ce paragraphe une étude détaillée de deux systèmes simples constitués de dioptrés plans : la lame à faces parallèles et la fibre optique.

7.1. Lamé à faces parallèles

Considérons une lame transparente à faces parallèles d'indice absolu n et d'épaisseur e placée entre deux milieux d'indices identiques $n = 1$ (figure 2.17). C'est par exemple une vitre de nos maisons.

Aux points A et B , on applique les lois de Snell-Descartes ; on a donc $\sin i_1 = n \sin r_1$ en A et $n \sin r_2 = \sin i_2$ en B . Comme $r_1 = r_2 = r$ on a $i_1 = i_2 = i$; l'angle émergent est le même que si le rayon passait directement du premier milieu d'indice absolu $n = 1$ au troisième milieu de même indice. Cependant, le trajet des rayons n'est pas modifié. En effet, la figure 2.17 montre que, bien que le rayon transmis sorte avec le même angle que l'angle d'incidence, il est décalé d'une quantité δ que nous allons calculer. Dans le triangle ABC , on peut écrire :

$$\sin(i - r) = \frac{BC}{AB} = \frac{\delta}{AB}, \quad \cos r = \frac{AD}{AB} = \frac{e}{AB}$$

$$\text{d'où : } \sin(i - r) = \frac{\delta \cos r}{e} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{e \sin(i - r)}{\cos r}$$

Dans l'approximation des petits angles, $\sin \alpha \sim \alpha$ et $\cos \alpha \sim 1$; les relations précédentes se simplifient en $\delta = e(i - r)$ avec $i = nr$, soit encore $\delta = ie \frac{n - 1}{n}$, où i est nécessairement exprimé en radians.

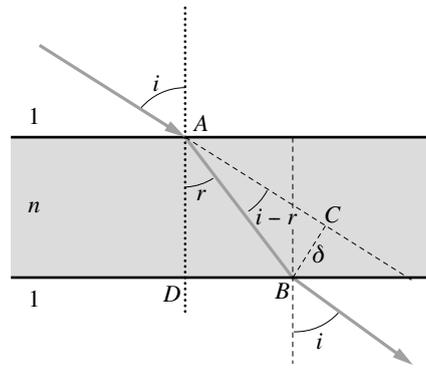


Figure 2.17 • Étude du rayon réfracté par une lame à faces parallèles.

7.2. Fibre optique

Une fibre optique est un « guide de lumière ». Elle est constituée d'un **cœur** cylindrique d'indice n' et d'une **gaine** d'indice n'' . Ces deux milieux sont transparents (figure 2.18). Le diamètre de la gaine est de l'ordre d'une centaine de μm alors que celui du cœur est de quelques microns.

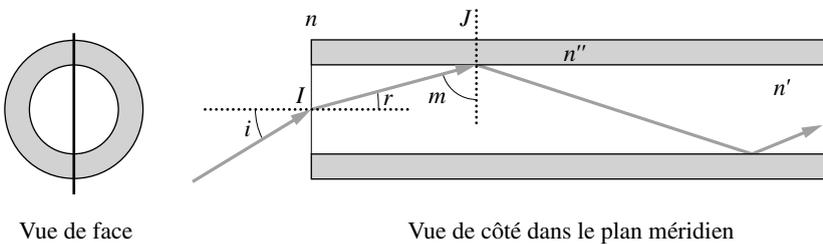


Figure 2.18 • La fibre optique. Vue de face et en coupe dans le plan méridien.

Un rayon arrive en I sous une incidence i ; il se réfracte avec un angle r et frappe la gaine avec un angle d'incidence m . Le but de la fibre optique est de transmettre le rayon à l'intérieur du cœur avec le minimum d'absorption sans que celui-ci puisse sortir de la gaine. Il faut donc que la réflexion soit totale en J .

On écrit les lois de la réfraction en I : $n \sin i = n' \sin r$. r et m sont reliés par $m + r = \pi/2$. Il y a réflexion totale en J si $n' \sin m = n'' \sin \pi/2$, ou encore si $\sin m = \cos r = n''/n'$.

Finalement :

$$n^2 \sin^2 i = n'^2 \left[1 - \left(\frac{n''}{n'} \right)^2 \right] = n'^2 - n''^2 \quad \text{soit : } \sin i = \frac{\sqrt{n'^2 - n''^2}}{n}$$

Avec $n' = 1,5$ et $n'' = 1,48$, $\sin i = 0,244$ et $i = 14^\circ$. Si i est inférieur à cette limite, m est supérieur à l'angle de réflexion limite et le rayon se réfléchit à l'intérieur de la fibre pour ressortir à son extrémité opposée. La quantité $\sqrt{n'^2 - n''^2}$ est appelée **ouverture numérique** de la fibre. L'encart 2.3 présente l'intérêt pratique et le champ d'utilisation des fibres optiques.

Encart 2.3. La fibre optique

Le guidage efficace de l'information a pu se développer grâce à l'avènement des sources laser (1960). Jusqu'en 1970, l'affaiblissement d'un rayon transmis par une fibre optique en silicium restait supérieur à 30 % de sa valeur initiale au bout de 1 km. Il est maintenant de 1 % au bout de 100 km. La fibre sert pour des lampes décoratives, mais aussi pour des explorations médicales (endoscopes) ou pour les télécommunications. Un ensemble de fibres très fines (chacune de diamètre variant de 5 à 100 μm) peut aussi permettre un transport point par point d'une image dont la définition est naturellement conditionnée par ce diamètre.

L'exemple traité ici est celui d'une fibre dite à saut d'indice. Dans ce cas, différentes valeurs d'angles d'incidence (inférieurs à l'angle limite) permettent à plusieurs rayons de se propager dans la fibre avec une longueur de trajet différente. On les appelle les modes de propagation de la fibre, dite multimode. Si l'on réalise un cœur de diamètre très inférieur à celui de la gaine, on limite le nombre de modes susceptibles de se propager dans la fibre.

Si l'on obtient naturellement un seul mode de propagation, la fibre est dite monomode. Sa réalisation est délicate dans le cas d'une fibre à saut d'indice. Les fibres monomodes sont souvent des fibres à gradient d'indice pour lesquelles l'indice absolu décroît continûment du centre vers le bord de la fibre. Le problème est alors identique à celui de la propagation dans un milieu inhomogène (voir chapitre 4), dans lequel les trajectoires des rayons lumineux se courbent continûment.

À RETENIR

- **Représentation dans le plan d'incidence.** L'optique géométrique représente les phénomènes dans le plan d'incidence défini par la normale en I à la surface de séparation et le rayon incident. La surface de séparation correspond au plan tangent au dioptre qui sépare les deux milieux (ce dioptre pouvant être de géométrie quelconque). On y définit dans le plan d'incidence trois angles par rapport à la normale IN et les rayons correspondants. Ces angles sont :

- i : l'angle d'incidence,
- j : l'angle de réflexion,
- r : l'angle de réfraction.

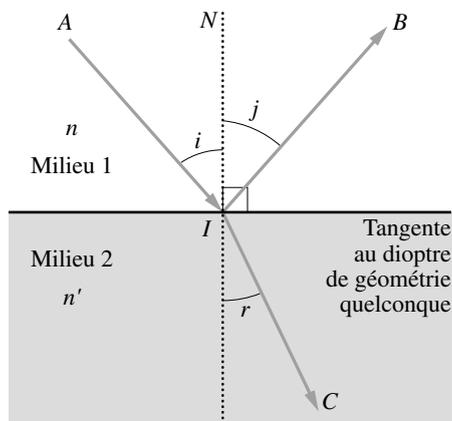


Figure 2.19 • Définition des angles d'incidence, de réfraction et de réflexion par rapport à la normale IN au plan tangent au dioptre dans le plan d'incidence.

➤ **Lois de Snell-Descartes :**

- 1) le rayon réfléchi fait avec la normale un angle j égal à l'angle d'incidence ($i = j$) ;
- 2) le rayon réfracté fait avec le prolongement de la normale un angle r tel que $n \sin i = n' \sin r$ ou $\sin i = n_r \sin r$ avec $n_r = n'/n$.

n, n' sont respectivement les indices absolus du milieu 1 et du milieu 2 ; n_r est l'indice de réfraction. Si l'on inverse son sens de propagation, le rayon lumineux décrit la même trajectoire. Ces lois découlent d'un principe général de la physique appelé le principe de Fermat.

- **Loi de Kepler.** Si l'angle d'incidence i est petit (plus petit que 20° si $n = 1,5$), au premier ordre $\sin i \approx i$ et $\sin r \approx r$. On obtient une expression approchée de la loi de Snell-Descartes appelée loi de Képler : $ni = n'r$ ou $i = n_r r$.
- **Étude du rayon réfléchi.** L'angle d'incidence i peut prendre toutes les valeurs possibles comprises entre 0° et 90° . La conclusion est la même pour l'angle réfléchi j puisque $i = j$.
- **Étude du rayon réfracté.** Deux situations sont possibles :
- Si un rayon lumineux faisant un angle d'incidence i par rapport à la normale à la surface de séparation se propage vers un milieu plus réfringent ($n' > n$), il est dévié lors de la réfraction et fait par rapport à la normale un angle r plus petit que i . Le rayon réfracté se rapproche donc de la normale et existe toujours. Ainsi l'angle de réfraction atteint une valeur limite appelée angle de réfraction limite donnée par $\sin r_{\text{lim}} = 1/n_r$ pour $i = 90^\circ$.
 - Si un rayon lumineux avec un angle d'incidence i par rapport à la normale à la surface de séparation se propage vers un milieu moins réfringent ($n' < n$), il est dévié lors de la réfraction et fait par rapport à la normale un angle r plus grand que i ; le rayon réfracté s'écarte donc de la normale. Dans ce cas, il n'existe plus pour une incidence supérieure à une valeur limite donnée par $\sin i_{\text{lim}} = n_r$. On est alors en condition de réflexion totale.

Dans tous les cas, on peut déterminer l'angle de déviation D , angle dont il faut faire tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon réfracté (s'il existe). C'est un angle orienté.

Les **constructions de Huygens** permettent de retrouver tous ces résultats graphiquement.

ANNEXE 1

Rappels sur les fonctions trigonométriques

Définition

Les différentes fonctions trigonométriques d'un angle A sont définies à partir de grandeurs algébriques, on a :

$$\sin A = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} \quad \cos A = \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}} \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}$$

Dans le schéma 2.20, la grandeur algébrique \overline{OM} est positive car $Y_M > Y_0$. Par un même raisonnement on peut déduire le signe des autres grandeurs algébriques et celui de l'angle correspondant A . A est ici un angle orienté.

Le formalisme de l'optique géométrique ne nécessite pas systématiquement l'emploi d'angles orientés. Cependant, l'angle A est par définition un angle orienté. Si la prise en compte de cette orientation est nécessaire, A devra être compté positif s'il est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et négatif dans le cas contraire.

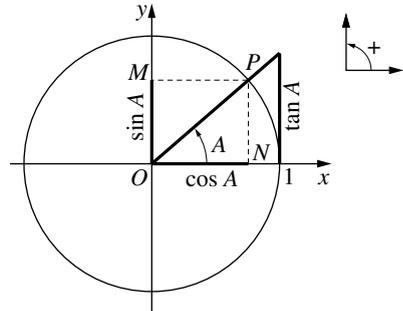


Figure 2.20 • Définition des fonctions sinus, cosinus et tangente.

Valeurs particulières

Tableau 2.4 • Quelques valeurs particulières des fonctions sinus, cosinus et tangente

A	0	$\pi/6 = 30^\circ$	$\pi/4 = 45^\circ$	$\pi/3 = 60^\circ$	$\pi/2 = 90^\circ$
$\sin A$	0	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1/2$	0
$\tan A$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Relations

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

Tableau 2.5 • Relations entre les fonctions sinus et cosinus

	$-A$	$\pi - A$	$\pi/2 - A$	$\pi/2 + A$	$n\pi + A$
sin	$-\sin A$	$\sin A$	$\cos A$	$\cos A$	$(-1)^n \sin A$
cos	$\cos A$	$-\cos A$	$\sin A$	$-\sin A$	$(-1)^n \cos A$

Fonction sinus

C'est une fonction strictement monotone croissante et bijective pour $0^\circ < A < 90^\circ$.

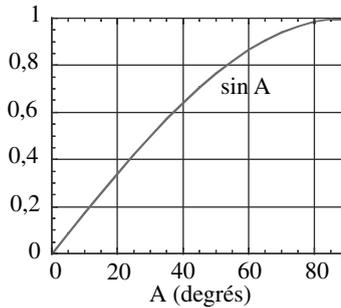


Figure 2.21 • Évolution de la fonction sinus entre 0 et 90°.

Équations

$$\begin{aligned} \sin A = \sin \alpha &\iff A = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad A = \pi - \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \sin A = 0 &\iff A = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Fonctions réciproques

$$B = \text{Arcsin } A, \quad -1 < A < 1 \iff A = \sin B, \quad -\pi/2 < B < \pi/2$$

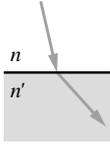
Développements limités

$$\begin{aligned} \sin A &= A - \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n A^{2n+1}}{(2n+1)!} + \varepsilon A^{2n+1} \\ \cos A &= 1 - \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n A^{2n}}{(2n)!} + \varepsilon A^{2n} \end{aligned}$$

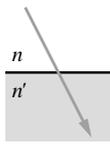
$$\tan A = A + \frac{A^3}{3} + \frac{2A^5}{15} + \frac{17A^7}{315} + \varepsilon A^8$$

Si A est petit, $\sin A \approx A$, $\cos A \approx 1$, $\tan A \approx A$.

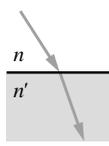
QCM

- 1** Parmi toutes les trajectoires possibles pour aller d'un point à un autre, la lumière suit le chemin
- (1) qui a la distance de parcours minimale.
 - (2) qui a le temps de parcours minimal.
 - (3) qui a le temps de parcours extrémal.
- 2** Les lois de Snell-Descartes établissent une relation entre l'angle du rayon incident i et l'angle du rayon réfléchi j , qui est
- (1) $i < j$
 - (2) $i = j$
 - (3) $i > j$
- 3** Les lois de Snell-Descartes établissent une relation entre l'angle i du rayon incident se propageant dans un milieu d'indice n et l'angle r du rayon réfracté se propageant dans un milieu d'indice n' . Cette relation est
- (1) $n \sin i = n' \sin r$
 - (2) $n \cos i = n' \cos r$
 - (3) $n \sin^{-1} i = n' \sin^{-1} r$
- 4** Si un rayon lumineux dans un premier milieu fait, à l'arrivée sur une surface de séparation avec un deuxième milieu plus réfringent, un angle d'incidence i avec la normale, sa trajectoire fait après la surface un angle r tel que
- (1) $r < i$
 - (2) $r = i$
 - (3) $r > i$
- 5** Si un rayon lumineux se propage vers un milieu moins réfringent avec un angle d'incidence i avec la normale à la surface de séparation, sa trajectoire fait après l'obstacle un angle r de telle manière que
- (1) $r < i$
 - (2) $r = i$
 - (3) $r > i$
- 6** Si un rayon lumineux se propage vers un milieu plus réfringent en faisant un angle d'incidence i avec la normale à la surface de séparation, le rayon réfracté r
- (1) n'existe plus au-dessus d'une valeur limite de i .
 - (2) existe toujours, variant de 0° à 90° .
 - (3) existe toujours, mais atteint une valeur limite.
- 7** Si un rayon lumineux pénètre dans un milieu moins réfringent avec un angle d'incidence i avec la normale à la surface de séparation, le rayon réfracté r
- (1) n'existe plus au-dessus d'une valeur limite de i .
 - (2) existe toujours, variant de 0° à 90° .
 - (3) existe toujours, mais atteint une valeur limite.
- 8** Un rayon traverse un dioptre plan séparant deux milieux d'indices n et $n' > n$. Quel est le bon trajet ?
- 

(1)



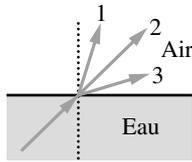
(2)



(3)

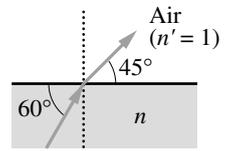
9 Le rayon passe de l'eau dans l'air ($n_{\text{eau}} = 1,33$ et $n_{\text{air}} = 1$). Le rayon sortant est

- (1) le rayon 1
- (2) le rayon 2
- (3) le rayon 3



10 Un rayon lumineux se réfracte en passant d'un milieu d'indice n dans l'air. L'indice n

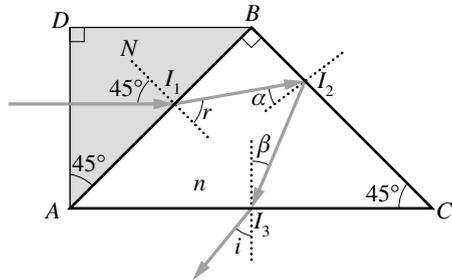
- (1) vaut $\sqrt{2}$
- (2) vaut 2
- (3) est impossible à calculer



Réponses : 1. 3, 2. 2, 3. 1, 4. 1, 5. 3, 6. 3, 7. 1, 8. 3, 9. 3, 10. 1

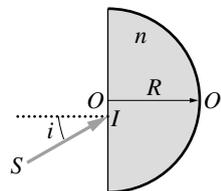
EXERCICES

1 Deux morceaux de verre taillés en forme de triangles rectangles et isocèles d'indices respectifs N et n ont leur face AB commune. Un rayon incident arrive sur la face AD sous une incidence normale, se réfracte en I_1 , se réfléchit en I_2 puis ressort en I_3 avec un angle i . Les valeurs de N et n sont telles que la réflexion soit totale en I_2 .

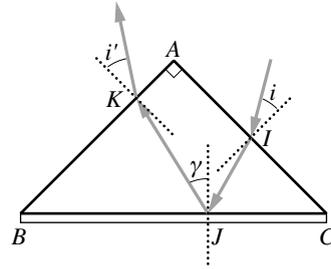


- a) Écrire la relation de Snell-Descartes aux points I_1 et I_3 .
- b) Quelles relations vérifient les angles r et α ; α et β ?
- c) Quelle relation vérifient N et n pour que la réflexion soit limite en I_2 ? Calculer N , r , α , β et i pour $n = 3/2$ quand cette condition limite est réalisée. On appelle N_0 cette valeur limite de N . Pour que la réflexion soit totale en I_2 , N doit-il être plus grand ou plus petit que N_0 ?
- d) Écrire la relation vérifiée par N et n pour que l'angle i soit nul. Que vaut N ?

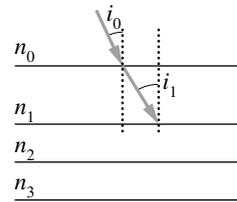
2 Un bloc de verre d'indice n a la forme d'un demi-cylindre de rayon R . Dans sa section droite qui est un demi-cercle de centre O , on envoie un rayon SI dont l'angle d'incidence est i . Exprimer $x = OI$ en fonction de n , R et i pour que le rayon qui a traversé le bloc de verre soit parallèle à SI .



- 3** Un morceau de verre taillé sous la forme d'un triangle rectangle isocèle a sa base argentée. Un rayon incident en I arrive sur le morceau de verre avec un angle d'incidence i , se réfléchit sur sa base en J avec un angle γ et ressort en K avec un angle i' . Démontrer que $i = i'$. Calculer en fonction de i la déviation due au morceau de verre.

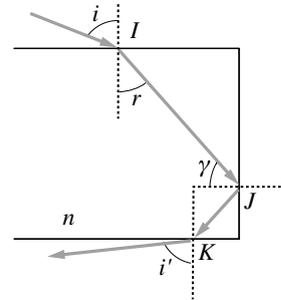


- 4** Dans les zones où le sol est très chaud, la densité de l'air augmente avec l'altitude ainsi que l'indice absolu. En partant d'un certain niveau, on découpe l'atmosphère en couches parallèles d'indices $n_0 > n_1 > n_2 \dots$. Au niveau de départ, un rayon arrive avec un angle d'incidence i_0 .



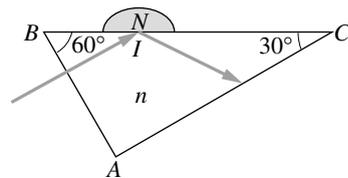
- a) Quelles relations relient entre eux les angles d'incidence successifs $i_0, i_1, i_2 \dots$
 b) Que devient la direction du rayon après un grand nombre de réfractons.

- 5** On fabrique un parallélépipède de verre d'indice $n = 1,5$. Un rayon arrive en I avec un angle d'incidence i , se réfléchit sur la deuxième face en J avec un angle γ et ressort par la troisième face au point K avec un angle i' .



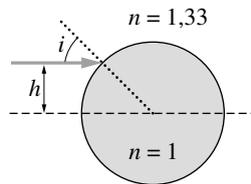
- a) Établir les relations entre les différents angles en I, J et K . Montrer que le rayon ne peut pas se réfracter en J et qu'il ne peut pas se réfléchir en K . Que vaut l'angle i' ? Le tracé du rayon est-il correct?
 b) Calculer la déviation due au parallélépipède.

- 6** Soit un morceau de verre d'indice $n = 1,5$ taillé en forme de triangle. Un rayon arrive perpendiculaire à la face AB . Quelle doit être la valeur minimale de N , l'indice de réfraction de la goutte de liquide posée sur la face BC pour qu'il y ait réflexion totale en I ? Dans ce cas, le rayon sort-il par la face AC ?



- 7** Une bulle d'air sphérique ($n = 1$) de rayon R est immergée dans un liquide d'indice $n = 1,33$.

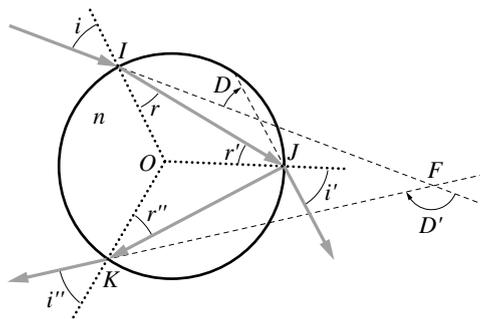
a) Calculer la valeur limite i_0 de i pour laquelle il y a réflexion totale sur la bulle d'air pour un rayon incident parallèle à l'axe. Quelle est alors la hauteur h du rayon incident par rapport à l'axe de la bulle d'air en fonction du rayon de la goutte ? Dans le cas où $i > i_0$, donner l'expression de la déviation subie par le rayon incident.



b) Donner l'expression de la déviation D quand $i < i_0$, le rayon subissant deux réfractions et sortant de la bulle.

c) Représenter sommairement l'allure de $D(i)$ pour $0^\circ < i < 90^\circ$ en calculant D pour quelques valeurs de i . Que constatez-vous ?

8 Un rayon lumineux arrive en I à la surface d'une goutte d'eau sphérique de rayon R et d'indice $n = 4/3$. Le rayon traverse la goutte et atteint la paroi de la goutte à nouveau en J sous une incidence r' .



a) Le rayon réfracté en I existe-t'il toujours ? Que vaut r quand $i = 90^\circ$?

b) Que valent r' et i' ? Exprimer la déviation D en fonction de r et i . Existe-t-il un minimum de déviation ? Comment apparaît la goutte d'eau éclairée par un faisceau de rayons parallèles quand on est placé du côté du point J ? Dans quelles conditions peut-on observer ce phénomène ?

c) Une partie du rayonnement se réfléchit en J à l'intérieur de la goutte et ressort en K ? Que valent r'' et i'' ? Exprimer la déviation D' en fonction de i et r . Montrer qu'il existe un minimum de déviation donné par :

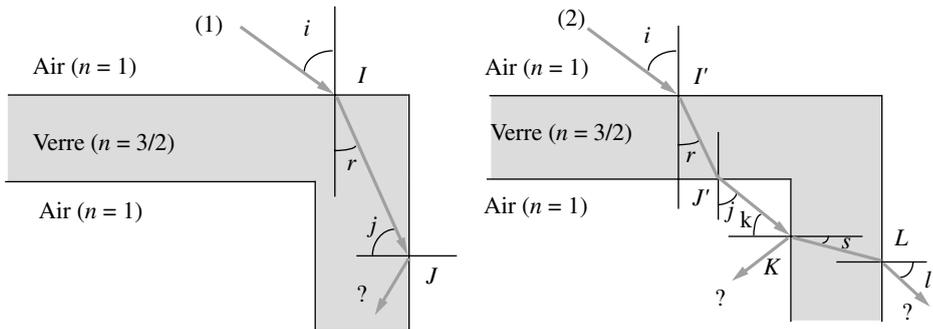
$$\sin i = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \quad \text{et} \quad \cos \frac{D_m}{2} = \sqrt{\frac{(4-n^2)^3}{27n^4}}$$

Calculer D_m , r et i au minimum de déviation. Dans quelles conditions observe-t-on ce phénomène ?

d) L'indice n varie de 1,329 à 1,343 entre le rouge et le bleu. En déduire l'expression de dD_m/dn au minimum de déviation (i est constant, seul r varie) et calculer la largeur angulaire de l'arc-en-ciel.

9 La serre de jardinier

Le soleil éclaire une serre avec des rayons parallèles faisant un angle i avec la verticale. La serre est constituée de plaques de verre, à faces parallèles, d'indice $n = 3/2$.



1) On s'intéresse au rayon (1) qui arrive sur le bord de la serre au point I . Il se réfracte en I puis arrive sur la deuxième face en J . Peut-il sortir en J ? Sinon que devient-il? Faites un dessin sommaire du cheminement ultérieur du rayon.

2) On s'intéresse maintenant au rayon (2) qui arrive au point I' comme l'indique la figure ci-dessus.

- Le rayon peut-il se réfléchir totalement en I' ?
- Le rayon peut-il se réfléchir en J' ?
- Le rayon peut-il se réfléchir en K ?
- Le rayon peut-il se réfléchir en L ?

Si le rayon sort en L , exprimer les angles k et l en fonction de i .

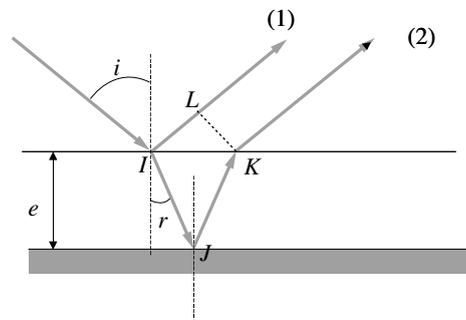
10) lame à face parallèles

Une lame à faces parallèles d'épaisseur e , dont l'une des faces est réfléchissante est constituée d'un verre d'indice n . Elle est en contact avec l'air d'indice supposé égal à 1.

1) Exprimer la vitesse v de la lumière dans le verre en fonction de n et de c , la vitesse de la lumière dans l'air.

2) Le rayon incident qui arrive en I se partage en 2 parties, le rayon réfléchi IL (rayon 1) et le rayon réfracté qui suit le chemin IJK (rayon 2).

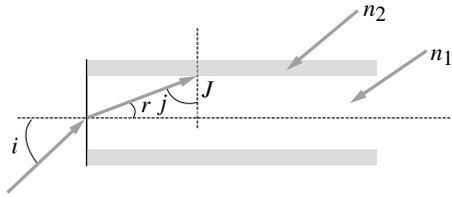
- exprimer la longueur du chemin IJK en fonction de e et de l'angle r .
- exprimer la longueur IL en fonction de e et des angles i et r .



En déduire le temps que met la lumière pour parcourir chaque chemin. Montrer que le rayon 2 est en retard sur le rayon 1 d'une quantité $\Delta t = \frac{2en}{c} \cos r$.

11 **Cylindre de verre**

La figure représente la coupe d'un cylindre en verre. Il est constitué de 2 couches d'indice n_1 et n_2 . Un rayon lumineux arrive sur la face d'entrée avec un angle d'incidence i .



Ecrire la relation existant entre les angles r et j . En déduire la relation existant entre i, j et n_1 .

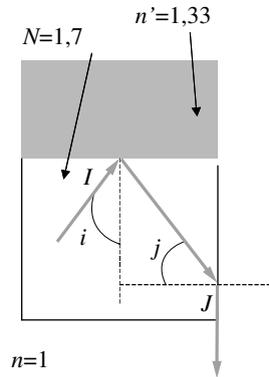
Donner l'expression de $\sin i_0$ quand le rayon est à la limite de la réflexion totale en J . Calculer i_0 avec $n_1 = 1,5$ et $n_2 = 1,35$.

12 **Cube de verre**

On considère le rayon incident en I .

Avec les valeurs données sur la figure déterminer la valeur limite de i pour laquelle le rayon ne peut plus pénétrer au-dessus de I .

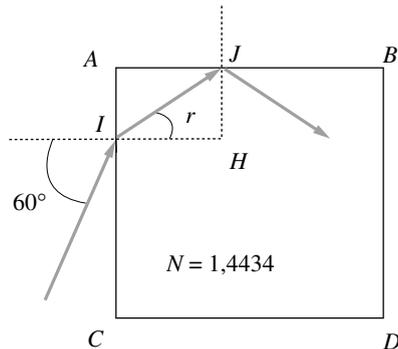
Pour quelle valeur de i , le rayon qui s'est réfléchi en I sort-il du cube de verre en émergence rasante ?



13 **Cube de verre**

On considère le rayon incident en I sur un cube de verre de 4 cm de côté. Déterminer successivement les points de réflexion du rayon sur les différentes faces du cube. Par quelle face va-t-il sortir ?

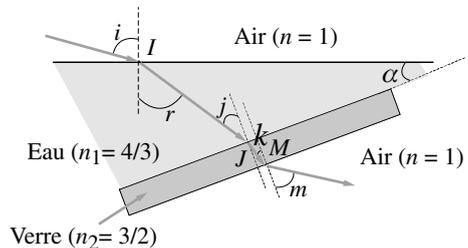
On donne $AB = 4$ cm et $AI = 1$ cm.



14 **Vitre d'un masque de plongée**

Un observateur sous-marin voit le paysage (terrestre) à travers la vitre de son masque de plongée considérée comme une lame à faces planes, d'indice $n_2 = 3/2$. Cette vitre est placée sous l'eau (d'indice $n_1 = 4/3$) comme l'indique la figure.

– Quelle relation vérifient r, j et α ?



- Le rayon peut-il se réfléchir en J ?
- Déterminer les conditions sur j et α pour que le rayon sorte en M en émergence rasante. L'observateur peut-il voir un rayon incident si $\alpha = 20^\circ$ et $i = 45^\circ$? Si oui, pour quelle valeur de α va-t-il disparaître ?

15 Réfraction du son

La vitesse du son (exprimée en m/s), dans l'air est donnée par la relation

$$v_{\text{son}} = 331,45 \sqrt{1 + \frac{T \text{ (}^\circ\text{C)}}{273,16}}$$

où T est la température de l'air exprimée en $^\circ\text{C}$.

1) Entre le sol et 15 km d'altitude, la température diminue constamment pour passer de 20°C au sol à -50°C à 15 km d'altitude. Calculer la vitesse du son au sol et à 15 km d'altitude.

2) Entre le sol et 15 km d'altitude, l'indice de réfraction de la lumière diminue constamment de 1,000279 à 1,000111. Calculer la vitesse de la lumière à ces 2 altitudes. Représenter schématiquement l'allure des rayons émis par une source lumineuse placée à 15 km d'altitude en faisant apparaître la courbure des rayons. Justifier votre tracé.



3) Par analogie avec votre raisonnement précédent, comment des ondes sonores provenant d'un coup de tonnerre en altitude, vont-elles se propager dans l'atmosphère ? Montrer qu'au sol, en certains endroits, on verra l'éclair sans entendre le tonnerre.

Solutions

1 a) En I_1 , $N \sin 45^\circ = N \frac{\sqrt{2}}{2} = n \sin r$. En I_3 , $n \sin \beta = \sin i$.

b) La normale à BC et la normale à AB sont perpendiculaires entre elles. Dans le triangle formé par ces normales et I_1I_2 , on a $r + \alpha = 90^\circ$. Dans le triangle formé par les normales à BC et AC et par I_2I_3 , on a $\alpha + \beta = 45^\circ$.

c) La condition de réflexion limite en I_2 s'écrit $n \sin \alpha = 1$; sachant que $r + \alpha = 90^\circ$ et que $\frac{N}{n\sqrt{2}} = \sin r$, on trouve : $N^2 = 2(n^2 - 1)$.

$N = 1,58$, $r = 48,19^\circ$, $\alpha = 41,81^\circ$, $\beta = 3,19^\circ$ et $i = 4,79^\circ$.

Au-delà de l'angle limite, on a $n \sin \alpha > 1$, $\alpha > 41,81^\circ$. Donc $r < 48,19^\circ$ et $N < N_0$, ce qui revient à $N < \sqrt{2(n^2 - 1)}$. N doit donc être plus petit que 1,58.

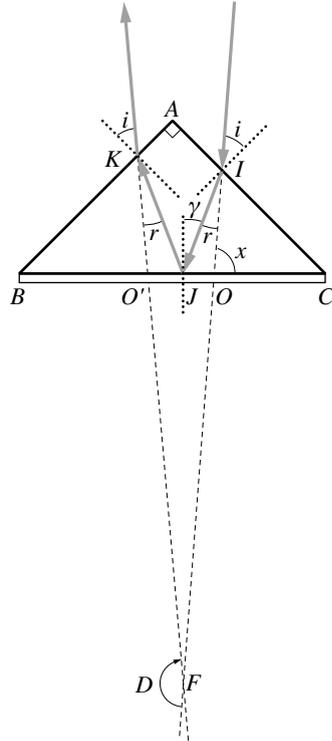
d) Si i est nul, $\beta = 0$, soit $\alpha = r = 45^\circ$, et $N = n = \frac{3}{2}$.

2 Pour que le rayon sortant soit parallèle à SI , il faut que les normales respectives à l'entrée et à la sortie du bloc de verre soient parallèles entre elles. Le bloc se comporte alors comme une lame à faces parallèles. Le seul point du cercle de rayon R où cette condition est remplie est le point O' . Si r est l'angle de réfraction dans le bloc, il satisfait alors aux deux conditions suivantes : $\tan r = \frac{x}{R}$ et $\sin i = n \sin r$. En manipulant ces deux équations, on trouve :

$$x = \frac{R \sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

3 On a $\sin i = n \sin r$ et $n \sin r' = \sin i'$. Dans le triangle IJC , on a $45^\circ = r + \gamma$. Dans le triangle KJB , on a $45^\circ = r' + \gamma$. Finalement, $r = r'$ et $i = i'$.

Dans le quadrilatère $KIJF$, la somme des angles est égale à 2π , soit $2\pi = \pi - D + 2(i - r) + 2\pi - 2\gamma$,
ou encore $D = \frac{\pi}{2} + 2i$.

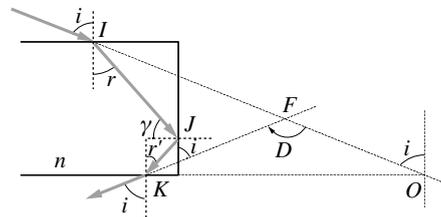


4 a) À chaque passage d'une couche à l'autre, la relation de Snell-Descartes s'applique, ce qui donne :

$$n_0 \sin i_0 = n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = \dots = n_k \sin i_k$$

b) Puisque n augmente avec l'altitude, i augmente jusqu'à ce que $i_k = \pi/2$. Le rayon est alors parallèle aux couches d'atmosphère. Rencontrant la couche suivante, on aurait $\sin i_{k+1} = \frac{n_k}{n_{k+1}} > 1$. Il n'y a donc plus de réfraction. Le rayon se réfléchit totalement et remonte.

5 a) En I , $\sin i = n \sin r$; en J , l'angle d'incidence est $\gamma = 90^\circ - r$; en K , l'angle d'incidence est r' . Comme $\gamma = 90^\circ - r'$, $r = r'$. On a alors $i' = i$. L'angle limite en J correspond à $1 = n \sin \gamma$ soit $\gamma_{\text{lim}} = 41,81^\circ$. Or, $i \leq 90^\circ$, $r \leq 41,81^\circ$ et $\gamma \geq 48,19^\circ$. γ est donc toujours supérieur à l'angle limite imposé par n . Il ne peut donc pas y avoir de réflexion totale en J .



En K , comme $r = r'$, on a $i = i'$. Si i existe toujours, i' aussi. Il ne peut y avoir de réflexion totale en K (principe du retour de la lumière). Le tracé des rayons donné dans l'énoncé n'est pas correct et doit être remplacé par celui donné ici.

b) La déviation se calcule comme dans l'exercice précédent en considérant le triangle KFO . On a alors $D + 2(\pi/2 - i) = \pi$. $D = 2i$.

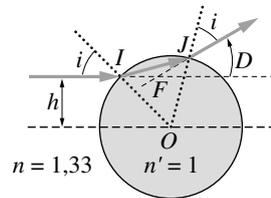
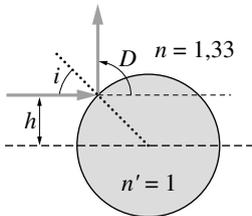
6 Compte tenu de la forme du bloc de verre, le rayon arrive sur la face BC avec une incidence de 60° par rapport à la normale en I . La relation de Snell-Descartes s'écrit alors

$n \sin 60 = N \sin r$. La valeur minimale de N à partir de laquelle il va avoir réflexion totale est donnée par $n \sin 60 = N$, soit $N = 1,299$;

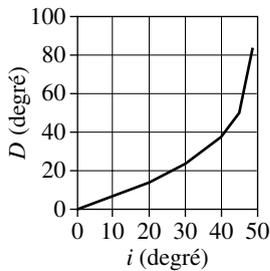
Le rayon sort par AC car l'angle d'incidence sur cette face est de 30° par rapport à la normale et $n \sin 30^\circ < 1$.

7 a) Pour qu'il y ait réflexion totale, il faut que $n \sin i_0 = 1$, soit $i_0 = 48,75^\circ$. Si $i = i_0$, $\sin i_0 = \frac{h}{R} = \frac{1}{n}$. On a donc $h = \frac{R}{n}$. Si $i > i_0$, il y a réflexion totale sur la bulle d'air et la déviation est $D = \pi - 2i$.

b) Si $i < i_0$, le rayon rentre dans la bulle d'air en I , se réfracte et ressort en J après deux réfractions. Le triangle IJO étant isocèle ($OI = OJ$), il ressort avec le même angle i . Dans le triangle IJJ' , on a $\pi - D + 2(r - i) = \pi$ soit $D = 2(r - i)$.



c) Premier cas : $i < i_0$, il y a deux réfractions en I et J .

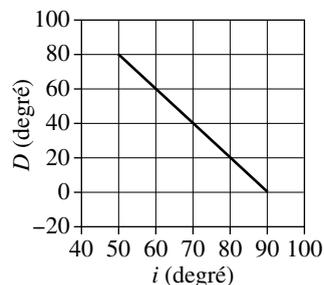


i ($^\circ$)	r ($^\circ$)	D ($^\circ$)
0	0	0
10	13,35	6,70
20	27,05	14,11
30	41,68	23,36
35	49,71	29,43
40	58,75	37,5
45	70,13	50,25
$i_0 = 48,75$	90	82,49

Les rayons sortent dans un cône d'angle $82,49^\circ$, puisqu'au-delà de l'incidence $i = i_0$, il n'y a plus de réfraction possible (r ayant atteint sa valeur maximale).

Deuxième cas : $i > i_0$, il y a réflexion sur la bulle d'air en I .

i (degrés)	D (degrés)
50	80
60	60
70	40
80	20
90	0



- 8 a)** Le rayon réfracté existe toujours en I puisque l'on se propage vers un milieu plus réfringent.

Quand $i = 90^\circ$, on a $1 = n \sin r$, soit $r = 48,59^\circ$. C'est l'angle limite de réfraction dans la goutte.

- b)** Le triangle IJO étant isocèle ($OI = OJ = R$) et $\frac{\sin r}{OJ} = \frac{\sin r'}{OI}$, donc $r' = r$ ce qui implique $i' = i$. Dans le triangle IJO' , on a $\pi - D + 2(i - r) = \pi$, soit $D = 2(i - r)$. Comme par ailleurs $r < i$, $D > 0$ et est toujours croissante. D est donc minimum en $dD = 0$. À incidence nulle, le rayon incident traverse alors la goutte selon le diamètre (également normale au dioptre en I) sans être dévié. On a alors $i = r = 0$ et $D_m = 0$.

Le minimum de déviation est obtenu en annulant la différentielle de D . $dD = 0$ revient à $di - dr = 0$. Or, $n \cos r dr = \cos i di$, ce qui donne aussi $(\cos i - n \cos r)di = 0$. Ceci est réalisé de façon simultanée avec la relation de Snell-Descartes pour $n = 1$, ce qui est sans intérêt (il n'y a plus de goutte). L'autre solution est $i = r = 0$, solution déjà discutée.

Si la goutte est éclairée par un faisceau de rayons parallèles, les différents rayons arrivant aux alentours du point J ne sont pas vus sous les mêmes incidences (les normales respectives sur le cercle ne sont pas parallèles entre elles). On voit donc un halo de lumière, ce qui correspond à de la diffusion dans le brouillard.

- c)** De la même façon que précédemment, les triangles OJK et IOJ sont isocèles ; donc $r' = r'' = r$ et $i' = i'' = i$.

De même, le triangle IOK est isocèle ($OK = OI = R$). Dans le triangle IJK , les angles OKI et OIK sont donnés par : $\pi = 4r + 2 OIK$, soit $OIK = OKI = 90^\circ - 2r$. Pour calculer D' , on considère le triangle FKI , dans lequel

$$\pi - D' + 2i + 2OIK = \pi - D' + 2i + 2\left(\frac{\pi}{2} - 2r\right) = \pi,$$

soit $D' = \pi + 2i - 4r$.

Le minimum de déviation est donné par $dD' = 0$. Ceci entraîne $di = 2dr$ soit $n \cos r = 2 \cos i$. Or, $\sin i = n \sin r$. En éliminant r , on en déduit l'expression de $\sin i$ puis celle de $\cos D_m/2$.

On a :

$$\sin i = n\sqrt{1 - \cos^2 r} = n\sqrt{1 - 4\frac{\cos^2 i}{n^2}} = n\sqrt{1 - \frac{4}{n^2}(1 - \sin^2 i)}.$$

En regroupant les termes en $\sin i$, on trouve $\sin i = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$.

De même, on peut calculer :

$$\begin{aligned} \cos \frac{D_m}{2} &= \sin(2r - i) = \frac{4}{n^2} \sin i(1 - \sin^2 i) - \sin i \left(1 - 2\frac{\sin^2 i}{n^2}\right) \\ &= \frac{\sin i(4 - n^2)}{3n^2} = \sqrt{\frac{(4 - n^2)^3}{27n^4}} \end{aligned}$$

Pour $n = 4/3$, cela donne $i = 59,39^\circ$, $r = 40,2^\circ$ et $D_m = 137,97^\circ$. Ce phénomène est celui de l'arc-en-ciel.

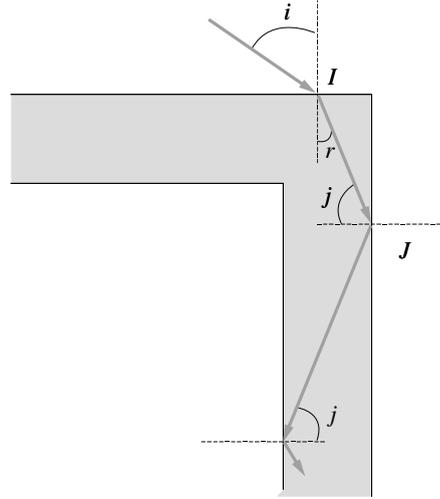
- d)** On peut montrer de la même façon que $\sin \frac{D_m}{2} = (n^2 + 8)\sqrt{\frac{n^2 - 1}{27n^4}}$.

On peut alors dériver $\cos(Dm/2)$ par rapport à n et on trouve : $\frac{dD_m}{dn} = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{4-n^2}{n^2-1}}$. Pour $dn = 0,014$, on a $dD_m = 0,0355 rd = 2,03^\circ$. On retrouve bien le fait que les différentes longueurs d'onde ne se réfléchissent pas toutes aux mêmes points J et K , ce qui donne cette dispersion de couleur bien connue dans le phénomène de l'arc-en-ciel.

9 Serre de jardinier

1) En J , l'angle limite j_0 est donné par $n \sin j_0 = 1$, $j_0 = 41,8^\circ$, $r_0 = 48,18^\circ$. Pour que le rayon sorte en J , il faut que $r > r_0$ et donc $i > i_0$ avec $\sin i_0 = n \sin r_0 = 1,11 > 1$. Il y a donc toujours réflexion totale. Le rayon va se réfléchir alternativement sur les 2 faces.

2) En I' , $r < i$ existe toujours car on va d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent. En J' , $j = i$: le rayon traverse. En K , $s < k$ existe toujours pour la même raison que précédemment. En L , le rayon sort avec $l = k$. Comme $j = i$ et $k + j = 90^\circ$, $k = l = 90 - i$.



10 lame à faces parallèles

1) $v = c/n$

2) $IJK = 2e/\cos r$. $IL = IK \sin i = 2e \tan r \sin i$.

3) Temps de parcours

$$\tau_{IJK} = \frac{2en}{c \cos r} \quad \tau_{IL} = \frac{2e}{c} \tan r \sin i$$

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{2en}{c \cos r} - \frac{2e}{c} \tan r \sin i = \frac{2en}{c \cos r} - \frac{2e}{c} \frac{\sin r}{\cos r} \sin i = \frac{2en}{c \cos r} (n - \sin^2 r) \\ &= \frac{2en}{c} \cos r \end{aligned}$$

11 Cylindre de verre

$$r + j = 90^\circ. \sin i = n_1 \sin r = n_1 \cos j.$$

À la limite, $n_1 \sin j_0 = n_2$ et $\sin i_0 = n_1 \cos j_0$. On élimine l'angle j_0 en formant $\sin^2 j_0 + \cos^2 j_0 = 1$, ce qui donne $\sin i_0 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 0,654$, $i_0 = 40,83^\circ$.

12 Cube de verre

$$1,7 \sin i = 1,33. \quad i = 51,47^\circ$$

À la limite en J , $1,7 \sin j = 1$. $j = 36,03^\circ$. $i = 90 - j = 53,96^\circ$.

13 Cube de verre

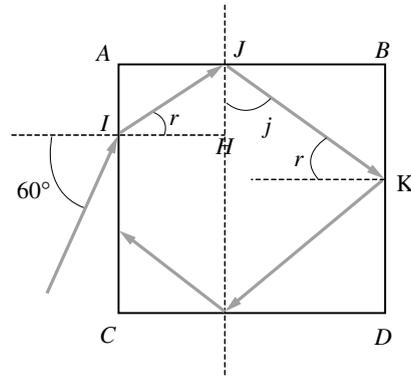
$\sin 60 = 1,4434 \sin r, \quad \sin r = 0,6,$
 $\cos r = 0,8 \text{ et } \tan r = 0,75 \quad (r = 36,869^\circ)$

En $j, j = 90 - r$, soit $\cos j = 0,6, \sin j = 0,8$
 et $\tan j = 4/3$.

$H I = J H / \tan r = 4/3 \text{ cm.}$

$J B = 4 - 4/3 = 8/3 \text{ cm.}$

Le rayon arrive en K sur la face $B D$ avec un angle égal à r . $B K = J B \tan r = 2 \text{ cm}$. Il y a symétrie complète. Le rayon ressort sur la face $A C$, à 1 cm de C avec un angle d'émergence de 60° . Une partie du rayon $J K$ ressort en K avec un angle d'émergence de 60° .



14 Vitre d'un masque de plongée

* $\alpha + 90 - r + 90 + j = 180. \quad r = j + \alpha.$

* Le rayon ne peut se réfléchir en J car l'indice augmentant, il va d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent et le rayon se rapproche de la normale.

* En M , les angles limites correspondent à $m_0 = 90^\circ, k_0 = 41,81^\circ$.

En $J: n_1 \sin j_0 = n_2 \sin k_0. j_0 = 48,59^\circ$. L'émergence est rasante si $j = j_0$ et $\alpha = r_0 - j_0$.

* $i = 45^\circ, r = 32,04^\circ, j = 32 - 20 = 12^\circ$ et $m = 16,09^\circ$. Le rayon passe.

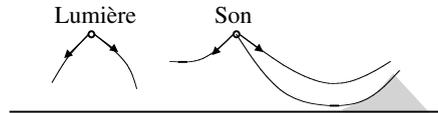
Pour que le rayon ne sorte pas, il faut dépasser la condition d'incidence rasante (soit $n_1 \sin j > 1$). Alors, $m > \pi/2$, soit $j > 48,6^\circ, j - r > 16,3^\circ$ et $\alpha < -16,3^\circ$, ce qui est impossible. Le rayon passe toujours.

15 Réfraction du son

1) 343,37 m/s et 299,58 m/s

2) 299916 km/s et 299 966 km/s

3) Dans le cas de la lumière, le rayon est courbé vers le bas. Quand le rayon descend, l'indice augmente, et il se rapproche de la verticale : il est de plus en plus vertical.



Dans le cas du son, c'est le contraire, la courbure est dirigée vers le haut, car l'indice diminue vers le bas (cas des mirages terrestres). Il y a une zone « d'ombre » à droite car le son est trop dévié pour arriver. Dans cette zone, la lumière de l'éclair nous parviendra mais sans le son du tonnerre.

CHAPITRE 3

LE PRISME

Pré-requis

Tout le contenu du chapitre 2, depuis les lois de Snell-Descartes jusqu'à l'étude du trajet d'un rayon se propageant vers un milieu plus ou moins réfringent.

Objectif

Nous proposons tout d'abord l'étude du trajet d'un rayon lumineux dans un prisme après réfraction à travers les faces d'entrée et de sortie, pour tous les angles d'incidence compris entre 0 et 90° . On en déduit ainsi les formules du prisme. Dans le cas où le rayon subit une réflexion sur la deuxième face, quelques dispositifs particuliers sont décrits.

1. DÉFINITIONS

Un prisme, souvent constitué de verre, est un milieu homogène, transparent et isotrope, limité par deux dioptries plans non parallèles, appelés les faces d'entrée et de sortie du prisme. Leur intersection forme l'arête du prisme, caractérisée par un angle A . Enfin, on appelle base du prisme, la troisième face, dont les bords sont généralement parallèles à l'arête. Elle se distingue souvent des deux autres faces car elle est dépolie. Dans ce cas, elle ne peut pas jouer le rôle de face d'entrée ou de sortie du prisme, et diffuse les rayons incidents. La représentation d'un prisme dans l'espace est donnée sur la figure 3.1.

On appelle **plan d'incidence** le plan formé par le rayon incident et la normale à la face d'entrée du prisme au point d'incidence. Nous savons qu'après avoir traversé le prisme, le rayon incident reste dans le plan d'incidence où il est dévié (voir chapitre 2). C'est pourquoi, dans toute la suite de ce livre, comme dans la plupart des ouvrages, le prisme sera généralement représenté en coupe dans ce plan.

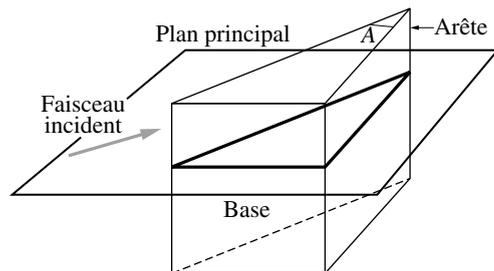


Figure 3.1 • Représentation du prisme d'angle A dans l'espace. On définit l'arête, la base et le plan principal perpendiculaire à l'arête.

Si le plan d'incidence est normal à l'arête du prisme, il constitue un plan principal du prisme et l'angle au sommet est égal à A (figure 3.2). Si le plan d'incidence n'est pas un plan principal, l'angle est différent de A . C'est une situation complexe que l'on n'envisagera pas dans cet ouvrage.

Notons que le sommet du prisme n'est pas toujours matérialisé (figure 3.2) ; le prolongement des deux faces peut aussi former un prisme d'angle A . Un hexagone, dont l'angle entre les arêtes vaut 120° , peut constituer un prisme d'angle $A = 60^\circ$.

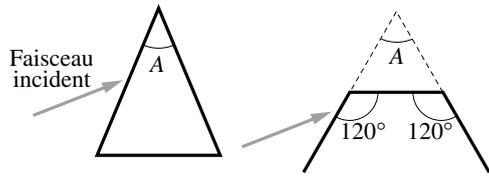


Figure 3.2 • Représentation du prisme d'angle A dans le plan principal.

2. INFLUENCE D'UN PRISME SUR LA MARCHÉ D'UN RAYON

2.1. Étude de la marche du rayon

Le chemin suivi par un rayon incident à travers un prisme est parfaitement décrit à partir des lois de Snell-Descartes appliquées à chaque changement de milieu, c'est-à-dire à chacune des deux faces rencontrées. L'indice absolu du prisme n , plus grand que 1, est supposé constant. Le prisme de verre est plongé dans un milieu extérieur d'indice n_0 et l'on pose $n_r = n/n_0$. Généralement, $n > n_0$ ($n_r > 1$). Par exemple, si le milieu extérieur est de l'air, on a $n_0 = 1$ et $n_r = n$.

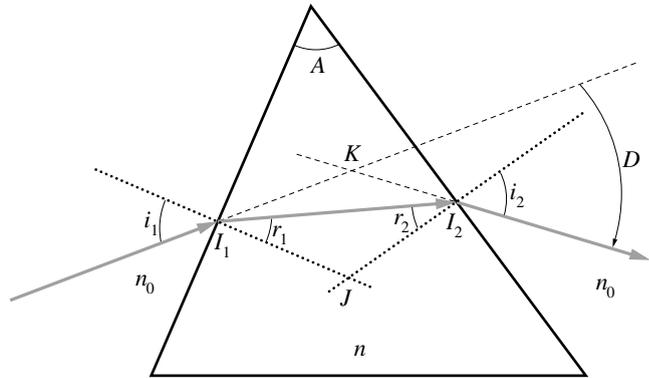


Figure 3.3 • Représentation de la marche d'un rayon dans un prisme et définition des différents angles formés par rapport aux normales aux deux faces rencontrées.

Considérons un rayon incident issu d'une source monochromatique (émettant une seule longueur d'onde λ) placé dans le plan principal. Il arrive sur le prisme en I_1 avec un angle d'incidence i_1 (figure 3.3), puis se réfracte. Le rayon réfracté I_1I_2 fait un angle r_1 avec la normale en I_1 , donné par $\sin i_1 = n_r \sin r_1$. Il existe toujours si $n_r > 1$ et se rapproche de la normale, ne pouvant pas dépasser une valeur limite $r_{1\text{lim}}$ donnée par $\sin r_{1\text{lim}} = 1/n_r$ et correspondant à $i_1 = 90^\circ$.

Le rayon I_1I_2 rencontre la face de sortie du prisme en I_2 avec un nouvel angle d'incidence r_2 par rapport à la normale. Il ne peut être réfracté que si et seulement si l'angle d'incidence sur la face de sortie r_2 est inférieur à l'angle limite $r_{2\text{lim}}$, donné par $\sin r_{2\text{lim}} = 1/n_r$. Le rayon sort alors du prisme en I_2 avec un angle i_2 par rapport à la normale, donné par $n_r \sin r_2 = \sin i_2$. Dans le cas contraire, le rayon I_1I_2 est totalement réfléchi vers la base. On traitera cette situation dans l'exercice 9.

Enfin, notons que, dans les triangles I_1I_2A ou I_1I_2J , on trouve simplement $r_1 + r_2 = A$ (l'angle I_1JI_2 étant égal à $\pi - A$).

Finalement, la théorie du prisme est contenue dans les trois formules suivantes :

Formules d'un prisme d'angle A :

$$\sin i_1 = n_r \sin r_1$$

$$\sin i_2 = n_r \sin r_2$$

$$r_1 + r_2 = A$$

avec $n_r = \frac{n}{n_0}$. i_1 , r_2 et r_1 , i_2 sont respectivement les angles d'incidence et de réfraction sur les faces d'entrée et de sortie du prisme (figure 3.3).

Ces formules permettent de déterminer complètement le trajet d'un rayon à travers un prisme, si l'angle du prisme A , l'indice de réfraction n_r et l'un des quatre angles sont connus (on a alors trois relations à trois inconnues indépendantes).

2.2. Déviation du prisme

Le trajet du rayon, représenté sur la figure 3.3, montre qu'il existe, de manière générale, une **déviation** d'angle D entre les rayons incident et sortant du prisme. Comme au chapitre 2, D est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon sortant (on dit aussi émergent). Il peut être déterminé analytiquement en examinant le triangle I_1I_2K , où l'on a la relation :

$$(i_1 - r_1) + (i_2 - r_2) + \pi - D = \pi \quad \text{soit} \quad D = i_1 + i_2 - A \quad (\text{car } r_1 + r_2 = A).$$

La déviation d'un rayon lumineux à travers un prisme, après réfraction sur deux faces, est :

$$D = i_1 + i_2 - A$$

Elle constitue la quatrième formule du prisme.

Dans le cas de figure traité ici où le rayon sort tout de suite du prisme, D est négatif. Ce point est abordé dans le paragraphe suivant.

3. ANALYSE DES FORMULES DU PRISME

Nous allons faire une analyse complète des quatre formules du prisme établies au paragraphe précédent en étudiant l'évolution des différents angles r_1 , r_2 , i_2 et D en fonction de l'angle d'incidence i_1 . Nous pourrions déterminer ainsi les conditions d'existence du rayon émergent. De plus, nous pourrions aussi montrer l'existence d'une valeur minimale de D appelée minimum de déviation.

3.1. Étude des différents angles du prisme et de la déviation en fonction de l'angle d'incidence

Cette étude nécessite la connaissance de l'angle A du prisme et de l'indice de réfraction n_r . Pour fixer les idées, nous allons présenter les résultats pour un prisme de verre

Tableau 3.1 • Valeurs numériques des différents angles r_1 , i_2 , r_2 et D pour $n_r = 1,5$ et $A = 60^\circ$, quand l'angle d'incidence i_1 varie de 0° à 90° .

i_1 (degrés)	r_1 (degrés)	r_2 (degrés)	i_2 (degrés)	D (degrés)
0	0	60	–	–
10	6,6	53,3	–	–
20	13,2	46,8	–	–
27,9	18,2	41,8	90	57,9
30	19,5	40,5	77,1	47,1
40	25,4	34,6	58,5	38,5
48,59	30	30	48,59	37,18
50	30,7	29,3	47,2	37,2
60	32,6	21,8	38,9	38,9
70	38,8	21,2	32,9	42,9
80	41,0	18,9	29,2	49,2
90	41,2	18,2	27,9	57,9

d'angle $A = 60^\circ$ pour lequel $n_0 = 1$ et $n' = n_r = 1,5$. Les valeurs des quatre angles r_1 , r_2 , i_2 et D sont rassemblées dans le tableau 3.1 lorsque i_1 est compris entre 0 et 90° . Les résultats sont exprimés en degrés par pas de 10° . Les tracés correspondants sont représentés sur la figure 3.4.

L'examen du tableau 3.1 et de la figure 3.4 sont très instructifs et suscitent les remarques suivantes :

- La courbe $i_2 = f(i_1)$ est symétrique par rapport à la bissectrice principale ; ceci est dû au principe du parcours inverse de la lumière (voir chapitre 2). Quand l'angle i_1 est petit, il n'y a pas de rayon émergent sur la deuxième face du prisme. On ne peut donc définir ni i_2 ni D . La condition d'émergence sera étudiée en détail au paragraphe suivant mais il est déjà possible d'indiquer le parcours d'un rayon incident à travers le prisme (figure 3.5), selon que l'angle d'incidence i_1 est grand ou petit.

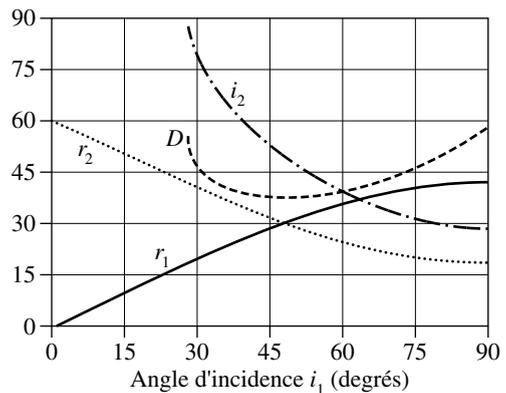


Figure 3.4 • Tracés de l'évolution des différents angles r_1 , i_2 , r_2 et D en fonction de i_1 pour $A = 60^\circ$ et $n_r = 1,5$.

• r_1 croît comme i_1 tout en restant inférieur. Il existe toujours, mais ne peut pas dépasser une valeur limite correspondant à $i_1 = 90^\circ$. De manière identique, en vertu du principe de retour inverse de la lumière, i_2 évolue comme r_2 tout en lui restant supérieur. Comme $r_1 + r_2 = A$, si r_1 et i_1 sont croissants, r_2 et i_2 sont décroissants.

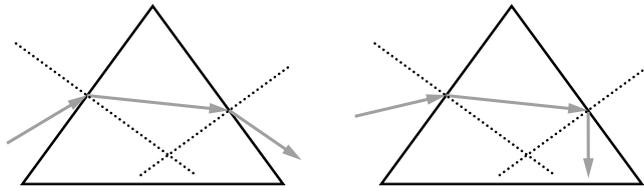


Figure 3.5 • Parcours à travers un prisme suivant que l'angle d'incidence i_1 est grand (le rayon émergent existe) ou petit (le rayon émergent n'existe pas).

• L'angle de déviation D est d'abord une fonction décroissante de l'angle d'incidence i_1 . Il change de comportement à partir d'une certaine valeur de i_1 et correspond alors à un angle de déviation D minimal autour duquel la courbe $D(i_1)$ varie moins. Le comportement de D est symétrique en i_1 et i_2 (ou r_1 et r_2), toujours en vertu du principe du retour inverse de la lumière. Par exemple, les couples (i_1, i_2) égaux à $(60; 38,9)$ et $(38,9; 60)$ donnent le même angle de déviation $D = 38,9^\circ$. Enfin, si l'on traçait pour différentes incidences i_1 le rayon émergent du prisme, on constaterait que la déviation a toujours lieu en direction de la base. Si l'on devait tenir compte de cette orientation, on écrirait $D < 0$.

3.2. Condition d'émergence

L'angle d'émergence i_2 n'existe pas si le rayon atteint la deuxième face avec un angle trop important, dépassant l'angle limite qui est donné par $\sin r_{2\text{lim}} = 1/n_r$ (soit, dans notre exemple $r_{2\text{lim}} = 41,8^\circ$). Les formules du prisme permettent de déterminer les valeurs correspondantes de r_1 et de i_1 . On a $r_{1\text{lim}} = A - r_{2\text{lim}} = 18,2^\circ$, soit $i_{1\text{lim}} = 27,9^\circ$. Il faut donc que l'angle d'incidence i_1 soit supérieur à cette valeur pour qu'un rayon sorte du prisme par la deuxième face. Plus généralement, on a :

$$r_{1\text{lim}} = A - \text{Arcsin}\left(\frac{1}{n_r}\right) \quad \text{et} \quad i_{1\text{lim}} = \text{Arcsin}\left[n_r \sin\left(A - \text{Arcsin}\left(\frac{1}{n_r}\right)\right)\right]$$

3.3. Déviation minimale

En observant le tableau 3.1 ou la figure 3.4, nous voyons bien que l'angle D passe par une valeur minimale, notée D_m , pour une certaine valeur de i_1 , comprise entre 0 et 90° . Nous allons montrer par deux méthodes différentes que la déviation d'un prisme passe par un extremum qui correspond bien à un minimum de déviation. Les deux démonstrations sont équivalentes, l'une utilisant la notion de différentielle et l'autre celle de dérivée. Pour le prisme considéré ici, le minimum de déviation est donné par la valeur $D_m = 37,18^\circ$ pour un angle d'incidence $i = 48,59^\circ$.

3.3.1. Première méthode (différentielle)

Pour une certaine valeur de i_1 correspondant à une déviation extrême, la différentielle de $D = i_1 + i_2 - A$ doit être nulle (A est une donnée intrinsèque du prisme) ; on a donc $dD = di_1 + di_2 = 0$, soit $di_1 = -di_2$. De la même façon, on peut aussi différentier

les trois autres formules du prisme. Ainsi, à partir de $A = r_1 + r_2$, on obtient $dr_1 = -dr_2$. Enfin, à partir des deux relations de Snell-Descartes $\sin i_1 = n_r \sin r_1$ et $\sin i_2 = n_r \sin r_2$, on obtient :

$$\cos i_1 di_1 = n_r \cos r_1 dr_1 \quad \text{et} \quad \cos i_2 di_2 = n_r \cos r_2 dr_2.$$

En divisant membres à membres ces deux dernières relations, et en utilisant les deux premières, on arrive à :

$$\cos i_1 \cos r_2 = \cos i_2 \cos r_1$$

En éliminant r_1 et r_2 à partir des relations de Snell-Descartes, on obtient l'équation reliant i_1 et i_2 :

$$(1 - \sin^2 i_1) \left(1 - \frac{1}{n_r^2} \sin^2 i_2\right) = (1 - \sin^2 i_2) \left(1 - \frac{1}{n_r^2} \sin^2 i_1\right)$$

Après simplification, on trouve :

$$(1 - n_r^2)(\sin i_1^2 - \sin i_2^2) = 0$$

La déviation passe par un extremum qui correspond donc à $i_1 = i_2 = i$. L'autre solution est $n_r = 1$; elle est sans intérêt car elle revient à considérer un prisme d'air : la propagation se fait alors toujours dans un même milieu, en ligne droite, sans déviation.

3.3.2. Deuxième méthode (dérivée)

A est une caractéristique du prisme, la seule variable étant i_1 . La valeur minimale de D peut donc être obtenue en annulant la dérivée de D par rapport à i_1 . Celle-ci s'écrit :

$$\frac{dD}{di_1} = 1 + \frac{di_2}{di_1}$$

De même en dérivant par rapport à i_1 la loi de Snell-Descartes écrite aux deux faces, on obtient :

$$\cos i_2 \frac{di_2}{di_1} = n_r \cos r_2 \frac{dr_2}{di_1} \quad \text{et} \quad \cos i_1 = n_r \cos r_1 \frac{dr_1}{di_1}$$

Comme par ailleurs $r_1 + r_2 = A \implies \frac{dr_2}{di_1} = -\frac{dr_1}{di_1}$, on obtient finalement :

$$\frac{dD}{di_1} = 1 - \frac{\cos r_2 \cos i_1}{\cos r_1 \cos i_2}$$

Comme précédemment cette dérivée s'annule si $i_1 = i_2 = i$, soit $r_1 = r_2 = r$.

En toute rigueur, pour s'assurer que cet extremum est bien un minimum, il faut déterminer le signe de la dérivée seconde de D à l'extremum. Un calcul simple, mais fastidieux, que nous ne donnerons pas ici permet de montrer que, en $i_1 = i_2 = i$ et $r_1 = r_2 = r$, $\frac{d^2D}{di_1^2} > 0$.

3.3.3 Formules du prisme au minimum de déviation

On a, au minimum de déviation : $i_1 = i_2 = i$, soit : $r_1 = r_2 = r$ et $D_m = 2i - A$.

Enfin, sachant que l'on a alors $\sin i = n_r \sin \frac{A}{2}$ (avec $A = 2r$), on peut aussi relier le minimum de déviation à l'angle A et écrire :

$$\sin \frac{D_m + A}{2} = n_r \sin \frac{A}{2}$$

Formules d'un prisme d'angle A au minimum de déviation. À la déviation minimale, le rayon incident traverse le prisme symétriquement et les rayons entrant et émergent font le même angle avec les normales aux faces. On a :

$$i = i_1 = i_2 \text{ et } r_1 = r_2 = \frac{A}{2} \text{ et } D_m = 2i - A \text{ avec } \sin i = n_r \sin \frac{A}{2}$$

L'angle du minimum de déviation D_m est aussi donné par : $\sin \frac{D_m + A}{2} = n_r \sin \frac{A}{2}$.

Avec le prisme étudié ($A = 60^\circ$ et $n_r = 1,5$) et au minimum de déviation, on a :

$$\sin i = 1,5 \times \sin 30^\circ \text{ soit : } i = 48,59^\circ \text{ et } r = 30^\circ \text{ d'où : } D_m = 2i - A = 37,18^\circ$$

Celui-ci peut être donné aussi par $\frac{D_m + A}{2} = 48,59^\circ$. Notons que le trajet du rayon est alors symétrique par rapport à la hauteur du prisme passant par A .

4. INFLUENCE DE L'ANGLE A DU PRISME SUR L'ANGLE DE DÉVIATION D

Nous avons vu que la déviation du prisme s'exprimait comme $D = i_1 + i_2 - A$ et qu'elle passait par un minimum donné par $D_m = 2i - A$ avec $i = i_1 = i_2$. La figure 3.6 donne les variations de D en fonction de l'angle d'incidence i_1 pour différentes valeurs de l'angle du prisme A .

Différentes remarques s'imposent. Tout d'abord, on observe sur la figure 3.6 que, lorsque A diminue, la zone autour du minimum de déviation est de plus en plus large et dépend peu de l'angle d'incidence i_1 . Ainsi, en incidence quasi normale (i_1 petit) et pour A très petit, la déviation D est pratiquement constante. Elle devient alors indépendante de l'angle d'incidence i_1 .

Ceci peut être vérifié analytiquement. En effet, pour un prisme de petit angle A , les angles de réfraction et d'incidence étant petits (inférieurs à 20°), les formules du prisme se simpli-

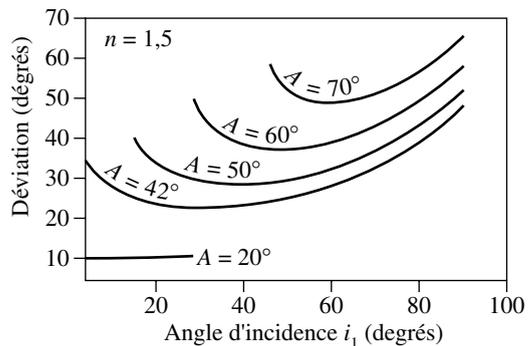


Figure 3.6 • Influence de l'angle A du prisme sur l'angle de déviation D .

fient : $i_1 = n_r r_1$, $i_2 = n_r r_2$ avec $r_1 + r_2 = A$, et donc $D = n_r r_1 + n_r r_2 - A = A(n_r - 1)$. Ainsi, D est aussi un petit angle, proportionnel à A (typiquement inférieur à 30°) et indépendant de l'angle d'incidence i_1 . Le minimum de déviation est alors donné par :

$$\frac{D_m + A}{2} = n_r \frac{A}{2} \implies D_m = D = A(n_r - 1)$$

On établit ainsi une première propriété intéressante :

Dans le cas d'un prisme de petit angle A , un rayon de lumière à incidence quasi normale dans le plan principal subit une déviation constante, $D = A(n_r - 1)$ égale au minimum de déviation.

Au contraire le minimum de déviation se creuse au fur et à mesure que A augmente mais on ne peut plus tracer D au-delà d'un certain angle A .

En fait, la condition d'existence de D est, nous le savons, liée à celle de i_2 . Si l'on se trouve en réfraction limite, $r_2 = r_{2\text{lim}}$ ($\sin r_{2\text{lim}} = 1/n_r$) et $r_1 = A - r_{2\text{lim}} = r_{1\text{lim}}$. L'angle d'émergence i_2 et la déviation D n'existent que si $r_2 < r_{2\text{lim}}$ soit $r_1 > A - r_{2\text{lim}}$. D'autre part, si le rayon lumineux peut toujours pénétrer dans le prisme par la première face, il existe un angle de réfraction limite donné par $1 = n_r \sin r_{1\text{lim}}$, qui est le même que l'angle de réfraction limite sur la deuxième face. On a donc toujours $r_1 < r_{2\text{lim}}$.

Les deux conditions obtenues sur r_1 ne donnent de solution que si $A - r_{2\text{lim}} < r_{2\text{lim}}$ soit $A < 2r_{2\text{lim}}$ soit encore : $A < 2 \operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{n_r} \right)$. Par exemple, si $n_r = 1,5$, il faut $A < 83,62^\circ$.

Finalement, on établit ainsi une deuxième propriété intéressante :

Dans un prisme d'angle A , la déviation et donc le rayon émergent n'existent que si :

$$A < 2 \operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{n_r} \right)$$

5. APPLICATION AUX MESURES DE L'INDICE ABSOLU D'UN MILIEU

La grandeur essentielle caractérisant un milieu transparent étant son indice absolu, sa détermination précise est capitale. L'existence du minimum de déviation est à l'origine d'une méthode permettant de mesurer les indices de réfraction tels qu'ils sont définis dans le cadre du formalisme de l'optique géométrique. Cela suppose que le matériau auquel on s'intéresse (par exemple un verre) puisse être taillé sous forme de prisme. Dans le cas où l'on veut mesurer l'indice de réfraction d'un liquide, on peut en remplir une cellule prismatique creuse et transparente, dont les parois, agissant comme des faces à lames parallèles, ne changent pas les valeurs des angles en jeu. Nous traitons à titre d'exemple le cas d'un prisme de verre.

5.1. Détermination de la valeur de l'indice absolu d'un verre

Le prisme de verre est placé sur une platine tournante graduée de 0 à 360 degrés, appelée goniomètre. Le prisme est éclairé par une source fixe S , considérée monochromatique dans un premier temps, équipée d'une fente fine. Une lentille, le collimateur, donne une image de l'ensemble à l'infini. Le principe de la méthode revient à déterminer l'indice absolu du prisme en recherchant visuellement le minimum de déviation pour la radiation utilisée et en appliquant la relation :

$$\sin \frac{D_m + A}{2} = n_r \sin \frac{A}{2}$$

A est une caractéristique du prisme que l'on peut mesurer expérimentalement. Pour cela, on repère tout d'abord les normales aux faces du prisme par une méthode d'autocollimation : cela consiste à éclairer chacune des deux faces du prisme en incidence normale. Dans ce cas seulement, les rayons réfléchis par les faces d'entrée sont superposés aux rayons incidents. On peut alors déterminer sur le goniomètre l'angle $\pi - A$ que font entre elles chacune des normales aux 2 faces du prisme (figure 3.7).

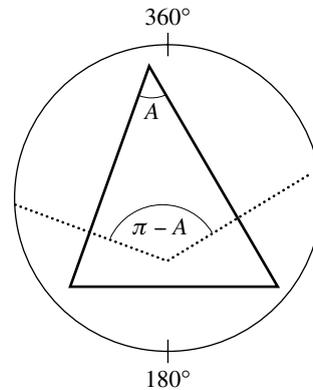


Figure 3.7 • Les deux directions des rayons en réflexion normale sur les deux faces du prisme forment entre elles un angle égal à $\pi - A$. On peut ainsi mesurer l'angle A du prisme.

L'évolution de l'angle D est connue grâce à l'étude simultanée de i_1 et i_2 . Tant que le minimum de déviation n'est pas atteint, lorsque i_1 croît, i_2 et D évoluent dans le même sens. Pour une certaine valeur d'incidence i_1 , D diminue, évolue moins, puis croît à nouveau. Ce changement d'évolution marque le passage au minimum de déviation D_m . D_m peut être repéré visuellement, puis mesuré sur le goniomètre en mesurant la déviation du rayon réfracté par rapport au rayon incident, préalablement repéré en absence de prisme. L'indice de réfraction, et donc l'indice absolu n , sont alors déterminés à partir de la formule précédente pour la longueur d'onde de la source utilisée. Par cette méthode, la précision de la mesure est excellente puisque, dans bien des cas, elle est de l'ordre de 10^{-4} . Elle est cependant conditionnée par l'homogénéité du matériau, la planéité des faces du prisme et la précision de lecture accessible sur le goniomètre.

5.2. Étude de la loi de dispersion de l'indice d'un verre : $n(\lambda)$

Si l'on utilise plusieurs sources monochromatiques, chacune ayant une longueur d'onde déterminée, on peut reproduire la méthode précédente pour chacune des sources et en déduire la variation de l'indice absolu en fonction de la longueur d'onde. On étudie ainsi la dispersion du prisme, notion abordée au chapitre 1 avec la loi de Cauchy. Nous verrons plus loin en quoi certains phénomènes naturels découlent directement de cette dispersion. Cette étude peut être aussi menée simultanément avec une source polychromatique étalonnée, les rayons de différentes longueurs d'onde ne se propageant pas de la même façon dans le prisme. Ainsi on observe en sortie des rayons émergents dans des directions différentes directement reliées à la valeur de λ ; la mesure du minimum de déviation pour chaque longueur d'onde permet d'établir la loi $n(\lambda)$.

Rappelons que la loi de Cauchy s'écrit :

$$n(\lambda) = A_1 + \frac{B_1}{\lambda^2}$$

Considérons un spectre continu issu d'une source émettant de la lumière blanche. Quand la longueur d'onde augmente, l'indice de réfraction diminue et la réfraction devient moins importante. Les petites longueurs d'onde, perçues comme du bleu ($\lambda \approx 400 \text{ nm}$), sont donc plus dispersées que les grandes longueurs d'ondes, perçues comme du rouge ($\lambda \approx 750 \text{ nm}$) ; on observe donc que les petites longueurs d'ondes sont plus déviées par le prisme que les grandes.

On peut justifier analytiquement cette observation : considérons en effet de la lumière blanche arrivant sur un prisme d'angle A , avec un angle d'incidence i_1 . La variation de D en fonction de la longueur d'onde permet d'accéder à celle de l'indice $n(\lambda)$. La différence fondamentale avec l'étude précédente est la nature de la variable car cette fois, l'angle i_1 est constant et c'est n qui varie.

On peut obtenir l'expression analytique permettant d'accéder à la variation de D en différenciant les quatre formules du prisme avec i_1 et A constants :

$$\sin i_1 = n_r \sin r_1 \implies 0 = dn_r \sin r_1 + n_r \cos r_1 dr_1$$

$$r_1 + r_2 = A \implies dr_1 + dr_2 = 0$$

$$\sin i_2 = n_r \sin r_2 \implies \cos i_2 di_2 = dn_r \sin r_2 + n_r \cos r_2 dr_2$$

$$D = i_1 + i_2 - A \implies dD = di_2$$

Les trois premières différentielles permettent d'exprimer di_2 puis dD en fonction de dn_r .

$$di_2 = \frac{dn_r \sin r_2 + n_r \cos r_2 dr_2}{\cos i_2} = \frac{dn_r \sin r_2 - n_r \cos r_2 dr_1}{\cos i_2}$$

Or :

$$n_r dr_1 = -dn_r \frac{\sin r_1}{\cos r_1}$$

$$d'où : dD = di_2 = \frac{dn_r}{\cos r_1 \cos i_2} (\sin r_2 \cos r_1 + \sin r_1 \cos r_2) = \frac{dn_r}{\cos r_1 \cos i_2} \sin (r_1 + r_2)$$

Finalement :

$$dD = \frac{dn_r}{\cos i_2 \cos r_1} \sin A$$

En différenciant l'expression de n_r dans la loi de Cauchy énoncée précédemment ($n_r = n$ car on suppose l'indice extérieur égal à 1) on obtient dD en fonction de $d\lambda$:

$$dn_r = dn = -\frac{2B_1}{\lambda^3} d\lambda$$

et :

$$dD = -\frac{2B_1}{\lambda^3} \frac{\sin A}{\cos r_1 \cos i_2} d\lambda$$

On retrouve analytiquement qu'à la sortie du prisme, les différentes radiations sortent bien dans des directions différentes. Si λ augmente, $d\lambda > 0$ et $dD < 0$; la déviation diminue. Ceci montre bien que les radiations de petite longueur d'onde (comme $\lambda \approx 400 \text{ nm}$, perçues comme du bleu) sont plus déviées que les radiations de grande longueur d'onde (comme $\lambda \approx 750 \text{ nm}$, perçues comme du rouge). Si l'on place un écran dans le faisceau sortant, on y verra donc le rouge en haut et le bleu en bas (figure 3.8(a)).

Au contraire, si l'on place l'œil ou un détecteur dans le faisceau, on y verra le **bleu en haut et le rouge en bas**, comme sur la figure 3.8(b). Ainsi, le rayon bleu, plus incliné que le rouge, semble arriver dans l'œil au-dessus du rouge. Ceci est dû au fait que l'écran reçoit les rayons mais l'œil leurs images. Nous développerons ce point au chapitre 4.

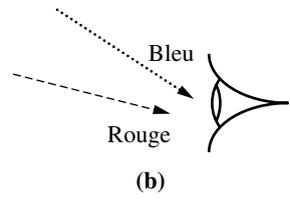
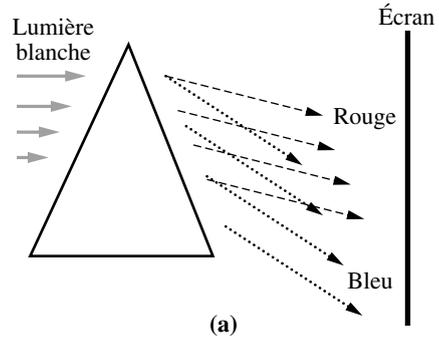


Figure 3.8 • Les différentes couleurs sont « vues » (b) dans un ordre qui semble en contradiction avec l'étalement des couleurs à la sortie du prisme (a).

Tableau 3.2 • Indices et angles de déviation minimum dans un prisme de verre d'angle $A = 60^\circ$ pour différentes longueurs d'onde.

Longueur d'onde (nm)	Indice	D_{\min}
400	1,5242	39,3
600	1,5095	38
800	1,5043	37,5

La figure 3.9 présente les courbes de déviation observées à travers un prisme de verre pour trois longueurs d'onde différentes ($\lambda = 400, 600$ et 800 nm). Le tableau 3.2 indique les indices correspondants ainsi que la valeur de la déviation minimale dans les trois cas. Les calculs ont été faits dans le cas du verre en utilisant les coefficients de Cauchy donnés dans le tableau 1.2 du chapitre 1.

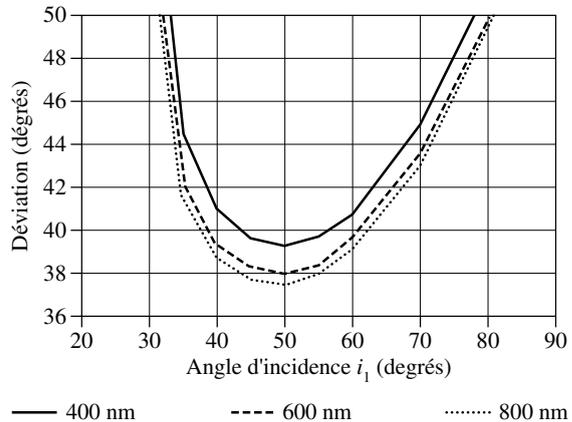


Figure 3.9 • Déviation par un prisme de verre de rayons de longueurs d'onde différentes.

Ces résultats illustrent l'intérêt de travailler au minimum de déviation pour mesurer l'évolution de l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde. D'une

manière générale, on peut voir sur la courbe 3.9 que, tant que l'on reste près du minimum de déviation, les couleurs restent relativement bien séparées. Elles sont donc bien distinguables sur l'écran. Par exemple, pour 800 nm (l'observation se fait alors à 38°), seule cette couleur apparaît sur l'écran car les autres longueurs d'onde sont davantage déviées et ne peuvent être observées dans cette direction. Il est alors possible de mesurer précisément l'angle de déviation minimum, et donc l'indice du verre pour 600 nm.

On notera par ailleurs que la déviation tracée sur la figure 3.9 varie beaucoup plus vite en fonction de la longueur d'onde lorsque l'angle d'incidence est proche de l'angle limite. Ceci est bien visible si l'on compare l'écart entre les trois courbes présentées sur la figure selon que l'on trace une verticale au minimum de déviation ou près de l'angle limite. On travaillera donc plutôt à incidence proche de l'angle limite lorsqu'il s'agira de séparer des longueurs d'onde assez différentes d'un faisceau polychromatique.

6. PRISMES À RÉFLEXION TOTALE

Nous avons étudié dans ce chapitre un prisme dont la base, dépolie, ne permettait pas de laisser sortir le rayon et n'était donc pas exploitable. Ainsi, le rayon émergent, qui ne peut sortir que par la deuxième face, n'existe que pour certaines incidences (voir figure 3.5). Il est alors dévié par rapport au rayon incident d'une quantité $D = i_1 + i_2 - A$.

Si la base du prisme est polie comme les deux autres faces, on peut exploiter la situation de réflexion totale sur la deuxième face du prisme. Ainsi, le rayon peut sortir par exemple de la base. On peut donc à nouveau définir une déviation entre le faisceau incident et le nouveau faisceau émergent qui s'exprime différemment (voir exercices) et qui est généralement plus importante qu'avec deux faces actives (figure 3.10). Un prisme utilisé dans de telles conditions est appelé prisme à réflexion totale.

Dans les instruments d'optique, ces prismes sont largement utilisés, comme redresseurs d'images par exemple, où ils remplacent les miroirs plus onéreux. Nous allons en citer quelques exemples.

Quelques phénomènes naturels, les faux soleils et l'arc-en-ciel, sont présentés dans les encarts 3.1 et 3.2.

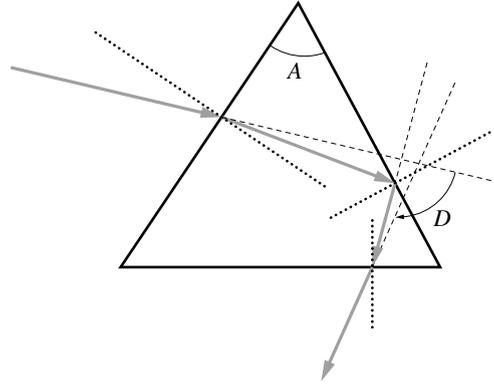


Figure 3.10 • Principe des prismes à réflexion totale.

Encart 3.1. Les « faux-soleils »

Au-dessus de 5 000 m d'altitude, l'eau est intégralement composée de cristaux de glace formant de petits prismes à base hexagonale parfois de faible épaisseur (on parle alors de plaquettes). Si l'on fait une coupe d'un de ces cristaux, on obtient un hexagone régulier. Entre deux faces adjacentes, l'angle est de 120° .

En raison de la pesanteur, les cristaux tombent lentement vers le sol, leurs grandes faces étant horizontales. Un rayon venant du soleil et entrant dans un cristal de glace ne peut donc pas sortir par la face adjacente et sort par la face suivante, comme s'il rencontrait un prisme d'angle $A = 60^\circ$ (figure 3.11). La figure 3.12 donne l'évolution de la déviation en fonction de l'angle d'incidence au voisinage du minimum de déviation. Dans le cas des cristaux de glace ($n = 1,31$ et $A = 60^\circ$), D_{\min} est égal à $21,8^\circ$. Tous les rayons dont l'incidence est comprise entre 30 et 40° subissent quasiment la même déviation ($36,12^\circ < D < 38,46^\circ$ et $\Delta D = 2^\circ$). Il y a donc augmentation d'intensité.

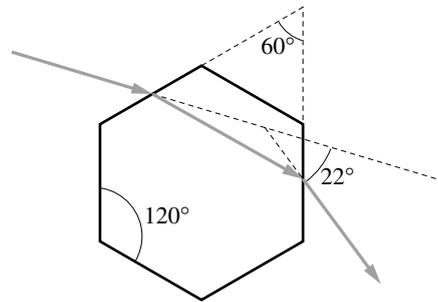


Figure 3.11 • Coupe d'un cristal de glace.

C'est ainsi que, dans certaines directions, on voit une accumulation de lumière. Les cristaux se trouvant dans un cône situé à 22° du Soleil nous renvoient donc plus de lumière que les autres. Quand le phénomène est complet, on voit un halo lumineux à 22° de part et d'autre du Soleil ; le halo est souvent réduit à deux taches isolées situées de chaque côté du Soleil. On les appelle les « faux soleils » ou **parhélies**.

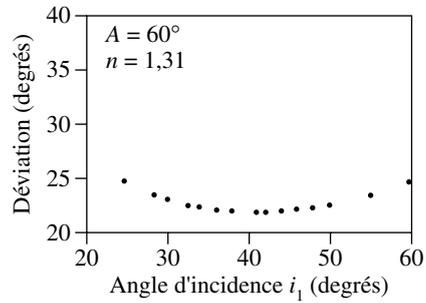


Figure 3.12 • Évolution de la déviation au voisinage de son minimum.

Encart 3.2. L'arc-en-ciel

Celui-ci apparaît quand la lumière du soleil tombe sur les gouttes de pluie dans la partie opposée au Soleil par rapport à un observateur. On voit alors totalement ou partiellement un ou plusieurs arcs concentriques présentant les couleurs du spectre solaire. On les observe généralement sous de gros nuages ou lorsqu'une averse est immédiatement suivie d'une éclaircie. Il n'est pas rare d'en voir dans des chutes d'eau, des fontaines, des embruns de vagues, des gouttes de rosée dans l'herbe...

René Descartes fut la première personne à donner, en 1637, une explication satisfaisante de l'arc-en-ciel. S'étant rendu compte que la forme de l'arc-en-ciel était indépendante de la taille des gouttes, il étudia le passage de la lumière à travers une grosse goutte. Son expérience lui permit de conclure que la lumière entrant dans la goutte d'eau sphérique était réfléchi sur la paroi interne de la goutte, puis en sortait. Il fut cependant incapable d'expliquer la présence des différentes couleurs. C'est 30 ans plus tard qu'Isaac Newton comprit que la lumière blanche était un mélange de couleurs et que les gouttes d'eau dispersaient ces couleurs pour former l'arc-en-ciel.

Lorsque la lumière solaire rencontre des gouttelettes de pluie, la plupart des rayons lumineux sont réfractés dans chaque gouttelette, réfléchis une ou plusieurs fois à l'intérieur et réfractés une seconde fois. L'indice variant avec la longueur d'onde, un phénomène de dispersion des couleurs, caractéristique principale de l'arc-en-ciel, apparaît.

Le traitement théorique de ce phénomène est détaillé dans l'exercice 8 du chapitre 2. On peut remarquer qu'il existe un rayon qui, frappant la goutte, émerge à un angle maximum. Ce rayon est appelé « rayon de Descartes ». Tout autre rayon frappant la goutte au-dessus ou en dessous de ce dernier émerge avec un angle voisin de celui du rayon de Descartes. Il y a alors une concentration des rayons émergents à un angle proche de 42° , ce qui produit le phénomène de l'arc-en-ciel. La figure 3.13 en présente le principe.

Ces rayons ne subissent qu'une réflexion et engendrent l'arc primaire. D'autres subissent deux réflexions ; c'est l'arc secondaire, nettement moins intense et dont la séquence de couleurs est inversée par rapport à l'arc primaire.

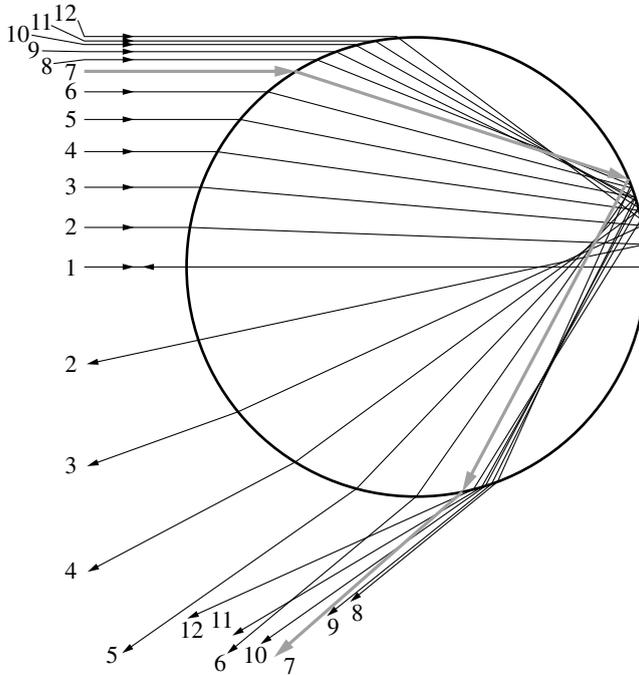


Figure 3.13 • Parcours de rayons lumineux à travers une goutte d'eau.
Le rayon numéro 7 est le rayon de Descartes.

6.1. Prisme isocèle à angle droit

Ces prismes ont deux côtés égaux. L'angle A vaut 90° de telle manière qu'un rayon en incidence normale sur l'une des faces du prisme frappe l'hypoténuse avec un angle de 45° ; il est alors en réflexion interne totale. En effet, si $n = 1,5$, l'angle limite est donné par $r_{\text{lim}} = 41,8^\circ$. Le rayon ressortant normal à l'autre face du prisme a subi une déviation totale de 90° (figure 3.14). De tels prismes peuvent être utilisés comme des miroirs dans lesquels l'intégralité du faisceau est réfléchi (la précision sur l'angle existant entre le faisceau incident et le faisceau ressortant est absolue). L'ensemble de deux de ces prismes provoque un retour à 180° ; c'est ce dernier procédé qui est utilisé dans les jumelles.

Si l'on accole deux prismes isocèles à angle droit selon leur hypothénuse, on peut constituer un système de **prismes en réflexion interne frustrée** (FTIR) discuté dans l'encart 3.3.

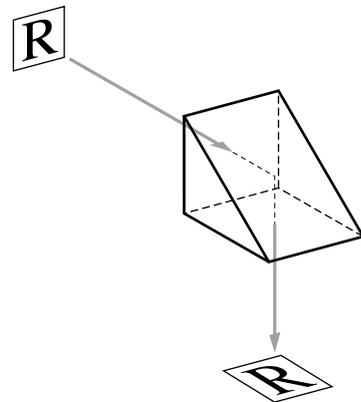


Figure 3.14 • Le prisme isocèle à angle droit.

Encart 3.3. Système de prismes à réflexion totale interne frustrée (prismes FTIR)

Soit un prisme isocèle à angle droit. Si l'on considère la structure électromagnétique de l'onde, on peut rendre compte, de l'autre côté de la surface du prisme où le faisceau est en réflexion totale, de l'existence d'une onde dite évanescente, dont l'amplitude décroît exponentiellement au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la surface. Son amplitude est déjà négligeable sur une distance d'une longueur d'onde. La profondeur de pénétration est la distance sur laquelle l'amplitude de l'onde est encore détectable. Cette onde « imaginaire » n'existe que lorsque l'on est en condition de réflexion totale.

Considérons deux prismes isocèles à angle droit identiques accolés par leur hypoténuse pour former un cube ; un système de translation mécanique permet de régler l'épaisseur de la pellicule d'air existant entre les deux prismes (figure 3.15). Si l'on rapproche les deux prismes de manière à ce que la distance entre les hypoténuses soit comparable à la profondeur de pénétration de l'onde évanescente, une certaine quantité d'énergie peut alors franchir la barrière d'air. On dit qu'on a réalisé un contact optique. Le système peut ainsi « frustrer » plus ou moins continûment la réflexion interne totale dans le premier prisme et transmettre une partie du faisceau à travers le deuxième prisme. Une modification de l'écart entre deux prismes influe sur l'amplitude de l'onde transmise.

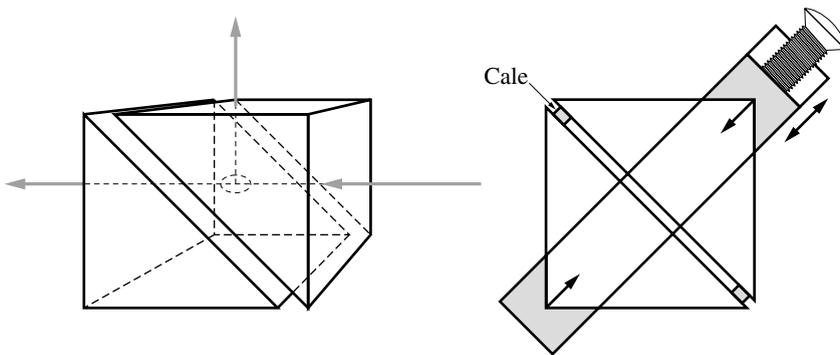


Figure 3.15 • Cube séparateur à pouvoir de réflexion (ou de transmission) continûment ajustable de 0 à 100%.

On constitue ainsi un cube séparateur dont le pouvoir de réflexion, ou de transmission, est continûment ajustable de 0 à 100%. À lui seul, ce système joue le rôle de tout un ensemble de lames séparatrices à coefficient de réflexion, ou de transmission, fixe situé entre 0 et 100%. On peut noter pour terminer que, dans un FTIR, la dispersion d'indice produite par le premier prisme est compensée par celle du deuxième.

6.2. Prisme d'Amici

C'est un prisme à angle droit dont l'hypoténuse a été remplacée par une arête à 90° sur laquelle il y a réflexion interne. Il a une forme compliquée et permet d'inverser simultanément la gauche et la droite d'une part, le haut et le bas d'une image d'autre part.

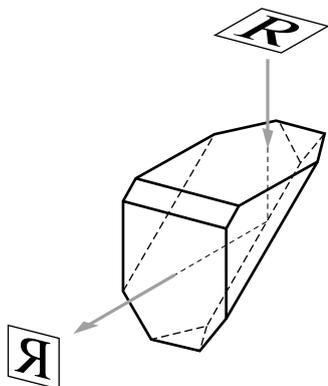


Figure 3.16 • Le prisme d'Amici.

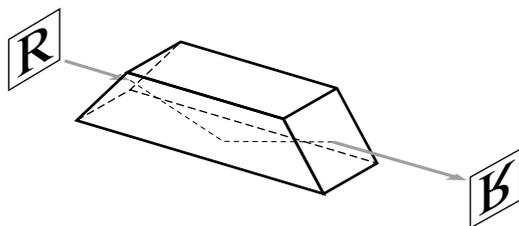


Figure 3.17 • Le prisme de Dove.

6.3. Prisme de Dove

Ces prismes servent en général à tourner une image, tout en conservant le même sens de propagation. La longueur du prisme est typiquement cinq à six fois plus importante que sa largeur. L'hypoténuse, qui correspond à la plus grande face, est utilisée en réflexion totale. Du fait de la géométrie du système, les faces d'entrée et de sortie se comportent de façon totalement symétrique l'une par rapport à l'autre ; dans ces conditions, l'angle d'incidence sur la face d'entrée est égal à l'angle de sortie sur la deuxième face.

6.4. Rétroreflécteur solide

Ce prisme, appelé aussi coin de cube, réfléchit un faisceau dans une direction exactement parallèle à celle du faisceau incident, mais dans un sens opposé. Dans un tel système, seule la propriété de réflexion est utilisée. Ce prisme peut être très utile quand, lors d'un déplacement, un parallélisme extrêmement précis entre les faisceaux incident et réfléchi est nécessaire. Aucun pré réglage sur l'orientation du prisme n'est nécessaire. De tels systèmes équipent la plupart des instruments de géomètre et on en trouve de nombreuses applications : réflecteurs radar des bateaux, réflecteurs laser déposés sur la Lune par les missions Apollo...

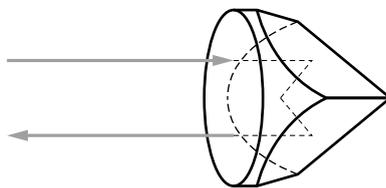


Figure 3.18 • Les rétroreflécteurs solides.

Ces rétroreflécteurs solides sont introduits sous forme de microbilles dans la peinture utilisée pour tracer les lignes blanches des routes. Elles permettent ainsi de réfléchir les phares des voitures, et sont donc visibles de nuit.

À RETENIR

- Un **prisme** est un milieu homogène transparent et isotrope (constitué de verre, d'eau...) limité par deux plans non parallèles appelés faces du prisme. Leur intersection forme l'arête du prisme caractérisée par l'angle A . La base du prisme est la troisième face. Généralement, le prisme est représenté en coupe dans le plan principal qui contient les rayons incidents et réfractés (voir figure 3.3).

$$\sin i_1 = n_r \sin r_1$$

- **Formules du prisme :** $\sin i_2 = n_r \sin r_2$
 $r_1 + r_2 = A$

avec $n_r = \frac{n}{n_0}$

- Si le rayon est réfracté par la deuxième face, il existe entre le rayon incident et le rayon sortant du prisme un angle de **dévi**ation D , angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent.

Déviation du prisme :

$$D = i_1 + i_2 - A$$

- Pour un prisme de grand angle A , la déviation D et l'angle d'émergence n'existent que si :

$$A < 2 \operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{n_r} \right)$$

La déviation passe par un minimum pour un certain angle d'incidence i , donné par :

$$i = i_1 = i_2 \quad \text{et} \quad r_1 = r_2 = \frac{A}{2} \quad \text{et} \quad D_m = 2i - A \quad \text{avec} \quad \sin i = n_r \sin \frac{A}{2}$$

La valeur du minimum de déviation D_m est aussi donnée par :

$$\sin \frac{D_m + A}{2} = n_r \sin \frac{A}{2}$$

- Dans le cas d'un prisme de petit angle A , un faisceau de lumière à incidence quasi-normale subit une déviation constante, égale au minimum de déviation donné par :

$$D = D_m = A(n_r - 1)$$

La connaissance expérimentale de cet angle minimum D_m permet de remonter à la valeur de l'indice absolu du prisme et d'étudier la loi de dispersion $n(\lambda)$.

- Si le rayon incident est totalement réfléchi par la deuxième face du prisme (prisme à réflexion totale), il peut émerger par la base si cette dernière n'est pas dépolie.

QCM

1 Déterminer, à partir des formules du prisme, l'angle d'émergence i_2 si $i_1 = 40^\circ$ ($A = 60^\circ$ et $n_r = 1,5$)

- (1) $58,45^\circ$
 (2) $38,5^\circ$
 (3) $49,2^\circ$

2 Comment évolue l'angle de déviation D quand l'angle d'incidence croît ?

- (1) D est strictement monotone croissante.
 (2) D est strictement monotone décroissante.
 (3) D décroît, passe par un minimum, puis croît.

3 Le rayon émergent du prisme par la deuxième face de sortie

- (1) existe toujours quelle que soit la valeur de l'angle d'incidence.
 (2) existe si l'angle d'incidence est supérieur à une valeur limite.
 (3) existe si l'angle d'incidence est inférieur à une valeur limite.

4 Déterminer l'angle d'incidence limite en deçà duquel le rayon ne peut pas sortir par la deuxième face de sortie du prisme ($A = 60^\circ$ et $n_r = 1,5$)

- (1) $13,4^\circ$
 (2) $27,9^\circ$
 (3) $31,2^\circ$

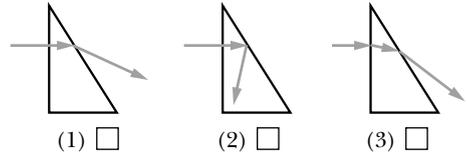
5 Dans le prisme d'angle $A = 60^\circ$, $n_r = 1,5$, que vaut la déviation minimale ?

- (1) $20,5^\circ$
 (2) $37,2^\circ$
 (3) $42,5^\circ$

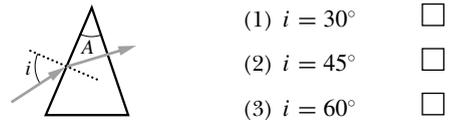
6 Pour quelles valeurs de l'angle A , le rayon peut-il sortir d'un prisme d'indice $n = 3/2$ par la deuxième face ?

- (1) Pour toutes les valeurs de A
 (2) Pour $A < 83,6^\circ$
 (3) Pour $A < 41,3^\circ$

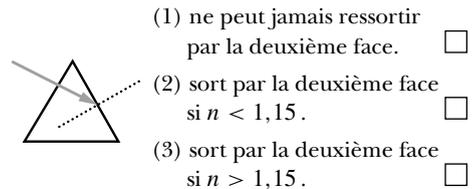
7 Quel est le bon trajet dans ce prisme ($A = 30^\circ$, $n_r = 1,5$) ?



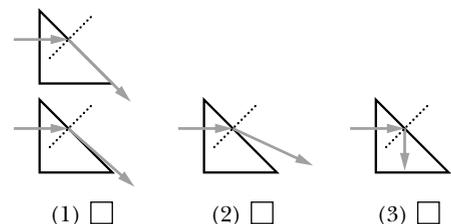
8 Avec le prisme suivant ($n = 3/2$ et $\sin A = 1/3$), quel est l'angle d'incidence ?



9 Le rayon qui arrive perpendiculairement à la face d'entrée d'un prisme équilatéral d'indice n



10 Un rayon perpendiculaire à la face d'entrée d'un prisme de verre ($n = 1,5$) placé dans l'air ressort tangentiellement à la deuxième face. Il est maintenant placé dans l'eau ($n' = 1,33$). Quel est le bon trajet parmi les schémas (1), (2) ou (3) ?



Réponses : 1. 1, 2. 3, 3. 2, 4. 2, 5. 2, 6. 2, 7. 1, 8. 1, 9. 2, 10. 2

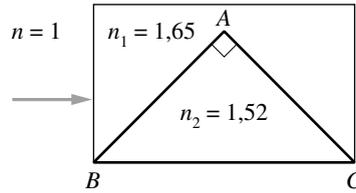
EXERCICES

1 Un prisme de verre d'indice $n_2 = 1,52$ dont la section principale est un triangle rectangle isocèle (angle $A = 90^\circ$) est placé dans une cuve contenant du sulfure de carbone d'indice $n_1 = 1,65$.

a) Un rayon arrive parallèlement à la base BC du prisme et normalement à la paroi de la cuve. Construire sommairement la marche du rayon et calculer la déviation finale à la sortie de la cuve D .

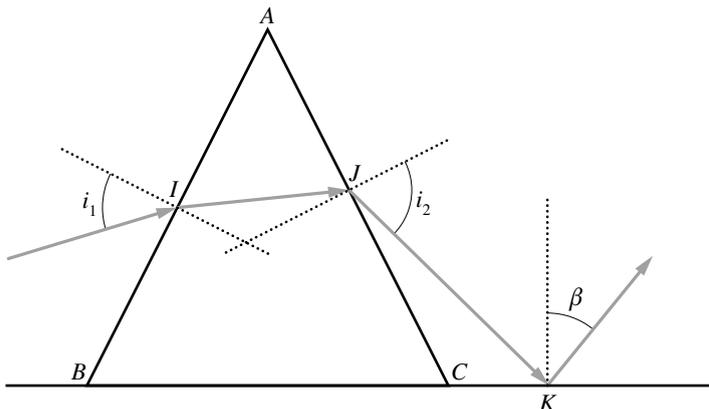
b) En jouant sur les conditions de pression et de température on fait varier l'indice n_1 de $dn_1 = +0,02$. À l'aide d'un calcul différentiel dire de combien et dans quel sens varie l'angle de déviation à la sortie du prisme.

c) La cuve est vidée et contient maintenant de l'air d'indice $n_1 = 1$. Le rayon incident arrive toujours parallèle à la base du prisme et normalement à la paroi de la cuve. Calculer la nouvelle déviation finale D' . Le rayon sort-il par la même paroi de la cuve ?

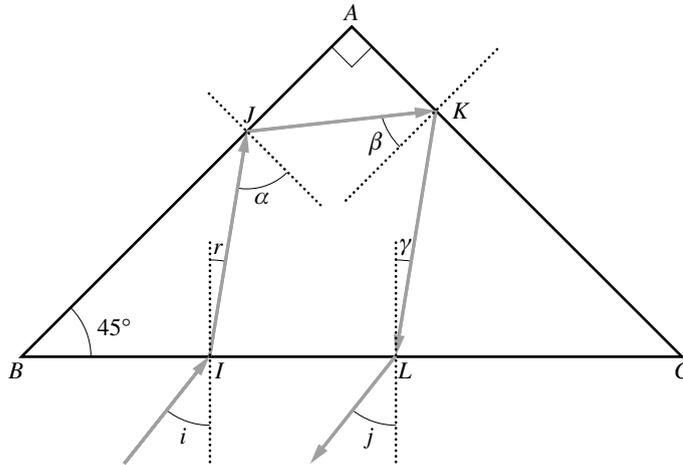


2 a) Un prisme isocèle d'angle au sommet A repose par sa base BC sur un miroir. L'indice de réfraction est $n = 1,5$. Un rayon incident en I avec un angle i_1 ressort du prisme en J sous un angle i_2 . Le rayon sortant se réfléchit en K sur le miroir avec un angle de réflexion β . Exprimer β en fonction de i_2 et A . Exprimer la déviation D due au prisme en fonction de i_1 , i_2 et A et en déduire l'expression de la déviation finale D' en fonction de i_1 et i_2 . Dans quelle condition la déviation D' est-elle nulle ?

b) Calculer r_1 , r_2 , i_2 , D et D' pour $i_1 = 45^\circ$ ($A = 60^\circ$).

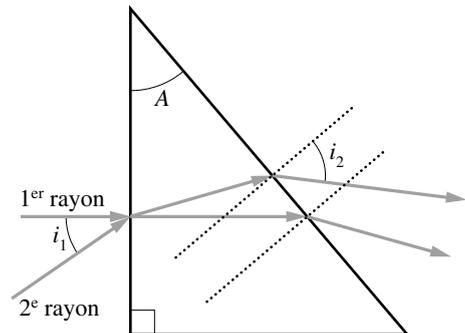


- 3** On considère un prisme ABC isocèle et rectangle en A , d'indice $n = 1,5$. Un rayon lumineux arrive en I sur la face BC sous l'incidence i ; il se réfracte, se réfléchit sur les deux autres faces AB et AC en J et K respectivement et ressort par la base BC en L avec un angle d'émergence j .



- a) On appelle r l'angle de réfraction en I . Exprimer les angles α , β et γ en fonction de r . En déduire la relation existant entre i et j .
- b) Pourquoi y-a-t-il toujours réflexion en J ?
- c) Pour quelles valeurs de i la réflexion est-elle possible en K ?

- 4** Sur un prisme de glace ($n = 1,33$) et d'angle $A = 30^\circ$, on reçoit deux rayons en provenance de deux points opposés du Soleil et qui font entre eux un angle $\alpha = 0,5^\circ$. Le premier rayon est perpendiculaire à la face du prisme et arrive sous l'incidence $i_1 = 0^\circ$ et le deuxième sous une incidence $i_1 = \alpha$.



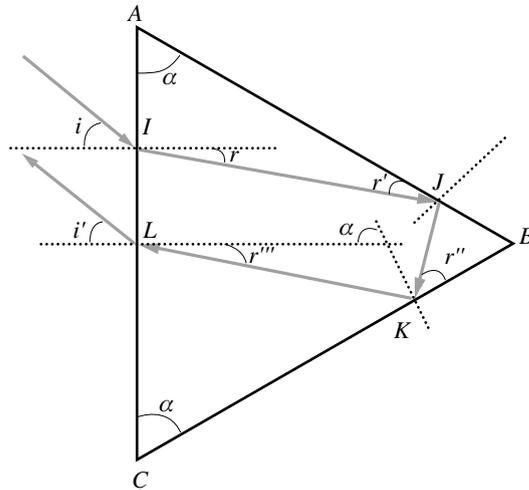
- a) Calculer la déviation D subie par chaque rayon, après avoir calculé r_1 , r_2 et i_2 , pour chacun d'entre eux. Quel est l'angle dD formé par les deux rayons émergents ? Le faisceau est-il réduit ou étalé ? Déterminer les valeurs de i_1 et de D au minimum de déviation.
- b) On traite ici le problème en introduisant les différentielles. En différentiant les quatre formules du prisme montrer que :

$$dD = \left[1 - \frac{\cos r_2 \cos i_1}{\cos i_2 \cos r_1} \right] di_1$$

- c) Calculer dD/di_1 pour $i_1 = 0$ et 20° . Que se passe-t-il au voisinage de 20° ?

d) Retrouver l'angle formé par les deux rayons émergents dans le a) en considérant $di_1 = \alpha$.

- 5** Un bloc de verre d'indice n est un triangle isocèle ABC dont les angles A et C sont égaux à α . Un rayon incident arrive en I avec un angle d'incidence i . Il se réfracte sur la face AC , se réfléchit sur les 2 autres faces AB et BC en J et K respectivement et ressort en L sur la face AC avec un angle d'incidence i' .



a) Exprimer la valeur de l'angle B en fonction de α .

b) En étudiant les triangles AIJ , JBK et KCL , exprimer r' , r'' et r''' en fonction de r et de α .

c) En déduire que :

$$\sin i' = n \sin (4\alpha + r - \pi)$$

Quelle doit être la valeur de α pour que les rayons incidents et sortants soient parallèles ?

d) α est proche de 45° et l'on pose $\alpha = \frac{\pi}{4} + \varepsilon$ où ε est un petit angle. Si i est également un petit angle, démontrer que $i' - i \sim 4\varepsilon n$.

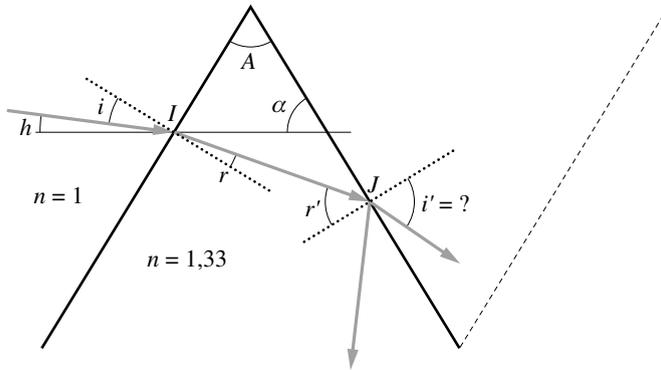
- 6** Un prisme de glace d'indice $n = 1,33$ et d'angle $A = 30^\circ$ reçoit deux rayons qui font entre eux un angle $\Delta i = 0,5^\circ$. Ils arrivent au même point avec des angles incidents respectivement égaux à $i_1 = 30^\circ$ et $i_2 = 30^\circ + 0,5^\circ$. Quel est l'angle $\Delta = i'_2 - i'_1$ formé par les deux rayons sortants. En utilisant les formules du prisme, calculer les déviations D et D' subies par chaque rayon.

Calculer $\delta D = D' - D$.

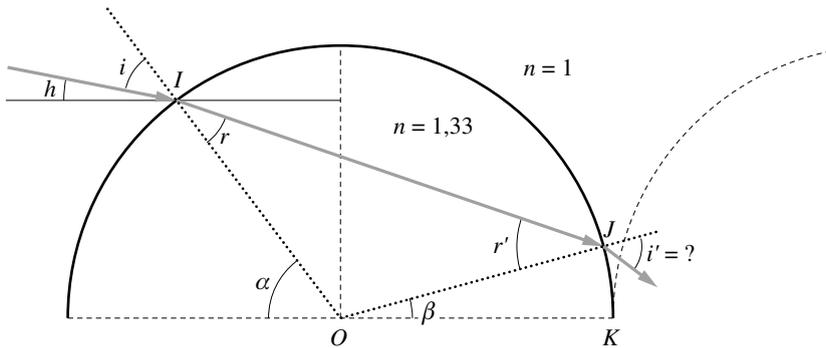
- 7** Les vagues sur l'eau forment une ligne brisée composée de prismes isocèles de bases parallèles à l'horizon. L'angle du prisme est A et l'indice est $n = 1,33$.

a) Un rayon de soleil arrive sur la vague qui fait un angle h avec l'horizon. Il arrive donc en I avec un angle d'incidence i . Par quelle relation sont liés i , h et A ?

b) Calculer la valeur limite de r' pour qu'il y ait réflexion totale en J . En déduire les valeurs limites de r , i et h , si $A = 80^\circ$. Cette valeur de h est-elle réalisable ? En déduire les conditions pour lesquelles, le rayon ressort de la vague en J . Un rayon arrivant en I peut-il sortir de la vague en J ?



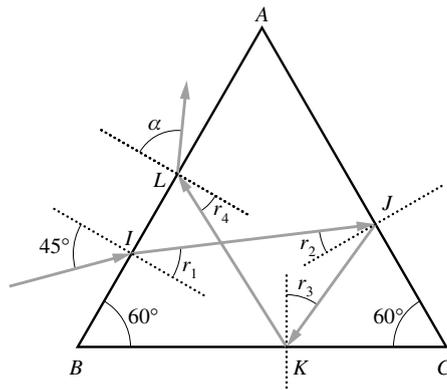
8 On représente le profil des vagues par des demi-cercles.



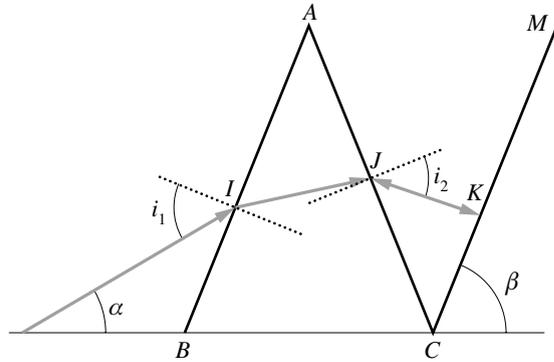
a) Du Soleil arrive un rayon qui fait un angle h avec l'horizon et qui arrive en I sur la vague avec un angle d'incidence i . Par quelle relation sont liés i , h et α ? Quelles relations simples lient r et r' , i et i' ? Le rayon sort-il de la vague ?

b) Exprimer β en fonction de r et de α . Le rayon pénètre dans l'eau si le point J est en dessous de K . Que vaut β quand J est confondu avec K ? En déduire l'expression reliant h et α . Calculer h et i pour $\alpha = 45^\circ$.

9 Un rayon arrive en I avec une incidence de 45° sur un prisme équilatéral d'indice $n = \sqrt{2}$. Deux faces du prisme sont réfléchissantes. Calculer les valeurs des angles de réflexion successifs r_1, r_2, r_3 et de l'angle de réfraction r_4 . Calculer α et montrer que le rayon sortant est perpendiculaire au rayon incident.

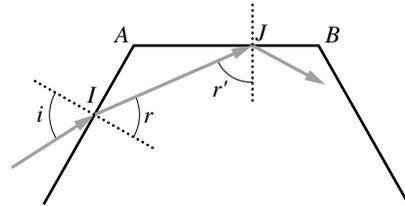


- 10** Un rayon incliné d'un angle α traverse un prisme isocèle d'angle A et d'indice n . De l'autre côté, il se réfléchit sur un miroir M . Quelle doit être l'inclinaison β du miroir pour que le rayon revienne sur ses pas ?



- 11** a) Un prisme de verre d'indice $n = 1,5$ a la forme d'un triangle équilatéral. Il est initialement dans l'air d'indice $n = 1$. Donner la valeur de la déviation minimale D_m . On le plonge dans de l'eau d'indice $n' = 4/3$. Quelle est la nouvelle valeur de D_m ?

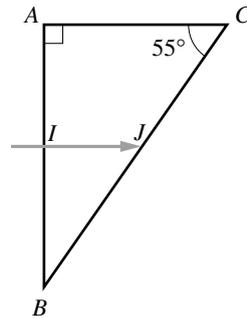
b) Cristal de glace. On s'intéresse à la réfraction de la lumière dans un cristal de glace d'indice $n = 1,31$ ayant la forme d'un hexagone régulier.



• 2 faces adjacentes forment un prisme à 120° . Que constatez-vous si l'on veut calculer la déviation minimale ?

• On va expliquer ce résultat curieux en étudiant le cheminement du rayon IJ . Quelles sont les valeurs limites de r et r' pour qu'il y ait réflexion totale en J ? Le rayon peut-il sortir en J ?

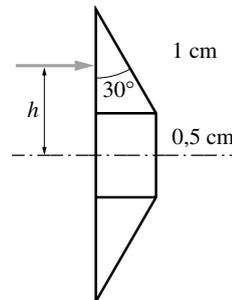
- 12** Un rayon lumineux arrive normalement par la face AB d'un prisme rectangle ($A = 90^\circ$, $C = 55^\circ$). Il comporte deux radiations pour lesquelles l'indice du prisme vaut $n_1 = 1,73$ et $n_2 = 1,75$.



a) Sur quelles faces du prisme vont sortir les deux radiations et avec quel angle ?

b) Déterminer les deux déviations D_1 et D_2 .

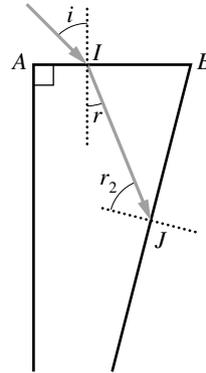
- 13** Trois blocs de verre d'indice $n = 1,5$ (soit un parallélépipède de 1 cm de hauteur et deux prismes de 1 cm de hauteur, d'angles 30° , 60° et 90°) sont assemblés comme représenté ci-contre et constituent une loupe grossière.



Un rayon arrive parallèlement à l'axe, à la distance h de l'axe de symétrie.

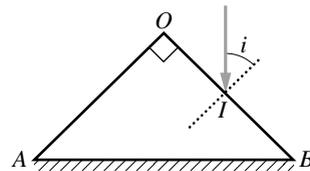
Calculer la distance de la loupe au point d'intersection A du rayon émergent avec l'axe de symétrie (on supposera que l'épaisseur de la loupe est négligeable). De combien se déplace le point A quand h varie de 0,5 à 1,5 cm ? Conclusion ?

- 14** Un prisme de verre d'indice $n = 1,5$ a pour section droite un triangle rectangle en A d'angle $B = 75^\circ$. Un rayon pénètre par la face AB , se réfléchit sur la face BC et émerge en sortant par la face AC avec un angle i' . L'angle d'incidence i est choisi de telle façon que les rayons émergent et incident soient perpendiculaires. Représenter le parcours du rayon et en déduire les angles d'incidence et de réfraction i , r et i' .



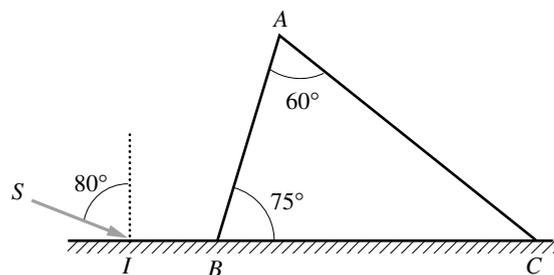
- 15** Un prisme de verre d'indice $n = \sqrt{2}$ a pour section droite un triangle rectangle isocèle ($A = 90^\circ$). Un rayon arrive en I sur AB , parallèlement à la face BC .
- Suivant la position de I sur AB , déterminer la déviation totale subie par le rayon après traversée du prisme.
 - Positionner le point limite I_0 de I en calculant AI_0 . On pose $AC = a$.
 - Examiner le cas où la face BC est argentée.

- 16** Un prisme de verre d'indice n dont la section droite est un triangle rectangle en O et isocèle ($OA = OB$) a la face AB réfléchissante. Un rayon arrive verticalement et subit à l'intérieur du prisme une ou deux réflexions. Calculer la déviation totale dans les deux cas.

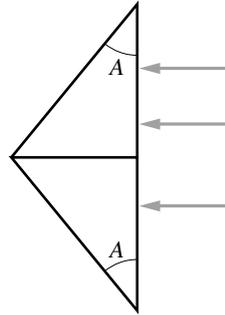


- 17** On considère un prisme d'angle A et d'indice n .
- Établir la relation qui lie A , n et i' quand le rayon incident i est rasant.
 - $A = 60^\circ$ et $i' = 42^\circ 30'$. Calculer n .

- 18** Un prisme ABC ($A = 60^\circ$, $B = 75^\circ$, $n = 1,6328$) est posé sur un miroir plan M . Un rayon lumineux SI arrive sur le miroir en I avec une incidence de 80° et, après réflexion, pénètre par la face AB du prisme. Calculer, après diverses réflexions et réfractions, la déviation totale subie par le rayon SI .



- 19** Deux prismes identiques rectangles d'angle A et d'indice $n = 1,5$ ont une face commune. Un faisceau de rayons parallèles arrive perpendiculaire à une face.



- a) $A = 30^\circ$. Quel est l'effet des deux prismes ?
 b) $A = 45^\circ$. Que deviennent les rayons parallèles ?

20 Coin de glace

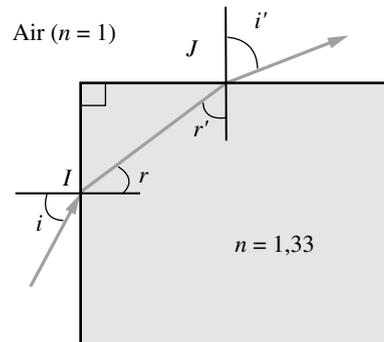
Un rayon lumineux arrive en I sur un bloc de glace d'indice $n = 1,33$.

- 1) Calculer les valeurs de r , r' et i' pour la valeur limite $i = 90^\circ$.

Donner sans démonstration l'expression de la déviation D . Calculer D .

Que se passe-t-il en J ?

- 2) Donner sans démonstration une relation donnant D_m , la valeur de D au minimum de déviation. Calculer D_m et la valeur i_m de i correspondante.



21 Prisme

On considère un prisme d'angle au sommet $A = 60^\circ$ et d'indice $n = \sqrt{2}$. Un rayon arrive sur le prisme avec un angle incident $i = 45^\circ$. Calculer successivement les angles r , r' , i' ainsi que la déviation D .

L'angle du prisme est maintenant $A = 61^\circ$ et i reste égal à 45° . Calculer la nouvelle déviation D . De combien a-t-elle varié ?

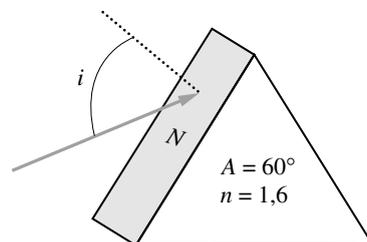
22 Prisme

Un prisme d'angle $A = 60^\circ$ et d'indice $n = \sqrt{2}$ est plongé dans l'air d'indice 1. Calculer les différents angles à l'incidence limite. À quelle condition y a-t-il toujours émergence ? Calculer la valeur de l'angle d'incidence et celle de la déviation au minimum de déviation.

23 Réfractomètre

Un prisme de verre d'indice $n = 1,6$ a pour section principale un triangle équilatéral.

- 1) Rappeler sans démonstration les formules du prisme et celle de la déviation D .

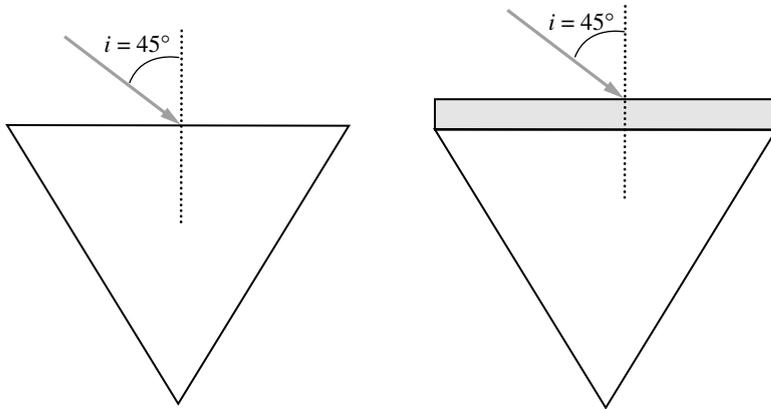


2) Rappeler sans démonstration les relations du minimum de déviation. Calculer l'angle de déviation minimum et la valeur de l'angle d'incidence dans ces conditions.

3) On dépose sur la face d'entrée de ce prisme un matériau transparent d'indice inconnu N . Si l'incidence est rasante ($i = 90^\circ$), écrire les relations liant N à n et aux angles du prisme. Calculer N lorsque l'angle d'émergence $i' = 11^\circ$.

24 Prisme

On considère un prisme équilatéral d'indice $n = 3/2$, plongé dans l'air.



1) Ecrire sans démonstration les formules du prisme. Calculer les différents angles avec $i = 45^\circ$.

2) Le prisme précédent est recouvert sur la face d'entrée, d'une couche d'eau formant une lame à faces parallèles d'indice $n' = 4/3$.

– Calculer le nouvel angle d'incidence sur le prisme en verre.

– Calculer la déviation totale (provoquée par l'eau et par le prisme). Que constatez-vous ?

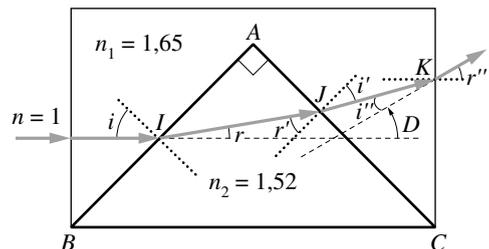
Solutions

1 a) Posons $n_r = n_2/n_1$.

Le rayon incident arrive en I avec un angle de 45° . La relation de Snell-Descartes s'écrit : $\sin 45^\circ = n_r \sin r$, ce qui donne $r = 50,13^\circ$.

En J , on a $n_r \sin r' = \sin i'$, avec $r + r' = A = 90^\circ$; ceci donne $r' = 39,86^\circ$ et $i' = 36,19^\circ$.

Enfin, en K , $n_1 \sin i'' = \sin r''$, avec $i'' = 45^\circ - i' = 8,81^\circ$. On a donc $r'' = 14,64^\circ$.



La déviation totale à la sortie de la cuve est égale à r'' (la normale à la face de sortie étant parallèle au rayon incident en I). Le rayon est dirigé vers le haut et $D = 14,64^\circ$.

b) Comme $D = r''$, $dD = dr''$. Il suffit donc de différentier chacune des trois relations de Snell-Descartes écrites ci-dessus afin de calculer successivement dr , dr' , di' , di'' , dr'' en fonction de dn_1 . On trouve :

$$dr = -dr' = \frac{\sin i}{n_2 \cos r} dn_1$$

On a donc :
$$di' = -di'' = -\frac{1}{n_1 \cos i'} \left(\sin i' + \frac{\cos r'}{\cos r} \sin i \right) dn_1$$

enfin :
$$dD = dr'' = \frac{1}{\cos r''} (\sin i'' dn_1 + n_1 \cos i'' di'')$$

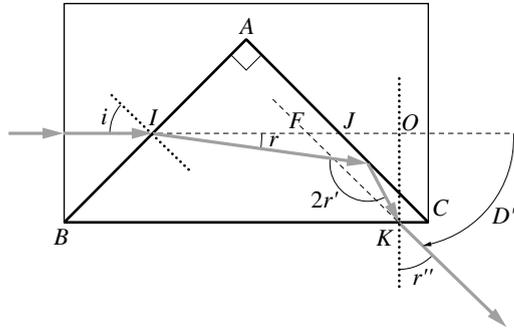
pour une variation de n_1 de 0,02,
 $dr = -dr' = 0,0145 \text{ rad}$,
 $di'' = 0,021 \text{ rad}$
 et $dD = 0,039 \text{ rad} = 2,26^\circ$.

La déviation totale augmente donc avec l'indice n_1 .

c) L'indice relatif n_r est maintenant égal à n_2 . Les relations de Snell-Descartes donnent alors :

en I , $i = 45^\circ$, $r = 27,72^\circ$,

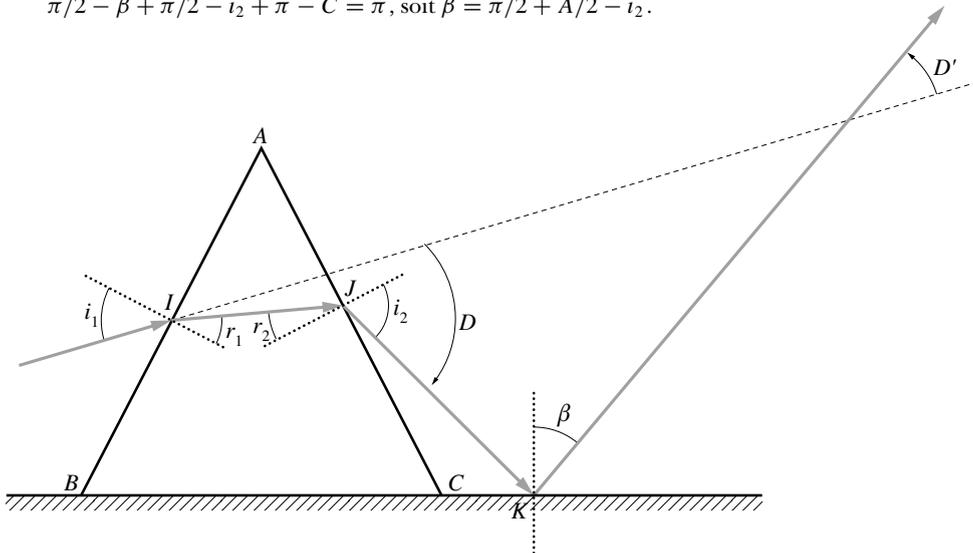
en J , $r' = 62,27^\circ$.



Il y a alors réflexion totale sur AC . Le rayon sort sur la face BC en K , où $i'' = 17,27^\circ$, $r'' = 26,82^\circ$.

BC est parallèle au rayon entrant. Donc $D' + r'' = \pi/2$, soit $D' = 63,18^\circ$ (en toute rigueur la déviation est vers le bas, $D' < 0$).

2 a) Le prisme est isocèle soit $B = C = (\pi - A)/2$. Dans le triangle JCK : $\pi/2 - \beta + \pi/2 - i_2 + \pi - C = \pi$, soit $\beta = \pi/2 + A/2 - i_2$.



On a vu dans le cours que la déviation dans le prisme était égale à $D = i_1 + i_2 - A$.

Par ailleurs, on a $D' + D + 2\beta = \pi$, ce qui donne $D' = i_2 - i_1$.

$D' = 0$ si $i_1 = i_2 = i$. On est au minimum de déviation du prisme, $D = D_m = 2i - A$.

b) Comme $\sin i_1 = n_r \sin r_1$, $A = r_1 + r_2$ et $n_r \sin r_2 = \sin i_2$, on a $r_1 = 28,12^\circ$, $r_2 = 31,87^\circ$, $i_2 = 52,38^\circ$, $D = 37,38^\circ$ (vers le bas, < 0) et $D' = 7,38^\circ$ (vers le haut, > 0).

3 a) Le prisme est isocèle et rectangle en A , on a donc $B = C = 45^\circ$. Dans $JB I$: $\alpha = r + 45^\circ$, dans JAK : $\alpha + \beta = 90^\circ$ donc $\beta = 45^\circ - r$, dans KCL : $\gamma = 45^\circ - \beta$ donc $\gamma = r$; finalement $j = i$.

b) en J : α_{lim} est donné par la condition $n \sin \alpha_{\text{lim}} = 1$, soit $\alpha_{\text{lim}} = 41,81^\circ$. Or, $\alpha = r + 45^\circ$, est toujours supérieur à cette valeur α_{lim} . Il y a donc toujours réflexion en J .

c) en K de la même façon, $\beta_{\text{lim}} = 41,81^\circ$; ceci correspond à $r_{\text{lim}} = 3,19^\circ$ et $i_{\text{lim}} = 4,79^\circ$. Il y a donc réflexion en K si $\beta > \beta_{\text{lim}}$, soit $r < r_{\text{lim}}$ et $i < i_{\text{lim}}$.

4 a) Pour le premier rayon, on a $i_1 = 0^\circ$, $r_1 = 0^\circ$, $r_2 = A = 30^\circ$, $i_2 = 41,68^\circ$, $D_1 = 11,682^\circ$

Pour le deuxième rayon, $i_1 = 0,5^\circ$, $r_1 = 0,376^\circ$, $r_2 = 29,62^\circ$, $i_2 = 41,1^\circ$, $D_2 = 11,604^\circ$.

Donc $dD = 0,078^\circ$. Le faisceau est légèrement étalé car $|di_1| = 0,5^\circ$ et $|di_2| = 0,58^\circ$.

Au minimum de déviation : $i_1 = i_2 = i$, $r_1 = r_2 = r$, $A = 2r$, $\sin i = n \sin (A/2)$, $i = 20,13^\circ$ et $D_m = 2i - A = 10,27^\circ$.

b) Voir chapitre 3, paragraphe 3.3.

c) $i_1 = 0^\circ$, $r_1 = 0^\circ$, $r_2 = A = 30^\circ$, $i_2 = 41,68^\circ$, $dD/di_1 = -0,1595$.

$i_1 = 20^\circ$, $r_1 = 14,9^\circ$, $r_2 = 15,1^\circ$, $i_2 = 20,27^\circ$, $dD/di_1 = +0,0008$.

À 20° , on est très proche du minimum de déviation pour le prisme et D varie très peu avec i_1 ; $|di_1| = 20^\circ$.

d) $i_1 = 0^\circ$, $di_1 = 0,5^\circ$, $dD = -0,0797^\circ$ et $dD/di_1 = -0,1595$. On retrouve bien le résultat de la première question.

5 a) Dans ABC : $B + 2\alpha = \pi$, soit $B = \pi - 2\alpha$.

b) Dans AIJ : $\alpha + \frac{\pi}{2} + r + r' = \pi$, soit $r' = \pi/2 - \alpha - r$.

Dans JBK : $r' + r'' + B = \pi$, soit $r'' = 3\alpha + r - \pi/2$.

Dans KCL : $r'' + \pi/2 - r''' + \alpha = \pi$, soit $r''' = 4\alpha + r - \pi$.

c) Snell-Descartes en L donne $\sin i' = n \sin r''' = n \sin (4\alpha + r - \pi)$.

Pour que les rayons soient parallèles, il faut que $i = i'$, ce qui impose que $r = r'''$ (Snell Descartes en I et en L). On a donc $4\alpha + r - \pi = r$ soit $\alpha = \pi/4$.

d) Si $\alpha = \pi/4 + \varepsilon$, $r''' = r + 4\varepsilon$. Par ailleurs, si i est petit, la loi de Snell-Descartes en I peut s'écrire $i \sim nr$. r est donc petit ainsi que r''' . On peut donc de même écrire en L , $i' \sim nr''' = n(r + 4\varepsilon) = i + 4\varepsilon n$; soit $i' - i \sim 4\varepsilon n$.

- 6** Tout est calculé grâce aux formules du prisme. Les rayons sortants font donc entre eux un angle $\Delta = i_2 - i'_2 = 0,47^\circ$ et $\delta D = D' - D = 0,03^\circ$.

Formules du prisme	$i_1 = 30^\circ$	$i_1 = 30,5^\circ$
$\sin i_1 = n \sin r_1$	$r_1 = 22,082$	$r'_1 = 22,433$
$r_1 + r_2 = 30^\circ$	$r_2 = 7,918$	$r'_2 = 7,566$
$\sin i_2 = n \sin r_2$	$i_2 = 10,556$	$i'_2 = 10,086$
$D = i_1 + i_2 - A$	$D = 10,556$	$D' = 10,586$

- 7 a)** L'angle α à la base du prisme isocèle vaut $\alpha = (\pi - A)/2 = \pi/2 - (h + i)$, ce qui donne $A/2 = i + h$.

b) Pour qu'il y ait réflexion totale en J , il faut que $n \sin r'_{\text{lim}} = 1$, soit $r'_{\text{lim}} = 48,75^\circ$. Comme $A = r + r'$, on a $r_{\text{lim}} = 31,24^\circ$, $i_{\text{lim}} = 43,62^\circ$, ce qui donne $h_{\text{lim}} = -3,62^\circ$. Ceci est impossible puisque cela correspondrait à un rayon incident en dessous de l'horizon.

Le rayon sort de la vague en J pour $r' < r'_{\text{lim}}$, $r > r_{\text{lim}}$, $i > i_{\text{lim}}$, et $h < h_{\text{lim}}$. Comme $h_{\text{lim}} < 0$ cette condition n'est jamais satisfaite. Le rayon ne sort donc jamais de la vague en J .

- 8 a)** La ligne de l'horizon est parallèle à OK . On a donc égalité des angles en O et I donc $\alpha = h + i$.

Le triangle OIJ est isocèle ($OI = OJ$). Donc $r = r'$, $i = i'$. Le rayon sort donc toujours puisque la condition de réfraction toujours possible en I l'est nécessairement en J si $i' = i$.

b) Le triangle IOJ est isocèle. Donc : $\pi - \alpha - \beta = \pi - 2r$, soit : $\beta = 2r - \alpha$.

Si J est confondu avec K , $\beta = 0$, $\alpha = 2r$, $\sin i = \sin(\alpha - h) = n \sin \alpha/2$.

Ceci donne $i = 30,59^\circ$ et $h = 14,40^\circ$.

- 9** La loi de Snell Descartes en I donne $\sin 45^\circ = n \sin r_1$, soit $r_1 = 30^\circ$; Par ailleurs, $r_1 + r_2 = 60^\circ$, $r_2 = r_1 = 30^\circ$. Dans le triangle JKC , $(\pi/2 - r_2) + (\pi/2 - r_3) + 60 = \pi$, soit $r_3 = r_1 = r_2 = 30^\circ$.

Enfin, dans le triangle BLK , on montre de même que $r_4 = 30^\circ$. On a donc $\alpha = 45^\circ$.

i_1 et α sont à 45° de part et d'autre de la normale sur la même face d'entrée. $i_1 + \alpha = 90^\circ$. Les rayons émergent et incident sont bien perpendiculaires.

- 10** Le prisme étant un triangle isocèle, $B = C = (\pi - A)/2$.

Le rayon revient sur lui-même s'il arrive selon la normale au miroir. Dans le triangle JKC , on a : $\pi = (\pi/2 - i_2) + \pi/2 + (\pi - \beta - C)$, soit : $\beta = \pi/2 + A/2 - i_2$.

- 11 a)** On a vu dans le cours qu'à la déviation minimale, $i = i'$, $r = r'$, $A = 2r$ et $D_m = 2i - A$.

Le prisme est un triangle équilatéral, donc $A = 60^\circ$ et $r = r' = 30^\circ$. Pour calculer $i = i'$, il suffit de considérer la loi de Snell-Descartes : $\sin i = n_r \sin r$ avec $n_r = 1,5$.

On trouve : $i = i' = 48,59^\circ$, soit : $D_m = 37,18^\circ$.

Si le prisme est plongé dans un milieu d'indice $n' = 4/3$, le raisonnement reste le même, seul l'indice relatif change et devient $n_r = n/n' = 1,125$. On a donc $\sin i = n_r \sin r$, soit $i = 34,23^\circ$, ce qui donne $D_m = 8,46^\circ$.

b) Dans le cas du cristal de glace à la déviation minimale, $r = r'$, $A = 2r = 120^\circ$, soit $r = 60^\circ$. Or l'angle de réfraction limite vaut ici $r_{\text{lim}} = 49,76^\circ$. r est donc supérieur à cet angle. Un rayon ne peut donc pas pénétrer en I de telle façon que $r = 60^\circ$, on n'observera pas de minimum de déviation.

Pour qu'il y ait réflexion totale en J , il faut que $n \sin r' > 1$, soit $r' > r'_{\text{lim}} = 49,76^\circ$ et $r < r_{\text{lim}} = 49,76^\circ$.

Or, si $r < r_{\text{lim}}$, $r' > 70,24^\circ$; le rayon ne sortira jamais en J .

12 a) Les faisceaux traversent AB sans être déviés (incidence nulle), puis arrivent tous les deux sur la face BC en un point J avec une incidence r . On a $r = B = \pi/2 - C$ soit $r = 35^\circ$. Selon les radiations les angles limites sur BC sont : $r_{1\text{lim}} = 35,31^\circ$ pour $n_1 = 1,73$ et $r_{2\text{lim}} = 34,85^\circ$ pour $n_2 = 1,75$.

(1) sort donc par BC ; son angle d'émergence est donné par $n_1 \sin r = \sin i$, soit $i = 82,88^\circ$.

(2) se réfléchit sur BC car il est en condition de réflexion totale et sort par AC . En K , l'angle d'incidence r' est donné par

$$r' + \pi/2 + 2r = \pi,$$

soit $r' = 20^\circ$; i' l'angle de sortie est donné par

$$n_2 \sin r' = \sin i',$$

soit $i' = 36,76^\circ$.

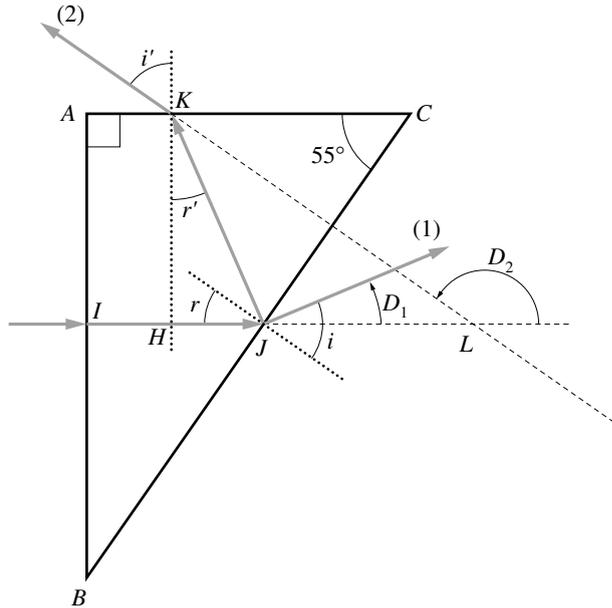
b) L'angle de déviation du premier faisceau est

$$D_1 = i - r = 47,88^\circ.$$

L'angle de déviation du deuxième faisceau est donné par la relation dans le triangle KHL :

$$i' + \pi/2 + \pi - D_2 = \pi,$$

soit $D_2 = 126,76^\circ$.



13 Négliger l'épaisseur de la loupe revient à considérer le centre optique du système à la même hauteur que I .

Le faisceau pénètre dans la loupe sans être dévié ($i = 0$), et atteint la face suivante au point I avec un angle i' de 30° . Il ressort donc avec un angle $r' = 48,59^\circ$.

Si A est le point où le faisceau rencontre l'axe, on a $\tan \alpha = h/OA$. On a par ailleurs, dans le triangle AIO :

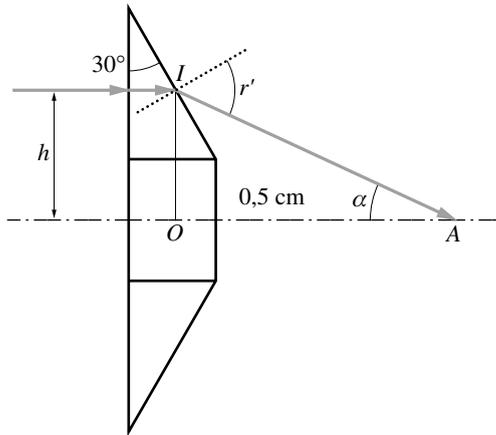
$$\alpha + (\pi/2 + 30^\circ - r') + \pi/2 = \pi,$$

ce qui donne $\alpha = 18,59^\circ$.

On trouve donc :

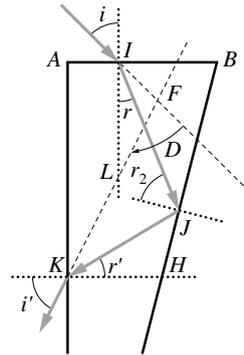
$$OA = h/\tan \alpha = 2,97 h.$$

Quand h varie de 0,5 à 1,5 cm, OA varie de 1,49 cm à 4,45 cm. C'est une loupe médiocre car A varie en fonction de la hauteur du rayon (la condition de stigmatisme que nous définirons au chapitre 4 n'est pas réalisée).



- 14** Le parcours du rayon est représenté. On va calculer la déviation D du rayon à partir des angles d'incidence successifs. On veut $D = 90^\circ$.

En I , le rayon se réfracte avec un angle r tel que $\sin i = n \sin r$. Ce rayon atteint la face BC en J avec un angle r_2 tel que : $r + r_2 = B = 75^\circ$. Il se réfléchit en J et frappe la face AC en K avec un angle r' . Dans le triangle JKH , on a : $r' + (\pi/2 - r_2) + \pi - 75^\circ = \pi$. Ceci donne $r' = r_2 - 15^\circ$. Le faisceau ressort du prisme avec un angle i' .



Pour calculer sa déviation, on se place dans le triangle IFL où l'on a :

$$i + (\pi - D) + (\pi/2 - i') = \pi,$$

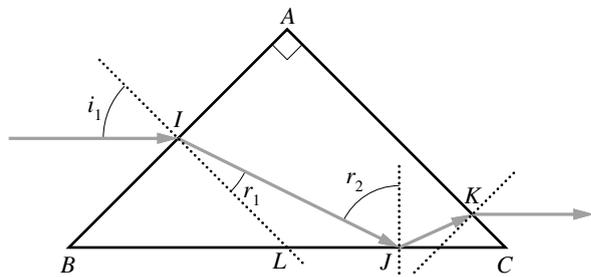
soit : $D = i - i' + \pi/2$. Si par hypothèse $D = \pi/2$, on a $i = i'$ et donc $r = r'$. En manipulant les équations, on trouve : $r = r' = 30^\circ$, $r_2 = 45^\circ$, $i = i' = 48,59^\circ$.

- 15** a) Le faisceau après réfraction sur AB en I peut frapper soit la face AC , soit la face BC selon la position de I .

• **Premier cas** : il frappe BC en J . L'angle d'incidence en I étant égal à 45° , on a : $\sin i_1 = n \sin r_1$ soit $r_1 = 30^\circ$. Le faisceau arrive en J sur la face BC avec un angle r_2 tel que, dans le triangle IJJ ,

$$r_1 + (180^\circ - 45^\circ) + (90^\circ - r_2) = 180^\circ$$

soit $r_2 = 75^\circ$.



En J on a $n \sin r_2 > 1$. Il y a donc réflexion totale. Le faisceau frappe alors la face AC en K avec un angle r_3 tel que $\pi/2 - r_3 + r_2 + \pi/4 = \pi$, soit $r_3 = 30^\circ$ et $i_3 = 45^\circ$. Le faisceau ressort donc parallèlement à la face BC et la déviation totale est nulle ($D = 0^\circ$).

• **Deuxième cas :** Le faisceau après s'être réfracté en I frappe la face AC en J . L'angle d'incidence r_2 est donné par la relation $A = r_1 + r_2$, soit $r_2 = 60^\circ$.

En J , il y a réflexion totale car $n \sin r_2 > 1$. Le faisceau frappe alors la face BC en K avec un angle r_3 donné par la relation dans le triangle KCJ :

$$90^\circ + r_3 + 90^\circ - r_2 + 45^\circ = 180^\circ.$$

On trouve $r_3 = 15^\circ$.

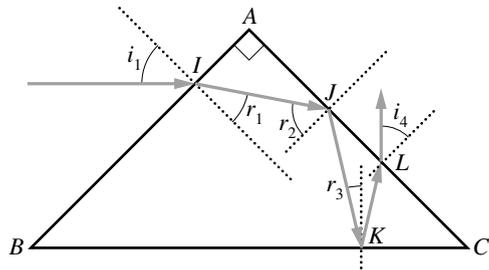
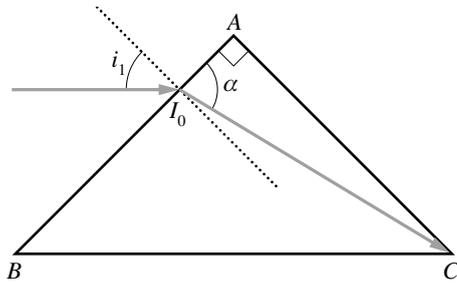
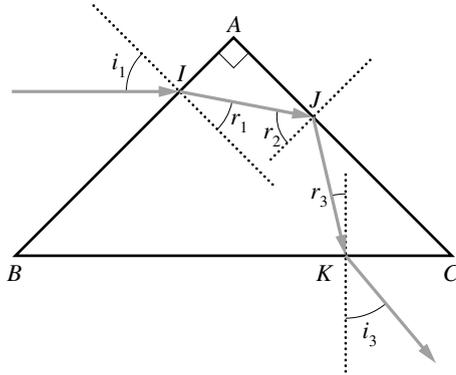
L'angle d'émergence du faisceau par la face BC est donné par la loi de Descartes et vaut $i_3 = 21,47^\circ$.

La déviation est alors égale à $D = 90^\circ - i_3 = 68,53^\circ$.

b) Le point limite I_0 de I est celui tel que le faisceau incident arrive à l'intersection entre AC et BC , soit en C . Dans le triangle AI_0C , l'angle α vaut $\pi/2 - r_1$. On a donc $\tan \alpha = AC/AI_0$. Si on pose $AC = a$, on a $AI_0 = a/\sqrt{3}$.

c) Si la face BC est argentée, l'étude du premier cas reste inchangée.

Dans le deuxième cas, le faisceau arrivant en K se réfléchit et frappe à nouveau la face AC en L avec un angle d'incidence r_4 donné par $\pi/4 + (\pi/2 - r_3) + (\pi/2 - r_4) = \pi$, soit $r_4 = 30^\circ$. Le faisceau émerge donc à un angle de 45° avec la face AC . La déviation totale est de 90° .



16 Selon l'endroit où le faisceau frappe la face OB , il peut y avoir une ou deux réflexions. En effet, il ne peut y avoir que réfraction en I et réflexion en J , mais en K , deux situations sont possibles : soit le rayon, après réflexion en J frappe la face OA , soit il frappe la face OB . Nous allons voir qu'il ne subit qu'une seule réflexion dans le premier cas et deux dans le deuxième cas.

• **Premier cas.** Le rayon frappe la face AO .

Le faisceau se réfracte sur la face OB avec un angle r_1 . Il frappe la face réfléchissante AB en J avec un angle r_2 . On a $r_1 + r_2 = B = 45^\circ$, soit $r_1 = 45^\circ - r_2$.

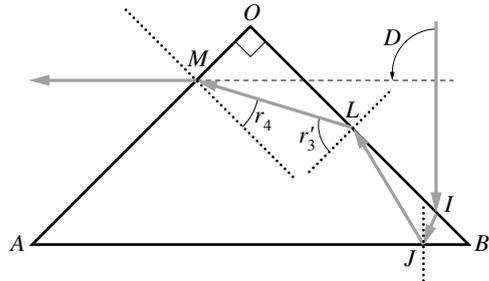
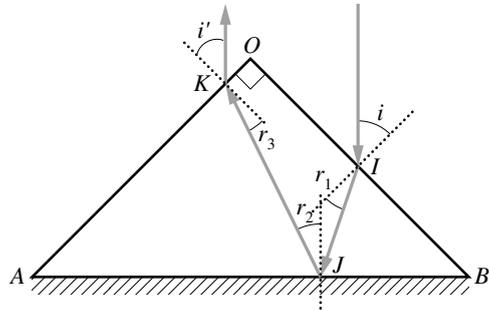
Le faisceau repart avec le même angle r_2 et arrive sur la face OA avec un angle r_3 tel que $r_3 + r_2 = A = 45^\circ$. On a donc $r_3 = 45^\circ - r_2 = r_1$.

Le faisceau ressort donc du prisme avec un angle $i' = i$. Les faisceaux entrant et émergent sont donc parallèles entre eux, mais de sens opposé, ce qui donne $D = \pi$.

• **Deuxième cas.** Le faisceau se réfléchit une deuxième fois sur la face OB en L avec un angle r'_3 . Dans le triangle IJB , on a : $r_1 + r_2 = 45^\circ$; dans le triangle IJJ , on peut écrire :

$$(\pi/2 - r'_3) + (\pi/2 + r_1) + 2r_2 = \pi$$

Ceci donne $r'_3 = r_1 + 2r_2 = \pi/2 - r_1$. Si cet angle correspond à une réflexion totale en L , le faisceau se réfléchit une deuxième fois et vient frapper la face OA en M avec un angle r_4 . Dans le triangle MLO , on peut écrire $r_4 + r'_3 = \pi/2$, soit $r_4 = r_1$. Le rayon ressort donc à 45° de la normale. Il est ici horizontal. La déviation est donc égale à $\pi/2$.



- 17** a) Si le rayon incident est rasant, $i = 90^\circ$. Les relations dans le prisme donnent : $\sin i = 1 = n \sin r$; $r + r' = A$; et $\sin i' = n \sin r' = n \sin (A - r)$. On a donc, en développant le sinus et en éliminant $\sin r$ et $\cos r$:

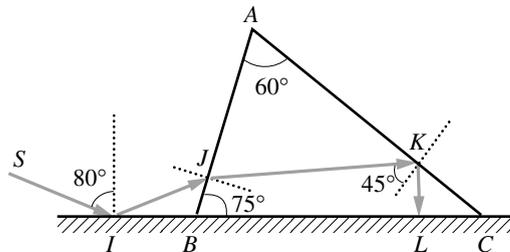
$$n^2 = 1 + \left(\frac{\sin i' + \cos A}{\sin A} \right)^2$$

- b) L'application numérique donne $n = 1,68$.

- 18** Sur la face AB , le faisceau arrive en J avec un angle d'incidence i tel que (dans le triangle IBJ) :

$$(90^\circ - 80^\circ) + (180^\circ - 75^\circ) + (90^\circ - i) = 180^\circ$$

soit $i = 25^\circ$. Le faisceau est réfracté avec un angle donné par la loi de Snell-Descartes en J égal à 15° .



Comme $A = r + r'$, on a $r' = 45^\circ$. Il y a alors en K réflexion totale car $n \sin r' > 1$. Le faisceau arrive sur la face BC en L avec un angle d'incidence égal à r'' tel que $(90^\circ - 45^\circ) + (90^\circ - r'') + 45^\circ = 180^\circ$, soit : $r'' = 0^\circ$.

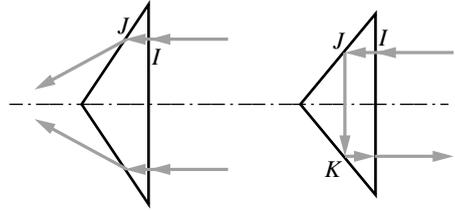
Le rayon se réfléchit sur BC selon la normale au miroir. Il retourne sur ses pas et finalement $D = \pi$.

19 Le problème présente un plan de symétrie par rapport à la base commune des deux prismes.

a) si $A = 30^\circ$, le faisceau rentre en I sans être dévié ($i = 0^\circ$). Il frappe la face suivante en J avec un angle d'incidence égal à $r = 30^\circ$. En appliquant la loi de Snell-Descartes en J on obtient $i' = 48,59^\circ$. La déviation est donnée par $D = i + i' - A = 18,59^\circ$.

On obtient, après le dispositif, deux faisceaux de rayons parallèles inclinés de $18,59^\circ$ vers le haut ou vers le bas par rapport à l'axe de symétrie.

b) $A = 45^\circ$. L'angle d'incidence en J est $r = 45^\circ$. Comme $r > r_{\text{lim}}$, on a réflexion totale en J . Les faisceaux se réfléchissent et rencontrent l'autre prisme identique qui a sa base accolée au premier. Les rayons se réfléchissent et repartent en K avec un angle de 45° parallèlement au faisceau incident, mais en sens opposé.



20 Coin de glace

1) $i = 90^\circ$, $r = 48,75^\circ$, $r' = 90 - r = 41,24^\circ$, $i' = 61,27^\circ$. $D = i + i' - A = 61,27^\circ$. La réflexion est totale en J si $i < 61,27^\circ$.

2) $\sin \frac{D_m + A}{2} = n \sin \frac{A}{2}$. $D_m = 50,255^\circ = 2i_m - A$. $i_m = 70,127^\circ$.

21 Prisme

$A = 60^\circ$ et $i = 45^\circ$. $r = 30^\circ$, $r' = 30^\circ$, $i' = 45^\circ$ et $D = 30^\circ$.

$A = 61^\circ$ et $i = 45^\circ$. $r = 30^\circ$, $r' = 31^\circ$, $i' = 46,75^\circ$ et $D = 31,75^\circ$. D a augmenté de $1,75^\circ$.

22 Prisme

À l'incidence limite, $i_1^0 = 90^\circ$, $r_1^0 = 45^\circ$, $r_2^0 = A - r_1^0 = 15^\circ$, $i_2^0 = 21,47^\circ$. Pour qu'il y ait émergence, il faut que $r_1 < r_1^0$ et on a alors $i_2 > i_2^0$.

$$\sin \frac{D_m + A}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{A}{2}. D_m = 2i_m - A = 30^\circ, i_m = 45^\circ$$

23 Réfractomètre

1) Les formules du prisme sont : $\sin i = n \sin r$, $r + r' = A$, $\sin i' = n \sin r'$, $D = i + i' - A$ et $n \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{D_m + A}{2}$.

2) On trouve $D_m = 2i_m - A = 46,26^\circ$, soit $i_m = 53,13^\circ$.

3) Si i est l'angle d'incidence dans la couche d'indice N , $N \sin i = n \sin r$, $r + r' = A$ et $n \sin r' = \sin i'$. Avec $i = 90^\circ$ et $i' = 11^\circ$, $r' = 6,85^\circ$, $r = 53,15^\circ$ et $N = 1,28$.

24 Prisme

1) Les formules du prisme sont : $\sin i = n \sin r$, $r + r' = A$, $\sin i' = n \sin r'$ et $D = i + i' - A$.

$A = 60^\circ$ et $i = 45^\circ$, $r = 28,12^\circ$, $r' = 31,87^\circ$, $i' = 52,38^\circ$, $D = 37,38^\circ$.

2) On a $\sin 45^\circ = n' \sin i = n \sin r$. $i = 32,03^\circ$ et les autres angles sont inchangés.

CHAPITRE 4

LA VISION DES IMAGES ET LES CONDITIONS DE GAUSS

Pré-requis

Des principes simples ont permis de décrire la propagation d'un rayonnement lumineux dans le vide ou dans des milieux transparents. On a exprimé à partir des lois de Snell-Descartes la déviation subie par un rayon après avoir traversé ou s'être réfléchi sur une surface séparant deux milieux d'indices différents. Dans tous les exemples proposés jusqu'ici, le problème a été largement simplifié dans le sens où la source était ponctuelle, émettant ainsi un rayon lumineux.

Objectif

Dans la réalité, nous sommes presque toujours en présence d'objets étendus, composés de sources ponctuelles élémentaires. Après traversée de milieux d'indice différent, ces rayons vont constituer une image de l'objet.

Nous allons présenter la notion d'image dans la première partie de ce chapitre en étudiant sa formation à travers deux systèmes simples, la lame à faces parallèles et le miroir plan. Enfin, nous décrirons à titre d'illustration quelques phénomènes naturels qui produisent des déformations d'images spectaculaires telles que les mirages et le rayon vert. Le problème de l'imagerie dépasse largement le niveau de ce cours, mais il est bon de préciser ici avec quelles approximations les formules d'optique géométrique ont été établies et dans quelles conditions on peut les appliquer. Pour cela nous allons définir en deuxième partie de ce chapitre les caractéristiques d'une image et donner les conditions pour lesquelles on obtient une « image de qualité » ; elles ont été établies pour la première fois par le physicien C.F. Gauss. Nous les supposons toujours réalisées dans l'étude de la formation d'images à travers des systèmes simples ou des instruments.

1. VISION D'IMAGES

1.1. Étude de deux systèmes simples

Nous allons revenir sur deux systèmes simples déjà abordés au chapitre 2, la lame à faces parallèles et le miroir plan. Nous allons étudier dans chaque cas la marche des rayons

issus d'objets étendus que l'on suppose composés de sources ponctuelles élémentaires émettant chacune indépendamment son propre rayon. Nous placerons alors l'œil d'un observateur en face des rayons réfractés ou réfléchis par le système et nous nous proposerons, à partir de constructions, de comprendre la vision qu'il en a.

1.1.1. lame à faces parallèles

Considérons dans un premier temps une lame d'indice n et d'épaisseur e placée dans l'air, représentée sur la figure 4.1 ; cela peut-être une vitre ou encore la paroi d'un aquarium. Nous avons montré au chapitre 2 que les rayons incidents et émergents étaient parallèles dans le cas où les deux indices extrêmes étaient identiques. Le rayon transmis par la lame à faces parallèles, sortant avec le même angle que l'angle d'incidence i , est alors seulement décalé d'une quantité δ donnée par :

$$\delta = e \frac{\sin(i - r)}{\cos r}$$

Considérons maintenant l'œil d'un observateur recevant de la lumière issue de A ; ce qu'il voit à travers la lame à faces parallèles est A' l'image de A . Tout naturellement, celle-ci est à l'intersection des rayons sortant du système issus de A ou de leur prolongement et interceptés par l'œil. Le choix des rayons est arbitraire et nous utiliserons ceux dont la construction est aisée. Pour définir l'image A' d'un objet A , la construction d'un rayon unique ne suffit pas, et on doit en choisir au minimum deux.

Notre choix s'est porté sur le rayon (1), vertical, qui arrive perpendiculairement à la première face selon sa normale ($i = 0^\circ$) et n'est donc pas dévié. Le rayon (2), fait un angle d'incidence i quelconque par rapport à la normale et subit les lois de la réfraction ; à la sortie, pour une lame à faces parallèles, l'angle d'émergence est égal à i ainsi que nous l'avons démontré au chapitre 2.

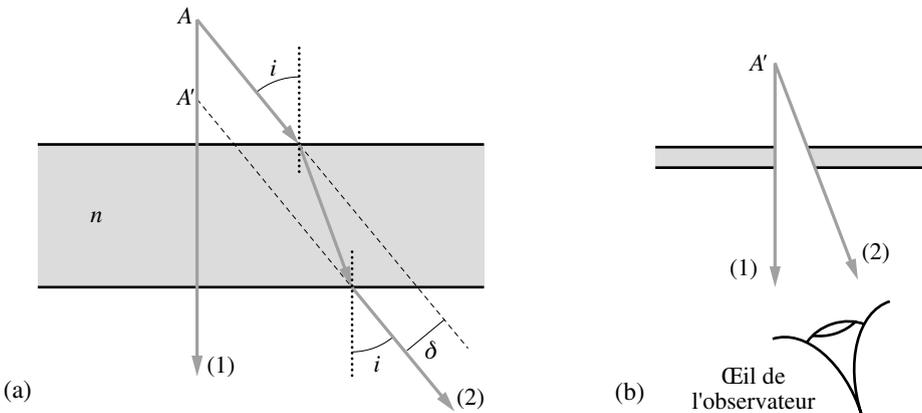


Figure 4.1 • Construction de l'image d'un point objet observé à travers une lame à faces parallèles. (b) est le même schéma sur un échelle plus petite.

Dans l'exemple choisi, l'œil intercepte les rayons émergents correspondant aux rayons (1) et (2) qui semblent alors provenir du point A' et non du point A . Ainsi, pour un observateur, A' est l'image de l'objet A vu à travers la lame à faces parallèles. Si l'on considère plus généralement différents points sources d'un objet étendu A , tous les rayons incidents issus de A réfractés par la lame semblent provenir des points correspondants issus de l'image A' . L'ensemble forme une image étendue A' de l'objet A (figure 4.2).

De manière générale, A' se situe à une position différente de celle de A ; dans cet exemple, A' est plus proche de la lame d'une quantité $AA' = \frac{\delta}{\sin i}$. Ainsi plus la lame est épaisse, plus A' s'éloigne de A et se rapproche de la lame.

1.1.2. Application à la vision sous l'eau

On retiendra de l'exemple précédent que des objets observés à travers une lame à faces parallèles semblent plus rapprochés qu'ils ne le sont en réalité. Cet exemple peut nous permettre de comprendre la déformation des objets vus à travers la surface de l'eau. Examinons tout d'abord l'allure d'un objet terrestre observé depuis le fond de l'eau (par exemple par un nageur observant un parasol depuis le fond d'une piscine). Sur la figure 4.3, le milieu terrestre est représenté par le demi-plan d'indice $n = 1$ et l'eau par celui d'indice n' ($n' > n$). Depuis un point A de l'objet terrestre, on trace deux rayons particuliers AH et AI qui correspondent aux rayons (1) et (2). Ils se réfractent à travers la surface de l'eau, puis sont interceptés par l'œil de l'observateur et semblent provenir d'un point A' différent de A . Depuis le fond de la piscine, l'observateur ne voit pas directement l'objet A mais son image A' dans la direction apparente IA' .

Il nous faut maintenant placer l'image A' , c'est-à-dire l'intersection des rayons réfractés (ou de leurs prolongements). Dans les triangles $A'IH$ et AIH , nous avons :

$$\tan i = \frac{IH}{HA} \quad \text{et} \quad \tan r = \frac{IH}{HA'}$$

De plus, $n \sin i = n' \sin r$.

Dans le cas où les angles sont petits :

$$i = \frac{IH}{HA}, \quad r = \frac{IH}{HA'} \quad \text{et} \quad ni = n'r \quad \text{d'où} \quad HA' = \frac{n'}{n}HA$$

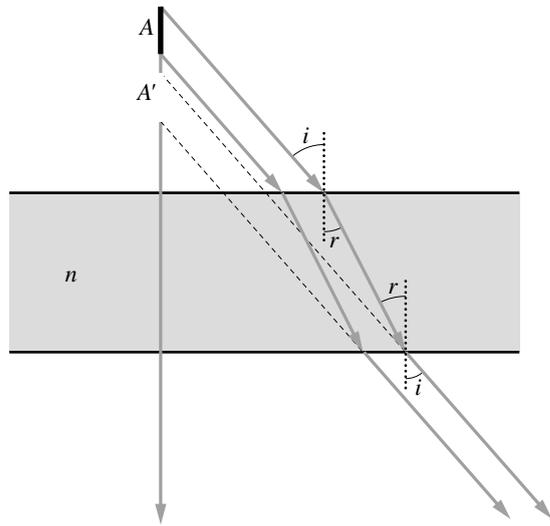


Figure 4.2 • Formation de l'image d'un objet étendu.

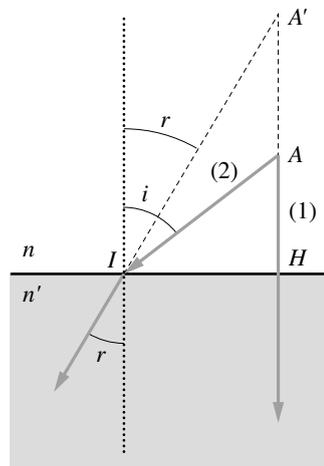


Figure 4.3 • Observation d'un objet placé dans un milieu d'indice n depuis le milieu d'indice n' .

Ainsi, pour le nageur assis au fond de l'eau, comme $n' > n$, le point A' est plus haut que A . Il verra donc depuis le fond de plus petits objets que dans la réalité et éloignés dans un rapport n'/n . Inversement, depuis le haut, les objets sous-marins semblent plus rapprochés et donc plus gros. Cette propriété découle directement du principe du retour inverse de la lumière. En conséquence, le « fond » d'une piscine semble moins éloigné et les poissons plus proches de la paroi d'un aquarium que dans la réalité.

Enfin, si l'on regarde une cuillère dans un verre d'eau, sa partie immergée apparaît beaucoup plus grosse que la partie située hors de l'eau (figure 4.4). On a la même impression quand on lit la graduation d'un thermomètre à mercure.

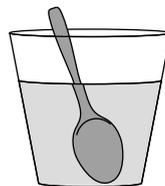


Figure 4.4 • La cuillère dans un verre d'eau.

1.1.3. Miroir plan

De la même façon, on peut construire facilement l'image d'un objet AB à travers un miroir plan (un miroir de salle de bain par exemple).

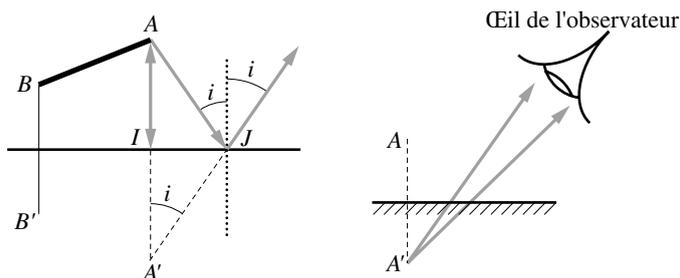


Figure 4.5 • Image d'un objet AB à travers un miroir plan.

Choisissons un point objet A et traçons deux rayons particuliers. Le premier rayon AI , perpendiculaire au miroir, se propage selon la normale (figure 4.5). Il est réfléchi dans la direction opposée au rayon incident. Le deuxième rayon, AJ , fait un angle d'incidence i par rapport à cette normale. Il se réfléchit à la surface du miroir avec un angle i par rapport à la normale, égal à l'angle d'incidence. Les prolongements des deux rayons sortants se coupent en A' , image de A . On peut réaliser la même construction avec le point B qui donne une image B' . On obtient finalement le segment $A'B'$, image du segment AB .

Par construction, le plan du miroir est la médiatrice des segments AA' et BB' (le triangle $AA'J$ est isocèle) : images et objets sont donc symétriques par rapport au plan du miroir. L'objet AB et son image $A'B'$ ont donc la même taille et on définira leur rapport comme le grandissement transversal du miroir, égal à 1.

Paradoxalement, si un observateur regarde l'image d'un objet à travers le miroir, celle-ci se trouve toujours plus loin de lui que l'objet. En effet, il ne peut pas se placer dans le miroir. L'image à travers un miroir plan lui semble donc toujours plus petite. Un objet vu dans un miroir semble donc avoir une taille différente de celle de l'original bien que le grandissement du miroir soit égal à 1.

Enfin, quand on fait tourner le miroir, ce dernier possède une propriété intéressante liée à la rotation des rayons réfléchis : l'image de l'objet tourne avec le miroir. Il s'agit donc de définir le rapport existant entre l'angle dont a tourné le miroir et celui dont a tourné l'image.

Considérons un miroir plan, initialement en position horizontale, et faisons-le tourner d'un angle α . Le miroir s'est alors déplacé de la position M_1 à M_2 (figure 4.6). Un rayon atteint respectivement les deux miroirs soit en I_1 soit en I_2 . Les prolongements des deux rayons réfléchis par le miroir dans la position M_1 puis M_2 se coupent au point P . D'autre part, les deux normales qui se coupent en N font entre elles un angle α . Dans les triangles NI_1I_2 et PI_1I_2 nous avons :

$$\alpha + i_1 + \pi - i_2 = \pi$$

$$\text{d'où : } \alpha = i_2 - i_1$$

$$\beta + 2i_1 + 2(\pi/2 - i_2) = \pi$$

$$\text{d'où : } \beta = 2(i_2 - i_1) = 2\alpha$$

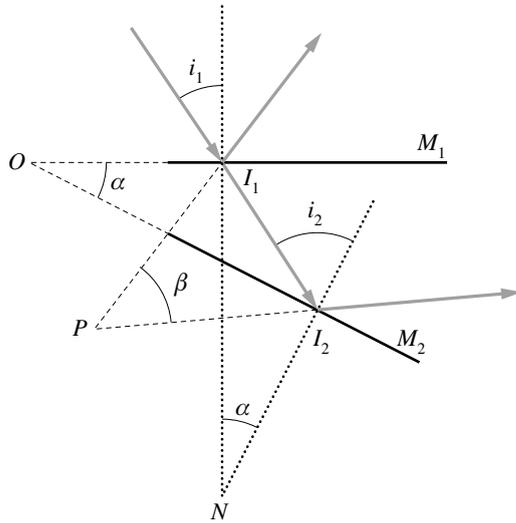


Figure 4.6 • Effet de la rotation d'un miroir sur les rayons réfléchis.

Ainsi, si le miroir plan a tourné d'un angle α , le rayon réfléchi a donc tourné d'un angle $\beta = 2\alpha$, égal au double de l'angle de rotation du miroir. Cette propriété explique par exemple la difficulté de se repérer dans un rétroviseur. En effet, quand le véhicule tourne et que l'on surveille un automobiliste ou un obstacle dans le rétroviseur, l'image renvoyée par le miroir tourne 2 fois plus vite que le véhicule alors qu'instinctivement, on s'attend à une rotation d'un angle beaucoup plus petit. Cette propriété est aussi utilisée dans le sextant : quand le miroir mobile tourne, l'image du Soleil tourne deux fois plus. Le principe de cet appareil est décrit dans l'encart 4.1.

Encart 4.1. Le sextant

Le sextant est un instrument destiné à mesurer des hauteurs au-dessus de l'horizon. Afin de s'affranchir du mouvement de l'observateur, (le navigateur sur son bateau par exemple), les deux images (horizon et objet observé) sont observées simultanément à l'aide de deux miroirs plans. Le schéma de principe du sextant est représenté sur la figure 4.7. Le miroir M_1 est fixe et le miroir M_2 mobile. Les rayons du Soleil se réfléchissent successivement sur les deux miroirs. Quand l'instrument est réglé, les deux images sont superposées et on lit directement la hauteur h de l'objet au-dessus de l'horizon sur un cercle gradué :

- le rayon (1) provenant de l'horizon parvient directement à l'observateur en passant à côté du miroir M_1 fixe ;
- le rayon (2) provenant de l'astre subit deux réflexions dont l'une sur le miroir mobile M_2 . C'est cette partie mobile qui permet d'obtenir la superposition des deux images.

L'angle d'inclinaison γ du miroir fixe M_1 étant une caractéristique du sextant, nous allons établir la relation liant h et α . h permet de repérer la hauteur de l'astre par rapport à l'horizon et α , la lecture sur la graduation. Dans le triangle M_1M_2V (V est la position du viseur) on a :

$$x + \gamma + h = \pi$$

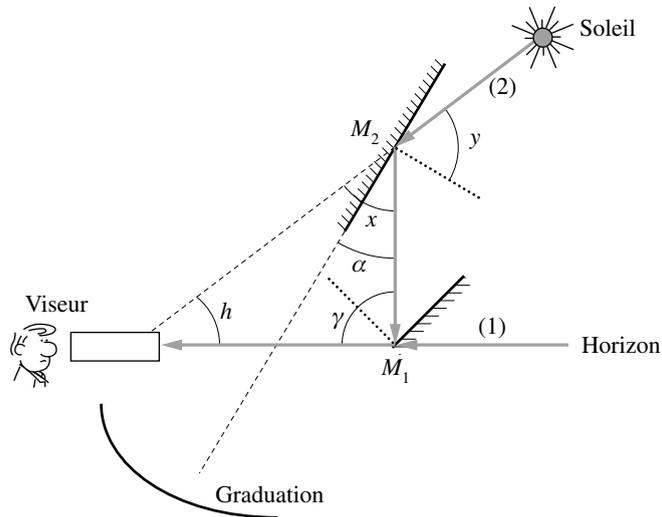


Figure 4.7 • Schéma du principe d'un sextant.

En M_2 , on a :

$$\pi = x + 2y \quad \text{et} \quad \alpha + y = \pi/2$$

soit : $x = 2\alpha$ et $\alpha = (\pi - h - \gamma)/2$.

En absence d'horizon, on utilise un bain de mercure pour matérialiser le plan horizontal. On superpose alors dans le sextant l'image directe de l'astre et son image réfléchiée sur la surface du mercure. On mesure l'angle formé par les deux directions ; soit β cet angle, représenté sur la figure 4.8. La hauteur réelle de l'astre au-dessus de l'horizon en fonction de β est : $h = \beta/2$.

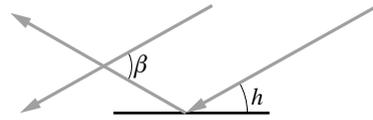


Figure 4.8 • Définition de l'angle β .

Nous retiendrons des deux exemples précédents plusieurs points importants qui sont :

- Si l'on observe à travers un dioptre plan des rayons réfractés, issus d'un point objet A , on voit en réalité son image A' dont la position peut être obtenue par l'intersection du prolongement de deux rayons particuliers issus de A . Cette position est toujours différente de celle de A .
- À travers une lame à faces parallèles un objet est vu plus proche qu'il n'est en réalité.

1.2. Application à l'étude de phénomènes lumineux naturels

1.2.1. Réfraction atmosphérique

L'atmosphère de la Terre peut être représentée dans des conditions normales de température par des couches d'indice diminuant avec la densité de l'air, et donc avec l'altitude (voir chapitre 1, la loi de Gladstone). Ce milieu n'est donc pas caractérisé par une seule valeur de l'indice car il est inhomogène et la propagation d'un rayon lumineux n'y est pas rectiligne. Un promeneur qui regarde de nuit un astre à travers l'atmosphère se trouve donc dans une situation analogue à celle du nageur qui regarde le parasol assis au fond de la piscine. Au fur et à mesure que le rayon descend dans l'atmosphère, il rencontre des couches d'air de plus en plus denses et se courbe vers la Terre : on appelle ce phénomène naturel la réfraction atmosphérique.

La direction dans laquelle le promeneur voit arriver la lumière d'une étoile est toujours plus élevée sur l'horizon que dans la réalité, bien que l'écart entre la position réelle et la position observée soit très faible (une fraction de degré). La figure 4.9 illustre, en exagérant le phénomène, l'influence de la réfraction atmosphérique sur l'observation des étoiles depuis la Terre.

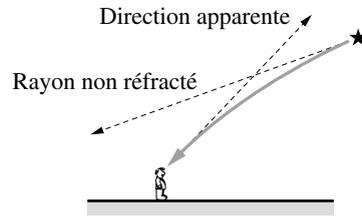


Figure 4.9 • Incidence de la réfraction atmosphérique sur la vision des étoiles.

1.2.2. Étude analytique de la réfraction atmosphérique

On peut mieux comprendre les phénomènes de réfraction atmosphérique, en analysant en détail la courbure de la trajectoire d'un rayon lumineux dans l'atmosphère. À mesure que le rayon se déplace d'une couche à l'autre, l'angle i qu'il fait avec la verticale vérifie la relation de Descartes (figure 4.10) :

$$n(z) \sin i = n_0 \sin i_0$$

$n(z)$ est la valeur de l'indice de réfraction à l'altitude z . Les indices « 0 », qui décrivent les conditions au départ, en haut de l'atmosphère, peuvent aussi correspondre aux conditions au sol.

Quand le rayon descend d'une quantité dz , il se déplace aussi selon l'axe x d'une quantité dx . Ces deux quantités vérifient la relation :

$$\tan i = \frac{\sin i}{\sqrt{1 - (\sin i)^2}} = \frac{\frac{n_0}{n(z)} \sin i_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n(z)} \sin i_0\right)^2}} = \frac{n_0 \sin i_0}{\sqrt{n^2(z) - (n_0 \sin i_0)^2}} = \frac{dx}{dz}$$

On obtient alors une équation différentielle dont la solution est $z(x)$ que l'on peut déterminer si l'on connaît la loi de variation de n avec l'altitude z . Cette équation s'écrit :

$$\frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - (n_0 \sin i_0)^2}} = \frac{dx}{n_0 \sin i_0}$$

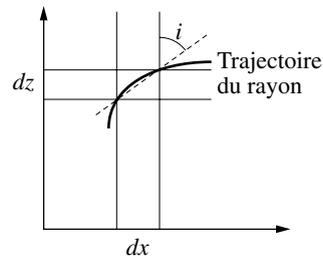


Figure 4.10 • Définition des quantités dx et dz sur le trajet du rayon.

Avec une loi d'indice de la forme $n^2(z) = n_0^2 - kz$, l'équation différentielle devient :

$$\frac{dz}{\sqrt{(n_0 \cos i_0)^2 - kz}} = \frac{dx}{n_0 \sin i_0}$$

dont la solution évidente est :

$$-\frac{2}{k} \sqrt{(n_0 \cos i_0)^2 - kz} = \frac{x}{n_0 \sin i_0} + C$$

Si, au sol, $n = n_0$ pour $x = z = 0$, on détermine la constante $C = -\frac{2}{k} n_0 \cos i_0$.

Après simplification, z dépend de x selon une loi parabolique :

$$z(x) = -\frac{kx^2}{(2n_0 \sin i_0)^2} + \frac{x}{\tan i_0}$$

La courbure du rayon dépend donc essentiellement du signe de k et donc du gradient d'indice. Suivant le signe de la constante k , la parabole, et donc le rayon, sont tournés vers le haut ($k < 0$) ou vers le bas ($k > 0$). Dans le premier cas, on décrit un mirage inférieur, dans le deuxième un mirage supérieur. Le premier cas est par exemple le phénomène de « flaque d'eau sur les routes », le deuxième, celui du coucher et du lever du Soleil. Les 2 situations sont schématisées sur les figures 4.11 et 4.12.

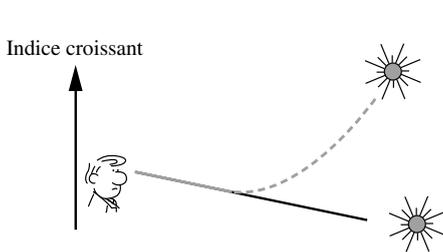


Figure 4.11 • Quand l'indice croît avec l'altitude, les rayons sont courbés vers le haut. L'image est au-dessous de l'objet. C'est le phénomène de « flaques d'eau » sur les routes.

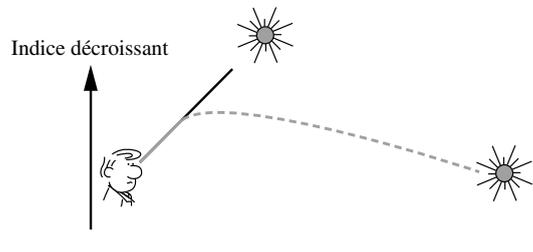


Figure 4.12 • Quand l'indice décroît avec l'altitude, le rayon est courbé vers le bas. L'image est au-dessus de l'objet. C'est la situation normale de l'atmosphère où la réfraction relève les images, provoquant par exemple un retard du coucher du Soleil et une avance de son lever.

Lorsque $k > 0$, l'observateur placé en B (figure 4.13) voit l'image O' d'un objet terrestre O dans le ciel ! La distance OB est donnée par la valeur de x , différente de zéro, qui annule z , soit :

$$x_B = \frac{2n_0^2 \sin 2i_0}{k}$$

Dans des conditions climatiques normales ($n_0 = 1,00029$ et $k = 6 \cdot 10^{-6} \text{ km}^{-1}$), cette distance est très grande, de plusieurs centaines de milliers de kilomètres ! Pour qu'elle soit réduite, il faudrait des valeurs de k beaucoup plus importantes, c'est-à-dire des anomalies de gradient thermique telles que celles observées dans les pays froids ou en hiver à nos latitudes.

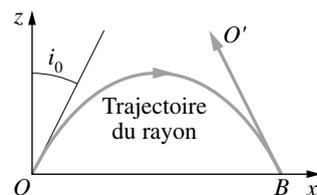


Figure 4.13 • Trajectoire d'un rayon dans un mirage supérieur.

1.2.3. Mirages

Lorsqu'il y a de grandes variations de températures entre le sol et les basses couches de l'atmosphère, l'indice peut au contraire augmenter avec l'altitude ; on assiste alors à la formation d'un mirage. Des objets éloignés, situés au sol ou à proximité de l'horizon, apparaissent comme des images vacillantes, selon les cas droites ou renversées, agrandies ou réduites, simples ou multiples. Pour qu'un mirage se forme, il faut que des couches d'air de températures nettement différentes voisinent, ce qui suppose un temps calme, sans vent.

• Mirage inférieur

Le mirage inférieur est le plus simple des fantômes aériens. Il se produit quand un sol dégagé sur une longue distance est surchauffé (route, piste d'aviation, désert). Il suffit d'une variation de 3°C de température sur une distance de 1 m. Alors, l'indice de réfraction diminue lorsque le rayon descend vers le sol. Les rayons lumineux qui se dirigent vers le bas subissent une « réflexion totale » et repartent vers l'observateur en semblant provenir du sol (figure 4.14). L'observateur voit donc le paysage à l'envers sur le sol, ciel compris, et prend pour une flaque d'eau ce qui est en réalité l'image du ciel. C'est l'aspect mouillé que prennent nos routes goudronnées lorsqu'elles sont exposées au Soleil. Le mirage inférieur peut aussi donner une image droite.

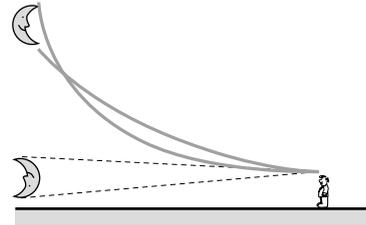


Figure 4.14 • Le mirage inférieur. Au niveau de la route surchauffée, la température élevée provoque une dilatation de l'air, une baisse de densité et donc une diminution de l'indice de réfraction, ce qui courbe les rayons vers le haut.

• Mirage supérieur

Les mirages supérieurs apparaissent le plus souvent en mer, quand cette dernière est plus froide que l'air. Ils sont également très fréquents dans les régions polaires où les couches basses de l'atmosphère sont plus froides que les couches supérieures. On l'observe aussi en hiver ou au printemps lorsqu'un vent chaud souffle du sud alors que les couches inférieures de l'atmosphère restent froides à cause de la neige. Dans ce cas, l'indice de réfraction diminue quand le rayon s'écarte du sol. Ainsi, au-dessus du sol froid, la lumière qui vient de l'arbre est déviée (figure 4.15) et pour l'observateur, l'arbre semble être dans le ciel. Ce mirage peut aussi donner une image renversée.

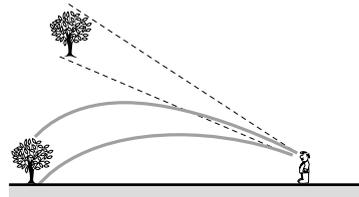


Figure 4.15 • Le mirage supérieur. La très basse température au niveau du sol provoque une augmentation de densité de l'air. Ceci accentue la réfraction normale, ce qui courbe encore plus les rayons vers le bas.

• Fata Morgana

Plus étonnante encore est la **Fata Morgana**, le système de mirages le plus complexe qui soit, combinaison de mirages inférieur et supérieur. Les différentes couches d'air forment des images simultanément droites ou renversées qui s'empilent en formant une colonne verticale. Le phénomène est, paraît-il, souvent visible de part et d'autre du

détroit de Messine entre l'Italie et la Sicile. La ville d'en face apparaît comme un enchevêtrement rocambolesque de bâtiments, considéré comme le château de la fée Morgane de la légende du roi Arthur. Cet effet insolite est fréquent au-dessus de la mer Baltique au dégel du printemps.

La figure 4.16 donne un schéma de principe de la **Fata Morgana**. La lumière qui arrive du point A à l'œil de l'observateur O suit deux chemins en formant un mirage inférieur (A'') et un mirage supérieur (A'). Le point A se trouve alors étiré sur toute la longueur $A'A''$, qui peut apparaître comme un obstacle insurmontable.

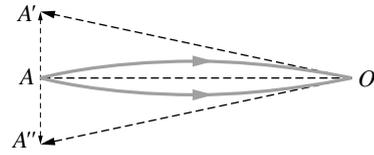


Figure 4.16 • La Fata Morgana.

1.2.4. Aplatissement du Soleil

Le Soleil n'est pas ponctuel. Vu de la Terre, il a un diamètre angulaire de l'ordre de 30 minutes d'angle. La réfraction atmosphérique variant avec l'altitude, les bords extrêmes du soleil sont donc inégalement relevés (figure 4.17).

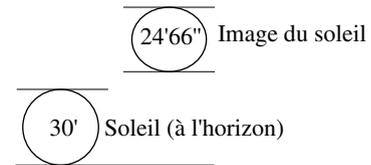


Figure 4.17 • Aplatissement du Soleil.

Il est possible d'expliquer simplement ce phénomène. Hors atmosphère, le diamètre angulaire du Soleil serait inchangé et un observateur verrait, venant de l'horizon, des rayons faisant avec la verticale des angles respectifs de 90° et $89,5^\circ$. Sur la terre, en raison de la réfraction, les angles de ces rayons avec la verticale sont respectivement égaux à $88,65^\circ$ et $88,56^\circ$ ($n = 1,00029$). Le bord inférieur du Soleil est donc plus relevé que le bord supérieur, ce qui donne l'image d'un Soleil aplati verticalement de $5'24''$, soit $1/6$ environ de son diamètre angulaire. L'impression d'un Soleil ou d'une Lune plus gros à l'horizon n'est qu'une simple illusion d'optique.

La réfraction atmosphérique a une incidence sur la durée du jour. En effet, compte tenu de cette inclinaison des rayons à l'horizon, le Soleil, alors qu'il devrait être totalement couché, est encore visible de la terre. Il disparaît à partir du moment où le rayon extrême qui atteint l'œil de l'observateur fait avec la verticale un angle de 90° . Le diamètre apparent de la fraction de soleil que l'on voit alors qu'il est déjà couché est donc au maximum égal à $1,35^\circ$ d'angle. L'effet est le même que le Soleil se lève ou se couche. Le cumul des deux effets nous fait gagner environ 5 minutes de jour. Ainsi, le jour de l'équinoxe, les durées du jour et de la nuit ne sont pas strictement égales, le jour durant 12 h 05 minutes au lieu de 12 heures.

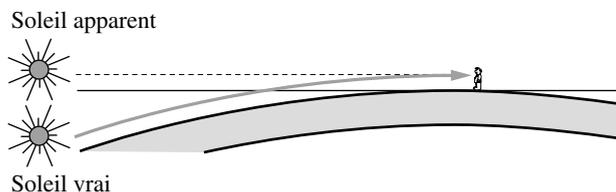


Figure 4.18 • Influence de la réfraction atmosphérique sur la durée du jour.

1.2.5. Rayon vert

Quand de la lumière blanche traverse l'atmosphère, la réfraction dévie les différentes longueurs d'ondes de la source lumineuse de différentes manières, l'indice de réfraction étant une fonction de la longueur d'onde (voir chapitre 1, loi de Cauchy). Ainsi un rayon est d'autant plus dévié qu'ils ne sont pas superposés. Un observateur verra donc par exemple le rayon bleu plus dévié que le rouge et il lui semblera que le rayon bleu arrive au-dessus du rayon rouge (figure 4.19). Ceci correspond à l'inversion des couleurs observées après un prisme (voir chapitre 3).

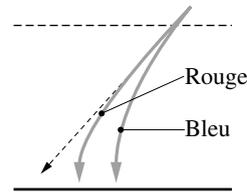


Figure 4.19 • Déviations des différentes longueurs d'ondes du visible par la réfraction atmosphérique. Le rayon en pointillés représente un passage hors atmosphère.

Le rayon vert s'explique par cette séparation des différentes couleurs de la lumière du Soleil. L'indice de l'air dépendant de la longueur d'onde est légèrement plus élevé pour le bleu que pour le rouge. En effet, $n_{\text{rouge}} (\lambda = 0,8 \mu\text{m}) = 1,000\,291$ et $n_{\text{bleu}} (\lambda = 0,4 \mu\text{m}) = 1,000\,299$.

Quand le Soleil se couche, les différentes couleurs sont donc séparées par la réfraction avec une déviation plus importante pour le rayon bleu que pour le rayon rouge, la différence atteignant 2 secondes d'arc. Chaque couleur forme donc une image séparée du Soleil et de bas en haut on peut observer les disques rouge, orange, vert, jaune et bleu (figure 4.20). Sur un parcours très long, les rayons bleus sont généralement complètement absorbés par la diffusion, dite de Rayleigh. À l'horizon, l'épaisseur d'atmosphère traversée est environ 50 fois celle traversée au zénith. Si l'atmosphère est très transparente, la dernière lueur est verte. Pendant le quart d'heure qui précède le coucher du Soleil, on peut donc observer un liseré vert entourant la moitié supérieure du Soleil, alors que la moitié inférieure est entourée d'un liseré rouge. Cet effet est bien visible quand le haut du Soleil est masqué par une bande de nuages. C'est donc l'image verte du Soleil qui disparaît la dernière, le phénomène s'intensifiant au fur et à mesure que le Soleil s'abaisse à l'horizon. Le rayon extrême vert apparaît quelquefois séparé du disque solaire à cause de l'absorption des radiations jaunes et oranges par la vapeur d'eau et l'ozone atmosphérique. Notons que cette observation est facilitée par le fait que l'œil est en général plus sensible aux radiations vertes.

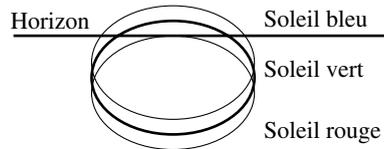


Figure 4.20 • Le rayon vert.

2. CRITÈRES DE QUALITÉ D'UN SYSTÈME

2.1. Qu'est-ce qu'un bon instrument d'optique ?

Un instrument d'optique possède toujours des défauts rassemblés sous le terme **d'aberrations**, classées en différentes catégories : aberration sphérique, aberration chromatique, coma, astigmatisme, courbure de champ, distorsion... On demande à un bon instrument de fournir une image fidèle d'un objet. En particulier, tout rayon issu d'un

point A doit après avoir traversé l'instrument passer par un point image unique A' . Cette correspondance point par point caractérise les propriétés de **stigmatisme** d'un système optique (venant du grec *stigma* = point). De même, tout objet A placé dans un plan perpendiculaire à l'axe de l'instrument doit donner une image A' également perpendiculaire à cet axe. Le système correspondant est dit **aplanétique**. Les propriétés de stigmatisme et d'aplanétisme ne suffisent pas pour que l'image soit de bonne qualité : en particulier, si elle est inclinée par rapport à l'axe, on peut observer des défauts de distorsion.

Le critère de qualité d'un système optique est l'absence d'aberrations (aplanétisme, stigmatisme et absence de distorsion).

2.2. Conditions de Gauss

Pour comprendre la portée de ces critères de qualité et leur nécessité, reconsidérons l'exemple simple discuté au début de ce chapitre (paragraphe 1.1.2, figure 4.3) d'une surface de séparation plane entre deux milieux d'indices n et n' (avec $n' > n$).

Reprenons le calcul précis de la position des images. On avait considéré un point objet A et montré qu'un observateur placé dans le deuxième milieu et recevant les rayons réfractés a l'impression de les « voir » issus du point A' . Alors,

$$HA' = HA \frac{\tan i}{\tan r}$$

Si l'on fait varier l'angle i , l'angle r et le rapport HA'/HA varient simultanément. Un calcul élémentaire donne, avec $n_r = n'/n$:

$$\frac{HA'}{HA} = \frac{\tan i}{\tan r} = \frac{\frac{\sin i}{\sqrt{1 - \sin^2 i}}}{\frac{\sin i/n_r}{\sqrt{1 - \sin^2 i/n_r^2}}} = \sqrt{\frac{n_r^2 - \sin^2 i}{1 - \sin^2 i}}$$

Ainsi, ce rapport étant une fonction de i , chaque rayon issu de A avec un angle d'incidence i différent, donne sa propre image A' . Avec $n' = 1,33$ et $n = 1$, le rapport passe de 1,42 à 1,59 quand l'angle i varie de 30° à 45° .

Par contre, si i est petit, on peut négliger $\sin i$ devant n_r et devant 1 et la position de A' ne dépend plus de i . Enfin, on a :

$$\frac{HA'}{HA} \approx n_r$$

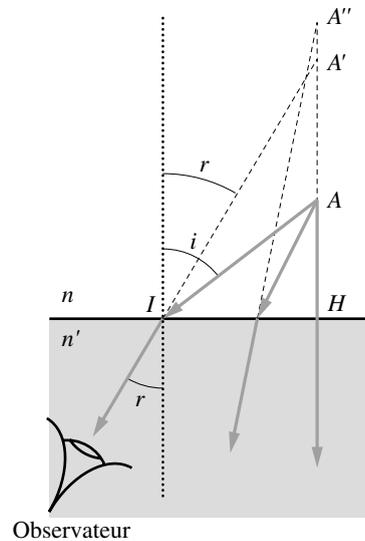


Figure 4.21 • Image d'un objet à travers un dioptre plan.

Nous avons dans ce cas une seule image A' , quel que soit l'angle d'incidence i .

En conclusion, un tel système n'est **pas intrinsèquement stigmatique**. Pour que le stigmatisme soit vérifié, il faut se placer dans l'approximation des petits angles d'incidence. L'approximation de Gauss consiste à limiter physiquement les faisceaux (avec des trous par exemple que l'on appelle des diaphragmes), afin de limiter les angles d'incidence et de conserver les rayons proches de l'axe : on les dit alors **paraxiaux**. Comme limite, on peut raisonnablement admettre des angles d'incidence de quelques degrés. Cette approximation nécessite également une condition sur l'ouverture des faisceaux. En effet, un faisceau de très faible ouverture (pinceau) trop incliné sur la surface de séparation donne des angles d'incidence élevés incompatibles avec le stigmatisme.

Pour que le stigmatisme soit vérifié, il faut se placer dans l'approximation de Gauss :

- faisceaux peu ouverts (pinceaux) ;
- angles d'incidence petits (pinceaux paraxiaux).

Nous venons de construire des « images théoriques » obtenues à l'intersection des rayons sortants. Pour comprendre le rôle de l'œil que nous n'avons pas encore introduit, reprenons l'exemple du poisson vu de l'extérieur de l'eau. D'un point A (la tête du poisson par exemple), on dessine des rayons qui forment un faisceau très large. Ils arrivent à la surface et se réfractent. Étant donnée la faible taille de la pupille de l'œil, nous ne voyons qu'une toute petite portion du faisceau complet hachurée sur la figure 4.22. L'œil va placer le point A' , image du point A , à l'intersection des rayons interceptés, c'est-à-dire grossièrement à l'intersection des rayons extrêmes pénétrant dans l'œil. Si nous déplaçons la tête, les rayons interceptés ne sont plus les mêmes et on voit une image différente. La pupille de l'œil est assimilable à un diaphragme. Si elle était beaucoup plus grande, on verrait simultanément plusieurs images qui composeraient une image résultante floue. C'est grâce à cette limitation que nous voyons des images nettes. Une étude détaillée de ce phénomène est présentée en annexe de ce chapitre.

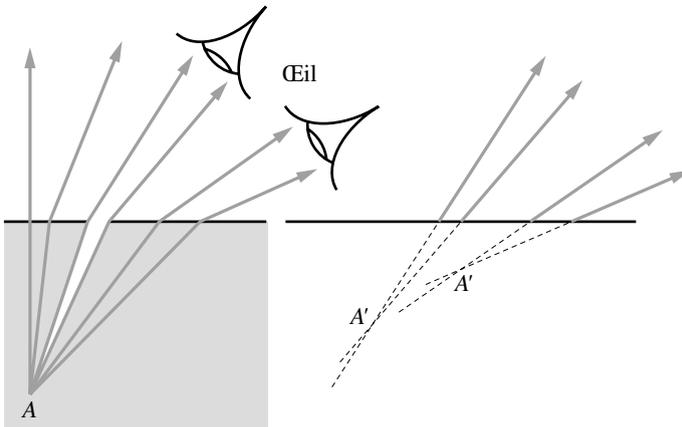


Figure 4.22 • Le problème de la vision sous l'eau.

3. IMAGES RÉELLES ET IMAGES VIRTUELLES

Pour construire l'image d'un point A à travers un système, on recherche le point de convergence A' de deux rayons particuliers issus de A ou de leurs prolongements. Quand les rayons incidents ont traversé la surface de séparation, ils proviennent, après réfraction, du point image A' . Ce dernier n'a pas d'existence réelle dans les différents exemples présentés jusqu'ici car seul le prolongement des rayons sortants y est physiquement passé et non les rayons eux-mêmes. Ainsi l'image A' ne peut être matérialisée sur un écran. Elle n'existe donc pas physiquement et on dit qu'elle est **virtuelle**.

Considérons maintenant la formation de l'image d'un objet AB à travers un autre instrument familier qu'est le projecteur de diapositives et pour lequel nous dessinons uniquement le parcours de deux rayons particuliers issus de B (figure 4.23).

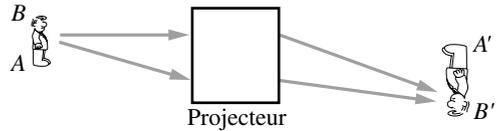


Figure 4.23 • Image produite par un projecteur de diapositives.

S'il n'est pas nécessaire de connaître le détail du parcours des rayons, nous savons que d'un point B de la diapositive se forme une image B' qui brille sur l'écran, matérialisant l'image **réelle**. Les personnes qui ont manipulé cet appareil savent que l'image $A'B'$ est renversée par rapport à l'objet AB et qu'il faut donc installer les diapositives à l'envers pour les observer correctement à l'écran.

Une image est virtuelle si elle est formée par l'intersection des prolongements de rayons physiques. Elle ne peut pas être obtenue sur un écran. C'est le cas de l'image vue à travers une lame à faces parallèles et un miroir plan.

Au contraire, une image est réelle si elle est formée par l'intersection des rayons physiques issus de l'objet A . Elle peut être obtenue sur un écran. C'est le cas de l'image donnée par le projecteur de diapositives.

Remarquons pour terminer que si, parmi les rayons qui convergent sur l'image, l'un au moins est un prolongement d'un rayon, l'image est virtuelle. Nous reviendrons en détail dans les différents chapitres sur cette notion complexe d'image virtuelle et d'image réelle dans le cas de systèmes optiques particuliers.

4. OBJETS RÉELS ET OBJETS VIRTUELS

Prenons ici l'exemple d'un miroir plan dont la face réfléchissante est à droite (figure 4.24). Il est habituellement utilisé avec une source objet réelle placée devant le miroir, (à gauche sur la figure). Les rayons issus de la source sont réfléchis par le miroir et forment une image virtuelle.

On peut compléter le montage avec une lentille en formant par exemple une image A' du Soleil (objet réel) qui va

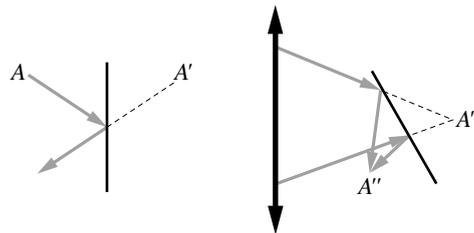


Figure 4.24 • L'objet virtuel. C'est l'exemple de la figure de droite où le miroir intercepte l'image du Soleil donnée par la lentille L . A' devient un objet virtuel pour le miroir.

être une tache très brillante, pouvant brûler du papier. Si l'on interpose le miroir entre la lentille et l'image brûlante A' , le miroir dévie les faisceaux et forme une nouvelle image A'' (figure 4.24). Si l'on ne s'intéresse qu'aux images et objets en ignorant la lentille, l'image A' est devenue un objet pour le miroir et, cet objet situé derrière le miroir est virtuel, non matérialisable sur un écran.

Un objet est réel s'il existe physiquement (lampe, Soleil...). C'est le cas pour tous les systèmes étudiés jusqu'ici. Si le système étudié est précédé d'un autre système optique, on peut constituer un objet virtuel.

5. CLASSIFICATION DES SYSTÈMES OPTIQUES

Des exemples, comme la lame à faces parallèles et le miroir, constituent des systèmes optiques simples. Dans la lame à faces parallèles, constituée de dioptries transparents, un rayon incident ne peut subir que des réfractations. Si un système optique contient au moins un miroir, un rayon peut subir des réfractations et des réflexions. On parlera respectivement de systèmes dioptriques et de systèmes catadioptriques. Si le système catadioptrique ne contient que des surfaces réfléchissantes, il est dit catoptrique.

Les discussions précédentes montrent que :

La nature de l'image formée par un système optique est aussi liée à sa position dans l'espace. On peut diviser l'espace en deux régions, l'espace réel et l'espace virtuel.

Pour un système catadioptrique ou catoptrique, l'espace « image virtuelle » est en arrière et l'espace « image réelle » en avant (figure 4.25a), ces deux positions étant définies par le sens de propagation de la lumière.

Pour un système dioptrique, l'espace « image virtuelle » est en avant et l'espace « image réelle » est donc en arrière (figure 4.25b).

Dans les deux cas, l'espace « objet réel » est en avant et l'espace « objet virtuel » est en arrière .

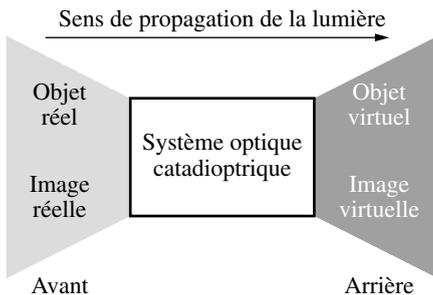


Figure 4.25a • Définition de l'espace réel et de l'espace virtuel pour l'objet et l'image d'un système optique catadioptrique.

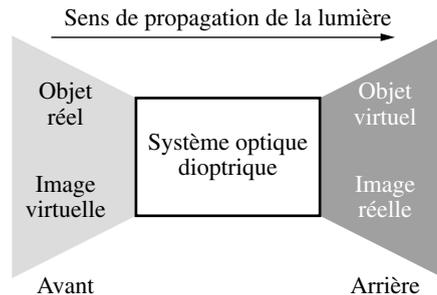


Figure 4.25b • Définition de l'espace réel et de l'espace virtuel pour l'objet et l'image d'un système optique dioptrique.

À RETENIR

- Si l'on observe des rayons issus d'un point objet A et réfractés par un dioptré plan, on ne voit pas directement A mais son image A' . Sa position peut être obtenue en considérant le prolongement de deux rayons particuliers issus de A . La position de l'image A' est en général différente de celle de A .
- À travers une lame à faces parallèles, un objet apparaît plus proche qu'il n'est en réalité.
- L'atmosphère de la Terre peut être représentée par des couches d'indice diminuant avec la densité de l'air, donc le plus fréquemment avec l'altitude : on dit qu'il y a **réfraction atmosphérique**. Lorsqu'il y a de grandes variations de températures entre le sol et les basses couches de l'atmosphère, l'indice peut au contraire augmenter localement avec l'altitude et on assiste à la formation d'un **mirage**.
- Lorsqu'un rayon issu d'un point A passe par un point image unique A' après avoir traversé l'instrument, on dit que le système est **stigmatique**. De même, lorsqu'un objet placé dans un plan perpendiculaire à l'axe de l'instrument donne une image également perpendiculaire à cet axe, le système correspondant est dit **aplanétique**.
 Pour que le stigmatisme soit vérifié, il faut se placer dans l'**approximation de Gauss** :
 - faisceaux peu ouverts (pinceaux) ;
 - angles d'incidence petits (pinceaux paraxiaux).
- Une **image** est **virtuelle** si elle est formée par l'intersection des prolongements de rayons physiques. Elle ne peut pas être obtenue sur un écran (cas d'une image vue à travers la lame à faces parallèles et le miroir plan).
- Au contraire, une **image** est **réelle** si elle est formée par l'intersection des rayons physiques issus de l'objet A . Elle peut être obtenue sur un écran (cas d'une image donnée par un projecteur de diapositives).
- Un **objet** est **réel** s'il existe physiquement (lampe, Soleil...). C'est le cas pour tous les systèmes étudiés jusqu'ici. Si le système étudié est précédé d'un autre système optique, on peut dans certains cas constituer un **objet virtuel**.
 On peut distinguer trois types de systèmes optiques :
 - les systèmes **dioptriques** qui sont constitués de dioptrés transparents dans lesquels un rayon ne peut subir que des réfractions ;
 - les systèmes **catadioptriques** qui contiennent au moins un miroir, un rayon incident pouvant subir des réfractions et des réflexions ;
 - les systèmes **catoptriques** qui ne contiennent que des surfaces réfléchissantes.
- La nature de l'image formée par un système optique est liée à sa position dans l'espace. On peut diviser l'espace en deux régions, l'**espace réel** et l'**espace virtuel** :
 - pour un système dioptrique, l'espace « image virtuelle » est en avant et l'espace « image réelle » est en arrière ;

– pour un système catadioptrique l'espace « image virtuelle » est en arrière et l'espace « image réelle » est en avant.

Dans les deux cas, l'espace « objet réel » est en avant et l'espace « objet virtuel » est en arrière.

ANNEXE 2

Vision du poisson sous l'eau

Des questions reviennent souvent dans les problèmes de réfraction : le poisson vu par le pêcheur semble-t-il plus gros, plus près, déformé ? Nous avons déjà esquissé un élément de réponse dans le chapitre 4 et nous allons développer dans cette annexe une méthode de calcul complète qui permet de dessiner point par point l'image du poisson vu à travers la surface de l'eau. Si la mise en équation est relativement simple, le passage au calcul numérique est difficile car on aboutit à un polynôme du quatrième degré. La **méthode dite de Ferrari** permet d'en obtenir des solutions algébriques, mais il est plus simple de la résoudre par itérations. C'est ce que nous nous proposons de faire, répondant ainsi aux deux questions suivantes : où est l'image du poisson et que voit l'œil du pêcheur ? Nous commencerons par répondre à la deuxième question en déterminant quels rayons issus d'un point du poisson aboutissent dans l'œil de l'observateur.

Ce que voit le pêcheur

Un point A , placé sous l'eau à une profondeur h , représente ici la position du poisson (figure 4.26). L'œil du pêcheur est repéré par le point B de coordonnées (d, l) . Dans un premier temps, on considère un rayon qui va du point A au point B en se réfractant en un point M à l'interface eau-air. Il faut donc déterminer la coordonnée x_M de M qui vérifie la loi de Snell-Descartes.

On a de manière générale :

$$\sin i = n \sin r$$

soit :

$$\frac{d-x}{\sqrt{l^2+(d-x)^2}} = n \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

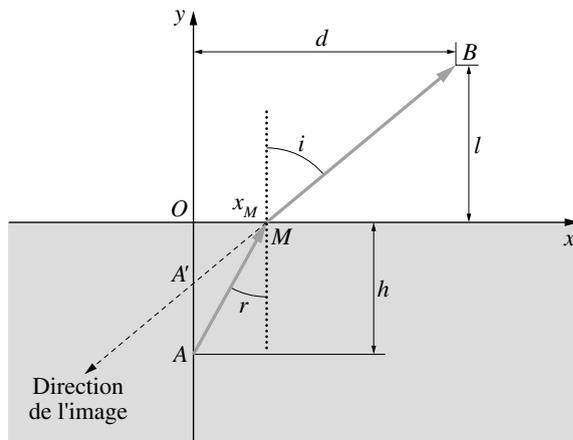


Figure 4.26 • Détermination de la position du point x_M .
Le rayon issu de la source A est réfracté en M , puis atteint l'extrémité de l'œil du pêcheur.

Si l'on élève les deux membres au carré, on obtient un polynôme du 4^e degré en x . Pour résoudre cette équation par itérations, il faut isoler la variable x en écrivant par exemple :

$$wx = \frac{1}{n} \sqrt{h^2 + x^2} \frac{d - x}{\sqrt{l^2 + (d - x)^2}}$$

Choisissons pour commencer la valeur $x = 1$ mètre. Pour procéder à l'itération, on injecte cette valeur dans le membre de droite. On obtient ainsi une nouvelle valeur que l'on réinjecte à nouveau dans le membre de droite. Une dizaine d'itérations sont suffisantes. Les résultats correspondants sont rassemblés dans le tableau 4.1, pour $d = 2$ m et $l = 1,8$ m (coordonnées de l'œil selon Ox et Oy). L'itération finale fixe les coordonnées du point M .

L'œil place l'image A' sur la droite BM . La connaissance des coordonnées des points B et M permet d'en déterminer l'équation donnée par :

$$y = l \frac{x - x_M}{d - x_M}$$

En réalité, l'œil et le poisson ne sont pas ponctuels et ont tous deux une dimension. Les points A_1 et A_2 représentent les positions de la tête et de la queue du poisson. De même, les deux extrémités de l'œil du pêcheur sont repérées par les points B_1 (l_1, d_1) et B_2 (l_2, d_2) (figure 4.27).

Tableau 4.1 • Calcul de x par itérations. Le poisson est à 1 m de profondeur ($h = 1$ m). L'indice de l'eau est égal à 1,33. L'œil du pêcheur est en B , situé à $d = 2$ m et $l = 1,8$ m. Tous les résultats sont exprimés en mètres.

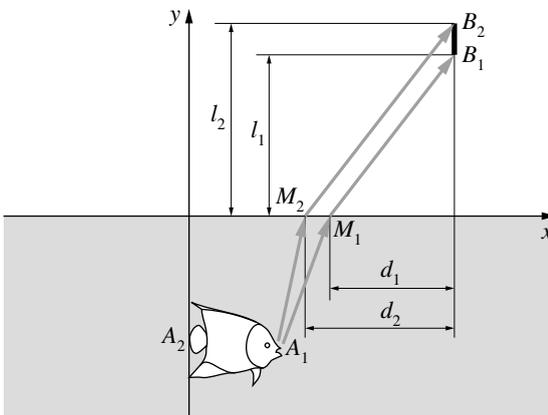


Figure 4.27 • Prise en compte des dimensions du poisson et de l'œil. Représentation des rayons extrêmes, quand l'observateur regarde la tête du poisson.

	$d = 2$ m $l = 1,8$ m
0	$x = 1$
1	0,51639310
2	0,53821353
3	0,53828156
4	0,53828174
5	0,53828174
6	0,53828174
7	0,53828174
8	0,53828174
9	0,53828174
10	0,53828174
11	0,53828174
12	0,53828174
13	0,53828174

Pour chacun des deux rayons extrêmes de l'œil venant de la tête du poisson, on détermine comme précédemment par le calcul itératif les coordonnées des points M_1 et M_2 notées respectivement x_{M_1} et x_{M_2} (tableau 4.2).

Tableau 4.2 • Le poisson est à un mètre de profondeur ($h = 1$ m). L'œil du pêcheur de 5 mm de diamètre est situé entre les altitudes $d_1 = 1,8$ m et $d_2 = 1,805$ m.

	Tête du poisson		Queue du poisson	
	$d = 2$ m $l = 1,8$ m	$d = 2$ m $l = 1,805$ m	$d = 3$ m $l = 1,8$ m	$d = 3$ m $l = 1,805$ m
Abscisse des M_i (calcul itératif)	0,538282 m	0,53738 m	0,729248 m	0,728243 m
Abscisse de l'image	1,119621 m		0,297575 m	
Ordonnée de l'image	-0,51555 m		-0,34218 m	

L'observateur voit l'image de la tête du poisson en A'_1 , placée à l'intersection des droites B_1M_1 et B_2M_2 . On détermine ainsi les coordonnées de A'_1 :

$$x_{A'_1} = \frac{\frac{x_{M_2}l_2}{d_2 - x_{M_2}} - \frac{x_{M_1}l_1}{d_1 - x_{M_1}}}{\frac{l_2}{d_2 - x_{M_2}} - \frac{l_1}{d_1 - x_{M_1}}}$$

$$y_{A'_1} = \frac{l_1}{d_1 - x_{M_1}} (x_{A'_1} - x_{M_1})$$

De la même façon, on peut déterminer les coordonnées de A'_2 , image de la queue du poisson. Le calcul numérique présenté dans le tableau 4.2 considère un poisson de 1 m de long : sa tête est à $d = 2$ m et sa queue à $d = 3$ m. L'œil a une dimension de 5 mm.

La figure 4.28 reproduit à partir des résultats du tableau 4.2 les positions extrêmes du poisson et de son image vue par le pêcheur. On constate ainsi que le poisson est vu plus haut qu'il n'est en réalité, donc plus gros, inégalement relevé entre l'avant et l'arrière, donc incliné.

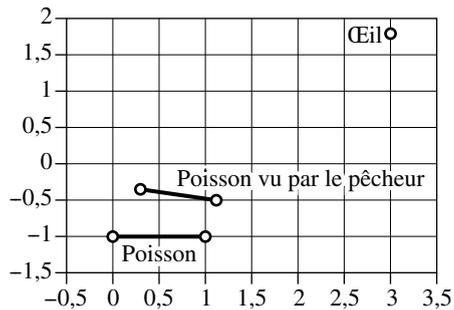


Figure 4.28 • Positions du poisson et de son image vue par l'œil du pêcheur.

Image d'un point sous-marin

Dans ce qui précède, nous avons sélectionné les rayons arrivant aux deux extrémités de l'œil. En réalité, tout couple de rayons sortant de la source donne lieu à « une image » A' située à leur intersection. L'œil en sélectionne uniquement une petite partie. Nous

allons maintenant étudier la vision globale que l'observateur a du poisson, sans se limiter aux rayons extrêmes.

Un objet A est placé à une profondeur h . Considérons deux rayons sortants dont les incidences respectives sur la surface de l'eau en M_1 et M_2 sont i_1 et i_2 (figure 4.29). Ils arrivent dans l'œil après s'être réfractés ; les angles de réfraction sont respectivement r_1 et r_2 .

Considérons le rayon AM_1 . On a :

$$OM_1 = h \tan r_1 \quad \sin i_1 = n \sin r_1$$

$$OA'_1 = \frac{OM_1}{\tan i_1} = h \frac{\tan r_1}{\tan i_1}$$

L'équation de la droite A'_1M_1 est alors

$$y = \frac{x - h \tan r_1}{\tan i_1}$$

On peut de même déterminer la droite d'équation A'_2M_2 . Ces deux droites se coupent en A' dont les coordonnées sont :

$$y_{A'} = -h \frac{\tan r_2 - \tan r_1}{\tan i_2 - \tan i_1} \quad x_{A'} = y_{A'} \tan i_1 + h \tan r_1$$

La figure 4.30 montre toutes les intersections pour un objet placé à 1 m de profondeur. Pour tracer la figure, on a déterminé les équations des droites pour des valeurs de r égales à 0, 2, ..., 48°.

On obtient finalement une sorte de flèche curviligne que l'on appelle une caustique. L'image de A est ainsi une énorme tache qui va depuis la profondeur de l'image gaussienne (placée à une profondeur $h/n = 1/1,33 = 0,75$ m) jusqu'à la surface de l'eau. Depuis l'extérieur, on ne voit qu'une toute petite partie de cette image en raison de la petite taille de l'œil. Suivant la position de l'œil, on interceptera des rayons venant de différents points de cette image et on aura l'impression de voir l'image bouger. Par exemple, si l'on se rapproche de la surface, on intercepte des rayons provenant de la partie supérieure gauche de l'image. On verra l'image monter tout en s'éloignant. Par contre si l'on se rapproche de la verticale de la source tout en restant à la même hauteur, l'image va au contraire descendre.

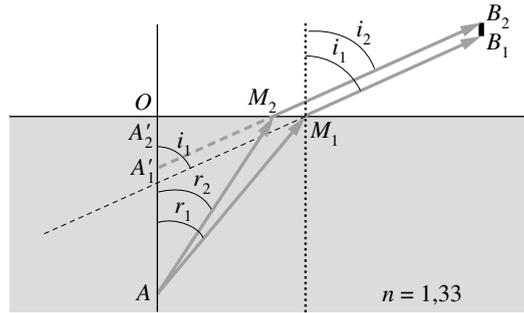


Figure 4.29 • Détermination de la direction de réfraction d'un rayon quelconque issu de la source A .

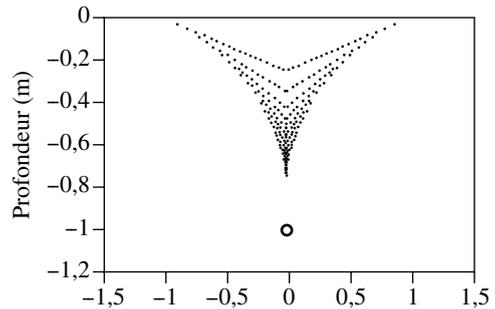
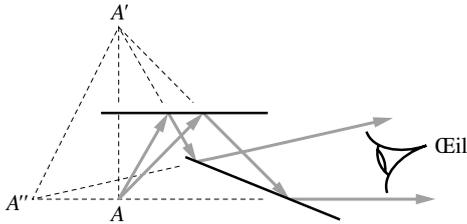


Figure 4.30 • Image d'un point sous-marin à travers la surface de l'eau. Le point est représenté par le petit cercle.

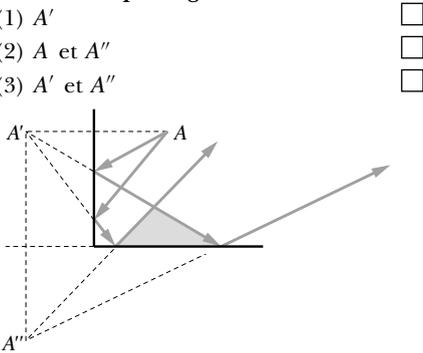
QCM

1 A est une source lumineuse qui donne successivement les images A' et A'' à travers deux miroirs plans. Que voit l'œil là où il est placé ?



- (1) A et A'
- (2) A et A''
- (3) A''

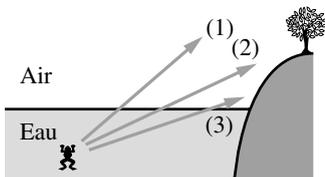
2 A est une source lumineuse qui donne successivement les images A' et A'' à travers deux miroirs plans. Que voit l'œil placé dans la partie grisée ?



- (1) A'
- (2) A et A''
- (3) A' et A''

3 Dans quelle direction la grenouille voit-elle l'arbre ?

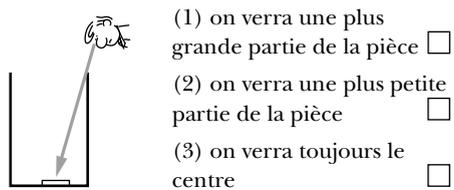
- (1) Plus haut (1)
- (2) Dans sa position réelle (2)
- (3) Plus bas (3)



4 Une personne qui cligne des yeux pour lire, le fait

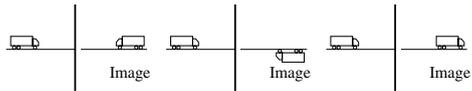
- (1) parce qu'elle est éblouie.
- (2) pour diaphragmer l'œil et se rapprocher des conditions de Gauss.
- (3) pour modifier les propriétés de convergence du cristallin.

5 Une pièce de monnaie est au fond d'un verre vide. On voit juste le centre de la pièce, dans les conditions de la figure. Si on remplit le verre d'eau



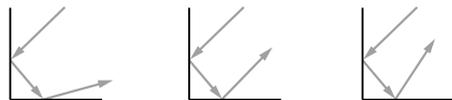
- (1) on verra une plus grande partie de la pièce
- (2) on verra une plus petite partie de la pièce
- (3) on verra toujours le centre

6 On forme l'image d'un camion à travers un miroir plan. Quel est le dessin correspondant à la réalité ?



- (1)
- (2)
- (3)

7 Quel est le bon trajet après réflexion sur les deux miroirs ?

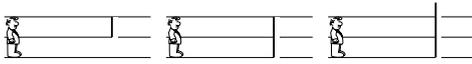


- (1)
- (2)
- (3)

8 L'image d'un objet à travers un miroir plan apparaît

- (1) plus grande que l'objet.
- (2) de même taille que l'objet.
- (3) plus petite que l'objet.

9 Quelle est la taille minimale du miroir plan dans lequel l'individu peut se voir en entier ?

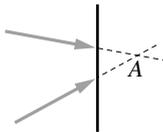


- (1) (2) (3)

10 Un miroir tourne de 10° . De combien tourne un rayon réfléchi sur ce miroir ?

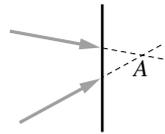
- (1) 5°
 (2) 10°
 (3) 20°

11 Un miroir plan est éclairé avec un faisceau convergent en A . Quelle est la nature de l'objet A ?



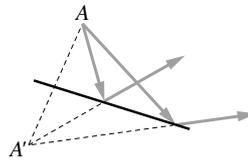
- (1) Réelle
 (2) Virtuelle
 (3) On ne peut répondre.

12 Un miroir plan est éclairé avec un faisceau convergent en A . Quelle est la nature de l'image A' ?



- (1) Réelle
 (2) Virtuelle
 (3) On ne peut répondre.

13 Avec la configuration suivante, peut-on obtenir une image réelle de A en plaçant astucieusement un deuxième miroir plan ?



- (1) Oui
 (2) Non
 (3) On n'a pas assez d'éléments pour répondre.

Réponses : 1. 3, 2. 3, 3. 1, 4. 2, 5. 1, 6. 1, 7. 2, 8. 3, 9. 1, 10. 3, 11. 2, 12. 2, 13. 2

EXERCICES

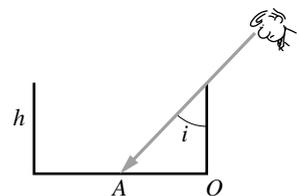
1 Vous êtes à la surface de l'eau et vous observez un poisson de longueur L nageant à la profondeur $h = 1$ m. On appelle T sa tête et Q sa queue. L'indice de l'eau est 1,33.

a) Déterminer géométriquement la position de l'image T' de T formée par le dioptre plan air-eau en utilisant le rayon vertical passant par T et un rayon faisant un angle i avec la verticale. Calculer la profondeur h' de l'image T' avec deux angles d'incidence 10° et 30° . Que constatez-vous ? Quelles sont les conséquences et pourquoi voit-on les poissons nettement ?

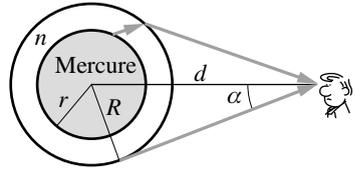
b) Déterminer la profondeur h' dans le cadre de l'approximation de Gauss. Faire le même calcul si le poisson est à 4 m de profondeur.

c) Un observateur est à la surface de l'eau et regarde un poisson de 1 m de longueur situé à 1 m de profondeur. En absence d'eau, lorsqu'il est juste à la verticale, il verrait ce poisson sous un angle α . Sous quel angle α' le voit-il depuis la surface de l'eau ?

2 En regardant depuis le bord d'un récipient de hauteur h sous une incidence i , une longueur OA est cachée. Quelle est la longueur cachée quand on regarde de la même manière le récipient plein d'un liquide d'indice n ? Calculer cette longueur avec $n = \sqrt{2}$, $i = 45^\circ$ et $h = 1$ m. Faites l'expérience en plaçant une pièce de monnaie au fond du récipient. Quand on remplit le verre, la pièce devient visible.

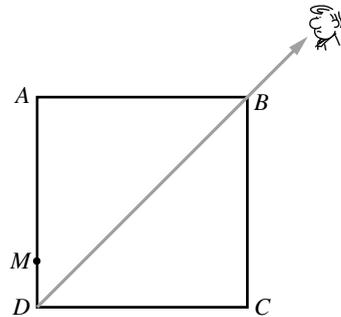


3 Dans un thermomètre, la colonne de mercure de rayon r est contenue dans un tube en verre de rayon R et d'indice n . On lit la graduation à la distance d .



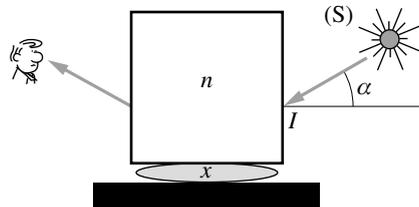
- a) Sous quel angle α voit-on le cylindre extérieur ?
- b) Sous quel angle β voit-on le cylindre de mercure ?
- c) Peut-on avoir $\beta > \alpha$? Que se passe-t-il quand $nr = R$?

4 Une règle en Plexiglas d'indice $n = \sqrt{2}$ a une section carrée $ABCD$ de 10 cm de côté. Un petit objet est placé en M sur la face AD ($DM = 2$ cm). Un observateur placé à grande distance, regarde selon la diagonale BD .



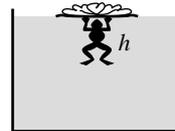
- a) Combien d'images l'observateur voit-il ?
- b) Donner la position des différentes images dans le plan $ABCD$.
- c) Construire sur une figure à l'échelle la marche des rayons.

5 Un cube de verre d'indice n repose sur un support horizontal noir. Sous sa base, on a déposé une goutte de liquide transparent d'indice x et l'on regarde cette goutte à travers la face verticale du cube. À l'opposé se trouve une source de lumière qui envoie un rayon incident SI .



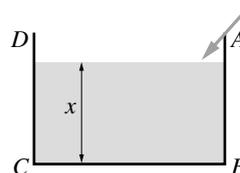
En partant de la verticale et en inclinant lentement le rayon incident SI , on voit subitement la goutte devenir très brillante pour un angle α . Que se passe-t-il quand la goutte devient visible. Écrire la relation existant entre x , n et α .

6 Sous un nénuphar flottant de 5 cm de rayon est cachée une grenouille de hauteur h . L'indice de l'eau est 1,33.



Sachant qu'elle n'est pas visible depuis le haut, quelle est la valeur maximale de h .

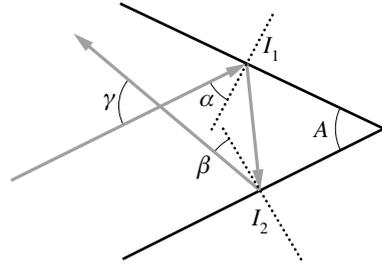
7 Un cuve rectangulaire $ABCD$, dont le fond est réfléchissant ($CB = 1,2$ m), contient un liquide d'indice $n = \sqrt{2}$ sur une hauteur x . Du point A part un rayon qui arrive sur le liquide avec un angle d'incidence de 45° . Il se réfracte, se réfléchit sur le fond et ressort en passant par D . Calculer la hauteur x du liquide sachant que $AB = 1$ m.



- 8** « ... à dix mètres de profondeur, nous marchions au milieu d'un essaim de petits poissons de toutes espèces ; soudain je fus témoin de l'un des plus beaux coups de fusil qui ait jamais fait tressaillir les fibres d'un grand chasseur ; un grand oiseau à large envergure, très nettement visible, s'approchait en planant. Le capitaine Nemo le mis en joue, le tira lorsqu'il fut à quinze mètres au-dessus des flots. L'animal tomba foudroyé. » (J. Verne. 20 000 lieues sous les mers).

Comment s'y prend le capitaine Nemo pour viser s'il voit l'oiseau sous une inclinaison de 60° par rapport à l'horizontale ? On suppose que la balle n'est pas déviée en sortant de l'eau. L'indice de l'eau est $n = \sqrt{2}$. Calculer l'angle d'inclinaison de la balle.

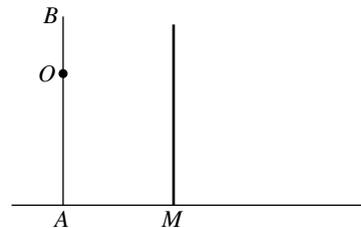
- 9** Deux miroirs plans font entre eux un angle A . Un rayon lumineux est envoyé dans le plan de section principale : il se réfléchit en I_1 puis en I_2 . Il fait un angle α avec la normale au point d'incidence I_1 et un angle β avec la normale au point d'incidence I_2 . On appelle γ l'angle formé par les deux rayons (incident et émergent).



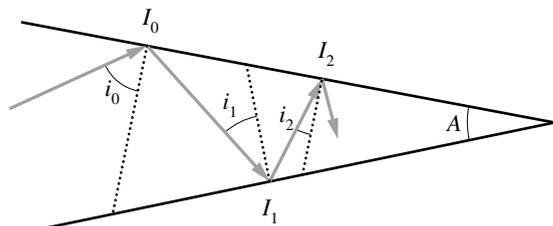
- a) Quelles relations vérifient les angles : α , β et A ; α , β et γ puis γ et A ?
 b) Que se passe-t-il quand les deux miroirs sont perpendiculaires ?

- 10** Un personnage de hauteur $AB = 1,80$ m se regarde dans un miroir plan vertical M de hauteur 1,75 m.

- a) Dessiner l'image $A'B'$ de AB à travers le miroir.
 b) Son œil O est placé à une hauteur de 1,60 m. Le personnage voit-il complètement son image ? Justifiez votre réponse en faisant apparaître les rayons limites. Que se passe-t-il si le personnage avance ? Ou s'il recule ?



- 11** Deux miroirs font entre eux un angle A . Un rayon lumineux se réfléchit sur ces deux miroirs avec des angles de réflexion égaux à i_0, i_1, i_2, \dots . Exprimer i_1 en fonction de A et i_0 . Sans démonstration, exprimer i_2 en fonction de i_1 et A , puis en fonction de A et i_0 . En déduire l'expression de i_n en fonction de A et i_0 . Que se passe-t-il quand $n \geq i_0/A$?



- 12** Une ampoule est située à 1,5 m du plafond. Elle est centrée au-dessus d'un miroir plan circulaire horizontal de 60 cm de diamètre placé à 50 cm au-dessus du sol. Sachant que la hauteur de la pièce est de 2,25 m, quelle est la portion du plafond éclairée par réflexion sur le miroir ?
- 13** On se regarde dans un miroir plan circulaire de 20 cm de diamètre.
- L'œil est à 20 cm du miroir. Représenter sur un graphique la région de l'espace vue dans le miroir.
 - On éloigne le miroir de 10 cm. Que devient l'image de l'œil ? Même question si on rapproche le miroir de 5 cm. Quelle loi générale sur la translation des miroirs plan peut-on tirer ?
 - On revient dans la position de départ et on fait pivoter le miroir d'un angle α autour de l'une de ses extrémités M_1 . Que devient l'image de l'œil ? Calculer α pour que l'œil soit juste visible sur le bord du miroir.
 - On voit son image qui se réfléchit sur le haillon horizontal d'une voiture qui s'éloigne à 60 km/h. Quelle est la vitesse d'éloignement de l'image ?
- 14** Un individu PC de 1,7 m de haut dont les yeux sont placés à 15 cm du sommet du crâne se regarde dans un miroir plan vertical. Quelle doit être la dimension minimale du miroir pour que le personnage se voie en entier ? À quelle hauteur doit être placée la base du miroir ?

15 Vision à travers une surface plane

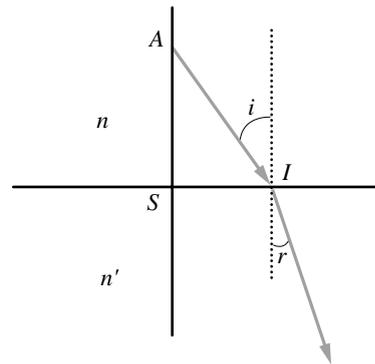
Un dioptre plan sépare 2 milieux d'indice n et n' . Une source A se trouve dans le milieu d'indice n .

1) En se plaçant dans le cadre de l'approximation des petits angles, donner l'expression de SA' en fonction de SA , n et n' .

L'eau a un indice $n' = 1,33$.

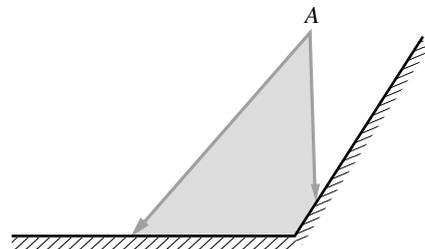
SA est un pêcheur de 1,8 m de hauteur. Sous quelle hauteur un poisson le voit-il ?

2) A est maintenant un poisson à 1 m de profondeur et $n = 1.33$. À quelle profondeur, le pêcheur placé dans un milieu d'indice $n' = 1$ le voit-il ?



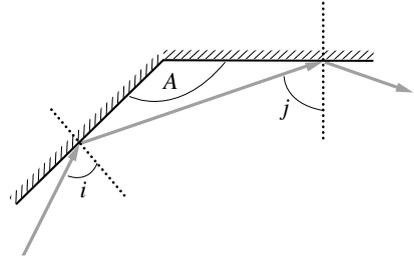
16 Miroirs

En utilisant les images intermédiaires, dessiner le faisceau sortant après réflexion sur les miroirs.



17 Deux miroirs

Les 2 miroirs plans forment un angle A . Exprimer la somme $i + j$ en fonction de A . En déduire la valeur de la déviation D .



Solutions

1 a) Si l'on pose $OT' = h'$ et $OT = h$, on a $h' = h \frac{\tan r}{\tan i}$.

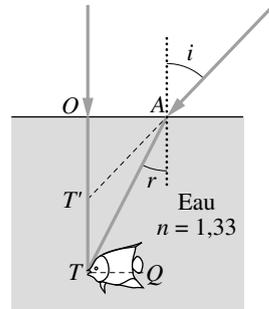
Par ailleurs, la relation entre i et r est donnée par la loi de Snell-Descartes $\sin i = n \sin r$. On a finalement

$$h' = h \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

Si $i = 10^\circ$, $h' = 0,747$ m.

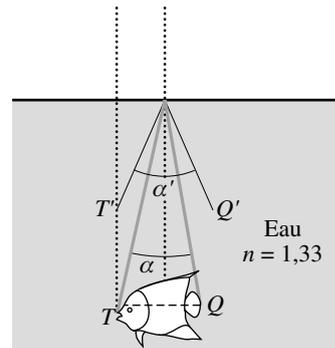
Si $i = 30^\circ$, $h' = 0,703$ m.

La position de l'image du poisson s'est légèrement déplacée d'un cas à l'autre. Ainsi, elle dépend de l'angle d'incidence. On voit net parce que l'œil intercepte des rayons provenant d'angles i proches les uns des autres. Si la pupille de l'œil était très grande, on verrait flou. L'image du poisson sera plus nette dans le premier cas que dans le deuxième. Ceci est dû au fait que l'on est alors plus proche de la condition de validité de l'approximation de Gauss.

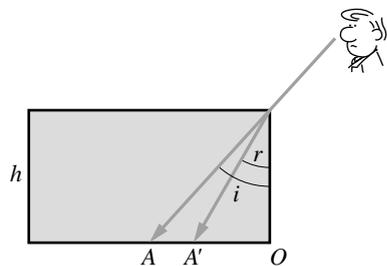


b) Dans le cadre de l'approximation de Gauss, i est très petit, ce qui entraîne $i \approx nr$. On a alors $h' \approx h/n$. Si le poisson est à 1 m de profondeur, $h' = 0,752$ m. S'il est à 4 m de profondeur, $h' = 3$ m.

c) L'angle α est donné par la relation $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{TQ}{2h}$. Avec $TQ = 1$ m et $h = 1$ m, $\alpha = 53,13^\circ$. Cet angle correspond à l'angle du rayon non réfracté par l'eau. L'angle α' est l'angle apparent avec lequel on voit le poisson. Il est donné par la relation de Snell Descartes : $\sin \frac{\alpha'}{2} = n \sin \frac{\alpha}{2}$, soit $\alpha' = 73^\circ$.



2 Si la cuve est remplie d'un liquide d'indice n , le rayon incident se réfracte en rencontrant la surface du milieu et frappe le fond de la cuve en A' . Si h est la hauteur du milieu d'indice n , $h = \frac{OA}{\tan i} = \frac{OA'}{\tan r}$. En combinant cette équation avec la relation de Snell-Descartes, on



obtient

$$OA' = OA \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = h \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Si i est petit, on a $OA' \approx \frac{OA}{n}$. De manière générale, $OA' < OA$.

AN : $OA = h = 1$ m, et $OA' = 0,58$ m.

3 a) Le cylindre extérieur est vu sous un angle α tel que $\sin \alpha = \frac{R}{d}$.

b) On voit le cylindre de mercure sous l'angle β . Dans le triangle $AO'B$, on a $\sin r_1 = \frac{r}{R}$. La loi de Snell-Descartes appliquée au point A donne :

$$\sin i = n \sin r_1 = n \frac{r}{R}.$$

Par ailleurs, dans le triangle AHO' , on a $\sin i = \frac{O'H}{R}$ et, dans le triangle OHO' ,

$$\sin \beta = \frac{O'H}{d}.$$

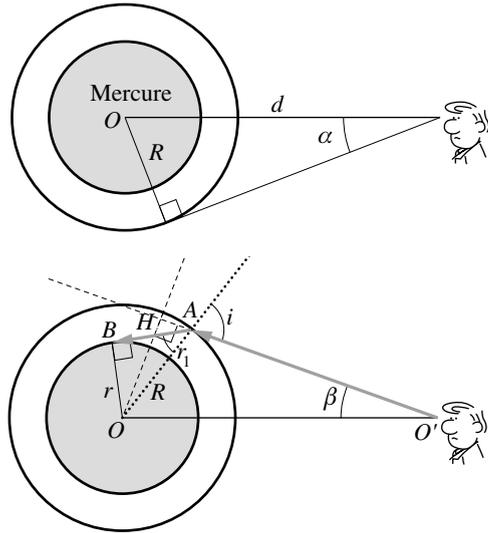
On trouve donc

$$OH = d \sin \beta = R \sin i = nr,$$

soit $\sin \beta = n \frac{r}{d}$.

c) $\beta > \alpha$ signifie $n \frac{r}{d} > \frac{R}{d}$, soit $n > \frac{R}{r}$, ce qui est possible *a priori*.

Si $nr = R$, $\alpha = \beta$, $i = 90^\circ$ et on a l'impression que le mercure remplit totalement le tube (le rayon AO est alors tangent au tube).



4 a) L'observateur voit trois images dans la direction BD .

– La première provient d'un rayon arrivant par la face AB . Il se réfracte en O_1 et l'image semble provenir du point M_1 situé sur la face AD , à l'intersection entre la verticale et le prolongement du rayon incident.

– La deuxième image provient d'un rayon arrivant par la face BC qui a subi auparavant une réflexion totale en O_2'' sur la face DC . L'image est située en M_2 à l'intersection entre le prolongement du rayon incident et l'horizontale passant par M .

– La troisième image provient d'un rayon arrivant également par la face BC en O_3 . L'image semble venir de M_3 à l'intersection entre l'horizontale passant par M et le prolongement du rayon incident.

b) L'angle du rayon incident avec la normale est de 45° . La relation de Snell-Descartes nous donne, pour tous les rayons réfractés, $r = 30^\circ$.

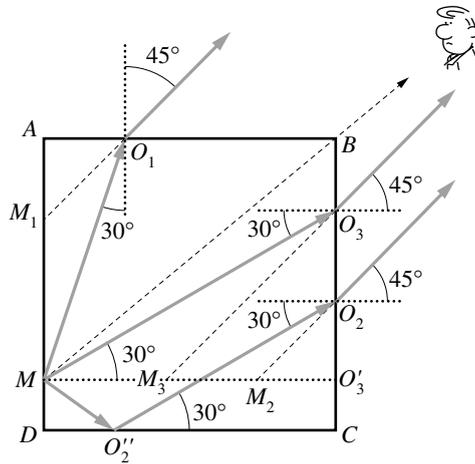
Position de M_1 . Le triangle AO_1M_1 est rectangle isocèle (deux des angles valent 45°). On a donc $AO_1 = AM_1$. Par ailleurs dans le triangle AO_1M , on a $\tan r = \tan 30^\circ = \frac{AO_1}{AM} = \frac{AM_1}{AM}$.

$AM = AD - MD = 8$ cm, ce qui donne $AM_1 = 4,62$ cm et

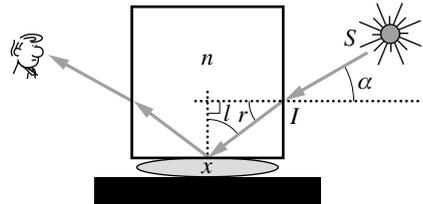
$MM_1 = AD - AM_1 - MD = 3,38$ cm.

Position de M_2 . Dans le triangle $MO_2''D$, on a $DO_2'' = \frac{MD}{\tan 30^\circ} = 3,46$ cm. Dans le triangle $O_2O_2''C$, on a $\tan r = \frac{O_2C}{O_2''C} = \tan 30^\circ$.
 Donc $O_2C = O_2''C \tan 30^\circ = (DC - O_2''D) \tan 30^\circ = 3,77$ cm. On a enfin, dans le triangle $O_2M_2O_3'$, $\tan i = \frac{O_2O_3'}{M_2O_3'} = \tan 45^\circ$, ce qui donne $M_2O_3' = 1,77$ cm (avec $O_3'C = MD = 2$ cm et $O_2O_3' = O_2C - O_3'C = O_2C - MD = 1,77$ cm),
 soit $MM_2 = 8,23$ cm.

Position de M_3 . Dans le triangle O_3MO_3' , on a $\tan r = \frac{O_3O_3'}{MO_3'} = \tan 30^\circ$. Comme $MO_3' = 10$ cm, on a $O_3O_3' = 5,77$ cm. Le triangle $O_3M_3O_3'$ est isocèle et rectangle en O_3' . On a donc $O_3M_3 = O_3O_3' = 5,77$ cm. Ceci donne $MM_3 = 4,23$ cm.

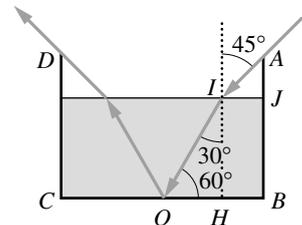


- 5 L'observateur voit la goutte briller lorsque celle-ci lui réfléchit la lumière dans la bonne direction. Il faut donc être sur la face supérieure de la goutte à l'angle limite. Pour cet angle, $\sin l = x/n$; Si α est l'angle incident sur la face d'entrée et r l'angle réfracté, on a $\sin \alpha = n \sin r = n \cos l$, soit $x = \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$.



- 6 L'angle maximum d'incidence avec lequel le rayon peut sortir de la surface de l'eau est $\pi/2$. L'angle de réfraction correspondant (angle limite) est donné par la loi de Snell-Descartes et vaut $48,75^\circ$. Dans ces conditions, on a $\tan r = d/h$, où d est le rayon du nénuphar; $h = 4,38$ cm.

- 7 Pour que le rayon ressorte en passant par D , il faut qu'il frappe le fond de la cuve en son milieu. Les lois de Snell-Descartes permettent de calculer l'angle de réfraction qui est égal à 30° . Dans le triangle IOH , on a $\tan 60^\circ = \frac{x}{OH} = \frac{x}{OB - HB}$.
 Enfin, $HB = AB - x$, ce qui donne $x = 0,95$ cm.



- 8** 15 m au-dessus des flots est la hauteur apparente pour Nemo. On cherche l'angle α sous lequel le capitaine Nemo a visé l'oiseau. Cet angle est repéré par rapport à l'horizontale. L'inclinaison de 60° par rapport à l'horizontale donne $r = 30^\circ$ et

$$i = 45^\circ. \text{ Dans le triangle } NFI, \text{ on a : } \tan \alpha = \frac{FI}{OO'} = \frac{O'F + O'I}{O'H + OH} = \frac{O'F + NO}{O'H + NJ}.$$

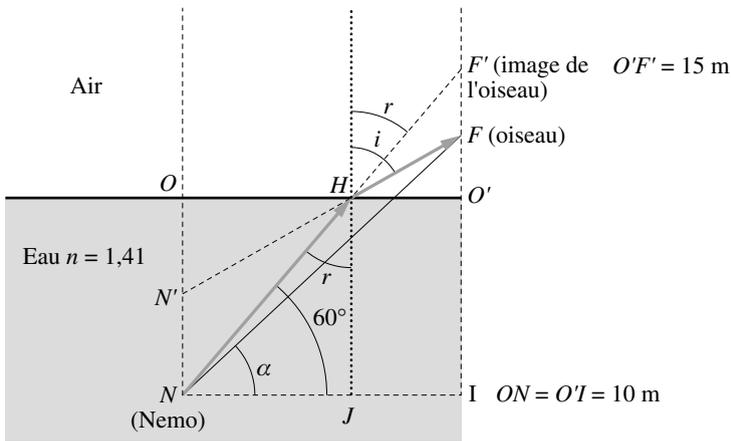
$O'F$, la hauteur réelle de l'oiseau, est donnée par : $\tan i = \frac{HO'}{O'F}$, soit $O'F = HO'$.

De même, $O'F'$, la hauteur apparente de l'oiseau est donnée par $\tan r = \frac{HO'}{O'F'}$, soit $HO' = 0,58 O'F'$ avec $O'F' = 15$ m.

Finalement, $O'F = 0,58 O'F' = 8,7$ m = HO' .

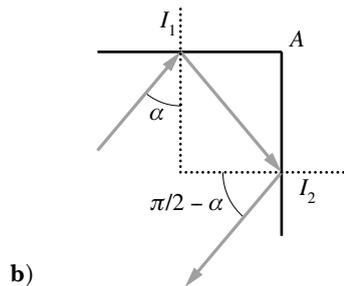
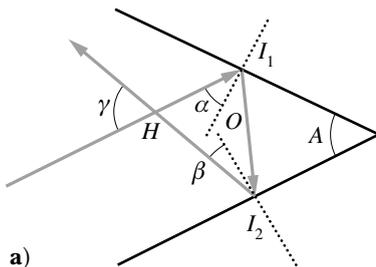
Dans le triangle NHJ , $\tan 60^\circ = \frac{ON}{NJ}$, ce qui donne $NJ = 0,58 ON = 0,58 O'I = 5,8$ m.

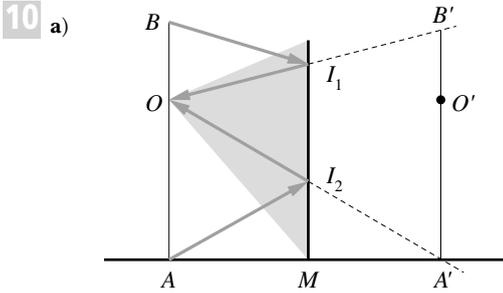
On trouve finalement $\alpha = 52,28^\circ$.



- 9** a) Dans le triangle I_1OI_2 , on a $\alpha + \beta + (\pi - A) = \pi$, soit $\alpha + \beta = A$. Dans le triangle I_1HI_2 , on a $2\alpha + 2\beta + \gamma = \pi$. En utilisant ces deux égalités, on trouve $\gamma = \pi - 2A$.

b) Quand les deux miroirs sont perpendiculaires, $A = 90^\circ$, ce qui donne $\gamma = 0^\circ$. Les rayons sont antiparallèles : ils se propagent en sens opposé.



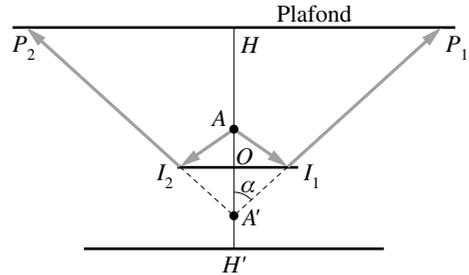


b) Il voit complètement son image. Elle est droite et virtuelle. Sur la figure, la zone grisée montre l'ensemble du champ de vision de l'homme. Lorsque l'homme avance ou recule, il se verra toujours en entier car le rayon issu de A ou B et arrivant dans l'œil frappe toujours au même endroit sur le miroir (I_1 ou I_2), et reste toujours à l'intérieur de la zone grisée.

11 Les normales aux miroirs en I_1 et I_0 font entre elles un angle A . On a donc $i_1 + (\pi - i_0) + A = \pi$, soit $i_1 = i_0 - A$. De même, on peut montrer que $i_2 = i_1 - A = i_0 - 2A$, et ainsi de suite. Ceci se généralise en écrivant $i_n = i_0 - nA$.

Quand $n \geq \frac{i_0}{A}$, le rayon arrive sur le miroir en incidence nulle. Il revient en arrière lorsque $i_0 = nA$ et ressort.

12 Le miroir est en O , l'ampoule en A . Les rayons semblent venir de l'image de l'ampoule située en A' . La portion de plafond éclairée est un cercle de rayon HP_1 . On a dans les triangles $A'I_2I_1$ et $A'P_2P_1$, $\tan \alpha = \frac{OI_1}{A'O} = \frac{HP_1}{A'H}$, avec $OI_1 = 30$ cm, $A'O = AO = 25$ cm et $A'H = 2$ m. On trouve $HP_1 = 2,40$ m.

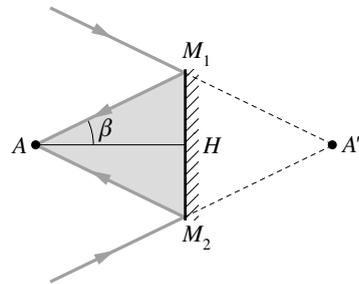


13 a) La zone vue dans le miroir est la zone grisée sur la figure.

b) L'œil regarde dans un cône dont le demi-angle β est donné par :

$$\tan \beta = \frac{M_1H}{AH} = \frac{0,1}{AH}$$

Si l'œil est à $AH = 20$ cm, l'angle total du cône vaut $2\beta = 53,1^\circ$. Si l'œil s'éloigne de 10 cm, il devient égal à $36,9^\circ$. Enfin, si au contraire il se rapproche de 5 cm, il devient égal à $67,4^\circ$.



Le champ de vision est donc d'autant plus large que l'œil est proche du miroir. Si la distance AH passe de 20 à 30 cm, AA' passe de 40 à 60 cm. De même, quand on se rapproche de 5 cm, l'image se rapproche de 10 cm. L'image se déplace donc d'une distance double.

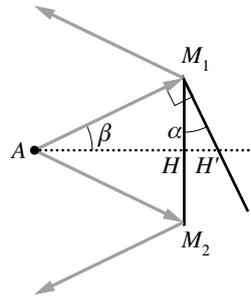
c) Si l'on fait pivoter le miroir d'un angle α , l'image de l'œil tourne d'un angle 2α (voir paragraphe 1.1.3 du présent chapitre). Pour que l'œil soit juste visible au bord du miroir, il faut que le rayon issu de l'œil arrive perpendiculairement au miroir. En effet, dans ce cas, il

revient sur lui-même. On a donc

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - AM_1H = \beta.$$

Si l'observateur est situé à 20 cm du miroir, il suffit donc de tourner le miroir de $26,5^\circ$ pour que le faisceau revienne juste dans l'œil.

d) Si l'image se réfléchit sur le haillon d'une voiture en mouvement, lorsque la voiture a parcouru une certaine distance, l'image s'est déplacée de la même distance de l'autre côté. L'image s'éloigne donc à la vitesse de 120 km/h.

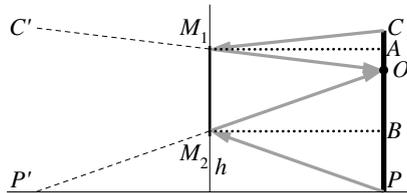


14 Pour que l'individu se voie en entier, il faut que les rayons venant de P et C puissent se réfléchir et revenir sur l'œil. La taille minimale du miroir est égale à :

$$M_1M_2 = OA + OB = \frac{OC}{2} + \frac{OP}{2} = \frac{PC}{2} = 85 \text{ cm}.$$

La hauteur à laquelle doit être accroché le miroir est :

$$h = PC - BC = PC - \left(M_1M_2 + \frac{OC}{2} \right) = 77,5 \text{ cm}.$$



15 Vision à travers une surface

1) Dans l'approximation des petits angles,

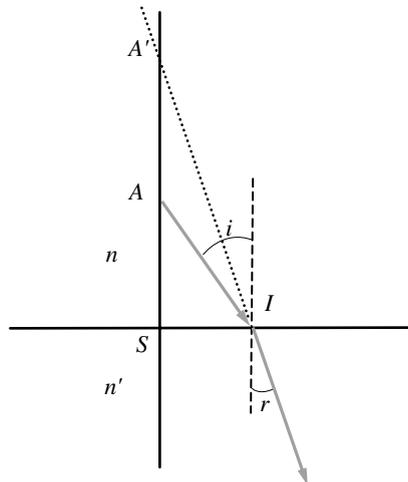
$$SI = SA \tan i = SA' \tan r$$

$$n \sin i = n' \sin r.$$

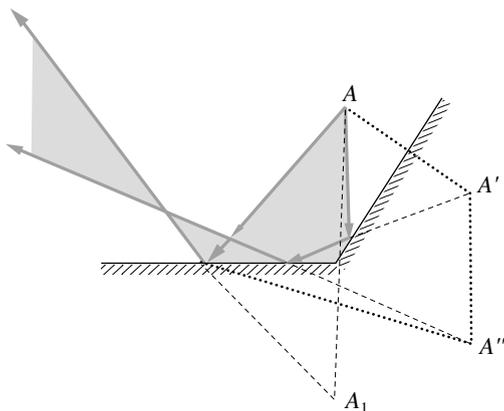
$$SA \cdot i \approx SA' \cdot r, ni \approx n'r \implies SA' = \frac{n'}{n} SA$$

$n = 1, n' = 1,33$. $SA = 1,8 \text{ m}$ et $SA' = 2,39 \text{ m}$.
Le pêcheur paraît plus grand au poisson qu'il ne l'est réellement.

2) Maintenant, l'objet est le poisson. On a donc $SA = 1 \text{ m}$ et $n = 1,33, n' = 1$. $SA' = 75 \text{ cm}$. Le poisson apparaît plus petit que dans la réalité.



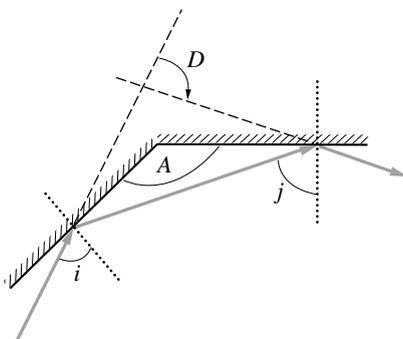
16 Miroirs



17 Deux miroirs

On peut écrire $A + \left(\frac{\pi}{2} - i\right) + \left(\frac{\pi}{2} - j\right) = \pi$, soit $A = i + j$.

De même, on a $(\pi - D) + (\pi - 2i) + (\pi - 2j) = \pi$, soit $D = 2(\pi - A)$



CHAPITRE 5

LES DIOPTRÉS SPHÉRIQUES

Pré-requis

Le dioptré sphérique est le premier système optique réel que nous étudions. Il faut, pour aborder ce chapitre dans de bonnes conditions, avoir assimilé les lois de Snell-Descartes et avoir compris le champ d'application de l'approximation de Gauss, à laquelle nous nous limiterons.

Objectif

Jusqu'à présent, nous avons consacré l'essentiel de notre discussion à des systèmes constitués de dioptrés plans (lames à faces parallèles, prisme...). Cependant, les dispositifs les plus largement utilisés, comme la loupe, la paire de jumelles ou encore un objectif photographique, sont constitués de dioptrés sphériques. Nous en proposons donc l'étude dans ce chapitre dans le cadre de l'approximation de Gauss. L'ensemble des résultats obtenus seront facilement appliqués à d'autres éléments optiques (lentilles, miroirs sphériques) et aux instruments optiques introduits dans la suite de cet ouvrage.

1. DÉFINITIONS

Un dioptré sphérique est une surface de séparation courbée entre deux milieux d'indices n et n' pour laquelle on peut définir un centre C et un rayon de courbure r . Un exemple en est la surface de l'œil. En effet, la lumière arrivant sur notre œil rencontre tout d'abord une surface pratiquement sphérique constituée d'un milieu transparent qui sépare le milieu extérieur d'indice $n = 1$ (l'air) de l'humeur aqueuse d'indice $n' = 4/3$. La réfraction est alors importante et les rayons convergent vers l'intérieur de l'œil. À l'arrière, ainsi que nous le verrons, un deuxième système optique, identique à une loupe épaisse, le cristallin, forme les images sur la rétine.

Dans le plan d'incidence, le dioptré sphérique apparaît sous la forme d'un demi-cercle de centre C et de rayon de courbure r (figure 5.1). On définit l'axe principal comme l'axe parallèle au sens de propagation de la lumière et passant par C . Conventionnellement, on l'oriente positivement de la gauche vers la droite, sens de la propagation de la lumière, du premier milieu d'indice n vers le milieu d'indice n' . Cette remarque est importante, car à cette convention sont liées les notions complexes d'objet et d'image réels ou virtuels. Les formules établies dans ce chapitre sont employées dans le cadre exclusif de cette convention, faute de quoi tous les calculs seraient faux. Sur cet axe orienté, on prend comme origine le sommet du dioptré noté S .

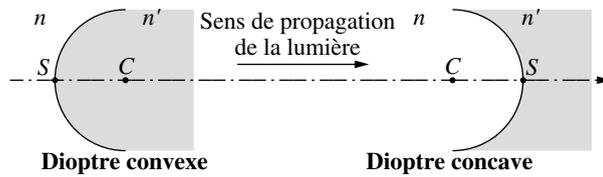


Figure 5.1 • Les deux configurations géométriques d'un dioptr sphérique : le dioptr convexe ($r = \overline{SC} > 0$) et le dioptr concave ($r < 0$).

On définit alors le **rayon de courbure algébrique** par $r = \overline{SC}$. On peut noter que seules deux configurations géométriques sont possibles suivant le signe de r . Si $r > 0$, le rayon incident rencontre une surface de séparation bombée : le dioptr est **convexe**. Au contraire si $r < 0$, c'est une surface en creux que rencontre le rayon incident et le dioptr est **concave**. Ces deux configurations sont représentées sur la figure 5.1. Les définitions mathématiques d'une surface concave ou convexe sont rappelées dans l'encart 5.1.

Encart 5.1. Concavité et convexité

Ce sont deux définitions essentielles à connaître car, si on ne les a pas bien assimilées, on risque de commettre de grosses erreurs. Une définition simplifiée d'une surface convexe est la suivante : si l'on joint deux points A et B appartenant à une surface convexe, la droite qui les joint est totalement incluse dans la surface. En parlant simplement, on peut dire que le contour d'une surface convexe ne possède pas de « creux ». Si la surface est concave, il existe des points A et B pour lesquels la droite qui joint ces deux points « sort » de la surface.

La figure 5.2 montre quelques exemples de surfaces convexes et concaves.

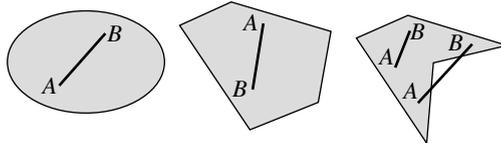


Figure 5.2 • Exemples de deux surfaces convexes (à gauche) et d'une surface concave (à droite).

Suivant les valeurs relatives des indices n et n' ($n > n'$ ou $n < n'$) et suivant le signe du rayon de courbure ($r > 0$ ou $r < 0$), on a les quatre configurations schématisées sur la figure 5.3 : à titre d'exemple, on considère un rayon incident parallèle à l'axe qui subit, au point I de la surface de séparation, une réfraction. On a tracé schématiquement, dans chaque cas, le rayon réfracté. On retiendra des différentes constructions représentées sur la figure 5.3, qu'il existe donc quatre configurations possibles conduisant à séparer les dioptr en deux catégories : les dioptr **divergents** et **convergens**. Dans un système convergent, un rayon se rapproche toujours de l'axe principal. Au contraire, il s'en éloigne toujours lorsqu'il traverse un système divergent. Ainsi le caractère convexe ou concave ne suffit pas à définir complètement un dioptr : en effet, il existe des dioptr convergens convexes ou concaves. On peut aussi remarquer que si l'on retourne le dioptr, sa propriété de convergence ne change pas (il reste par exemple convergent) ; par contre, s'il est initialement concave, il devient convexe !

On considèrera par la suite uniquement les rayons incidents paraxiaux afin de travailler dans l'approximation de Gauss. Dans ce cas, pour bien révéler les constructions, on emploiera les symboles de la figure 5.3b) pour les différentes configurations possibles de dioptr.

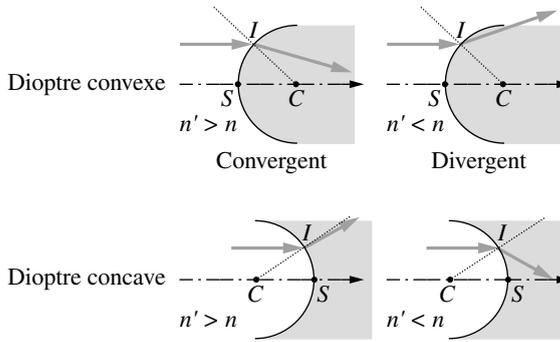


Figure 5.3 (a) • Les quatre configurations possibles d'un dioptré sphérique.

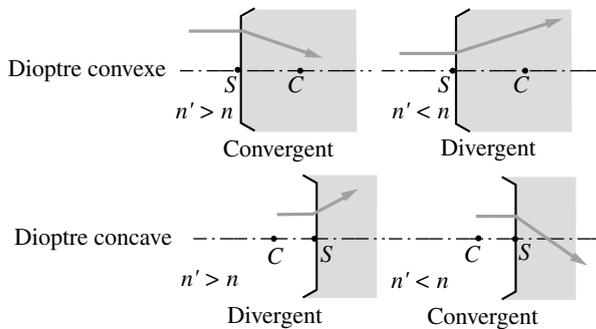


Figure 5.3 (b) • Même représentation dans l'approximation de Gauss.

2. DE LA LOI DE SNELL-DESCARTES À LA RELATION DE CONJUGAISON

Si une source lumineuse A , située par exemple à gauche d'un dioptré sphérique, émet des rayons de faible incidence par rapport à la normale au dioptré, on est dans le cadre de l'approximation de Gauss. Le dioptré sphérique, comme tout bon instrument optique, fournit alors de cet objet une image A' , fidèle à l'objet. Comme pour les dioptries plans, cette image est définie par l'intersection de rayons lumineux ou de leurs prolongements. A' est réelle ou virtuelle, selon la nature des rayons qui forment cette image. Nous allons établir, à partir de la deuxième loi de Snell-Descartes, et dans ces conditions une relation qui lie les **positions** de A et A' , quelle que soit leur nature ; on l'appelle la **relation de conjugaison**. Sa forme mathématique ne dépend pas du type de dioptré étudié : elle est *universelle*. Nous proposons tout d'abord de l'établir pour un dioptré convexe convergent. La démonstration pour un dioptré divergent est donnée dans l'encart 5.2.

Les formules établies relient entre elles des quantités algébriques ; il est donc nécessaire d'orienter les angles dans cette discussion. On choisira comme sens positif le sens trigonométrique. Ainsi, l'angle ω de la figure 5.5 doit être affecté d'un signe « - ». Au contraire α , r et i sont dans le sens direct, (voir l'annexe du chapitre 2). Notons que ce choix d'orientation est arbitraire et n'influe pas sur le résultat final.

L'objet A est situé sur l'axe optique du dioptré, par exemple à gauche de S (figure 5.5). C est un objet réel. Considérons deux rayons particuliers issus de A . Le premier est celui qui se propage avec une incidence nulle : il est sur l'axe principal, horizontal, et non dévié après la traversée du dioptré. Le deuxième fait en I un angle d'incidence i avec la normale au dioptré sphérique. Il est réfracté et l'on note r l'angle de réfraction avec la

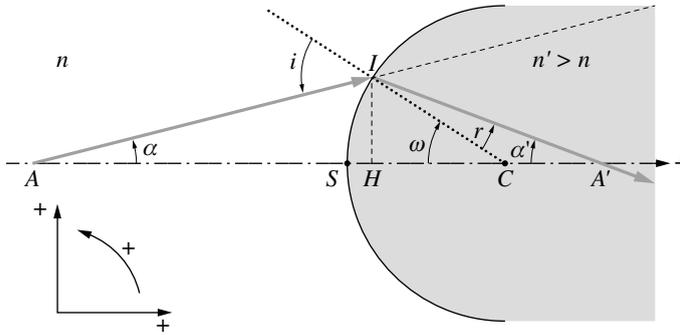


Figure 5.4 • Étude de la marche d'un rayon pour un dioptre sphérique convexe convergent.

normale en I . Dans l'exemple choisi, les deux rayons se coupent physiquement sur l'axe en A' , qui est l'image réelle de A .

En posant $p = \overline{SA}$ et $p' = \overline{SA'}$, on repère les positions de l'objet A et de son image A' par rapport au sommet du dioptre. Comme l'objet est réel, situé à gauche du dioptre, p est négatif. La construction donne, pour l'exemple choisi, une image réelle située à droite du dioptre avec p' positif. Dans le cadre de l'approximation de Gauss, les angles définis sur la figure 5.4 (α , α' et ω) sont petits ; au lieu de la relation de Snell-Descartes, on utilisera donc la loi de Kepler.

Dans les triangles IAC et ICA' , on écrit que la somme des angles orientés est égale à π :

- dans IAC : $\alpha + \pi - i + (-\omega) = \pi$, d'où $i = \alpha - \omega$;
- dans ICA' : $(-\alpha') + r + \pi - (-\omega) = \pi$, d'où $r = \alpha' - \omega$.

La relation de Snell-Descartes écrite au point I et réduite à l'équation de Kepler devient :

$$n(\alpha - \omega) = n'(\alpha' - \omega)$$

Dans le cadre de l'approximation des petits angles, on peut confondre H et S et assimiler les tangentes aux angles correspondants :

$$\begin{aligned}\alpha &\approx \tan \alpha = \frac{\overline{HI}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{HI}}{-p} \\ \alpha' &\approx \tan \alpha' = \frac{\overline{HI}}{\overline{A'H}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{A'S}} = \frac{\overline{HI}}{-p'} \\ \omega &\approx \tan \omega = \frac{\overline{HI}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{HI}}{-r}\end{aligned}$$

On remplace α , α' et ω par ces valeurs dans la loi de Kepler qui devient, après simplification :

$$n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) = n' \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{r} \right)$$

Cette relation fondamentale qui relie les positions d'un objet A et de son image A' est appelée la **relation de conjugaison du dioptre sphérique**. On peut la réécrire sous la forme suivante :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r}$$

L'universalité de cette formule est vérifiée dans l'encart 5.2 pour un dioptré convexe divergent.

Encart 5.2. Étude d'un dioptré convexe divergent

On a positionné à nouveau un point objet A sur l'axe principal et déterminé la position de son image A' à partir de la construction de deux rayons particuliers. Les angles α , α' et ω sont également orientés de façon arbitraire (figure 5.5) et l'on travaille dans l'approximation de Gauss. Dans les triangles AIA' et $A'IC$, on écrit que la somme des angles orientés est égale à π .

– triangle AIA' : $\alpha + \pi - \alpha' + r - i = \pi$, d'où $\alpha - \alpha' = i - r$

– triangle $A'IC$: $\alpha' + \pi - r + (-\omega) = \pi$, d'où $\alpha' - \omega = r$

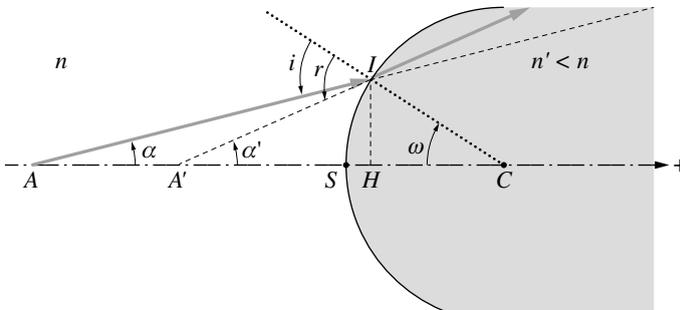


Figure 5.5 • Étude de la marche d'un rayon à travers un dioptré sphérique convexe divergent.

On a donc $i = \alpha - \omega$; on peut écrire au point I que $n(\alpha - \omega) = n'(\alpha' - \omega)$. Cette relation est identique à celle obtenue ci-dessus pour le dioptré convergent, ce qui va conduire au même résultat final, c'est-à-dire à la même relation de conjugaison. On remarquera que, dans cet exemple, A est réel et A' virtuel ($p < 0$ et $p' < 0$).

Finalement, on a démontré sur deux exemples qu'une même relation de conjugaison relie la position p d'un objet A à celle, p' , de son image A' .

Première forme de la relation de conjugaison dans l'approximation de Gauss :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r} = \Phi \quad \text{ou} \quad \frac{n'}{SA'} - \frac{n}{SA} = \frac{n' - n}{SC}$$

On dit que l'objet A et son image A' sont **conjugués** l'un de l'autre. La quantité $\Phi = \frac{n' - n}{r}$ s'appelle la **vergence** du dioptré. On l'appelle parfois puissance (voir chapitre 10). Son unité est la **dioptrie** égale à 1 m^{-1} et notée δ . La vergence Φ est positive pour un dioptré convergent, négative pour un dioptré divergent.

On peut appliquer cette relation à tout dioptré sphérique, le dioptré plan n'étant qu'un dioptré sphérique de rayon de courbure infini. La démonstration directe en est donnée dans l'encart 5.3 à partir des lois de Snell-Descartes.

Relation de conjugaison du dioptre plan :

$$p' = \frac{n'}{n}p$$

Encart 5.3. Étude du dioptre plan

Nous allons brièvement revenir au cas du dioptre plan que nous avons déjà rencontré dans les chapitres précédents.

Le dioptre plan sépare deux milieux d'indices n et n' . On a choisi à titre d'exemple $n' > n$. On considère un point objet A et le rayon AI . Au niveau du point d'incidence I , les angles d'incidence (i) et de réfraction (r) vérifient la loi de Kepler, $ni = n'r$.

Dans le chapitre précédent, nous avons établi une relation permettant de positionner un point objet A et son image A' sur une normale en un point H de la surface du dioptre plan. On peut considérer cette normale comme l'axe principal du dioptre plan et poser $H = S$. Ainsi, cette relation s'écrit :

$$\overline{SA'} = \overline{SA} \frac{i}{r}$$

Dans le cadre de l'approximation des petits angles, elle s'écrit encore $\overline{SA'} = \frac{n'}{n} \overline{SA}$.

Avec les notations conventionnelles, on obtient finalement la relation de conjugaison du dioptre plan, valable en approximation de Gauss :

$$p' = \frac{n'}{n}p$$

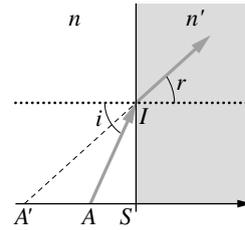


Figure 5.6 • Le dioptre plan.

3. ANALYSE DE LA RELATION DE CONJUGAISON

La relation de conjugaison, établie précédemment, donne, par exemple, la position de l'image en fonction de celle de l'objet. Elle peut s'écrire $p' = \frac{n'p}{n + p\Phi}$. L'étude mathématique de cette fonction dans le plan (p, p') est présentée dans l'encart 5.4. Si l'on trace p' en fonction de p , on obtient une hyperbole équilatère qui permet de prévoir et de comprendre l'évolution de la position de l'image A' . L'allure de l'hyperbole dépendant fortement de Φ , nous avons effectué ce tracé pour un dioptre convergent ($\Phi > 0$) (figure 5.7) et pour un dioptre divergent ($\Phi < 0$) (figure 5.8). Nous appellerons par la suite cette hyperbole la caractéristique des dioptrés¹.

1. Cette dénomination est classiquement employée dans l'analyse des circuits électroniques pour caractériser par exemple des éléments passifs comme une résistance. Dans ce cas, on trace la fonction $I(U)$.

De manière générale, quelle que soit la vergence du dioptre sphérique, l'objet et son image ont une position distincte sur l'axe principal ($p \neq p'$). Il existe cependant deux positions particulières satisfaisant à la condition $p = p'$, déduites de la relation de conjugaison. En effet, dans ce cas cette fonction s'écrit aussi : $p^2\Phi + (n - n')p = 0$. Cette équation a deux solutions :

- $p = 0$; A et A' sont alors confondus au sommet du dioptre S ;
- $p = \frac{n' - n}{\Phi} = r$. Cette dernière situation sera discutée graphiquement dans les paragraphes 3.1 et 3.2.

Encart 5.4. Étude de la fonction $h(x) = \frac{n'x}{n + x\Phi}$

n et n' sont des constantes positives et Φ peut être une constante positive ou négative selon que le dioptre est convergent ou divergent ; il n'est cependant pas nécessaire de connaître leurs valeurs numériques pour discuter les allures des courbes.

- **Calcul de la dérivée** : $h'(x) = \frac{nn'}{(n + x\Phi)^2} > 0$. La fonction $h(x)$ est donc toujours croissante quel que soit le type de dioptre étudié. Cette propriété exprime le fait que si p augmente, p' augmente aussi. Par exemple, si l'objet se rapproche du dioptre par la gauche, l'image s'en éloigne vers la droite.

- **Étude des asymptotes** : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \frac{n'}{\Phi} = f'$. La courbe présente une asymptote horizontale quand $x \rightarrow \pm\infty$, et la fonction tend vers une valeur que nous notons f' (pour focale) pour des raisons que nous exposerons plus loin. Par ailleurs, quand le dénominateur tend vers 0, la fonction tend vers l'infini ; ceci signifie que la courbe présente une asymptote verticale d'équation $x = -\frac{n}{\Phi} = f$.

3.1. Cas d'un objet réel

L'objet est réel s'il se situe à gauche du sommet du dioptre dans le milieu d'indice n . C'est la seule situation possible si le dioptre est seul car, pour former un objet virtuel, il faut un autre système optique (voir chapitre 4). Dans ce contexte, seul le demi-plan correspondant à p négatif sera discuté dans ce paragraphe. On a tracé, sur les figures 5.7 et 5.8, p' en fonction de p pour un dioptre convergent et divergent.

Ces courbes permettent d'accéder aux informations suivantes :

- **Pour un dioptre convergent**, $\Phi > 0$ (figure 5.7), plus l'objet A s'éloigne de S et plus son image A' se rapproche d'une position particulière notée F' . Cette dernière est repérée par la quantité algébrique $\overline{SF'} = f'$ qui est positive ; F' est donc à droite de S . De même, la courbe présente une asymptote verticale lorsque $p = -\frac{n}{\Phi}$. Cela correspond à une position particulière de l'objet, que l'on note F et telle que $\frac{n}{\overline{SF}} = f$. f est négative et F se place donc à gauche de S .

Si $p < f$, l'objet est à gauche de F ; p' est positif et A' se situe à droite du dioptre sphérique dans le milieu d'indice n' : l'image est réelle. Au contraire, si $0 < p < f$, l'objet

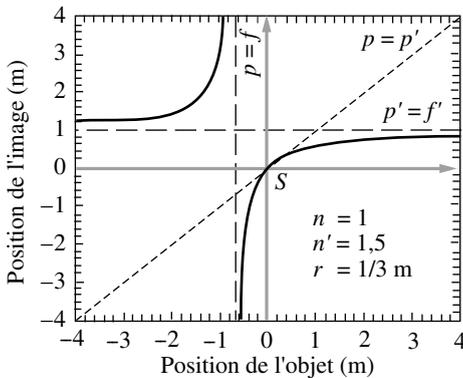


Figure 5.7 • Évolution de la position de l'image A' d'un objet A à travers un dioptre convergent.

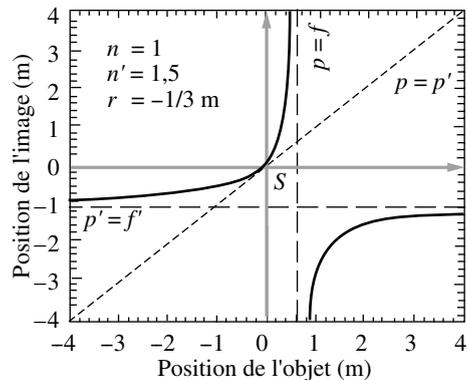


Figure 5.8 • Évolution de la position de l'image A' d'un objet A à travers un dioptre divergent.

est à droite de F et p' est négatif ; A' se situant aussi à gauche du dioptre, du même côté que A , elle est virtuelle.

La condition $p = p' = r$ est impossible ici, car r est positif.

• **Pour un dioptre divergent**, $\Phi < 0$ (figure 5.8), la courbe présente encore deux asymptotes. Ainsi si l'objet réel A s'éloigne de S , son image A' se rapproche du point F' , repéré comme précédemment par $\overline{SF'} = f'$. f' est négative pour un dioptre divergent et F' est à gauche de S . De plus, l'objet étant lui aussi toujours à gauche de S ($p < 0$ pour un objet réel), p' est toujours négatif et l'image toujours virtuelle. Enfin, l'asymptote verticale correspond à une position particulière de l'objet, notée F , associée à la quantité $\overline{SF} = f$ positive : F est à droite de S .

Les positions particulières $p = p'$ peuvent être obtenues graphiquement en traçant sur la figure 5.8 la première bissectrice. Celle-ci coupe la branche supérieure de l'hyperbole en deux points : le premier correspond à la condition $p = p' = 0$ et le deuxième à $p = p' = r < 0$. On a alors d'un objet réel une image virtuelle, confondue avec A .

3.2. Cas d'un objet virtuel

Quand un objet est virtuel, il se situe à droite du dioptre, dans le milieu d'indice n' . Dans ce cas, l'objet est placé dans le demi-plan correspondant à p positif. Nous rencontrerons cette situation dans le chapitre 8 pour des systèmes centrés constitués d'au moins deux éléments optiques tels que deux dioptres, deux lentilles...

Les figures 5.7 et 5.8 donnent donc les informations complémentaires suivantes :

• **Pour un dioptre convergent** ($\Phi > 0$, figure 5.7), si l'objet virtuel A s'éloigne de S , son image A' tend vers F' . p' étant toujours positif, A' est à droite du dioptre du même côté que A ; l'image est réelle.

Comme $r > 0$, la position particulière $p = p' = r$ est encore une fois obtenue graphiquement en traçant la première bissectrice sur la figure 5.7. Celle-ci coupe la branche inférieure de l'hyperbole en $p = p' = 0$ et en $p = p' = r$. Dans ce dernier cas, on a l'image réelle d'un objet virtuel ($p > 0$), confondus en A .

• **Pour un dioptre divergent** ($\Phi < 0$, figure 5.8), plus l'objet A , situé à droite de F , s'éloigne, plus son image A' , virtuelle, se rapproche de F' ($\overline{SF'} = f' < 0$). Il y a une autre position particulière correspondant à $\overline{SF'} = f = -\frac{n}{\Phi} > 0$. L'image réelle est alors à l'infini. Si A est compris entre S et F , A' est réelle du même côté que A .

La relation de conjugaison donne la position de A' dont la nature (réelle ou virtuelle) dépend de celle de l'objet ainsi que de la position de l'objet par rapport à deux points particuliers F et F' . Les différentes possibilités sont résumées dans le tableau 5.1.

Tableau 5.1 • Résumé de toutes les combinaisons (A, A') réalisables avec un dioptre sphérique

Dioptre convergent ($f' > 0, f < 0$)		Dioptre divergent ($f' < 0, f > 0$)	
Objet A réel $p < 0$	Objet A virtuel $p > 0$	Objet A réel $p < 0$	Objet A virtuel $p > 0$
A en avant de F : $p < f < 0$ A' est réelle à droite de F' : $p' > f' > 0$	quelle que soit la position p de A	quelle que soit la position p de A	A entre S et F : $0 < p < f$ A' est réelle du même côté que A $p' > 0$
A en F : $p = f < 0$ $A' \rightarrow \infty$			A en F : $p = f > 0$ $A' \rightarrow \infty$
A entre F et S : $f < p < 0$ A' est virtuelle du même côté que A : $p' < 0$	$A \rightarrow \infty$ $A' \rightarrow F' : p' = f' > 0$	$A \rightarrow \infty$ $A' \rightarrow F' : p' = f' < 0$	A après F : $0 < f < p$ A' est virtuelle à droite de F' : $p' < f' < 0$

La figure 5.9 résume toutes ces combinaisons.

4. ÉTUDE DES FOYERS D'UN DIOPTRE

4.1. Définition des foyers et des plans focaux

Un dioptre sphérique possède deux points remarquables repérés sur l'axe principal par F et F' :

- F est la position occupée par objet A quand son image A' est rejetée à l'infini ;
- F' est la position occupée par l'image A' quand l'objet est rejeté à l'infini.

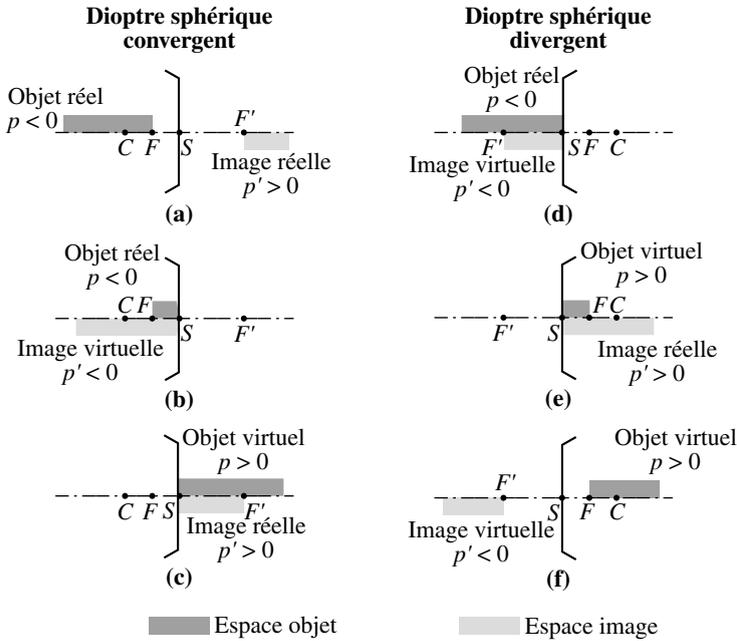


Figure 5.9 • Représentation des différentes possibilités offertes par un dioptré sphérique convergent ou divergent.

On appelle respectivement F et F' les foyers objet et image d'un dioptré. Pour les positionner sur l'axe principal, on écrit les quantités $\overline{SF} = f$ et $\overline{SF'} = f'$; f et f' sont appelées les distances focales objet et image du dioptré. Par abus de langage, on appelle parfois f' la distance focale du dioptré sans préciser image ou objet. Cette dénomination est aussi souvent utilisée pour les lentilles minces (voir chapitre 7).

La relation de conjugaison établie précédemment permet d'obtenir facilement une expression analytique de f et f' et donc de placer les foyers F et F' sur l'axe. Enfin, c'est seulement quand l'objet est sur l'axe que son image est au foyer. Les plans perpendiculaires à l'axe principal menés depuis F et F' constituent les plans focaux. Le plan focal image contient l'image d'un objet situé à très grande distance (l'infini) quand il n'est pas sur l'axe principal. De même, quand une image est rejetée à l'infini, le plan focal objet contient l'objet correspondant. Nous illustrerons ces propriétés dans le paragraphe 7.

4.2. Calcul des distances focales

Si l'image A' est rejetée à l'infini, la distance $\overline{SA'} = p'$ tend vers l'infini et, par définition, A tend vers F . La relation de conjugaison nous donne alors la distance focale objet f qui correspond à la valeur de p :

$$p' \rightarrow \infty \text{ donne } -\frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r} \text{ d'où } f = p = -\frac{nr}{n' - n}$$

soit :

$$f = \overline{SF} = -r \frac{n}{n' - n} = -\frac{n}{\Phi}$$

Cette formule donne la position du foyer objet F par rapport au sommet du dioptré S . On peut noter que f et Φ sont de signe opposé. Pour un dioptré convergent, f est donc négative ; on retrouve bien que F se situe à gauche du dioptré. Au contraire pour un dioptré divergent, f est positif et F est à droite du dioptré.

Pour définir le foyer image F' , c'est l'objet qui s'éloigne à très grande distance du dioptré et A' qui tend vers F' . La distance p tendant vers l'infini, la relation de conjugaison nous donne alors :

$$p \rightarrow \infty, \text{ soit } \frac{n'}{p'} = \frac{n' - n}{r} \quad \text{d'où } f' = p' = \frac{n'r}{n' - n}$$

soit :

$$f' = \overline{SF'} = r \frac{n'}{n' - n} = \frac{n'}{\Phi}$$

Cette formule donne la position du foyer image par rapport au sommet du dioptré S .

Considérons par exemple la cornée de l'œil, dioptré sphérique séparant deux milieux d'indices $n = 1$ et $n' = 4/3$. Son rayon de courbure vaut $r = 5$ mm ; les distances focales f' et f valent donc respectivement 20 mm et -15 mm. C'est donc un dioptré convergent.

On peut remarquer que les distances focales image et objet sont liées par la relation fondamentale :

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n} = -n_r$$

Elles sont donc toujours de signe opposé : F et F' sont toujours situés de part et d'autre du sommet du dioptré sphérique. En accord avec les formules précédentes, leurs positions ne sont jamais symétriques par rapport au sommet du dioptré. Par exemple, quand $n' > n$, F est plus proche du sommet S que F' .

Enfin, si l'on considère un dioptré plan comme la limite d'une sphère dont le rayon tend vers l'infini, on peut calculer ses distances focales objet et image et montrer qu'elles sont infinies. Un dioptré plan est donc un cas particulier de dioptré sphérique qui a ses foyers objet F et image F' rejetés à l'infini de part et d'autre de S .

Finalement, on peut énoncer les propriétés générales des dioptries :

Pour un dioptré convergent, la distance focale objet f est négative et le foyer objet F se situe à gauche du dioptré sphérique dans le milieu d'indice n . La distance focale f' est positive et le foyer image F' se situe à droite du dioptré sphérique dans le milieu d'indice n' . La situation est inversée pour un dioptré divergent.

F et F' ne sont jamais symétriques par rapport au sommet du dioptré sphérique.

5. AUTRES FORMULATIONS DE LA RELATION DE CONJUGAISON

On peut obtenir deux formes équivalentes de la relation de conjugaison en utilisant les distances focales f et f' . On utilisera l'une ou l'autre de ces relations suivant les données

du problème. La première possibilité consiste à éliminer r de la relation de conjugaison pour ne faire intervenir que f ou f' .

Deuxième forme de la relation de conjugaison :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \quad \text{ou} \quad \frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n' - n}{\overline{SC}} = \frac{n'}{\overline{SF'}} = -\frac{n}{\overline{SF}}$$

La deuxième possibilité consiste à multiplier les deux membres de $\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n'}{f'}$ par f'/n' . En tenant compte de la relation existant entre les deux distances focales, on obtient une troisième forme de la relation de conjugaison, dite **relation de Descartes**.

Troisième forme de la relation de conjugaison (dite de Descartes) :

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{SF'}}{\overline{SA'}} + \frac{\overline{SF}}{\overline{SA}} = 1$$

Ces deux nouvelles formes permettent de positionner l'image A' et l'objet A par rapport à S en utilisant les distances focales.

6. RELATION DE NEWTON

Les relations de conjugaison nous donnent la position de l'objet A et de son image A' par rapport au sommet S du dioptré. On peut aussi prendre comme origines les foyers F et F' pour obtenir la formule dite de Newton. On écrit la dernière relation de conjugaison sous la forme :

$$f' = p' \left(1 - \frac{f}{p} \right) = \frac{p'}{p} (p - f)$$

De même par symétrie, on a :

$$f = p \left(1 - \frac{f'}{p'} \right) = \frac{p}{p'} (p' - f')$$

Si l'on effectue le produit des deux expressions membre à membre, on obtient :

Relation de Newton :

$$ff' = (p - f)(p' - f') \quad \text{ou} \quad \overline{SF} \cdot \overline{SF'} = \overline{FA} \cdot \overline{F'A'}$$

7. CONSTRUCTION D'IMAGES À TRAVERS UN DIOPTRE SPHÉRIQUE

7.1. Méthode générale

Nous allons exploiter ici la méthode de construction d'images proposée au chapitre 4 dans le cadre de l'approximation de Gauss. Tout objet AB placé dans un plan perpendiculaire à l'axe principal a une image $A'B'$ dans un plan également perpendiculaire à l'axe principal. La méthode suppose connues les positions des foyers F et F' . Comme nous l'avons illustré au chapitre 4, on peut construire l'image A' d'un point A situé sur l'axe en utilisant deux rayons particuliers issus de ce point ; A' est donné par l'intersection des rayons réfractés par le dioptre. De manière générale, il faut considérer un point auxiliaire B , situé hors de l'axe, formant avec A un objet. La procédure consiste à choisir de manière astucieuse deux rayons issus de B afin de construire ainsi B' , l'image de B . La projection de B' sur l'axe donne le point A' cherché. C'est la raison pour laquelle, dans toutes les constructions d'optique géométrique on utilise un petit objet filiforme AB , perpendiculaire à l'axe optique.

Dans le cas d'un dioptre sphérique, trois rayons particuliers issus d'un point B situé hors de l'axe permettent une construction aisée : le rayon parallèle à l'axe principal, le rayon passant par le foyer F et le rayon passant par le centre de courbure. En effet, les propriétés des points considérés nous disent que (figure 5.10) :

- le rayon (1) parallèle à l'axe principal forme avec l'axe un couple de rayons issus d'un objet à très grande distance : ils se coupent donc au foyer F' ;
- le rayon (2) passant par le centre C arrive perpendiculairement à la surface du dioptre ($i = r = 0^\circ$) et ne subit aucune déviation : il va tout droit ;
- le rayon (3) passant par le foyer F forme avec l'axe principal un couple de rayons issus de F . L'image de F étant, par définition, à l'infini, les rayons sortants ne peuvent pas se couper et le rayon (3) va ressortir parallèle à l'axe principal.

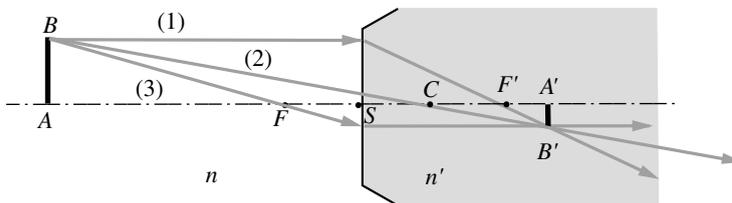


Figure 5.10 • Cheminement de trois rayons particuliers traversant un dioptre sphérique convergent ($n' > n$).

Dans l'exemple choisi, les trois rayons réfractés se coupent au point B' , image de B (sauf si l'image de B est rejetée à l'infini). Si B' est à l'intersection des rayons issus de B (représentés en traits pleins), elle est réelle. Au contraire si B' est à l'intersection des prolongements des rayons issus de B (représentés en pointillés), l'image B' est virtuelle. On obtient finalement A' en abaissant la perpendiculaire à l'axe passant par B' . L'image $A'B'$ de AB sera représentée par un trait plein si elle est réelle, en pointillés si elle est virtuelle. Pour effectuer la construction, il n'est pas nécessaire d'utiliser les trois rayons, car deux suffisent pour déterminer complètement le système. On choisira pour toutes nos constructions les rayons (1) et (2).

7.2. Exemples de constructions

7.2.1. Objet réel

La méthode générale de construction est proposée dans trois exemples, sur les figures 5.11 à 5.13 où l'image est tantôt réelle, tantôt virtuelle. Nous rappelons que l'avant du dioptre est l'espace « objet réel » et « image virtuelle » alors que l'arrière est l'espace correspondant à un objet virtuel ou à une image réelle.

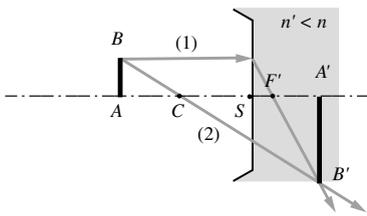


Figure 5.11 • Construction d'une image à travers un dioptre sphérique convergent. L'objet est réel, l'image est réelle.

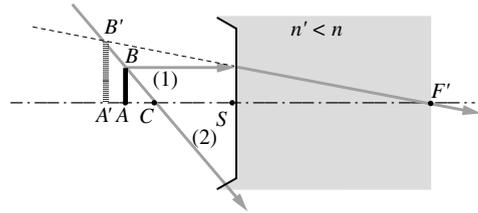


Figure 5.12 • Construction d'une image à travers un dioptre sphérique convergent. L'objet est réel, l'image est virtuelle.

Ainsi, on retrouve que l'image est réelle dans la première construction (figure 5.11) car elle se situe à droite du dioptre. Elle est virtuelle dans la deuxième et dans la troisième construction (figure 5.12 et 5.13) car elle est du même côté du dioptre sphérique que l'objet. Nous verrons dans le paragraphe 7.3 le cas d'un objet réel situé à très grande distance. Enfin l'image est tantôt de même sens que l'objet (figures 5.12 et 5.13), tantôt de sens opposé (figure 5.11). L'introduction du grandissement transversal γ va nous permettre de préciser ce dernier point.

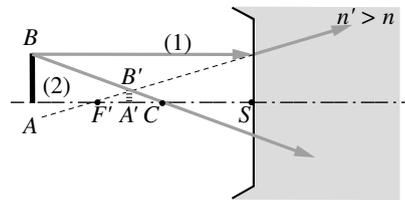


Figure 5.13 • Construction d'une image à travers un dioptre sphérique divergent. L'objet est réel, l'image est virtuelle.

7.2.2. Objet virtuel

Nous avons vu au paragraphe 3.2. qu'un tel objet n'avait pas d'existence en soi. On ne peut envisager ce cas que si un système optique précède le dioptre étudié. C'est une condition nécessaire, mais non suffisante et qui sera illustrée dans le chapitre 8. Cependant, nous pouvons détailler la construction de l'image d'un objet virtuel dans le cadre de ce chapitre. La figure 5.14 donne un exemple de construction dans le cas d'un dioptre sphérique convergent.

Pour construire l'image d'un objet virtuel, on considère les mêmes rayons particuliers auxquels s'applique le même principe de construction : le rayon (2) passant par le centre du dioptre n'est pas dévié. Le rayon (1), initialement parallèle à l'axe, est dévié comme s'il provenait de F' . Il devient le rayon (1'). Les rayons (1') et (2) se coupent en B' . On obtient une image $A'B'$ réelle.

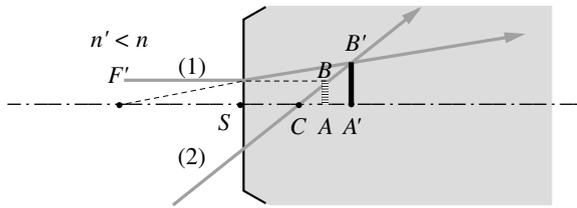


Figure 5.14 • Construction d'une image à travers un dioptre sphérique divergent. L'objet est virtuel, l'image est réelle.

7.3. Construction de l'image d'un objet situé à grande distance (à l'infini)

Quand un objet est à très grande distance d , on ne peut plus construire son image avec la méthode précédente ; ceci est d'autant plus vrai lorsque l'objet est de grand diamètre D , comme la Lune par exemple. Dans ce cas, il n'est plus défini par sa dimension linéaire mais plutôt par son diamètre apparent α , où $\alpha \approx \frac{D}{d}$ (figure 5.15). Par exemple la Lune, de diamètre 3 476 km, située à 384 000 km de la Terre, a un diamètre apparent de $\alpha = \frac{3\,476}{384\,000} = 0,00905 \text{ rd} = 0,518^\circ = 31'$.

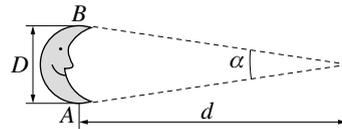


Figure 5.15 • Définition du diamètre apparent α d'un objet situé à grande distance.

Soit deux points de la Lune, A et B , diamétralement opposés. Plaçons A sur l'axe principal du dioptre et B au-dessus de l'axe. Ceux-ci sont tous deux à l'infini. A' , l'image de A , est confondue avec le foyer F' du dioptre. $A'B'$ est donc dans le plan focal image. De B , situé aussi à l'infini arrivent des rayons parallèles inclinés d'un angle α par rapport à l'axe principal (figure 5.16). Deux rayons particuliers suffisent à construire $A'B'$. Ce sont :

- le rayon (1) qui passe par F ; il ressort parallèlement à l'axe ;
- le rayon (2) qui passe par C ; il ressort sans être dévié.

Pour l'exemple choisi (figure 5.16), ces deux rayons se coupent dans le plan focal image en B' . On a donc une image réelle.

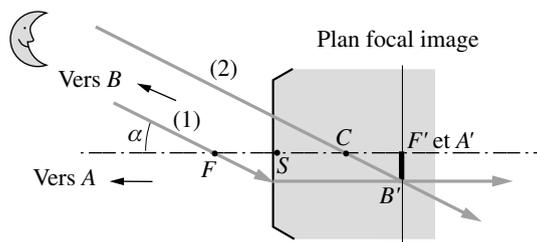


Figure 5.16 • Construction de l'image du point B placé à une distance angulaire α par rapport à l'axe du dioptre dans l'approximation de Gauss.

Un raisonnement analogue permet de déduire les constructions proposées dans les figures 5.17 à 5.20.

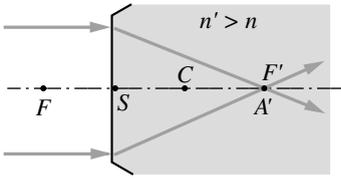


Figure 5.17 • L'objet réel A est à l'infini et le dioptré est convergent. A' est au foyer image en F' .

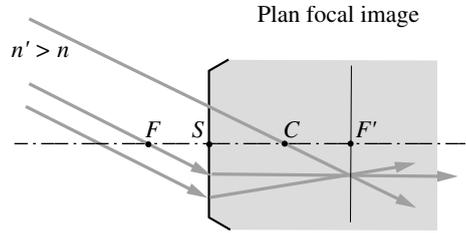


Figure 5.18 • L'objet réel A est à l'infini et le dioptré est convergent. A' est dans le plan focal image.

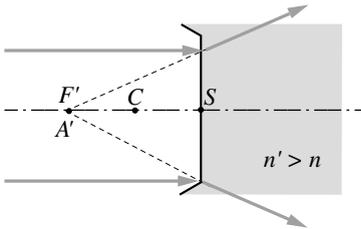


Figure 5.19 • L'objet réel A est à l'infini et le dioptré est divergent. A' est au foyer image F' .

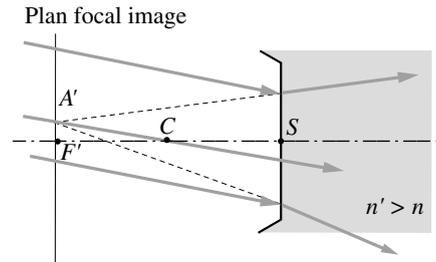


Figure 5.20 • L'objet réel A est à l'infini et le dioptré est divergent. A' est dans le plan focal image.

8. GRANDISSEMENT TRANSVERSAL OU TRANSVERSE γ

Les points A et B considérés dans nos constructions forment un objet filiforme perpendiculaire à l'axe principal. On constate que l'objet AB et son image n'ont pas nécessairement la même dimension ni le même sens. La notion de grandissement transversal γ permet de préciser quelles sont les propriétés de l'image (cette notion ne doit pas être confondue avec celle de grossissement G qui caractérise les dimensions angulaires). γ se définit naturellement comme :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Considérons à titre d'exemple le cas traité sur la figure 5.11. Dans l'approximation des petits angles, on peut écrire $\overline{SI} \approx \overline{AB}$ et les triangles SIF' et $F'A'B'$ ayant un angle en commun, on a la suite d'égalités :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}} = \frac{\overline{F'S} + \overline{SA'}}{\overline{F'S}} = \frac{-f' + p'}{-f'} = 1 - \frac{p'}{f'}$$

De la deuxième forme de la relation de conjugaison, on obtient :

$$1 - \frac{p'n}{n'p} = \frac{p'}{f'} \quad \text{soit} \quad 1 - \frac{p'}{f'} = \frac{np'}{n'p} = \gamma$$

Grandissement transversal :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{np'}{n'p} = \frac{n\overline{SA'}}{n'\overline{SA}}$$

Cette expression, dans laquelle on a exprimé p' en fonction de p , s'écrit aussi :

$$\gamma = \frac{np'}{n'p} = \frac{n}{n + p\Phi}$$

L'étude mathématique de cette fonction est donnée dans l'encart 5.5. La courbe correspondante est tracée pour un dioptre convergent (figure 5.21) et pour un dioptre divergent (figure 5.22). Le grandissement longitudinal g qui est porté sur les courbes est abordé au paragraphe suivant.

Encart 5.5. Étude mathématique de la fonction $f(x) = \frac{n}{n + x\Phi}$

- **Calcul de la dérivée**
 $f'(x) = \frac{-n\Phi}{(n + x\Phi)^2}$. La fonction étudiée est décroissante si le dioptre est convergent, croissante dans le cas contraire.
- **Étude des asymptotes**
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. La courbe présente une asymptote horizontale quand $x \rightarrow \pm\infty$. Cette asymptote a pour équation $y = 0$ quelle que soit la vergence du dioptre.
 $\lim_{x \rightarrow -\frac{n}{\Phi}} f(x) = \infty$. La courbe présente aussi une asymptote verticale d'équation $x = -\frac{n}{\Phi} = f$.

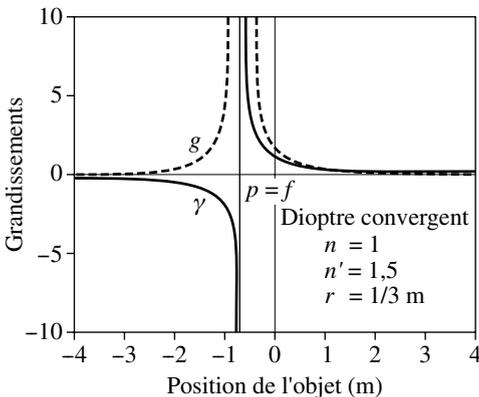


Figure 5.21 • Grandissements transversal γ et longitudinal g en fonction de la position de l'objet p pour un dioptre convergent.

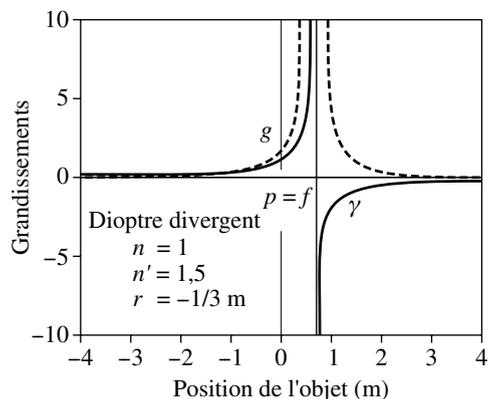


Figure 5.22 • Grandissements transversal γ et longitudinal g en fonction de la position de l'objet p pour un dioptre divergent.

On retiendra des deux courbes les points suivants :

- le grandissement γ tend vers zéro quand l'objet (réel ou virtuel) tend vers l'infini ;
- par exemple, pour un dioptre convergent (figure 5.21), γ est négatif si l'objet réel est à gauche du foyer objet. Dans ce cas, l'image est renversée ($A'B'$ de sens opposé à AB). Au contraire, si l'objet réel est à droite du foyer objet, γ est positif. $A'B'$ est alors de même sens que AB . Enfin, si l'objet est virtuel, l'image est toujours droite ($\gamma > 0$) ;
- de manière générale, les tailles de l'objet et de son image sont différentes. Celle de l'image dépend de la position de l'objet par rapport au sommet S du dioptre. Tous les cas possibles sont résumés dans le tableau 5.2 .

Tableau 5.2 • Nature et sens de l'image en fonction de γ .

	$\gamma > 0$ (image droite)	$\gamma < 0$ (image renversée)
$ \gamma > 1$ (image agrandie)	droite et agrandie	agrandie et renversée
$ \gamma < 1$ (image réduite)	droite et réduite	réduite et renversée

9. GRANDISSEMENT LONGITUDINAL g

Si l'objet possède aussi une dimension dans la direction de l'axe principal, il y a également modification de sa taille longitudinale. On appelle g le grandissement longitudinal. Celui-ci est défini de la manière suivante : si l'objet se déplace sur l'axe principal d'une petite quantité dp , l'image se déplace de dp' ; le grandissement longitudinal est simplement égal au rapport de ces deux distances :

$$g = \frac{dp'}{dp}$$

Pour calculer g , revenons à la deuxième forme de la formule de conjugaison du dioptre sphérique :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n'}{f'}$$

La différentiation des deux membres donne :

$$\frac{n'dp'}{p'^2} - \frac{ndp}{p^2} = 0$$

Soit :

$$g = \frac{dp'}{dp} = \frac{n}{n'} \left(\frac{p'}{p} \right)^2 = \frac{n'}{n} \gamma^2 = n_r \gamma^2$$

Le grandissement longitudinal g se comporte comme γ^2 . Il est donc toujours positif, ce qui signifie que p' et p varient toujours dans le même sens. Si l'objet se déplace de gauche à droite (p augmente), l'image se déplace donc dans le même sens (p' augmente). Les figures 5.21 et 5.22 présentent également g en fonction de p pour des dioptres convergent et divergent.

10. DÉFORMATION D'IMAGES À TRAVERS LES DIOPTRES SPHÉRIQUES

Le fait que les deux grandissements γ et g ne soient pas égaux produit une déformation des images d'objets à deux dimensions situés dans le plan. Un objet est défini par son contour $y = f(x)$. À travers un dioptré sphérique, le contour de l'image est $y' = h(x')$, la fonction h étant différente de f (figure 5.23).

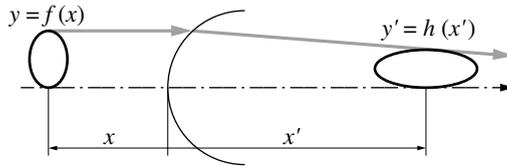


Figure 5.23 • L'objet de contour $f(x)$ a une image de contour $h(x')$.

Les formules des dioptries relient les quantités x , y , x' et y' entre elles :

$$\frac{n'}{x'} - \frac{n}{x} = \Phi \quad y' = \frac{nx'}{n'x} y$$

On en tire facilement :

$$x = \frac{nx'}{n' - \Phi x'} \quad y = \frac{n'y'}{n' - \Phi x'}$$

Ces deux quantités reportées dans la formule du contour donnent :

$$y = f(x) \implies y' = \frac{n' - \Phi x'}{n'} f\left(\frac{nx'}{n' - \Phi x'}\right) = h(x')$$

Par exemple un segment de droite d'équation $y = f(x) = ax + b$ devient un autre segment de droite d'équation :

$$y' = \frac{n' - \Phi x'}{n'} \left(a \frac{nx'}{n' - \Phi x'} + b \right) = \frac{an - b\Phi}{n'} x' + b$$

En particulier une ligne horizontale ($a = 0$) donne une droite inclinée.

À titre d'application, l'encart 5.6 rapporte le calcul de l'image d'un carré à travers un dioptré sphérique.

Encart 5.6. Image d'un objet carré à travers un dioptre sphérique

Considérons l'image d'un objet carré $ABCD$ de 1,5 cm de côté à travers un dioptre sphérique convexe convergent de 2 cm de rayon de courbure. On a $n = 1$ et $n' = 4/3$. Le côté AD est sur l'axe du dioptre et l'on a :

$$\overline{SD} = -18,5 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \overline{SA} = -20 \text{ cm}$$

Nous allons déterminer la position des quatre sommets et la forme de l'image $A'B'C'D'$. Ceci peut être fait soit graphiquement, soit à partir de la formule de conjugaison. La figure 5.24 en donne la résolution graphique : il suffit de considérer les deux objets AB et CD et d'en construire les images.

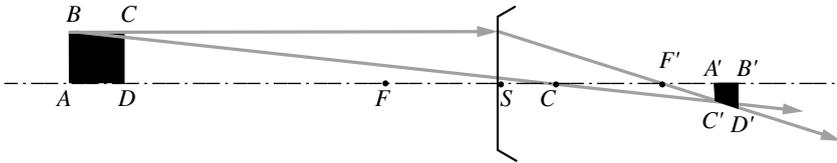


Figure 5.24 • Image d'un objet carré à travers un dioptre sphérique convergent.

Les positions de A' et de D' sont aussi données par les formules de conjugaison, avec $r = 2 \text{ cm}$, $p_D = -18,5 \text{ cm}$, et $p_A = -20 \text{ cm}$. f et f' valent respectivement -6 cm et 8 cm . On trouve donc les coordonnées de A' (11,43 ; 0) et de D' (11,84 ; 0). Les cotes de B' et de D' sont obtenues en étudiant l'image des deux objets AB et CD . La cote en x de B est la même que celle de A , sa cote en y est donnée par le calcul de la taille de l'objet $A'B'$. Le même raisonnement est appliqué à l'objet CD . On trouve alors, pour AB , $\gamma = -0,43$ et pour DC , $\gamma = -0,48$. On obtient finalement B' (11,43 ; 0,64) et C' (11,84 ; 0,72).

Le carré est fortement déformé et devient un trapèze très aplati.

À RETENIR

- Dans le plan d'incidence, le **dioptre sphérique** est un arc de cercle de centre C et de rayon de courbure r . On y définit l'axe principal comme l'axe horizontal passant par C . Conventionnellement, cet axe est orienté positivement de la gauche vers la droite. Tout rayon lumineux incident se propagera toujours de gauche à droite du premier milieu d'indice n vers le milieu d'indice n' . Les formules établies ne sont valables que dans le cadre de cette convention. On prend comme origine de l'axe principal le sommet S du dioptre. Sur cet axe, l'objet A , son image A' et le centre de courbure C sont repérés par les quantités algébriques :

$$p = \overline{SA} ; \quad p' = \overline{SA'} ; \quad r = \overline{SC}$$

- Deux configurations sont possibles : si $r > 0$, le dioptre est **convexe**, **concave** si $r < 0$. Suivant les valeurs relatives des indices n et n' ($n > n'$ ou $n < n'$) et suivant le signe du rayon de courbure ($r > 0$ ou $r < 0$), on a quatre configurations possibles qui se scindent en deux catégories : les dioptres **convergentes** et **divergentes**.

- La relation de conjugaison relie dans l'approximation de Gauss les positions d'un objet A et de son image A' :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r} = \Phi \quad \text{ou} \quad \frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n' - n}{\overline{SC}}$$

Φ s'appelle la **vergence** ou **puissance** du dioptre. On l'exprime en **dioptries**.

1 dioptrie = 1 m^{-1} .

Φ est positive pour un dioptre **convergent**, négative pour un dioptre **divergent**.

- Un dioptre possède deux points remarquables, appelés les **foyers**, et repérés sur l'axe principal par F et F' .
- F est la position d'un objet A correspondant à une image A' rejetée à l'infini. C'est le foyer objet du dioptre ;
 - F' est la position de l'image A' correspondant à un objet rejeté à l'infini. C'est le foyer image du dioptre.
- À ces deux foyers sont associées les distances focales f et f' appelées respectivement distance focale objet et distance focale image du dioptre. Elles permettent de repérer F et F' par rapport au sommet du dioptre. Les plans perpendiculaires à l'axe principal en F et F' sont respectivement les plans focaux objet et image du dioptre. Le plan focal image contient l'image d'un objet rejeté à l'infini, quand il n'est pas sur l'axe principal :

$$f = \overline{SF} = -r \frac{n}{n' - n} = -\frac{n}{\Phi} ; \quad f' = \overline{SF'} = r \frac{n'}{n' - n} = \frac{n'}{\Phi} ; \quad \frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n} = -n_r$$

f et f' sont donc toujours de signe opposé. F et F' sont toujours situés de part et d'autre du dioptre sphérique. Leurs positions ne sont jamais symétriques par rapport au sommet S du dioptre. Dans un dioptre convergent, f est négative et F se situe à gauche du dioptre sphérique. f' est positive et F' se situe à droite du dioptre sphérique dans le milieu d'indice n' . La situation est inversée pour un dioptre divergent.

- En utilisant les distances focales, on peut réécrire la relation de conjugaison sous deux formes différentes :

• **relation de Descartes** : $\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$ ou $\frac{\overline{SF'}}{\overline{SA'}} + \frac{\overline{SF}}{\overline{SA}} = 1$

• **relation de Newton** : $ff' = (p - f)(p' - f')$ ou $\overline{SF} \cdot \overline{SF'} = \overline{FA} \cdot \overline{F'A'}$

- L'objet AB et son image $A'B'$ ne sont pas en général de même dimension et peuvent être renversés l'un par rapport à l'autre. $A'B'$ est caractérisée par un grandissement transversal γ et par un grandissement longitudinal g :

• **grandissement transversal** : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{np'}{n'p} = \frac{n\overline{SA'}}{n'\overline{SA}}$

• **grandissement longitudinal** : $g = \frac{dp'}{dp} = \frac{n}{n'} \left(\frac{p'}{p} \right)^2 = \frac{n'}{n} \gamma^2 = n_r \gamma^2$

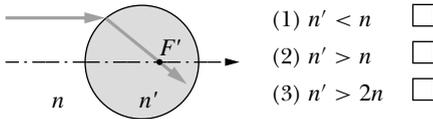
Le signe de γ indique si l'image est droite ou renversée par rapport à l'objet. g est toujours positif.

QCM

1 Dans un dioptre sphérique, l'un des foyers peut-il être confondu avec le centre de courbure ?

- (1) Oui, si les deux indices n et n' sont égaux.
- (2) Oui, mais seulement si le dioptre est convergent.
- (3) Jamais.

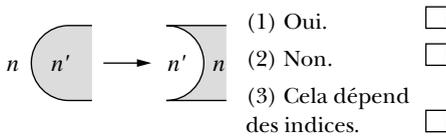
2 À quelle condition, le foyer F' du dioptre est-il à l'intérieur de la boule de rayon R ?



3 Un dioptre sphérique donne d'un objet A , une image A' . A et A' peuvent-ils être confondus ?

- (1) Jamais.
- (2) Toujours.
- (3) En 2 points.

4 Un dioptre sphérique convergent est retourné. Reste-t-il convergent ?



5 Quand on est sous l'eau, sans masque de plongée, on voit flou parce que

- (1) la pression de l'eau modifie le rayon de courbure de la cornée.

(2) l'eau absorbe plus que l'air.

(3) l'indice de l'eau n'est pas égal à 1.

6 L'œil est assimilé à un dioptre sphérique d'indice $n' = 1,33$ et de rayon de courbure $r = 6$ mm. Quelle est la valeur de la distance focale f' ?

(1) 12 mm

(2) 24 mm

(3) 48 mm

7 L'œil assimilé à un dioptre sphérique d'indice $n' = 1,33$ et de rayon de courbure $r = 6$ mm est plongé dans l'eau d'indice $n = 1,33$. Que vaut sa distance focale f' ?

(1) 12 mm

(2) 24 mm

(3) Elle est infinie.

8 Un dioptre convexe d'indice n' est convergent dans l'air. Plongé dans l'eau d'indice $n = 4/3$, il devient divergent

(1) $n' > 4/3$

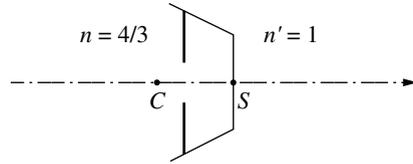
(2) $n' = 4/3$

(3) $n' < 4/3$

Réponses : 1. 3, 2. 3, 3. 3, 4. 1, 5. 3, 6. 2, 7. 3, 8. 3

EXERCICES

1 On considère le grandissement provoqué par le dioptré eau-air ($n = 4/3$ et $n' = 1$) dont le rayon de courbure est r .



a) Déterminez les positions des foyers F et F' en fonction de r . Les placer sur une figure à l'échelle. Le dioptré est-il convergent ?

b) Le dioptré considéré est la cornée de l'œil de 8 mm de rayon de courbure. À 4 mm à l'intérieur de l'œil se trouve la pupille ayant un diamètre de 3 mm. Quelle est sa hauteur apparente vue de l'extérieur ?

c) Le dioptré est la surface d'un bocal sphérique de 15 cm de rayon ; le verre du bocal est suffisamment mince pour que l'on néglige l'épaisseur du verre. Un poisson rouge de 10 cm de long se promène dans le bocal (plein d'eau !). Calculez sa taille apparente vue de l'extérieur quand il est contre le dioptré, au centre du bocal puis à l'autre extrémité du bocal.

2 a) Un dioptré sphérique de rayon de courbure r égal à $+2$ cm, sépare deux milieux d'indices $n = 3/2$ et $n' = 1$.

– Sur une figure à l'échelle, placer les foyers F et F' .

– Calculer la vergence du dioptré. Est-il convergent ?

– Sur l'axe on place une source ponctuelle en A telle que $p = 2r$. Quelle est la position de l'image A' ?

– Quel est le grandissement transverse γ obtenu pour un objet de 1 cm de hauteur ? Quels sont la nature, grandeur et sens de l'image $A'B'$. Sur la figure placer l'objet AB et construire géométriquement l'image $A'B'$ en faisant apparaître les rayons utilisés.

b) Reprendre l'exercice avec $r = -2$ cm et $p = 2r$.

3 Un dioptré sphérique de rayon de courbure r sépare deux milieux d'indices $n = 3/2$ et $n' = 4/3$.

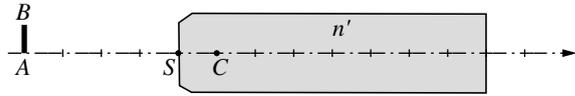
a) Exprimer les distances focales f' et f ainsi que la vergence Φ en fonction de r , le rayon de courbure.

b) On donne $r = -10$ cm. Calculer numériquement f' , f et Φ . Le dioptré est-il convergent ?

c) On place un objet AB à 50 cm en avant du dioptré. Calculer la position p' de l'image ainsi que son grandissement transversal γ .

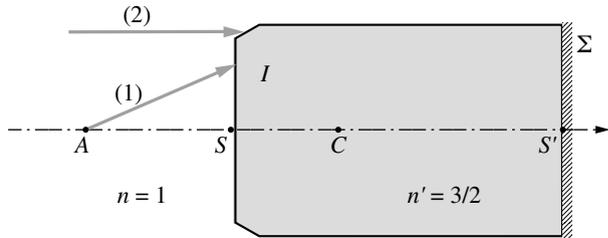
d) Sur une figure, placer les foyers F' et F et l'objet A . Construire son image A' . Quelle est la nature de A' ?

- 4** La face avant d'un bloc de matière plastique d'indice $n' = 3/2$ est une calotte sphérique de sommet S et de centre C .



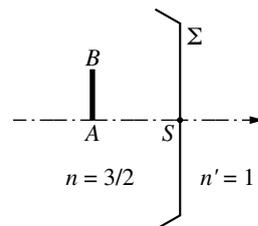
- a) Sachant que l'air a un indice $n = 1$, placer les deux foyers du dioptré sur la figure.
- b) Un objet AB est placé en avant du dioptré à une distance $p = -4r$. Déterminer par le calcul la position de son image $A'B'$ ainsi que son grandissement transversal γ . Construire l'image $A'B'$ en utilisant deux rayons incidents particuliers et commenter.

- 5** Un bloc de verre d'indice $n' = 3/2$ dont la face avant forme un dioptré sphérique est limité à l'arrière par une surface réfléchissante Σ . Un rayon (1) incident AI arrive sur le dioptré ; il est réfracté et recoupe l'axe en A' . Que représente A' quand A tend vers l'infini ? Dans ce cas, on s'arrange pour que A' coïncide avec le point S' . Donner l'expression de $\overline{SS'}$ en fonction de \overline{SC} . Sur la figure, représenter le chemin du rayon (2) jusqu'à ce qu'il sorte de ce système. Quelle est la propriété de ce dispositif ?



- 6** On veut savoir si les rayons arrivant du Soleil sur un aquarium peuvent converger à l'intérieur et griller les poissons qui s'y trouvent. Cela suppose le foyer image F' du dioptré à l'intérieur de l'aquarium. En considérant l'aquarium comme une sphère séparant l'air ($n = 1$) du liquide d'indice n' , quelle condition doit vérifier n' pour que F' se trouve à l'intérieur de l'aquarium ? Les poissons courent-ils des risques ?

- 7** On réalise l'inclusion d'un insecte AB dans de la résine d'indice $n = 3/2$. L'indice de l'air est $n' = 1$. La surface Σ de la résine est une portion de sphère de rayon r et de centre de courbure C .



L'insecte est placé à 1 cm du sommet S à l'intérieur de la résine et l'on veut à travers la surface Σ en obtenir une image $A'B'$ avec un grandissement transverse $|\gamma| = 1,1$.

Suivant le signe choisi pour γ ($\gamma = \pm 1$), il y a deux solutions. Dans chaque cas donner la position de l'image A' et sa nature, ainsi que le rayon de courbure $r = \overline{SC}$.

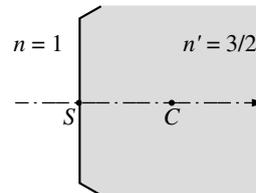
Dans chaque cas, représenter sommairement à l'échelle les positions de S , C , A et A' . Quelle est la « bonne solution » ?

- 8** a) Un dioptré sphérique de 10 cm de rayon de courbure sépare deux milieux d'indices $n = 1$ et $n' = 3/2$.

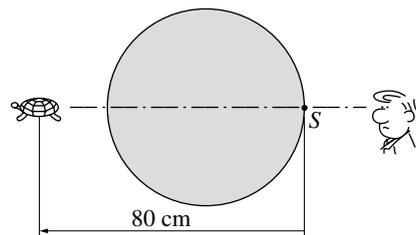
Déterminer la position des foyers. Calculer et dessiner la position de l'image d'un objet AB placé à :

- 60 cm du sommet et réel ;
- 10 cm du sommet et réel ;
- 5 cm derrière le dioptré (objet virtuel).

b) Mêmes questions si l'on inverse les indices.



- 9** Une petite tortue est vue à 80 cm au-delà de la face avant d'un aquarium sphérique de 20 cm de rayon rempli d'eau ($n' = 1,5$). Où est cachée la tortue ?

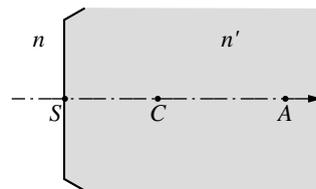


10 Relation de conjugaison à partir du centre

Au lieu de mesurer les distances par rapport au sommet du dioptré, on veut les mesurer à partir du centre de courbure. Par exemple, pour repérer l'objet A , on peut utiliser soit $p = \overline{SA}$, soit $x = \overline{CA}$.

a) Si $r = \overline{SC}$ est le rayon de courbure du dioptré, écrire la nouvelle relation de conjugaison vérifiée par $x = \overline{CA}$ et $x' = \overline{CA'}$.

b) En déduire la position du foyer $\overline{CF'}$. Dans quelles conditions le foyer F' est-il à l'intérieur de la sphère de centre C et de rayon r ?



11 Dioptré sphérique

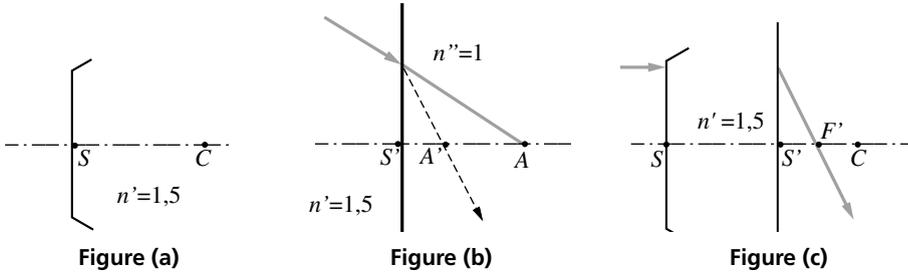
1) Écrire sans démonstration la formule de conjugaison ainsi que la formule du grandissement transverse γ d'un dioptré sphérique de rayon de courbure r séparant 2 milieux d'indices n et n' .

2) En éliminant p' , la position de l'image, à l'aide de la formule de conjugaison, exprimer γ en fonction de p , r , n et n' .

3) Que devient γ pour un dioptré plan ?

12 Lentille épaisse

1) On considère un dioptre sphérique (figure a) de 1 cm de rayon de courbure séparant l'air d'indice $n = 1$ du verre d'indice $n' = 1,5$. Déterminer la position des foyers F_1 et F'_1 de ce dioptre. On donne $\overline{SC} = 1$ cm.



2) On considère un dioptre plan (figure b) séparant 2 milieux d'indices $n' = 1,5$ et $n'' = 1$ et dont le sommet est en S' . Montrer que la relation de conjugaison s'écrit $\overline{S'A'} = \frac{n''}{n'} \overline{S'A}$. Calculer la quantité $\overline{S'A'}$. On donne $\overline{SA} = 3$ cm, $\overline{SS'} = 1$ cm.

3) En s'appuyant sur les résultats des questions 1) et 2), déterminer la position du foyer de la lentille d'indice 1,5 plongée dans l'air (figure c) et constituée par les deux dioptres précédents en déterminant la valeur de la longueur $\overline{SF'}$.

Sur un dessin à l'échelle, après avoir placé les foyers F_1 , F'_1 et F' , représenter le cheminement d'un rayon parallèle arrivant sur la lentille.

13 Dioptre

Un dioptre sphérique de sommet S et de centre C séparant 2 milieux d'indices $n = 1$ et $n' = 4/3$ a un rayon de courbure $|r| = 4$ cm.

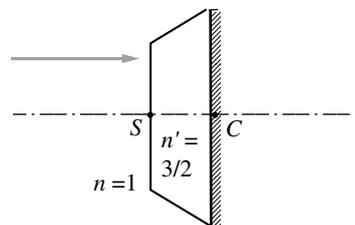
1) Ecrire sans démonstration les formules du dioptre sphérique : relation de conjugaison, grandissement transversal et distances focales.

2) Ce dioptre donne d'un objet réel AB ($p = \overline{SA}$) une image $A'B'$ ($p' = \overline{SA'}$) tel que le grandissement γ soit égal à +2. Calculer les distances p et p' et sur une figure à l'échelle, placer les points S , C , A et A' .

3) Calculer les distances focales f et f' . Le dioptre est-il convergent ou divergent ; convexe ou concave ? Placer les foyers sur la figure précédente.

14 Dioptre + miroir plan

Calculer les distances focales du dioptre sphérique formant la première face de cet objet. Placer les foyers F_1 et F'_1 . Représenter le cheminement du rayon incident parallèle à l'axe après réflexion sur le miroir et la traversée du dioptre. On donne $n = 1$, $n' = 3/2$ et $r = 2$ cm.



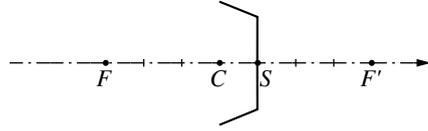
Solutions

- 1** a) Le sommet du dioptré est situé à droite du dioptré comme l'indique la figure.

Les positions des foyers sont données par les

$$\overline{SF} = f = -r \frac{n}{n' - n}$$

et $\overline{SF'} = f' = r \frac{n'}{n' - n}$. On trouve $f' = -3r$ et $f = 4r \cdot \overline{SC}$, le rayon du dioptré est négatif, ce qui entraîne $f' > 0$ et $f < 0$. Le dioptré est donc convergent.



- b) On a $r = -8$ mm ; $f' = 24$ mm et $f = -32$ mm. $p = \overline{SA} = -4$ mm.

La taille apparente de la pupille vue de l'extérieur est déduite de la formule du grandissement transversal $\gamma = \frac{np'}{n'p}$; p' est donné par $\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$. On trouve $p' = -3,428$ mm et $\gamma = 1,14$. La taille apparente est donc $d' = \gamma d = 3,42$ mm.

- c) On a maintenant $r = -15$ cm, $f = -60$ cm et $f' = 45$ cm.

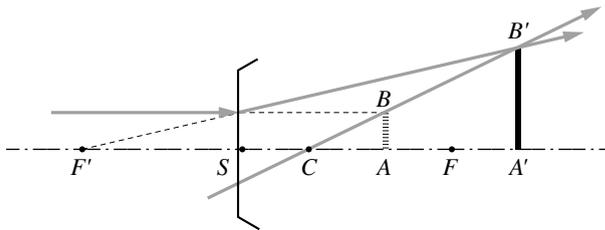
• Pour $p = 0$ (poisson rouge contre le dioptré), $p' = 0$ et $\gamma = 1$ (voir tracés des figures 5.7 et 5.8). Selon que le poisson est en position verticale ou horizontale dans l'aquarium, il faut calculer le grandissement transverse ou longitudinal. S'il est en position verticale, sa taille apparente est de 10 cm (elle est donc celle qu'il a en réalité). Lorsqu'il est en position horizontale, le grandissement longitudinal est donné par $g = \frac{n}{n'} \gamma^2$, ce qui donne une longueur apparente du poisson de 7,5 cm. Dans ce dernier cas, il paraît plus petit qu'il n'est en réalité.

• Pour $p = -15$ cm (poisson au centre du bocal), $p' = -15$ cm, $\gamma = 1,33$; la longueur apparente du poisson est égale à 13,3 cm dans le sens transverse. On a par ailleurs $g = 4/3$, ce qui donne une taille apparente longitudinale de 13,3 cm.

• Pour $p = -30$ cm (poisson à l'autre extrémité du bocal), $p' = -45$ cm, $\gamma = 2$ et la taille apparente du poisson est égale à 20 cm dans le sens transverse, 30 cm dans le sens longitudinal ($g = 3$).

Pour comprendre l'aspect du poisson, il faut aussi prendre en compte la distance par rapport au sommet du dioptré. En effet, quand il s'éloigne, l'augmentation de la taille de l'image est compensée par l'éloignement.

- 2** a) $r = 2$ cm. Rappelons qu'une image est virtuelle si elle est placée à l'intersection du prolongement des rayons particuliers et réelle si elle est placée à l'intersection de ces rayons eux-mêmes.



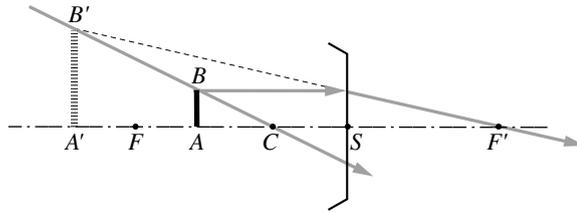
Avec les mêmes formules que précédemment, on trouve $\overline{SF'} = f' = -4$ cm et $\overline{SF} = f = 6$ cm. La vergence du dioptré est donnée par

$$\Phi = \frac{n' - n}{r} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = -25 \text{ m}^{-1} = -25 \delta. \Phi \text{ est négatif. Le dioptré est donc divergent.}$$

Si $p = 2r = 4$ cm, l'objet A est virtuel. Son image A' est en $p' = 8$ cm. $\gamma = 3$, ce qui donne une image de 3 cm.

A est virtuel et A' est réel du même côté que A ; l'image $A'B'$ est orientée dans le même sens que l'objet AB .

b)



Si $r = -2$ cm, $f' = 4$ cm, $f = -6$ cm, $\Phi = 25 \delta$; le dioptre est donc convergent.

$p' = -8$ cm, $\gamma = 3$, ce qui donne une image virtuelle de 3 cm de hauteur et orientée dans le même sens que AB .

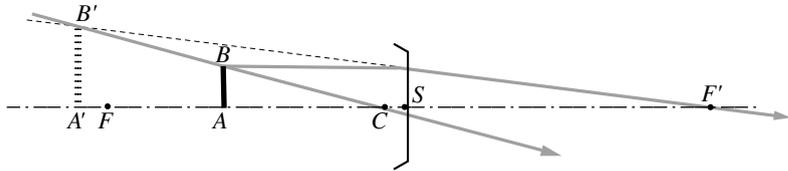
3

a) On a $f' = -8r$, $f = 9r$, $\Phi = -1/6r$.

b) $r = -10$ cm, soit $f' = 80$ cm, $f = -90$ cm, $\Phi = 1,66 \delta$. La vergence étant positive, le dioptre est convergent.

c) $p = -50$ cm, soit $p' = -1$ m et $\gamma = 9/4$. L'image est virtuelle et l'objet réel.

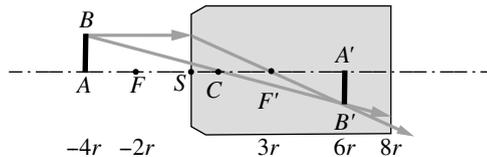
d)



4

a) On a $\overline{SF'} = f' = 3r$, $\overline{SF} = f = -2r$ avec r positif.

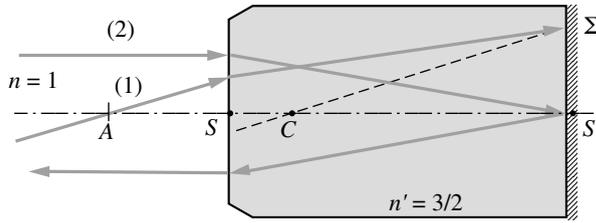
b) Si $p = -4r$ (objet réel), $p' = 6r$, $\gamma = -1$. L'image est donc renversée, de même hauteur que l'objet. Elle est réelle.



5

Quand A tend vers l'infini, A' représente par définition le foyer image F' du dioptre sphérique. Si S' est confondu avec F' , on a $\overline{SS'} = 3r = 3\overline{SC}$.

Ce dispositif donne d'un objet à l'infini une image renversée de même dimension qui se situe aussi à l'infini. Remarquons que ce système est un catadioptre (voir chapitre 4).

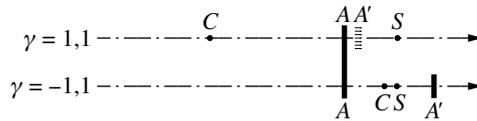


6 Si $n = 1$, le foyer image est donné par la relation $f' = r \frac{n'}{n' - 1}$. Les poissons risquent de griller si le foyer se trouve dans le bocal, soit $0 < f' < 2r$ car r est positif. Ceci revient à $n' > 2$. Si le liquide est de l'eau, les poissons ne courent aucun risque (l'indice de l'eau vaut environ 1,33).

7 La formule de conjugaison du dioptre est $\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r}$. La formule de grandissement transverse est : $\gamma = \frac{np'}{n'p}$. On sait que $p = -1$ cm, ce qui entraîne que $\gamma = -\frac{3p'}{2}$.

• $\gamma = 1,1$, $p = -1$ cm. La formule du grandissement donne $p' = -0,733$ cm. L'image est virtuelle. La formule de conjugaison donne $r = -3,666$ cm.

• $\gamma = -1,1$, $p = -1$ cm. La formule du grandissement donne $p' = 0,733$ cm. L'image est réelle et inversée. La formule de conjugaison donne $r = -0,174$ cm.

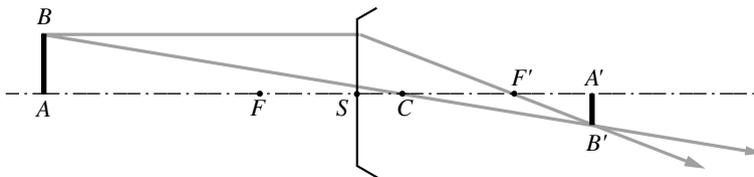


La deuxième solution est difficile à réaliser car le rayon de courbure est trop petit. L'image est alors réelle et peu pratique.

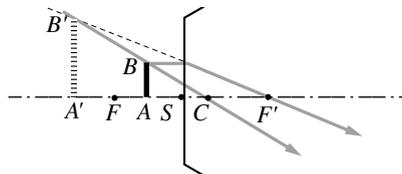
8 a) r est positif, le dioptre est convergent.

On a alors $\overline{SF} = f = -2r = -20$ cm et $\overline{SF'} = f' = 3r = 30$ cm.

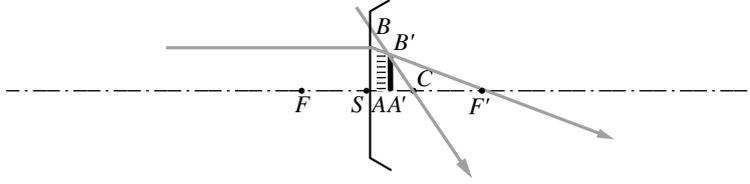
• Si $p = -60$ cm, $p' = 45$ cm. L'image est réelle et renversée.



• Si $p = -10$ cm, $p' = -30$ cm. L'image est virtuelle dans le même sens que l'objet.

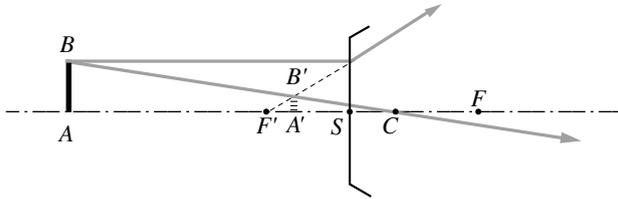


- Si $p = 5 \text{ cm}$, $p' = 6 \text{ cm}$. L'objet est virtuel et l'image réelle.

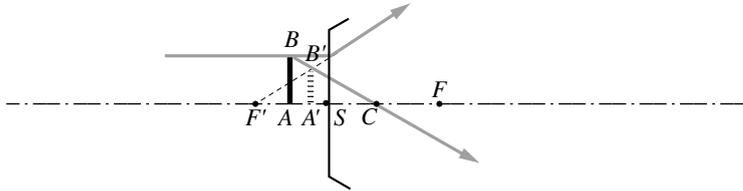


- b) Si l'on inverse les indices, $f' = -20 \text{ cm}$ et $f = 30 \text{ cm}$. Le dioptre est divergent.

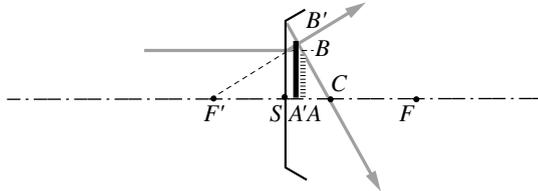
- Si $p = -60 \text{ cm}$, $p' = -13,33 \text{ cm}$. L'objet est réel et l'image virtuelle dans le même sens que l'objet.



- Si $p = -10 \text{ cm}$, $p' = -5 \text{ cm}$. L'objet est réel et l'image est virtuelle dans le même sens que l'objet.



- c) Si $p = 5 \text{ cm}$, $p' = 4 \text{ cm}$. L'objet est virtuel et l'image réelle.



- 9** La tortue est dans l'aquarium. Ce que voit l'observateur, c'est l'image de la tortue à travers le dioptre sphérique. Le dioptre est constitué par la partie droite de l'aquarium.

On a $p' = -80 \text{ cm}$. Par ailleurs, $r = -20 \text{ cm}$. La formule de conjugaison donne $p = -40 \text{ cm}$. La tortue est donc à l'extrémité du bocal.

- 10** a) Si les distances sont repérées par rapport au sommet, la formule de conjugaison s'écrit :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r}, \text{ avec } p = \overline{SA} \text{ et } p' = \overline{SA'}. \text{ On a :}$$

$$p = \overline{SA} = \overline{SC} + \overline{CA} = r + x$$

$$p = \overline{SA'} = \overline{SC} + \overline{CA'} = r + x'$$

en remplaçant dans la formule de conjugaison, on trouve $\frac{n'}{x' + r} - \frac{n}{x + r} = \frac{n' - n}{r}$. En développant cette expression et en la simplifiant, la relation de conjugaison devient :

$$\frac{n}{x'} - \frac{n'}{x} = \frac{n' - n}{r}.$$

b) Quand A tend vers l'infini, son image tend vers le foyer image F' . On a donc dans ce cas particulier : $\overline{CA} = x \rightarrow -\infty$ et $\overline{CA'} = x' = \overline{CF'}$. Soit, en remplaçant dans la nouvelle formule de conjugaison trouvée dans la question précédente, $\frac{n}{x'} = \frac{n}{\overline{CF'}} = \frac{n' - n}{r}$, d'où $\overline{CF'} = \frac{nr}{n' - n}$.

Si $r > 0$, F' est à l'intérieur de la sphère de rayon r si $0 < \overline{CF'} < r$, qui s'écrit encore $n' > 2n$.

11 Dioptre sphérique

$$1) \frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r} \quad \gamma = \frac{np'}{n'p}$$

$$2) p' = \frac{n'r p}{nr + p(n' - n)} \quad \gamma = \frac{nr}{nr + p(n' - n)}$$

3) Pour un dioptre plan, $r \rightarrow \infty$, $\gamma = 1$.

12 Lentille épaisse

1) On peut écrire : $\overline{SF_1} = \frac{nr}{n - n'} = -2$ cm, $\overline{SF'_1} = \frac{n'r}{n' - n} = 3$ cm

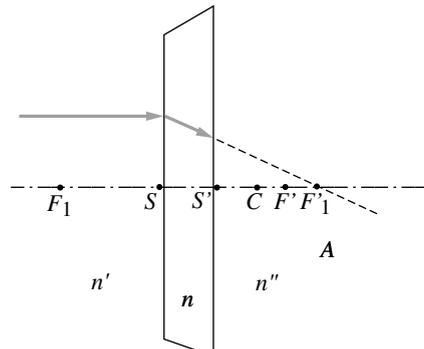
2) On peut considérer le dioptre plan comme un dioptre sphérique de rayon infini.

$$\frac{n''}{\overline{S'A'}} - \frac{n'}{\overline{S'A}} = 0 \implies \overline{S'A'} = \frac{n''}{n'} \overline{S'A} = \frac{n''}{n'} (\overline{S'S} + \overline{SA}) = \frac{4}{3} \text{ cm.}$$

3) Un rayon parallèle à l'axe traverse le dioptre sphérique et passe par le foyer F'_1 . Comme celui-ci se trouve à 3 cm de S , il est confondu avec A (voir question 2). Ensuite, le rayon est réfracté par le dioptre plan de sommet S' et le rayon passe par A' à $4/3$ cm de S' . On a donc :

$$\overline{SF'} = \overline{SS'} + \overline{S'A'} = 1 + 4/3 = 7/3 \text{ cm.}$$

Cette lentille plan convexe est donc convergente.



13 Dioptre

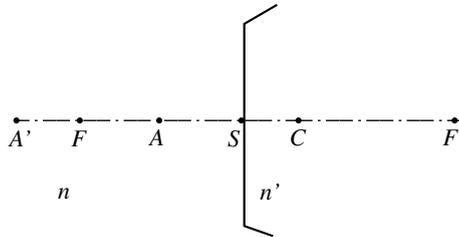
$$1. \frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r}, \gamma = \frac{np'}{n'p}, f' = \frac{n'r}{n' - n}, f = -\frac{nr}{n' - n}$$

2. On obtient :

$$\gamma = 2 = \frac{3p'}{4p} \Rightarrow p' = \frac{8}{3}p, \frac{4}{3p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{3r} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{p} = -\frac{1}{2p} \Rightarrow p = -\frac{3r}{2}$$

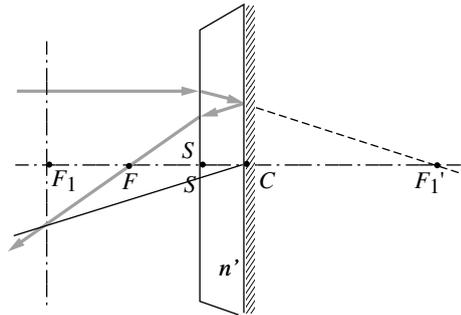
L'objet est réel et p est négatif. L'image est virtuelle. Donc $r > 0$, $r = 4$ cm. $p = -6$ cm et $p' = -16$ cm.

3. $f' = 16$ cm et $f = -12$ cm. Le dioptre est convergent et convexe.



14 Dioptre + miroir plan

$f' = 6$ cm, $f = -4$ cm. Le rayon passe par F_1' . Ensuite, il se réfléchit et passe par le symétrique de F' par rapport au miroir. Ensuite, on construit le rayon émergent du dioptre (le rayon auxiliaire passant par le centre de courbure n'est pas dévié). Remarquons que les 2 rayons se coupent dans le plan focal de l'ensemble dioptre + miroir.



CHAPITRE 6

LES MIROIRS SPHÉRIQUES

Pré-requis

Le miroir sphérique est un dioptré sphérique dont on a recouvert la surface d'une couche réfléchissant totalement la longueur d'onde utilisée. Nous emploierons donc, dans ce chapitre, la même démarche que celle proposée pour le dioptré sphérique. Il est recommandé d'avoir préalablement bien assimilé le chapitre 5 avant d'aborder celui-ci.

Objectif

Nous allons établir la relation de conjugaison propre aux miroirs sphériques à partir des lois de Snell-Descartes dans l'approximation de Gauss. Nous définirons alors ses points remarquables. Nous discuterons de la nature et de la position des images en fonction de celles de l'objet ainsi que de leurs grandissements. Enfin, nous proposerons différentes constructions illustrant les principaux résultats et terminerons par une discussion des approximations utilisées.

1. LE MIROIR SPHÉRIQUE : DÉFINITION

Le miroir sphérique est une portion de sphère (donc un dioptré sphérique) dont on a couvert la surface d'une couche totalement réfléchissante (figure 6.1). Cette couche peut être composée d'un dépôt métallique (Sn, Ag, Al, Au, ...) ou de minces couches d'oxyde (MnO_2). Elle peut être recouverte d'une couche protectrice transparente qui évite l'oxydation du métal, qui, à la longue, ternirait le miroir. Autrefois, avant que ce traitement se généralise, il fallait périodiquement refaire les dépôts.

Le miroir plan est certainement l'élément optique le plus utilisé dans la vie courante. Par contre, les miroirs sphériques sont beaucoup moins courants. Ce sont par exemple les miroirs de toilette grossissants, les rétroviseurs à grand champ, les miroirs installés à certains carrefours... Comme pour le dioptré sphérique, la coupe du miroir

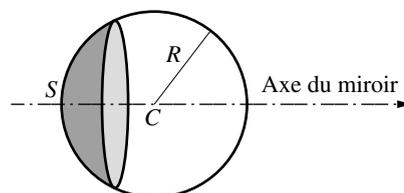


Figure 6.1 • Un miroir sphérique.

sphérique dans un plan passant par son centre C est une portion de cercle de rayon de courbure $r = \overline{SC}$ où S est le sommet du miroir. Passant par ces points, on a défini l'axe principal, orienté avec la convention habituelle de la gauche vers la droite. Ce sens est aussi celui de la lumière incidente. Le miroir sphérique peut être de deux types : il est concave ($r < 0$) ou convexe ($r > 0$). Dans les deux cas, la matière réfléchissante est représentée en hachurés à droite de la surface du miroir (figure 6.2).

Lorsque le miroir est représenté par une portion de cercle, des rayons trop écartés de l'axe arrivent avec de grands angles d'incidence, en ne respectant plus l'approximation de Gauss. C'est pourquoi, pour éviter le conflit entre la construction et le calcul effectué dans le cadre de cette approximation, on représente aussi les miroirs avec les deux symboles donnés sur la figure 6.2. La courbure est alors matérialisée par les deux extrémités, dirigées à gauche dans le miroir concave et à droite dans le miroir convexe.

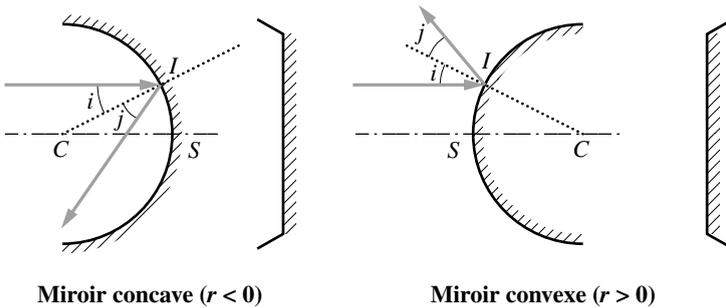


Figure 6.2 • Les deux configurations géométriques d'un miroir sphérique dans le plan d'incidence : le miroir concave ($r = \overline{SC} < 0$) et le miroir convexe ($r > 0$). À droite de chaque miroir est représenté le symbole correspondant, parfois utilisé.

À titre d'exemple, on a considéré sur la figure 6.2 un rayon incident parallèle à l'axe principal pour les deux types de miroirs sphériques. Comme dans le chapitre 5, ce rayon va nous permettre de déterminer le signe de la vergence.

Son angle d'incidence au point I , par rapport à la normale, est i . Il se réfléchit sur le miroir avec un angle de réflexion j , défini par rapport à cette même normale. Les lois de Snell-Descartes établies au chapitre 2 donnent $j = i$. Ainsi, le rayon réfléchi coupe l'axe principal pour un miroir concave mais s'en éloigne pour un miroir convexe. Il y a donc uniquement deux types de miroirs sphériques, que l'on différencie comme suit :

Un miroir *concave* est *convergent*.

Inversement, un miroir *convexe* est *divergent*.

On peut remarquer que ce raisonnement est valable quelles que soient la valeur et l'orientation de j et i .

Encart historique. Les miroirs

Autrefois, les miroirs étaient en bronze, composés d'une lame de verre recouverte du « métal des miroirs » (bronze blanc et dur, à faible pouvoir de réflexion). L'un des premiers télescopes a été inventé par Isaac Newton qui a taillé un miroir dans un bloc de bronze. C'est un matériau difficile à tailler et à polir, et le miroir s'oxyde et doit être repoli souvent. Deux siècles plus tard, Léon Foucault (inventeur du pendule « de Foucault » et du gyroscope) maîtrise la technique de taille et de polissage du verre. Il invente la méthode encore utilisée de nos jours. Le bloc de verre est ébauché en le frottant contre un autre bloc de verre ; entre les deux surfaces, on introduit des abrasifs de plus en plus minces. Quand le polissage est terminé, on dépose une mince couche d'aluminium (autrefois de l'argent) qui rend la surface réfléchissante. Cette dernière est ensuite en général protégée par une couche de silice amorphe.

2. DE LA LOI DE SNELL-DESCARTES À LA RELATION DE CONJUGAISON POUR UN MIROIR SPHÉRIQUE

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, nous pouvons établir, pour un miroir sphérique et à partir de la première loi de Snell-Descartes, une **relation de conjugaison** qui relie les positions sur l'axe principal par rapport à S , d'un objet, A , et de son image, A' . Nous nous plaçons toujours dans l'approximation de Gauss. Cette relation de conjugaison est **universelle**, indépendante du type de miroir sphérique utilisé et nous allons l'établir dans le cas d'un miroir sphérique convergent. L'étude du miroir sphérique divergent est présentée dans l'encart 6.1.

Pour établir la relation de conjugaison, nous utilisons la relation de Snell-Descartes, après avoir défini la configuration du miroir. Les angles introduits dans cette démonstration sont des angles orientés, définis soit par rapport à l'axe principal (α , α' et ω), soit par rapport à la normale au miroir en I (i et j). Avec la convention habituelle tous les angles orientés dans le sens direct (inverse de celui des aiguilles d'une montre) seront donc précédés dans les formules du signe « + » et du signe « - » dans le cas contraire. Sur la figure 6.3, les angles sont orientés dans le sens direct, excepté i , qui sera précédé du signe « - ».

Les démonstrations sont basées sur le même procédé que celui proposé au chapitre 5 dans le cas d'un dioptré sphérique. Elles ne seront pas développées en totalité, étant donnée la similitude des démonstrations.

Du point objet réel A , situé sur l'axe principal, on trace deux rayons particuliers. Le premier, d'incidence nulle passe par l'axe principal. Le deuxième, AI , fait, avec la normale en I , un angle d'incidence i et se réfléchit. Finalement, ces deux rayons se coupent sur l'axe principal en A' (image réelle). On pose $\overline{SA} = p$ et $\overline{SA'} = p'$.

Dans les triangles AIC et CIA' , on écrit que la somme des angles orientés est égale à π :

$$\begin{aligned}\alpha + \pi - \omega - i &= \pi \implies \alpha - \omega = i \\ \omega + \pi - \alpha' + j &= \pi \implies \alpha' - \omega = j\end{aligned}$$

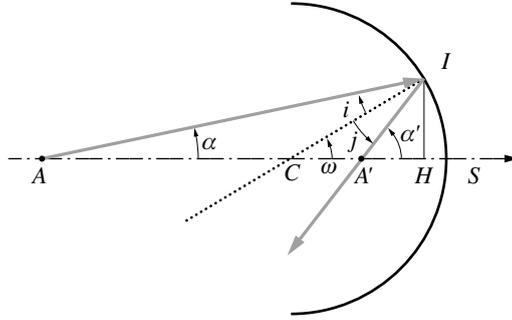


Figure 6.3 • Étude de la marche d'un rayon dans un miroir sphérique convergent (concave).

En considérant les orientations, la loi de Snell-Descartes s'écrit $j = -i$; on a finalement : $2\omega = \alpha + \alpha'$.

Dans l'approximation des petits angles, on peut confondre α , α' et ω avec leurs tangentes et H avec S . On trouve alors :

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{\overline{SI}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{SI}}{-p}, \quad \tan \alpha' \approx \alpha' = \frac{\overline{SI}}{\overline{A'S}} = \frac{\overline{SI}}{-p'} \quad \text{et} \quad \tan \omega \approx \omega = \frac{\overline{SI}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{SI}}{-r}$$

Finalement, si l'on reporte dans $2\omega = \alpha + \alpha'$, on a :

$$2\frac{\overline{SI}}{-r} = -\overline{SI} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \right)$$

On aboutit ainsi à la relation de conjugaison des miroirs sphériques qui s'écrit :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{r} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC}$$

Remarquons que l'on aurait pu choisir un autre sens d'orientation pour les angles (par exemple inverser α). On obtient alors $2\omega = \alpha' - \alpha$ et $i = -\alpha - \omega$. Cependant,

$\tan \alpha = \frac{\overline{SI}}{p}$, ce qui donne la même relation de conjugaison. L'orientation est donc bien arbitraire.

Encart 6.1. Étude du miroir sphérique divergent

Pour un miroir divergent (convexe) (figure 6.4), on suit la même démarche. Maintenant, α et i sont orientés dans le sens direct, et sont précédés du signe « + » dans les formules, par contre j , α' et ω , qui sont orientés dans le sens contraire, sont précédés du signe « - ».

Dans les triangles AIC et $A'IC$, on a :

$$\alpha - \omega + \pi - i = \pi \implies \alpha - \omega = i$$

$$\pi + \alpha' - \omega - j = \pi \implies \alpha' - \omega = j$$

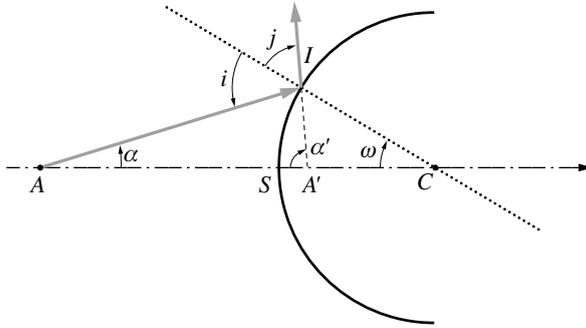


Figure 6.4 • Étude de la marche d'un rayon pour un miroir sphérique divergent (convexe).

Ce sont les mêmes relations que celles établies précédemment. Elles conduisent donc nécessairement à la même relation de conjugaison.

Finalement, nous avons établi, pour les deux configurations possibles du miroir sphérique, une même relation de **conjugaison**. Elle donne sur l'axe principal la position p' de l'image A' d'un objet A positionné en p , le sommet du dioptré S étant pris comme origine.

Première forme de la relation de conjugaison d'un miroir sphérique :

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{2}{r} \text{ ou } \frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{2}{SC}$$

On pourra aussi appliquer cette relation au miroir plan, qui peut être considéré comme un miroir sphérique de rayon de courbure infini. On obtient alors $p' = -p$. On retrouve bien le fait qu'un objet et son image sont positionnés symétriquement par rapport au plan du miroir. Ce résultat avait été établi au chapitre 4 à partir de la loi de Snell-Descartes.

Relation de conjugaison d'un miroir plan :

$$p' = -p \text{ ou } \overline{SA'} = -\overline{SA}$$

3. ÉTUDE DE LA RELATION DE CONJUGAISON DU MIROIR SPHÉRIQUE

La relation de conjugaison, établie pour le miroir sphérique, donne $p' = \frac{rp}{2p - r}$.

L'étude mathématique de cette fonction est présentée dans l'encart 6.2. En traçant la courbe $p'(p)$ on a l'évolution sur l'axe principal de la position de l'image A' lorsque

l'objet A se déplace. En effet, un point quelconque de ces courbes (abscisse p et ordonnée p') donne par ses coordonnées les positions des points conjugués A et A' .

Encart 6.2. Étude mathématique de la relation de conjugaison du miroir sphérique

Cela revient à étudier la fonction $h(x) = \frac{rx}{2x - r}$, où r est une constante négative (miroir convergent) ou positive (miroir divergent).

• **Calcul de la dérivée :**

$h'(x) = \frac{-r^2}{(2x - r)^2} < 0$. La fonction étudiée est donc décroissante quel que soit le type de miroir sphérique étudié.

• **Étude des asymptotes :**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \frac{r}{2}.$$

La courbe présente donc une asymptote horizontale d'équation $y = r/2 = f'$; de même $\lim_{x \rightarrow \frac{r}{2}} h(x) = \mp\infty$. La courbe présente donc aussi une asymptote verticale

d'équation $x = r/2 = f$.

Enfin, on a $f' = f$.

Nous avons pris comme exemple un miroir sphérique convergent de 2 m de rayon de courbure ($r = -2$ m) (figure 6.5) et un miroir divergent ($r = 2$ m) (figure 6.6). Dans les deux cas la courbe est une **hyperbole** qui possède deux asymptotes, une asymptote verticale pour $p = f = r/2$ et une asymptote horizontale pour $p' = f' = r/2$.

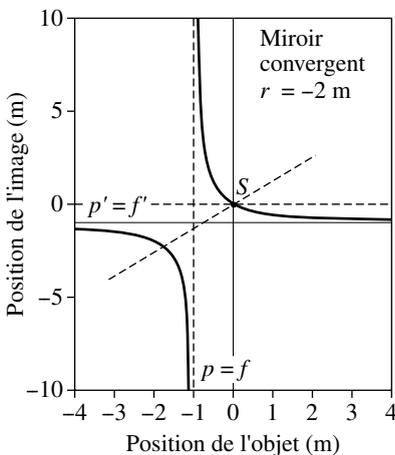


Figure 6.5 • Évolution de la position de l'image A' d'un point objet A qui se déplace sur l'axe principal. Cas d'un miroir sphérique convergent (concave, $r < 0$).

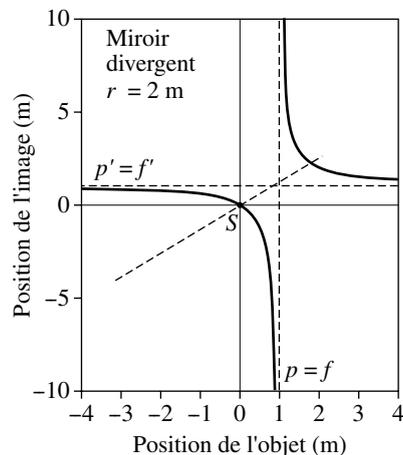


Figure 6.6 • Évolution de la position de l'image A' d'un point objet A qui se déplace sur l'axe principal. Cas d'un miroir sphérique divergent (convexe, $r > 0$).

4. ÉTUDE DES FoyERS D'UN MIROIR SPHÉRIQUE

Le profil des courbes des figure 6.5 et 6.6 permet de tirer les conclusions suivantes.

- Les deux courbes présentent une asymptote horizontale quand $p \rightarrow \pm\infty$. Ainsi plus l'objet A s'éloigne de S , plus A' , son image, tend vers une position particulière fixe notée F' et repérée par :

$$\overline{SF'} = f' = \frac{r}{2}$$

Il s'agit bien entendu du foyer image du miroir.

- De même, la courbe présente une asymptote verticale lorsque $p \rightarrow \frac{r}{2}$. On note cette valeur particulière de p :

$$\overline{SF} = f = \frac{r}{2}$$

C'est maintenant l'image A' qui tend vers l'infini si A tend vers ce point F . F est donc le foyer objet du miroir.

- Ainsi, dans le cas d'un miroir sphérique, on a $f' = f$. Les deux distances focales étant égales, on ne peut plus dire que le signe de f' détermine la vergence du miroir. En effet, ces deux quantités sont positives pour un miroir divergent ($r > 0$) et négatives pour un miroir convergent ($r < 0$). Les deux foyers F et F' sont donc confondus sur l'axe principal, à mi-chemin entre S et C . De même signe que r , ils sont à gauche de S pour un miroir sphérique convergent (concave), et à droite pour un miroir divergent (convexe).

Enfin, le plan perpendiculaire à l'axe principal en F (ou F') est à la fois le plan focal objet et le plan focal image du miroir.

Un miroir sphérique possède un foyer double qui fait office de foyer objet et de foyer image :

$$f' = f = \frac{r}{2} \quad \text{ou} \quad \overline{SF'} = \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

Notons pour terminer que l'on trouve pour un miroir plan $f \rightarrow \infty$ car $r \rightarrow \infty$. Les foyers sont donc rejetés à l'infini.

L'encart 6.3 présente un exemple de miroir divergent présent dans la nature, quoique méconnu...

Encart 6.3. Les flaques d'eau sont des miroirs divergents

Un exemple très banal de miroir est fourni par la goutte d'eau. Celle-ci peut être considérée sphérique lorsqu'elle est petite (d'un diamètre de l'ordre de 3 mm). C'est aussi le cas d'une flaque d'eau à la surface de la Terre.

Une flaque d'eau à la surface de la Terre n'est pas plane, car elle épouse la forme du géoïde terrestre, c'est-à-dire en première approximation une sphère de rayon $R = 6\,378\text{ km}$. De ce fait, l'image d'un objet situé très loin, comme la Lune qui se mire dans l'eau, n'est pas symétrique par rapport au plan du miroir équivalent, mais située approximativement au foyer, à 3 189 km, à mi-chemin entre la surface et le centre de la Terre (figure 6.7).

On peut néanmoins montrer que la courbure d'une flaque d'eau est très faible : en effet, une flaque d'eau de 1 m de diamètre a une flèche δ qui s'écrit $\delta = R(1 - \cos \alpha)$.

Comme $\sin \alpha = d/2R = 7,84 \cdot 10^{-8}$, $\alpha = 0,01619''$, $\delta = 1,96 \cdot 10^{-8}\text{ m} = 196\text{ \AA}$.

Flaque d'eau bombée

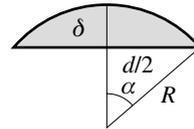


Figure 6.7 • À la surface de la Terre, les étendues d'eau ont la forme d'un miroir divergent de 6 378 km de rayon de courbure.

5. NATURE DE L'IMAGE FORMÉE PAR UN MIROIR SPHÉRIQUE

L'analyse du profil des courbes représentées sur les figures 6.5 et 6.6 permet aussi de discuter de la nature de l'image formée par le miroir sphérique. Comme dans le cas du dioptre sphérique, les propriétés de A' dépendent fortement de celles de A et de sa position sur l'axe principal.

5.1. Cas d'un objet réel ($p < 0$)

Un objet est réel s'il se situe à gauche (en avant) du miroir sphérique. Dans ce cas, seul le demi-plan correspondant à p négatif a une signification (figures 6.5 et 6.6). Nous rappelons que c'est la seule situation possible si le miroir est utilisé seul car un objet virtuel doit nécessairement être formé par un autre système optique (miroir, lentille...).

Les figures 6.5 et 6.6 permettent de tirer les conclusions suivantes.

- Quel que soit le type de miroir sphérique, l'objet et son image ont en général une position distincte sur l'axe principal. Cependant, si le miroir est convergent ($r < 0$) il existe deux points particuliers pour lesquels A et A' sont confondus, donnés par $p = p' = 0$ d'une part (A et A' sont alors en S) et $p = p' = r$ d'autre part (A et A' sont en C). Si le miroir est divergent ($r > 0$), on ne peut avoir que $p = p' = 0$.
- Selon la position de l'objet par rapport au foyer, l'image est soit réelle, soit virtuelle. Pour un miroir convergent, deux situations se présentent selon que p est supérieur ou inférieur à f . Elles sont représentées sur la figure 6.8 (a) et (b). Remarquons que l'on trouve ici une inversion des espaces images par rapport à ceux définis pour un dioptre sphérique. En effet, alors que le dioptre est un système dioptrique, le miroir est cata-dioptrique (voir chapitre 4).

- Pour un miroir divergent, $r > 0$ (figure 6.6), p' est toujours positif et A' se situe à droite de S . A' est donc toujours virtuelle. Ce résultat est résumé sur la figure 6.8d.
- Finalement, quel que soit le type de miroir, la dérivée de p' en fonction de p est négative (voir encart 6.2) ; p' et p varient donc toujours en sens inverse. Par exemple, si un objet (réel) se rapproche d'un miroir sphérique (p négatif augmente), p' diminue. C'est l'expérience habituelle qui consiste à se regarder dans un miroir tout en avançant ; l'image se rapproche également.

Pour un miroir divergent, ce déplacement est continu et la nature (virtuelle) de A' ne change pas. Ce n'est pas le cas pour un miroir convergent. Le déplacement de l'image vers S présente une discontinuité au passage de l'objet au foyer où l'image réelle, renvoyée à l'infini, devient virtuelle.

5.2. Cas d'un objet virtuel ($p > 0$)

Un objet est dit virtuel s'il se situe à droite de S . Dans ce cas, on n'étudie que le demi-plan correspondant à p positif (figures 6.5 et 6.6). Cet objet est forcément issu d'un autre système optique placé en amont, que l'on ne considèrera pas ici. Ce sont des situations très courantes dans les instruments d'optique, mais qui peuvent sembler à l'observateur peu naturelles.

Le profil des deux courbes permet l'analyse suivante :

- pour un miroir divergent, $r > 0$ (figure 6.6), l'image est soit réelle soit virtuelle, selon que p est supérieur ou inférieur à f (figure 6.8e et f) ;
- au contraire pour un miroir convergent, $r < 0$ (figure 6.5), p' est toujours négatif et A' se situe en dehors du miroir sphérique ; elle est réelle (figure 6.8c) ; quand l'objet se rapproche de S , le déplacement de A' est maintenant continu et ne change pas la nature de l'image. Dans le cas d'un miroir divergent, ce déplacement présente une discontinuité lorsque l'objet passe au foyer où l'image réelle devient virtuelle.

Ces différentes possibilités, résumées sur un schéma de principe dans la figure 6.8, seront illustrées au paragraphe 7 à partir de constructions. Elles sont d'ailleurs faciles à vérifier en se regardant (en fait en regardant son œil) dans une petite cuillère, utilisée d'un côté ou de l'autre (voir exercice 5).

6. AUTRES FORMULATIONS DE LA RELATION DE CONJUGAISON

Comme dans le cas des dioptries sphériques, on peut obtenir deux formes équivalentes de la formule de conjugaison précédente en introduisant les distances focales f et f' .

On peut tout d'abord éliminer le rayon de courbure r de la première forme de la relation de conjugaison pour ne faire intervenir que f ou f' . On obtient :

Deuxième forme de la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{1}{SF'} = \frac{1}{SF} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f}$$

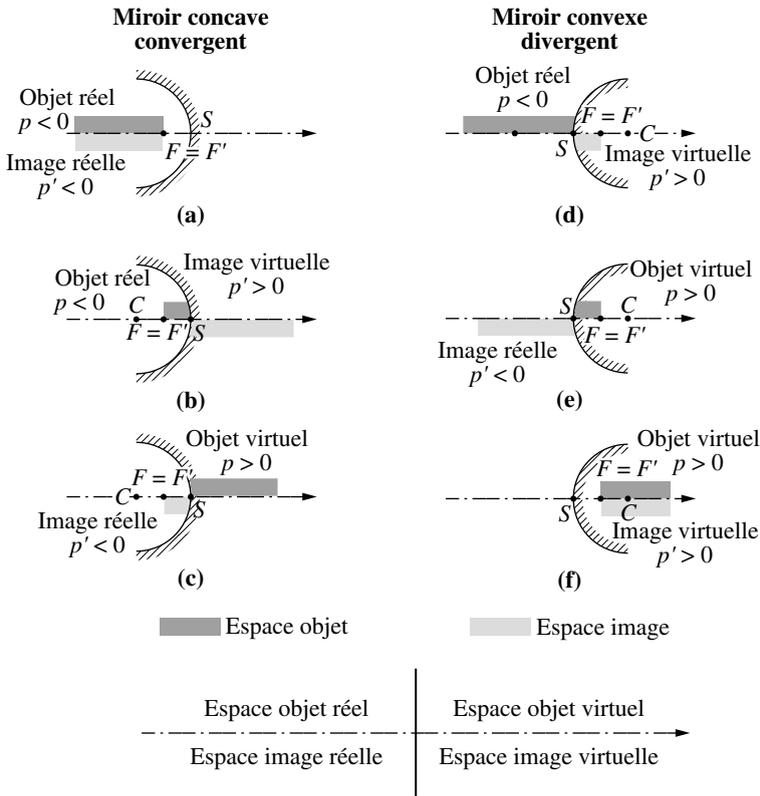


Figure 6.8 • Représentation des différentes possibilités offertes par un miroir sphérique convergent (concave) et divergent (convexe).

On peut aussi multiplier les 2 membres de la première forme de la relation de conjugaison par f' . Comme $f' = f$, on obtient immédiatement la relation dite de Descartes :

Troisième forme de la relation de conjugaison (dite de Descartes) :

$$\frac{\overline{SF'}}{\overline{SA'}} + \frac{\overline{SF}}{\overline{SA}} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$$

On remarque enfin que la forme de Descartes, établie pour le miroir sphérique, est identique à celle écrite pour le dioptre sphérique. Plus généralement, on pourra déduire toutes les formules du miroir sphérique de celles du dioptre en posant $n' = -n$. Notons que cette dernière relation indique que le cheminement du rayon se fait toujours dans le même milieu; le signe « - » marque donc le retour du rayon.

7. RELATION DE NEWTON

Les relations de conjugaison nous donnent la position de l'image A' d'un objet A par rapport au sommet S du miroir sphérique. On peut aussi prendre comme origine des positions le foyer double F ou F' . Cette relation, due à Newton, a été formulée au chapitre 5 à partir de la troisième forme de l'équation de conjugaison pour le dioptré sphérique. Elle est commune aux dioptrés et miroirs sphériques ; on peut donc écrire :

Relation de Newton pour un miroir sphérique :

$$\overline{SF} \cdot \overline{SF'} = \overline{FA} \cdot \overline{F'A'} \quad \text{ou} \quad ff' = (p - f)(p' - f') \quad \text{avec} \quad f = f'$$

8. CONSTRUCTION D'IMAGES À TRAVERS UN MIROIR SPHÉRIQUE

8.1. Principe de la méthode

Tout naturellement, nous utilisons la méthode de construction d'images proposée au chapitre 5 pour le dioptré sphérique. Ainsi, un objet AB , placé dans un plan perpendiculaire à l'axe principal, a une image $A'B'$ dans un plan également perpendiculaire à l'axe principal du miroir. Pour les raisons expliquées dans le chapitre 5, le point B sert de point auxiliaire lors de la construction de l'image de A . On rappelle le choix des deux rayons particuliers. Le premier rayon (1) se propage suivant la normale au miroir sphérique. Il passe donc par le centre de courbure C du système, ($i = 0^\circ$).

L'angle de réflexion est nul ($i = j = 0^\circ$) pour le rayon (1) et le rayon réfléchi repart dans la direction opposée au rayon incident en passant à nouveau par le centre de courbure C . Le deuxième rayon (2), parallèle à l'axe principal, après réflexion sur la surface du miroir en I , passe par le foyer F' (ou F). Les deux rayons réfléchis ou leurs prolongements se coupent au point B' , image de B , sauf si l'image de B est rejetée à l'infini. Si B' est l'intersection des rayons issus de B , elle est réelle. Au contraire, si B' est l'intersection de prolongements des rayons issus de B , elle est virtuelle. On obtient finalement l'image A' de A , en abaissant de B' la perpendiculaire à l'axe principal. Comme précédemment, les rayons sont représentés en trait plein et leurs prolongements en pointillés. L'image $A'B'$ de AB est donc toujours représentée en trait plein si elle est réelle, en pointillés si elle est virtuelle.

8.2. Exemples de constructions

Toutes les constructions proposées ci-dessous sont faites selon cette méthode. Elles sont réalisées sur la figure 6.9 pour un miroir convergent et sur la figure 6.10 pour un miroir divergent. Elles illustrent dans chaque cas les trois possibilités données sur la figure 6.8. Une fois positionnée l'image $A'B'$ de AB , on peut toujours déduire facilement la construction de rayons quelconques. Naturellement, tout rayon issu de B passe par B' .

Le principe du télescope, présenté dans l'encart 6.5, permet de discuter le cas d'un objet à l'infini.

Enfin, dans toutes les constructions, l'image est tantôt de même sens que l'objet, tantôt de sens opposé. Nous allons donc introduire les notions de grandissements transversal γ et longitudinal g .

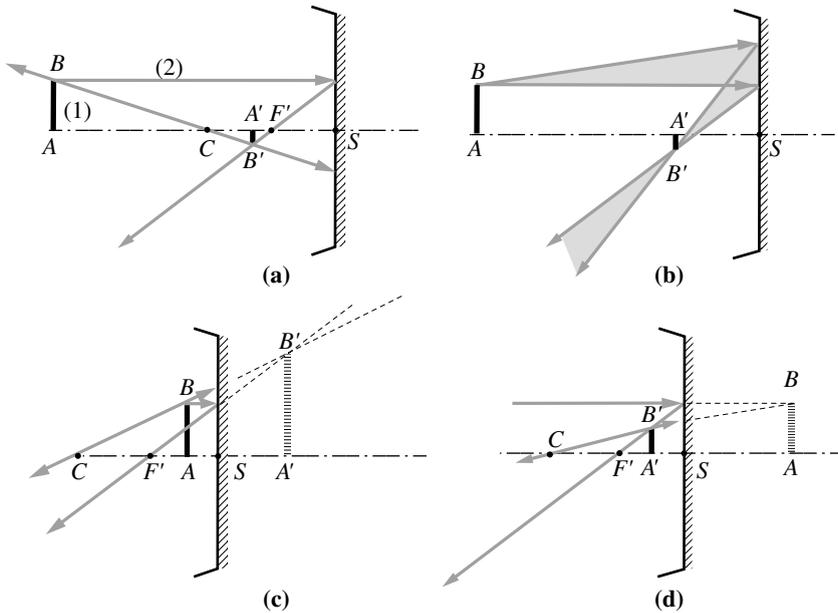


Figure 6.9 • Constructions d'images à travers un miroir sphérique convergent.

- (a) L'objet est réel en avant du foyer ($p < f < 0$). L'image est du même côté que l'objet ($p' < 0$), elle est donc réelle. Dans la deuxième construction (b), on a dessiné l'évolution d'un faisceau issu de B .
 (c) L'objet est réel ($p < 0$) après le foyer ($p > f$). L'image est virtuelle ($p' > 0$).
 (d) L'objet est virtuel ($p > 0$). L'image, située entre le foyer et S ($p' < 0$) est réelle.

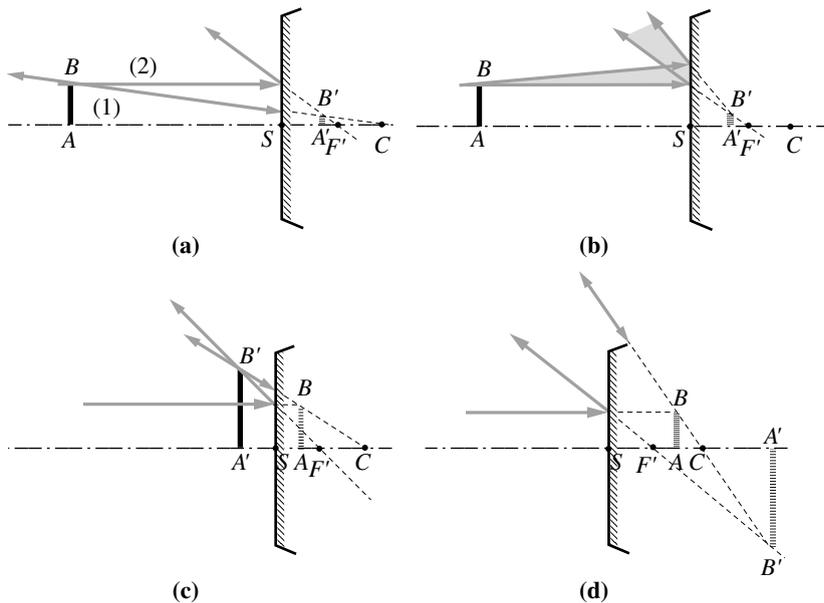


Figure 6.10 • Construction d'image à travers un miroir sphérique divergent.

- (a) L'objet est réel en avant du foyer ($p < f < 0$). L'image est virtuelle ($p' > 0$). Dans la deuxième construction (b), on a dessiné l'évolution d'un faisceau issu de B .
 (c) L'objet est virtuel ($p > 0$) entre le foyer et S . L'image est réelle ($p' < 0$).
 (d) L'objet est virtuel ($p > 0$) à droite du foyer. L'image est virtuelle ($p' > 0$).

Encart 6.5. L'image de la Lune au foyer d'un télescope

Les grands télescopes sont munis d'un collecteur de forme sphérique ou parabolique. Ils sont utilisés pour réaliser des images d'objets lointains et la méthode a été détaillée au chapitre 5 en prenant la Lune comme exemple. Nous reprenons la même procédure en plaçant la Lune sur l'axe du miroir d'un télescope (figure 6.11). Le point inférieur A est sur l'axe et le point supérieur B au-dessus de l'axe avec un angle d'inclinaison α . Le point A étant à l'infini, son image A' est confondue avec le foyer F' . Du point B qui se situe à l'infini arrivent des rayons parallèles, qui sont tous inclinés d'un angle α par rapport à l'axe du miroir :

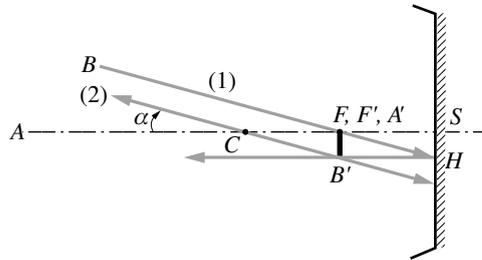


Figure 6.11 • Construction de l'image de la Lune à travers un miroir sphérique.

- Le rayon (1) qui passe par F ressort parallèlement à l'axe ;
- Le rayon (2) qui passe par C ressort sur le même support, en sens opposé ;
- B étant à l'infini, son image est dans le plan focal en B' , à l'intersection des rayons (1) et (2) après réflexion.

Comme l'angle α est très petit, on peut écrire :

$$\tan \alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'H}} \approx \alpha \approx \frac{\overline{A'B'}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{A'B'}}{-f}, \text{ soit : } \overline{A'B'} = -f\alpha$$

La taille de la Lune obtenue sur un film placé au foyer d'un télescope de distance focale $f = 1 \text{ m}$ est égale à $f\alpha = 1 \times 0,009 \text{ rad} \approx 1 \text{ cm}$ (voir chapitre 5). C'est ainsi que l'on peut connaître facilement la taille de la Lune au foyer d'un instrument quelconque car elle est de « 1 centimètre par mètre de distance focale ». Par exemple au foyer du télescope du Pic-du-Midi dont la distance focale peut atteindre 30 m, l'image de la Lune a un diamètre de 30 cm. Par contre sur un film 24×36 dans un appareil photographique équipé d'un objectif de 100 mm de distance focale, l'image de la Lune n'a que 1 mm de diamètre. Tous ceux qui ont essayé de photographier une belle Lune ont été déçus par le résultat car il faut nécessairement une grande distance focale.

9. LE GRANDISSEMENT TRANSVERSAL γ ET LE GRANDISSEMENT LONGITUDINAL g

9.1. le grandissement transversal γ

L'image $A'B'$ de AB à travers un miroir sphérique est aussi caractérisée par un grandissement transversal :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

On a pour un miroir sphérique (figure 6.9a) :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \approx \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{FS} + \overline{SA'}}{\overline{FS}} = \frac{f - p'}{f} = 1 - \frac{p'}{f}$$

De la relation de conjugaison : $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$ on tire $\gamma = -\frac{p'}{p}$.

Grandissement transversal d'un miroir sphérique :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{p'}{p} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

La courbe correspondante est tracée sur la figure 6.12 pour un miroir convergent, et sur la figure 6.13 pour un miroir divergent. Son évolution en fonction de p est identique à celle obtenue pour un dioptré sphérique (chapitre 5) pour lequel on a $n' = -n$. Le lecteur se reportera donc à ce chapitre pour l'analyse de γ .

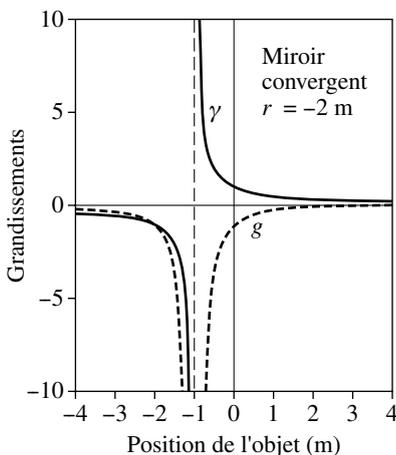


Figure 6.12 • Grandissements transversal γ (traits pleins) et longitudinal g (pointillés) en fonction de la position de l'objet p pour un miroir convergent.

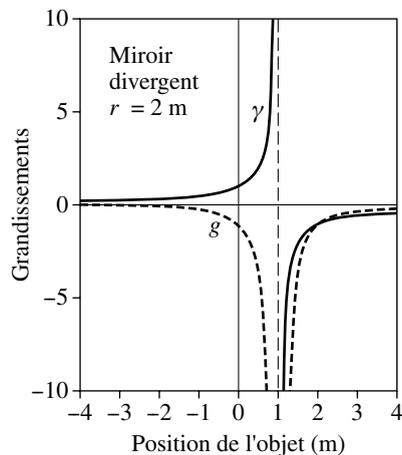


Figure 6.13 • Grandissements transversal γ (traits pleins) et longitudinal g (pointillés) en fonction de la position de l'objet p pour un miroir divergent.

9.2. Le grandissement longitudinal g

Le grandissement longitudinal g est défini par le rapport entre le déplacement de l'image et celui de l'objet ; il s'écrit (voir chapitre 5) :

$$g = \frac{dp'}{dp}$$

En différenciant la deuxième forme de la relation de conjugaison du miroir sphérique, on trouve :

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f} \quad \text{soit} \quad \frac{dp'}{p'^2} + \frac{dp}{p^2} = 0$$

$$g = \frac{dp'}{dp} = - \left(\frac{p'}{p} \right)^2 = -\gamma^2$$

On remarquera que g est toujours négatif pour un miroir sphérique, ce qui explique qu'un objet et son image apparaissent en vis-à-vis quel que soit le type de miroir considéré.

Les formules des grandissements γ et g ne sont pas identiques, ce qui conduit toujours à une déformation de l'objet. La figure 6.14 montre la déformation d'un carré de côté L à travers un miroir sphérique pour $\gamma = 1/2$. L'objet carré verra sa hauteur divisée par 2 et sa longueur divisée par 4. Lorsque $\gamma < 1$, la différence des grandissements « aplatisse » l'image. Le signe « - » du grandissement longitudinal traduit le fait que l'image est retournée. Ceci est en accord avec notre vision à travers un miroir qui nous montre le petit train retourné.

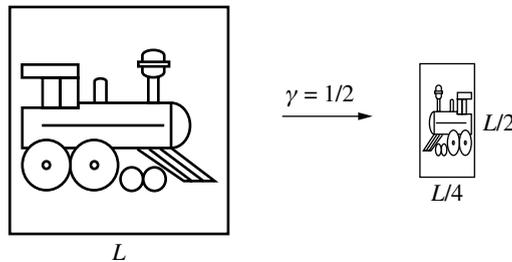


Figure 6.14 • Déformation d'un objet carré de côté L à travers un miroir sphérique ($\gamma = 1/2$ et $g = -1/4$).

Ce point, déjà détaillé dans le cas d'un dioptre sphérique au chapitre 5, est analysé pour le miroir dans l'exercice 6. Notons pour terminer que le grandissement longitudinal g peut aussi être déduit des figures 6.5 et 6.6 en γ repérant deux valeurs d'abscisses p séparées d'une petite quantité dp et la valeur dp' correspondante, il suffit alors de faire le rapport entre ces deux valeurs.

10. UN MIROIR SPHÉRIQUE N'EST PAS STIGMATIQUE

Dans un système optique stigmatique, un rayon parallèle à l'axe passe par le foyer F' . Nous allons montrer sur un exemple simple qu'un miroir sphérique n'est stigmatique que si l'on se place exclusivement dans le cadre de l'approximation des petits angles (figure 6.15).

Un rayon parallèle à l'axe d'un miroir concave arrive en I à une distance d de l'axe principal. Il se réfléchit avec un angle de réflexion θ et coupe l'axe principal en A' . Le miroir est stigmatique si la position de A' est indépendante du point I ou encore de l'angle θ . On a :

$$\sin \theta = \frac{\overline{HI}}{\overline{CH}} = \frac{d}{R} \quad (\theta > 0)$$

où R est le rayon de courbure du miroir ($R > 0$).

D'autre part on a :

$$\cos(\widehat{A'IH}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \sin 2\theta = \frac{\overline{HI}}{\overline{A'I}}$$

On peut donc exprimer $d = \overline{HI}$ de deux manières différentes :

$$\overline{HI} = d = \overline{A'I} \sin 2\theta \quad \text{et} \quad d = R \sin \theta. \quad \text{On a donc} \quad \overline{A'I} = \frac{R}{2 \cos \theta}.$$

Le triangle ICA' est isocèle donc $\overline{CA'} = \overline{A'I}$ et finalement :

$$\overline{SA'} = \overline{SC} + \overline{CA'} = -R + \overline{A'I} = R \left(\frac{1}{2 \cos \theta} - 1 \right)$$

A' devrait se situer au foyer du miroir, à une distance $R/2$ de S . Or, on trouve une distance qui dépend de θ . La figure 6.16 représente le rapport $\frac{SA'}{R}$ en fonction de θ , qui devrait être rigoureusement égal à $1/2$ si le miroir était stigmatique. Ceci n'est vrai que pour les très petits angles θ . Dans ce dernier cas seulement :

$$SA' = SF' = \frac{R}{2}$$

Ce défaut de stigmatisme pose de graves problèmes dans les télescopes.

Pour fixer les idées, prenons le cas d'un miroir de télescope de 60 cm de diamètre et de 3,6 m de distance focale ($R = 7,2$ m). La valeur maximale prise par θ est :

$$\sin \theta = \frac{30}{720} = \frac{1}{24} \quad \text{soit} \quad \theta = 2,4^\circ$$

La valeur maximale de SA' est donc :

$$SA' = 7,2 \left(1 - \frac{1}{2 \cos 2,4^\circ} \right) = 7,2 \times 0,49956 = 3,596870 \text{ m}$$

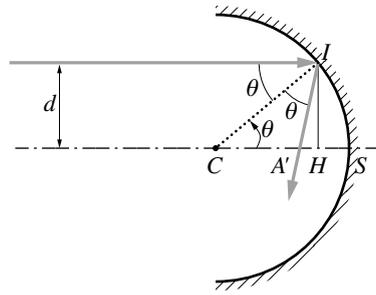


Figure 6.15 • Le rayon qui arrive parallèlement à l'axe le coupe en A' . Ce point A' dépendant de l'angle θ , un miroir sphérique n'a pas de « vrai foyer ». Ce défaut est appelé l'aberration de sphéricité.

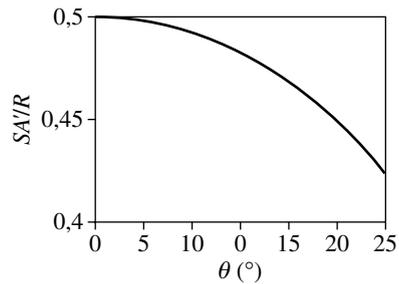


Figure 6.16 • Valeur du rapport SA'/R en fonction de l'angle θ .

Les « foyers » s'étendent sur une longueur de $3,6 - 3,59687 = 0,00312 \text{ m} = 3 \text{ mm}$, ce qui n'est pas admissible pour une image de qualité. Pour rendre le miroir sphérique stigmatique, il faut le déformer pour le remplacer par une parabole. Ce défaut du miroir sphérique s'appelle l'aberration de sphéricité.

Dans certains télescopes, on conserve le miroir sphérique et on corrige le défaut en plaçant en avant du télescope une lame transparente d'épaisseur variable qui joue le rôle de lentille convergente au centre et de lentille divergente sur les bords du miroir. Cette astuce a été découverte par l'opticien allemand Schmidt ; elle a révolutionné la photographie astronomique puisque la « lame de Schmidt » équipe aujourd'hui tous les gros télescopes photographiques du monde.

11. UN MIROIR STIGMATIQUE EST PARABOLIQUE

Un foyer parfait a la propriété suivante, reliée directement à sa définition : les durées des trajets de la lumière le long des divers rayons parallèles jusqu'au point F sont égales. Le parcours de la lumière s'effectuant uniquement dans l'air, on a égalité stricte des chemins géométriques parcourus. Sur l'axe Sx on définit le point L tel que $FS = SL$ et l'on trace la perpendiculaire LA à Sx en L . Cette droite est la trace particulière d'un front de rayons parallèles lorsque le miroir n'existe pas. Pour que les trajets des rayons soient égaux il faut, pour tout point M : $MF = MA$. Nous allons démontrer que l'ensemble des points M est une parabole. Soit (x, y) , les coordonnées de M . Si l'on appelle d la distance SL et si l'on prend l'origine en F (figure 6.17), le point A a pour coordonnées $(2d, y)$. On a donc :

$$MF^2 = MA^2$$

ce qui s'écrit : $x^2 + y^2 = (2d - x)^2$

$$x = \frac{4d^2 - y^2}{4d}$$

qui est l'équation d'une parabole.

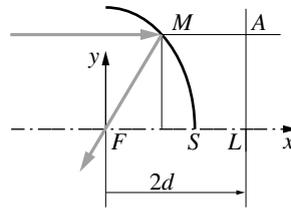


Figure 6.17 • Avec un miroir stigmatique, la distance MA est toujours égale à la distance MF .

À RETENIR

- Un **miroir sphérique** est un dioptré sphérique dont on a recouvert la surface d'une couche totalement réfléchissante pour le rayonnement utilisé.
- Un miroir sphérique concave ($r = \overline{SC} < 0$) est convergent ; s'il est convexe ($r > 0$), il est divergent.
- Une même relation de **conjugaison** donne sur l'axe principal la position p' de l'image A' d'un objet A positionné en p , le sommet du dioptré S étant pris comme origine. Elle s'écrit dans l'approximation de Gauss :

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{2}{r} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{2}{SC}$$

- Un **miroir plan** peut être considéré comme un miroir sphérique de rayon de courbure infini. Sa relation de conjugaison s'écrit donc :

$$p' = -p \text{ ou } \overline{SA'} = -\overline{SA}$$

On retrouve bien le fait qu'un objet et son image sont positionnés symétriquement par rapport au plan du miroir.

- Un miroir sphérique possède un foyer double, situé à mi-chemin entre S et C , qui fait office de foyer objet et de foyer image. On a :

$$f' = f = \frac{r}{2} \text{ ou } \overline{SF'} = \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

F et F' sont à gauche de S pour un miroir sphérique convergent (concave) à droite pour un miroir divergent (convexe).

De même, le plan perpendiculaire à l'axe principal en F (ou F') est à la fois le plan focal objet et image du miroir sphérique. Enfin f et f' sont la distance focale objet ou image du miroir.

Pour un miroir plan $f \rightarrow \infty$ car $r \rightarrow \infty$. Les foyers sont donc rejetés à l'infini.

- On peut obtenir deux formes équivalentes de la formule de conjugaison précédente en introduisant les distances focales f et f' :

- **deuxième forme de la relation de conjugaison :**

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{1}{\overline{SF'}} = \frac{1}{\overline{SF}} \text{ ou } \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f}$$

- **troisième forme de la relation de conjugaison** (dite de Descartes) :

$$\frac{\overline{SF'}}{\overline{SA'}} + \frac{\overline{SF}}{\overline{SA}} = 1 \text{ ou } \frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$$

- La **relation de Newton** pour un miroir sphérique s'écrit :

$$\overline{SF} \cdot \overline{SF'} = \overline{FA} \cdot \overline{F'A'} \text{ ou } ff' = (p - f)(p' - f')$$

avec $\mathbf{f} = \mathbf{f}'$. Elle prend comme origine des positions les foyers F et F' . Elle est commune aux dioptries et aux miroirs sphériques.

- L'image $A'B'$ de AB à travers un miroir sphérique est caractérisée par un **grandissement transversal** :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{p'}{p} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

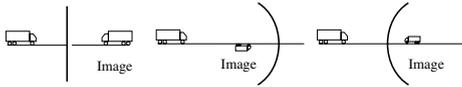
et par un **grandissement longitudinal** :

$$g = \frac{dp'}{dp} = -\left(\frac{p'}{p}\right)^2 = -\gamma^2$$

Comme γ et g ne sont pas égaux et sont de signe opposés, tout objet vu à travers un miroir est déformé.

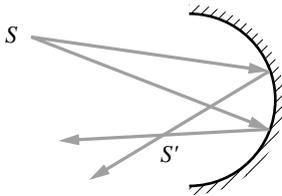
QCM

1 On forme l'image d'un camion à travers trois miroirs. Quelle(s) situation(s) correspond(ent) à l'utilisation d'un rétroviseur de voiture ?



- (1) (2) (3)

2 Une source S émet un faisceau de lumière qui se réfléchit sur un miroir sphérique en formant une image S' . Où faut-il se placer pour « voir » simultanément S et S' ?

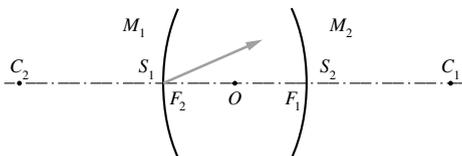


- (1) C'est impossible.
 (2) Dans la partie hachurée.
 (3) Dans la partie en pointillés.

3 Un miroir sphérique donne d'un objet A , une image A' . L'image peut-elle être en A ?

- (1) Jamais.
 (2) Toujours.
 (3) Cela dépend de la nature de l'image.

4 Deux miroirs M_1 et M_2 sont placés face à face, leurs sommets respectifs étant confondus avec le foyer de l'autre miroir. Où est l'image du sommet S_1 , c'est-à-dire où le rayon va-t-il couper l'axe après réflexion sur les deux miroirs ?

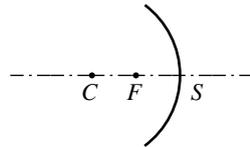


- (1) En S_1
 (2) En O
 (3) En S_2

5 Un miroir sphérique donne d'un objet, une image placée à mi-chemin entre le sommet du miroir et l'objet. Si p est la position de l'objet et r le rayon de courbure,

- (1) $p = r/2$
 (2) $p = r$
 (3) $p = 3r/2$

6 Je veux voir mon visage à l'endroit et agrandi à travers un miroir sphérique. Où dois-je me placer ?



- (1) À gauche du centre C
 (2) Entre le centre C et le foyer F
 (3) Entre le foyer F et le sommet S

7 Un miroir sphérique donne d'un objet réel une image droite, deux fois plus grande.

- (1) Le miroir est obligatoirement convergent.
 (2) Le miroir est obligatoirement divergent.
 (3) Le miroir peut être convergent ou divergent.

8 Un miroir sphérique donne d'un objet réel une image inversée, deux fois plus grande.

- (1) Le miroir est obligatoirement convergent.
 (2) Le miroir est obligatoirement divergent.
 (3) Le miroir peut être convergent ou divergent.

Réponses : 1. 1 et 3, 2. 1, 3, 3. 4. 3, 5. 3, 6. 3, 7. 1, 8. 1

EXERCICES

1 a) À partir des formules de conjugaison et du grandissement transversal du miroir sphérique, exprimez la valeur de p (position de l'objet) en fonction du grandissement γ et du rayon de courbure r du miroir.

b) On fabrique un miroir avec lequel on veut obtenir un grandissement égal à $1/3$ pour un rétroviseur de voiture. Quel modèle de miroir faut-il choisir (convexe ou concave ?). Quel est son rayon de courbure pour que ce grandissement soit obtenu pour une voiture située à environ 10 m du miroir.

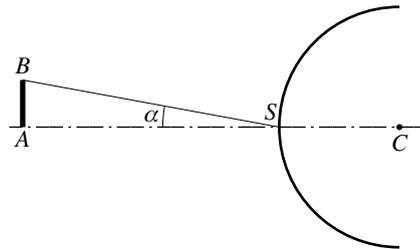
c) On veut au contraire obtenir un grandissement de 2 (miroir de toilette). Quel est le modèle adapté (convexe ou concave ?). Quel est son rayon de courbure pour que ce grandissement soit obtenu quand on observe sa propre image alors que le visage est à 10 cm du miroir ?

Dans les questions b) et c) effectuez la construction des objets considérés.

2 La surface de la mer constitue un gigantesque miroir sphérique de centre C et de rayon de courbure $r = 6\,378$ km. La Lune de 3 470 km de diamètre est située à 384 000 km de la Terre.

a) Calculer la distance focale f' du miroir ainsi que la position p' de l'image A' de la Lune. Calculer le grandissement γ et la taille de l'image de la Lune. Que valent ces quantités si l'on considère que la surface de la mer est plane ?

b) Par un observateur placé en S , la Lune AB est vue sous un angle apparent α . Calculer α ainsi que l'angle apparent α' sous lequel il voit l'image. Que vaut α' si l'on considère que la surface de la mer est plane ? La comparaison entre les tailles angulaires de la Lune et de son image permet-elle de montrer que la Terre est ronde ?



3 On forme à travers un miroir sphérique de distance focale f' l'image d'un objet AB de hauteur h situé à une distance p . On connaît p et le diamètre apparent α . Exprimer h en fonction de α et p pour de petites valeurs de α . En déduire l'expression de la hauteur h' de l'image en fonction de α , f' et p . Que devient h' quand $p \rightarrow \infty$. La Lune, de diamètre 3 470 km est située à 384 000 km de la Terre. Calculer α puis h' sachant que $f' = 1$ m.

4 Un individu a son œil placé à 25 cm du creux d'une petite cuillère considérée comme un miroir sphérique convergent.

a) Sachant que l'individu voit son œil inversé et réduit d'un facteur 9, calculer le rayon de courbure de la cuillère.

b) Quel est le grandissement de la nouvelle image si l'individu retourne la cuillère, tout en conservant la même distance de 25 cm.

5 a) On forme l'image d'un objet carré $ABCD$ de 10 cm de côté dans un miroir convexe de rayon de courbure $r = +10$ cm. Le côté AD est sur l'axe du miroir avec $\overline{SD} = -10$ cm et $\overline{SA} = -20$ cm. Déterminer la position des quatre sommets de l'image $A'B'C'D'$. Dessiner ce quadrilatère à l'échelle. Quelle est sa forme ? À partir de ce résultat, expliquer pourquoi on a le visage complètement déformé quand on se regarde dans un tel miroir (petite cuillère, boule de Noël...).

b) On repère un point de l'objet avec ses coordonnées x et y en prenant comme origine le sommet du miroir. Démontrer que, si les coordonnées de son image sont x' et y' , on a les relations : $x = \frac{rx'}{2x' - r}$ et $y = \frac{ry'}{r - 2x'}$.

Que devient l'équation d'une droite de la forme $y = ax + b$? Que devient le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$?

6 Un miroir sphérique concave a un rayon de courbure de 1 m.

a) Calculer le position, la nature et la taille de l'image d'un objet de 2 cm de hauteur placé sur l'axe à :

- 1,4 m du sommet du miroir,
- 1 m,
- 0,8 m,
- 0,5 m,
- objet virtuel à 60 cm du sommet.

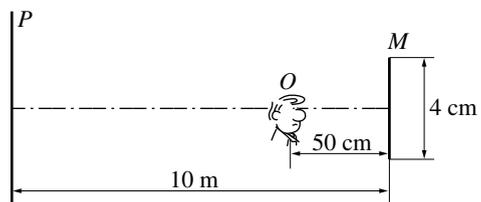
Dans chaque cas, construire l'image.

b) Même question si le miroir est convexe.

7 Un miroir M de diamètre $d = 4$ cm est placé à 10 m d'un plan P . Un observateur O dont l'œil est à 50 cm du miroir regarde le plan P par réflexion sur M .

Quel est le diamètre de la région de P visible par l'observateur par réflexion sur M , si M est un miroir :

- a) plan,
- b) divergent de 1 m de rayon de courbure,
- c) convergent de 1 m de rayon de courbure.

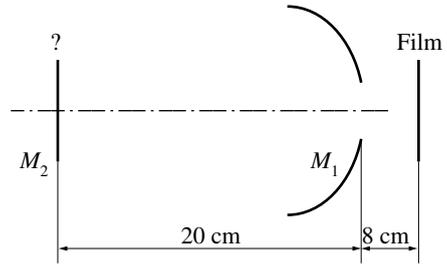


8 Un téléobjectif est constitué de deux miroirs : un miroir concave M_1 de 30 cm de distance focale, percé d'un trou en son sommet S_1 , et d'un miroir M_2 .

a) Quel doit-être le rayon de courbure de M_2 pour que l'image d'un objet placé à l'infini se forme sur le plan du film ?

b) Quel doit-être le diamètre d_2 de M_2 pour que tous les rayons réfléchis par M_1 de diamètre $d_1 = 10$ cm puis M_2 soient à nouveau collectés par M_1 ?

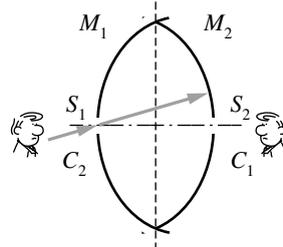
c) Quel doit-être le diamètre d_3 du trou pour que tous les rayons atteignent le film ?



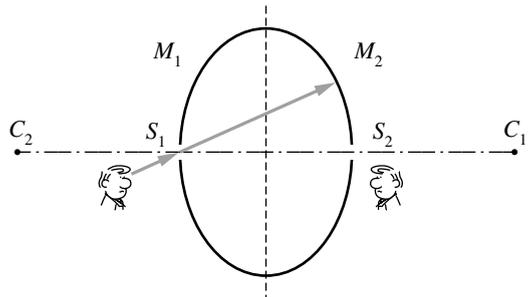
9 Établir l'expression du grandissement γ d'un miroir sphérique en fonction de p , la position de l'objet. Peut-on se voir à l'envers dans un miroir divergent (boule de Noël, extérieur d'une petite cuillère) ?

10 On place deux miroirs sphériques convergents M_1 et M_2 face à face dans les trois positions suivantes :

a) Chaque centre de courbure est au sommet de l'autre miroir. Dessiner la marche d'un rayon entrant par le sommet du miroir M_1 . Que voient deux personnes qui mettent respectivement un œil en S_1 et en S_2 ?



b) Chaque sommet est à mi-chemin entre le sommet et le centre de l'autre miroir. Placer les foyers et dessiner la marche d'un rayon entrant par le sommet S_1 . Que voient deux personnes qui mettent un œil en S_1 et en S_2 ?



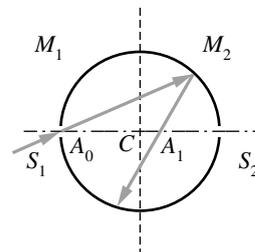
c) Les centres C_1 et C_2 sont confondus en C .

– On place une source lumineuse A_0 au sommet S_1 . Déterminer la position de l'image A_1 donnée par le miroir M_2 , puis celle de A_2 donnée par M_1 et enfin celle de A_3 . Dans chaque cas, calculer la distance qui sépare l'image du centre C .

– Que suspectez-vous comme loi générale en comparant les distances algébriques CA_1 , CA_2 , et CA_3 ?

– De manière générale, en obtenant une image à la distance R/n du centre C , démontrer que l'image suivante est à la distance $R/(n + 2)$.

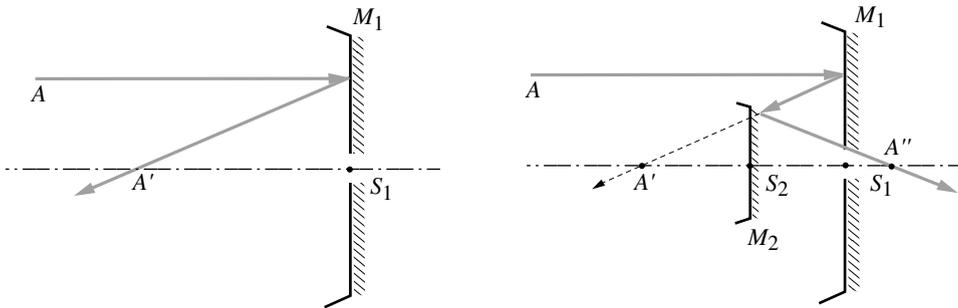
– Sur une figure à l'échelle, placer les images successives et tracer le cheminement d'un rayon qui rentre par A_0 .



- 11** a) Rechercher les deux conditions pour lesquelles l'objet réel et son l'image à travers un miroir sphérique sont au même endroit.
- b) Représenter graphiquement la position de l'image en fonction de celle de l'objet. Résoudre graphiquement la question précédente.

12 2 miroirs

- 1) Écrire sans démonstration la formule de conjugaison du miroir sphérique et celle du grandissement γ .
- 2) Avec un miroir sphérique M_1 , de rayon de courbure R_1 et de sommet S_1 , on forme l'image A' d'un objet réel A situé à l'infini. Où l'image se forme-t-elle ? En déduire la valeur de $p'_1 = \overline{S_1A'}$.



- 3) À l'aide du miroir M_2 , de rayon de courbure R_2 et de sommet S_2 , on forme l'image A'' de A' . Les sommets S_1 et S_2 des 2 miroirs sont espacés d'une distance e .

* Donner successivement les expressions de $p_2 = \overline{S_2A'}$ et $p'_2 = \overline{S_2A''}$.

* Démontrer que le grandissement γ_2 provoqué par M_2 est égal à

$$\gamma_2 = \frac{R_2}{R_1 - R_2 - 2e}$$

- a) Que représente A'' pour l'ensemble des deux miroirs ?
- b) Calculer le tirage $d = \overline{S_1A''}$ avec $e = 8,18$ m, $R_1 = 19,97$ m et $R_2 = 4,46$ m.
- c) Donner l'expression de p'_2 et du tirage d quand le miroir M_2 est plan. Quelle est la valeur maximale admissible de e telle que $d \geq 0$?
- d) Comment s'appelle cet instrument ?

13 Miroir

Écrire sans démonstration la formule de conjugaison ainsi que la formule du grandissement γ d'un miroir sphérique de rayon de courbure r et de sommet S .

Où faut-il placer un objet AB de telle façon que $\overline{SA} = \overline{SA'}$. Calculer alors le grandissement γ . Un objet placé en ce point est-il confondu avec son image ?

14 Grandissement longitudinal

On considère la relation de conjugaison du miroir sphérique écrite sous la forme

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \quad (1)$$

où f' est la distance focale image du miroir.

1) Si on déplace l'objet d'une quantité Δp ($\Delta p \ll p$), l'image se déplace de $\Delta p'$ ($\Delta p' \ll p'$). L'équation de conjugaison s'écrit alors :

$$\frac{1}{\Delta p' + p'} + \frac{1}{\Delta p + p} = \frac{1}{f'} \quad (2)$$

En combinant (1) et (2), donner l'expression du grandissement longitudinal

$$g = \frac{\Delta p'}{\Delta p}$$

et montrer qu'il est égal en première approximation à $-\gamma^2$, où γ est le grandissement transversal.

2) Retrouver ce résultat directement en différentiant la relation (1).

15 Miroir

Une personne place son visage à 10 cm d'un miroir de toilette (c'est un miroir convergent de 30 cm de rayon de courbure). Calculer la distance de l'image au sommet du miroir ainsi que le grandissement transversal.

16 Rétroviseur

Un automobiliste regarde dans son rétroviseur une voiture AB située en arrière à une distance de 15 m du rétroviseur. Sachant qu'il a un rayon de courbure de 10 m, calculer la position de l'image et son grandissement γ en considérant que le rétroviseur est un miroir sphérique convexe puis concave. Quel modèle faut-il utiliser ?

17 Miroir

Un miroir sphérique convexe a un rayon de courbure de 1 m.

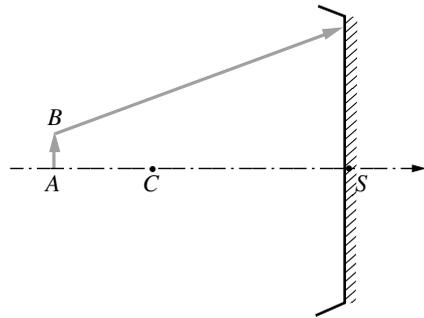
– Déterminer la position et la taille de l'image $A'B'$ d'un objet AB de 50 cm de hauteur, placé 1 m devant le miroir.

– L'œil de l'observateur est placé 10 cm devant le miroir. Calculer la position O' de l'œil à travers le miroir. Sur la figure, placer $A'B'$ et O' ; faire apparaître le rayon qui part de B et aboutit à O après réflexion sur le miroir.

– Le miroir a un diamètre de 50 cm. Déterminer la taille maximale d'un objet AB placé en A , dont l'image est vue en totalité par O .

18 Miroir

Sur la figure, placer le foyer du miroir sphérique concave. Construire l'image $A'B'$ de l'objet AB dont la hauteur est égale à 1 m. À l'aide des indications de la figure, calculer la position de l'image, son grandissement γ et sa hauteur. On donne $R = -6$ m et $p = -9$ m.



Dessiner le faisceau sortant après réflexion sur le miroir.

19 Questions sur les miroirs

- 1) On voit passer dans la rue une voiture allant de gauche à droite. En se retournant, on voit ce qui se passe dans la rue se réfléchir sur un miroir. Dans quel sens l'image de la voiture se déplace-t-elle ?
- 2) Sur une affiche, on lit CABBG. Ecrire (soigneusement) ce qu'on lit dans un miroir.
- 3) Expliquer brièvement la raison pour laquelle, le paysage vu dans le rétroviseur interne d'une voiture paraît plus proche que dans un rétroviseur extérieur.

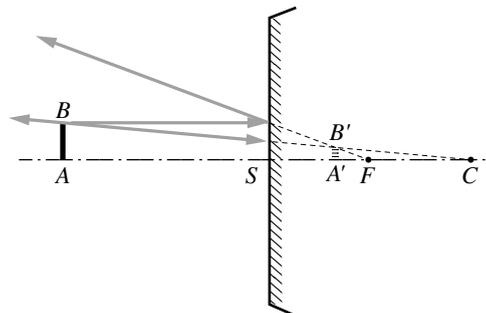
Solutions

- 1** a) Les formules de conjugaison et de grandissement transversal du miroir sphérique sont respectivement $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{r}$ et $\gamma = -\frac{p'}{p}$. En combinant ces deux équations et en éliminant p' , on trouve : $p = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) \frac{r}{2}$.

La fonction p/r en fonction de γ est une hyperbole dont les asymptotes sont $p = r/2$ (asymptote horizontale) et $\gamma = 0$ (asymptote verticale).

- b) En remplaçant la valeur de $\gamma = 1/3$ dans la formule ci-dessus, on trouve $p = -r$, $p' = r/3$. L'objet que l'on regarde dans le rétroviseur est réel, ce qui impose $p < 0$. On doit donc avoir $r > 0$; le miroir est donc convexe (soit divergent). Si la voiture est située à 10 m en arrière du miroir, on a $p = -r = -10$ m, soit $r = 10$ m.

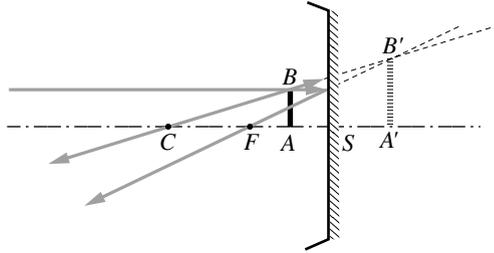
Remarquons que $f = f' = 5$ m. La construction donne :



L'objet est réel, l'image est virtuelle et droite.

c) Si maintenant $\gamma = 2$, $p = r/4$, $p' = -r/2$. L'objet étant toujours réel, cela impose $r < 0$; le miroir est donc concave, soit convergent. Si $p = -10$ cm, on trouve $r = -40$ cm et $p' = 20$ cm. On a alors $f = f' = -20$ cm.

L'objet est réel, l'image est virtuelle et droite.



- 2** a) $f' = \frac{r}{2} = 3\,189$ km. Si $p = -384\,000$ km, on trouve $p' = 3\,162,7$ km. Le grandissement γ est égal à $\gamma = 8,23 \cdot 10^{-3}$, ce qui conduit à une image transversale $A'B' = \gamma AB = 28,58$ km. Remarquons que $g = -\gamma^2 = -6,77 \cdot 10^{-5}$. La taille longitudinale est donc égale à 0,23 km.

Si l'on considère que la surface de la mer pouvait être assimilée à un miroir plan, on aurait r et f' infinis, $p = -p'$, $\gamma = 1$ et $A'B' = AB = 3\,470$ km.

- b) On a $\tan \alpha = AB/p$, où p est la distance Terre-Lune, et $\tan \alpha' = A'B'/p' = \gamma AB/p' = AB/p$ soit $\alpha = \alpha'$.

Le calcul donne exactement $\alpha = \alpha' = 9,03 \cdot 10^{-3}$ rd. Si la surface de la mer est plane, le calcul est inchangé. La comparaison entre ces deux tailles angulaires ne permet pas de faire la distinction entre une Terre ronde et une Terre plate, leur égalité venant directement de la relation $A'B' = \gamma AB$.

- 3** La relation entre la taille h de l'objet et son diamètre apparent α est $\tan \alpha = h/p$. Pour de petites valeurs de α , on a $h \approx \alpha p$. La formule de grandissement donne $\gamma = -p'/p = h'/h$, soit $h' \approx -\alpha p'$. À partir de la formule de conjugaison, on trouve $h' = \frac{\alpha f' p}{f' - p}$. Quand $p \rightarrow \infty$, $h' \rightarrow -\alpha f'$.

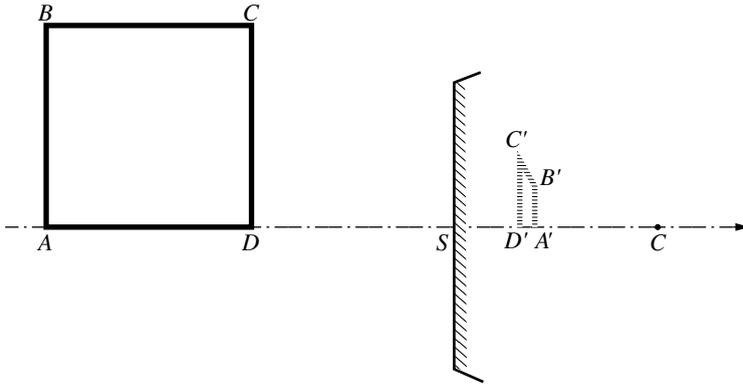
Pour $f' = 1$ m, $h = 3\,470$ km et $p = -384\,000$ km, on a $\alpha = -0,0090$ rd = $-31'$, $p' = 1$ m et $h' = f' = 0,9$ cm.

- 4** a) $p = -25$ cm et $\gamma = -1/9$ entraîne $p' = -2,77$ cm. La formule de conjugaison donne alors, $r = -5$ cm.
- b) Si l'on retourne la cuillère, le rayon de courbure devient égal à $r = 5$ cm. Avec $p = -25$ cm, on obtient $p' = 2,27$ cm, et $\gamma = 0,09$. L'individu voit maintenant son œil à l'endroit, réduit d'un facteur 11. Pour cela, il faut évidemment retourner la cuillère d'avant en arrière et non de haut en bas!

- 5** a) Les positions de A' et de D' sont données par la formule de conjugaison, avec $r = +10$ cm, $p_D = -10$ cm, et $p_A = -20$ cm (ou $D(-10; 0)$ et $A(-20; 0)$). On trouve

donc $A' (4; 0)$ et $D' (3,33; 0)$. Les cotes de B' et de D' sont obtenues en étudiant l'image des deux objets AB et CD . La cote en x de B sera la même que celle de A , sa cote en y sera donnée par le calcul de la taille de l'objet $A'B'$. On fera le même raisonnement pour l'objet CD . On trouve alors, pour AB , $\gamma = 1/5$ et pour DC , $\gamma = 0,33$. On obtient finalement $B' (4; 2)$ et $C' (3,33; 3,33)$.

Le carré est fortement déformé et devient un trapèze très aplati. La partie avant est fortement agrandie, ce qui explique que l'on se voit avec un très gros nez dans une boule de Noël ou dans la partie bombée d'une cuillère.



b) Ce raisonnement peut être repris de façon générale pour tout objet de coordonnées (x, y) . x représente la position de l'objet et y sa hauteur. On a $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x} = \frac{2}{r}$ et $\gamma = -\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$. En combinant ces deux équations, on trouve $x = \frac{x'r}{2x' - r}$ et $y = \frac{ry'}{r - 2x'}$.

Une droite d'équation $y = ax + b$ est transformée en une autre droite d'équation $y' = ax' + b$, soit $y' = -x' \left(a + \frac{2b}{r} \right) + b$.

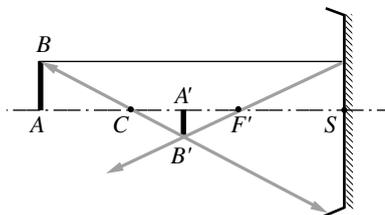
Un cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est remplacé par une conique d'équation $y'^2 + x'^2 \left(1 - \frac{4}{r^2} \right) + 4\frac{x'}{r} = 1$.

6

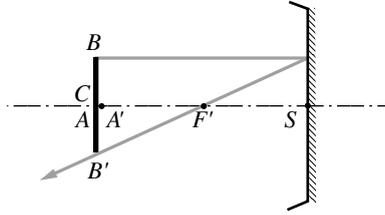
a) Le miroir étant concave, il a un rayon de courbure négatif. On a donc $r = -1$ m.

• $p = -1,4$ m. La formule de conjugaison donne $p' = -77,7$ cm. La formule de grandissement donne $\gamma = -0,55$, et $A'B' = \gamma AB = -1,11$ cm. L'image est réelle, réduite et renversée.

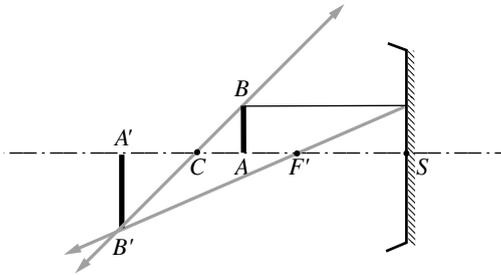
Pour la construction, on calcule $\overline{SF'} = \frac{r}{2} = -0,5$ m.



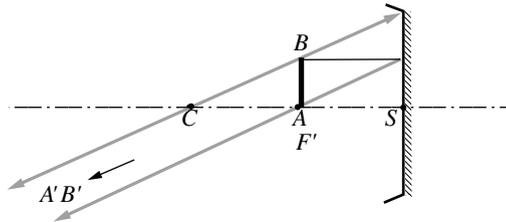
- $p = -1 \text{ m}$ (l'objet est en C). On trouve $p' = -1 \text{ m}$, $\gamma = -1$ et $A'B' = \gamma AB = -2 \text{ cm}$. L'image est réelle et renversée, de même taille que l'objet.



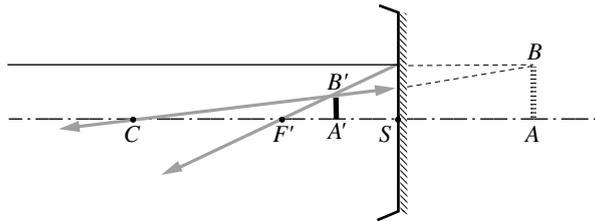
- Si $p = -0,8 \text{ m}$, $p' = -1,33 \text{ m}$, $\gamma = -1,66$ et $A'B' = -3,33 \text{ cm}$. L'image est réelle, agrandie et renversée.



- Si $p = -0,5 \text{ m}$, l'objet est en F , p' et γ sont infinis. L'image est réelle et renversée, renvoyée à l'infini.

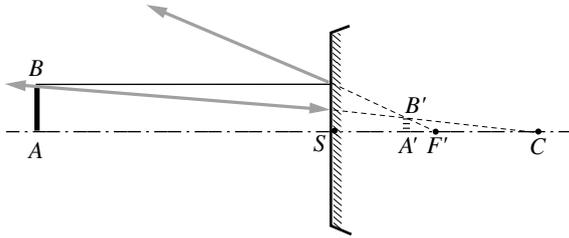


- Si $p = +0,6 \text{ m}$, $p' = -0,27 \text{ m}$, $\gamma = 0,45$ et $A'B' = 0,9 \text{ cm}$. L'image est droite, réduite et réelle.

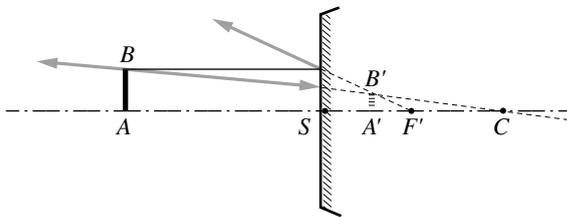


b) Le miroir est divergent et on a $r = +1 \text{ m}$.

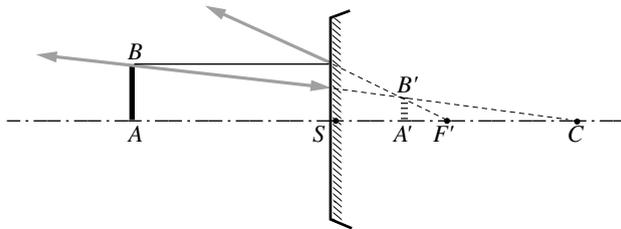
- Si $p = -1,4 \text{ m}$, $p' = 36,8 \text{ cm}$, $\gamma = 0,26$ et $A'B' = 0,52 \text{ cm}$. L'image est droite, réduite et virtuelle.



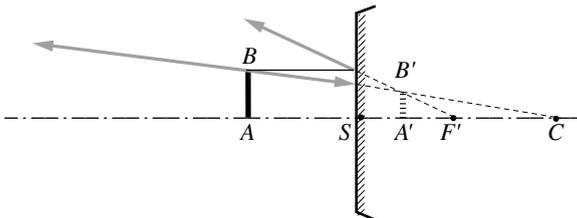
• Si $p = -1 \text{ m}$, $p' = 33,3 \text{ cm}$, $\gamma = 0,333$ et $A'B' = 0,666 \text{ cm}$. L'image est droite, réduite et virtuelle.



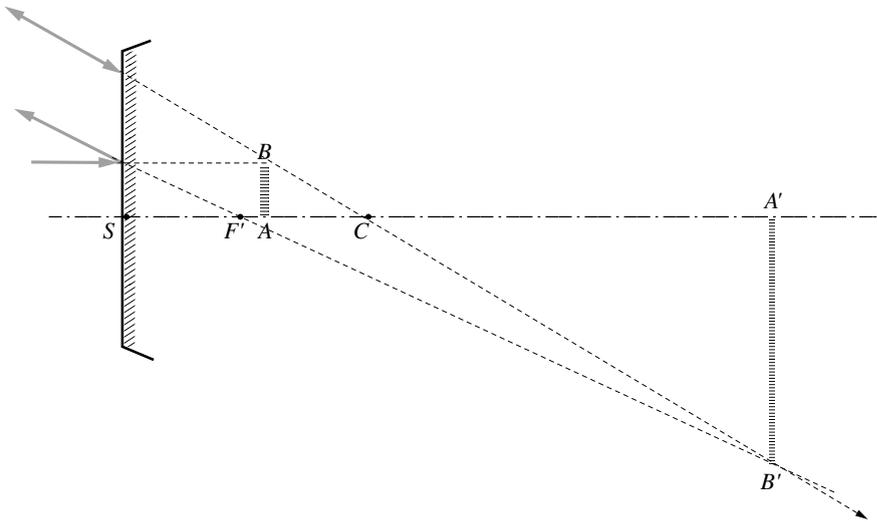
• Si $p = -0,8 \text{ m}$, $p' = 30,7 \text{ cm}$, $\gamma = 0,38$ et $A'B' = 0,77 \text{ cm}$. L'image est droite, réduite et virtuelle.



• Si $p = -0,5 \text{ m}$, $p' = 25 \text{ cm}$, $\gamma = 0,5$ et $A'B' = 1 \text{ cm}$. L'image est droite, réduite et virtuelle.



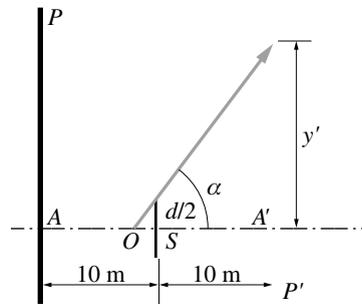
• Si $p = +0,6 \text{ m}$, $p' = 3 \text{ m}$, $\gamma = -5$ et $A'B' = -10 \text{ cm}$. L'image est renversée, agrandie et virtuelle.



7 Pour le miroir M , le plan P est l'objet. On a donc, dans tout l'exercice, $p = -10$ m. On va raisonner en considérant l'image du plan P dans le miroir, placée en P' . Il faut alors déterminer l'angle α sous lequel l'observateur voit cette image.

a) Miroir plan. Son rayon de courbure est infini. On a alors $p' = -p = +10$ m avec un grandissement d'image égal à 1.

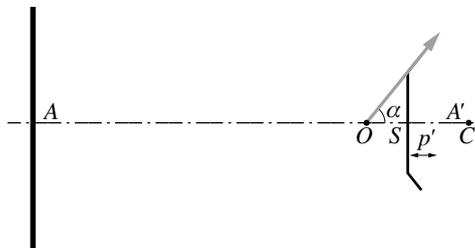
L'observateur situé à $SO = 50$ cm voit un demi-miroir sous un angle α défini par $\tan \alpha = \frac{d}{2SO}$. On a également $\tan \alpha = \frac{y'}{A'O}$ où y' est la partie de P' visible par l'observateur. En regroupant les deux équations, on trouve : $y' = \frac{d}{2} \frac{A'S + SO}{SO}$, soit $y = 42$ cm. La région de P visible par l'observateur a un diamètre de 84 cm.



b) Miroir divergent de 1 m de rayon de courbure, $r = 1$ m. On a donc $p' = \overline{SA'} = 47,6$ cm et $\gamma = 0,047$. La taille de P' est donnée par le produit de γ et de la taille de P .

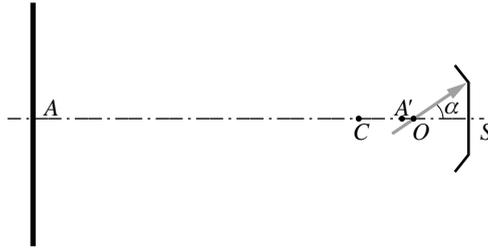
On a toujours $\tan \alpha = \frac{d}{2SO} = \frac{y'}{OA'} = \frac{y'}{OS + SA'}$, ce qui donne $y' = 3,904$ cm.

Une distance y' sur l'image correspond à une distance y'/γ sur l'objet. Dans le plan P , on voit donc un diamètre $2y'/\gamma = 166,12$ cm.



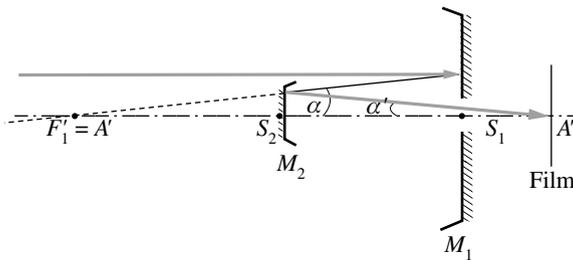
c) Miroir convergent. $r = -1$ m, $p' = -52,6$ cm et $\gamma = -0,0526$. Comme précédemment, on a $\tan \alpha = \frac{4}{2 \times 50} = \frac{y'}{SA' - SO} = \frac{y'}{2,6}$, ce qui donne :

$$y' = 0,10 \text{ cm} \quad \text{et} \quad y = \frac{2y'}{\gamma} = 3,95 \text{ cm}.$$



8 a) On regarde d'abord l'image $A'B'$ de l'objet à travers le miroir M_1 . L'objet étant placé à l'infini, son image est au foyer de M_1 . On a donc $\overline{S_1A'} = -30$ cm. Regardons maintenant l'image $A''B''$ de $A'B'$ à travers le miroir M_2 : on a $p_2 = \overline{S_2A''} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A'} = -10$ cm. Si $A''B''$ est sur le film, $p_2' = \overline{S_2A''} = 28$ cm. La relation de conjugaison conduit à $r_2 = -31,11$ cm. Le miroir M_2 est donc convexe et divergent. En effet, la face réfléchissante est celle qui est du côté de M_1 .

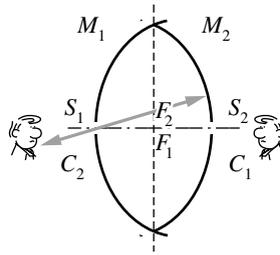
b) Pour que tous les rayons réfléchis par M_1 soient collectés, il faut qu'ils frappent tous M_2 , puis reviennent sur M_1 . Pour cela, on doit avoir $\tan \alpha = \frac{d_2}{2S_2A'} = \frac{d_1}{2S_1A'}$. On trouve $d_2 = 3,33$ cm.



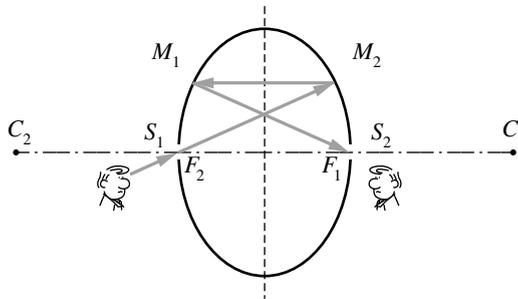
c) Pour que les rayons atteignent le film, il faut que $\tan \alpha' = \frac{d_3}{2S_1A''} = \frac{d_2}{2S_2A''}$. On trouve $d_3 = 0,95$ cm.

9 $\gamma = -\frac{p'}{p}$ qui peut encore s'écrire en utilisant la formule de conjugaison, $\gamma = \frac{r}{r - 2p}$. Si un miroir est divergent, $r > 0$. Pour se voir à l'envers, il faut que γ soit négatif, ce qui entraîne que $p > r/2 > 0$. Ceci n'est pas possible lorsque l'objet est réel, car cela impose $p < 0$ ce qui est le cas lorsque l'on se regarde dans un miroir.

10 a) Si le rayon passe par le centre C_2 , il se réfléchit sur M_2 sans être dévié et revient sur lui-même. On a : $p_2 = \overline{S_2S_1} = r$ et $p_2' = r$. L'image est donc en S_1 , avec un grandissement égal à -1 . La personne dont l'œil est en S_1 voit donc son propre œil à l'envers. Si l'œil est en S_2 , on peut faire le même raisonnement en intervertissant les indices 1 et 2.



b) S_1 étant confondu avec le foyer de M_2 , le rayon revient en arrière parallèlement à l'axe. Après réflexion sur M_1 , il passe donc par le foyer, confondu avec S_2 . Chacun voit l'œil de son partenaire.



c) Dans la suite, on pose $r_1 = R$ et $r_2 = -R$. On note A_1, A_2, \dots les images successives.

Position de l'image A_1 :

L'objet A_0 est en S_1 . On cherche donc l'image de A_0 dans le miroir M_2 . $p_2 = \overline{S_2 A_0} = -2R$.

La formule de conjugaison donne $p'_2 = \overline{S_2 A_1} = -\frac{2}{3}R$. Soit $\overline{CA_1} = \frac{R}{3}$.

On montre de la même façon que l'image A_2 dans M_1 est telle que $\overline{CA_2} = -\frac{R}{5}$.

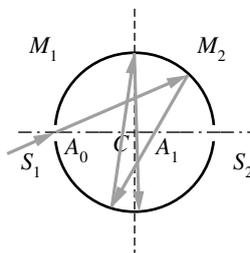
On trouve successivement les distances $R/3, -R/5, R/7, -R/9 \dots$

De manière générale, en raisonnant sur l'objet A_q , on trouve que son image est telle que :

$$\overline{CA_{2q}} = \frac{-R}{4q + 1}$$

$$\overline{CA_{2q+1}} = \frac{R}{4q + 3}$$

où $q = 0, 1, \dots$. Pour q grand, $\overline{CA_q} \rightarrow 0$. Le rayon passe par le centre C et devient vertical.



- 11** a) La formule de conjugaison donne $(p + p')r = 2pp'$. Si $p = p'$, on a $p(p - r) = 0$. Il y a donc deux solutions : $p = p' = 0$ et $p = p' = r$. Cependant, il faut distinguer 4 cas résumés sur le tableau.

	Objet réel	Objet virtuel
Miroir convergent $r < 0$	1 solution $p' = p = r$, image réelle	0 solution
Miroir divergent $r > 0$	0 solution	1 solution $p' = p = r$, image virtuelle

b) La résolution graphique peut se faire directement à partir des figures données dans le chapitre 6 (figures 6.5 et 6.6) : le point $p = p' = 0$ correspond au point de croisement des deux axes. Le point $p = p' = r$ est situé sur l'intersection entre l'hyperbole et la première bissectrice.

12 2 miroirs

$$1) \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{2}{r} \quad \gamma = -\frac{p'}{p}$$

$$2) \text{L'image se forme au foyer } F_1' \text{ à mi-chemin entre } S_1 \text{ et } C_1. p_1' = \frac{\overline{S_1 C_1}}{2} = -\frac{R_1}{2}.$$

3) Dans les formules qui suivent, on a $\overline{S_1 C_1} = -R_1$ et $\overline{S_2 C_2} = -R_2$.

$$* p_2 = \overline{S_2 A'} = \overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 A'} = e - \frac{R_1}{2}$$

$$* \frac{1}{p_2'} + \frac{2}{e - \frac{R_1}{2}} = -\frac{2}{R_2} \implies p_2' = -\frac{R_2 \left(e - \frac{R_1}{2} \right)}{2e - R_1 + R_2}$$

$$* \gamma_2 = -\frac{p_2'}{p_2} = -\frac{R_2}{R_1 - R_2 - 2e}$$

a) A'' est le foyer du système puisque c' est l'image d'un objet à l'infini.

b) $d = p_2' - e$; $p_2' = 9,47$ m, $d = 1,29$ m

c) Si M_2 est plan, $R_2 \rightarrow \infty$. $p_2' = \frac{R_1}{2} - e$ et $d > 0$ si $R_1/2 > 2$, soit $e < R_1/4 \sim 5$ m.

d) C' est un télescope de Cassegrain.

13 Miroir sphérique

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{2}{r} \text{ et } \gamma = -\frac{p'}{p} \implies p = p'. \text{ Soit } \gamma = -1.$$

L'objet est en C . L'image n'est pas confondue avec l'objet car le grandissement égal à -1 signifie que l'image est renversée par rapport à l'objet.

14 Grandissement longitudinal

1) La relation (1) s'écrit encore $p' + p = \frac{pp'}{f'}$ (1')

La relation (2) s'écrit encore $\Delta p' + p' + \Delta p + p = \frac{(p + \Delta p)(p' + \Delta p')}{f'}$ (2')

On retranche (1') de (2') et on en tire facilement

$$g = \frac{\Delta p'}{\Delta p} = \frac{p' - f' + \Delta p'}{f' - p} \approx \frac{p' - f'}{f' - p}$$

Or (1) $\implies p' - f' = \frac{p'f'}{p}$ et (1') $\implies p - f' = \frac{pf'}{p'}$

Soit $g = \frac{\frac{p'f'}{p}}{-\frac{pf'}{p'}} = -\left(\frac{p'}{p}\right)^2 = -\gamma^2$

2) $\frac{-\Delta p'}{p'^2} + \frac{-\Delta p}{p^2} = 0 \implies \frac{\Delta p'}{\Delta p} = -\frac{p'^2}{p^2} = -\gamma^2$

15 Miroir

$p = -10$ cm, $r = -30$ cm.

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{(-10)} = \frac{2}{(-30)} \implies p' = 30$$
 cm

$\gamma = -p'/p = 3$

16 Rétroiseur

Si le miroir est convexe, $R = +10$ m et $p' = 3,75$ m, $\gamma = 0,25$.

S'il est concave, $R = -10$ m et $p' = -7,50$ m, $\gamma = -0,5$. Dans un rétroiseur l'image est en général droite. Le miroir doit être convexe.

17 Miroir

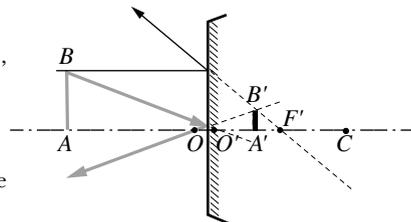
$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{2}{r}, r = 1$$
 m

$p = -1$ m, $p' = 33$ cm, $\gamma = -p'/p = 0,33$,
 $A'B' = 16,5$ cm

$p = -0,10$ m, $p' = 8,3$ cm

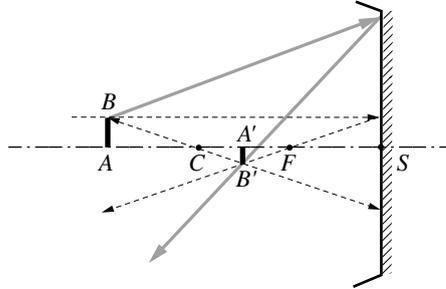
À la limite, le rayon passant par B et par O' passe par le bord du miroir.

$$\frac{AB}{D/2} = 13 \implies AB = 3,25$$
 cm



18 Miroir

$$R = -6 \text{ m}, p = -9 \text{ m}, p' = -4,5 \text{ m}, \gamma = -1/2, A'B' = -50 \text{ cm}.$$

**19 Miroirs**

1) Droite à gauche

2) CABBG

3) Le rétroviseur extérieur est généralement convexe ce qui fait que le grandissement est réduit par rapport au miroir plan (rétroviseur intérieur).

CHAPITRE 7

LES LENTILLES MINCES

Pré-requis

La lentille est un système optique constitué de deux dioptries dont l'un au moins est sphérique. Ce chapitre supposera donc la connaissance des lois de Snell-Descartes (chapitre 2), de la relation de conjugaison du dioptré sphérique (chapitre 5) et de la méthode de construction d'images présentée au chapitre 5.

Objectif

Nous avons consacré tout un chapitre à la description et à l'utilisation de dioptries sphériques que nous allons associer pour former un nouvel objet familier de tous, la lentille. Après avoir défini ce système, nous en proposons dans ce chapitre une application, les lentilles dites minces dans le cadre de l'approximation de Gauss. En raison de leur simplicité et de leurs nombreuses applications, les lentilles minces font l'objet d'un chapitre spécial alors qu'elles constituent un cas particulier d'une combinaison de dioptries. La théorie en a été faite en 1611 par l'astronome allemand Johannes Kepler à l'aide des formules simplifiées de la réfraction.

1. LENTILLES MINCES : DÉFINITION ET SYMBOLE

1.1. Qu'est-ce qu'une lentille ?

On appelle **lentille** un corps transparent homogène, d'indice absolu n , limité par deux dioptries dont l'un au moins est une sphère, l'une des deux faces pouvant être plane. Tout type de dioptré étant caractérisé par son centre de courbure C et par son rayon de courbure r , une lentille est donc délimitée par des portions de surfaces sphériques et/ou planes (figure 7.1). En fait, les deux dioptries ainsi assemblés, la droite passant par leurs centres de courbure est l'axe optique. La lentille ainsi formée est un cas particulier de **système centré**. Ainsi, si l'on dessine les différentes lentilles dans le plan d'incidence (tableaux 7.1 et 7.2), les deux centres de courbures C_1 et C_2 sont alignés sur l'axe principal. On l'appelle aussi axe optique de la lentille ; c'est un axe de symétrie de révolution du système et son sens est aussi celui de la lumière, orienté positivement de gauche à droite. Il coupe les surfaces des deux dioptries aux sommets S_1 et S_2 .

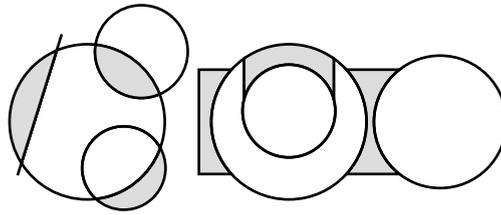


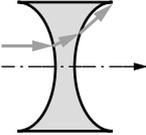
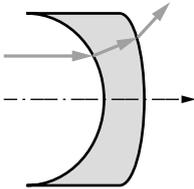
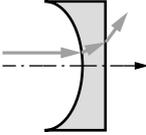
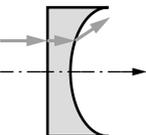
Figure 7.1 • Associations de dioptries sphériques. Les différentes zones grisées correspondent aux combinaisons possibles de dioptries permettant de former des lentilles convergentes et divergentes.

Un rayon incident ne subit que des réfractions à travers les deux dioptries qui sont totalement transparents pour le rayonnement utilisé. La lentille est donc **un système dioptrique**. Si l'on dessine un rayon incident parallèle à l'axe optique, en appliquant les lois de Snell-Descartes à chaque interface rencontrée, on établit sans difficulté son trajet ; à la sortie du doublet, celui-ci coupe l'axe ou, au contraire, s'en éloigne. Il n'existe donc que deux types de lentilles, les lentilles **convergentes** et les lentilles **divergentes**. On dis-

Tableau 7.1 • Les lentilles convergentes.
On les identifie facilement par les bords qui sont plus minces que le centre.

Dioptre 1 $r_1 = \overline{S_1C_1}$	Dioptre 2 $r_2 = \overline{S_2C_2}$	Coupe de la lentille dans le plan principal	Nom de la lentille
$r_1 > 0$	$r_2 > 0$ $r_2 > r_1$		Ménisque à bords minces
$r_1 > 0$	$r_2 < 0$		Biconvexe
$r_1 > 0$	$r_2 \rightarrow \infty$		Plan-convexe
$r_1 \rightarrow \infty$	$r_2 < 0$		

Tableau 7.2 • Les lentilles divergentes. Les bords sont plus épais que le centre.

Dioptre 1 $r_1 = \overline{S_1C_1}$	Dioptre 2 $r_2 = \overline{S_2C_2}$	Coupe de la lentille dans le plan principal	Nom de la lentille
$r_1 < 0$	$r_2 > 0$		Ménisque à bords épais
$r_1 < 0$	$r_2 < 0$ $ r_2 > r_1 $		Biconcave
$r_1 < 0$	$r_2 \rightarrow \infty$		Plan-concave
$r_1 \rightarrow \infty$	$r_2 > 0$		

cerne facilement les lentilles convergentes des divergentes. Les bords sont plus minces que les bords dans le premier cas, plus épais dans le deuxième. On peut constituer huit combinaisons différentes, représentées dans les tableaux 7.1 et 7.2 (quatre lentilles convergentes et quatre lentilles divergentes). On a indiqué dans chaque cas le trajet schématique d'un rayon incident parallèle à l'axe optique.

1.2. La lentille mince

Considérons plus en détail une lentille d'indice n , délimitée par deux dioptries sphériques ; on a choisi à titre d'exemple une lentille biconvexe (figure 7.2). Le dioptre 1 de sommet S_1 est convexe ($\overline{S_1C_1} = r_1 > 0$) et convergent. Le dioptre 2 de sommet S_2 est concave ($\overline{S_2C_2} = r_2 < 0$) et également convergent. Tous les sommets et centres de courbures (S_1 , S_2 , C_1 et C_2) se situent sur l'axe optique.

Une lentille a pour épaisseur S_1S_2 . Elle peut être considérée comme une lentille mince si son épaisseur est faible devant la différence des valeurs des rayons de courbure. Dans ce cas on confondra S_1 et S_2 avec un point S qui deviendra l'origine commune des sommets des 2 dioptries. Ce dernier point sera repris au chapitre 8.

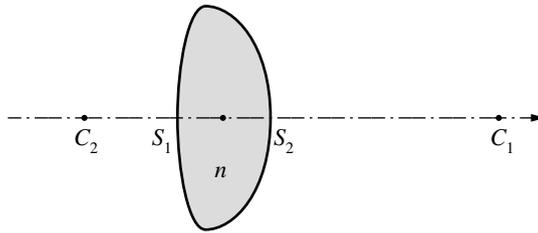


Figure 7.2 • Représentation détaillée d'un doublet de dioptres constituant une lentille.

Une lentille est dite mince si $\overline{S_1 S_2} \ll |\overline{S_1 C_1} - \overline{S_2 C_2}|$.

La minceur est une propriété relative. Par exemple, une lentille de 2 cm d'épaisseur avec des rayons de courbure de 1 m est considérée comme un lentille mince.

Pour éviter de dessiner des symboles différents pour les huit modèles de lentilles, on utilise un symbole pour les lentilles minces convergentes et un pour les lentilles divergentes (figure 7.3). L'orientation des flèches rappelle que la lentille convergente a des bords minces alors que la lentille divergente a des bords épais.

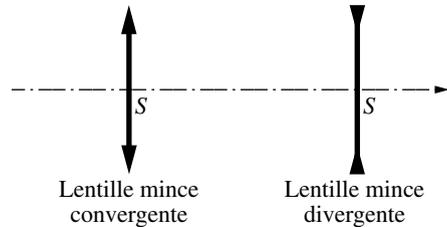


Figure 7.3 • Symbole d'une lentille mince convergente et d'une lentille mince divergente.

Une lentille est composée de deux dioptres sphériques ou d'un dioptre sphérique et d'un dioptre plan. C'est un système centré et dioptrique. Une lentille est soit convergente, soit divergente.

2. RELATION DE CONJUGAISON DES LENTILLES MINCES

Reconsidérons plus en détail la lentille biconvexe. On a dessiné (figure 7.4) le rayon (1) issu d'un point objet A situé sur l'axe principal. Il rencontre les dioptres en I_1 et I_2 , où il est dévié. Si l'on considère maintenant le rayon (2) se propageant sur l'axe avec une incidence nulle, il se propage sans être dévié par les dioptres. Ces deux rayons se coupent après le doublet en A' , image de A à travers la lentille. Plus généralement, dans l'approximation de Gauss, la position de A' est indépendante du rayon utilisé et la lentille est stigmatique. Nous pouvons alors établir la relation de conjugaison pour les lentilles minces.

La relation de conjugaison de la lentille mince peut être obtenue en combinant les relations de conjugaison écrites pour chacun des dioptres qui la composent (voir chapitre 5). Le premier dioptre a pour rayon de courbure r_1 et sépare le premier milieu d'indice 1 du milieu d'indice n . Il donne de l'objet A une image A'' . Si l'on repère leurs positions par rapport à S_1 , avec les quantités p_1 et p_1'' , la relation de conjugaison s'écrit :

$$\frac{n}{p_1''} - \frac{1}{p_1} = \frac{n-1}{r_1} \quad \text{ou :} \quad \frac{n}{S_1 A''} - \frac{1}{S_1 A} = \frac{n-1}{S_1 C_1} \quad (1)$$

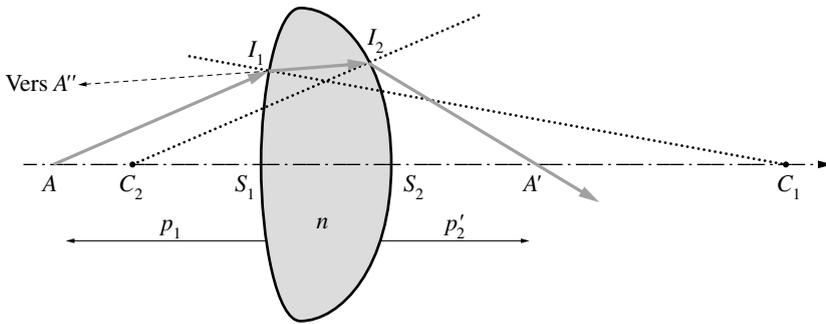


Figure 7.4 • Marche d'un rayon à travers une lentille.

A' devient objet pour le dioptré 2. Celui-ci, de rayon de courbure r_2 , sépare le premier milieu d'indice n du deuxième milieu d'indice 1. Il donne donc de l'objet A'' une image A' . Si p_2 et p'_2 sont respectivement les positions de A'' et de A' par rapport à S_2 , la relation de conjugaison pour le deuxième dioptré s'écrit :

$$\frac{1}{p'_2} - \frac{n}{p_2} = \frac{1-n}{r_2} \quad \text{ou :} \quad \frac{1}{S_2A'} - \frac{n}{S_2A''} = \frac{1-n}{S_2C_2} \quad (2)$$

Comme la lentille est mince, on peut confondre les points S_1 et S_2 en un seul point S . On a donc :

$$r_1 = \overline{SC_1} = \overline{SC} = r \quad ; \quad r_2 = \overline{SC_2} = \overline{SC'} = r' \quad \text{et} \quad p_2 = p''_1$$

Si l'on ajoute (1) et (2), on obtient finalement la relation de conjugaison de la lentille mince :

$$\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p_1} = (n-1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{SA'} - \frac{1}{SA} = (n-1) \left(\frac{1}{SC} - \frac{1}{SC'} \right)$$

L'image intermédiaire A'' ne présente plus d'intérêt ; pour rester cohérent avec les notations habituelles, on appelle p la position de l'objet A par rapport à S et p' la position de l'image A' , (soit $p_1 = p$ et $p'_2 = p'$). La relation de conjugaison de la lentille mince s'écrit :

Relation de conjugaison des lentilles minces (première formule de Descartes) :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = (n-1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \quad \frac{1}{SA'} - \frac{1}{SA} = (n-1) \left(\frac{1}{SC} - \frac{1}{SC'} \right)$$

Le deuxième membre de l'équation de conjugaison définit la vergence de la lentille, exprimée en dioptries (une dioptrie = 1 m^{-1} , symbole δ), soit :

$$\Phi = (n-1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$

Suivant les valeurs relatives des rayons de courbure, on distingue 2 cas :

- $\Phi > 0$ pour une lentille convergente (voir tableau 7.1) ;
- $\Phi < 0$ pour une lentille divergente (voir tableau 7.2).

Vergence d'une lentille mince : $\Phi = (n - 1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$

$\Phi > 0$ si la lentille est convergente,

$\Phi < 0$ si la lentille est divergente.

Nous proposons en encart 7.1 deux exemples dans lesquels on traite le calcul des vergences de deux lentilles, l'une convergente et l'autre divergente.

Encart 7.1. Exemples de calcul de vergence

1. On construit une lentille avec $r = 10$ cm, $r' = 20$ cm et $n = 3/2$.

$$\Phi = (n - 1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{0,1} - \frac{1}{0,2} \right) = 2,5$$

La lentille est convergente avec une vergence de 2,5 dioptries.

2. On construit une deuxième lentille en inversant r et r' : $r' = 10$ cm, $r = 20$ cm. La lentille est divergente car $\Phi = -2,5$ dioptries.

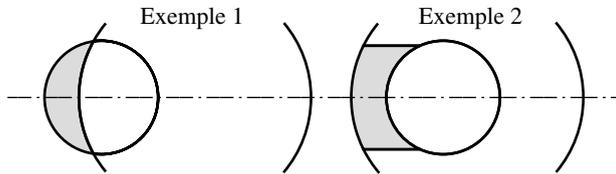


Figure 7.5 • Doublets de dioptries qui constituent dans le premier cas une lentille convergente, divergente dans le deuxième cas.

3. FOYERS ET PLANS FOCaux D'UNE LENTILLE MINCE

L'équation de conjugaison d'une lentille mince, comme celle d'un dioptre ou d'un miroir, est celle d'une hyperbole, que la lentille soit convergente ou divergente. Elle présente donc une asymptote verticale et une asymptote horizontale qui définissent deux points remarquables de la lentille : les foyers objet et image. Nous avons déjà étudié en détail ce type de courbe ; nous pouvons donc donner ici directement une expression analytique de la position de ces foyers.

3.1. Foyer image

Quand l'objet s'éloigne à l'infini, son image tend vers la position F' appelée foyer image, repérée par rapport à S par la distance focale image f' . Quand on fait tendre p vers l'infini, on a évidemment :

$$p' \rightarrow \overline{SF'} = f' = \frac{1}{\Phi}$$

Comme pour le dioptré sphérique, f' est du signe de Φ . Pour une lentille convergente, f' est donc positif et F' se situe à droite de S . Au contraire, pour une lentille divergente, f' est négatif et F' est à gauche de S .

3.2. Foyer objet

De même, on obtient une image A' rejetée à l'infini quand l'objet A se rapproche du foyer objet F . La position de F par rapport à S est repérée par la distance focale objet f . Quand p' tend vers l'infini :

$$p \rightarrow \overline{SF} = f = -\frac{1}{\Phi}$$

f est du signe opposé de Φ . Pour une lentille convergente, f est donc négatif et F se situe à gauche de S . Au contraire pour une lentille divergente, f est positif et F est à droite de S . On retiendra qu'une lentille possède **2 foyers** symétriques par rapport au sommet S de la lentille (figure 7.6). Les plans perpendiculaires à l'axe principal en F et F' sont appelés les plans focaux objet et image de la lentille mince.

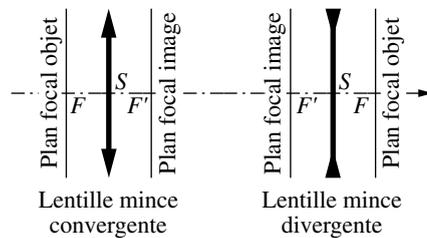


Figure 7.6 • Pour une lentille mince, les foyers et plans focaux objet et image sont disposés symétriquement par rapport au centre S de la lentille.

4. AUTRES FORMES DE LA RELATION DE CONJUGAISON

On peut réécrire la formule des lentilles en éliminant Φ et en faisant intervenir les distances focales ; on obtient facilement les deux formes nouvelles :

Deuxième forme de la relation de conjugaison d'une lentille mince :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{1}{\overline{SF'}} = -\frac{1}{\overline{SF}}$$

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{SF'}}{\overline{SA'}} + \frac{\overline{SF}}{\overline{SA}} = 1$$

On retrouve à nouveau la même forme que celle obtenue pour le dioptré sphérique et le miroir sphérique ; dans le cadre des conventions adoptées, cette relation, dite de Descartes, est donc **universelle**. De ce fait, la relation de Newton, qui positionne l'objet et son image par rapport aux foyers, s'applique aussi aux lentilles minces :

Relation de Newton pour les lentilles minces :

$$(p' - f')(p - f) = \sigma\sigma' = ff' \quad \text{ou} \quad (\overline{SA'} - \overline{SF})(\overline{SA} - \overline{SF}) = \overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = \overline{SF} \cdot \overline{SF'}$$

5. ANALYSE DE L'EFFET D'UNE LENTILLE MINCE

Comme aux chapitres 5 et 6, nous proposons d'étudier la nature et la position de l'image obtenue à travers une lentille convergente ou divergente en fonction de la position et de la nature de l'objet. Cette information est donnée par la fonction $p' = \frac{pf'}{p + f'}$, identique (au signe de la constante f' près) à celle établie au chapitre 6. On a représenté, sur les figures 7.7 et 7.8, p' en fonction de p pour une lentille convergente ($f' = 1$ m) et pour une lentille divergente ($f' = -1$ m). La figure 7.9 peut résumer les différentes possibilités offertes par ces deux types de lentilles.

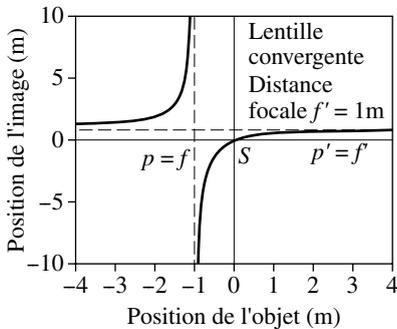


Figure 7.7 • Évolution de la position de l'image A' d'un point A qui se déplace sur l'axe principal pour une lentille convergente de 1 m de distance focale.

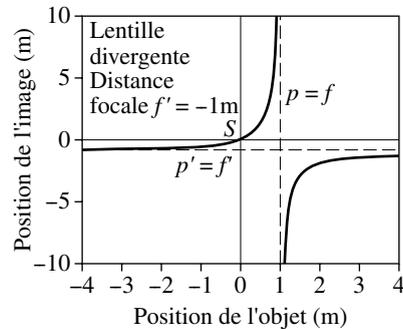


Figure 7.8 • Évolution de la position de l'image A' d'un objet A qui se déplace sur l'axe principal pour une lentille divergente de 1 m de distance focale.

6. IMAGES ET GRANDISSEMENTS

6.1. Constructions d'images

Pour construire l'image d'un objet AB formée à travers une lentille mince, on utilise les propriétés des foyers et du centre de la lentille. On trace deux rayons particuliers issus de B : le rayon (1), parallèle à l'axe optique, passe à la sortie de la lentille par le foyer image F' . Le rayon (2), passant par le centre de la lentille, ne subit pas de déviation. Les deux rayons ou leurs supports se coupent en B' , image de B . On déduit de cette construction la position et la nature de l'image $A'B'$ de AB . La figure 7.10 page 190, donne des exemples de constructions obtenues pour une lentille mince convergente ou divergente. Dans le cas d'un objet réel, pour une lentille convergente, l'image $A'B'$ est réelle et renversée si $p < f$, virtuelle et droite si $0 > p > f$. Pour la lentille divergente, $A'B'$ est virtuelle et droite.

Dans le dernier cas de la figure 7.10, il faut imaginer un système non représenté, qui crée un objet à droite de la lentille, donc virtuel et dont on peut aussi construire l'image. Ce système non représenté peut être constitué par exemple de deux lentilles minces et d'un objet AB dont on veut construire l'image à travers les deux lentilles (figure 7.11). On commence par construire l'image de l'objet à travers la première lentille L_1 . On

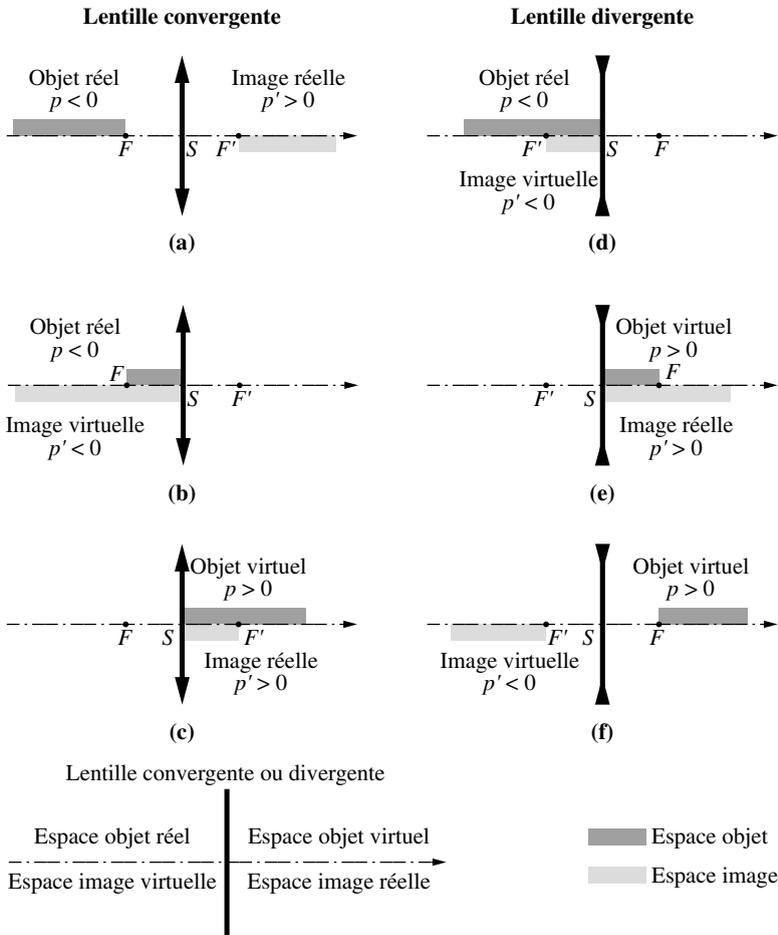


Figure 7.9 • Représentation des différentes possibilités offertes par des lentilles minces convergente et divergente.

obtient l'image $A''B''$ qui se trouve à **droite** de la deuxième lentille. Pour terminer la construction, on doit construire l'image de $A''B''$ à travers L_2 . Dans cette situation, on dit que $A''B''$ est un **objet virtuel** pour la lentille L_2 . Pour construire l'image de l'objet virtuel, on procède comme pour une construction normale. On utilise le rayon (1) parallèle à l'axe qui passe par B : il ressort par F'_2 . Le rayon (2) n'est pas dévié car il passe par le centre S . Les deux rayons physiques se coupant, l'image finale est réelle.

Les figures 7.12 suivantes schématisent l'évolution de faisceaux parallèles à l'axe optique. Si ce sont des rayons incidents, ils se coupent au foyer image. Inversement, des rayons sortants parallèles à l'axe optique sont issus d'un point situé au foyer objet.

Si les rayons parallèles sont inclinés par rapport à l'axe optique, la construction nécessite un rayon auxiliaire (figure 7.13). Un faisceau incident parallèle étant issu d'un point placé à grande distance, son image est toujours dans le plan focal, mais n'est plus sur

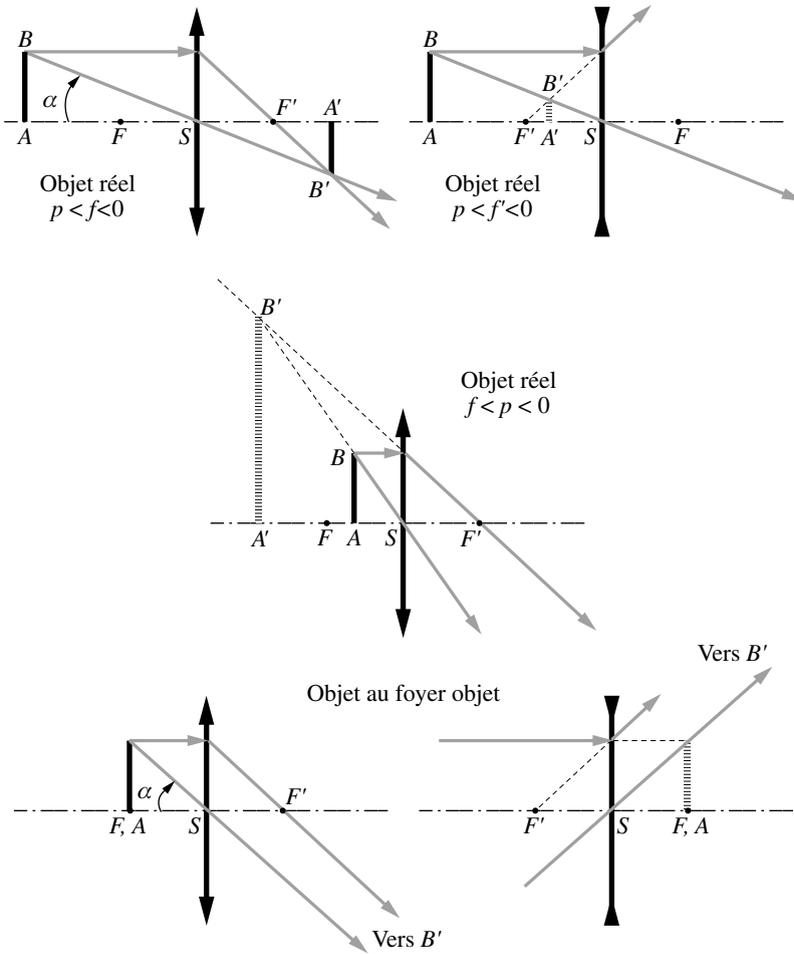


Figure 7.10 • Exemples de constructions avec des lentilles convergentes et divergentes.

l'axe comme précédemment. Parmi tous les rayons, celui passant par le centre de la lentille n'est pas dévié ; il coupe le plan focal en A' , point commun de tous les rayons issus de l'objet. Là encore, selon la nature de la lentille étudiée, il est nécessaire d'utiliser les rayons eux-mêmes ou leur prolongement.

6.2. Grandissement transversal γ et grandissement longitudinal g

Généralement, l'image est de taille différente de celle de l'objet. Le grandissement transverse $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ se calcule simplement en utilisant, par exemple, les propriétés des triangles semblables SAB et $SA'B'$ de la première construction de la figure 7.10. On a :

$$\tan \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'S}} = \frac{\overline{AB}}{-p} = \frac{\overline{A'B'}}{-p'} \quad \text{soit : } \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{p'}{p}$$

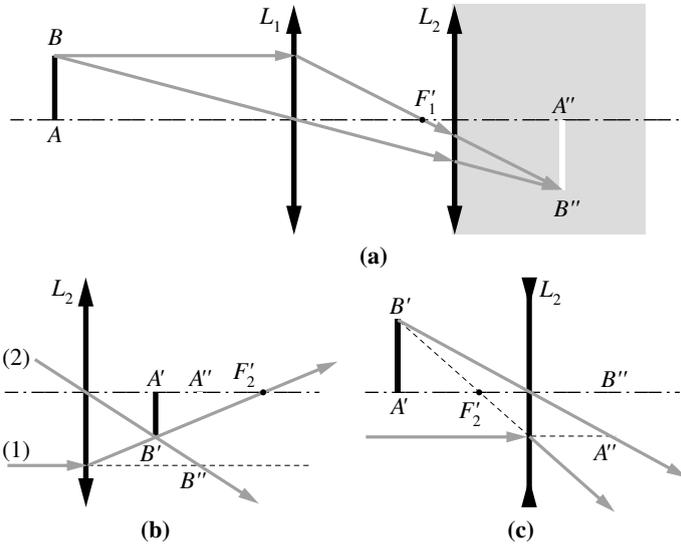


Figure 7.11 • Construction d'un objet virtuel : $A''B''$ est un objet virtuel obtenu après avoir fait l'image de AB à travers L_1 (a). L_2 peut être soit convergente (b), soit divergente (c).

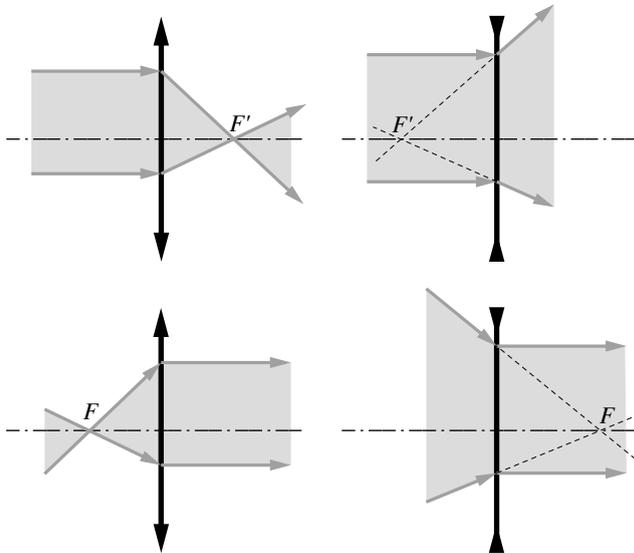


Figure 7.12 • Évolution de rayons incidents ou sortants parallèles à l'axe optique.

Le grandissement transversal d'une lentille mince est :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{p'}{p}$$

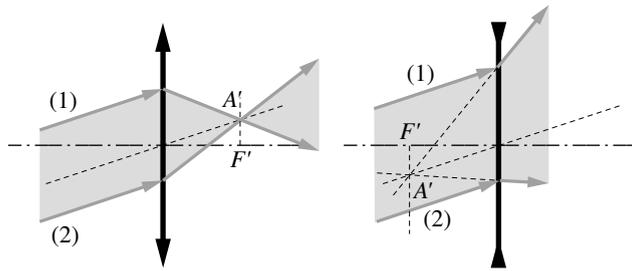


Figure 7.13 • Évolution de rayons incidents ou sortants parallèles, inclinés par rapport à l’axe optique.

On aurait pu calculer γ selon le même principe que celui utilisé au paragraphe 2, en combinant les grandissements successifs des deux dioptries qui composent la lentille mince. Le premier dioptre a pour grandissement :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A'B''}}{\overline{AB}} = \frac{p'_1}{np_1} = \frac{p_2}{np_1} = \frac{p_2}{np}$$

Pour le deuxième dioptre :

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A''B''}} = \frac{np'_2}{p_2} = \frac{np'}{p_2}$$

Finalement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma_2\gamma_1 = \frac{p'}{p}$$

L’image est droite si $\gamma > 0$, renversée si $\gamma < 0$. Enfin l’image est réduite si $|\gamma| < 1$ et agrandie quand $|\gamma| > 1$. L’évolution du grandissement est présentée sur les figures 7.14 (lentille convergente) et 7.15 (lentille divergente).

Pour calculer le grandissement longitudinal $g = \frac{dp'}{dp}$, différencions la formule de conjugaison de la lentille. On obtient facilement :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \quad \text{d'où} \quad \frac{dp'}{p'^2} - \frac{dp}{p^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad g = \left(\frac{p'}{p}\right)^2 = \gamma^2$$

Le grandissement g est toujours positif, indiquant que, pour une lentille mince, l’objet et son image se déplacent dans le même sens : si p augmente, p' augmente également.

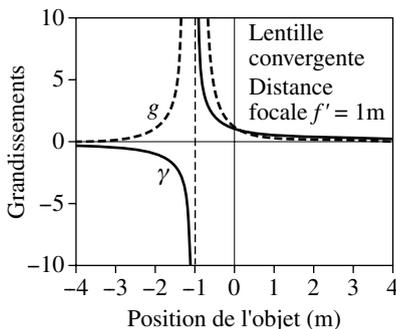


Figure 7.14 • Grandissements (longitudinal g et transversal γ) en fonction de la position de l’objet pour une lentille convergente de 1 m de distance focale.

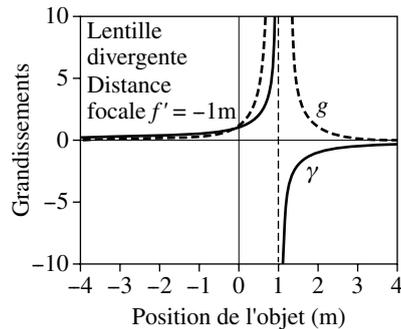


Figure 7.15 • Grandissements (longitudinal g et transversal γ) en fonction de la position de l’objet pour une lentille divergente de 1 m de distance focale.

7. EXEMPLES DE LENTILLES MINCES

Nous allons voir sur quelques exemples que les lentilles minces constituent des objets familiers. Nous allons décrire l'utilisation de la loupe et du projecteur de diapositives qui exploitent des positions particulières de l'objet et de l'image. Nous verrons dans le chapitre 9 d'autres exemples (les lunettes portées pour corriger les défauts de vision). Ce sont dans ce cas des lentilles minces convergentes ou divergentes.

7.1. Loupe

Une lentille permet dans certaines conditions d'obtenir une image agrandie d'un objet AB . Avec une lentille convergente, on peut obtenir d'un objet réel deux types d'images, une image réelle inversée inadaptée à la vision ou une image virtuelle si l'objet est placé entre la lentille et le foyer (voir figure 7.7, page 188). Enfin, plus l'objet est proche du foyer objet, plus le grandissement est important.

Une loupe bon marché est constituée d'une lentille unique ; une lentille beaucoup plus élaborée comme un oculaire de jumelles est en fait un doublet de lentilles. Nous verrons ce point dans le chapitre 10, mais les conclusions que nous allons tirer ici sont tout à fait générales. Dans un mode de fonctionnement normal, on place l'objet au foyer objet F (figure 7.16). Ceci a deux conséquences importantes : d'une part l'image est de grande taille (le grandissement transversal γ tend vers l'infini) et d'autre part elle est rejetée à l'infini. Ainsi, elle peut être observée par l'œil sans accommodation. C'est instinctivement la position qu'on lui donne car c'est ainsi que l'on peut lire du texte agrandi sans fatiguer l'œil (voir chapitre 9).

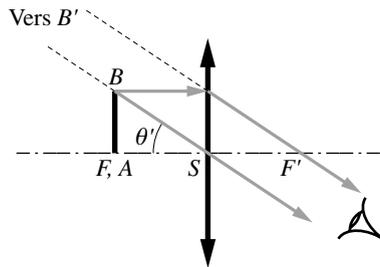


Figure 7.16 • Angle de vision à travers la loupe. L'image $A'B'$ étant rejetée à l'infini, l'œil la voit sous un diamètre apparent θ' . On ne peut plus parler de grandissement car celui-ci est devenu infini.

• **Avec la loupe**, les rayons en provenance de l'image virtuelle B' rejetée à l'infini arrivent sous une incidence égale à θ' (figure 7.16). Cet angle est l'angle sous lequel on voit l'objet dans la loupe. On a :

$$\theta' \approx \frac{\overline{AB}}{\overline{SF}} = -\frac{\overline{AB}}{f'}$$

• **À l'œil nu**, si l'objet AB est placé à la distance d (figure 7.17), on le voit sous un angle :

$$\theta \approx \frac{\overline{AB}}{\overline{SA}} = -\frac{\overline{AB}}{d}$$

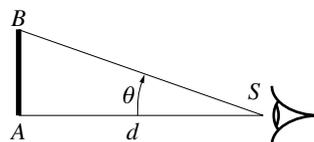


Figure 7.17 • Angle de vision d'un objet placé à une distance d .

Pour une loupe, le grandissement transversal γ tend vers l'infini et n'a plus de sens. On caractérisera donc une loupe par son grossissement G .

On appelle *grossissement* le rapport : $G = \frac{\theta'}{\theta}$.

θ' est l'angle sous lequel on voit l'objet dans la loupe. θ est l'angle sous lequel on voit l'objet à l'œil nu.

$$G = -\frac{d}{f'} = -d\Phi$$

Le grossissement dépend de la distance de référence correspondant à la vision à l'œil nu. Par convention, on choisit la distance standard $d = -25$ cm qui correspond au *punctum proximum* (voir chapitre 9), c'est-à-dire à la distance de vision la plus proche pour un œil normal. Si f' est la distance focale de la lentille et Φ sa vergence, on a $G = \frac{\Phi}{4}$.

On appelle *grossissement commercial*, le grossissement calculé pour un objet placé à 25 cm de l'œil :

$$G = \frac{1}{4f'} = \frac{\Phi}{4}$$

Par exemple, une loupe qui grossit 8 fois a une vergence de 32 dioptries soit une distance focale de l'ordre de 3 cm. On la placera donc à 3 cm de l'objet à grossir. Les loupes constituées de plusieurs lentilles minces permettent des grossissements compris entre 2 et 25. Pour obtenir des grossissements supérieurs, on utilise des oculaires constitués de plusieurs lentilles (voir chapitre 10).

7.2. Projecteur de diapositives

Afin de comprendre sa fonction, on peut assimiler l'objectif d'un projecteur de diapositives à une lentille mince convergente. L'objet (la diapositive) est placé à plus grande distance que le foyer (p et f sont négatifs soit $p < f$). De la diapositive se formera une image réelle et de plus grande taille. On la matérialise sur l'écran de projection qui est généralement placé à une distance fixe (AA'). Pour avoir une image nette à l'écran, on utilise un réglage fin de la position de la lentille (focus). Cela revient à ajuster la position du sommet de la lentille S de telle manière que A' et A soient deux points conjugués. En accord avec la figure 7.7 par exemple, si $p < f$, l'image obtenue par une lentille convergente est renversée ($\gamma < 0$). Les personnes qui ont manipulé cet appareil pourront convenir qu'il faut effectivement installer les diapositives à l'envers pour les observer à l'endroit sur l'écran.

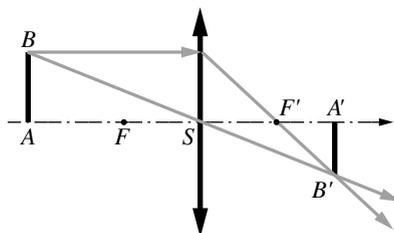


Figure 7.18 • Image produite par un projecteur de diapositives.

8. LES LENTILLES ACCOLÉES

Dans de nombreux instruments d'optique (lunettes, télescopes...), les oculaires sont constitués de doublets ou de triplets de lentilles destinés à éviter les aberrations chromatiques provoquées par la lentille unique. En effet, une lentille unique dévie de manière différente les radiations de longueurs d'ondes différentes et, de ce fait, on ne peut plus parler de foyer unique, car chaque couleur donne son propre foyer. Une astuce consiste à associer deux lentilles, une lentille convergente et une lentille divergente, constituant ainsi un doublet achromatique. Dans ce paragraphe, notre propos n'est pas de présenter la théorie du doublet achromatique, mais de traiter la combinaison optique particulière constituée de deux lentilles minces dites accolées. De manière générale, on peut formuler le problème de la manière suivante, en considérant non plus deux dioptries mais trois dioptries ou plus, séparant des milieux d'indices différents. Prenons l'exemple de trois dioptries séparant des milieux d'indices n' et n'' de l'air (figure 7.19).

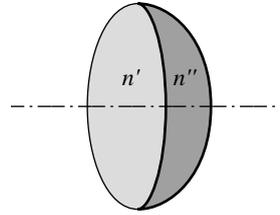


Figure 7.19 • Deux lentilles accolées sont constituées de trois dioptries séparant l'air des verres d'indices n' et n'' .

Si l'on appelle successivement r_1 , r_2 et r_3 les rayons de courbure des trois dioptries, on peut écrire les trois relations de conjugaisons successives à travers ces trois dioptries donnant d'un objet A les images successives A' , A'' et A''' . Avec les notations habituelles du dioptre (voir chapitre 5) on peut écrire :

$$\frac{n'}{p'_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{n' - 1}{r_1} \quad (1)$$

$$\frac{n''}{p'_2} - \frac{n'}{p_2} = \frac{n'' - n'}{r_2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{p'_3} - \frac{n''}{p_3} = \frac{1 - n''}{r_3} \quad (3)$$

La lentille finale étant considérée comme mince, on peut confondre les trois sommets des trois dioptries en un point unique S et écrire les approximations :

$$p'_1 = p_2 \quad \text{et} \quad p'_2 = p_3$$

Si l'on ajoute membre à membre les équations (1), (2) et (3), on obtient l'équation de conjugaison de la lentille en écrivant $p_1 = p$ et $p'_3 = p'$, soit :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{n' - 1}{r_1} + \frac{n'' - n'}{r_2} + \frac{1 - n''}{r_3} = \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

On obtient finalement le résultat fondamental qui lie les propriétés individuelles des éléments optiques à celles de l'association : dans le cas d'éléments accolés, la vergence de l'ensemble est égale à la somme des vergences individuelles. En particulier, si quatre dioptries forment deux lentilles, on a un résultat analogue que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Un système formé de deux lentilles minces accolées de vergences Φ_1 et Φ_2 a une vergence $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

Si les lentilles ne sont plus minces et si elles sont écartées, la formule précédente n'est plus valable et nous en verrons une démonstration dans le chapitre 8 avec les formules des combinaisons. C'est à partir de cette formule simplifiée que l'on peut comprendre facilement le calcul des verres correcteurs pour les yeux. Une personne myope a un œil trop convergent comparativement aux dimensions de son œil. Par exemple, sa vergence est de 57δ alors qu'elle devrait être de 55δ pour que les images des objets à l'infini se forment sur la rétine. Il suffit en première approximation de lui faire porter des verres correcteurs de vergence $55 - 57 = -2$ dioptries, soit des verres divergents de 50 cm de distance focale (voir chapitre 9).

9. LENTILLE MINCE SÉPARANT DEUX MILIEUX D'INDICE DIFFÉRENT

Considérons une lentille mince convergente, constituée de deux dioptres de rayons r_1 et r_2 . C'est par exemple un hublot séparant l'eau (indice $n = 4/3$) de l'air (indice $n' = 1$). La lentille est en verre, d'indice $n_L = 3/2$ (figure 7.20).

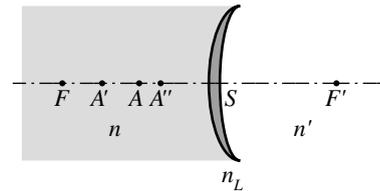


Figure 7.20 • Représentation d'un doublet de dioptres constituant une lentille mince.

Si A'' est l'image d'un objet A à travers le premier dioptre et A' celle de A'' à travers le deuxième, les deux relations de conjugaison s'écrivent :

$$\frac{n_L}{p''} - \frac{n}{p} = \frac{n_L - n}{r_1} \quad \text{et} \quad \frac{n'}{p'} - \frac{n_L}{p''} = \frac{n' - n_L}{r_2}$$

où toutes les distances sont repérées par rapport au sommet S . On obtient donc la relation de conjugaison du doublet en additionnant ces deux équations :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2} = \Phi$$

On définit ainsi la vergence Φ du doublet. Les distances focales objet et image de ce doublet sont respectivement ($f = p$ quand $p' \rightarrow \infty$ et $f' = p'$ quand $p \rightarrow \infty$) :

$$f = \frac{-nr_1r_2}{(n_L - n)r_2 + (n' - n_L)r_1} \quad \text{et} \quad f' = \frac{n'r_1r_2}{(n_L - n)r_2 + (n' - n_L)r_1}$$

On remarque que, bien que la lentille soit une lentille mince, l'on n'a pas ici $f' = -f$ mais $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$. Nous verrons que cela est dû au fait que les milieux extrêmes sont différents. Enfin, on a :

$$\Phi = -\frac{n}{f} = \frac{n'}{f'}$$

Si l'on réécrit la relation de conjugaison en fonction de f et f' , les positions de l'objet et de l'image sont données par la relation de Descartes :

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$$

On pourrait étudier de la même manière le grandissement transversal γ . Les dioptries forment des images avec des grandissements respectifs :

$$\gamma_1 = \frac{np''}{n_L p} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{n_L p'}{n' p''}$$

On a donc :

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 = \frac{np'}{n' p}$$

Le grandissement transversal γ est bien donné par la relation générale déjà trouvée dans le chapitre 5 :

$$\gamma = -\frac{p' f}{p f'}$$

À RETENIR

- Une **lentille** est composée de deux dioptries sphériques ou d'un **dioptre sphérique** et d'un **dioptre plan**.
- C'est un **système centré** : les sommets et centres de courbure de chaque dioptre sont alignés sur l'axe optique.
- C'est un **système dioptrique** : tout rayon ne subit que des réfractions.
- Une lentille est soit **convergente**, soit **divergente**. Il y a dans les deux cas quatre configurations possibles.
- Une lentille est dite **mince** si son épaisseur $\overline{S_1 S_2} \ll |\overline{S_1 C_1} - \overline{S_2 C_2}|$. On la représente alors dans le plan principal :

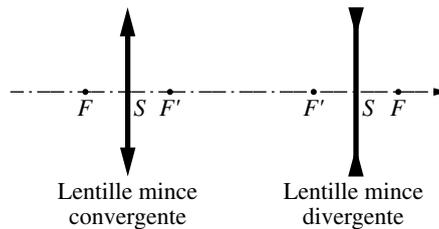


Figure 7.21 • Représentation de deux lentilles convergente et divergente.

- Si les milieux de chaque côté sont identiques, la relation de conjugaison, qui relie la position d'un objet à celle de son image par rapport au sommet S de la lentille peut s'écrire :

Première formule de Descartes :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = (n - 1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = (n - 1) \left(\frac{1}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SC'}} \right)$$

elle s'écrit aussi :
$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \Phi$$

Φ est la vergence de la lentille, exprimée en dioptries (une dioptrie = 1m^{-1}). $\Phi > 0$ si la lentille est convergente, $\Phi < 0$ si elle est divergente.

Une lentille mince possède **deux foyers** placés symétriquement sur l'axe optique par rapport au centre S de la lentille. F est le foyer objet, F' le foyer image. Leurs positions sont données par les distances focales f et f' :

$$\overline{SF'} = f' = \frac{1}{\Phi} = -\overline{SF} = -f$$

Les plans perpendiculaires à l'axe principal en F et F' sont les plans focaux objet et image de la lentille.

Deuxième forme de la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{1}{\overline{SF'}} = -\frac{1}{\overline{SF}}$$

elle s'écrit aussi :
$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{SF'}}{\overline{SA'}} + \frac{\overline{SF}}{\overline{SA}} = 1$$

La relation de Newton :

$$(p' - f')(p - f) = ff' \quad \text{ou} \quad (\overline{SA'} - \overline{SF})(\overline{SA} - \overline{SF}) = \overline{SF} \cdot \overline{SF'}$$

qui positionne l'objet et son image par rapport aux foyers s'applique aussi aux lentilles minces.

Le grandissement transversal γ d'une lentille mince est :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{p'}{p}$$

L'image est droite si $\gamma > 0$, au contraire elle est renversée si $\gamma < 0$. Enfin l'image est réduite si $|\gamma| < 1$ et agrandie quand $|\gamma| > 1$.

g est toujours positif, indiquant que pour une lentille mince l'objet et son image se déplacent dans le même sens sur l'axe optique.

Un système formé de deux lentilles minces accolées de vergences Φ_1 et Φ_2 a une vergence $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

Le grandissement longitudinal est :

$$g = \frac{dp'}{dp} = \left(\frac{p'}{p}\right)^2 = \gamma^2$$

- Si les milieux de part et d'autre de la lentille sont différents, on a $\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \phi$, $\frac{f}{f'} = -\frac{n'}{n}$. Les foyers de la lentille ne sont plus symétriques par rapport au sommet. $\phi = -\frac{n}{f} = \frac{n'}{f'} - \frac{n}{f} + \frac{f}{p} = 1$ ou $(p' - f')(p - f) = ff'$ et $\gamma = \frac{np'}{p}$. On peut écrire aussi $\gamma = -\frac{p'}{p} \frac{f}{f'}$.

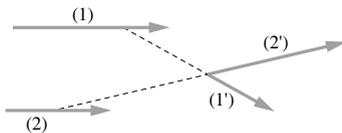
QCM

1 Une lentille convergente est retournée.

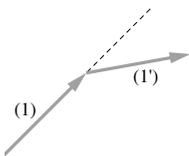
- (1) Elle reste convergente.
- (2) Elle devient divergente.
- (3) On ne peut répondre.

2 Deux rayons incidents (1) et (2) deviennent (1') et (2') après traversée d'un système optique. Ce système

- (1) peut être une lentille convergente.
- (2) peut être une lentille divergente.
- (3) ne peut pas être une lentille convergente.



3 En traversant une lentille, un rayon (1) devient (1').

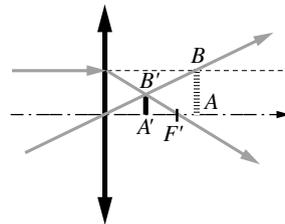


- (1) La lentille est divergente.
- (2) La lentille est convergente.
- (3) On ne peut rien dire.

4 Une lentille convergente peut donner d'un objet réel une image

- (1) réelle.
- (2) virtuelle.
- (3) à l'infini.

5 Dans la figure suivante,



- (1) B est l'image de B'.
- (2) B et B' n'ont aucun rapport entre eux.
- (3) B' est l'image de B.

6 Un objet est placé de telle manière que $p = 2f$.

- (1) $p' = f'$
- (2) $p' = 2f'$
- (3) $p' = 4f'$

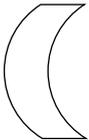
7 Deux points A et B sont espacés d'une distance d . On cherche à placer une lentille telle que B soit l'image de A .

- (1) Il n'y a pas toujours de solution.
- (2) Il y a deux solutions.
- (3) Il y a une infinité de solutions.

8 On accole deux lentilles, l'une convergente de distance focale $f' = 10$ cm et l'autre divergente de distance focale $f' = -10$ cm. L'ensemble a une distance focale

- (1) $f' = 20$ cm
- (2) $f' = 0$
- (3) infinie

9 On fabrique une lentille mince avec des faces de mêmes rayons de courbure.



- (1) La lentille est convergente.
- (2) La lentille est divergente.
- (3) La lentille a une distance focale infinie.

10 À travers une lentille convergente, le gran-

dissement $\gamma = \frac{A'B'}{AB} = -1$. La distance $\overline{AA'}$ est égale à

- (1) $f'/2$
- (2) $2f'$
- (3) $4f'$

Réponses : 1. 1, 2. 1, 3. 3, 4. 1, 2 et 3, 5. 3, 6. 2, 7. 3, 8. 3, 9. 3, 10. 3

EXERCICES

1 Un chasseur photographique désire photographier un lion de 1 m de hauteur situé à une distance de 300 m. Il veut en obtenir sur son film une image d'une hauteur de 1 cm. Cette image est renversée. En considérant l'objectif de son appareil photographique comme une lentille mince, déterminer γ , le grandissement souhaité, p' , la distance lentille-film et f' , la longueur focale de l'objectif. Quelle est la nature de l'image ?

2 Une lentille mince dont la première face est plane donne d'un objet réel situé à 1 m de son sommet une image droite deux fois plus petite que l'objet. L'indice de la lentille vaut $n = 3/2$.

a) Calculer la vergence de la lentille.

b) Quelle est la nature de la lentille ? Calculer le rayon de courbure de la seconde face.

3 Un miroir plan M est placé à droite d'une lentille L convergente.

a) Montrer avec une construction que, quelle que soit la position de M , tout rayon passant par le foyer objet F de la lentille revient sur lui-même.

b) Montrer avec une construction que tout rayon issu d'un point A du plan focal objet ressort de L après réflexion sur le miroir en passant par le point A' symétrique de A par rapport à F .

4 On place un objet à une distance p_0 d'une lentille de distance focale f' . L'image se forme à la distance p'_1 .

a) Si l'on place un objet à la distance p'_1 de la lentille, où est l'image ? On appelle p'_2 sa position.

b) À nouveau, on forme l'image d'un objet placé en p'_2 . Où est la nouvelle image ? On continue ainsi à former les images successives. Donner l'expression de p'_n , la position de la $n^{\text{ième}}$ image. Où vont se former les images si $n \rightarrow \infty$.

c) Reprendre le même calcul avec un miroir sphérique.

5 L'objectif d'un appareil photographique est assimilé à une lentille mince convergente de distance focale $f' = 12$ cm et de 5 cm de diamètre. Pour effectuer la mise au point, on fait varier la distance de la lentille au plan du film de telle façon qu'une image nette se forme toujours sur la pellicule.

a) On photographie un objet A situé à très grande distance. Où doit être placée la pellicule ?

b) Sur le même cliché apparaît l'image d'un motif B placé sur l'axe de la lentille à une distance de 3 m. Son image nette est-elle sur le cliché ?

c) Les rayons qui proviennent de B et qui rentrent dans l'appareil forment sur la pellicule une tache de rayon x . Déterminer la taille de cette tache en examinant les rayons passant par le bord de l'objectif. La photo est acceptable si $x < 0,2$ mm. La photo sera-t-elle nette ? Que peut-on faire pour améliorer la qualité de la photo ?

d) On déplace la pellicule de manière à ce que l'image de B soit nette sur cette pellicule. Déterminer les distances maximale et minimale correspondantes de p_1 et p_2 . Déterminer la profondeur de champ $p_1 - p_2$.

6 On appelle $d = \overline{AA'}$ la distance objet-image où l'image est donnée par une lentille mince de distance focale f' . On considère un objet réel.

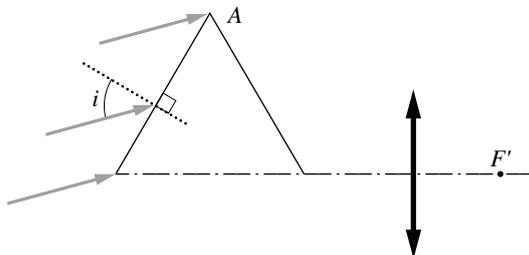
a) Étudier le comportement de la distance d en fonction de p dans le cas d'une lentille convergente, puis divergente.

b) On forme l'image $A'B'$ avec une lentille et on cherche à la placer sur un écran pour lequel d est constant. L'image est nette sur l'écran pour deux positions de l'objet décalées d'une distance Δp . En déduire la distance focale de la lentille en fonction de d et de Δp . Calculer cette distance focale pour $d = 1,8$ m et $\Delta p = 1,2$ m. Déterminer les positions de l'image et de l'objet. En quoi cela impose-t-il le signe de p' et f' ?

c) On considère maintenant une lentille convergente de distance focale $f' = 10$ cm. Montrer qu'il y a deux configurations possibles. Dans chaque cas, déterminer les positions de l'objet et de l'image avec $d = 1$ m. Les deux situations sont-elles réalisables ?

7 Un prisme équilatéral a un indice $n = \sqrt{2}$ et un angle au sommet A .

a) On envoie sur ce prisme un faisceau monochromatique (longueur d'onde λ). Les rayons parallèles proviennent d'une source S située à très grande distance. L'angle d'incidence i correspond au minimum de déviation D_m du prisme; déterminer la valeur de cet angle ainsi que la déviation D_m .



b) On place à droite du prisme une lentille mince convergente de distance focale $f' = 10$ cm. Où se forme S' l'image de S ? Calculer la longueur $\overline{F'S'}$.

c) La longueur d'onde λ a varié de telle manière que l'indice du prisme est de $\sqrt{2} + 0,001$, soit $dn = 0,001$. En utilisant le calcul différentiel, déterminer dD ainsi que le déplacement de l'image $d(\overline{F'S'})$.

8 On projette une diapositive de 1 cm de côté pour obtenir une image nette de 2 m sur un écran placé à 10 m de la lentille du projecteur. Quelles sont les valeurs possibles du grandissement γ . Quel modèle de lentille faut-il utiliser? Calculer ses distances focales.

9 On fabrique une lentille mince convergente dans un verre d'indice $n = 3/2$. Les rayons de courbure des surfaces sont de 20 et de 50 cm.

a) Dessiner les différentes configurations.

b) Dans chaque cas, calculer la vergence de la lentille.

10 L'œil humain est un système optique particulier équivalent à une lentille mince de distance focale variable entre deux milieux d'indice différents ($n = 1$, $n' = 1,33$), dans lequel la distance séparant la lentille de l'image est constante et égale à 25 mm dans un œil normal.

a) Quelle est la distance focale et la vergence de l'œil pour une mise au point sur un objet placé à l'infini?

b) Répondre à la même question si l'objet est à 25 cm de l'œil.

11 Une lentille mince, d'indice $n_1 = 3/2$, comprend une face plane et une face bombée de 2 cm de rayon de courbure.

a) Sachant qu'elle est convergente, représenter sur un schéma les deux modèles possibles.

b) La lentille constitue un hublot séparant l'eau d'indice $n_0 = 4/3$ de l'air d'indice $n = 1$. Avec cette lentille, on forme l'image A' d'un objet situé dans l'eau. En appliquant deux fois la formule du dioptre et en utilisant la propriété des lentilles minces, écrire dans chaque cas la relation de conjugaison liant les positions A et A' .

c) En déduire dans chaque cas la formule de grandissement transversal γ ainsi que les expressions des distances focales objet et image de la lentille équivalente. Calculer ces distances.

d) Où faut-il placer l'objet pour que l'image et l'objet soient confondus ? Que vaut γ dans chaque cas ?

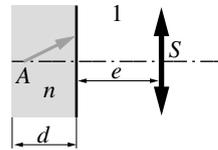
12 Entre deux plans parallèles distants de 45 cm, on veut avoir un grandissement transversal $\gamma = -1/2$. Déterminer la distance focale et la nature de la lentille à utiliser. Faire un schéma.

13 Une lentille convergente de distance focale f' et de sommet S est placée en arrière d'un dioptré plan séparant deux milieux d'indices n et 1.

a) Quelle est la position de l'image A' à travers le dioptré plan de l'objet A placé à une distance d du dioptré plan ?

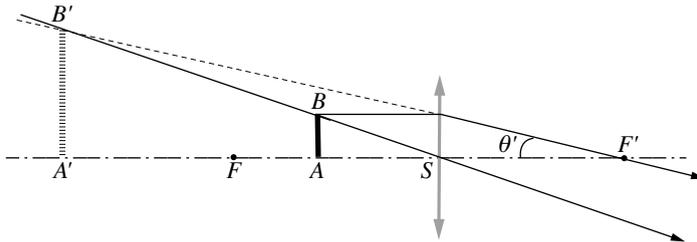
b) Pour la lentille, l'objet A' est-il réel ou virtuel ?

c) Calculer la distance $\overline{SA''}$, où A'' est l'image de A' à travers la lentille.



14 Loupe

On forme avec une loupe de sommet S et de distance focale $f' = 10$ cm, une image virtuelle $A'B'$ d'un objet AB de 1 cm de hauteur. L'image virtuelle est vue sous un angle θ' par l'œil de l'observateur placé au foyer image F' . On place l'objet dans 2 positions différentes $p = \overline{SA} = -2$ et -5 cm.



Dans chaque cas, calculer $p' = \overline{SA'}$, le grandissement γ , $\overline{A'B'}$, $d = \overline{F'A'}$ et $|\tan \theta'|$.

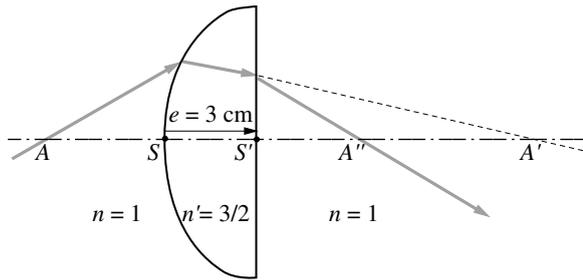
Que constatez-vous pour θ' ?

Dans quelle position, l'observateur va-t-il placer AB afin d'avoir la vision la moins fatigante ?

15 Lentille plan-convexe

On considère une lentille plan-convexe de rayon de courbure $r = \overline{SC} = 5$ cm, d'indice $n' = 3/2$ et d'épaisseur $e = 3$ cm. Un objet réel A est placé 20 cm en avant de la lentille.

- 1) Déterminer la position $\overline{SA'}$ de l'image A' à travers la première face de la lentille considérée comme un dioptre sphérique.
- 2) On considère le dioptre plan constituant la 2^e face de la lentille. Démontrer que $p'' = \overline{S'A''} = \frac{2}{3} \left[\frac{3rp}{p+2r} - e \right]$. Calculer p'' . En déduire la position du foyer image F' de la lentille par rapport à S' .



16 Loupe

Un observateur place son œil au foyer F' d'un loupe de distance focale $f' = 2$ cm. Il regarde à travers la loupe un objet AB .

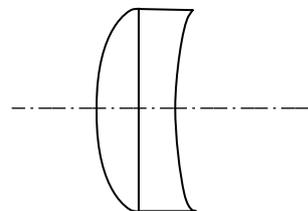
- 1) Calculer la profondeur de champ, c'est-à-dire la variation de la distance \overline{FA} pour que l'image $A'B'$ se déplace de l'infini à 25 cm de l'œil.
- 2) Calculer la valeur du détail ΔAB que l'observateur peut séparer à travers la loupe (l'œil à un pouvoir séparateur ou une acuité de $1' = 3 \cdot 10^{-4}$ rd).
- 3) Calculer le grossissement G obtenu.

17 Lentille achromatique

Une lentille mince plan-convexe est taillée dans un verre (en *crown*) dont l'indice varie avec la longueur d'onde suivant la loi

$$n_1 = 1,506 + \frac{0,00316}{\lambda^2} \text{ où } \lambda \text{ est en microns.}$$

- 1) Dans le bleu ($\lambda = 0,4 \mu\text{m}$), la lentille a une distance focale $f'_{1b} = 50$ cm. Calculer le rayon de courbure R_1 de la face convexe.
- 2) Que vaut la distance focale f'_{1r} de la lentille dans le rouge ($\lambda = 0,8 \mu\text{m}$). En déduire la distance séparant les 2 foyers (bleus et rouges) de cette lentille.
- 3) Pour obtenir un système achromatique, on accole par leurs faces planes, la lentille convergente précédente et une lentille divergente (en verre *flint*). L'ensemble est considéré comme un lentille mince. Le rayon de courbure de la face concave de la lentille divergente est appelé R_2 . Les indices du flint pour les radiations rouge et bleu sont respectivement $n_{2r} = 1,703$ et $n_{2b} = 1,738$.



Ecrire la formule de la vergence Φ du doublet de lentilles en fonction de n_1 , n_2 , R_1 et R_2 .

Démontrer qu'une variation de longueur d'onde se traduit par une variation de la vergence donnée par $\Delta\Phi = \frac{\Delta n_1}{R_1} - \frac{\Delta n_2}{R_2}$

Calculer R_2 pour que ce doublet soit achromatique.

En déduire la distance focale de l'ensemble

18 Deux lentilles

Une source S est située sur l'axe principal d'une lentille L_1 dont la vergence est égale à 10 dioptries, à 6 cm en avant de cette lentille.

Déterminer la position de l'image de S à travers L_1 .

On place une lentille L_2 dans le plan focal image de L_1 . Déterminer la distance focale de L_2 pour que le faisceau issu de S et émergeant après la traversée de L_1 et L_2 soit un faisceau parallèle.

Placer L_2 sur la figure ainsi que le faisceau émergent.

Solutions

1 Le grandissement est donné par $\gamma = \frac{p'}{p} = \frac{A'B'}{AB}$. $A'B'$ (= 1 cm) est la taille de l'image et AB (= 1 m), celle de l'objet. On trouve $\gamma = -1 \cdot 10^{-2}$. Avec $p = -300$ m, $p' = 3$ m. La distance focale f' de la lentille est donnée par la formule de conjugaison : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$, soit $f' = 1,5$ m. L'objectif est une lentille mince convergente. L'image est réelle.

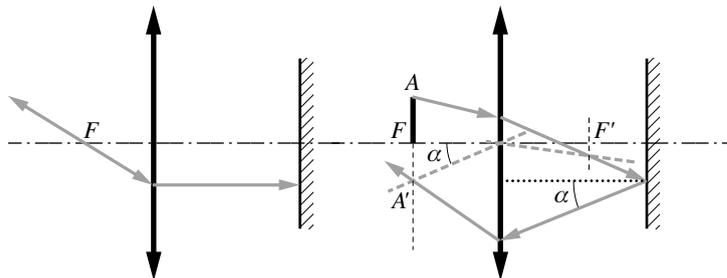
2 a) On a $\gamma = 0,5$. Si $p = -1$ m, $p' = \gamma p = -0,5$ m. L'image est virtuelle. La relation de conjugaison donne la vergence Φ de la lentille : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \Phi$. On trouve $\Phi = -1 \text{ m}^{-1} = -1$ dioptrie.

b) Φ est négative, la lentille est donc divergente.

Le rayon de courbure de la deuxième face est donné par : $\Phi = (n - 1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$. La première face est plane ($1/r = 0$). On trouve $r' = 50$ cm.

3 a) Un rayon passant par le foyer objet sort parallèlement à l'axe de la lentille. Il arrive donc sur le miroir avec une incidence nulle et revient sur lui-même, et ce quelle que soit la position du miroir par rapport à la lentille.

b) Venant du plan focal objet, le faisceau passe par F' , se réfléchit sur le miroir. L'image A' est donnée par l'intersection entre le faisceau et la droite passant par S parallèle au faisceau réfléchi. Les constructions montrent bien que A et A' sont symétriques par rapport à l'axe principal dans le plan focal objet, quelle que soit l'inclinaison du faisceau passant par A .



- 4 a) Soit p_0 la position de l'objet initial. On considère son image en p'_1 comme un nouvel objet dont on cherche l'image, positionnée en p'_2 . Les relations de conjugaison entre p_0 et p'_1 d'une part, et p'_1 et p'_2 d'autre part sont : $\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{f'}$ et $\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{f'}$. On en tire $p'_1 = \frac{p_0 f'}{f' + p_0}$ et $p'_2 = \frac{p_0 f'}{f' + 2p_0}$. La nouvelle image n'est pas confondue avec l'objet du départ.

b) On peut généraliser ce résultat et trouver la position p'_n de la $n^{\text{ième}}$ image. On trouve : $p'_n = \frac{p_0 f'}{f' + n p_0}$. $p'_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Les images se rapprochent de S.

c) Avec un miroir sphérique, on a $\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{p_0} = \frac{2}{r} = \frac{1}{p'_2} + \frac{1}{p'_1} = \dots = \frac{1}{p'_{n+1}} + \frac{1}{p'_n}$. On trouve donc :

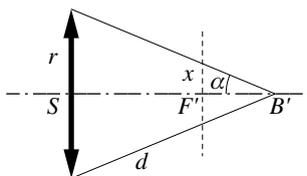
$$p'_1 = \frac{r p_0}{2 p_0 - r} = p'_3 = \dots = p'_{2n+1} ; \quad p_0 = p'_2 = \dots = p'_{2n}.$$

- 5 a) Si l'objet est à grande distance, son image sera au foyer de la lentille. La pellicule doit être dans le plan focal, soit à 12 cm de la lentille.

b) Si l'objet est à $\overline{SB} = p = -3$ m, la relation de conjugaison donne $\overline{SB'} = 12,5$ cm, et non 12 cm. L'image B' n'est pas tout à fait nette sur le cliché.

c) On a $\tan \alpha = \frac{r}{SB'} = \frac{x}{F'B'}$,

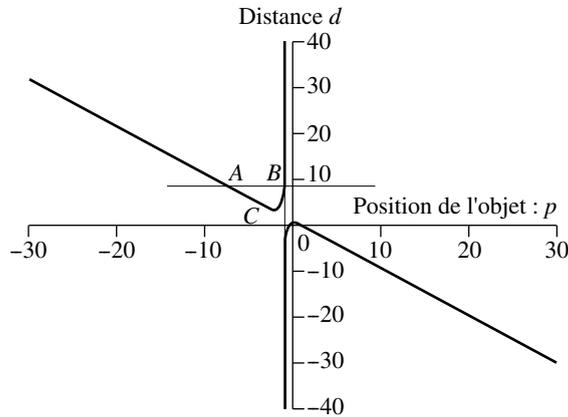
avec $F'B' = SB' - SF' = 0,5$ cm. On trouve $x = 0,1$ cm, ce qui est inacceptable. La photo ne sera donc pas nette. Pour améliorer sa qualité, il faut réduire la taille de la lentille (ce qui revient à régler le diaphragme) de telle façon que $x = 0,2$ mm, soit $\tan \alpha = 0,04$ et $r = 0,5$ cm.



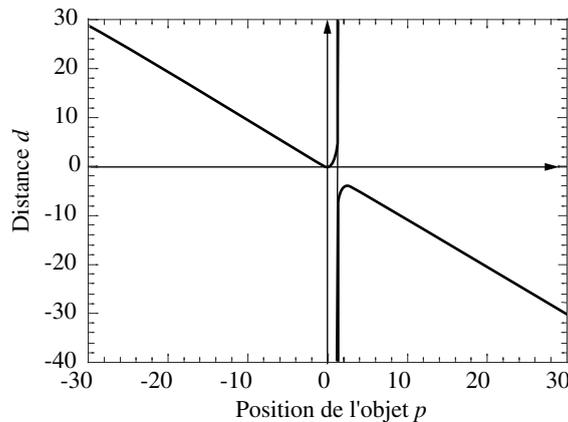
d) On place le film à $\overline{SB'} = 12,5$ cm de la lentille. p_1 et p_2 correspondent aux positions extrêmes de B' telles que $x < 0,02$ cm. Pour cela, il faut que l'écart entre la position de l'image et de la pellicule soit inférieur (en valeur absolue) à $\frac{x SB'}{r} = 0,1$ cm pour $x = 0,02$ cm. p' doit donc être compris entre 12,6 et 12,4 cm, ce qui correspond à $p_1 = -2,52$ m et $p_2 = -3,72$ m. La profondeur de champ est donc de 1,2 m.

- 6 a)** $d = \overline{AA'} = \overline{AS} + \overline{SA'} = p' - p$. La relation de conjugaison donne $d = -\frac{p^2}{p + f'}$. La dérivée de d en fonction de p s'écrit $-\frac{p(p + 2f')}{(p + f')^2}$ et s'annule pour $p = p' = 0$ ($d = 0$) et $p = -p' = -2f'$ et $p' = 2f'$ ($d = 4f'$). d passe donc par deux extrema. Dans le premier cas, l'objet est en S ; dans le deuxième cas, l'objet et son image sont symétriques par rapport à la lentille.

Pour déterminer la nature des extrema, on calcule la dérivée seconde de d en fonction de p . On trouve : $-\frac{2f'^2}{(p + f')^3}$. Elle est négative en $p = 0$, c'est alors un maximum ; elle est positive en $p = -2f'$ qui correspond à un minimum. La figure 7.24 présente la fonction $d(p)$ pour $f' = 1$ m. Elle a une asymptote verticale $p = -f'$.



Si la lentille est divergente, $f' < 0$ et la dérivée seconde est positive en $p = 0$ et négative en $p = -2f'$. $d(p)$ est donc maximum en 0, avec une asymptote verticale en $p = -f'$.



- b)** Pour placer l'image sur l'écran, elle doit être réelle ($p' > 0$). L'objet étant lui-même réel ($p < 0$), $d = p' - p > 0$. On ne s'intéresse donc qu'au demi-plan supérieur de la figure. Cela impose que $p < -f'$. Il y a alors deux solutions différentes dans le cas général (notées A et B), mais confondues (notée C) si p a la valeur particulière $p = -2f'$. On remarquera que d est toujours supérieur ou égal à $4f'$.

On peut retrouver ce résultat analytiquement : la relation de conjugaison donne $p^2 + dp + df' = 0$. Les solutions dépendent du signe du discriminant $\Delta = d^2 - 4df'$.

• **1^{er} cas** : le discriminant est positif et il y a deux solutions distinctes qui sont :

$$p = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4df'}}{2}.$$

La distance Δp entre les deux positions de l'objet pour lesquelles l'image est nette vaut : $\Delta p = \sqrt{d^2 - 4df'}$, soit $f' = \frac{d^2 - \Delta p^2}{4d}$. Ce sont les points A et B de la figure.

Si $d = 1,80$ m et $\Delta p = 1,20$ m, $f' = 25$ cm ; Les deux positions possibles de l'objet sont $p = -1,5$ m et $p' = 30$ cm ; $p = -30$ cm et $p' = 1,5$ m.

• **2^e cas** : le discriminant est nul et il y a une solution double qui est $p = \frac{-d}{2}$. C'est le point C de la figure 7.24.

Dans le cas d'une lentille divergente, le discriminant est toujours positif et il y a dans l'absolu deux solutions. Seule une solution satisfait à la condition $p < 0$ et $p' > 0$. On a alors

$$p = \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4df'}}{2}.$$

Si $d = 1,80$ m, on a alors $p = -2,022$ m et $p' = -0,222$ m.

c) Si $d = 1$ m et $f' = 0,1$ m, le discriminant vaut $0,77$ m. Il est positif et il a donc bien deux solutions possibles :

$$p_1 = -0,887 \text{ m et } p'_1 = 0,112 \text{ m ;}$$

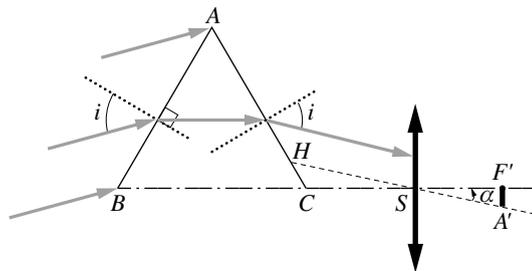
$$p_2 = -0,112 \text{ m et } p'_2 = 0,887 \text{ m .}$$

Les deux solutions sont possibles car objet et image sont réels.

7

a) Au minimum de déviation, $D = 2i - A$ et $r = r' = A/2$. Le prisme est équilatéral ($A = 60^\circ$). La relation de Snell-Descartes ($\sin i = \sqrt{2} \sin r$) donne $i = 45^\circ$ et $D_m = 30^\circ$.

b) Les rayons incidents sont parallèles ; A' est donc dans le plan focal image de la lentille. Dans le triangle $SF'A'$, $\tan \alpha = \frac{\overline{F'A'}}{f'}$. Dans le triangle CHS , $\pi/2 - i + \alpha + \pi - A = \pi$, soit $\alpha = i - 30^\circ = 15^\circ$. On trouve alors $\overline{F'A'} = 2,68$ cm.



c) Comme $D = 2i - A$, où A est constant, on a $dD = 2di$. Par ailleurs, $\sin i = n \sin r = n \sin A/2$. En différentiant, on trouve $\cos i di = dn \sin A/2$. Enfin, $d(\overline{F'A'}) = f' \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha$, avec $d\alpha = di$.

L'application numérique donne

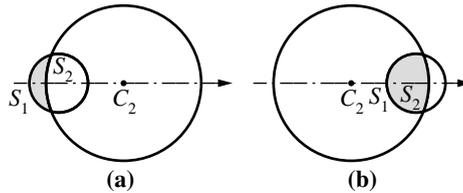
$$di = 7 \cdot 10^{-4} \text{ rd}, dD = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ rd et } d(\overline{F'A'}) = 7,6 \cdot 10^{-3} \text{ cm.}$$

- 8** Le grandissement transversal γ est donné par $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{p'}{p}$. Il est positif si l'image est droite, négatif si elle est renversée. Les deux valeurs possibles de γ sont donc ici $\gamma = \pm \frac{2}{10^{-2}} = \pm 200$. Objet et image étant réels, $\gamma < 0$.

• $\gamma = -200$.

$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$, on trouve $f' = -f = 4,97 \text{ cm}$. $f' > 0$; la lentille est donc convergente.

- 9 a)** Il n'y a que deux possibilités : soit r_1 et r_2 positifs (figure a), soit r_1 positif et r_2 négatif (figure b). On a alors soit $r_1 = \overline{S_1C_1} = 20 \text{ cm}$ et $r_2 = \overline{S_2C_2} = 50 \text{ cm}$, soit $r_1 = \overline{S_1C_1} = 20 \text{ cm}$ et $r_2 = \overline{S_2C_2} = -50 \text{ cm}$.



b) La vergence est donnée par : $\Phi = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$.

Dans le premier cas, $\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{0,2} - \frac{1}{0,5} \right) = 1,5 \delta$;

dans le deuxième cas, $\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,2} \right) = 3,5 \delta$. On a bien deux lentilles minces convergentes.

- 10 a)** On a $p' = 25 \text{ mm}$. Si $p \rightarrow \infty$, la relation de conjugaison $\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \phi$ donne $p' = f' = 25 \text{ mm}$. La vergence de l'œil est $\phi = \frac{n'}{f'} = 53,2 \delta$.

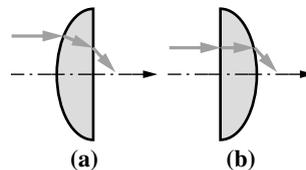
b) Si l'objet est à 25 cm de l'œil, $p = -25 \text{ cm}$. Cela donne $f' = 23,2 \text{ mm}$, soit $\phi = 57,2 \delta$.

- 11 a)** Les deux configurations possibles sont (voir tableau 7.1) :

Dans le cas (a), $r_1 = 2 \text{ cm}$ et $r_2 \rightarrow \infty$.

Dans le cas (b), $r_1 \rightarrow \infty$ et $r_2 = -2 \text{ cm}$.

b) Le rayon change deux fois de milieu : une première fois où il passe de l'eau vers le verre. Une deuxième fois, où il passe du verre à l'air. On doit donc écrire la formule de conjugaison à chaque traversée de dioptre.



Si l'objet A est situé en p_1 , l'image à travers la première face de la lentille est en p'_1 . Elle devient objet pour la deuxième face de la lentille et donne alors une image p'_2 , située en A' . On cherche donc la relation qui existe entre p_1 et p'_2 . La lentille étant mince, on peut supposer que les sommets des deux dioptries qui la constituent sont confondus. Les deux formules de conjugaison donnent :

$$\frac{n_1}{p'_1} - \frac{n_0}{p_1} = \frac{n_1 - n_0}{r_1} ; \quad \frac{1}{p'_2} - \frac{n_1}{p'_1} = \frac{1 - n_1}{r_2}$$

En les additionnant, on obtient bien une relation entre p_1 et p'_2 .

• Cas de la lentille de la figure a : $\frac{1}{p'_2} = \frac{n_0}{p_1} + \frac{n_1 - n_0}{r_1}$.

• Cas de la lentille de la figure b : $\frac{1}{p'_2} = \frac{n_0}{p_1} + \frac{1 - n_1}{r_2}$.

c) On a $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 = \frac{n_0 p'_1}{n_1 p_1} \frac{n_1 p'_2}{p'_1} = \frac{n_0 p'_2}{p_1}$. La distance focale objet f est obtenue pour $f = p_1$, $p'_2 \rightarrow \infty$ et la distance focale image f' est telle que $p_1 \rightarrow \infty$ et $f' = p'_2$. Elle est différente de f car les milieux extrêmes ne sont pas identiques.

• Cas de la lentille de la figure a : $f = -\frac{n_0 r_1}{n_1 - n_0} = -16 \text{ cm}$ et $f' = \frac{r_1}{n_1 - n_0} = 12 \text{ cm}$.

• Cas de la lentille de la figure b : $f = -\frac{n_0 r_2}{1 - n_1} = -5,33 \text{ cm}$ et $f' = \frac{r_2}{1 - n_1} = 4 \text{ cm}$.

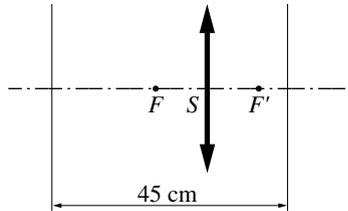
d) Pour que l'image et l'objet soient confondus, il faut que $p'_2 = p_1$.

• Cas de la lentille de la figure a : $p_1 = -4 \text{ cm}$ et $\gamma = 4/3$.

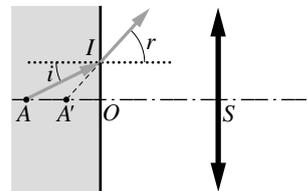
• Cas de la lentille de la figure b : $p_1 = -1,33 \text{ cm}$ et $\gamma = 4/3$.

12 $\gamma = p'/p = -0,5$. La distance D objet-image est $D = p' - p = 45 \text{ cm}$. Donc $p' = 15 \text{ cm}$ et $p = -30 \text{ cm}$.

Par ailleurs, la relation de conjugaison donne $f' = \frac{pp'}{p - p'} = \frac{2p'}{3} = 10 \text{ cm}$. La lentille est convergente.



13 a) Le rayon issu de A frappe le dioptre plan en I et se réfracte. Les angles d'incidence i et de réfraction r obéissent aux lois de Snell-Descartes qui s'écrivent, dans l'approximation des petits angles $n_i \approx r$. Par ailleurs, dans les triangles AIO et $A'IO$, on a respectivement :



$$\tan i \approx i = \frac{OI}{AO} \text{ et } \tan r \approx r = \frac{OI}{A'O}.$$

En réunissant les deux équations, on trouve $OA' = \frac{OA}{n}$.

b) Pour la lentille, l'objet A' est réel car il se situe à sa gauche.

c) A' et son image A'' à travers la lentille sont reliés par la relation de conjugaison, avec

$$p = \overline{SA'} = -\frac{d}{n} - e. \text{ On trouve pour } p', p' = \overline{S_2A''} = \frac{f' \left(\frac{d}{n} + e \right)}{\left(\frac{d}{n} + e \right) - f'}$$

14 Loupe

$$p' = \frac{f'p}{p+f'}, \gamma = \frac{p'}{p} = \frac{f'}{p+f'}, d = p' - f' = -\frac{f'^2}{p'+f'}, |\tan \theta'| = \frac{A'B'}{|d|} = \frac{AB}{|f'|}$$

$$p = -2 \text{ cm}, p' = -2,5 \text{ cm}, \gamma = 1,25, \overline{A'B'} = 1,25 \text{ cm}, d = -12,5 \text{ cm}, |\tan \theta'| = 0,1.$$

$$p = -5 \text{ cm}, p' = -10 \text{ cm}, \gamma = 2, \overline{A'B'} = 2 \text{ cm}, d = -20 \text{ cm}, |\tan \theta'| = 0,1.$$

θ' n'a pas changé. On remarque que si p tend vers f , γ augmente. L'observateur va donc placer AB au foyer F de façon à rejeter l'image $A'B'$ à l'infini.

Notons qu'il la verra toujours sous le même angle mais, comme l'image est très loin, l'œil ne sera pas obligé d'accommoder et l'observation de l'image se fera avec le moins d'efforts déployés par l'œil (si l'œil est normal) (voir chapitre 9).

15 Lentille plan-convexe

1) La première face peut être considérée comme un dioptré sphérique.

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r} \implies p' = \frac{n'pr}{nr + p(n' - n)} = 30 \text{ cm}$$

2) Un dioptré plan est un dioptré sphérique de rayon infini. La relation de conjugaison s'écrit alors

$$\begin{aligned} p'' = \overline{S'A''} &= \frac{n}{n'} \overline{S'A'} = \frac{n}{n'}(p' - e) = \frac{2}{3} \left(\frac{\frac{3}{2}pr}{r + p\left(\frac{3}{2} - 1\right)} - e \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{3pr}{2r + p} - e \right) \\ &= 18 \text{ cm} \end{aligned}$$

$\overline{S'F'} = f'$ est obtenue de l'expression précédente en prenant $p \rightarrow -\infty$ soit

$$f' = \frac{2}{3}(3r - e) = 8 \text{ cm}$$

16 Loupe

1) Lorsque l'image est à l'infini, l'objet est au foyer objet F . Alors $\overline{FA} = 0$.

Lorsque l'image est à 25 cm de l'œil, $\overline{F'A'} = -25$ cm, $p' = \overline{SA'} = \overline{SF'} + \overline{F'A'} = -23$ cm et $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$, soit $p = -1,84$ cm et $\overline{FA} = -0,16$ cm.

La profondeur de champ est de 0,16 cm.

2) À travers la loupe, l'observateur voit l'objet sous un angle $\theta' \approx \frac{AB}{f'}$.

On a donc $\Delta AB \approx f' \Delta \theta' = 6 \cdot 10^{-4}$ cm.

3) $G = \frac{1}{4f'} = 12,5$, où f' est exprimé en m.

17 Lentille achromatique

1) Pour $\lambda = 0,8$ μm , $n_{1r} = 1,51094$, pour $\lambda = 0,4$ μm , $n_{1b} = 1,52575$

$$\frac{1}{f'_{1b}} = \frac{n_{1b} - 1}{R_1} \implies R_1 = (n_{1b} - 1) f'_{1b} = 0,26287 \text{ m}$$

2) $f'_{1r} = 0,5145$ m. $\Delta f = 14,5$ mm.

3) Si on suppose la lentille résultante mince, on a $\Phi = \frac{n_1 - 1}{R_1} - \frac{n_2 - 1}{R_2}$.

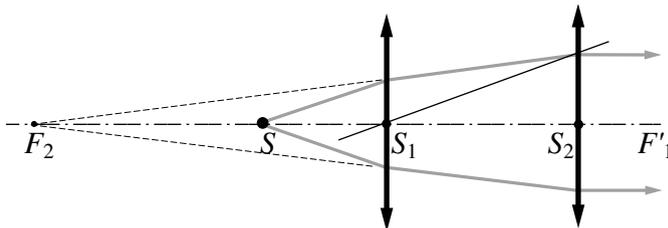
On prend la différentielle des 2 membres : $\Delta \Phi = \frac{\Delta n_1}{R_1} - \frac{\Delta n_2}{R_2}$.

Le doublet est achromatique si $\Delta \Phi = 0$. Ici, $\Delta n_1 = 0,0148$ et $\Delta n_2 = 0,035$. On en tire $R_2 = 0,62165$ m. On a alors $\phi = \frac{1}{f'_{1b}} + \frac{1}{f'_{2b}} = \frac{1}{f'_{1r}} + \frac{1}{f'_{2r}} = \frac{1}{f'}$ et $f' = 1,23$ m.

18 Deux lentilles

$f'_1 = 0,1$ m, $p_1 = -6$ cm, $p'_1 = -15$ cm (image virtuelle)

Si le rayon émergent est parallèle à l'axe, l'image est au foyer F_2 . On a donc $\overline{S_2A'_1} = \overline{S_2F_2}$. Si la deuxième lentille est au foyer F'_1 de la première, $\overline{S_1S_2} = \overline{S_1F'_1} = 0,1$ m et $\overline{S_2A'_1} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A'_1} = -0,25$ m. On a donc $f'_2 = 25$ cm.



CHAPITRE 8

LES COMBINAISONS OU ASSOCIATIONS

Pré-requis

Il est important d'avoir assimilé les chapitres 5, 6 et 7, consacrés aux dioptries sphériques, aux miroirs sphériques et aux lentilles minces.

Objectif

Dans ce chapitre, nous traitons du problème le plus important de l'optique géométrique qui est la combinaison d'éléments simples. Nous étudions d'abord les doublets, c'est-à-dire les associations (on dit encore combinaisons) de deux éléments simples, et les illustrons avec quelques exemples ; nous montrons ensuite comment généraliser la démarche à un nombre plus important de systèmes optiques. On définira en particulier le vocabulaire des associations en introduisant les éléments cardinaux.

1. INTRODUCTION

Nous avons présenté dans les chapitres précédents plusieurs systèmes simples (les dioptries sphériques, les miroirs sphériques et les lentilles minces) où les positions d'un objet A et de son image sont liées par une relation de conjugaison, la relation de Descartes, dont la formulation s'est avérée universelle quel que soit l'élément étudié. Les instruments (oculaires, objectifs, lunettes...) combinent ces éléments simples et, dans ce chapitre, nous proposons de les étudier en établissant des relations universelles. Nous illustrerons ces résultats au chapitre 10 en étudiant des instruments familiers (oculaires, microscopes, téléobjectifs...).

Considérons un système de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 de distances focales respectives $f'_1 = 30$ cm et $f'_2 = 15$ cm, séparées d'une distance $e = 20$ cm.

Les deux rayons incidents (1) et (2), parallèles à l'axe principal, convergent à travers L_1 vers F'_1 .

Avant de traverser l'axe optique en F'_1 , ils rencontrent la lentille L_2 qui les dévie comme le montre la figure 8.1. Ils se croisent sur l'axe optique en un point que nous noterons

F' . F' n'est autre que l'image d'un objet situé à l'infini à travers un système optique composé de deux lentilles convergentes ($L_1 + L_2$).

La position de F' peut être calculée en appliquant successivement la relation de conjugaison des lentilles minces à L_1 puis L_2 .

Pour un objet à l'infini, $p_1 = -\infty$ et on a $p'_1 = \overline{S_1 A_1} = \overline{S_1 F'_1}$. F'_1 est donc l'objet dont on cherche l'image à travers la lentille L_2 . On peut donc écrire :

$$\frac{1}{\overline{S_2 A'_2}} - \frac{1}{\overline{S_2 F'_1}} = \frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f'_2},$$

$$\text{soit, avec } p_2 = \overline{S_2 F'_1} = \overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 F'_1} = f'_1 - e. \quad p'_2 = \overline{S_2 A'_2} = \overline{S_2 F'} = \frac{f'_2(f'_1 - e)}{f'_1 - e + f'_2}.$$

On a ainsi la position du foyer image du système par rapport au sommet de la lentille L_2 .

On pourrait de la même façon calculer la position du foyer objet du système par rapport à S_1 en considérant deux rayons sortant parallèles à l'axe principal. Nous verrons cependant par la suite que ni S_1 , ni S_2 ne fournissent une position d'origine adéquate pour retrouver les formules de conjugaison universelles.

Nous venons de montrer que, dans l'étude d'un doublet, il existait une difficulté provenant du fait que les relations de conjugaison utilisaient des distances repérées par rapport à des origines différentes, les sommets S_1 et S_2 des deux éléments. Une résolution graphique permet de résoudre ce problème et de déterminer la position de l'image de A à travers le système, mais cette méthode est très lourde. Nous ne disposons pas à ce stade de relation de conjugaison assez simple permettant de caractériser le doublet en définissant par exemple ses distances focales. Pour cela, il est nécessaire de revenir à une formulation universelle des relations de conjugaison qui nous ramènent à celles établies dans le cas des systèmes simples.

2. FORMULES UNIVERSELLES

Revenons donc sur les systèmes simples étudiés dans les chapitres précédents. Les positions des points conjugués sont liées par la relation de conjugaison. Celle-ci se met sous une forme unique, indépendante de l'élément étudié, à condition de l'exprimer en fonction de f et f' . C'est en ce sens que l'on parle de relation universelle. En effet, les systèmes simples vérifient la relation de Descartes et la relation de Newton :

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1 \quad \text{et} \quad (p - f)(p' - f') = \sigma\sigma' = ff'$$

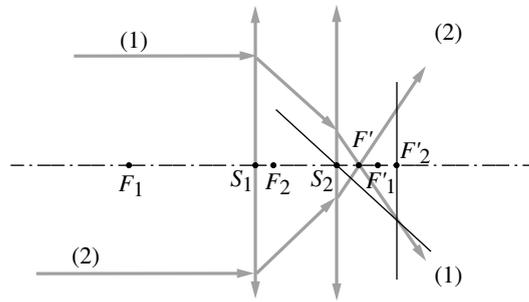


Figure 8.1 • Cheminement d'un faisceau de rayons parallèles à l'axe à travers une association de deux lentilles convergentes.

Compte tenu de ces relations, le grandissement transversal γ , qui est toujours donné par la relation générale $\gamma = -\frac{p'f}{pf'}$, s'écrit aussi :

$$\gamma = -\frac{f}{f'} \frac{\sigma' + f'}{\sigma + f} = -\frac{f}{f'} \frac{\sigma' + f'}{\frac{ff'}{\sigma'} + f} = -\frac{\sigma'}{f'} = -\frac{f}{\sigma}$$

Enfin, le grandissement longitudinal g s'écrit en différenciant la relation de Descartes :

$$g = \frac{dp'}{dp} = -\left(\frac{p'}{p}\right)^2 \frac{f}{f'} = -\gamma^2 \frac{f'}{f}$$

Nous pouvons remarquer que, pour un élément vérifiant la relation de Newton, le grandissement γ permet de définir les distances focales ; cette propriété sera exploitée par la suite afin de définir les distances focales d'un doublet.

3. MISE EN ÉQUATION D'UN DOUBLET QUELCONQUE

Considérons deux éléments optiques quelconques (dont il n'est pas nécessaire de préciser la nature) de sommets respectifs S_1 et S_2 , séparés d'une distance e . Ces sommets sont alignés de sorte que leurs axes principaux soient confondus, constituant ainsi l'axe principal d'un système centré.

D'un point objet A situé sur l'axe, on obtient une image A'' à travers le premier élément de sommet S_1 , puis une nouvelle image A' à travers l'élément de sommet S_2 . Les différentes distances utilisées sont définies sur la figure 8.2. Les relations de conjugaison écrites pour chacun des éléments du doublet sont :

$$\frac{f'_1}{p'_1} + \frac{f_1}{p_1} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{f'_2}{p'_2} + \frac{f_2}{p_2} = 1$$

ce qui donne :

$$p'_1 = \frac{p_1 f'_1}{p_1 - f_1} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{p'_2 f_2}{p'_2 - f'_2} \quad (1)$$

Or, p'_1 et p_2 sont reliés à la distance définie par $e = \overline{S_1 S_2} = \overline{S_1 A''} + \overline{A'' S_2} = p'_1 - p_2$.

Si l'on injecte les deux expressions précédentes dans celle de e , on peut écrire :

$$p_1 p'_2 (e - f'_1 + f_2) + p_1 f'_2 (f'_1 - e) - p'_2 f_1 (f_2 + e) + e f_1 f'_2 = 0$$

On peut par exemple en tirer l'expression de p_1 en fonction de p'_2 :

$$p_1 = \frac{p'_2 f_1 (f_2 + e) - e f_1 f'_2}{p'_2 (e - f'_1 + f_2) + f'_2 (f'_1 - e)} \quad (2)$$

Cette expression qui relie les positions d'un objet et de son image à travers le doublet est donc une relation de conjugaison. Bien qu'elle soit compliquée, nous allons voir qu'elle permet néanmoins de déterminer la position des foyers du doublet par rapport aux sommets S_1 et S_2 .

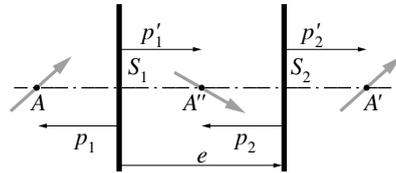


Figure 8.2 • Système optique centré contenant deux éléments de sommets S_1 et S_2 .

4. Foyers d'un doublet

Le foyer image F' correspond à un objet situé à l'infini, c'est-à-dire $p_1 \rightarrow \infty$ et $p'_2 = \overline{S_2 F'}$. Cette condition est réalisée quand le dénominateur de (2) est nul ce qui donne :

$$\overline{S_2 F'} = \frac{f'_2(e - f'_1)}{e - f'_1 + f_2}$$

Inversement, le foyer objet F correspond à une image rejetée à l'infini, soit $p'_2 \rightarrow \infty$ et $p_1 = \overline{S_1 F}$. Dans la relation (2), on écrit le rapport des termes de plus haut degré en p'_2 , ce qui donne :

$$\overline{S_1 F} = \frac{f_1(f_2 + e)}{e - f'_1 + f_2}$$

La quantité $\Delta = e - f'_1 + f_2$ apparaissant au dénominateur des deux expressions précédentes a une signification géométrique importante car elle s'écrit :

$$\Delta = \overline{S_1 S_2} - \overline{S_1 F'_1} + \overline{S_2 F_2} = \overline{F'_1 F_2}$$

C'est donc la distance algébrique qui sépare F'_1 , le foyer image du premier élément, de F_2 , le foyer objet du deuxième élément. On l'appelle l'**intervalle optique du doublet** (souvent appelé improprement l'interstice) ; elle peut être positive ou négative, voire nulle suivant la configuration étudiée. Dans le cas particulier $\Delta = 0$, le foyer image du premier élément, F'_1 , est confondu avec le foyer objet du deuxième, F_2 . Par ailleurs, $\overline{S_2 F'}$ et $\overline{S_1 F}$ tendant vers l'infini, les deux foyers F et F' du doublet sont rejetés à l'infini, constituant un système **afocal**. Nous verrons dans le chapitre 10 qu'une configuration afocale représente la situation naturelle du réglage d'une paire de jumelles ou d'une lunette astronomique.

Toute combinaison de deux éléments optiques possède un foyer objet F et un foyer image F' . On les appelle les foyers résultants.

$\Delta = \overline{F'_1 F_2} = e - f'_1 + f_2$ est appelé l'intervalle optique du doublet.

Si le foyer image du premier élément est confondu avec le foyer objet du deuxième, ($\Delta = 0$), F et F' sont rejetés à l'infini, le doublet est dit afocal.

5. RELATION DE NEWTON

Nous avons positionné les deux foyers du doublet par rapport aux sommets S_1 et S_2 et nous allons en simplifier la formulation par un changement d'origine. C'est d'ailleurs ainsi que l'on a établi pour un élément simple la relation de Newton ; nous allons adopter ici la même démarche. Posons $\sigma = \overline{FA}$ et $\sigma' = \overline{F'A'}$ (figure 8.3).

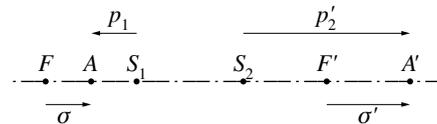


Figure 8.3 • Définition des quantités σ et σ' qui permettent de repérer un objet et son image par rapport aux foyers F et F' .

Ainsi, on peut écrire :

$$p_1 = \overline{S_1 A} = \overline{S_1 F} + \overline{F A} = \frac{f_1(f_2 + e)}{\Delta} + \sigma$$

$$p'_2 = \overline{S_2 A'} = \overline{S_2 F'} + \overline{F' A'} = \frac{f'_2(e - f'_1)}{\Delta} + \sigma'$$
(3)

Si l'on reporte ces expressions dans la relation de conjugaison (2), on obtient, après simplification, la formule de Newton du doublet :

Pour un doublet, la formule de Newton s'écrit : $\sigma \sigma' = \overline{F A} \cdot \overline{F' A'} = -\frac{f_1 f_2 f'_1 f'_2}{\Delta^2}$.

6. DISTANCES FOCALES D'UN DOUBLET

À ce stade, nous avons démontré l'existence des deux foyers et écrit une relation analogue à celle de Newton. Il reste maintenant à définir correctement et à écrire explicitement les deux distances focales du doublet. Nous avons rappelé dans le paragraphe 2 que le grandissement transversal γ d'un élément simple était donné par :

$$\gamma = -\frac{p' f}{p f'} = -\frac{f}{\sigma} = -\frac{\sigma'}{f'}$$

Pour un doublet, le grandissement γ s'écrit donc, en utilisant les relations (1) :

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 = \frac{p'_1 f_1}{p_1 f'_1} \frac{p'_2 f_2}{p_2 f'_2} = \frac{f_1}{f_2} \frac{p'_2 - f'_2}{p_1 - f_1}$$

Si l'on remplace p'_2 et p_1 par leurs expressions en fonction de σ et σ' (relations (3)), on obtient une expression très simple pour γ :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{f_1}{f_2} \frac{\frac{f'_2(e - f'_1)}{\Delta} + \sigma' - f'_2}{\frac{f_1(f_2 + e)}{\Delta} + \sigma - f_1} = \frac{f_1}{f_2} \frac{\Delta \sigma' - f_2 f'_2}{\Delta \sigma + f_1 f'_1} \\ &= \frac{f_1}{f_2} \frac{\Delta \sigma' - f_2 f'_2}{-\frac{f_1 f_2 f'_1 f'_2}{\Delta \sigma'} + f_1 f'_1} = \frac{\Delta \sigma'}{f'_1 f'_2} = -\frac{f_1 f_2}{\Delta \sigma} \end{aligned}$$

Si l'on compare la formule du grandissement transversal d'un élément simple avec celle du doublet, on est naturellement amené à définir les distances focales du doublet par :

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \quad \text{et} \quad f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}$$

La relation de Newton et le grandissement s'écrivent alors pour le doublet sous la forme universelle du paragraphe 2 :

$$\sigma \sigma' = f f' \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{\sigma'}{f'} = -\frac{f}{\sigma}$$

Les expressions des distances focales objet et image montrent que les signes de f ou de f' dépendent de la vergence des deux éléments associés et des positions relatives de F'_1 et de F_2 par l'intermédiaire de l'intervalle optique Δ . Par exemple, une association de deux lentilles convergentes est convergente si $\Delta < 0$ et divergente si $\Delta > 0$.

Si l'on étudie le trajet d'un rayon incident parallèle à l'axe optique, on peut déterminer sa progression à travers le doublet. La figure 8.4 rappelle une définition du caractère de convergence d'une lentille qui permet de définir tout naturellement celui d'un système. Le résultat essentiel est la position du rayon sortant par rapport à celle du rayon incident. Si le rayon sortant coupe l'axe et sort dans le demi-plan opposé à celui du rayon incident, le système est convergent ; s'il sort du même côté par rapport au demi-plan, il est divergent.

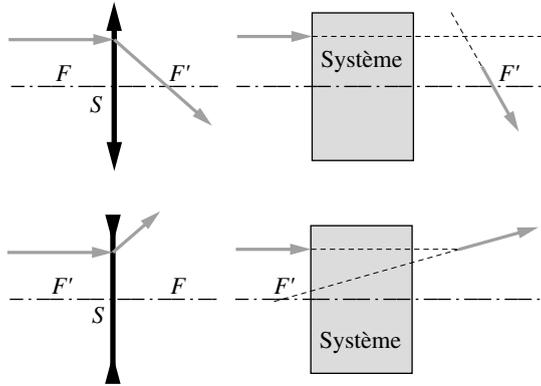


Figure 8.4 • Critères de convergence d'un système.

Un doublet est caractérisé par ses deux distances focales : $f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}$ et $f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}$ qui vérifient la relation de Newton : $\sigma \sigma' = f f'$.

Son grandissement transversal s'écrit : $\gamma = -\frac{\sigma'}{f'} = -\frac{f}{\sigma}$.

Il est souvent commode de placer les foyers F et F' du système par rapport à ceux des éléments séparés. On utilise pour cela la relation de Newton, en considérant deux rayons particuliers tels que ceux représentés sur la figure 8.5 qui présente un doublet de deux éléments convergents :

- Le rayon incident (1), parallèle à l'axe, passe par le foyer image F'_1 , mais aussi par définition par le foyer image de l'association F' . F' et F'_1 sont donc conjugués à travers le deuxième élément pour lequel la relation de Newton donne :

$$\overline{F'_2 F'} \cdot \overline{F_2 F'_1} = f'_2 f_2 \quad \text{soit} \quad \overline{F'_2 F'} = -\frac{f'_2 f_2}{\Delta}$$

- Le rayon (2') sort parallèle à l'axe : il est issu du foyer F_2 , mais aussi du foyer objet F de l'association, points conjugués à travers le premier élément. On peut écrire :

$$\overline{F_1 F} \cdot \overline{F'_1 F_2} = f'_1 f_1, \quad \text{soit} \quad \overline{F_1 F} = \frac{f'_1 f_1}{\Delta}$$

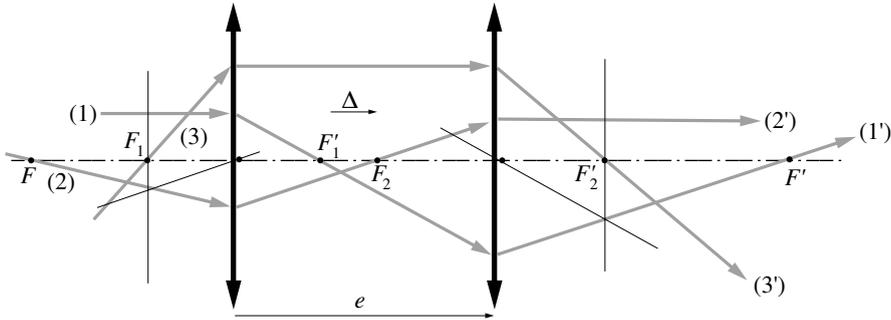


Figure 8.5 • Évolution de trois rayons particuliers dans un doublet composé de deux éléments convergents.

Ces deux relations permettent de placer F et F' par rapport à F_1 et F'_2 . On aurait pu les établir à partir de relations établies au paragraphe 4 qui donnent la position des foyers F et F' par rapport aux sommets des éléments qui composent le doublet. En effet, on a :

$$\overline{F'_2 F'} = \overline{F'_2 S_2} + \overline{S_2 F'} = -f'_2 + \overline{S_2 F'} \quad \text{et} \quad \overline{F_1 F} = \overline{F_1 S_1} + \overline{S_1 F} = -f_1 + \overline{S_1 F}$$

On remarquera alors pour terminer qu'un troisième rayon (3) passant par le foyer objet F_1 ressort du premier élément parallèle et émerge du deuxième en passant par son foyer image F'_2 . Ces deux points sont également conjugués à travers l'association et l'on peut écrire :

$$\overline{F' F'_2} \cdot \overline{F F_1} = ff'$$

7. POINTS PRINCIPAUX H ET H' ET RELATION DE DESCARTES

Si le fait de prendre les origines aux foyers nous a permis d'écrire la relation de Newton et de définir des distances focales, nous n'avons pas trouvé d'origine propre au doublet permettant de matérialiser ces distances focales en termes de foyers. Nous proposons donc de rechercher cette nouvelle origine, validant ainsi la relation de Descartes pour un doublet. Pour cela, considérons les deux points uniques conjugués H et H' tels que leur grandissement γ soit égal à 1 :

$$\gamma = -\frac{\sigma'}{f'} = -\frac{\sigma}{f} = 1 \quad \text{d'où} \quad \overline{HF} = -\sigma = f \quad \text{et} \quad \overline{H'F'} = -\sigma' = f'$$

Ces deux points sont par définition placés exactement à une distance focale des foyers (figure 8.6), ce qui permet de donner une signification géométrique aux distances focales. De plus, si l'on choisit respectivement H et H' comme origines d'un objet et de son image, on a :

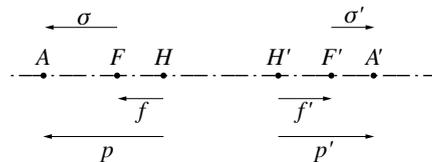


Figure 8.6 • Définition des origines par rapport aux points principaux.

$$\sigma = \overline{FA} = \overline{FH} + \overline{HA} = -f + p \quad \text{et} \quad \sigma' = \overline{F'A'} = \overline{F'H'} + \overline{H'A'} = -f' + p'$$

On peut donc écrire :

$$\sigma\sigma' = ff' = (p - f)(p' - f') \text{ d'où } pf' + p'f = pp' \text{ soit : } \frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$$

qui est la formule de Descartes. L'encart 8.1 montre la nécessité du choix d'origine en H et H' caractérisés par un grandissement égal à 1. On les appelle les points principaux ; les plans principaux sont les plans passant par ces points, perpendiculaires à l'axe principal.

Encart 8.1. Nécessité du choix des points principaux pour écrire la relation de Descartes

Considérons deux points conjugués M et M' et choisissons-les comme origines pour la définition de p, p', f et f' . On a alors :

$$\sigma = \overline{FA} = \overline{FM} + \overline{MA} = \overline{FM} + p \text{ et } \sigma' = \overline{F'A'} = \overline{F'M'} + \overline{M'A'} = \overline{F'M'} + p'$$

Si l'on pose : $\overline{MF} = \alpha$ et $\overline{M'F'} = \alpha'$, on trouve :

$$\sigma\sigma' = (p' - \alpha')(p - \alpha) = pp' - p\alpha' - p'\alpha + \alpha\alpha' = ff'$$

Les deux points M et M' étant quelconques, mais conjugués, on peut choisir un point particulier M tel que $p = 0$, ce qui entraîne $p' = 0$ (un autre choix compliquerait le calcul). On obtient alors, en reportant dans l'expression précédente : $ff' = \alpha\alpha'$, ce qui amène :

$$pp' = p\alpha' + p'\alpha \text{ qui s'écrit aussi : } \frac{\alpha'}{p'} + \frac{\alpha}{p} = 1$$

Cette relation reste valable quel que soit le point M choisi. Pour que ce soit la relation de Descartes, il faut que $\alpha = f$ et $\alpha' = f'$. Comme $f = \overline{HF}$ et $f' = \overline{H'F'}$, on a bien $M \equiv H$ et $M' \equiv H'$. Alors, on a :

$$\gamma = -\frac{f}{\sigma} = -\frac{f}{p - f} = 1$$

Les points H et H' sont bien les seuls satisfaisant à la relation de Descartes et sont caractérisés par un grandissement égal à 1.

Un doublet possède deux plans conjugués passant par H et H' tels que le grandissement γ soit égal à 1.

Si l'on repère les foyers objet F et image F' par rapport aux points H et H' , les quantités algébriques correspondantes sont les distances focales : $\overline{HF} = f$ et $\overline{H'F'} = f'$.

Les deux distances $p = \overline{HA}$ et $p' = \overline{H'A'}$ satisfont la relation de Descartes :

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1 \text{ ou } \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} + \frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} = 1$$

Les quatre éléments H, H', F et F' constituent les éléments cardinaux du doublet.

Nous pouvons construire les points et les plans principaux à partir de leur définition donnée ci-dessus. La figure 8.7 est une construction de principe. On y suppose connues la nature des éléments simples et la position des foyers F et F' .

Considérons deux rayons particuliers :

- un rayon (1) incident parallèle à l'axe ressort du système en passant par le foyer image F' (rayon (1')) ;
- un rayon incident (2) passant par le foyer objet F du doublet ressort parallèlement à l'axe (rayon (2')).

On a choisi ces deux rayons de telle façon que les rayons (1) et (2') soient à la même distance de l'axe principal. Soient C et C' les deux points où les rayons incidents (1) et (2) d'une part et (1') et (2') d'autre part se coupent. Par construction C' est l'image de C à travers le système et C et C' sont deux points conjugués. Ils se projettent sur l'axe principal en deux points H et H' . Si l'on considère que HC est un objet, $H'C'$ est son image, par construction de même taille. H et H' sont donc les points principaux du doublet. La figure 8.8b donne la construction les points principaux et des plans correspondants pour un système divergent.

Dans l'encart 8.2, la comparaison entre une association convergente et une lentille convergente permet de donner une signification concrète aux plans principaux.

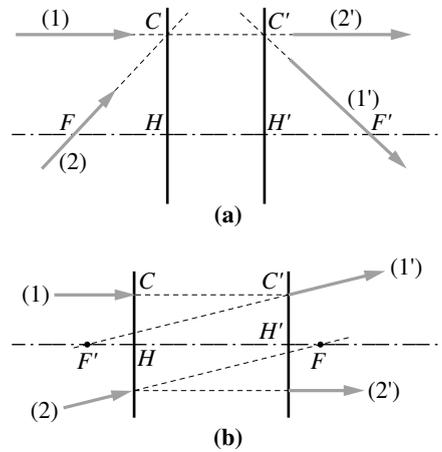


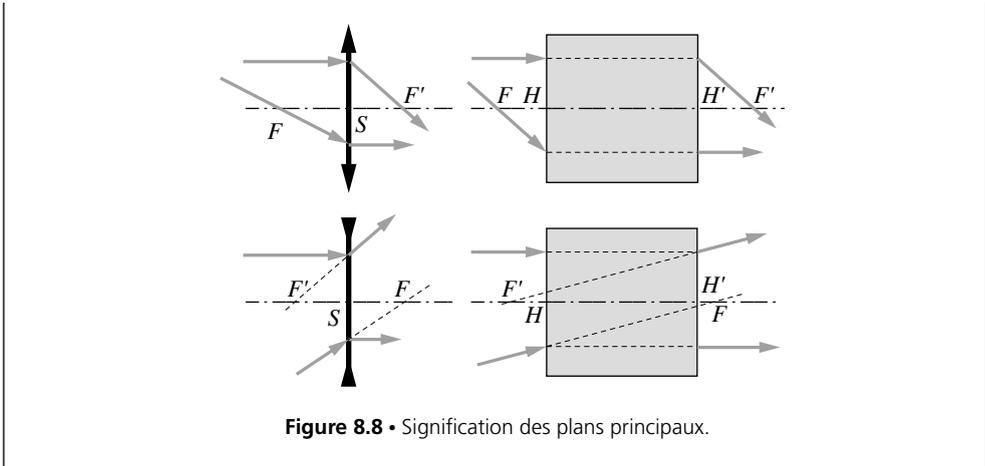
Figure 8.7 • Construction des points et plans principaux dans un système convergent (a) et divergent (b). Le point C' est situé à la même hauteur que C au-dessus de l'axe du système.

L'objet HC a pour image $H'C'$, et il est caractérisé par un grandissement égal à 1.

Encart 8.2. Signification des plans principaux : comparaison avec une lentille mince

Si l'on compare le trajet d'un rayon lumineux à travers un système réduit à ses éléments cardinaux et celui obtenu à travers une lentille mince de même vergence, on remarque qu'il peut exister une analogie entre les plans principaux et les faces de la lentille mince. Dans les deux cas représentés sur la figure 8.8, le rayon parallèle change de direction dans le plan H' comme si celui-ci était la face de sortie de la lentille. Inversement, le rayon passant par F devient parallèle dans le plan H comme si celui-ci était la face d'entrée de la lentille. Si H et H' sont pratiquement confondus, le système est, au niveau des constructions, équivalent à une lentille mince de sommet S de même vergence mais les foyers ne sont généralement pas symétriques. H et H' peuvent être considérés comme confondus si $HH' \ll H'F'$.

Nous verrons au chapitre 9 que l'œil humain est un exemple de système optique à plans principaux confondus, ce qui permettra de le réduire à une lentille mince unique.



8. RAPPORT DES DISTANCES FOCALES

Les chapitres précédents ont montré que les distances focales d'un élément simple vérifiaient $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$. Considérons par exemple une association constituée de deux éléments séparant trois milieux successifs d'indices respectivement égaux à n , n_0 et n' . On peut écrire :

$$\frac{f'}{f} = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} \frac{\Delta}{f_1 f_2} = -\frac{f'_1}{f_1} \frac{f'_2}{f_2} = -\frac{n'}{n_0} \frac{n_0}{n} = -\frac{n'}{n}$$

Le milieu intermédiaire, d'indice n_0 , n'intervient donc pas dans le rapport des distances focales de l'association. Plaçons-nous dans le cas général d'un système formé de plusieurs éléments séparant des milieux d'indices n, n_1, n_2, \dots, n' . Ce résultat peut se généraliser, ce qui conduit à :

Dans un système centré, constitué de l'association d'éléments optiques simples, le rapport des distances focales résultantes f' et f est égal au rapport des indices n' et n des milieux extrêmes :

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

Cas particulier fréquent : $n' = n$ (milieux extrêmes identiques) alors $f' = -f$.

9. VERGENCE D'UNE ASSOCIATION : LA FORMULE DE GULLSTRAND

Une autre formulation de la distance focale et de la vergence a été proposée par le médecin suédois Gullstrand. Considérons une association constituée de deux éléments séparant trois milieux d'indices n, n_0 et n' . Lorsqu'un système sépare deux milieux d'in-

dices n_i et n_{i+1} , sa vergence s'écrit : $\Phi_i = \frac{n_{i+1}}{f'_i} = -\frac{n_i}{f_i}$. Par ailleurs nous avons montré dans le paragraphe précédent que $\frac{n'}{n} = -\frac{f'}{f}$ où f et f' sont respectivement les distances focales objet et image de l'association. On peut donc de la même façon définir sa vergence en écrivant $\Phi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$. Compte tenu des définitions de f et f' données au paragraphe 7, on a :

$$\Phi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n'\Delta}{f'_1 f'_2} = -\frac{n'(e - f'_1 + f_2)}{f'_1 f'_2} = -\frac{n'e}{f'_1 f'_2} + \frac{n'}{f'_2} - \frac{n'f_2}{f'_1 f'_2} = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{e\Phi_1\Phi_2}{n_0}$$

Cette relation qui s'appelle la « **formule de Gullstrand** » peut s'appliquer à toute association. Elle consiste à utiliser les vergences des dioptries au lieu des distances focales. On retrouve bien le fait que, dans le cas de lentilles minces accolées ($e = 0$), $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

La vergence d'une association d'éléments simples de vergences Φ_1 et Φ_2 séparés d'une distance e est donnée par la formule de Gullstrand :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{e\Phi_1\Phi_2}{n_0}$$

où n_0 est l'indice du milieu intermédiaire.

10. CONSTRUCTION D'IMAGES ET GRANDISSEMENT

Il est possible de construire l'image d'un objet AB en utilisant des rayons particuliers dont on cherche les rayons conjugués. Une façon simple de procéder consiste à utiliser les éléments cardinaux. La figure 8.9 en illustre un exemple.

Comment calculer les positions des éléments cardinaux F , F' , H et H' . Pour étudier une association, la procédure générale est la suivante :

– on place les deux foyers F et F' : deux méthodes sont possibles.

- la première consiste à les positionner par rapport aux sommets S_1 et S_2 en calculant les distances $\overline{S_1 F} = \frac{f_1(f_2 + e)}{e - f'_1 + f_2}$ et $\overline{S_2 F'} = \frac{f'_2(e - f'_1)}{e - f'_1 + f_2}$ (voir paragraphe 5) ;

- la deuxième consiste à utiliser le fait que F' et F'_1 d'une part, F_2 et F d'autre part sont des points conjugués reliés par la relation de Newton, ce qui permet de placer F' par rapport à F'_1 et F par rapport à F_2 (voir paragraphe 7). On a alors :

$$\overline{F_2 F'} = -\frac{f'_2 f_2}{\Delta} \quad \text{et} \quad \overline{F_1 F} = \frac{f'_1 f_1}{\Delta}$$

– on calcule les distances focales f et f' à partir des relations $f = \overline{HF} = \frac{f_1 f_2}{\Delta}$ et $f' = \overline{H'F'} = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}$, donnant ainsi la position des deux points principaux H et H' .

On peut aussi trouver ces positions par la méthode de construction décrite au paragraphe 8.

- Le rayon (1) parallèle à l'axe coupe le plan principal objet en C . Le grandissement étant égal à 1 dans les plans principaux, le rayon émergent (1') passe par F' et par le point C' situé dans le plan principal image à la même hauteur que C .

- Le rayon (2) passe par le foyer objet F et coupe le plan principal objet en D . Ce dernier point a pour image le point D' situé dans le plan principal image à la même hauteur que D .

Le rayon incident passant par F , le rayon émergent (2') est parallèle à l'axe et passe par D et D' . B' , l'image de B , se trouve à l'intersection des rayons émergents (1') et (2').

Il est important de remarquer que la construction à l'aide des seuls points cardinaux ne permet pas de savoir si l'image B' est réelle ou virtuelle : en effet, comme dans le cas des éléments simples, la nature de l'image finale dépend de sa position par rapport aux éléments optiques. Elle est réelle si elle est située après le dernier élément, virtuelle dans le cas contraire.

Nous proposons dans l'encart 8.3 quelques constructions qui doivent permettre au lecteur de comprendre la démarche à suivre. D'autres exemples sont donnés dans le chapitre « Constructions » en fin d'ouvrage.

Encart 8.3. Exemples de constructions d'images

Dans les deux constructions présentées ici (figures 8.10), on utilise deux rayons particuliers :

- le rayon incident BC (ou son prolongement) parallèle à l'axe ressort sur la droite $C'F'$. C' est dans le plan H' , à la même hauteur que C ;
- le rayon incident BF (ou son prolongement) sort parallèlement à l'axe et coupe le plan principal objet en D .

Le système est convergent si $\overline{H'F'} > 0$ (F' est à droite de H').

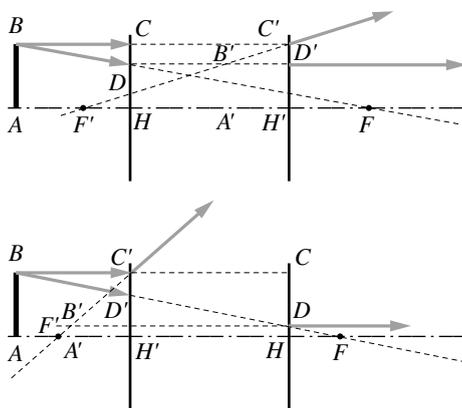


Figure 8.10 • Exemples de constructions.

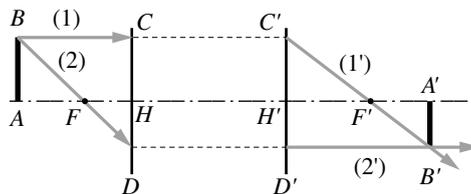


Figure 8.9 • Construction de l'image de l'objet AB en utilisant les éléments cardinaux.

En partant de la relation de Descartes, $\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$, et en tenant compte du rapport des distances focales on peut écrire :

$$1 + \frac{p'f}{f'p} = \frac{p'}{f'} \quad \text{d'où} \quad 1 - \frac{p'}{f'} = -\frac{p'f}{pf'} = \frac{np'}{n'p} = \gamma$$

Le grandissement transversal d'une association s'exprime bien selon la formulation universelle rappelée au paragraphe 2.

Le choix de l'origine aux plans principaux H et H' permet d'écrire le grandissement γ d'une association comme :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n\overline{H'A'}}{n'\overline{HA}} = \frac{np'}{n'p} \quad \text{si } n = n' \quad \gamma = \frac{p'}{p}$$

11. APPLICATION

11.1. Association de lentilles minces

Considérons la combinaison de deux lentilles minces dans laquelle les milieux extrêmes sont identiques. Nous savons que les distances focales f et f' de l'association sont dans ce cas égales et opposées. C'est évidemment aussi la même chose pour les deux lentilles minces qui composent le doublet. On a donc :

$$f = -f', \quad f'_1 = -f_1 \quad \text{et} \quad f'_2 = -f_2$$

Nous allons traiter successivement le cas de deux associations.

• Exemple 1

Soient deux lentilles convergentes de distances focales 25 et 33 cm placées à 1 m l'une de l'autre (figure 8.11). On a $e = 100$ cm, $f'_1 = -f_1 = 25$ cm, $f'_2 = -f_2 = 33$ cm, $\Delta = e - f'_1 + f_2 = 42$ cm.

On calcule la position des foyers avec les formules :

$$\overline{F'_2F'} = -\frac{f_2f'_2}{\Delta} = 25,9 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \overline{F_1F} = \frac{f_1f'_1}{\Delta} = -14,9 \text{ cm}$$

Les points H et H' sont tels que :

$$\overline{H'F'} = f' = -\overline{HF} = -\frac{f'_1f'_2}{\Delta} = -19,6 \text{ cm} = -f$$

Le doublet est **divergent** car $f' < 0$, on peut aussi s'en convaincre en considérant la marche du rayon incident parallèle à l'axe principal. Les différents éléments sont placés sur la figure 8.11 ; des rayons incidents et sortants parallèlement à l'axe permettent de retrouver par construction les positions de H , H' , F et F' .

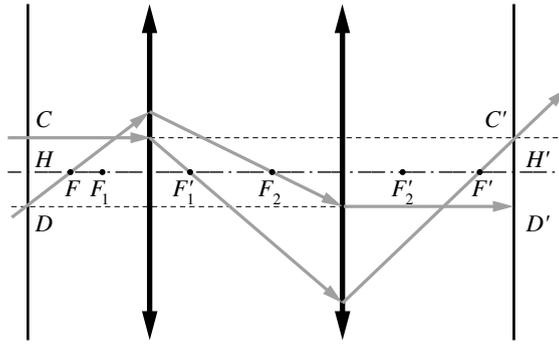


Figure 8.11 • Association de deux lentilles minces convergentes.

• Exemple 2

Soit une lentille convergente ($f'_1 = 25 \text{ cm}$) et une lentille divergente ($f'_2 = -33 \text{ cm}$) placées à 1 m l'une de l'autre (figure 8.12). On a $e = 100 \text{ cm}$, $f'_1 = -f_1 = 25 \text{ cm}$, $f'_2 = -f_2 = -33 \text{ cm}$, $\Delta = e - f'_1 + f_2 = 108 \text{ cm}$.

On trouve successivement :

$$\overline{F'_2 F'} = 10,08 \text{ cm}, \overline{F_1 F} = -5,8 \text{ cm}$$

$$\overline{H' F'} = f' = -\overline{H F} = 7,6 \text{ cm} = -f$$

La figure 8.12 présente la construction permettant de positionner H, H', F et F' . Le système est **convergent** car $f' > 0$ (F' est à droite de H').

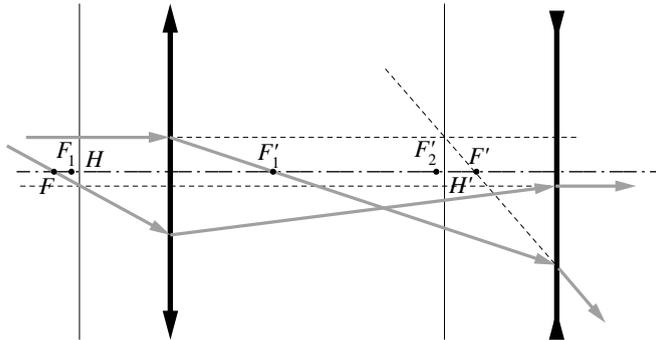


Figure 8.12 • Association d'une lentille convergente et d'une lentille divergente.

• Exemple 3 : doublet afocal ($\Delta = 0$)

Dans ce cas, le foyer image du premier élément est confondu avec le foyer objet du deuxième (figure 8.13). Construisons l'image à travers le système d'un objet AB .

Le grandissement transversal est donné par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{S_2 J}}{\overline{S_1 I}} = \frac{\overline{S_2 F_2}}{\overline{S_1 F'_1}} = \frac{f_2}{f'_1} = -\frac{f'_2}{f'_1} = \text{Constante}$$

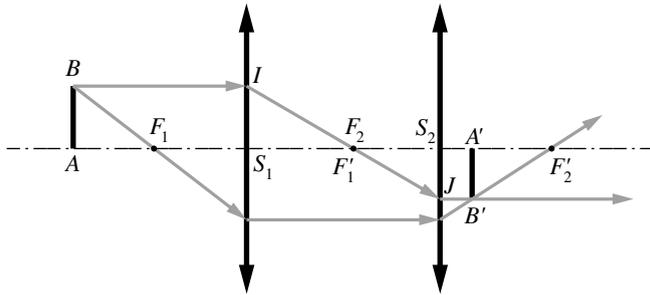


Figure 8.13 • Système afocal.

On remarque donc qu'il est indépendant de la position de l'objet et que le rayon émergent correspondant à un rayon parallèle est aussi parallèle à l'axe. Ces rayons ne se coupent pas : les foyers et les points principaux sont rejetés à l'infini.

11.2. La lentille épaisse

On considère le système constitué de deux dioptries sphériques séparant trois milieux successifs d'indices respectivement égaux à 1, n et 1 (figure 8.14). Pour chaque dioptrie, on exprime les distances focales en fonction des indices et des rayons de courbure :

$$f'_1 = \frac{nr_1}{n-1}, f'_1 = -n, f'_2 = \frac{r_2}{1-n}, f'_2 = -\frac{1}{n}$$

En appliquant la formule de Gullstrand (paragraphe 9), on trouve pour les lentilles épaisses :

$$\Phi = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + e \frac{(n-1)^2}{nr_1r_2}$$

Considérons par exemple une lentille épaisse telle que $n = 3/2$, $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 20$ cm et $e = 1$ cm. C'est une lentille convergente de vergence $\Phi = 2,58$ dioptries et de 38,7 cm de distance focale. Le deuxième terme dépendant de la distance entre les deux sommets est le terme correctif à la lentille mince. Il est négligeable si $e \frac{n-1}{n} \ll |r_2 - r_1|$. Dans cette limite, on retrouve bien la distance focale de la lentille mince qui vaut 40 cm au lieu de 38,7 cm. L'encart 8.4 propose une discussion plus détaillée sur la notion de lentille mince.

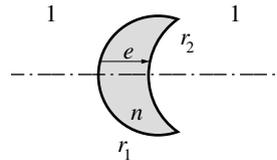


Figure 8.14 • Définition des paramètres de la lentille épaisse d'épaisseur e et d'indice n .

Encart 8.4. Qu'est-ce qu'une lentille mince ?

Le critère que nous venons d'établir est souvent assimilé à $e \ll |r_2 - r_1|$ ce qui signifie que l'épaisseur de la lentille doit être beaucoup plus petite que la différence des rayons de courbure. Notons cependant que, dans le cas particulier où $r_2 = r_1$, la lentille ne peut jamais être assimilée à une lentille mince car seul le terme $e \frac{(n-1)^2}{nr_1r_2}$ est non nul.

Par ailleurs, si le critère est vérifié, cela ne signifie pas nécessairement que le système soit réductible à une lentille mince car, d'une part les distances focales f et f' peuvent ne pas être égales et d'autre part les plans principaux peuvent être éloignés de la lentille.

Parmi les lentilles épaisses, quelques unes d'entre elles se rencontrent fréquemment. La figure 8.16 les représente et le tableau 8.1 en donne les caractéristiques.

Tableau 8.1 • Quelques lentilles épaisses remarquables

	Lentille équiconvexe ($R = r_1 = r_2$)	Lentille convexe symétrique ($R = r_1 = -r_2$)	Lentille boule ($R = r_1 = -r_2$) $e = 2R$	Lentille convexe- plan $r_1 = R, r_2 \rightarrow \infty$
$\frac{1}{f'}$	$e \frac{(n-1)^2}{nR^2}$	$\frac{n-1}{R} \left(2 - e \frac{n-1}{nR} \right)$	$\frac{2}{R} \frac{n-1}{n}$	$\frac{n-1}{R}$
Signe de f'	> 0	> 0 si $e < \frac{2Rn}{n-1}$	> 0	> 0

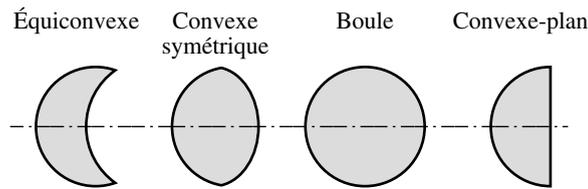


Figure 8.15 • Quelques lentilles épaisses particulières.

12. FORMULATION MATRICIELLE DE L'ÉTUDE DES ASSOCIATIONS

Tout le formalisme présenté dans ce chapitre peut se généraliser aisément aux associations composées d'un plus grand nombre d'éléments simples. Dans ce cas, une formulation matricielle est de loin la plus commode.

12.1. Établissement de l'écriture matricielle

Nous allons donc reformuler la relation de conjugaison du dioptre en utilisant une notation matricielle. Un rayon est identifié à un vecteur colonne I , contenant α son angle d'inclinaison sur l'axe, et la hauteur à laquelle il frappe le dioptre $\overline{IH} = y$ (figure 8.16). À la sortie du dioptre, après réfraction, le vecteur correspondant I' est donné par α' et y' . On peut donc écrire :

$$I = \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}, I' = \begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix}$$

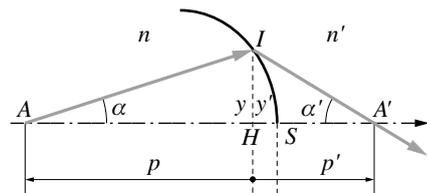


Figure 8.16 • Définition des quantités utiles dans le calcul matriciel.

Dans le cadre de l'approximation des petits angles, on peut confondre H avec S et nous avons évidemment :

$$y' = y = -p\alpha = -p'\alpha'$$

En combinant l'équation de conjugaison du dioptre sphérique $\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r}$ et les équations donnant p et p' en fonction de α et α' , on trouve : $\alpha' = \frac{n}{n'}\alpha - \frac{n' - n}{n'r}y$.

Cette relation s'écrit sous forme matricielle :

$$I' = \begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n' - n}{n'r} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = RI$$

où R est appelée **matrice de réfraction**. R est souvent écrite sous la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Remarquons à ce stade que le terme de la deuxième ligne et de la première colonne de la matrice R (soit C) n'est autre que $-1/f'$. Dans le cas du dioptre plan, il tend vers zéro.

Il nous reste maintenant à écrire la matrice prenant en compte l'écart e entre les sommets des deux dioptres (figure 8.17).

Ceci revient à définir la matrice T qui représente le déplacement d'un rayon dans un milieu homogène. L'angle α ne varie pas ($\alpha' = \alpha$) et dans le cadre de l'approximation des petits angles, on peut écrire : $y' = y + \alpha e$, où e est le déplacement. La matrice de translation T s'écrit donc :

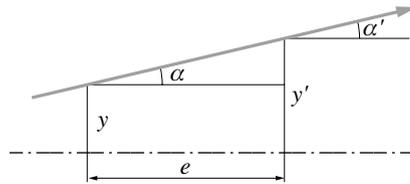


Figure 8.17 • Définition des paramètres de la matrice de translation.

$$I' = \begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = TI$$

Ainsi, pour étudier un système formé d'éléments de matrice de réfraction R_1, R_2, \dots , il suffit d'écrire des produits matriciels en intercalant à chaque étape la matrice de translation appropriée tout en respectant l'ordre dans lequel le rayon rencontre les différents éléments. En effet, le produit matriciel n'est pas commutatif. L'exemple de la lentille épaisse illustre ce point.

12.2. Exemple de la lentille épaisse

Dans une lentille épaisse, il y a deux dioptres séparés d'une distance e . Le problème se ramène donc à l'écriture des deux matrices de réfraction R_1 et R_2 et d'une matrice de translation T entre les deux dioptres (figure 8.18). Si r_1 et r_2 sont les rayons de courbure des deux dioptres et n_0 l'indice de la lentille, nous avons :

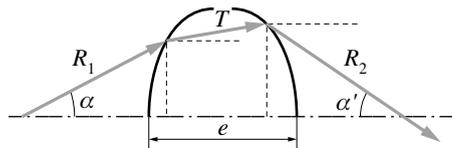


Figure 8.18 • Décomposition de la lentille épaisse avec les matrices.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_0 - 1}{n_0 r_1} & \frac{1}{n_0} \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1 - n_0}{r_2} & n_0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs I et I' sont donc liés par

$$I' = R_2 T R_1 I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1-n_0}{r_2} & n_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_0-1}{n_0 r_1} & \frac{1}{n_0} \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} I$$

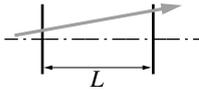
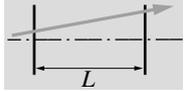
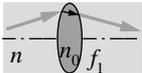
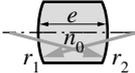
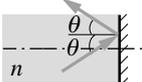
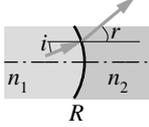
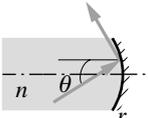
Le résultat des produits matriciels est une matrice carrée 2×2 . La distance focale du système ainsi formé est donnée par le terme de la deuxième ligne et de la première colonne qui s'écrit :

$$C = -\frac{1}{f'} = -(n_0 - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \frac{e(n_0 - 1)^2}{n_0 r_1 r_2}$$

On retrouve bien la formule de la distance focale d'une lentille épaisse.

Le tableau 8.2 donne la matrice optique des différents éléments simples étudiés dans cet ouvrage.

Tableau 8.2 • Matrice optique de différents systèmes simples

 <p>Propagation dans l'espace $n = 1$, longueur L : $\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$</p>	 <p>Propagation dans l'espace n, longueur L : $\begin{pmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$</p>
 <p>Lentille mince convergente : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$</p>	 <p>Lentille épaisse, épaisseur e, indice n : $\begin{pmatrix} 1 + \frac{e}{r_1} \left(\frac{n_0 - 1}{n_0} \right) & \frac{e}{n_0} \\ \frac{(n_0 - 1) \left(r_2 - r_1 - e \frac{n_0 - 1}{n_0} \right)}{r_1 r_2} & 1 - \frac{e}{r_2} \frac{n_0 - 1}{n_0} \end{pmatrix}$</p>
 <p>Miroir plan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$</p>	 <p>Dioptrique sphérique $\begin{pmatrix} \frac{\cos r}{\cos i} & 0 \\ -\frac{\Delta n_e}{R} & \frac{\cos i}{\cos r} \end{pmatrix}$ $\Delta n_e = \frac{n_2 \cos r - n_1 \cos i}{\cos i \cos r}$</p>
 <p>Miroir sphérique $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{r} & 1 \end{pmatrix}$</p>	

Encart 8.5. Points cardinaux et matrices ABCD

Les matrices de réfraction $R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ sont souvent appelées aussi matrices $ABCD$. On va voir qu'il est possible de retrouver simplement les éléments cardinaux d'une association. Considérons un système composé de plusieurs éléments simples, décrits par les matrices M_1, M_2, \dots, M_n . On a alors :

$$I' = \begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = M_n M_{n-1} \dots M_1 \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = RI.$$

Ainsi, si on associe deux lentilles minces accolées,

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\phi_i & 1 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\phi_1 - \phi_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\phi & 1 \end{pmatrix}.$$

L'association de deux lentilles minces accolées de vergences respectives ϕ_1 et ϕ_2 résulte en une lentille mince de vergence $\phi = \phi_1 + \phi_2$.

Si ces deux lentilles ne sont pas accolées et distantes de e ,

$$R = M_3 M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\phi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - e\phi_1 & e \\ -\phi_2 - \phi_1 + e\phi_1\phi_2 & 1 - e\phi_2 \end{pmatrix}.$$

La vergence du système équivalent est $C = -\phi = -\phi_1 - \phi_2 + e\phi_1\phi_2$, ce qui permet d'en déduire $\overline{HF} = -\frac{1}{\phi}$ et $\overline{H'F'} = \frac{1}{\phi}$. Par ailleurs, on peut montrer que $\overline{S_1H} = \frac{ef_1}{\Delta} = \frac{D-1}{C}$, $\overline{S_2H'} = \frac{ef'_2}{\Delta} = \frac{1-A}{C}$. On peut donc positionner les quatre éléments cardinaux d'une association à partir des éléments de la matrice $ABCD$. Cette propriété est généralisable à tout cas d'association, quel que soit le nombre d'éléments simples constitutifs. Utiliser ce formalisme matriciel permet, lorsqu'il y a plus de deux éléments simples à associer, de simplifier considérablement le calcul formel.

À RETENIR

- Toute combinaison de deux éléments optiques quelconques possède un foyer objet F et un foyer image F' .

On définit l'**intervalle optique** du doublet par la distance algébrique qui sépare F'_1 , le foyer image du premier élément, de F_2 , le foyer objet du deuxième :

$$\Delta = \overline{F'_1 F_2} = e - f'_1 + f_2$$

où $e = \overline{S_1 S_2}$ est la distance algébrique séparant les sommets S_1 et S_2 .

- Pour étudier les associations, la procédure générale est la suivante.

On place les deux foyers F et F' . Deux méthodes sont possibles :

– la première consiste à les positionner par rapport aux sommets S_1 et S_2 en calculant les distances :

$$\overline{S_1 F} = \frac{f_1(f_2 + e)}{\Delta} \quad \text{et} \quad \overline{S_2 F'} = \frac{f'_2(e - f'_1)}{\Delta}$$

– la deuxième consiste à utiliser le fait que F' et F'_1 d'une part, F_2 et F d'autre part sont des points conjugués reliés par la relation de Newton, ce qui permet de placer F' par rapport à F'_1 et F par rapport à F_2 . On a alors :

$$\overline{F'_2 F'} = -\frac{f'_2 f_2}{\Delta} \quad \text{et} \quad \overline{F_1 F} = \frac{f'_1 f_1}{\Delta}$$

- **La relation de Newton pour un doublet s'écrit :**

$$\sigma \sigma' = \overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -\frac{f_1 f_2 f'_1 f'_2}{\Delta^2}$$

- **Les distances focales d'un doublet sont :**

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \quad \text{et} \quad f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}$$

- **Le grandissement transversal d'un doublet est :**

$$\gamma = -\frac{\sigma'}{f'} = -\frac{f}{\sigma}$$

- **Plans principaux et relation de Descartes.** Dans tout système optique, il existe deux points **conjugués uniques** H et H' tels que le grandissement γ soit égal à 1. Si l'on repère les foyers objet F et image F' par rapport aux points H et H' , les quantités algébriques correspondantes sont appelées les distances focales.

$$\overline{HF} = f \quad \text{et} \quad \overline{H'F'} = f'$$

En prenant l'origine en H pour l'objet et en H' pour son image, les deux distances $p = \overline{HA}$ et $p' = \overline{H'A'}$ sont reliées par la relation universelle de Descartes :

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'A'}} + \frac{\overline{HF}}{\overline{HA}} = 1$$

Les quatre éléments H , H' , F et F' constituent **les éléments cardinaux** de l'association.

- Le système est convergent si $f' > 0$, divergent dans le cas contraire.
- Le rapport des distances focales f' et f est égal au rapport des indices des milieux extrêmes :

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

- La vergence de l'association de deux éléments de vergences Φ_1 et Φ_2 séparés d'une distance e est donnée par la **formule de Gullstrand** :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{e\Phi_1\Phi_2}{n_0}$$

où n_0 est l'indice du milieu intermédiaire.

QCM

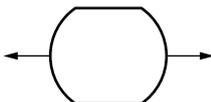
1 L'association de deux lentilles convergentes peut donner

- (1) un système convergent.
- (2) un système divergent.
- (3) un système afocal.

2 Dans un système afocal

- (1) les foyers résultants sont confondus.
- (2) les foyers résultants sont rejetées à l'infini.
- (3) on ne peut pas former d'images car elles sont rejetées à l'infini.

3 Dans la lentille épaisse ci-dessous, on écarte les deux faces. La distance focale

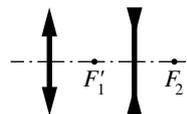


- (1) reste la même.
- (2) diminue.
- (3) augmente.

4 On constitue un système centré avec deux lentilles convergentes identiques de distances focales f' . Pour que le système soit convergent, il faut que la distance e séparant les lentilles soit

- (1) $e < f'$
- (2) $e < 2f'$
- (3) $e < 4f'$

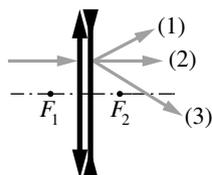
5 Ce système est



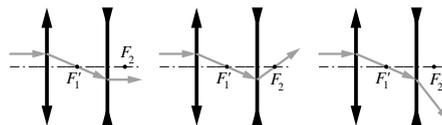
(1) convergent (2) afocal (3) divergent (1) Le rayon (1) (2) Le rayon (2) (3) Le rayon (3)

6 Le système est constitué de deux lentilles accolées de distances focales f et $-f$.

Quel est le bon rayon sortant ?



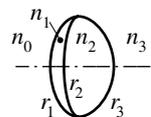
7 Quel est le bon tracé ?

(1) (2) (3)

Réponses : 1. 1, 2 et 3, 2. 2, 3. 2, 4. 2, 5. 1, 6. 2, 7. 3

EXERCICES

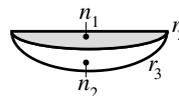
1 Trois dioptres de rayons de courbure r_1 , r_2 et r_3 séparent quatre milieux différents et constituent deux lentilles minces accolées.



a) En écrivant les trois relations de conjugaison et en utilisant la propriété des lentilles minces, établir la formule de conjugaison de cette lentille.

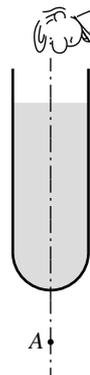
b) $n_0 = n_1 = n_3 = 1$ et $n_2 = 3/2$. $r_2 = 10$ cm, $r_3 = 20$ cm. Dessiner les dioptres considérés. Calculer la distance focale et la vergence de cette association de lentilles.

c) La lentille est mise en position horizontale. On remplit d'eau la partie supérieure. Sachant que $n_1 = 4/3$, calculer les nouvelles caractéristiques de la lentille.

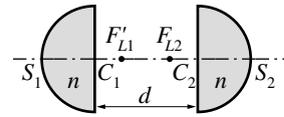


2 Un tube à essai dont le fond est une calotte sphérique de 1 cm de rayon de courbure est rempli sur une hauteur de 10 cm d'un liquide d'indice $n = 4/3$. En regardant par le haut, où voit-on l'image A' d'un objet A situé 2 cm en dessous du tube ?

3 **Système de deux demi-boules.** Un système optique est constitué de deux demi-boules de rayon R et d'indice $n = 3/2$, mises tête-bêche l'une par rapport à l'autre.



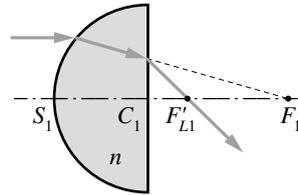
a) On étudie le premier élément constitué d'un dioptre sphérique de rayon R de sommet S_1 et de centre C_1 et d'un dioptre plan situé en C_1 . Un rayon arrivant parallèle à l'axe rencontre tout d'abord le dioptre sphérique, puis frappe la face plane.



1) Déterminer la position de F'_1 , le foyer image du premier dioptre en calculant $\overline{S_1 F'_1}$.

2) En déduire la distance $\overline{C_1 F'_1}$ donnant la position du foyer résultant de cette demi-boule.

3) À partir de l'expression de la distance focale d'une lentille épaisse, donner la valeur de la distance focale de cette lentille que l'on notera f'_{L_1} .



4) En déduire la position $\overline{C_1 H'_1}$ du plan principal H'_1 .

b) On constitue un doublet en associant deux éléments identiques en les espaçant d'une distance d .

1) À partir des résultats de a), exprimer $\Delta = \overline{F'_{L_1} F_{L_2}}$ en fonction de d et R .

2) En déduire l'expression de la distance focale résultante.

3) Que vaut la distance focale d'une lentille boule ? Retrouver le résultat directement.

c) L'espace compris entre les deux lentilles est comblé avec un verre de même indice $n = 3/2$.



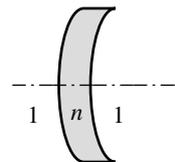
Calculer la distance focale de cette lentille.

4 **Lentille équiconvexe.** Une lentille d'épaisseur e et d'indice $n = 3/2$ possède deux faces de même rayon de courbure R .

a) Calcul direct.

1) Déterminer les distances focales des deux dioptres constituant les faces de la lentille.

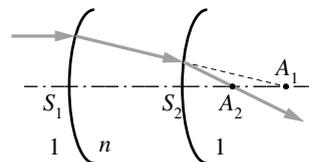
2) En déduire l'expression de la distance focale image de la lentille.



b) On étudie le cheminement d'un rayon initialement parallèle qui arrive à l'axe après traversée des deux dioptres.

1) Déterminer successivement les quantités $\overline{S_1 A_1}$, $\overline{S_2 A_1}$, puis $\overline{S_2 A_2}$ en fonction de n .

2) Quelle condition doivent vérifier $\overline{S_2 A_1}$ et $\overline{S_2 A_2}$ pour que la lentille soit convergente ? Cette condition est-elle vérifiée ?

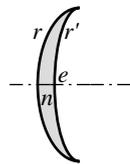


5 **Lentille convergente-divergente.** On fabrique une lentille épaisse, d'épaisseur e et d'indice n avec des rayons de courbure r et r' positifs vérifiant $r' > r$.

a) Écrire l'expression de la vergence de cette lentille.

b) Quelle relation doivent vérifier e , r et r' pour que la lentille soit divergente ?

c) Peut-on fabriquer une lentille épaisse divergente avec $r' > r$ et $e > 0$?



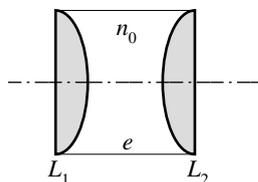
6 Un système centré est constitué de deux lentilles minces L_1 et L_2 d'indice n séparées par un milieu d'indice n_0 . Les deux lentilles sont identiques, avec une face plane et une face de rayon de courbure R .

a) On appelle f'_1, f_1, f'_2 , et f_2 , les distances focales respectives des deux faces de la lentille L_1 . En considérant la face plane comme un dioptre sphérique de rayon de courbure infini, que vaut le rapport $\frac{f'_1}{f_1}$? Donner les expressions de f_2 et f'_2 . À l'aide des formules des associations, en déduire les expressions des distances focales f_{L_1} et f'_{L_1} de la lentille L_1 .

b) Effectuer le même calcul pour la lentille L_2 dont on donnera les distances focales f_{L_2} et f'_{L_2} .

c) Les deux lentilles sont séparées par un milieu d'indice n_0 et de longueur e . Donner l'expression de la focale f' du système complet.

d) Pour quelle valeur de e a-t-on un système afocal ?

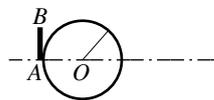
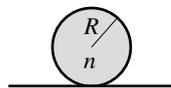


7 **Lentille boule.** Une bille de verre transparente est posée sur un journal. On veut calculer la taille des caractères vus à travers cette « lentille boule ». Dans les calculs, on prendra un indice $n = 3/2$.

a) On appelle F_1, F'_1, F_2 et F'_2 les foyers objets et images des deux faces de la lentille, F et F' les foyers objet et image de la lentille. À l'aide des formules des associations, donner les valeurs des distances focales f_1, f'_1, f_2, f'_2, f et f' ainsi que les distances F'_2F' et F_1F . Sur une figure à l'échelle, placer les six foyers ainsi que les plans principaux H et H' .

b) Un caractère d'imprimerie est représenté par l'objet AB . Que vaut $p = \overline{HA}$? En déduire la valeur de $p' = \overline{H'A'}$.

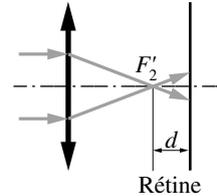
c) De combien faut-il déplacer la boule pour que l'image $A'B'$ soit rejetée à l'infini ?



8 Correction de l'œil. Un œil myope est représenté par une lentille mince convergente de distance focale $f'_2 = 2$ cm. Elle est trop courte d'une distance $d = 2$ mm pour que l'image d'un objet à l'infini se forme sur la rétine. Pour corriger l'œil, on place un verre correcteur constitué d'une lentille mince de distance focale f'_1 .

a) Le verre correcteur est un verre de lunettes placé 1 cm en avant de l'œil. Donner la valeur de f'_1 .

b) Le verre correcteur est une lentille accolée à l'œil. Donner la valeur de f'_1 .



9 Points invariants. On considère une association de deux lentilles minces de distances focales images f'_1 et f'_2 , espacées d'une distance e .

a) Démontrer que $\overline{HH'} = \frac{e^2}{\Delta}$ où Δ est l'intervalle optique $\overline{F'_1F'_2}$ et H et H' les points principaux. D'une source A placée sur l'axe, le système donne une image A' . Quelle relation vérifient $\overline{HH'}$, $p = \overline{HA}$ et $p' = \overline{H'A'}$ si A et A' sont confondus ?

b) En déduire les deux valeurs possibles de p . En déduire celles de p' ainsi que les grandissements transversaux γ .

c) Quelle relation doit-il exister entre e , f'_1 et f'_2 pour que les points invariants existent ?

d) Calculer les deux valeurs possibles de p et de γ avec $f'_1 = 1$ cm, $f'_2 = 2$ cm et $e = 4$ cm.

e) Sur une figure à l'échelle, placer H , H' , F et F' ainsi que les deux points invariants. Construire l'image de l'un des points A afin de vérifier cette propriété d'invariance.

10 Oculaire achromatique de Huygens. Cet oculaire est très astucieux car il permet de corriger les aberrations chromatiques d'un doublet de lentilles en utilisant deux lentilles minces constituées du même verre.

a) On appelle f'_1 la distance focale d'une lentille mince pour une longueur d'onde où l'indice du verre est égal à n . À une autre longueur d'onde, l'indice est $n + dn$. En utilisant le calcul différentiel, démontrer que $df'_1 = -\kappa f'_1$, où $\kappa = \frac{dn}{n-1}$.

b) On construit un oculaire constitué de deux lentilles minces de distances focales images f'_1 et f'_2 séparées d'une distance e . On appelle f' la distance focale résultante. Quand l'indice de réfraction devient $n + dn$, la distance focale varie de df' . Démontrer que l'oculaire est achromatique ($df' = 0$) si $e = \frac{f'_1 + f'_2}{2}$.

11 Oculaire de Huygens. C'est un oculaire « bon marché » qui équipe de nombreux télescopes et lunettes astronomiques. Il est constitué de deux lentilles convergentes de distances focales images f'_1 et f'_2 espacées d'une distance $e = \frac{f'_1 + f'_2}{2}$.

- a) Déterminer les positions de F , F' , H et H' .
- b) Montrer que H' est confondu avec F_2 et H avec F_1' .
- c) Sur une figure à l'échelle, placer les six foyers ainsi que H et H' avec $f_1' = 10$ cm et $f_2' = 20$ cm.

12 Soit une combinaison de deux lentilles minces convergentes L_1 et L_2 , de distances focales respectives $f_1' = 10$ cm et $f_2' = 20$ cm, séparées d'une distance $e = \overline{S_1 S_2} = 40$ cm.

- 1) Donner pour chacune des lentilles la relation existant entre p_1' et p_1 d'une part, p_2' et p_2 d'autre part.
- 2) Tracer ces deux relations sur une même figure en prenant soin de porter les deux origines S_1 et S_2 .
- 3) En plaçant un objet réel à 15 cm en avant de la première lentille, retrouver graphiquement les positions des images successives (on notera A'' l'image intermédiaire et A' l'image finale).

13 Doublet

Partie A

On considère un système optique constitué d'un doublet de lentilles convergentes (L_1 et L_2) de distances focales respectives $f_1' = 2$ cm et $f_2' = 1$ cm. Les foyers F_1' et F_2 sont confondus.

1) Comment appelle-t-on un tel système où les foyers F_1' et F_2 sont confondus ? Expliquer brièvement l'impossibilité d'utiliser les formules générales des combinaisons.

2) Avec ce système, on forme, d'un objet ponctuel placé sur l'axe, l'image finale A' . On pose $x = \overline{F_1 A}$ et $x' = \overline{F_2' A'}$. Démontrer, en appliquant à deux reprises la relation de Newton appliquée à l'image intermédiaire et à l'image finale A' , que

$$\frac{x'}{x} = \left(\frac{f_2'}{f_1'} \right)^2.$$

3) Sur la figure *a*, construire l'image $A'B'$ de AB en utilisant les 2 rayons incidents. L'image est-elle réelle ou virtuelle ?

4) Établir la formule du grandissement γ . Exprimer le rapport x'/x en fonction de γ .

5) Démontrer que A et A' sont confondus si $x = 2 \frac{(f_1')^2}{f_1' - f_2'}$. Calculer x .

6) Démontrer que l'image A' est virtuelle si $x < x_l = -\frac{(f_1')^2}{f_2'}$. Calculer x_l .

Partie B

L'objet est la Lune de 3 400 km de diamètre, située à une distance de 384 000 km de la Terre ($x = \overline{F_1 A} = -384\,000$ km).

1) Calculer l'angle apparent α sous lequel on voit, à l'œil nu, la Lune depuis la Terre.

2) Déterminer la distance $x' = \overline{F'_2 A'}$ ainsi que la taille $A'B'$ de l'image de la Lune. En déduire l'angle apparent α' sous lequel on voit la Lune à travers le doublet de lentilles.

3) Calculer le grossissement $G = \alpha'/\alpha$. Démontrer que $|G| = \left| \frac{1}{\gamma} \right|$.

Partie C

On déplace la lentille L_2 de 1 cm vers la droite (*figure b*).

Construire le rayon émergent correspondant au rayon incident représenté sur la figure.

Sur la figure, placer le point principal image H' ainsi que le foyer image F' du système.

À partir des formules des combinaisons, calculer les quantités $\overline{F'_2 F'}$ et $f' = \overline{H' F'}$.

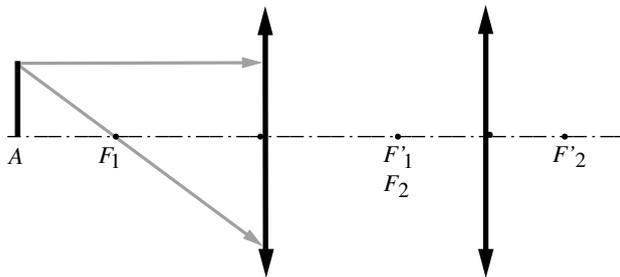


Figure (a)

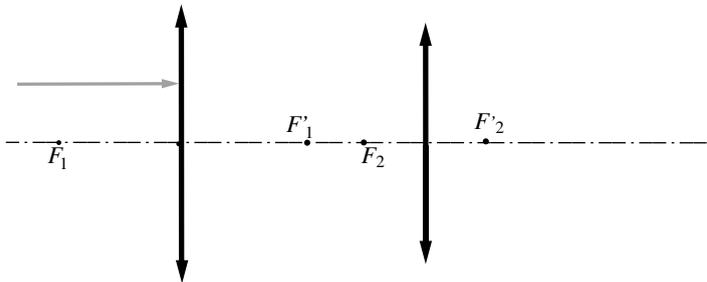
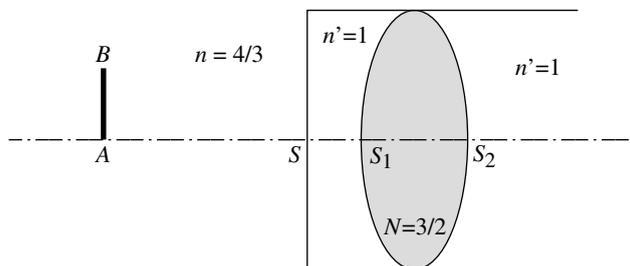


Figure (b)

14 Appareil photographique sous-marin

Un appareil photographique est utilisé en plongée sous-marine. Le schéma ci-dessous représente la partie avant de l'appareil. La lentille mince L est protégée à l'avant par un dioptré plan de sommet S ; elle est plongée dans l'air ($n_0 = n' = 1$) et possède une distance focale $f'_L = 6$ cm. La distance SS_1 et l'épaisseur $e = \overline{S_1 S_2}$ sont négligeables de sorte qu'on peut considérer les points S , S_1 et S_2 confondus.

1. AB représente un objet de 5 cm de hauteur placé dans l'eau à 40 cm de S . Le dioptre donne de AB une image A_0B_0 . Calculer $\overline{SA_0}$ et $\overline{A_0B_0}$.
2. La lentille donne de A_0B_0 une image $A'B'$. Calculer $\overline{SA'}$ et $\overline{A'B'}$.
3. L'association du dioptre et de la lentille constitue un système centré dont les points principaux sont confondus en S et qui possède une distance focale image $f' = 6$ cm. Montrer que la distance focale objet de l'association $f = -8$ cm.
4. La lentille est bi-convexe, les 2 faces ayant le même rayon de courbure R . Calculer ce rayon.



15 Photocopieur

L'objectif d'un photocopieur est constitué de 2 lentilles minces L_1 , convergente de distance focale $f'_1 = 60$ mm et L_2 , divergente de distance focale $f'_2 = -90$ mm. Elles sont distantes de $e = 30$ mm,

Partie I

Le document à photocopier est situé à une distance $\overline{AS_1} = 180$ mm et le récepteur photosensible à une distance $\overline{S_2A'} = 180$ mm.

- 1) On appellera A_1 , l'image de A à travers L_1 . Calculer $\overline{S_1A}$ puis placer A_1 sur la figure et calculer la distance $\overline{S_1A_1}$ à l'aide de la formule des lentilles.
- 2) On désigne par A_2 l'image de A_1 à travers L_2 . Calculer la valeur de $\overline{S_2A_2}$. A_2 est-elle réelle ou virtuelle ? Où est-elle située ? L'image reçue par le détecteur sera-t-elle nette ?
- 3) Avec quel grandissement γ l'image d'un objet placé dans le plan de A se forme-t-elle sur le récepteur ? Sachant que la partie utile du document est un cercle de 15 cm de diamètre, pourra-t-elle apparaître en entier sur une feuille standard ($21 \times 29,7$ cm²) ?

Partie II

On désigne par F et F' les foyers résultants du doublet ci-dessus.

- 1) Construire la marche du rayon incident MJ parallèle à l'axe. Placer le foyer du système et retrouver par le calcul la valeur numérique de $\overline{S_2F'}$.
- 2) Construire de même la marche du rayon émergent KN parallèle à l'axe. Placer le foyer F . Retrouver par le calcul la valeur numérique de $\overline{S_1F}$.

Faire apparaître les points principaux H et H' . Mesurer sur le schéma la distance focale $f' = \overline{H'F'}$. Par le calcul, déterminer la valeur numérique de f' .

Déterminer les valeurs de \overline{FA} , $\overline{F'A'}$, \overline{HA} et $\overline{H'A'}$. Vérifier que les points A et A' sont conjugués. Calculer le grandissement γ .

3) On désigne par Σ la surface du document à photocopier et Σ' celle de son image. E est l'éclairement énergétique du document et E' celui de l'image. Sachant que le système a un facteur de transmissions τ , exprimer E' en fonction de τ , E et de γ . Calculer E' avec $E = 1 \text{ kWm}^{-2}$ et $\tau = 0,9$.

16 Appareil photographique

Partie I

On considère un appareil photographique dont l'objectif est assimilé à une lentille mince convergente L_1 de distance focale $f'_1 = 6 \text{ cm}$ (on appelle F_1 et F'_1 les foyers objet et image de cette lentille). La mise au point s'effectue sur un objet AB en déplaçant l'objectif par rapport au plan du film P de telle façon que l'image $A'B'$ soit dans le plan du film. On note $x = \overline{F'_1P}$ le tirage correspondant.

1. AB est à l'infini, que vaut x ?
2. Si le grandissement $\gamma = -1/10$, calculer x et $\overline{F_1A}$.
3. L'objet AB de 2 m de hauteur est à une distance $\overline{F_1A} = -120 \text{ m}$. Calculer $\overline{A'B'}$ et $\overline{F'_1A'}$.

Partie II

Pour obtenir une image plus grande, on place à 4 cm en arrière de L_1 , une lentille divergente L_2 de distance focale $f'_2 = -3 \text{ cm}$.

1. Tracer la marche complète des rayons incidents (1) et émergents (2) parallèles à l'axe. Placer le foyer F' et le plan principal H' .
2. À l'aide des formules des combinaisons calculer les valeurs numériques de $\overline{F'_2F'}$ et de $\overline{H'F'}$.
3. Quelle est la taille $\overline{A'B'}$ ($\overline{AB} = 2 \text{ m}$, $\overline{FA} = -120 \text{ m}$) ?
4. On désire une distance focale résultante $f' = 3 \text{ cm}$. De combien faut-il déplacer la lentille L_2 ?

17 Lentille épaisse

Une loupe est constituée d'une lentille équiconvexe en verre d'indice $n = 1,5$. Les 2 faces ont un rayon de courbure de 20 mm. L'épaisseur de la lentille est $e = r = 20 \text{ mm}$.

1. Sous l'effet du premier dioptré, le rayon incident coupe l'axe en F'_1 . Calculer les distances $\overline{S_1F'_1}$ et $\overline{S_2F'_1}$.
2. Sous l'effet du deuxième dioptré, le rayon coupe l'axe en F' . Calculer $\overline{S_1F'}$.

3. À l'aide de la formule des lentilles épaisses, calculer la distance f' de cette lentille. En déduire la position du plan principal H' puis celle de H . Que vaut l'interstice $\overline{HH'}$?

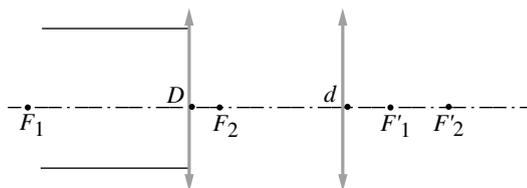
18 Distance focale équivalente

On considère un système composé de 2 lentilles convergentes L_1 et L_2 de distances focales respectives $f'_1 = 30$ cm, $f'_2 = 15$ cm séparées d'une distance $e = 20$ cm.

1) Où les 2 rayons incidents parallèles vont-ils converger après avoir traversé la lentille L_1 ? Dessiner le parcours de ces 2 rayons après la traversée des 2 lentilles. On appelle F' le point de concours des 2 rayons.

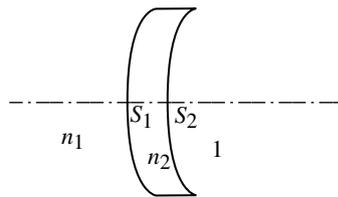
Les prolongements des rayons incidents et sortants se coupent dans un plan appelé plan principal H' . Faites apparaître ce plan sur la figure.

2) Déterminer l'expression de la distance $p'_2 = \overline{S_2 F'}$ en fonction de e , f'_1 et f'_2 . En déduire l'expression de la quantité $f' = \overline{H' F'}$. Calculer p_2 , p'_2 et f' .



19 Objectif photographique

Un objectif photographique est composé d'une lentille épaisse d'indice n_2 , séparant 2 milieux d'indices respectivement égaux à n_1 et 1. Les 2 sommets sont séparés d'une distance $e = \overline{S_1 S_2}$. On appelle f_1 et f_2 les distances focales objet et f'_1 et f'_2 les distances focales images des 2 dioptries de rayons de courbure r_1 et r_2 .



1) Ecrire les expressions de f'_1, f'_2 ainsi que les rapports f'_1/f_1 et f'_2/f_2 .

2) En utilisant les formules des associations, établir que la distance focale résultante est donnée par $\frac{1}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} - \frac{n_2 - 1}{r_2} + \frac{e(n_2 - n_1)(n_2 - 1)}{n_2 r_1 r_2}$.

3) Calculer la distance focale de cet objectif placé dans l'air ($n_1 = 1$) avec $n_2 = 3/2$, $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 30$ cm et $e = 1$ cm. Calculer la nouvelle distance focale quand l'appareil est sous l'eau ($n_1 = 4/3$).

20 Microscope

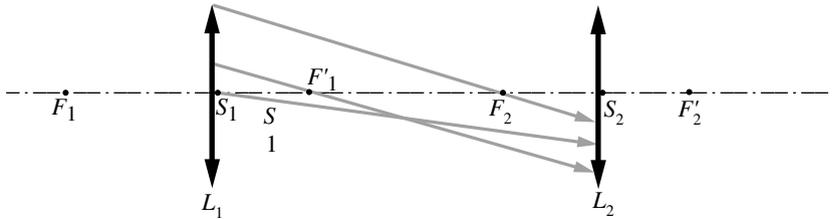
Un microscope de faible puissance est composé de 2 lentilles minces :

– l'objectif L_1 de diamètre $IJ = D = 6$ mm, de distance focale $f'_1 = 3$ cm

– l'oculaire L_2 de distance focale $f'_2 = 3$ cm

L'intervalle optique $\Delta = \overline{F'_1 F_2} = 6$ cm.

1) Sur le schéma, tracer la marche complète des 3 rayons dessinés. Placer le foyer F' . Calculer la quantité $\overline{F'_2 F'}$ ainsi que la distance focale f' .



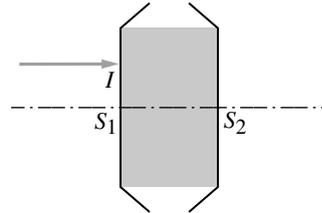
2) La pupille de sortie ou cercle oculaire est l'image de l'objectif à travers l'oculaire. En utilisant les tracés précédents, placer sur le schéma le centre C du cercle oculaire. Calculer les valeurs de $\overline{F'_2 C}$ (ou du $\overline{S_2 C}$) et du diamètre du cercle oculaire.

3) Calculer la profondeur de champ, c'est-à-dire le déplacement \overline{FA} de la position d'un objet A qui fait passer l'image finale $A'B'$ de l'infini à 25 cm de l'œil (placé en F').

4) On désire maintenant obtenir une image finale réelle sur un écran situé à 75 cm de F' . Donner la valeur correspondante de \overline{FA} et celle du grandissement γ obtenu.

21 Dioptries

On considère 2 dioptries sphériques espacés d'une distance $e = \overline{S_1 S_2} = 3$ cm, formant une lentille épaisse d'indice $n = 3/2$. Les rayons de courbure des dioptries sont respectivement $r_1 = 10$ cm et $r_2 = -10$ cm.



1) Construire le parcours du rayon incident à travers la lentille épaisse. Ecrire les expressions des distances focales f_1, f'_1, f_2 et f'_2 .

2) En quel point A le rayon incident parallèle à l'axe va-t-il couper l'axe après la traversée du 1^{er} dioptre. Déterminer successivement les quantités $\overline{S_1 A'}$ et $\overline{S_2 A'}$.

3) Après la traversée du 2^e dioptre, le rayon coupe l'axe en F' . Comment s'appelle ce point ? Donner l'expression de $\overline{S_2 F'}$.

4) Le rayon émergent coupe le rayon incident dans le plan H' . Le repérer sur la figure précédente.

5) Calculer f_1, f'_1, f_2, f'_2, f' et la vergence de cette lentille.

Solutions

- 1 a)** On applique à chacun des dioptrés la formule de conjugaison du dioptré sphérique : $\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r}$. Si on note p_i et p'_i les distances image et objet pour le dioptré i , les trois formules de conjugaison donnent :

$$\frac{n_1}{p'_1} - \frac{n_0}{p_1} = \frac{n_1 - n_0}{r_1} ; \quad \frac{n_2}{p'_2} - \frac{n_1}{p_2} = \frac{n_2 - n_1}{r_2} ; \quad \frac{n_3}{p'_3} - \frac{n_2}{p_3} = \frac{n_3 - n_2}{r_3}.$$

Si les dioptrés forment des lentilles minces, leurs sommets sont confondus et on a $p'_1 = p_2$ et $p'_2 = p_3$. En additionnant entre elles les trois formules ci-dessus, on trouve la formule de conjugaison de la lentille résultante :

$$\frac{n_3}{p'_3} - \frac{n_0}{p_1} = \frac{n_1 - n_0}{r_1} + \frac{n_2 - n_1}{r_2} + \frac{n_3 - n_2}{r_3} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \Phi.$$

- b)** Avec $n_0 = n_1 = n_3 = 1$ et $n_2 = 3/2$, le premier dioptré (de rayon r_1) n'existe plus.

Il n'y en a donc plus que deux : le premier, de rayon $r_2 > 0$, sépare un milieu d'indice 1 d'un milieu d'indice $3/2$; le deuxième, de rayon $r_3 > 0$, sépare un milieu d'indice $3/2$ d'un milieu d'indice 1. On trouve

$$\Phi = \frac{n_2 - 1}{r_2} + \frac{1 - n_2}{r_3} = 2,5 \delta. \text{ La distance focale } f'$$

vaut : $f' = \frac{1}{\Phi} = 40 \text{ cm}.$

- c)** Si l'on remplit d'eau la partie supérieure de la lentille, on retrouve trois dioptrés : le premier dioptré est un dioptré air-eau, plan ($r_1 \rightarrow \infty$). On trouve alors, avec $n_1 = 4/3$, $\Phi = -0,833 \delta$, soit $f' = -1,20 \text{ m}.$

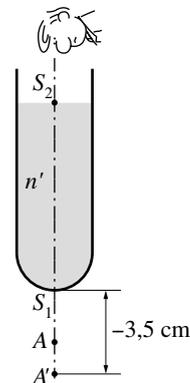


- 2** Le rayon traverse successivement deux dioptrés :

- Le premier dioptré, de sommet S_1 , est sphérique avec $r = 1 \text{ cm}$. L'objet réel A est à une distance telle que $p_1 = -2 \text{ cm}$. L'image A'' à travers ce premier dioptré est donnée par la formule de conjugaison, avec $n = 1$ et $n' = 4/3$. On a : $p'_1 = \overline{S_1 A''} = -8 \text{ cm}$.

- Le deuxième dioptré est plan. Son rayon est donc infini. Si l'on appelle S_2 le sommet de ce deuxième dioptré, $p_2 = \overline{S_2 A''} = \overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 A''} = -18 \text{ cm}$. La formule de conjugaison du dioptré plan ($np'_2 = n'p_2$), avec $n = 4/3$ et $n' = 1$, donne $p'_2 = \overline{S_2 A'} = -13,5 \text{ cm}$.

L'image de A à travers le tube à essai rempli de 10 cm d'eau est donc située en A' à 3,5 cm du fond du tube à essai.



- 3 a) 1)** Pour le premier dioptré de rayon $+R$, le rayon va d'un milieu d'indice égal à 1 vers un milieu d'indice égal à n . La formule permettant de trouver sa distance focale image

est donnée dans le chapitre 5 et s'écrit dans ce cas : $f'_1 = \overline{S_1 F'_1} = R \frac{n}{n-1} = 3R$. En l'absence du deuxième dioptre plan, le rayon irait en F'_1 .

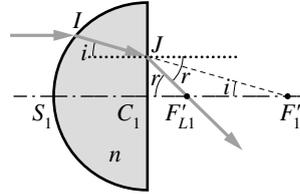
2) Le rayon traverse ensuite le dioptre plan en J où il subit une réfraction.

Dans les triangles $J C_1 F'_{L_1}$ et $J C_1 F'_1$, et avec l'approximation des petits angles, on a respectivement :

$$\tan i \approx i = \frac{J C_1}{C_1 F'_1} \text{ et } \tan r \approx r = \frac{J C_1}{C_1 F'_{L_1}}.$$

Par ailleurs, les lois de Snell-Descartes donnent dans cette approximation $n i \approx r$. On en déduit :

$$\overline{C_1 F'_{L_1}} = \frac{\overline{C_1 F'_1}}{n} = \frac{\overline{C_1 S_1} + \overline{S_1 F'_1}}{n} = \frac{4R}{3}.$$



3) La distance focale image d'une lentille épaisse est donnée par

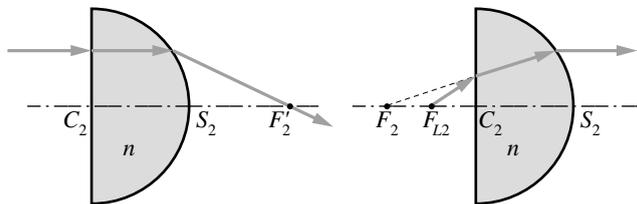
$$\frac{1}{f'_{L_1}} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + e \frac{(n-1)^2}{nr_1 r_2},$$

avec $n = 3/2$, $r_1 = R$, $r_2 = \infty$ et $e = R$. On en tire $f'_{L_1} = 2R$.

4) Cette distance focale est reliée au point principal H'_1 par la relation $f'_{L_1} = \overline{H'_1 F'_{L_1}}$. On a donc $\overline{C_1 H'} = \overline{C_1 F'_{L_1}} + \overline{F'_{L_1} H'_1} = -\frac{2R}{3}$.

b) 1) Cette deuxième lentille se comporte de façon symétrique par rapport à la première. Le rayon du deuxième dioptre sphérique est cette fois-ci égal à $r_2 = -R$. Un faisceau entrant parallèlement à l'axe traverse le dioptre plan sans déviation, converge en F'_2 , foyer image du deuxième dioptre. Inversement, un faisceau émergent de la lentille vient de son foyer objet F_{L_2} . Par symétrie, on a, pour la deuxième lentille épaisse, $f_2 = \overline{S_2 F_2} = -f'_1 = -3R$.

Ceci donne donc $\overline{F_{L_2} C_2} = \frac{4}{3}R$. De même, $f'_{L_2} = f'_{L_1} = 2R$. On en tire $\Delta = \overline{F'_{L_1} F_{L_2}} = \overline{C_1 C_2} - \overline{C_1 F'_{L_1}} - \overline{F_{L_2} C_2} = d - \frac{8R}{3}$.



2) La distance focale résultante vaut $f' = -\frac{f'_{L_1} f'_{L_2}}{\Delta} = \frac{4R^2}{\frac{8R}{3} - d}$.

3) Dans le cas d'une lentille boule, les deux lentilles épaisses L_1 et L_2 sont accolées ($d = 0$) et $f' = \frac{3R}{2}$. Pour faire un calcul direct, il faut considérer qu'il n'y a plus de séparation par un dioptre plan. Il s'agit donc de l'association de deux dioptres sphériques de distances focales respectives $f'_1 = -f_2 = 3R$, $f_1 = -f'_2 = -2R$. Le calcul direct donne

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{e - f'_1 + f_2} = \frac{3R}{2}, \text{ avec } e = 2R.$$

c) Avec les notations habituelles, on a maintenant $e = d + 2R$ et

$$f' = -\frac{f'_{L_1} f'_{L_2}}{e - f'_{L_1} + f_{L_2}} = \frac{6R^2}{4R - d}.$$

On a ici un double dioptré.

4 a) 1) Calcul du dioptré 1 : le rayon se propage d'un milieu d'indice 1 vers un milieu d'indice $3/2$. Ses distances focales sont données par les formules démontrées au chapitre 5 :

$$f_1 = -\frac{R}{n-1} = -2R \text{ et } f'_1 = \frac{nR}{n-1} = 3R.$$

Les distances focales du dioptré 2 se calculent de la même façon en considérant que le rayon passe d'un milieu d'indice $n = 3/2$ vers un milieu d'indice 1. On trouve $f_2 = -\frac{nR}{1-n} = 3R$ et $f'_2 = \frac{R}{1-n} = -2R$.

2) La distance focale image de la lentille résultante est :

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{e - f'_1 + f_2} = \frac{nR^2}{e(n-1)^2} = \frac{6R^2}{e}.$$

b) 1) Si le rayon incident arrive parallèlement à l'axe, A_1 est le foyer image du premier dioptré ($\overline{S_1 A_1} = f'_1 = R \frac{n}{n-1}$). On a donc : $\overline{S_2 A_1} = \overline{S_1 A_1} - e$. Pour le deuxième dioptré, A_1 représente la position de l'objet et A_2 son image. La relation de conjugaison s'écrit donc :

$$\frac{1}{\overline{S_2 A_2}} - \frac{n}{\overline{S_2 A_1}} = \frac{1-n}{R}, \text{ soit } \overline{S_2 A_2} = \frac{nR - e(n-1)}{e(n-1)^2} R.$$

2) Pour que la lentille soit convergente, il faut que A_1 et A_2 soient du même côté de la lentille (à droite). Ceci revient à $\overline{S_2 A_2} \cdot \overline{S_2 A_1} > 0$, soit $\frac{R}{(n-1)^3} > 0$ ce qui est toujours vérifié si R est positif ($n > 1$).

5 a) La vergence de la lentille est donnée par la formule :

$$\Phi = \frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) + e \frac{(n-1)^2}{nr r'} \text{ (voir paragraphe 12.2).}$$

b) Pour que la lentille soit divergente, il faut que $\Phi < 0$, soit, avec r et $r' > 0$, $e < \frac{n(r-r')}{n-1}$.

c) Si $e > 0$, la lentille est divergente si $0 < e < \frac{n(r-r')}{n-1}$, soit $r - r' > 0$. Il n'est donc pas possible de fabriquer une lentille divergente avec $r' > r$.

6 a) Pour la première face de la lentille L_1 , on passe d'un milieu d'indice égal à 1 à un milieu d'indice n . Bien que cette face représente un dioptré plan, la relation générale

$$\frac{f'_1}{f_1} = -n_r = -n \text{ est toujours valable.}$$

Pour la deuxième face, on passe d'un milieu d'indice n vers un milieu d'indice égal à n_0 . Le rayon r est négatif, égal à $-R$. On a : $f'_2 = -\frac{Rn_0}{n_0 - n}$ et $f_2 = \frac{Rn}{n_0 - n}$.

La lentille L_1 peut être assimilée à une lentille mince pour laquelle les sommets des deux dioptries sont confondus. Avec $e = 0$: $f'_{L_1} = -\frac{f'_1 f'_2}{e - f'_1 + f_2}$ et $f_{L_1} = \frac{f_1 f_2}{e - f_1 + f'_2}$. En divisant les numérateurs et dénominateurs de f'_{L_1} par f'_1 et de f_{L_1} par f_1 et en se souvenant que les distances focales du dioptré plan sont infinies, on trouve : $f'_{L_1} = f'_2 = -\frac{Rn_0}{n_0 - n}$ et $f_{L_1} = \frac{f_2}{n} = \frac{R}{n_0 - n}$.

b) Notons f_3, f'_3, f_4 et f'_4 les distances focales respectives des deux faces de la lentille L_2 . À

partir du même raisonnement que précédemment, on trouve $f'_3 = f_2 = \frac{Rn}{n - n_0}$,
 $f_3 = f'_2 = \frac{n_0 R}{n - n_0}$, $f'_4 = -\frac{1}{n}$.

Les distances focales de la lentille L_2 sont : $f'_{L_2} = \frac{R}{n - n_0}$, $f_{L_2} = -\frac{n_0 R}{n - n_0}$.

c) La distance focale du système complet vaut : $f' = -\frac{f'_{L_1} f'_{L_2}}{\Delta}$, avec

$$\Delta = \overline{S_1 S_2} - \overline{S_1 F'_1} + \overline{S_2 F_2} = \frac{e(n - n_0) - 2Rn_0}{n - n_0}, \text{ soit } f' = \frac{R^2 n_0}{(n - n_0)[2Rn_0 - e(n - n_0)]}.$$

d) Dans un système afocal, les distances focales sont rejetées à l'infini. On a alors $e = \frac{2Rn_0}{n - n_0}$.

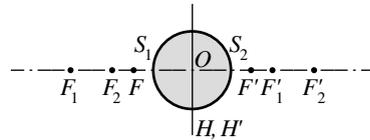
7 a) Le calcul direct des distances focales d'une lentille boule a été effectué dans l'exercice 3 et donne $f_1 = -f'_2 = -2R$, $f'_1 = -f_2 = 3R$, $f = -f' = -3R/2$.

Par ailleurs, on a vu dans le chapitre 8 que

$$\frac{f'_2}{\overline{S_2 F'}} = \frac{f'_2(e - f'_1)}{\Delta} \text{ et } \frac{f_1}{\overline{S_1 F}} = \frac{f_1(e + f_2)}{\Delta}, \text{ ce qui}$$

$$\text{donne } \frac{\overline{F_2 F'}}{\overline{F_2 S_2}} = \frac{\overline{S_2 F'}}{\overline{S_2 F}} + \frac{\overline{S_2 F'}}{\overline{S_2 F'}} = -\frac{3R}{2}$$

$$\text{et } \frac{\overline{F_1 F}}{\overline{F_1 S_1}} = \frac{\overline{S_1 F}}{\overline{S_1 F}} = \frac{3R}{2}.$$



Les points principaux H et H' sont définis par $\frac{\overline{H'F'}}{\overline{H'F}} = f' = \frac{3R}{2}$ et $\frac{\overline{HF}}{\overline{HF}} = f = -\frac{3R}{2}$. Ils sont donc confondus avec O .

b) Si l'objet est accolé à la lentille, $p = \overline{HA} = -R$. On utilise la formule de conjugaison universelle $\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$, et on obtient $p' = \overline{H'A'} = f' \frac{p}{p - f} = -3R$.

c) Pour que l'image soit rejetée à l'infini, il faut que AB soit dans le plan focal, ce qui revient à avancer la lentille boule de $R/2$.

- 8 a)** Le foyer F' de la lentille équivalente formée de la lentille et de l'œil est sur la rétine. On a donc $\overline{S_2F'} = \frac{f_2'(e - f_1')}{e - f_1' + f_2'} = f_2' + d$, avec $e = 1 \text{ cm}$, $f_2' = 2 \text{ cm} = -f_2$.

On trouve $f_1' = -21 \text{ cm}$, soit une lentille divergente de vergence $\Phi = -4,7 \delta$.

- b)** Si le verre correcteur est une lentille placée sur l'œil, $e = 0$ et $f_1' = -22 \text{ cm}$, $\Phi = -4,5 \delta$.

- 9 a)** Sachant que $f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}$, $f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta}$, $f_1 = -f_1'$ et $f_2 = -f_2'$, on a :

$$\overline{HH'} = \overline{HF} + \overline{FS_1} + \overline{S_1S_2} + \overline{S_2F'} + \overline{F'H'} = f - \frac{f_1(f_2 + e)}{\Delta} + e + \frac{f_2'(e - f_1')}{\Delta} - f' = \frac{e^2}{\Delta}$$

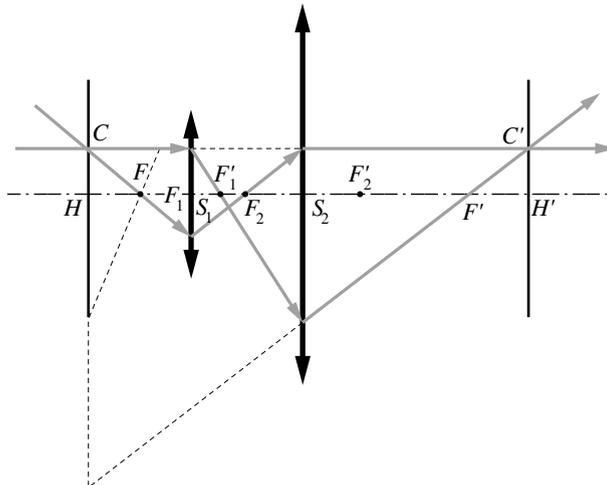
Si A et A' sont confondus, $\overline{HH'} = \overline{HA} + \overline{AA'} + \overline{A'H'} = p - p' = \frac{e^2}{\Delta}$.

- b)** p et p' satisfont à la relation de conjugaison $\frac{f}{p} + \frac{f'}{p'} = 1$, avec $f' = -f$. En éliminant p' , on trouve l'équation à laquelle satisfait p : $p^2 - p \frac{e^2}{\Delta} - f' \frac{e^2}{\Delta} = 0$. Les deux valeurs possibles de p sont : $p = \frac{e^2}{2\Delta} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4 \frac{f' \Delta}{e^2}} \right)$. On a alors $p' = \frac{e^2}{2\Delta} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 4 \frac{f' \Delta}{e^2}} \right)$.

Le grandissement transversal est donné par $\gamma = \frac{p'}{p}$. Les deux grandissements possibles sont

$$\text{donc } \gamma_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{f' \Delta}{e^2}}}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{f' \Delta}{e^2}}} \text{ et } \gamma_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4 \frac{f' \Delta}{e^2}}}{1 - \sqrt{1 + 4 \frac{f' \Delta}{e^2}}}.$$

- c)** Ces points invariants sont tels que l'image et l'objet sont confondus. Ils existent si le terme sous la racine carrée est positif, soit $e^2 > -4f' \Delta$, qui peut s'écrire aussi $e^2 > 4f_1' f_2'$.



d) Avec $f'_1 = 1 \text{ cm}$, $f'_2 = 2 \text{ cm}$ et $e = 4 \text{ cm}$, $\Delta = 1 \text{ cm}$, $f' = -2 \text{ cm}$ et $p = 8(1 \pm \sqrt{0,5})$, soit $p = 13,65 \text{ cm}$ ou $2,34 \text{ cm}$. Par ailleurs, $f' = -f = \overline{H'F'} = -\overline{HF} = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = -2 \text{ cm}$ et $\overline{S_1 F} = -2 \text{ cm}$ et $\overline{S_2 F'} = 6 \text{ cm}$.

10 a) Pour une lentille mince, $\frac{1}{f'_1} = (n - 1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$ (voir chapitre 7). On peut calculer simplement le logarithme de cette expression et le différentier (r et r' sont indépendants de la longueur d'onde) :

$$\frac{1}{f'_1} = (n - 1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \implies -\ln(f'_1) = \ln(n - 1) + \ln \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$

soit, $-\frac{df'_1}{f'_1} = -\frac{dn}{n - 1} f'_1$.

b) La distance focale résultante est $f' = -\frac{f'_1 f'_2}{e - f'_1 + f'_2}$, avec $f_2 = -f'_2$. En différenciant cette équation, on trouve $df' = -\frac{f'_2(\Delta + f'_1)df'_1 + f'_1(\Delta + f'_2)df'_2}{(e - f'_1 + f'_2)^2}$, avec $\Delta = e - f'_1 + f_2$. Lorsque l'oculaire est achromatique, ($df' = 0$), on obtient, en utilisant la relation trouvée dans la question précédente, $e = \frac{f'_1 + f'_2}{2}$.

11 a) Les positions de F' et de F sont données par les relations :

$$\overline{S_1 F} = \frac{f_1(e + f_2)}{e - f'_1 + f_2} = \frac{(f'_1 - f'_2)f'_1}{f'_1 + f'_2} \quad \text{et} \quad \overline{F' S_2} = \frac{f_2(e - f'_1)}{e - f'_1 + f_2} = -\frac{(f'_2 - f'_1)f'_2}{f'_1 + f'_2}.$$

Les points principaux sont donnés par :

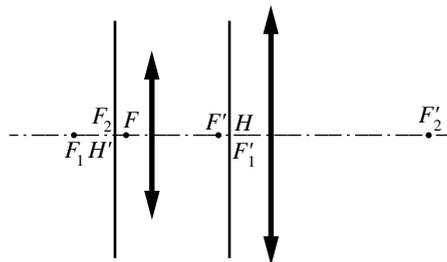
$$\overline{FH} = -f = -\frac{f_1 f_2}{e - f'_1 + f_2} = \frac{2f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2} \quad \text{et} \quad \overline{F'H'} = -f' = f = -\frac{2f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2}.$$

b) $\overline{H'F_2} = \overline{H'F'} + \overline{F'S_2} + \overline{S_2 F_2} = \frac{2f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2} + \frac{(f'_2 - f'_1)f'_2}{f'_1 + f'_2} - f'_2 = 0$

De même, $\overline{HF'_1} = \overline{HF} + \overline{FS_1} + \overline{S_1 F'_1} = 0$.

H' est bien confondu avec F_2 et H avec F'_1 .

c) Si $f'_1 = 10 \text{ cm}$, $f'_2 = 20 \text{ cm}$,
 $\overline{S_1 F} = -3,33 \text{ cm}$, $\overline{S_2 F'} = -6,66 \text{ cm}$,
 $e = 15 \text{ cm}$ et $\overline{FH} = 13,33 \text{ cm}$.

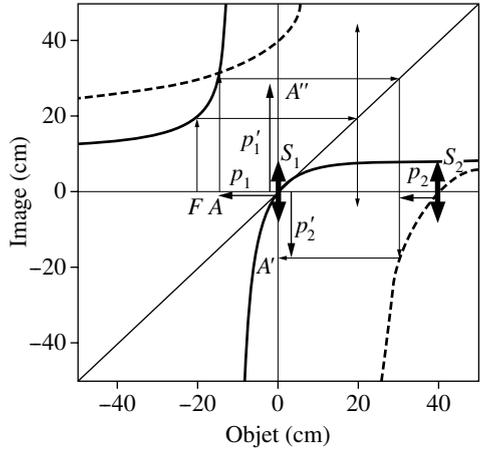


12 1) $p'_1 = \frac{10p_1}{10 + p_1}$, $p'_2 = \frac{20p_2}{20 + p_2}$.

2) On prend S_1 comme origine des axes (x, y) et on trace $p'_1(p_1)$ (en traits pleins sur la figure) et $p'_2(p_2)$ (en pointillés sur la figure) en prenant soin de décaler le sommet S_2 de 40 cm par rapport à S_1 .

3) On place sur l'axe des abscisses le point objet A ($p_1 = \overline{S_1A} = -15$ cm).

La courbe en traits pleins, $p'_1(p_1)$ donne sur l'axe des ordonnées la position de l'image intermédiaire A'' ($p'_1 = \overline{S_1A''} = 30$ cm). On repère alors $p_2 = \overline{S_2A''} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A''} = -10$ cm et on en tire p'_2 en construisant à partir de la courbe $p'_2(p_2)$.



13 Doublet

Partie A

1) C'est un système afocal. Il constitue une lunette astronomique rudimentaire. On ne peut pas utiliser les formules générales des combinaisons car l'intervalle optique $\Delta = \overline{F'_1F_2}$ qui se trouve au dénominateur de la plupart des formules est nul.

2) $A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$. On applique 2 fois la relation de Newton :

$$\sigma_1 = \overline{F_1A} = x, \sigma'_1 = \overline{F'_1A_1} = x_1, \sigma_1\sigma'_1 = xx_1 = f_1f'_1$$

$$\sigma_2 = \overline{F_2A_1} = x_1, \sigma'_2 = \overline{F'_2A'} = x', \sigma_2\sigma'_2 = x'_1x_1 = f_2f'_2$$

Soit en faisant le rapport $\frac{x'_1x_1}{xx_1} = \frac{x'}{x} = \frac{f_2f'_2}{f_1f'_1} = \left(\frac{f'_2}{f'_1}\right)^2$

3) L'image est réelle.

$$4) \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F_2S_2}}{\overline{F'_1S_1}} = \frac{\overline{S_2F_2}}{\overline{S_1F'_1}} = \frac{f_2}{f'_1} = -\frac{f'_2}{f'_1} = -\left(\frac{x'}{x}\right)^{1/2}$$

$$5) x' = \overline{F'_2A} = \overline{F'_2F_2} + \overline{F_2F'_1} + \overline{F'_1F_1} + \overline{F_1A} = -2f'_2 + 0 - 2f'_1 + x$$

$$\frac{x'}{x} = \frac{x - 2f'_2 - 2f'_1}{x} = \frac{f_2'^2}{f_1'^2} \implies x = \frac{2f_1'^2(f_2' + f_1')}{f_1'^2 - f_2'^2} = 2 \frac{f_1'^2}{f_1' - f_2'}, x = 8 \text{ cm.}$$

6) L'image est virtuelle si A' est en avant de L_2 , soit $\overline{S_2A'} < 0$.

$$\overline{S_2F'_2} + \overline{F'_2A'} = f'_2 + x' < 0$$

$$x' = \frac{f_2'^2}{f_1'^2} x < -f'_2 \implies x < -\frac{f_1'^2}{f_2'} = -4 \text{ cm}$$

Partie B

1) $\tan \alpha \sim \alpha = 3400/384\,000 = 8,85 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \sim 0,5^\circ$

$$2) x' = x \frac{f_2'^2}{f_1'^2} = -384\,000 \frac{1}{4} = -96\,000 \text{ km}$$

$$\gamma = -\sqrt{\frac{x'}{x}} = -\frac{1}{2} \implies \overline{A'B'} = \frac{3400}{2} = 1700 \text{ km}$$

$$\alpha' \approx \frac{\overline{A'B'}}{x'} = \frac{1700}{96\,000} = 0,018 \text{ rad} \approx 1,05^\circ$$

$$3) G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{A'B'}/\overline{A'F_2'}}{\overline{AB}/\overline{AF_1}} = \frac{\gamma(-x)}{-x'} = \sqrt{\frac{x'}{x}} = \left| \frac{1}{\gamma} \right|$$

Partie C

F' et F_1 sont conjugués pour L_2 . On a donc

$$\overline{F_2'F'} = \frac{f_2 f_2'}{F_2 F_1'} = \frac{(-1)(1)}{(-1)} = 1 \text{ cm}$$

$$f' = \overline{H'F'} = -\frac{f_1' f_2'}{F_1' F_2} = -\frac{2 \times 1}{1} = -2 \text{ cm}$$

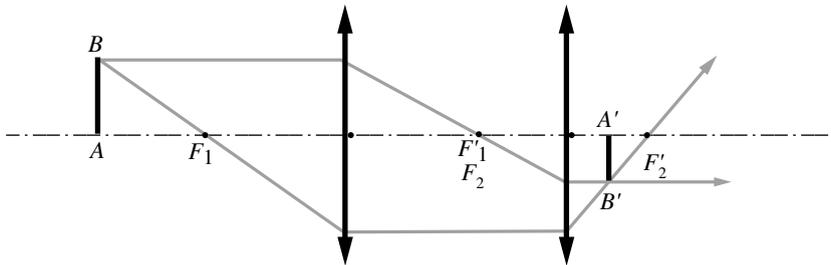


Figure (a)

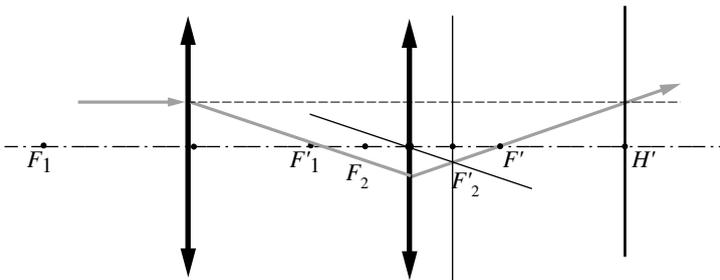


Figure (b)

14 Appareil photographique sous-marin

$$1. \overline{SA_0} = \frac{1}{n} \overline{SA} = -30 \text{ cm}, \gamma = \frac{n \overline{SA}}{\overline{SA_0}} = 1, \overline{A_0 B_0} = \overline{AB}$$

$$2. \frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA_0}} = \frac{1}{f'} \implies \overline{SA'} = 5 \text{ cm}$$

$$3. f'/f = -\frac{n'}{n} = -\frac{3}{4} \implies f = -8 \text{ cm}$$

4. La formule de Gullstrand donne $\frac{1}{f'} = (N-1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{-r} \right) = \frac{2(N-1)}{R}$, soit $r = f' = 6 \text{ cm}$.

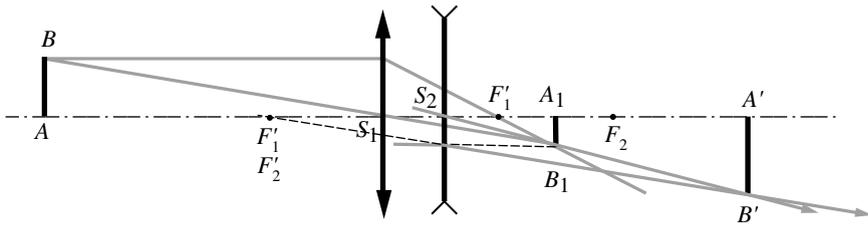
15 Photocopieur

Partie I

1) $f'_1 = 60 \text{ mm}$, $p_1 = \overline{S_1A} = -180 \text{ mm}$ et $p'_1 = \overline{S_1A_1} = 90 \text{ mm}$.

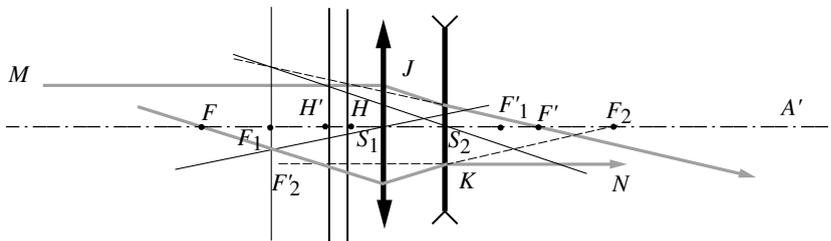
2) $p_2 = \overline{S_2A_1} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A_1} = p'_1 - e = 60 \text{ mm}$, $f'_2 = -90 \text{ mm}$, $p'_2 = \overline{S_2A_2} = 180 \text{ mm}$.
L'image est réelle et agrandie. Elle est placée sur le récepteur en A' et sera nette.

3) Les grandissements respectifs sont $\gamma_1 = p'_1/p_1 = -1/2$, $\gamma_2 = p'_2/p_2 = 3$.
 $\gamma = \gamma_1\gamma_2 = -3/2$. La taille de l'image du cercle est de $15 * 3/2 = 22,5 \text{ cm}$. Elle est trop grande pour apparaître en entier en format A4.



Partie II

1) $p_2 = 30 \text{ mm}$, $f'_2 = -90 \text{ mm}$, $p'_2 = \overline{S_2F'} = 45 \text{ mm}$.



2) $p'_1 = 120 \text{ mm}$, $f'_1 = 60 \text{ mm}$, $p_1 = \overline{S_1F} = -120 \text{ mm}$.

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = -\frac{60 \times (-90)}{30 - 60 - 90} = 90 \text{ mm}$$

$$\overline{FA} = \overline{FS_1} + \overline{S_1A} = -60 \text{ mm}, \quad \overline{F'A'} = \overline{F'S_2} + \overline{S_2A'} = 135 \text{ mm}$$

A et A' sont conjugués à travers l'association si $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = (-60) \cdot 135 = ff' = (-90) \times 90$, ce qui est le cas.

$$\overline{HA} = \overline{HF} + \overline{FA} = -150 \text{ mm}, \quad \overline{H'A'} = \overline{H'F'} + \overline{F'A'} = 225 \text{ mm}.$$

La relation de Descartes s'écrit $\frac{90}{225} + \frac{(-90)}{(-150)} = 1$

$$\gamma = \frac{n'}{n} \frac{\overline{H'A'}}{\overline{HA}} = -\frac{225}{150} = -\frac{3}{2}$$

$$3) \Sigma' = \gamma^2 \Sigma = 9/4 \Sigma. E' \Sigma' = E \Sigma \tau. E' = \frac{E \Sigma \tau}{\Sigma'} = 400 \text{ Wm}^{-2}.$$

16 Appareil photographique

Partie I

1) Si l'objet est à l'infini, son image est au plan focal. Donc, $x = 0$.

$$2) \gamma_1 = -\frac{\overline{F'_1 A'}}{f'_1} = \frac{-f_1}{F_1 A} = \frac{f'_1}{F_1 A}$$

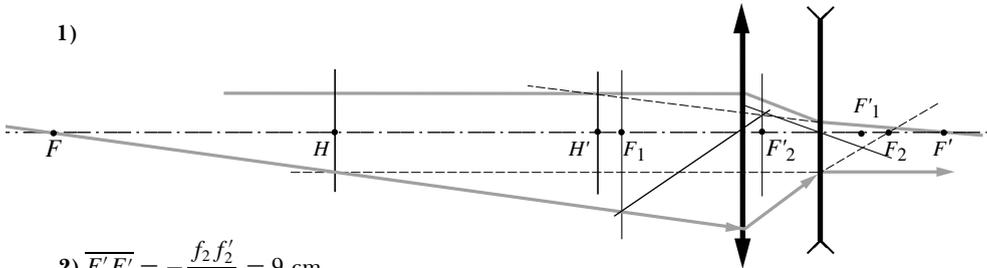
$$x = \overline{F'_1 A'} = \frac{f'_1}{10} = 6 \text{ mm}, \overline{F_1 A} = -10 f'_1 = -60 \text{ cm}$$

$$3) \gamma_1 = \frac{f'_1}{F_1 A} = \frac{6}{-12\,000} = -\frac{1}{2000}, \overline{A'B'} = \gamma_1 \overline{AB} = -1 \text{ mm}$$

$$\overline{F'_1 A'} = \frac{f'_1}{2000} = \frac{6}{2000} = 0,003 \text{ cm}$$

Partie II

1)



$$2) \overline{F'_2 F'} = -\frac{f_2 f'_2}{F'_1 F_2} = 9 \text{ cm}$$

$$\overline{H' F'} = -\frac{f'_1 f'_2}{F'_1 F_2} = 18 \text{ cm}$$

$$3) \gamma = \frac{f}{FA} = \frac{18}{-12\,000} = -\frac{3}{2000}, \overline{A'B'} = \gamma \overline{AB} = -3 \text{ mm}$$

4) $\overline{H' F'} = -\frac{f'_1 f'_2}{F'_1 F_2} = -\frac{6 \times (-3)}{F'_1 F_2} = 3 \text{ cm} \implies \overline{F'_1 F_2} = 6 \text{ cm}$. Auparavant l'intervalle optique valait 1 cm. Il faut écarter les 2 lentilles de 5 cm.

17 Lentille épaisse

1) La distance focale du premier dioptr est donnée par : $f'_1 = \overline{S_1 F'_1} = \frac{nr}{n-1} = 60 \text{ mm}$.

$$\overline{S_2 F'_1} = \overline{S_1 F'_1} - \overline{S_1 S_2} = f'_1 - e = 40 \text{ mm}.$$

2) La relation de conjugaison appliquée au 2^e dioptré donne :

$$\frac{1}{S_2 F'} - \frac{n}{S_2 F'_1} = \frac{1-n}{r_2} \implies \overline{S_2 F'} = 16 \text{ mm} \implies \overline{S_1 F'} = 36 \text{ mm}$$

$$3) \frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{n-1}{n} \frac{e}{r_1 r_2} \right) \implies f' = 24 \text{ mm}$$

$$\overline{S_2 H'} = \overline{S_2 F'} + \overline{F' H'} = 16 - 24 = -8 \text{ mm.}$$

Par raison de symétrie, $\overline{S_1 H} = 8 \text{ mm}$ et $\overline{H H'} = \overline{H S_1} + \overline{S_1 S_2} + \overline{S_2 H'} = 4 \text{ mm}$.

18 Distance focale équivalente

1) Les rayons incidents parallèles à l'axe vont converger en F'_1 après traversée de L_1 .

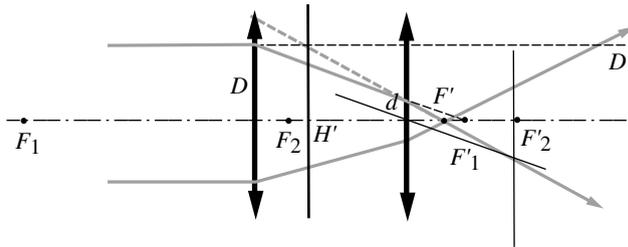
$$\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f'_2}, p_2 = \overline{S_2 F'_1} = \overline{S_1 F'_1} - \overline{S_1 S_2} = f'_1 - e$$

$$p'_2 = -\frac{f'_2(e - f'_1)}{f'_1 + f'_2 - e} = \overline{S_2 F'}$$

2) On a d'une part, $\frac{D}{d} = \frac{f'}{p'_2}$, et d'autre part, $\frac{D}{d} = \frac{f'_1}{S_2 F'_1} = \frac{f'_1}{p_2}$, soit

$$\frac{f'}{p'_2} = \frac{f'_1}{p_2} \implies f' \frac{p_2}{p'_2} = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - e}$$

A.N. $p_2 = 6 \text{ cm}$, $p'_2 = 6 \text{ cm}$ et $f' = 18 \text{ cm}$.



19 Objectif photographique

$$1) f'_1 = \frac{n_2 r_1}{n_2 - n_1}, f'_2 = \frac{r_2}{1 - n_2}, \frac{f'_1}{f_1} = -\frac{n_2}{n_1}, \frac{f'_2}{f_2} = -\frac{1}{n_2}$$

$$2) \Delta = e - f'_1 + f_2, \frac{1}{f'} = -\frac{\Delta}{f'_1 f'_2} = -\frac{e}{f'_1 f'_2} + \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{f_1}$$

En utilisant les relations écrites en 1, on obtient facilement la formule demandée.

3) $f' = 29,5 \text{ cm}$ pour $n_1 = 1$ et $f' = 54 \text{ m}$ pour $n_1 = 4/3$.

20 Microscope

$$1) \overline{F_2 F'} = -\frac{f_2 f'_2}{\Delta} = 1,5 \text{ cm}, f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = -1,5 \text{ cm.}$$

2) On applique la formule des lentilles à L_2 . L'objet est L_1 situé à une distance de -12 cm.

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{(-12)} = \frac{1}{3} \implies p' = \overline{S_2C} = 4 \text{ cm}$$

$$\implies \overline{F_2C} = \overline{F_2S_2} + \overline{S_2C} = 7 \text{ cm}$$

$$\gamma = \frac{p'}{p} = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3}, d = 6\gamma = -2 \text{ mm.}$$

3) On applique la relation de Newton au système.

$$\overline{FA} = \frac{ff'}{\overline{F'A'}}$$

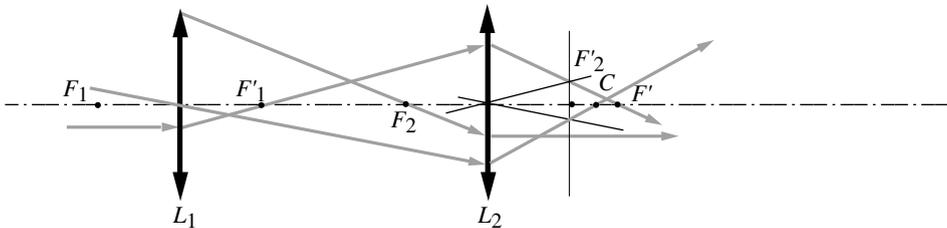
$$A' \implies \infty, \overline{FA} = 0$$

$$\overline{F'A'} = -25 \text{ cm}, \overline{FA} = \frac{(-1,5)(1,5)}{(-25)} = 0,09 \text{ cm}$$

La profondeur de champ est donc de 0,09 cm.

$$4) \overline{F'A'} = 75 \text{ cm}, \overline{FA} = \frac{(-1,5)(1,5)}{75} = -0,03 \text{ cm}$$

$$\gamma = -\frac{\sigma'}{f'} = -\frac{\overline{F'A'}}{H'F'} = -\frac{75}{1,5} = -50$$



21 Dioptries

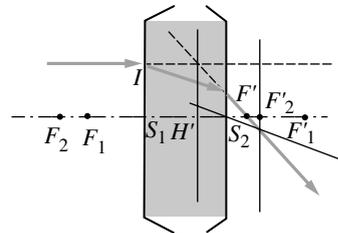
$$1) f_1 = -\frac{r_1}{n-1}, f'_1 = \frac{nr_1}{n-1}, f_2 = -\frac{nr_2}{1-n}, f'_2 = \frac{r_2}{1-n}$$

2) Après le premier dioptre, le rayon passant par A coupe l'axe en $F'_1 = A'$; $\overline{S_1F'_1} = f'_1$, $\overline{S_2F'_1} = f'_1 - e$

3) F' est le foyer du système. F' est l'image de F'_1 à travers le 2^e dioptre :

$$\frac{1}{\overline{S_2F'}} - \frac{n}{\overline{S_2F'_1}} = \frac{1-n}{r_2} \implies \overline{S_2F'} = \frac{r_2(f'_1 - e)}{(1-n)(f'_1 - e) + nr_2}$$

$$f_1 = -20 \text{ cm}, f'_1 = 30 \text{ cm}, f_2 = -30 \text{ cm}, f'_2 = 20 \text{ cm}, f' = 10,52 \text{ cm}, \Phi = 9,5\delta.$$



CHAPITRE 9

L'ŒIL

Pré-requis

L'œil est une association éventuellement réductible à une lentille mince. Les résultats obtenus dans les chapitres 7 et 8 seront donc utilisés ici.

Objectif

L'œil est l'association la plus couramment utilisée dans la vie quotidienne. Après quelques descriptions physiologiques, nous en présentons le fonctionnement, ses principaux défauts et leurs corrections.

1. INTRODUCTION

L'œil (figure 9.1) est une association complexe de dioptries séparés par des milieux d'indices différents. La présentation que nous en faisons ici concerne essentiellement l'œil humain ou celui des mammifères en général, doué d'une faculté d'accommodation par modification de la distance focale image du système optique. Dans ce cas, l'image nette d'un objet se forme toujours sur la rétine, quelle que soit sa position, sans qu'il y ait de modification de la position des éléments optiques de l'œil. D'autres animaux comme les poissons modifient la mise au point uniquement par déplacement du cristallin ; les insectes par contre n'ont pas de véritable système optique, le signal lumineux arrivant directement à la cellule nerveuse au fond de l'alvéole. On définit la résolution de l'œil par sa capacité à séparer deux points rapprochés ; ceci revient à considérer la séparation entre deux cellules nerveuses voisines. Nous allons donner sommairement la description d'un «œil normal» pour en dégager la structure optique et présenterons ensuite les moyens de corriger ses éventuels défauts (œil presbyte, myope ou hypermétrope).

2. DESCRIPTION DE L'ŒIL

Considérons le schéma de l'œil représenté sur la figure 9.1. L'œil, d'un volume de l'ordre de 7 cm^3 est partiellement entouré d'une membrane blanche et flexible de 12 mm de rayon environ, appelée la sclérotique, qui ne joue aucun rôle dans son fonctionnement optique. En avant, la sclérotique est interrompue par la cornée transparente qui constitue la fenêtre d'entrée de l'œil. La cavité interne fermée par la sclérotique et

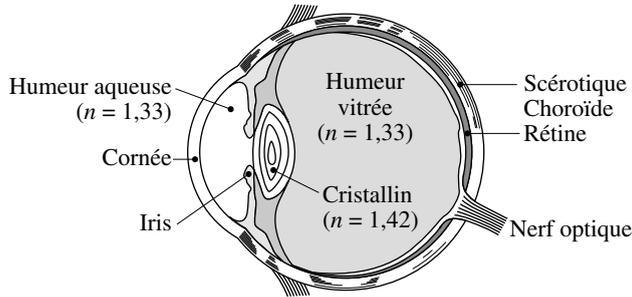


Figure 9.1 • Schéma de l'œil humain.

par la cornée est remplie de substances transparentes, l'humeur aqueuse et l'humeur vitrée d'indices proches de 1,33. La transparence de la cornée est maintenue par l'humidité causée par les glandes lacrymales dont le liquide est étalé par le clignement des paupières. La face interne de la sclérotique est tapissée d'une couche qui joue le rôle de régulateur thermique : la choroïde. En cas de grand froid, la régulation thermique est mal assurée en raison du faible flux sanguin et cela provoque des difficultés d'accommodation que chacun a constatées en hiver. La choroïde est abondamment pigmentée de noir afin d'éliminer les reflets, les lumières parasites et les éblouissements ; certains individus appelés albinos, dépourvus de pigments, ont le fond des yeux rouge. C'est cette coloration qui donne les yeux rouges sur les photos prises au flash, l'éblouissement étant trop rapide et trop important pour que l'œil ait le temps de diaphragmer et pour que la pigmentation masque la couleur rouge.

La cornée est partiellement recouverte par l'iris coloré, membrane contractile percée d'un trou appelé pupille, dont le diamètre est variable (2 à 8 mm) afin de contrôler le flux de lumière entrant dans l'œil. Dans l'obscurité, elle s'ouvre au maximum pour ne devenir qu'une très petite ouverture en présence de lumière intense. Elle est circulaire chez l'homme et souvent ovale chez les animaux. Certains agents chimiques provoquent la contraction ou la dilatation de la pupille et sont utilisés en ophtalmologie comme l'opium (contraction) ou l'atropine (dilatation et perte des réflexes pupillaires).

En arrière de la cornée, on trouve un élément optique complexe, le cristallin. C'est une lentille de distance focale variable, qui permet dans des conditions normales de placer toutes les images sur le plan de la rétine (situé à environ 25 mm derrière la cornée) sans déplacement des éléments optiques. On dit que le cristallin est doué d'un **pouvoir d'accommodation** dû à l'action des muscles auxquels il est attaché. Il est constitué d'un noyau entouré de cellules géantes disposées en « pelures d'oignon » pouvant glisser les unes sur les autres en modifiant la forme du cristallin et la répartition des indices (figure 9.2) qui varient de 1,4 au centre à 1,37 au bord. Quand le cristallin devient trop opaque, un défaut de vision apparaît chez de nombreuses personnes âgées, appelé la cataracte, et que l'on soigne aujourd'hui en substituant un cristallin artificiel au cristallin opaque.

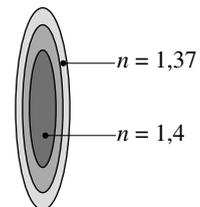


Figure 9.2 • Le cristallin.

La rétine est un tissu nerveux sensible et très fragile, seulement collée par la pression interne contre la sclérotique. C'est pourquoi des baisses de tension en perturbent le fonctionnement, pouvant provoquer des décollements. La rétine reçoit les images des objets à travers le système optique de l'œil et joue le rôle de détecteur lumineux. La

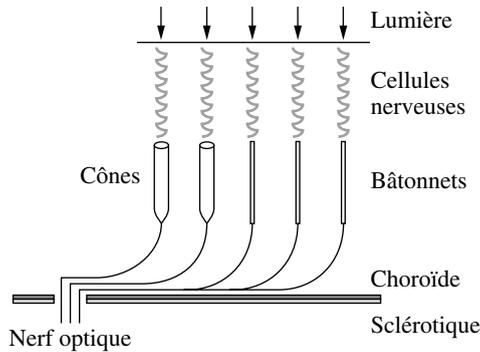


Figure 9.3 • Structure de la rétine.

lumière modifie la structure de ses cellules nerveuses qui transmettent l'information au cerveau. La structure de la rétine est schématisée sur la figure 9.3. On distingue deux grandes familles de terminaisons nerveuses :

— les **cônes**, sensibles aux couleurs ; leur dérèglement s'appelle le **daltonisme**, du nom du célèbre physicien John Dalton atteint de ce défaut de vision. Leur fonctionnement nécessite une forte luminosité, ce qui les rend inopérants la nuit. Ils sont nombreux au centre de la rétine où nous avons la plus grande acuité visuelle et où se forment les images dont on veut voir les détails. C'est effectivement là que se placent les images d'objets que l'on veut regarder avec précision (lecture, regarder la télévision...). Cette zone (fovéa et macula) est très petite car son champ n'est que de 45'. Il y a environ 130 000 cellules par mm² ;

— les **bâtonnets**, insensibles aux couleurs ; ils permettent de détecter de très faibles luminosités grâce à un fonctionnement en chaîne. C'est le système qui est utilisé en vision nocturne quand le niveau de luminosité est trop faible pour que les cônes soient activés.

Ces terminaisons nerveuses sont rassemblées en un cordon, le nerf optique, auquel elles transmettent l'information de nature « électrique ». Le nerf optique « sort » de l'œil par un orifice appelé **tache aveugle**. On peut facilement localiser la tache aveugle en effectuant l'expérience présentée dans l'encart 9.1.

Encart 9.1. Localisation de la tache aveugle

- 1) Sur une feuille de papier, dessiner deux cercles de 1 cm de diamètre à 10 cm l'un de l'autre.
- 2) Tenir cette feuille à 10 cm de l'œil en regardant le cercle de *gauche* avec l'œil *droit* (ou inversement) tout en fermant l'autre œil.
- 3) Reculer lentement la feuille ; quand le cercle de droite tombe sur la tache aveugle, il disparaît du champ de vision.

Dans cette position, l'image rétinienne du disque de droite tombe juste sur la tache aveugle et disparaît du champ de vision.

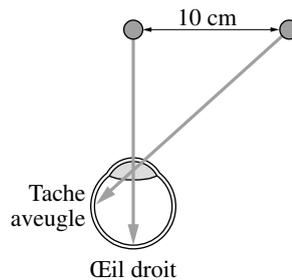


Figure 9.4 • Expérience permettant de repérer la tache aveugle.

3. QUELQUES CARACTÉRISTIQUES DE L'ŒIL

En raison de leur séparation, les yeux fonctionnent en télémètre, ce qui permet la vision en relief. Le strabisme est un défaut de superposition des images rétiniennes formées par les deux yeux. En cas de strabisme, l'une des deux images est neutralisée. Dans tous les cas, l'un des deux yeux domine l'autre ; on l'appelle l'**œil directeur**. C'est celui que l'on utilise automatiquement quand on aligne deux objets.

La sensibilité spectrale de l'œil n'est pas la même le jour et la nuit. Le maximum de sensibilité se situe dans le jaune à $0,55 \mu\text{m}$ (550 nm) de jour (vision photopique) et, de nuit, se déplace dans le bleu vers $0,5 \mu\text{m}$ (500 nm) (vision scotopique) (figure 9.5). Ainsi, quand la nuit tombe, la sensibilité aux couleurs chute (« la nuit tous les chats sont gris ») avec une augmentation de sensibilité dans le bleu que l'on appelle le **phénomène de Purkinje**. Par exemple, la Lune est bleutée et non blanche. Le passage de la vision diurne à la vision nocturne nécessite environ 20 à 60 min d'adaptation.

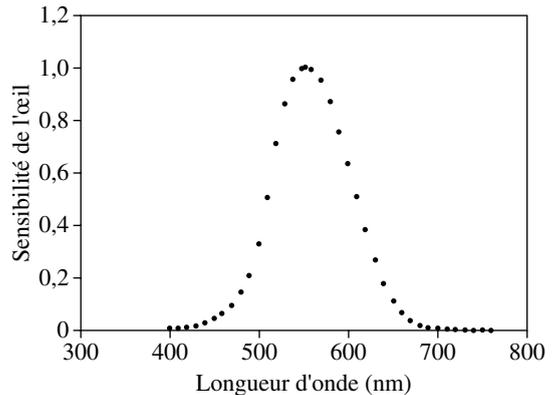


Figure 9.5 • Sensibilité spectrale photopique de l'œil.

Enfin, l'œil est un détecteur dont la **dynamique** est particulièrement importante car il y a un rapport 10^{14} entre le flux solaire et son seuil de sensibilité.

Encart 9.2. Notion d'acuité visuelle

En présence d'une accommodation parfaite, l'acuité visuelle, faculté de séparer deux détails ou de voir des motifs de très petite taille, est de l'ordre de $1'$ à $2'$. Cependant, dans certaines conditions, on est capable de voir des détails beaucoup plus petits, comme par exemple un fil dont le diamètre angulaire ne mesure que $1''$ à $2''$. L'acuité visuelle est limitée par deux contraintes :

- la **taille des cellules de la rétine**. Dans la fovéa, zone d'acuité maximale, il y a environ 130 000 cellules par mm^2 soit environ un espacement de $2,4 \mu\text{m}$ entre deux cellules ;
- la **limite imposée par la diffraction causée par la pupille qui est de l'ordre de $1'$** . Un point brillant donne sur la rétine, à 2 cm de la cornée, une tache de $6 \mu\text{m}$ de diamètre soit l'équivalent de 3 cônes en largeur et de 9 cônes en surface.

Ainsi, l'acuité visuelle théorique est reliée à la diffraction qui diminue de 3 fois les possibilités de séparation des cônes. Par contre, dans des conditions très spéciales avec un très fort contraste, on est capable par exemple de voir des fils électriques qui nécessitent un acuité de $1/2''$ (1 cm à 3 km). Dans les examens testant le pouvoir séparateur, on nous fait lire des lettres calibrées dont on tire une acuité exprimée en dixième. Une vue de 10/10 correspond à une séparation de $1'$. Cette valeur de 10/10 pourrait faire croire que c'est le maximum. Il n'en est rien car les échelles modernes sont graduées jusqu'à 20/10, correspondant à une résolution de $30'$.

4. SCHÉMA OPTIQUE DE L'ŒIL

L'examen précédent de la structure de l'œil montre qu'il est composé de trois dioptries sphériques, séparés par des milieux d'indices différents. Ces trois dioptries sont constitués par la cornée et par les deux faces du cristallin. L'ensemble forme un système centré appelé « œil schématique » représenté en coupe sur la figure 9.6.

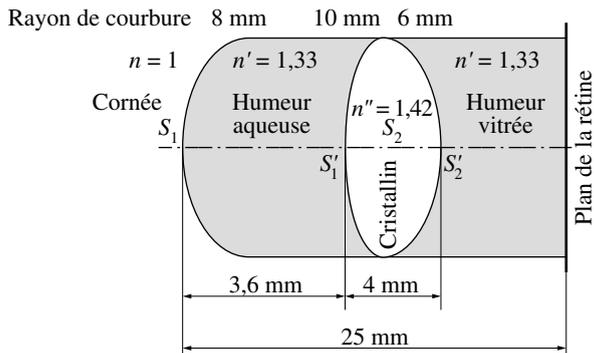


Figure 9.6 • Schéma optique de l'œil.

Le premier dioptré sphérique de sommet S_1 est constitué par la cornée. Il est convexe, de rayon de courbure $r_1 = 8$ mm, et sépare l'air, d'indice $n = 1$, de l'humeur aqueuse, d'indice $n' = 1,33$. Si l'on applique les formules du dioptré sphérique établies au chapitre 5, on peut calculer ses distances focales objet et image. On obtient :

$$f_1 = -\frac{r_1 n}{n' - n} = -24,24 \text{ mm}, \quad f'_1 = \frac{r_1 n'}{n' - n} = +32,24 \text{ mm}$$

Les deux autres dioptries sphériques sont les faces avant et arrière du cristallin, de sommets S'_1 et S'_2 . Si l'on néglige ici le pouvoir d'accommodation du cristallin, l'ensemble forme une lentille biconvexe, donc convergente (voir chapitre 7), dont les deux faces, séparées de $e_2 = 4$ mm, ont des rayons de courbure égaux à $r'_1 = 10$ mm et $r'_2 = -6$ mm. Les milieux extrêmes sont identiques. L'indice relatif est égal au rapport des indices du cristallin sur celui de l'humeur aqueuse soit $n_r = n''/n' = 1,42/1,33 = 1,068$.

Pour calculer la distance focale image équivalente de cette lentille on peut appliquer par exemple la formule de Newton (voir chapitre 8) :

$$\frac{1}{f'_2} = (n_r - 1) \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_2} \right) + e_2 \frac{(n_r - 1)^2}{n_r r'_1 r'_2} = 18,133 - 0,288 = 17,845$$

On a donc : $f'_2 = 56,04 \text{ mm} = -f_2$

On remarquera que le cristallin peut-être considéré comme une lentille mince de sommet S_2 situé à mi-chemin entre S'_1 et S'_2 car la correction due à l'épaisseur de la lentille (0,288) est petite devant le terme qui donne la vergence de la lentille mince (18,133).

L'œil est donc constitué de l'association des deux éléments optiques simples dont les caractéristiques sont les suivantes :

– un dioptre sphérique convergent, la cornée, de sommet S_1 :

$$f_1 = \overline{S_1 F_1} = -24,24 \text{ mm} \quad \text{et} \quad f'_1 = \overline{S_1 F'_1} = 32,24 \text{ mm}$$

– une lentille mince convergente, le cristallin, de sommet S_2 :

$$f_2 = \overline{S_2 F_2} = -56,04 \text{ mm} \quad \text{et} \quad f'_2 = \overline{S_2 F'_2} = 56,04 \text{ mm}$$

La distance du sommet de la cornée S_1 au centre du cristallin S_2 est : $e = 5,6 \text{ mm}$.

On peut déterminer les éléments cardinaux du doublet ainsi constitué en appliquant les formules des associations (voir chapitre 8). L'intervalle optique Δ est donné par :

$$\Delta = \overline{F'_1 F_2} = e - f'_1 + f_2 = -82,68 \text{ mm}$$

On obtient pour les distances focales du doublet :

$$f' = \overline{H' F'} = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = 21,85 \text{ mm}, \quad f = \overline{H F} = \frac{f_1 f_2}{\Delta} = -16,43 \text{ mm}$$

Comme $f' > 0$, le doublet est convergent. On remarquera que f et f' ne sont pas égales car les milieux extrêmes ont des indices différents. Un tel exemple a été développé à partir d'une autre démarche dans le chapitre 7 où l'on a pu établir que la vergence du doublet s'écrivait : $\Phi = \frac{n'}{f'}$. On a donc pour un œil normal :

$$\Phi = \frac{n'}{f'} = 60 \text{ dioptries}$$

valeur que l'on adoptera dans tous les calculs.

Si l'on repère la position des foyers objet et image du doublet par rapport aux foyers des éléments simples qui le constituent, on a :

$$\overline{F'_2 F'} = -\frac{f'_2 f_2}{\Delta} = -37,98 \text{ mm}, \quad \overline{F_1 F} = \frac{f'_1 f_1}{\Delta} = 9,45 \text{ mm}$$

Les deux éléments simples ainsi que les quatre points cardinaux sont repérés sur la figure 9.7.

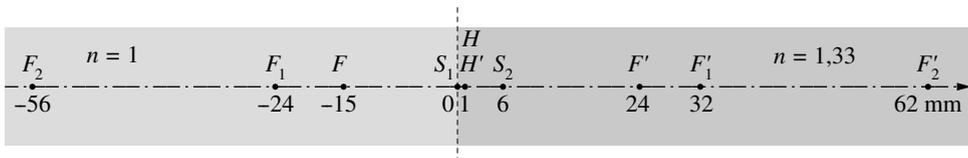


Figure 9.7 • Position des éléments cardinaux de l'œil.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \overline{H H'} &= \overline{H F} + \overline{F F_1} + \overline{F_1 S_1} + \overline{S_1 F'_1} + \overline{F'_1 F_2} + \overline{F_2 S_2} + \overline{S_2 F'_2} + \overline{F'_2 F'} + \overline{F' H'} \\ &= f + \overline{F F_1} - f_1 + f'_1 + \Delta - f_2 + f'_2 + \overline{F'_2 F'} - f' = 0,17 \text{ mm} \end{aligned}$$

Comme $\overline{H H'} \ll \overline{H' F'}$, la lentille est équivalente à une lentille mince convergente de sommet H' et de milieux extrêmes différents. C'est plus exactement un système centré dont les points principaux H et H' sont confondus et pour lesquels $f \neq f'$.

Comme $\overline{S_1H} = \overline{S_1H'} + \overline{H'H} = 1,64 \text{ mm}$ et $\overline{S_1H'} = \overline{S_1F_1} + \overline{F_1F} + \overline{FH} + \overline{HH'} = f'_1 + F_1F - f + \overline{HH'} = 1,81 \text{ mm}$, les points principaux H et H' sont pratiquement confondus 2 mm derrière la cornée.

Un œil normal, utilisé sans accommodation, est donc équivalent à une lentille convergente de sommet H' placé pratiquement au niveau de la cornée, de vergence $\Phi = 60 \delta$. On peut écrire sa relation de conjugaison sous la forme simple :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n'}{H'A'} - \frac{1}{HA} = \Phi = 60$$

La discussion précédente implique que, sans accommodation, un œil normal et au repos forme sur la rétine l'image nette d'un objet situé à l'infini. Quelle que soit la position de l'objet, la distance p' est donc fixée par la géométrie de l'œil. Dans la situation de vision à l'infini, ($p \rightarrow \infty$), on détermine que, pour un œil normal au repos :

$$\frac{n'}{p'} = 60$$

5. ŒIL EMMÉTROPE (NORMAL)

La description précédente a négligé le pouvoir d'accommodation du cristallin qui permet, dans une certaine marge, de placer les images sur la rétine, sans déplacement des éléments optiques. En vertu de ses possibilités d'accommodation, si l'objet se rapproche, l'œil modifie sa vergence sans modifier la distance séparant le système optique de la rétine. Il faut donc considérer l'œil normal, dit encore emmétrope, comme un système de vergence Φ variable. On peut donc écrire la formule de conjugaison sous la forme suivante :

$$\Phi = 60 - \frac{1}{p}$$

où Φ **varie suivant la position de l'objet**. Pour déterminer l'amplitude de variation de la vergence, on considère les deux positions extrêmes d'accommodation d'un œil normal qui peut, par convention, former des images nettes d'objets placés entre 25 cm et l'infini (pratiquement pour l'œil, l'infini s'étend au-delà de 6 m).

On distingue les deux limites suivantes :

– **vision éloignée nette** (*punctum remotum*, noté PR) : $p \rightarrow \infty$ ($\Phi = \Phi_{PR} = 60 \delta$). Dans ce cas, l'œil n'accommode pas et on retrouve la situation discutée au paragraphe précédent. On dit dans ce cas que l'œil est au repos ;

– **vision nette rapprochée** (*punctum proximum*, noté PP) : $p = -0,25 \text{ m}$ ($\Phi = \Phi_{PP} = 64 \delta$).

Ainsi, l'œil emmétrope doit être capable de modifier sa vergence Φ entre 60 et 64 dioptries. Cet écart de 4 dioptries est l'amplitude minimale nécessaire à une vision correcte. Pour être à l'aise, on étend cette amplitude de 60 à 65, couvrant ainsi 5 dioptries, intervalle appelé amplitude d'accommodation ou amplitude dioptrique. Dans les exemples traités par la suite, nous utiliserons une amplitude égale à 4 qui permet de couvrir toutes les distances comprises au-delà de 25 cm pour un œil normal.

L'œil « normal ». Pour les applications numériques, on utilise un modèle simplifié de l'œil schématique qui possède les propriétés normalisées suivantes :

- vergence totale de l'œil au repos (punctum remotum) = 60δ ;
- points principaux : $\overline{S_1H} = 1,64 \text{ mm}$; $\overline{S_1H'} = 1,81 \text{ mm}$; $\overline{HH'} = 0,17 \text{ mm}$;
- distances focales : $\overline{HF} = -16,43 \text{ mm}$; $\overline{H'F'} = 21,85 \text{ mm}$.

Un œil qui présente des défauts doit être corrigé avec des lunettes. Pour traiter le problème complètement et correctement, il faudrait étudier la combinaison optique constituée de l'œil et du verre de lunettes en utilisant par exemple la formule de Gullstrand établie au chapitre 8. Nous pouvons simplifier ce problème au maximum en faisant les deux hypothèses suivantes, justifiées dans le cadre d'une approche pédagogique. Premièrement l'œil peut être réduit à une lentille mince de vergence Φ et deuxièmement, on pourra négliger la distance séparant le verre de lunettes de l'œil en considérant l'ensemble comme deux lentilles accolées. Finalement, la vergence du système œil + lunettes sera simplement la somme des deux vergences individuelles (voir chapitre 7). Cette approximation prend en compte les indices des différents milieux. La deuxième approximation est pleinement justifiée avec les porteurs de lentilles de contact qui sont effectivement collées à la cornée.

6. LES DÉFAUTS DE L'ŒIL ET COMMENT LES CORRIGER

« Toute la conduite de notre vie dépend de nos sens, entre lesquels celui de la vue étant le plus noble. Il n'y a point de doute que les inventions qui servent à augmenter sa puissance ne soient des plus utiles » (René Descartes, La Dioptrique, 1633).

Statistiquement, 75 % de la population française a une vision imparfaite, dont la correction ne serait pas toujours optimisée. Comme c'est souvent le cas, la personne concernée subit une aggravation progressive de son défaut visuel provoquant un défaut d'accommodation et induisant souvent une mise en veille insoupçonnée de l'un des deux yeux. Nous allons étudier quelques défauts caractéristiques et expliquer comment ils sont simplement corrigés grâce au port de lunettes ou de lentilles en utilisant les deux hypothèses décrites ci-dessus.

6.1. Œil presbyte

Avec l'âge, le cristallin durcit, devient moins déformable, ce qui provoque une difficulté d'accommodation et, vers l'âge de 40 ans, l'œil devient **presbyte**. Son amplitude dioptrique est alors bien inférieure à 5. Cette amplitude diminue fortement avec l'âge de l'individu pour passer de 15 à 8 ans, à 3 à 50 ans et à 1 à 60 ans (figure 9.8). Considérons un individu fortement presbyte dont l'amplitude dioptrique est réduite à 1.

Sans lunettes, l'œil au repos a sa vergence $\Phi = 60 \delta$ quand il met au point sur un objet situé à l'infini. Cependant le punctum proximum étant réalisé avec la puissance maximale égale à 61, à partir de la formule de conjugaison précédente, on déduit que l'objet

est à une distance p telle que $60 - \frac{1}{p} = 61$ soit $p = -1$ m. Ainsi la mise au point ne pourra pas se faire pour cet œil presbyte à des distances inférieures à 1 m. Pour corriger ce défaut, l'individu portera par exemple des lunettes constituées de verres convergents de vergence 2 dioptries (distance focale de 50 cm). Ainsi, au punctum remotum, avec des lunettes et au repos, la vergence combinée de l'œil et des lunettes est égale à $60 + 2 = 62 \delta$, ce qui permet de voir l'image nette d'un objet placé à $p = -50$ cm. Avec l'œil accommodé au punctum proximum, la vergence totale est de $61 + 2 = 63 \delta$, ce qui permet de voir l'image nette d'un objet placé à $p = -33$ cm de l'œil. Grâce aux lunettes, l'individu peut accommoder sur des objets placés entre 33 et 50 cm de son œil. Finalement, cet œil possède deux domaines d'accommodation, de 33 à 50 cm avec lunettes et de 1 m à l'infini sans lunettes.

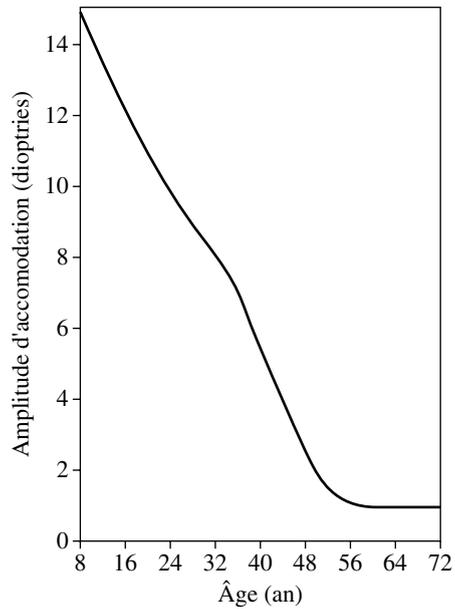


Figure 9.8 • Évolution de l'amplitude d'accommodation avec l'âge.

Tableau 9.1 • Corrections d'un œil presbyte

	Œil normal	Presbyte	Avec lunettes : $\Phi' = 1$	Avec lunettes : $\Phi' = 2$
Amplitude	4	1	1	1
Repos (PR)	$\Phi = 60$ (∞)	$\Phi = 60$ (∞)	$\Phi = 61$ ($p = -1$ m)	$\Phi = 62$ ($p = -50$ cm)
Maximum (PP)	$\Phi = 64$ ($p = -25$ cm)	$\Phi = 61$ ($p = -1$ m)	$\Phi = 62$ ($p = -50$ cm)	$\Phi = 63$ ($p = -33$ cm)

Pour corriger complètement cet œil presbyte, il faut utiliser des verres à double foyer (figure 9.9), la partie basse pour la vue rapprochée ($f' = 50$ cm ; $\Phi = 2$ dioptries) et la partie haute pour la vision à distance moyenne ($f' = 1$ m ; $\Phi = 1$ dioptrie). À plus grande distance ces lunettes ne sont plus utiles. La correction de cet œil est tout juste suffisante car, équipé de verres de 2 dioptries, il met au point au plus près à 33 cm. Il lui faudrait des verres de 3 dioptries pour lire avec confort. On fabrique actuellement des verres à focale variable de haut en bas évitant la discontinuité du double foyer des lunettes classiques.

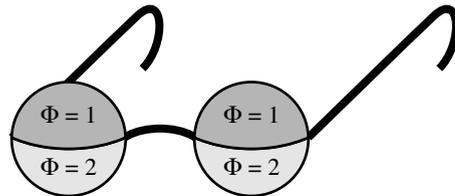


Figure 9.9 • Structure des verres d'une paire de lunettes à doubles foyers.

6.2. Œil myope

L'œil myope est un œil trop convergent : au repos l'image d'un objet à l'infini se forme en avant de la rétine. La vergence d'un œil myope au repos est donc supérieure à 60 et il faut la diminuer en interposant une lentille divergente (figure 9.10).

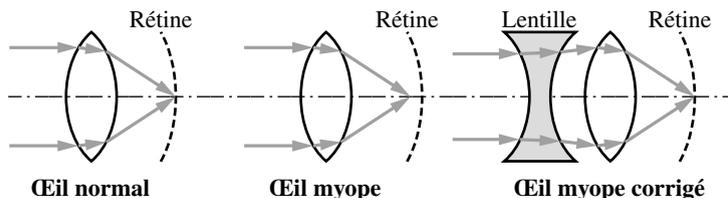


Figure 9.10 • L'œil normal et l'œil myope avec et sans correction.

Prenons l'exemple d'un myope de vergence $\Phi = 61\delta$ dont l'amplitude dioptrique est égale à 4. Les limites de mise au point correspondent au repos à 61 et 65 dioptries ou encore à des distances respectives de -1 m et de -20 cm. On corrige cet œil en ajoutant des verres correcteurs d'une vergence $\Phi = -1$ dioptrie. La vergence combinée de l'œil et des verres variant de 60 à 64, une mise au point est possible sur des objets placés entre l'infini et 25 cm. L'œil est parfaitement corrigé.

Plus tard, cet individu va conserver sa myopie et devenir presbyte. Reprenons le même exemple avec $\Phi = 61\delta$ et une amplitude dioptrique de 1. Sans lunettes la mise au point est possible entre 50 cm et 1 m. Des verres correcteurs d'une vergence négative de -1 dioptrie étendent ce domaine entre 1 m et l'infini. La correction n'est pas complète puisqu'il ne peut toujours pas accommoder en dessous de 50 cm. Il lui faut alors des verres de 1 et 2 dioptries pour la lecture. En résumé, il portera des verres divergents pour voir loin et des verres convergents pour lire.

Tableau 9.2 • Corrections d'un œil myope et presbyte

	Œil myope	Avec lunettes $\Phi' = -1$	Myope et presbyte	Myope et presbyte avec lunettes $\Phi' = -1$
Amplitude	4	4	1	1
Repos (PR)	$\Phi = 61$ ($p = -1$ m)	$\Phi = 60$ (∞)	$\Phi = 61$ ($p = -1$ m)	$\Phi = 60$ (∞)
Maximum (PP)	$\Phi = 65$ ($p = -20$ cm)	$\Phi = 64$ ($p = -25$ cm)	$\Phi = 62$ ($p = -50$ cm)	$\Phi = 61$ ($p = -1$ m)

6.3. Œil hypermétrope

La situation est inverse de la précédente. L'œil n'étant pas assez convergent, l'image d'un objet à l'infini se forme derrière la lentille. Dans ce cas, sa vergence de l'œil au repos est plutôt inférieure à 60δ . Prenons le cas par exemple d'un œil hypermétrope

dont l'amplitude dioptrique est de 4δ , sa vergence est donc comprise entre 59δ (punctum remotum) et 63δ (punctum proximum). Si l'on applique la formule de conjugaison de l'œil, on voit alors que l'œil au repos de l'individu ne peut pas faire de mise au point sur un objet situé à l'infini. En effet, la vergence étant alors inférieure à 60δ elle ne peut correspondre qu'à des objets virtuels. Au punctum proximum la mise au point est possible pour un objet réel situé à 33 cm. Finalement cet individu pourra avoir une vision nette d'objets réels situés au delà de 33 cm uniquement avec une accommodation et son amplitude dioptrique utile n'est que de 3δ .

Des lunettes convergentes d'une vergence égale à 1δ étendent ce domaine entre 25 cm et l'infini où l'œil est au repos. La correction est alors complète.

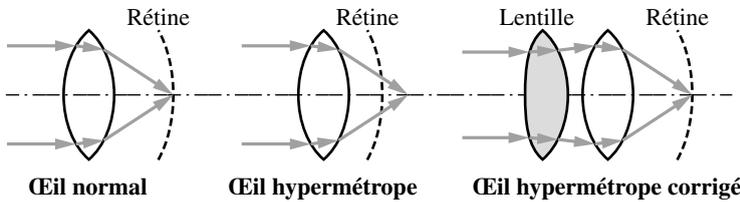


Figure 9.11 • L'œil normal et l'œil hypermétrope avec et sans correction.

Quand cet œil devient presbyte avec une limitation de la vergence naturelle inférieure à 60δ par exemple, sans lunettes la mise au point est impossible. Des verres de 1 dioptrie, permettent la lecture au-delà de 1 m. Une correction complète nécessite des verres de vergence 1,2, 3 et 4δ .

Tableau 9.3 • Corrections d'un œil hypermétrope et presbyte

	Œil hypermétrope	Œil hypermétrope avec lunettes $\Phi' = 1$	Hypermétrope et presbyte	Hypermétrope et presbyte avec lunettes $\Phi' = 1$	Hypermétrope et presbyte avec lunettes $\Phi' = 2$
Amplitude	4	4	1	1	1
Repos (PR)	$\Phi = 59$ ($p = 1$ m) vision impossible (objet virtuel)	$\Phi = 60$ (∞)	$\Phi = 59$ ($p = 1$ m) vision impossible (objet virtuel)	$\Phi = 60$ (∞)	$\Phi = 61$ ($p = -1$ m)
Maximum (PP)	$\Phi = 63$ ($p = -33$ cm)	$\Phi = 64$ ($p = -25$ cm)	$\Phi = 60$ (∞)	$\Phi = 61$ ($p = -1$ m)	$\Phi = 62$ ($p = -50$ cm)

À RETENIR

➤ **L'œil humain** par sa structure optique est une association de trois dioptries sphériques, séparés par des milieux d'indices différents. L'ensemble forme un système centré. Ces trois dioptries sont constitués par la cornée et par les deux faces du cristallin. L'œil est doué d'un pouvoir d'accommodation par modification de la distance focale du système optique équivalent. Ainsi l'image nette d'un objet se forme toujours sur la rétine située à 22 mm derrière la cornée, quelle que soit sa position, sans qu'il y ait de modification de la position des éléments optiques de l'œil.

➤ **L'œil schématique.** Un œil normal au repos (sans accommodation) peut être schématisé par l'association :

– d'un dioptre sphérique convergent, la cornée : $f_1 = -24,24$ mm et $f'_1 = 32,24$ mm ;

– d'une lentille mince convergente, le cristallin : $f_2 = -56,04$ mm et $f'_2 = 56,04$ mm.

La distance du sommet de la cornée au centre du cristallin est $e = 5,6$ mm.

Ses distances focales sont :

$$f' = \overline{H'F'} = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = 21,85 \text{ mm}, \quad f = \overline{HF} = \frac{f_1 f_2}{\Delta} = -16,43 \text{ mm}.$$

➤ L'œil au repos est donc équivalent à une lentille mince convergente de distance focale image 20 mm et de 60δ de vergence.

Un œil normal et au repos forme donc sur la rétine l'image nette d'un objet situé à l'infini.

➤ **L'œil emmétrope (normal).** En vertu de ses possibilités d'accommodation, si l'objet se rapproche, l'œil modifie sa vergence Φ sans modifier la distance séparant le système optique de la rétine. L'amplitude de variation de Φ d'un œil normal est de 4 dioptries ; elle est déterminée en considérant les deux positions extrêmes d'accommodation suivantes :

– le punctum remotum (PR) : $p \rightarrow \infty$ ($\Phi = 60 \delta$) et l'œil n'accommode pas ;

– le punctum proximum (PP) : $p = -25$ cm ($\Phi = 64 \delta$).

$$\text{On a } \Phi = 60 - \frac{1}{p}$$

➤ **Les défauts de l'œil :**

– un œil presbyte a une faible amplitude dioptrique très inférieure à 4 ;

– un œil myope converge en avant de la rétine et $\Phi_{PR} > 60$;

– un œil hypermétrope converge en arrière de la rétine et $\Phi_{PR} < 60$.

Un œil qui présente des défauts doit être corrigé avec des lunettes. La correction est donnée par la vergence du système « œil + lunettes ». Si l'on considère l'ensemble comme deux lentilles accolées, cette vergence est simplement la somme des deux vergences individuelles.

QCM

1 Dans l'œil, la convergence d'un rayon incident est assurée par

- (1) la cornée et le cristallin
 (2) le cristallin seul
 (3) le cristallin et l'humeur aqueuse

2 Un œil myope

- (1) converge trop
 (2) ne converge pas assez
 (3) est afocal

3 Le foyer d'un œil hypermétrope est

- (1) en avant de la rétine
 (2) derrière la rétine
 (3) à l'infini

4 Un œil peut être

- (1) myope et presbyte
 (2) myope et hypermétrope
 (3) myope et daltonien

5 Un individu qui porte des lunettes pour lire son journal est

- (1) myope
 (2) hypermétrope
 (3) presbyte

6 Un individu qui accommode correctement

- (1) lit son journal sans lunettes.
 (2) voit nettement à l'infini.
 (3) met au point toutes les images sur la rétine.

7 La notation PR signifie

- (1) pouvoir de résolution
 (2) pouvoir de réfraction
 (3) punctum remotum

8 Un œil a une vergence de 60δ et une amplitude d'accommodation de 5δ . Son punctum proximum est situé à

- (1) 20 cm
 (2) 25 cm
 (3) 60 cm

9 Un œil a une vergence de 63δ et une amplitude d'accommodation de 3δ . Cet œil est

- (1) myope
 (2) hypermétrope
 (3) presbyte

10 Un individu a son punctum remotum à l'infini et son punctum proximum à 33 cm. Son amplitude d'accommodation est de

- (1) 3δ
 (2) 4δ
 (3) 5δ

Réponses : 1. 1, 2. 1, 3. 2, 4. 1 et 3, 5. 2 et 3, 6. 1, 2, 3, 7. 3, 8. 1, 9. 1 et 3, 10. 1

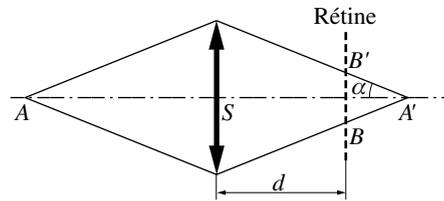
EXERCICES

- 1** L'œil humain est considéré comme une lentille mince convergente de distance focale variable. Sa particularité est la valeur fixe de la distance lentille-image définie par la taille de l'œil : chez un individu normal cette distance est égale à 25 mm. On se place dans les deux situations limites suivantes :
- Vision à l'infini : quelle est la distance focale de l'œil pour une mise au point sur l'infini ?
 - En vision rapprochée, la distance minimale de mise au point (lentille-objet) est égale à 25 cm. Quelle est la distance focale de l'œil dans ces conditions ?
 - Donner la valeur Φ de la vergence de l'œil dans les cas a) et b).

- 2** Une personne a un œil presbyte et hypermétrope assimilé à une lentille mince de distance focale fixe $f' = 25$ mm. La rétine R se trouve à une distance fixe, $d = 20$ mm de la lentille.

a) Cette personne voit-elle distinctement les objets situés à l'infini ?

b) Cette personne lit le journal A situé à une distance $p = -25$ cm. Calculer la distance $p' = \overline{SA'}$ et en déduire la distance de la rétine à l'image.



c) Le faisceau issu du point A forme sur la rétine une tache de longueur $x = BB'$. Calculer la longueur de cette tache en fonction du diamètre D de la lentille. Sachant que l'image sera floue si $BB' > 10^{-4}$ cm, la personne peut-elle lire son journal sans lunettes si $D = 4$ mm ?

d) Dans le cas général, démontrer que $x = D \left(1 - \frac{d}{f'} - \frac{d}{n'p} \right)$.

En prenant en compte la contrainte précédente, à partir de quelle distance un objet est-il vu flou ?

e) On corrige cet œil en plaçant une lentille de distance focale f'' accolée à la précédente (la distance entre les deux lentilles est $e = 0$). Exprimer la distance focale F' du doublet en fonction de f' et f'' . Calculer F' pour que l'image A' de b) se forme sur la rétine. En déduire la valeur de f'' et la vergence de la lentille correctrice.

- 3** Un œil normal dont le punctum proximum est de 20 cm est placé au foyer image d'une loupe de 5 cm de distance focale.

a) À quelle distance minimale de la loupe peut se trouver l'objet examiné ?

b) Où faut-il placer l'objet pour que l'image soit à l'infini ? Quelle est la latitude de mise au point ?

c) En vieillissant, cet œil devient presbyte et son amplitude dioptrique se réduit à une dioptrie. Déterminer :

- le punctum proximum de cet individu ;
- les positions respectives de l'objet pour que l'image soit vue à l'infini et au punctum proximum.

4 Un œil myope a son punctum proximum placé à 10 cm.

- a) Où se trouve son punctum remotum si son amplitude dioptrique est de 8 dioptries ?
- b) Quelle est la nature de la lentille qu'il faut placer devant l'œil pour qu'il voie nettement à l'infini. Quelle est sa vergence ?
- c) On veut corriger ce défaut par un verre de contact taillé dans une substance d'indice $n = 1,5$. Le rayon de la cornée étant de 8 mm, quel doit-être celui de l'autre face du verre de contact ?

5 On considère un œil réduit du point de vue optique à une lentille (L_2) mince, convergente, de distance focale f'_2 . Dans un œil normal, sans accommodation, le foyer image F'_2 est situé sur la rétine. Dans un œil myope, la distance focale est trop courte et elle est trop longue dans un œil hypermétrope. On appelle D la distance lentille-rétine et on pose $D = f'_2 + \delta$, δ pouvant être > 0 ou < 0 suivant le défaut de l'œil.

On corrige l'œil présentant un défaut en plaçant à une distance e en avant de la lentille L_2 , un verre correcteur constitué d'une lentille mince L_1 de distance focale f'_1 . Le système ainsi constitué est tel que, sans accommodation, le foyer F' du système est placé sur la rétine.

a) Faire un schéma sur lequel on placera L_1 , L_2 , F' et F'_2 en précisant les distances f'_2 , D et δ .

b) À partir des formules générales des combinaisons de deux lentilles, écrire une relation donnant f'_1 en fonction de δ , e et f'_2 .

c) Application numérique. $D = 17$ mm ; $e = 1$ cm. Préciser la nature de la lentille L_1 dans les deux cas suivants :

- 1) œil myope : $\delta = 2$ mm ;
- 2) œil hypermétrope : $\delta = -2$ mm.

d) Mêmes calculs que dans c) avec $e = 0$ (verre de contact).

e) Dans le cas c)1) (œil myope), faire une figure à l'échelle en plaçant les lentilles L_1 et L_2 , leurs foyers, le foyer F' ainsi que le point principal H' .

f) On observe un objet situé à grande distance. Cet objet est vu sous un angle α . Sur la même figure, construire son image dans le cas d'un œil normal ($\delta = 0$) et dans le cas de l'œil myope décrit en c)1). Que constatez-vous en comparant les deux images ?

6 On étudie certaines caractéristiques de l'œil humain à l'aide de différents modèles optiques : système de deux lentilles, lentille mince, dioptre... On se penche en particulier sur le pouvoir d'accommodation de l'œil et sur le procédé de correction d'un œil présentant des défauts.

a) Étude du doublet. Le système optique de l'œil (cornée, cristallin, rétine) est représenté par un système de deux lentilles minces convergentes L_1 et L_2 séparées par une distance $e = \overline{S_1S_2} = 6 \text{ mm}$:

- L_1 (cornée) : foyers F_1 et F'_1 ; distance focale $= f'_1 = 28 \text{ mm}$;
- L_2 (cristallin) : foyers F_2 et F'_2 ; distance focale $= f'_2 = 56 \text{ mm}$.

On appelle H et H' les points principaux du système, F et F' les foyers du système.

1) Sur une figure à l'échelle, tracer le rayon émergent correspondant à un rayon incident parallèle à l'axe. Indiquer les positions du foyer F' et du point principal image H' . Mesurer la distance focale résultante φ' . Le système est-il convergent ou divergent ?

2) En utilisant un rayon sortant parallèlement à l'axe, placer le foyer F et le plan principal H . Que constatez vous pour H et H' ? Calculer $\Delta = \overline{F'_1F_2}, \overline{F'_2F'}, \overline{F_1F}$ et φ' . En déduire la distance $\overline{HH'}$. Montrer que le doublet est équivalent à une lentille mince unique L dont on précisera la position ainsi que la distance focale image.

b) Correction d'un œil hypermétrope. L'œil est réduit à une lentille mince L convergente de sommet S et de distance focale φ' .

1) La distance entre S et le plan de la rétine (R) est de 20 mm. Quelle doit être la valeur de la distance focale φ' de la lentille pour que l'individu puisse former sur la rétine l'image d'un objet A situé à l'infini ?

2) L'individu désire observer un objet situé à 25 cm en avant de L en accommodant. La distance entre S et (R) étant toujours de 20 mm, la distance focale de L varie. Quelle est sa nouvelle valeur pour que l'image soit toujours sur la rétine ?

3) L'œil est hypermétrope : ($\varphi' = 20 \text{ mm}$ au repos) et la distance entre S et (R) est égale à 19 mm. Où se forme l'image A' d'un objet A situé à l'infini ?

Quelle devrait-être la distance focale F' pour que l'œil soit sans défaut ?

4) Pour corriger cet œil, on ajoute un verre correcteur assimilé à une lentille mince de distance focale image f' à une distance $e = 1 \text{ cm}$ en avant de L . Montrer que la distance focale résultante F' est donnée par $\frac{1}{F'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\varphi'} - \frac{e}{f'\varphi'}$.

Calculer f' . Le verre correcteur est-il convergent ou divergent ?

5) Cette lentille correctrice est taillée dans un verre d'indice $n = 1,5$. Sachant que les rayons de courbure des deux faces sont les mêmes (en valeur absolue), calculer leur valeur.

c) Accommodation par déformation du cristallin. On améliore les descriptions précédentes en utilisant « l'œil réduit de Donders ». La surface de l'œil est un dioptre sphérique séparant deux milieux d'indices 1 et $4/3$ (humeur aqueuse).

1) Quelle est la valeur du rayon de courbure de telle façon que la distance focale image f' soit égale à 20 mm ?

2) Le même œil met au point sur un objet placé à 25 cm du sommet du dioptré. Calculer le nouveau rayon de courbure sachant que l'image se forme toujours sur la rétine à 20 mm du sommet du dioptré.

7 L'œil

La surface de l'œil est considérée comme un dioptré sphérique séparant 2 milieux d'indices $n = 1$ et $n' = 4/3$.

1) Quelle est la valeur du rayon de courbure de telle façon que la distance focale image f' soit égale à 20 mm.

2) Le même œil met au point sur un objet placé à 25 cm du sommet du dioptré. Calculer le nouveau rayon de courbure sachant que l'image se forme toujours sur la rétine à 20 mm du sommet du dioptré.

8 Vision dans un miroir

Écrire sans démonstration la formule de conjugaison et la formule du grandissement γ d'un miroir sphérique.

Une personne A regarde dans un miroir convergent de rayon de courbure r , son image A' .

Démontrer que $d = \overline{AA'} = \frac{2rp - 2p^2}{2p - r}$.

Cette personne s'arrange pour positionner l'image A' au *punctum proximum* placé à une distance $d = 25$ cm de son œil. Écrire l'équation du second degré dont p est solution. Pour chaque solution, calculer p , p' et le grandissement γ avec un rayon de 30 cm. Quelle est la bonne solution ?

Solutions

1 a) p' est fixe, égal à la distance lentille-rétine et f' varie selon la position de l'objet que l'on regarde. En vision à l'infini, $\frac{1}{p} = 0$. La formule de conjugaison des lentilles minces donne alors $p' = f' = 25$ mm.

b) En vision de près, lorsque $p = -20$ cm, $p' = 25$ mm, $\frac{1}{p'} - \frac{1}{n'p} = \frac{1}{f'}$, ce qui donne $f' = 22,8$ mm.

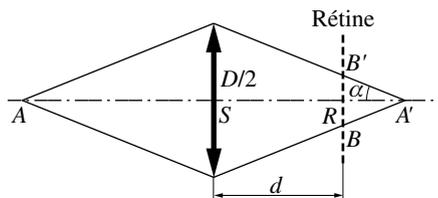
c) $\Phi = \frac{1}{f'}$ en dioptries, c'est-à-dire en m^{-1} . Dans le cas a), $\Phi = 53,2 \delta$ et dans le cas b), $\Phi = 58,28 \delta$.

2 a) Pour un objet à l'infini, $p' = f' = 25$ mm. Les images sont bien formées sur la rétine et la personne voit distinctement.

b) La distance focale est fixe. Si $p = -25$ cm, $p' = 2,703$ cm. On a $\frac{1}{p'} - \frac{1}{n'p} = \frac{1}{f'}$. La distance entre la rétine R et l'image A' est $\overline{RA'} = \overline{SA'} - d = 2,03$ mm.

c) Si $x = BB'$, on peut écrire $\frac{x}{2\overline{RA'}} = \frac{D}{2\overline{SA'}}$,
soit $x = D \frac{p' - d}{p'} = 1,74 \frac{D}{21,74}$.

Si $D = 4$ mm, $x = 0,30$ mm. L'image est donc floue. L'individu ne peut pas lire son journal sans lunettes.



d) Dans le cas général, $x = \frac{D \cdot \overline{RA'}}{\overline{SA'}} = \frac{D(p' - d)}{p'} = D \left(1 - \frac{d}{p'}\right) = D \left(1 - \frac{d}{f'} - \frac{d}{p}\right)$.
L'objet est vu flou si $x > 10^{-5}$ mm, soit $p < -\frac{Dd}{D \left(1 - \frac{d}{f'}\right) - 10^{-5}} = -7,5 \cdot 10^6$ mm.

Il voit donc flou tout le temps.

e) La loi de Gullstrand donne la vergence du doublet en fonction de celle de chacun des éléments : $\frac{n}{F'} = \frac{n}{f'} + \frac{1}{f''}$. Par ailleurs, une fois corrigé, l'œil se comporte comme un œil emmétrope qui forme une image sur la rétine lorsque $p = -250$ mm et $p' = 20$ mm. En appliquant la relation de conjugaison à la lentille équivalente de distance focale F' , on trouve $F' = 23,25$ mm, ce qui donne $f'' = 249,7$ mm. Les lunettes ont donc une vergence de 4δ .

3 a) Si le punctum proximum est placé à -20 cm du foyer image, on a pour la loupe $p'_1 = -15$ cm. En appliquant la relation de conjugaison, on trouve que l'objet examiné se trouve à $p_1 = -3,75$ cm.

b) Pour que l'image soit à l'infini, il faut que $p_2 = -f' = -5$ cm. La latitude de mise au point est donc égale à $p_1 - p_2 = 1,25$ cm.

c) Notons respectivement Φ_{PR} et Φ_{PP} , les punctum proximum et remotum de l'œil vieillissant. La relation de conjugaison de l'œil s'écrit :

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{np} + \frac{1}{f'}$$

À l'infini (punctum remotum), $\frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} = \frac{\Phi_{PR}}{n}$.

Au punctum proximum $\Phi_{PP} = \Phi_{PR} + 1$, et $\frac{1}{p'} - \frac{1}{np} = \frac{\Phi_{PP}}{n} = \frac{\Phi_{PR} + 1}{n}$, avec p' inchangé.

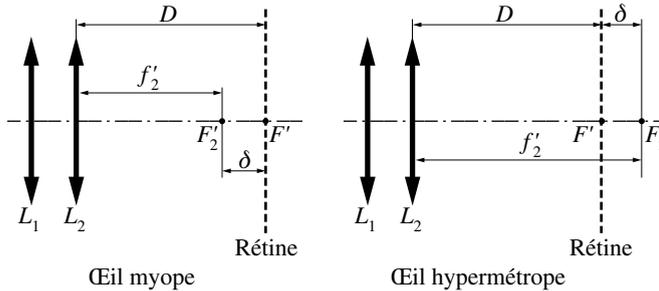
On en tire $\frac{1}{np} = -\frac{1}{n}$, soit $p = -1$ m.

4 a) Au punctum proximum, on a $\frac{1}{p'} - \frac{1}{np_{PP}} = \frac{\Phi_{PP}}{n}$ et au punctum remotum, $\frac{1}{p'} - \frac{1}{np_{PR}} = \frac{\Phi_{PR}}{n} = \frac{\Phi_{PP} - 8}{n}$. On en tire $p_{PR} = \frac{pp_{PP}}{8p_{PP} + 1} = -50$ cm.

b) Pour voir net à l'infini, il faut que la lentille équivalente lunette + œil forme l'image sur la rétine. Sa vergence est donnée par $\Phi_{\text{lun}} + \Phi$. Or, $\frac{1}{p'} = \Phi + 8 + \frac{1}{p_{\text{PP}}}$, ce qui entraîne, $\frac{1}{p'} = \Phi + \Phi_{\text{lun}} = \Phi + 8 + \frac{1}{p_{\text{PP}}}$, soit $\Phi_{\text{lun}} = -2$ dioptries. C'est une lentille divergente.

c) La vergence est reliée aux rayons de courbure par la formule (voir chapitre 7) $\Phi_{\text{lun}} = (n - 1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{8 \cdot 10^{-3}} \right) = -2$, ce qui donne $r' = 8,26$ mm.

5 a)



b) On a la relation $\overline{S_2 F'} = \frac{f_2'(e - f_1')}{e - f_1' - f_2'} = \overline{S_2 F_2'} + \overline{F_2' F'} = f_2' + \delta$, ce qui donne $f_1' = e - f_2' - \frac{f_2'^2}{\delta}$.

c) 1) Si $\delta = 2$ mm, $f_2' = 15$ mm et $f_1' = -117,5$ mm ; l'œil est myope et la lentille est divergente de $8,5 \delta$.

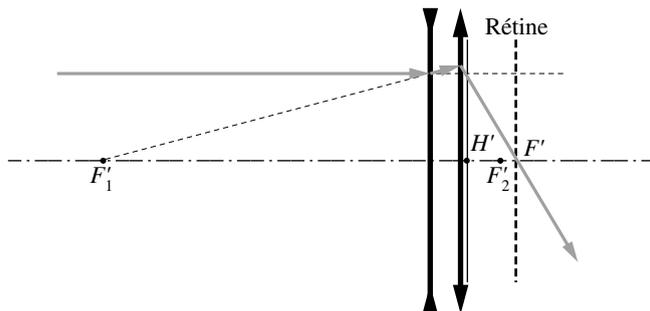
2) Si $\delta = -2$ mm, $f_2' = 19$ mm et $f_1' = 171,5$ mm ; l'œil est hypermétrope et la lentille est convergente de $5,8 \delta$.

d) Si $e = 0$, cela revient à mettre une lentille de contact.

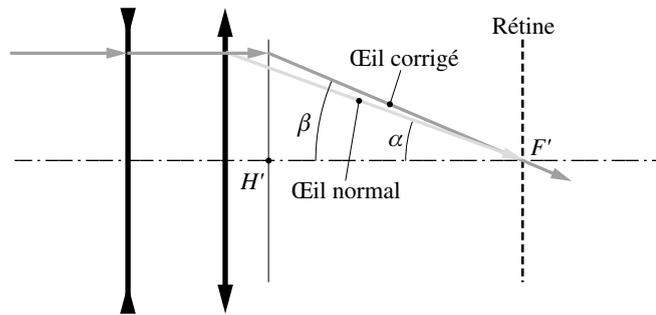
1) Si $\delta = 2$ mm, $f_1' = -127,5$ mm.

2) Si $\delta = -2$ mm, $f_1' = 161,5$ mm.

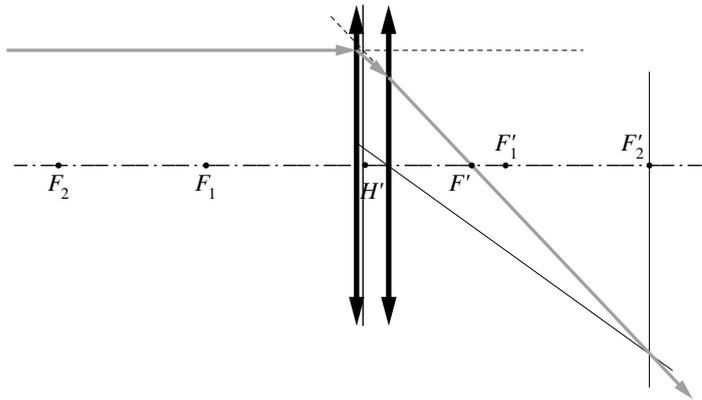
e) $\Delta = 112,5$ mm ; $\overline{F_1 F} = -122,7$ mm ; $f' = 15,7$ mm.



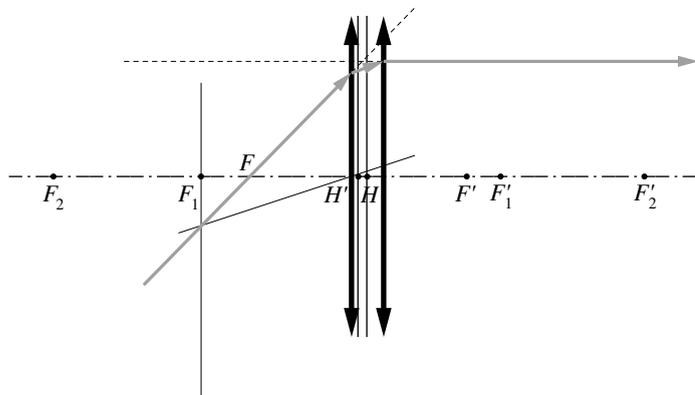
f) L'angle α sous lequel regarde l'œil normal est légèrement plus faible que l'angle β sous lequel regarde l'œil myope corrigé.



6 a) 1) $\overline{H'F'} > 0$. Le système est donc convergent. On mesure $\overline{H'F'} = 20$ mm.



2) H et H' sont quasiment confondus.



On a vu dans le cours que $\Delta = e - f'_1 - f'_2 = -78$ mm, $\overline{F'_2F'} = -\frac{f'_2 f'_2}{\Delta} = -40,21$ mm, $\overline{F_1F} = \frac{f'_1 f'_1}{\Delta} = 10,05$ mm et $\varphi' = \overline{H'F'} = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = 20,1$ mm.

On en déduit :

$$\overline{HH'} = \overline{HF} + \overline{FF_1} + \overline{F_1S_1} + \overline{S_1F'_1} + \overline{F'_1F_2} + \overline{F_2F'_2} + \overline{F'_2F'} + \overline{F'H'} = -0,46 \text{ mm}.$$

On peut considérer que les plans principaux sont confondus et que le doublet est équivalent à une lentille mince dont le sommet est au point principal H' .

b) 1) Pour que l'individu puisse former sur la rétine une image venant d'un objet situé à l'infini, il faut que $p' = \varphi' = 20 \text{ mm}$.

2) On applique la formule des lentilles minces avec $p = -25 \text{ cm}$ et $p' = 20 \text{ mm}$. On trouve $\varphi' = 18,52 \text{ mm}$.

3) Si $\varphi' = 20 \text{ mm}$, l'image d'un objet situé à l'infini se trouve à 20 mm . Pour que l'œil soit sans défaut, il faut qu'il forme l'image sur la rétine, ce qui revient dans ce cas à $F' = 19 \text{ mm}$.

4) La distance focale résultante F' est donnée par $F' = -\frac{f'\varphi'}{e - f' - \varphi'}$, soit $\frac{1}{F'} = \frac{1}{\varphi'} + \frac{1}{f'} - \frac{e}{f'\varphi'}$. Si $F' = 19 \text{ mm}$, $\varphi' = 20 \text{ mm}$, $f' = 19 \text{ cm}$. C'est un verre correcteur convergent.

5) On a (voir chapitre 7) : $\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) = (n-1) \frac{2}{r}$, soit $r = 19 \text{ cm}$.

c) 1) On a (voir chapitre 5) : $f' = \frac{n'r}{n' - n} = 20 \text{ mm}$, soit $r = 5 \text{ mm}$.

2) La formule de conjugaison du dioptré sphérique est : $\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r}$, avec $n = 1$ et $n' = 4/3$. On en tire $r = 4,72 \text{ mm}$.

7 L'œil

$$1) f' = 20 \text{ mm} = \frac{n'r}{n' - n} = 4r \implies r = 5 \text{ mm}$$

$$2) \frac{4}{3p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{3r}, \text{ avec } p = -250 \text{ mm et } p' = 20 \text{ mm. On trouve } r = 4,71 \text{ mm}$$

8 Vision dans un miroir

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{r}, \gamma = -\frac{p'}{p}$$

$$\overline{AA'} = d = \overline{SA'} - \overline{SA} = p' - p = \frac{rp}{2p-r} - p = \frac{2rp - p^2}{2p-r}$$

$$2p^2 - 2p(r-d) - rd = 0 \quad p = \frac{r-d \pm \sqrt{d^2 + r^2}}{2}$$

Le miroir est convergent et $r = -30 \text{ cm}$. De plus, $d = 25 \text{ cm}$. On trouve successivement

$$p = -47 \text{ cm}, p' = -22 \text{ cm}, \gamma = -0,47$$

$$p = -8 \text{ cm}, p' = 17 \text{ cm}, \gamma = 2,12$$

La bonne solution est la deuxième car l'image est virtuelle pour le miroir (système catadioptrique) et droite.

CHAPITRE 10

INSTRUMENTS ET PHOTOMÉTRIE

Pré-requis

Ce chapitre aborde les applications de toutes les notions introduites jusqu'ici. Les résultats établis dans le chapitre sur les associations seront donc largement utilisés, mais l'ensemble des chapitres précédents doit également avoir été assimilé.

Objectif

Après avoir donné des définitions générales (puissance, grossissement, champ, pupilles), nous décrivons quelques instruments classiques destinés à la vision des objets rapprochés (microscope...) ou éloignés (téléobjectif, lunette et télescope). Enfin, nous introduisons des notions de photométrie en traitant en particulier l'éclairement des images.

1. DÉFINITIONS

On classe habituellement les instruments d'optique en deux catégories suivant l'usage que l'on en fait :

- **les instruments visuels** (dits encore instruments oculaires ou subjectifs) qui accompagnent l'œil, dans l'observation. Ils fournissent une image virtuelle qui, regardée par l'œil, est transformée en image réelle projetée sur la rétine. Ils servent soit à la vision rapprochée (loupe, microscope...), soit à la vision d'objets éloignés (jumelles, lunette, télescope...) ;
- **les instruments de projection** (dits encore instruments objectifs) qui forment une image réelle sur un écran ou sur un détecteur (projecteurs de diapositives, téléobjectifs).

Pour comparer ces instruments entre eux, on définit des grandeurs caractéristiques qui nous renseignent sur leurs qualités et leurs performances (en liaison avec la taille des images) et sur la portion d'espace visible à travers cet instrument. Ce sont :

- **le grandissement transversal** γ . Cette notion a déjà été largement abordée dans les chapitres précédents. Rappelons simplement qu'il est donné par $\gamma = \frac{A'B'}{AB} = -\frac{F'A'}{f'}$ et qu'il permet de connaître la taille de l'image obtenue à travers un système. Associé au

grandissement longitudinal g , il sert surtout à caractériser les images réelles obtenues avec des instruments de projection ;

- le **grossissement** G , qui a surtout un sens lorsque l'on regarde des objets éloignés, ou la puissance P , utilisée pour la vision d'objets rapprochés ;
- le **champ** qui caractérise la portion d'espace visible à travers l'instrument. Cette grandeur est liée à la notion de pupille et de cercle oculaire que nous définissons également.

D'autres quantités comme la clarté et la limite de résolution sortent du cadre de ce cours d'optique bien qu'elles jouent un rôle important pour caractériser la qualité d'une image.

1.1. Puissance P

Employée surtout pour caractériser un appareil destiné à la vision d'objets rapprochés, la puissance est le rapport entre l'angle apparent θ' sous lequel on voit l'image à travers l'instrument et la hauteur de l'objet :

$$P = \frac{\theta'}{AB}$$

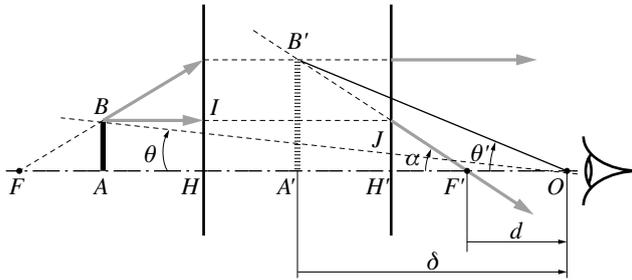


Figure 10.1 • Définition de l'angle θ' sous lequel est vue l'image $A'B'$.

Considérons le système centré de la figure 10.1 qui donne d'un objet AB une image finale $A'B'$. L'œil est en O à une distance $d = \overline{F'O}$ du foyer image F' et à une distance δ de l'image : on peut donc écrire $d = \overline{F'O}$ et $\delta = \overline{A'O}$. Notons que, les distances étant traitées comme des quantités algébriques, il est nécessaire ici d'orienter les angles. Dans

l'approximation des petits angles, $\tan \theta' \approx \theta' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} = -\gamma \frac{\overline{AB}}{\delta}$. Par ailleurs, dans les tri-

angles $F'JH'$ et $F'A'B'$, on peut écrire $\tan \alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{F'A'}} = \frac{\overline{H'J}}{\overline{F'H'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{F'H'}}$, ce qui entraîne pour le grandissement transversal :

$$\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{1}{f'}(\overline{F'O} + \overline{OA'}) = -\frac{1}{f'}(d - \delta)$$

Dans ce cas, on a : $\theta' = \frac{\overline{AB}}{\delta f'}(d - \delta)$ et $P = -\frac{1}{f'}\left(1 - \frac{d}{\delta}\right)$

La puissance P est directement reliée à la position de l'œil par rapport à l'image et au foyer F' . Cependant, afin de pouvoir comparer différents instruments entre eux, sa définition doit obéir à une convention précise, indépendante des conditions d'observation.

Dans ce but, on définit la **puissance intrinsèque** donnée par la quantité $P_i = -\frac{1}{f'}$, correspondant à l'une des deux situations suivantes : $\delta \rightarrow \infty$ (l'objet est au foyer objet F , son image est rejetée à l'infini et l'œil n'a pas besoin d'accommoder) ou $d = 0$ (l'œil est au foyer image F'). La puissance intrinsèque est indépendante de la position de l'œil de l'observateur qui regarde dans l'instrument.

Le deuxième cas est particulièrement intéressant : la figure 10.2 l'illustre pour une lentille mince. L'objet peut donc occuper n'importe quelle position car l'image sera toujours vue sous le même angle

$$\theta' = -\frac{\overline{AB}}{f'}$$

C'est un mode d'utilisation courant que l'on retrouve en particulier avec une loupe.

Enfin, la puissance intrinsèque s'exprime comme l'inverse d'une distance focale. Son unité exacte étant le radian/mètre, il ne faut pas la confondre avec la vergence Φ et l'unité δ souvent employée est incorrecte. Néanmoins, afin de se plier à l'usage, nous l'exprimerons ainsi. Remarquons que pour une lentille ou un système convergent, la puissance intrinsèque est négative ; cependant, dans le cas des instruments, on a l'habitude de n'en donner que la valeur absolue.

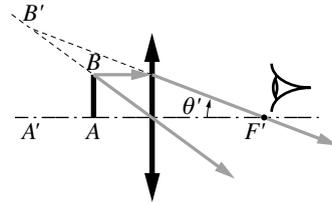


Figure 10.2 • Quand l'œil est au foyer F' , il voit l'image $A'B'$ sous un angle indépendant de la position de l'objet AB .

La puissance d'un instrument de distance focale f' est donnée par :

$$P = -\frac{1}{f'} \left(1 - \frac{d}{\delta} \right)$$

La quantité $P_i = -\frac{1}{f'}$, obtenue quand $d = 0$ (l'œil est au foyer image F') ou quand $\delta \rightarrow \infty$ (l'objet est au foyer objet F), s'appelle la puissance intrinsèque.

1.2. Grossissement G

Dans le cas où l'objet est à l'infini ou très éloigné, il devient difficile de comparer les dimensions respectives des objets et de leurs images. Le grossissement permet alors de définir les performances des instruments utilisés. Nous avons vu au chapitre 5 qu'il était égal au rapport des angles apparents θ et θ' sous lesquels on voit l'objet à l'œil nu et à travers l'instrument :

$$G = \frac{\theta'}{\theta}$$

L'image rétinienne est directement proportionnelle à l'angle sous lequel est vu l'objet ; utiliser un instrument de grossissement G revient donc à agrandir cette image dans un

même rapport G dans chaque dimension transverse. Une paire de jumelles qui grossit 8 fois donne un paysage agrandi 8 fois en largeur et en hauteur, donc une surface 64 fois plus importante.

Examinons tout d'abord le grossissement d'un système afocal (une lunette astronomique par exemple) constitué de deux lentilles convergentes, représenté sur la figure 10.3. On suppose que l'on observe un objet de diamètre angulaire θ , la Lune par exemple, situé à l'infini. On choisit de construire le rayon provenant du haut de l'objet passant par le foyer F_1 . Le système étant afocal, ses foyers sont rejetés à l'infini et le rayon sortant passe par le foyer image de la deuxième lentille F'_2 .

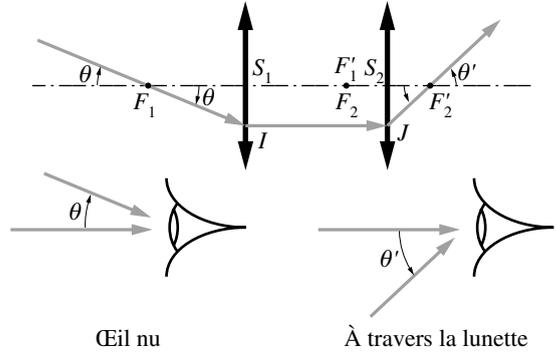


Figure 10.3 • Représentation des angles θ et θ' dans un système afocal.

De la figure, on tire facilement que l'objet est vu à l'œil nu sous un angle $\theta = \frac{\overline{S_1 I}}{F_1 S_1}$, et à travers la lunette sous un angle $\theta' = \frac{\overline{S_2 J}}{F'_2 S_2}$, ce qui donne :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{f_1}{f'_2} = -\frac{f'_1}{f_2}$$

où f_1 et f'_2 sont respectivement les distances focales objet de la première lentille et image de la deuxième. De manière générale, le signe de G indique le sens de l'image par rapport à celui de l'objet. Dans le cas étudié, les angles θ et θ' sont de sens opposés, ce qui donne une image inversée et justifie le signe « - » dans la formule précédente. Comme dans le cas de la puissance, on donne généralement la valeur absolue du grossissement, oubliant l'orientation de l'image ; parler d'une lunette avec un grossissement de -100 n'est pas habituel.

Considérons maintenant le cas d'un système non afocal (figure 10.4) ; les foyers des deux lentilles ne sont alors plus confondus et l'image finale est à une distance finie. L'objet AB étant à l'infini, son image intermédiaire à travers la première lentille $A''B''$ se situe nécessairement dans le plan focal image passant par F'_1 . L'image finale $A'B'$ est virtuelle et est vue par l'œil sous un nouvel angle θ' .

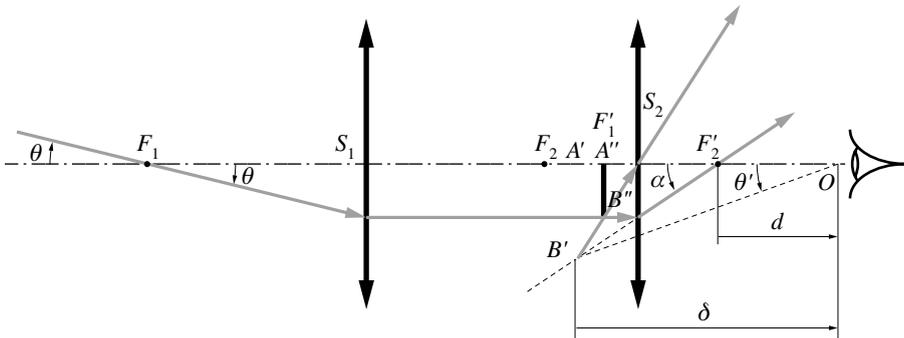


Figure 10.4 • L'image finale n'est plus à l'infini.

Comme précédemment, posons : $d = \overline{F_2'O}$ et $\delta = \overline{A'O}$. On a d'une part $\overline{A''B''} = -f_1\theta = f_1'\theta$ et $\theta' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} = -\frac{\overline{A'B'}}{\delta}$. On a par ailleurs $\alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{F_2'A'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{F_2'S_2}}$. En réunissant ces équations, on trouve :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{\overline{A'B'}}{f_2'} \left(1 - \frac{d}{\delta}\right) \frac{f_1'}{\overline{A'B'}} = -\frac{f_1'}{f_2'} \left(1 - \frac{d}{\delta}\right)$$

Comme pour la puissance, la convention du **grossissement intrinsèque** permet de comparer entre elles les performances de différents instruments. On le définit également par $G_i = -\frac{f_1'}{f_2'}$ ce qui correspond à $d \rightarrow 0$ (œil au foyer) ou $\delta \rightarrow \infty$ (réglage afocal).

Bien que le grossissement se rapporte à la vision d'objets éloignés, on le définit aussi dans le cas d'instruments regardant des objets rapprochés. On peut alors le relier à la puissance. Si $D = \overline{OA}$ est la distance algébrique entre l'œil de l'observateur et l'objet AB , θ et θ' les angles apparents définis précédemment, nous avons (figure 10.1) :

$$P = \frac{\theta'}{AB} = \frac{1}{f'} \left(1 - \frac{d}{\delta}\right) \text{ et } \theta = \frac{\overline{AB}}{D}$$

$$G = \left| \frac{\theta'}{\theta} \right| = \left| \frac{D}{f'} \left(1 - \frac{d}{\delta}\right) \right| = |PD|$$

Cette dernière relation ne peut servir à comparer des instruments dans des conditions équivalentes que si l'on choisit une distance algébrique conventionnelle D ; on prend généralement la distance du punctum proximum, soit $D = -25$ cm. On définit ainsi le **grossissement intrinsèque commercial**, que l'on appelle par abus de langage grossissement commercial ou grossissement tout court :

$$G = +\frac{1}{4f'} = -\frac{P_i}{4}$$

C'est l'indication que l'on trouve sur les jumelles (7×40 , 8×50 ...), le premier chiffre indiquant le grossissement et le deuxième, le diamètre de la première lentille exprimée en mm. Bien que les deux notions, grossissement et puissance, soient liées, l'encart 10.1 montre que la puissance ne peut traduire les performances d'un instrument que pour la vision d'objets rapprochés.

Encart 10.1. Puissance et grossissement

Sur un exemple simple, nous allons montrer la différence de signification entre ces deux notions. En effet, on s'attend à ce qu'un instrument ayant un fort grossissement ou une forte puissance soit performant, ce qui est vrai *a priori*. Prenons l'exemple de la Lune regardée avec des jumelles qui grossissent 10 fois. Son diamètre apparent étant de $30'$, elle est vue sous un angle de $30 \times 10 = 300'$ soit 5° .

Le grossissement de cette paire de jumelles est égal à $\frac{5^\circ}{0,5^\circ} = 10$. Par ailleurs, sa puissance est donnée par le rapport entre l'angle vu à travers l'instrument ($5^\circ = 0,087$ rad) divisé par la taille de l'objet. La Lune ayant un diamètre de $3\,476$ km, P vaut $2,5 \cdot 10^{-8} \delta$. Avec une valeur aussi faible de la puissance, on ne pourrait imaginer qu'il s'agisse d'une paire de jumelles performante. Ce petit exemple montre clairement que la puissance n'a de sens que pour les objets proches ; seul le grossissement est significatif dans le cas où l'on regarde des objets éloignés.

On appelle grossissement G le rapport des angles apparents θ' et θ sous lesquels sont vus l'image et l'objet. Pour un doublet de lentilles :

$$G = \left| \frac{\theta'}{\theta} \right| = \left| -\frac{f'_1}{f'_2} \left(1 - \frac{d}{\delta} \right) \right|$$

Le grossissement intrinsèque est donné par : $G_i = \left| -\frac{f'_1}{f'_2} \right|$.

Le grossissement intrinsèque commercial est celui obtenu pour un objet placé au *punctum proximum*, soit à 25 cm :

$$G = +\frac{1}{4f'} = -\frac{P_i}{4}$$

1.3. Champ

Le champ est la fraction d'espace visible à travers l'instrument ; c'est donc la portion d'espace objet dont l'instrument forme l'image. On dit par exemple qu'une diapositive couvre un champ de 36° avec un système d'entrée de 50 mm de distance focale. De même, dans le cas d'une paire de jumelles, apparaît une mention du type : champ de 8° ou champ de 100 m à 1 000 m : cela correspond à une ouverture angulaire (nous dirons un « champ angulaire ») égal à $100/1\,000 = 1/10$ radian, soit environ 6° . C'est l'une des caractéristiques importantes de l'instrument.

Le champ observable est limité par l'encombrement des montures des lentilles ou des éléments optiques du système. La qualité de l'image se dégrade souvent sur les bords en raison des aberrations importantes. C'est pour cela que des diaphragmes sont placés à l'intérieur des instruments empêchant justement de voir les régions périphériques. Un diaphragme limitant ainsi l'espace observable s'appelle un **diaphragme de champ**.

Le champ est la portion d'espace objet dont l'instrument forme l'image.

Il est limité par le diaphragme de champ

Ainsi, pour estimer la qualité d'une paire de jumelles, il faut évaluer la largeur de la zone de flou sur le bord du champ. Nous allons dans l'encart 10.2 en donner une approche simplifiée en étudiant les champs de l'œil. Le calcul du champ d'un instrument n'en est qu'une généralisation.

Encart 10.2. Les champs de l'œil

Supposons que l'on observe, à travers une fenêtre de diamètre LL' , un paysage situé dans un plan P (en terme d'optique géométrique cette fenêtre est appelée la lucarne d'entrée). Ce paysage est vu à travers la pupille de l'œil de diamètre QQ' ; nous avons vu au chapitre 4 que, selon la position de l'observateur, un point de l'image peut ne pas être dans le champ de vision de l'individu. Examinons ce qui se passe quand le point s'éloigne perpendiculairement à l'axe horizontal dans les positions A , A' et A'' (figure 10.5). Notons R et r les rayons respectifs de la lucarne et de la pupille de l'œil.

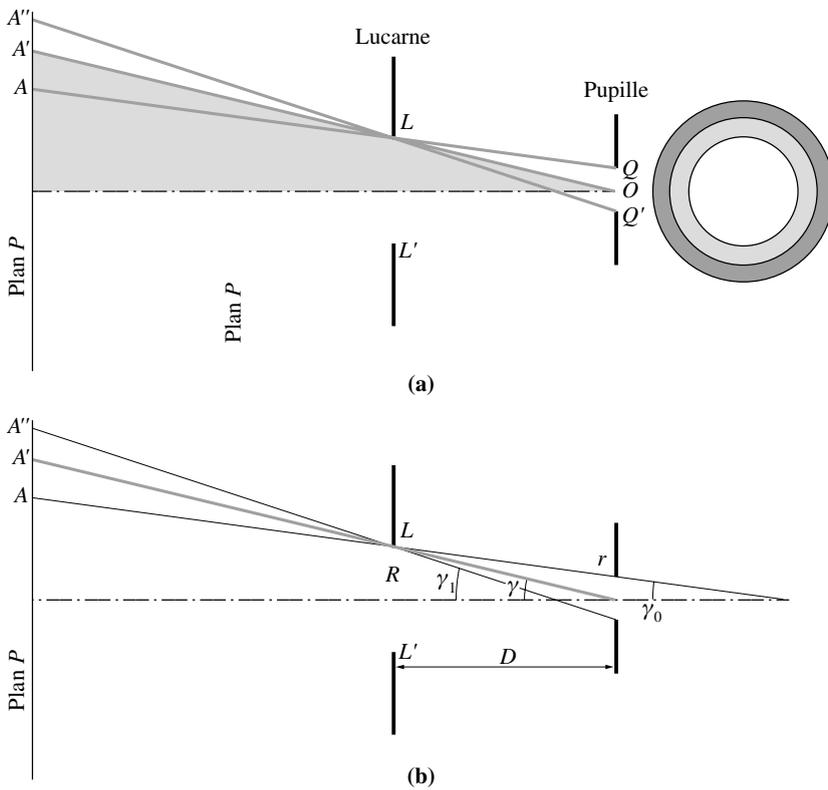


Figure 10.5 • (a) Définition des champs vus à travers la lucarne LL' .
(b) Définition des champs de pleine lumière, moyen et de contour.

– Tous les points situés entre l'axe et A sont vus par tous les points de la pupille. Ils constituent le **champ de pleine lumière**. Son demi-champ angulaire, noté γ_0 est donné par :

$$\tan \gamma_0 = \frac{R - r}{D}$$

– Les points situés entre A et A' ne sont vus que par une moitié au plus de la pupille. En particulier, le point A' est vu par exactement la moitié de la pupille ; il est à la limite du **champ moyen**. Son demi-champ angulaire, noté γ est donné par :

$$\tan \gamma = \frac{R}{D}$$

– Au-delà de A'' , aucun point ne peut être vu par l'œil. A'' est à la limite du **champ extrême ou de contour**. Son demi-champ angulaire, noté γ_1 est donné par :

$$\tan \gamma_1 = \frac{R + r}{D}$$

Généralement, on se contente du champ moyen. Dans le cas de l'œil, le rayon de la pupille r étant très petit devant celui de la lucarne R , les trois angles précédents peuvent être considérés égaux.

1.4. Pupilles d'entrée et de sortie

Toute lentille a un diamètre fini qui limite le nombre de rayons collectés par l'instrument. Nous allons définir ici les pupilles d'un instrument, directement liées à cette limitation. Imaginons un système constitué de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 et d'un diaphragme D placé entre les lentilles. Celui-ci, de diamètre parfois variable, est destiné à limiter l'ouverture des faisceaux ou à éliminer les lumières parasites. D'une source A située sur l'axe de propagation, on obtient une image intermédiaire A'' et l'image finale A' . On trace trois rayons particuliers (figure 10.6) :

- le rayon (1) passe par le bord de la lentille L_1 ;
- le rayon (2) passe par le bord du diaphragme D ;
- le rayon (3) passe par le bord de la lentille L_2 .

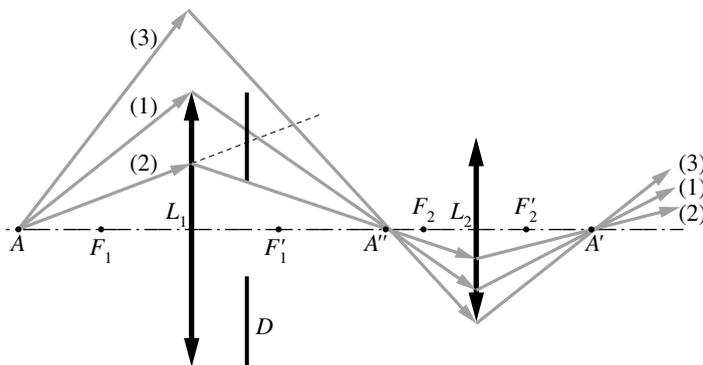


Figure 10.6 • Définition des pupilles d'un instrument. C'est le diaphragme D qui limite le plus le faisceau transmis par l'instrument. On l'appelle le diaphragme d'ouverture.

On peut remarquer que, parmi les trois éléments, celui qui limite le plus les rayons est le diaphragme D ; on lui donne le nom de **diaphragme d'ouverture**. Étant donné la petite taille du diaphragme d'ouverture, certains rayons traversant les lentilles ne pénètrent pas dans l'instrument. Le diaphragme d'ouverture peut être aussi bien une des montures des systèmes optiques.

Pour rechercher le diaphragme d'ouverture, il faut donc dessiner les rayons passant par les bords de chacun des éléments et de chacun des diaphragmes et identifier celui qui limite le plus le faisceau. En particulier, sur la figure 10.6, les deux lentilles sont trop grandes ; L_2 a un diamètre trop important et sa partie extérieure ne sert à rien puisque les rayons extrêmes passant par son bord sont déjà à l'extérieur de L_1 . On se rend compte sur cet exemple simple que la recherche du diaphragme d'ouverture à partir de la construction des rayons est laborieuse. On évite cette recherche en définissant les **pupilles**. Soient D'_1 et D'_2 , les images respectives de D à travers L_1 et L_2 (figure 10.7).

Considérons le rayon (2) dessiné sur la figure 10.7a : par construction, il passe par le bord de D , mais aussi obligatoirement par le bord de D'_1 . Ainsi, tout rayon issu de A et passant à l'intérieur de D'_1 donnera obligatoirement un rayon conjugué à l'intérieur de D . Pour le point A , D'_1 joue le rôle de fenêtre d'entrée par laquelle il est obligatoire de

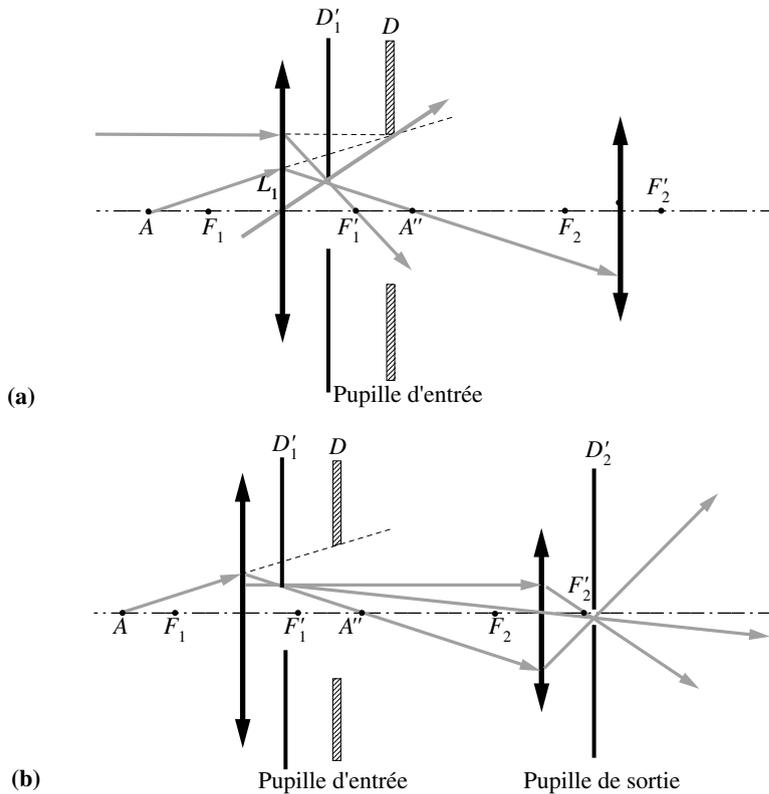


Figure 10.7 • Construction des pupilles d'entrée (a) et de sortie (b).

passer pour traverser le système. C'est la **pupille d'entrée**. De même, de l'autre côté, D_2' , l'image de D à travers L_2 est la **pupille de sortie** (figure 10.7b). Finalement, tout rayon passant à l'intérieur de D , provient d'un rayon incident passant à l'intérieur de la pupille d'entrée et donne un rayon sortant à travers la pupille de sortie. De manière plus générale, si le système contient de nombreux éléments, la notion de pupille se généralise :

On appelle *pupille de sortie* l'image conjuguée du diaphragme d'ouverture à travers le sous-système placé après lui.

On appelle *pupille d'entrée* l'image conjuguée du diaphragme d'ouverture à travers le sous-système placé avant lui.

1.5. Cercle oculaire

Pour des objets éloignés, dans le cas des lunettes et des télescopes discuté ci-après, c'est généralement le contour de l'objectif pour les lunettes ou du miroir primaire pour les télescopes qui joue le rôle de pupille d'entrée. Il est également important de connaître la taille et l'emplacement de la pupille de sortie afin de la comparer à la taille du récepteur qui est souvent l'œil ; il faut en effet s'assurer que tout le flux entrant y pénètre.

Ce point est illustré sur la figure 10.8 : dans ce système afocal, le diaphragme d'ouverture est confondu avec la lentille d'entrée. La pupille de sortie est donc l'image de l'**objectif** (lentille d'entrée de distance focale f'_1) à travers l'**oculaire** (lentille ou système de sortie de distance focale f'_2) : on l'appelle le **cercle (ou disque) oculaire** car tout le faisceau entrant par l'objectif y passe. Plus généralement, le cercle oculaire qualifie la pupille de sortie d'un instrument visuel. On applique à l'oculaire la formule des lentilles : l'objet est l'objectif dont on cherche l'image. Si l'on suppose les foyers F'_1 et F_2 confondus :

$$\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f'_2}, \quad \text{avec } p_2 = \overline{S_2S_1} = \overline{S_2F_2} + \overline{F_2F'_1} + \overline{F'_1S_1} = -(f'_2 + f'_1)$$

On en déduit :

$$p'_2 = \frac{f'_2(f'_1 + f'_2)}{f'_1}$$

Le grandissement γ est donné par :

$$\gamma = \frac{p'_2}{p_2} = -\frac{f'_2}{f'_1}$$

Si D est le diamètre de l'objectif, la pupille de sortie a une taille égale à :

$$d = |\gamma|D = \frac{D}{G}$$

Ainsi, plus l'instrument grossit et plus le cercle oculaire diminue, rendant l'observation de plus en plus difficile. En effet, la position de l'œil en face du trou devient alors de plus en plus critique. C'est la raison pour laquelle, dans les jumelles, on s'arrange pour avoir un cercle oculaire beaucoup plus grand que la pupille de l'œil afin de permettre de placer les deux yeux en face des deux trous sans ajustement délicat.

Exemple • Jumelles (100 × 100) ($G = 100$, $D = 100$ mm)

$$f'_1 = 1 \text{ m} \quad f'_2 = 1 \text{ cm} \quad D = 10 \text{ cm} \quad G = 100$$

$$p'_2 \approx f'_2 \quad (\text{le cercle oculaire est au foyer de l'oculaire})$$

$$d = 1 \text{ mm}$$

$$\bullet \text{ Jumelles } 8 \times 50 \quad (G = 8 ; D = 50 \text{ mm}) : d = 6 \text{ mm}$$

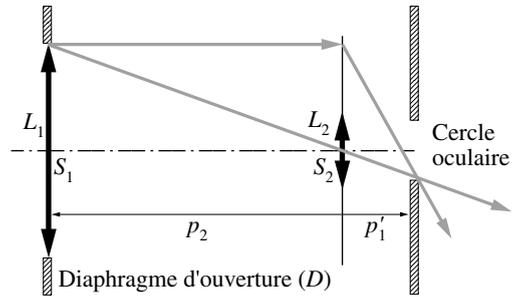


Figure 10.8 • Le cercle oculaire est la pupille de sortie d'un instrument visuel.

Dans un instrument visuel, la pupille de sortie est appelée le cercle (ou disque) oculaire. C'est généralement l'image de l'objectif à travers l'oculaire.

1.6. Oculaires

L'oculaire est le système de sortie d'un instrument visuel. Il est généralement associé à un objectif qui donne d'un objet réel une image réelle. Il sert donc à transformer cette image réelle intermédiaire en une image finale virtuelle, observable par l'œil sans accommodation. Notons qu'une loupe ou une lentille divergente peuvent de ce point de vue être assimilées à un oculaire, puisqu'elles donnent également d'un objet réel une image virtuelle.

Pour des grossissements supérieurs à 20 on utilise comme oculaire des doublets de lentilles. Si l'on recherche des grossissements inférieurs, une lentille mince est généralement suffisante. On préfère dans les instruments utiliser des doublets qui permettent de corriger certaines aberrations (comme les aberrations chromatiques par exemple, voir exercice 10 du chapitre 8). Les distances focales f'_1 et f'_2 sont choisies de telle sorte qu'elles soient dans un rapport simple, noté a ; on représente l'oculaire par les trois symboles $\{\ell, m, n\}$ représentant des nombres entiers en posant, avec $a > 0$:

$$a = \frac{f'_1}{\ell} = \frac{e}{m} = \frac{f'_2}{n}$$

On déduit des formules des associations démontrées au chapitre 8 les valeurs caractérisant l'oculaire en fonction du paramètre a et des symboles ℓ, m et n :

Intervalle optique	$\Delta = e - (f'_1 + f'_2) = -a(\ell - m + n)$
Position du foyer	$F' \overline{F'_2 F'} = \frac{f'^2_2}{\Delta} = -\frac{n^2 a}{\ell - m + n}$
Position du foyer F	$\overline{F_1 F} = -\frac{f'^2_1}{\Delta} = \frac{\ell^2 a}{\ell - m + n}$
Distance focale	$\overline{H' F'} = f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = \frac{a \ell n}{\ell - m + n}$

Il est intéressant de définir la puissance intrinsèque d'un oculaire. Elle est donnée par :

$$P_i = -\frac{1}{f'} = -\frac{\ell - m + n}{a \ell n} = -\frac{\ell - m + n}{n f'_1}$$

Un oculaire est dit **positif** si l'espace focal objet est réel ($f' < 0$). Inversement, il est dit **néгатif** lorsque l'espace focal objet est virtuel ($f' > 0$). Si l'on travaille avec un oculaire, pour être accessible, le foyer résultant F' doit être à droite des lentilles. Remarquons que la vergence d'un oculaire n'est pas directement liée à la propriété de l'oculaire (néгатif ou positif) mais, comme nous l'avons vu au chapitre 8, uniquement au signe de $\overline{H' F'}$.

Encart 10.3. L'oculaire positif de Ramsden {3, 2, 3}

Il est défini par : $f'_1 = 3a$, $e = 2a$, $f'_2 = 3a$. Les formules précédentes permettent d'en tirer :

$$\Delta = -4a, \quad \overline{F'_2 F'} = -\frac{9}{4}a,$$

$$\overline{F_1 F} = \frac{9}{4}a \quad \text{et} \quad \overline{H' F'} = f' = \frac{9}{4}a.$$

Par exemple, si l'on veut que l'oculaire ait une distance focale de 1 cm, il faut prendre $a = 0,44$ cm, ce qui donne $f'_1 = f'_2 = 1,3$ cm. La puissance intrinsèque correspondante est égale à $P_i = -100 \delta$. Son grossissement intrinsèque commercial est $G = -P_i/4 = 25$. Les éléments cardinaux de l'oculaire de Ramsden {3, 2, 3} sont dessinés sur la figure 10.9.

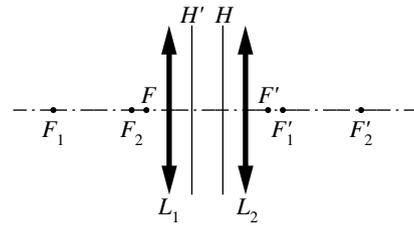


Figure 10.9 • Éléments cardinaux de l'oculaire de Ramsden.

2. DESCRIPTION DE QUELQUES INSTRUMENTS

On étudie dans ce paragraphe des associations optiques formées de doublets permettant des grossissements ou des réductions importants. Pour l'observation à courte distance, nous décrivons le fonctionnement du microscope. Pour l'observation à grande distance, en dehors des téléobjectifs, il existe deux grandes familles d'instruments optiques, les lunettes et les télescopes, avec plusieurs variantes dans chaque groupe. Nous en ferons une étude non exhaustive.

2.1. Microscope

Le grossissement d'une loupe ou d'un oculaire de bonne qualité et ne présentant que peu d'aberrations ne peut dépasser quelques dizaines. L'utilisation d'un microscope permet d'observer des objets nécessitant de plus forts grossissements. Comme avec les loupes et les oculaires, l'image finale virtuelle peut être rejetée à l'infini. Quand un œil emmétrope regarde dans un microscope, il n'a pas à accommoder. On peut aussi amener l'image finale à des distances plus courtes pour une observation plus minutieuse.

On réduit le microscope à deux lentilles minces de distances focales f'_1 et f'_2 (figure 10.10). L'objectif (L_1) a généralement une distance focale très courte, de l'ordre de quelques millimètres ; l'oculaire (L_2) est également à courte distance focale, de quelques centimètres. On forme successivement les images de l'objet

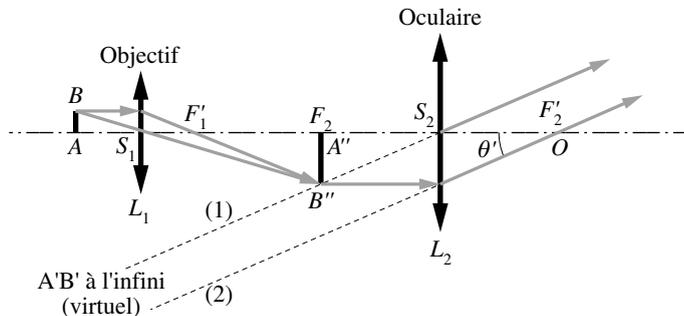


Figure 10.10 • Le microscope.

AB : on a une image intermédiaire, réelle, $A''B''$ à travers L_1 puis une image finale, virtuelle, $A'B'$ à travers L_2 . Dans son mode de fonctionnement normal, pour que l'image finale soit à l'infini, $A''B''$ doit être au foyer F_2 . Le déplacement du microscope par rapport à l'objet permet d'atteindre cette position. L'intervalle optique $\Delta = \overline{F'_1 F_2}$ est fixe et varie selon les modèles de 15 à 20 cm.

Considérons par exemple un microscope formé de deux lentilles de distances focales respectives $f'_1 = 3 \text{ mm}$ et $f'_2 = 3 \text{ cm}$, avec un intervalle optique $\Delta = 20 \text{ cm}$.

Les formules démontrées au chapitre 8 donnent :

Position du foyer F'	$\overline{F'_2 F'} = \frac{f_2'^2}{\Delta} = 4,5 \text{ mm}$
Position du foyer F	$\overline{F_1 F} = -\frac{f_1'^2}{\Delta} = -0,045 \text{ mm}$
Distance focale	$\overline{H' F'} = f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = -0,45 \text{ mm}$

On caractérise le microscope par sa puissance en appliquant les définitions :

$$P = \frac{\theta'}{AB} = \frac{\theta'}{A''B''} \frac{A''B''}{AB} = P_2 \gamma_1$$

où P_2 est la puissance de l'oculaire et γ_1 le grandissement de l'objectif.

Bien que l'objet observé soit placé à courte distance, on définit aussi le grossissement commercial du microscope comme pour une loupe ou un oculaire en supposant par convention l'objet à une distance $D = -25 \text{ cm}$ pour l'observation à l'œil nu. Dans ce cas, le grossissement commercial est lié à la puissance par la relation simple :

$$G = DP = DP_2 \gamma_1 = G_2 \gamma_1$$

où γ_1 est le grandissement de l'objectif et G_2 le grossissement commercial de l'oculaire.

Le grossissement commercial d'un microscope est égal au produit du grandissement de l'objectif (γ_1) par le grossissement commercial de l'oculaire (G_2) : $G = \gamma_1 G_2$.

On propose le calcul des caractéristiques d'un microscope dans l'encart 10.4.

Encart 10.4. Calcul des caractéristiques d'un microscope

Dans l'exemple du microscope traité précédemment, on trouve, avec $f'_1 = 3 \text{ mm}$, $f'_2 = 3 \text{ cm}$ et $\Delta = 20 \text{ cm}$:

– **grossissement commercial de l'oculaire** : $G_2 = \frac{1}{4f'_2} \approx 8,3$;

– **grandissement de l'objectif** : il faut appliquer la formule des lentilles appliquée à l'objectif de distance focale f'_1 entre les objets AB et $A''B''$:

$$\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f'_1}$$

Dans son mode de fonctionnement normal, l'image $A''B''$ est au foyer F_2 ; elle est située à une distance $p'_1 = \overline{S_1 F_2} = \overline{S_1 F'_1} + \overline{F'_1 F_2} = f'_1 + \Delta$ de l'objectif. La distance p_1 est alors égale à :

$$p_1 = \frac{p'_1 f'_1}{f'_1 - p'_1} = \frac{p'_1 f'_1}{-\Delta}$$

ce qui donne :

$$\gamma_1 = \frac{p'_1}{p_1} = -\frac{\Delta}{f'_1} = -\frac{0,2}{0,003} = -67$$

Le grossissement commercial est égal au produit $G = \gamma_1 G_2 = -66 \times 8 = -533$. Le signe « - » signifie que l'image est renversée par rapport à l'objet. Au signe près, la puissance de ce microscope est de l'ordre de $P = \frac{G}{D} = 2\,130 \delta$. En général, objectifs et oculaires sont souvent eux-mêmes des associations de lentilles, mais un traitement complet n'aurait fait qu'alourdir la présentation sans ajouter d'élément nouveau.

2.2. Téléobjectif

Le téléobjectif est utilisé en photographie ou en cinématographie et permet d'obtenir des grossissements importants pour des objets éloignés. On y associe au minimum deux lentilles de manière à obtenir une distance focale résultante f' importante tout en assurant un faible encombrement du système. Il faut réaliser deux conditions : f' doit être importante mais avoir un faible encombrement. Pour cela, on utilise une lentille convergente (L_1) et une lentille divergente (L_2). Par exemple, si $f'_1 = 20 \text{ cm}$, $f'_2 = -5 \text{ cm}$ et $e = 16 \text{ cm}$, ses caractéristiques sont :

Intervalle optique	$\Delta = e - (f'_1 + f'_2) = 1 \text{ cm}$
Position du foyer F'	$\overline{F'_2 F'} = \frac{f_2'^2}{\Delta} = 25 \text{ cm}$
Position du foyer F	$\overline{F_1 F} = -\frac{f_1'^2}{\Delta} = -400 \text{ cm}$
Distance focale	$\overline{H' F'} = f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = 1 \text{ m}$

Dans la conception d'un téléobjectif se pose le problème de son encombrement. Il est défini par la quantité :

$$\overline{S_1 F'} = \overline{S_1 S_2} + \overline{S_2 F'_2} + \overline{F'_2 F'} = e + f'_2 + \frac{f_2'^2}{\Delta}$$

Il est ici de 36 cm pour une distance focale de 1 m, ce qui semble relativement important. L'encart 10.5 discute de la condition d'encombrement minimal imposant des relations entre les distances focales des différentes lentilles.

Encart 10.5. Condition d'encombrement minimal d'un téléobjectif

D'une manière générale, l'encombrement $\overline{S_1 F'}$ est une fonction de la vergence de chacune des deux lentilles. Considérons un téléobjectif tel que la vergence Φ et le rapport entre les deux vergences $\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = m$ soient donnés. Pour minimiser l'encombrement, nous allons l'exprimer uniquement en fonction de la vergence de la première lentille, la dériver en fonction de Φ_1 pour en chercher un extremum. D'après la formule de Gullstrand :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{e}{n} \Phi_1 \Phi_2$$

Dans notre cas, $n = 1$, et e est l'écart entre les lentilles. De la formule de Gullstrand on tire :

$$e = \frac{\Phi_1(m+1) - \Phi}{m\Phi_1^2} \text{ et on a } \Delta = -\frac{\Phi}{m\Phi_1^2}$$

D'où :

$$\overline{S_1F'} = \frac{2+m}{m\Phi_1} - \frac{\Phi}{m\Phi_1^2} - \frac{1}{m\Phi}$$

En dérivant une première fois par rapport à Φ_1 , on en déduit la valeur de Φ_1 correspondant à une dérivée première nulle :

$$\frac{d\overline{S_1F'}}{d\Phi_1} = \frac{1}{m\Phi_1^2} \left(\frac{2\Phi}{\Phi_1} - 2 - m \right)$$

ce qui donne :

$$\Phi_1 = \frac{2\Phi}{2+m} \text{ et } e = \frac{2+m}{4\Phi}$$

Le minimum est obtenu lorsque la dérivée seconde est positive à l'extrémum, soit :

$$\frac{d^2\overline{S_1F'}}{d\Phi_1^2} = -\frac{2\Phi}{m\Phi_1^4} > 0$$

e étant par définition une distance positive, on dispose de deux inégalités qui ne sont simultanément vérifiées que si $-2 < m < 0$ (le système contient une lentille convergente et une lentille divergente) et $\Phi > 0$ (distance focale du téléobjectif positive). Ces conditions permettent alors de réaliser un téléobjectif d'encombrement minimum pour une distance focale imposée. Remarquons que l'exemple traité ne remplit pas ces conditions de faible encombrement.

Notons enfin que les zooms utilisés en photographie fonctionnent sur le même principe, avec un nombre plus important de lentilles qui se déplacent les unes relativement aux autres afin d'obtenir une distance focale résultante pouvant varier de quelques centimètres à quelques dizaines de centimètres.

2.3. Lunettes et télescopes

Ces instruments sont dédiés à l'observation visuelle ou photographique d'objets éloignés (planètes, étoiles...). Ils sont composés de plusieurs parties :

- le tube qui contient le miroir ou les lentilles,
- la monture qui entraîne l'instrument pour compenser la rotation de la Terre,
- un objectif : une lentille dans la lunette ou un miroir dans le télescope,
- un oculaire qui permet d'agrandir l'image donnée par l'objectif.

2.3.1. Télescopes

Le télescope est un instrument catadioptrique, inventé par Newton. Les astres situés à très grande distance observés avec un miroir de télescope donnent une image au foyer de l'instrument (figure 10.11). Si l'on veut l'utiliser, il faut soit la photographier en plaçant un film au foyer, soit la regarder en agrandissant l'image avec un **oculaire**. Le foyer

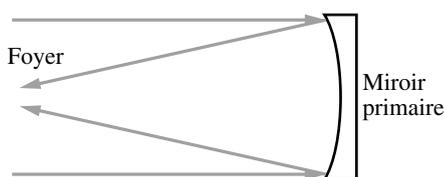


Figure 10.11 • Le miroir, qui joue le rôle d'objectif dans un télescope, forme l'image primaire au foyer.

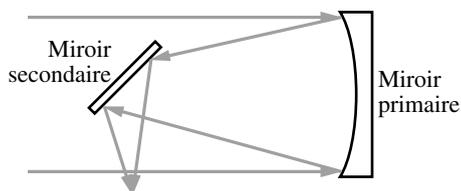


Figure 10.12 • Le télescope de Newton. L'image du miroir primaire (objectif) est envoyée sur l'oculaire par l'intermédiaire d'un miroir secondaire plan. Dans les grands télescopes, l'astronome peut se placer dans une cage à l'intérieur du télescope afin de travailler directement sur l'image primaire.

primaire étant à l'intérieur du tube, on y a accès en le « sortant » du tube avec un miroir dit **miroir secondaire**. Ce miroir est plan ou hyperbolique dans les télescopes ordinaires. Dans les très grands télescopes, l'observateur est à l'intérieur du tube, dans une cage qui tourne avec la monture.

Dans le **télescope de Newton** (figure 10.12), le foyer est « sorti » à l'aide d'un miroir plan qui dévie le faisceau à l'extérieur du tube.

Dans le **télescope de Cassegrain** (figure 10.13), le faisceau sort par l'arrière du tube qui est percé. Le miroir secondaire est hyperbolique afin de faire converger le faisceau à l'extérieur.

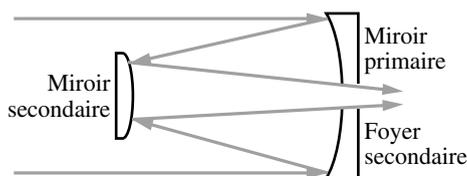


Figure 10.13 • Le télescope de Cassegrain. Le faisceau venant du miroir primaire sphérique est renvoyé à l'arrière du miroir à l'aide d'un miroir divergent.

2.3.2. Lunettes

Les lunettes sont des systèmes dioptriques. On pense qu'elles ont été inventées au début du XVI^e siècle, et utilisées par les militaires anglais. Le secret de fabrication a été découvert par les Hollandais qui la diffusent, mais la première lunette est utilisée en astronomie par Galilée en 1610 qui tente de vendre son invention. Quelques années plus tard, Kepler invente la véritable **lunette astronomique** ; celle de Galilée est ce que l'on appelle la **lunette terrestre** ou de Galilée. Cette dernière donne des images droites alors que celle de Kepler donne des images renversées.

Dans la lunette, l'image primaire est formée au foyer à l'aide d'un **objectif** (figure 10.14) généralement constitué de deux lentilles, ce qui limite l'**aberration chromatique**, c'est-à-dire l'irisation des images (voir exercice 10 du chapitre 8). Cette image focale est ensuite soit photographiée, soit observée à l'œil nu à l'aide d'un **oculaire**. Comme l'instrument est basé sur les propriétés de réfraction du verre, les anglo-saxons appellent cet instrument un *refractor* alors qu'ils baptisent de *telescope* ce que nous appelons lunettes et télescopes. Le télescope étant basé sur les propriétés de réflexion, ils l'appellent *reflector*. Bien que le système optique soit complètement différent de celui du télescope, les mêmes remarques générales peuvent être faites sur les deux instruments.

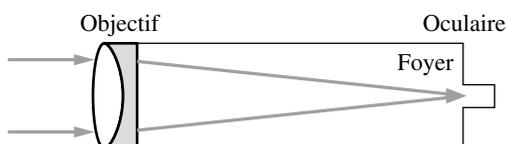


Figure 10.14 • L'objectif achromatique, constitué de deux lentilles donne une image primaire.

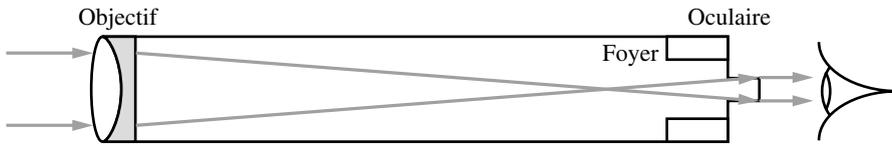


Figure 10.15 • L'oculaire permet de regarder l'image primaire formée par l'objectif.

Dans des conditions normales d'observation, les foyers de l'oculaire et de l'objectif sont confondus. Le système est dit afocal : l'image est observée sans accommodation par l'œil qui travaille au repos. Pour les démonstrations, nous raisonnons sur un modèle de lunette simplifiée avec des objectifs et des oculaires assimilés à des lentilles minces (figure 10.15).

L'encart 10.6 donne l'essentiel des caractéristiques des lunettes et des télescopes.

Encart 10.6. Quelques caractéristiques des lunettes et télescopes

- **Le diamètre D du miroir primaire.** Plus le diamètre est grand et plus on pourra observer des objets lointains et peu lumineux. Les plus grands diamètres D sont de 6 m pour les télescopes (Zelenchuch dans le Caucase) et de 1,2 m pour les lunettes (Observatoire de Lick ; États-Unis). Ces deux limites ne peuvent pas être dépassées avec un seul élément pour des raisons techniques. Actuellement on développe des télescopes à miroirs multiples équivalents à un miroir unique de 15 mètres de diamètre (*Very Large Telescope, Multi Mirror Telescope...*). On ne fabrique plus de lunettes professionnelles de grand diamètre.

Télescope amateur : $D = 10$ à 50 cm $F = 1$ à 5 m

Lunette amateur : $D = 4$ à 10 cm $F = 1$ m

Télescope professionnel : $D = 50$ cm à 6 m $F = 3$ m à 20 m

Lunette professionnelle : $D = 30$ cm à 1,2 m $F = 3$ m à 5 m

Jumelles : $D = 40$ à 50 mm

- **La distance focale F .** Elle détermine la taille des images obtenues dans le plan focal. Plus la distance focale est grande et plus l'image est grande. Par exemple avec un télescope de 1 m de distance focale, la lune a une taille de 1 cm dans le plan focal. Avec 10 m, la taille est de 10 cm. Si l'on désire des images de grande qualité, il ne faut pas utiliser de grandes distances focales. Un télescope de 60 cm de diamètre dont la distance focale est de 3,6 m est dit ouvert à $F/6$ car $D = 60$ cm = $F/6$.

- **Le grossissement G .** Il a un sens en observation visuelle quand on équipe le télescope ou la lunette d'un oculaire pour agrandir l'image focale. Nous avons vu que, si F est la distance focale de l'objectif (lentille ou miroir) et f celle de l'oculaire, le grossissement G était donné par la formule simple :

$$G = -\frac{F}{f}$$

Par exemple avec $F = 3,6$ m et $f = 1$ cm, $G = -360/1 = -360$. Il est illusoire d'utiliser des oculaires de petite distance focale pour augmenter démesurément le

grossissement car on peut montrer que chaque instrument a un grossissement limite qui est donné par la formule :

$$G \sim 3 D \text{ (cm)}$$

Par exemple, avec un diamètre $D = 30 \text{ cm}$, $G = 90$.

• **La résolution R (secondes d'arc).** C'est une caractéristique de la qualité des images. Elle ne dépend que du diamètre : plus le diamètre est grand, plus la qualité sera bonne. Elle est chiffrée par le plus petit angle que l'instrument peut séparer. Elle est donnée par :

$$R = \frac{12}{D \text{ (cm)}}$$

Un télescope de 60 cm de diamètre permet de voir des détails d'une taille de $12/60 = 0,2''$. L'œil, dans de bonnes conditions, voit des détails de $1' = 60''$.

2.3.3. Grossissement de la lunette astronomique

En fonctionnement afocal, nous avons vu que le grossissement était donné par : $G = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{f_1'}{f_2}$. Pour construire l'image d'un objet placé à grande distance, on choisit par exemple les rayons extrêmes qui font entre eux un angle θ (figure 10.16). Dans le cas du Soleil et de la Lune, cet angle est de $30'$. À la sortie, les rayons émergents font entre eux un angle θ' .

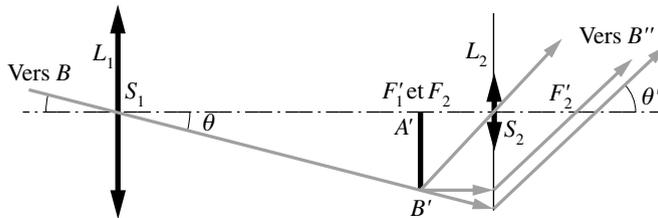


Figure 10.16 • Le grossissement de la lunette astronomique.

Par exemple, on achète un télescope de distance focale = 1 m avec des oculaires de 1 et 4 cm de distances focales. Ces deux oculaires permettent d'obtenir des grossissements égaux à 25 et 100. Généralement l'angle θ' est limité par l'oculaire et il a une valeur comprise entre 30° et 40° . Le champ observable dans l'instrument est :

$$\text{Champ} = \theta = \frac{\theta'}{G}$$

Avec un télescope dont le grossissement est égal à 100 et avec un oculaire de 30° de champ, on observe un champ réel de $18'$. La Lune qui couvre $30'$ ne sera pas visible en totalité.

Dans un mode de fonctionnement optimal, afin de ne pas perdre de lumière, il faut s'arranger pour que le cercle oculaire soit plus petit que la taille de la pupille de l'œil. On définit alors le grossissement équipupillaire, introduit dans l'encart 10.7.

Encart 10.7. Le grossissement équipupillaire

Quand le grossissement diminue, le cercle oculaire augmente ; il existe une valeur minimale du grossissement telle que le cercle oculaire recouvre exactement la pupille de l'œil. Si l'on diminue encore le grossissement, le cercle oculaire augmente et on perd de la lumière. On appelle **grossissement équipupillaire** le grossissement tel que le cercle oculaire ait la même taille que la pupille de l'œil : $G_e = \frac{D}{p}$ où D est le diamètre de l'objectif et p la taille de la pupille. Une paire de jumelles (7×50) utilisées de jour ($p = 4$ mm) possède un grossissement équipupillaire égal à $50/4 = 12,5$. Le grossissement réel est volontairement plus petit (7) afin de faciliter l'observation binoculaire. Si le grossissement était trop important, on aurait des difficultés à placer les deux images en face des yeux.

2.3.4. Lunette de Galilée

Le modèle de lunette étudié dans les paragraphes précédents présente le défaut de renverser les images. Pour l'observation terrestre, il faut alors adapter un redresseur ou remplacer l'oculaire convergent par un oculaire divergent ; on obtient ainsi la lunette dite de Galilée. C'est également le principe des jumelles à faible grossissement dites « jumelles de théâtre ».

Avec par exemple $f'_1 = 1$ m et $f'_2 = -1$ cm, on obtient $G = 100$.

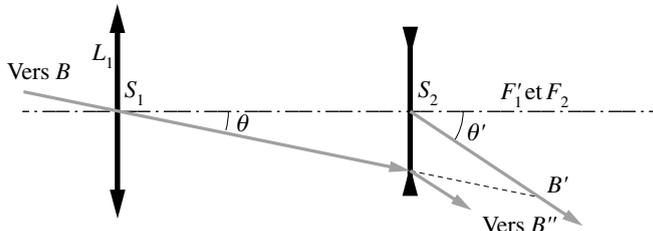


Figure 10.17 • Le grossissement de la lunette de Galilée.

3. QUELQUES ÉLÉMENTS DE PHOTOMÉTRIE ÉNERGÉTIQUE

Chacun d'entre nous a pu expérimenter le fait que la lumière transporte de l'énergie : les rayons du Soleil chauffent la peau, une ampoule électrique dégage de la chaleur... Le but de la **photométrie** est d'étudier la manière dont cette énergie se transmet à travers des systèmes optiques. On distingue deux systèmes photométriques différents suivant que l'on intègre ou non la sensibilité de l'œil : la **photométrie énergétique** et la **photométrie visuelle**. Dans ce chapitre, nous ne traiterons que la partie énergétique en utilisant les unités classiques du système international (Watt...)

3.1. Éclairement

Considérons une source isotrope émettant dans tout l'espace : on la qualifie d'**isotrope**, parce qu'aucune direction n'est privilégiée dans cette émission. On appelle **puissance**

lumineuse ϕ la quantité d'énergie dégagée par unité de temps et on l'exprime en Watt (W). En photométrie, par abus de langage, cette puissance rayonnée est souvent appelée **flux** d'énergie. Cette énergie se répandant de façon isotrope, à la distance d de la source, elle se retrouve uniformément répartie sur la surface d'une sphère de rayon d , $S = 4\pi d^2$ (figure 10.18). Ainsi, chaque unité de surface, placée perpendiculairement aux rayons incidents, reçoit la puissance ϕ/S .

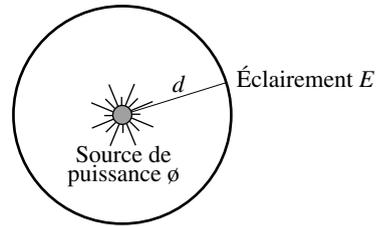


Figure 10.18 • Définition de l'éclairement dû à une source isotrope de puissance ϕ .

On appelle éclairement (énergétique) la puissance qui traverse l'unité de surface :

$$E = \frac{\phi}{4\pi d^2}$$

où ϕ est la puissance totale de la source isotrope. E est exprimée en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$

Ainsi, en utilisant une lampe de 100 W placée à $d = 1$ m de distance, on reçoit en moyenne un éclairement : $E = 100/4\pi = 8 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Quant au Soleil, il produit de l'énergie avec une puissance $\phi = 3,8 \cdot 10^{26}$ W. Sur la Terre placée à une distance $d = 150 \cdot 10^6$ km, cela correspond à un éclairement $E = 1\,340 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.

Dans la réalité, la situation est plus compliquée car d'une part, la source peut n'être ni ponctuelle, ni isotrope, et l'on peut recevoir l'énergie sur une surface inclinée par rapport aux rayons incidents. Nous allons introduire ces complications une à une en commençant par le rôle de l'inclinaison du récepteur. S'il est incliné, il reçoit moins d'énergie, ce qui explique qu'en hiver il fasse plus froid qu'en été en raison de l'inclinaison des rayons du Soleil. Considérons une source isotrope donnant un éclairement E .

La figure 10.19 présente deux surfaces circulaires de rayons r , l'une étant perpendiculaire aux rayons incidents, l'autre inclinée d'un angle θ : on repère cette inclinaison avec l'angle formé entre la direction de la source et la normale à la surface. La surface (1) capte de l'énergie sur un cercle de rayon r et de surface :

$$S_1 = \pi r^2$$

égale à l'éclairement multiplié par la surface :

$$e_1 = E\pi r^2 = \frac{\phi}{4} \left(\frac{r}{d}\right)^2$$

La surface (2) capte de l'énergie sur une ellipse de grand axe $a = r$, de petit axe $b = r \cos \theta$ et de surface :

$$S_2 = \pi ab = \pi r^2 \cos \theta = S_1 \cos \theta$$

On a donc

$$e_2 = \frac{\phi}{4} \left(\frac{r}{d}\right)^2 \cos \theta$$

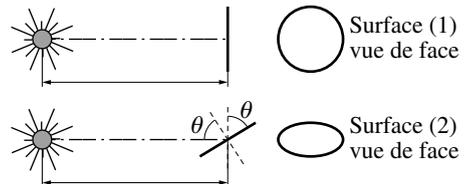


Figure 10.19 • Définition de l'éclairement dans le cas de surfaces droites et inclinées.

On définit alors un éclairage efficace égal au rapport de la puissance reçue divisée par la surface réelle soit :

$$E = \frac{\phi}{4\pi d^2} \cos \theta$$

Une application est proposée dans l'encart 10.8.

Encart 10.8. Éclairage d'une lampe de bureau

Prenons l'exemple d'une lampe dont on veut régler la hauteur h pour que l'éclairage soit le plus important sur le bureau (figure 10.20). Notons la puissance Φ .

On peut écrire :

$$E = \frac{\phi}{4\pi d^2} \cos \theta = \frac{\phi}{4\pi d^2} \frac{h}{d} = \frac{\phi}{4\pi} \frac{h}{(h^2 + e^2)^{3/2}}$$

La figure 10.21 montre l'évolution de cette fonction en fonction de θ . E est une fonction de h qui passe par un maximum quand sa dérivée est nulle soit :

$$\frac{dE}{dh} = \frac{\phi}{4\pi} \frac{h(e^2 - 2h^2)}{(h^2 + e^2)^{5/2}} = 0$$

ce qui est satisfait si :

$$h = e \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707e$$

soit $\theta = 54^\circ$.

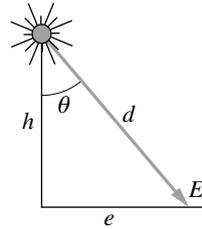


Figure 10.20 • Éclairage d'un bureau par une lampe de puissance ϕ .

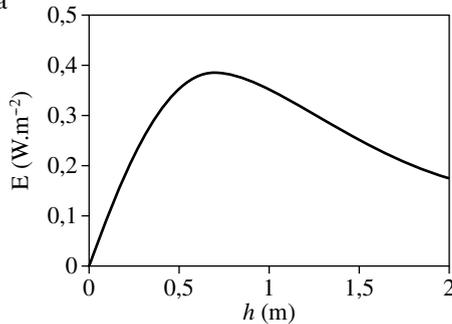


Figure 10.21 • Évolution de l'éclairage d'un bureau en fonction de la hauteur h de la lampe.

3.2. Intensité

Dans le cas où la source n'est plus isotrope, on est amené à caractériser l'énergie émise dans chaque direction par une quantité appelée **intensité**. La source va maintenant émettre dans des directions privilégiées. Si E est l'éclairage, la surface S , placée à une distance d , capte le flux (pris au sens de puissance) $\phi = ES$. Une autre surface S' placée un peu plus loin à une distance d' dans le même cône de lumière, capte le même flux qui s'écrit maintenant :

$$\phi = ES = E'S' = Ed^2 \frac{S}{d^2} = E'd'^2 \frac{S'}{d'^2}$$

Or, le cône dessiné sur la figure 10.22 est tel que $\frac{S}{d^2} = \frac{S'}{d'^2} = \Omega$. Ω s'appelle l'angle

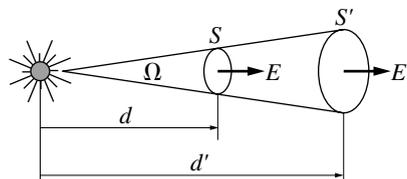


Figure 10.22 • Définition de l'intensité lumineuse.

solide et est égal à la surface S si $d = 1$ m. C'est une quantité exprimée en stéradians dont le symbole est st. Cette notion est présentée en détails dans le chapitre 5 du volume *Mathématiques pour la physique* du même cours.

On appelle *angle solide* Ω , la surface découpée par un cône sur la sphère de rayon unité. On l'exprime en stéradians (st).

Dans l'expression du flux ϕ , on fait apparaître une quantité invariante à l'intérieur du cône que l'on appelle l'**intensité énergétique** :

On appelle *intensité énergétique* (exprimée en W.st^{-1}) la quantité :

$$I = \frac{\phi}{\Omega} = Ed^2$$

3.3. Luminance d'une source étendue

Une source non isotrope est donc caractérisée par l'intensité définie dans chaque direction (angle solide). D'autre part, si la source est étendue, la puissance totale ne suffit plus et on caractérise l'émission de chaque élément de surface de la source par la luminance L (figure 10.23). Si la direction est inclinée par rapport à la normale à la source, on introduit la surface apparente $S \cos \theta$.

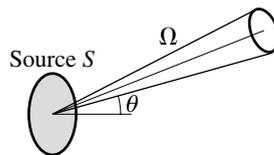


Figure 10.23 • Définition de la luminance.

Un calcul de la luminance du Soleil est proposé dans l'encart 10.9.

Encart 10.9. La luminance du Soleil

Le Soleil émet avec une puissance $\phi = 3,8 \cdot 10^{26}$ W dans tout l'espace, soit dans un angle solide $\Omega = 4\pi$. L'intensité est donc égale à $I = 3 \cdot 10^{25}$ W.st^{-1} . Le Soleil a un rayon $R = 696\,000$ km. Vu depuis la terre, on voit un disque de surface $S = \pi(696 \cdot 10^6)^2 = 1,5 \cdot 10^{18}$ m^2 . La luminance est égale à :

$$L = I/S = 2 \cdot 10^7 \text{ W.m}^{-2}.\text{st}^{-1}.$$

On appelle *luminance énergétique* l'intensité émise par unité de surface par la source (on l'exprime en $\text{W.m}^{-2}.\text{st}^{-1}$) :

$$L = \frac{I}{S \cos \theta}$$

ce qui s'écrit encore $\phi = LS\Omega \cos \theta$

Pour de nombreuses sources, la luminance est indépendante de la direction d'émission. De telles sources sont dites lambertiennes (voir encart 10.10).

Encart 10.10. La formule de la luminance ou de Lambert

On va regrouper les définitions précédentes afin de calculer directement le flux ϕ reçu sur une surface S' en provenance d'une source étendue S placée à une distance d (figure 10.24). La direction de propagation fait un angle θ avec la normale à S et un angle θ' avec la normale à S' . La source a une luminance L . Dans la direction $O'O$, l'intensité est égale à $I = LS \cos \theta$. Sur la surface S' , on reçoit :

$$\phi = LS \Omega \cos \theta = LS \cos \theta \frac{S' \cos \theta'}{d^2}$$

qu'on écrit sous la forme symétrique :

$$\phi = L \frac{SS' \cos \theta \cos \theta'}{d^2}$$

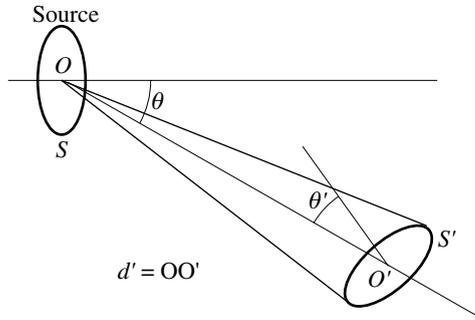


Figure 10.24 • Paramètres de la formule de Lambert.

3.4. Éclairement des images

Considérons un système optique qui forme une image S' d'un objet S de luminance L (figure 10.25). Le faisceau entrant est limité par la pupille d'entrée de diamètre O . La pupille de sortie a un diamètre O' . Les rayons les plus inclinés pouvant pénétrer dans l'instrument font des angles α et α' avec l'axe du système. Si S est la surface de la source, et si l'on utilise la définition de la luminance, l'éclairement produit sur la pupille d'entrée est :

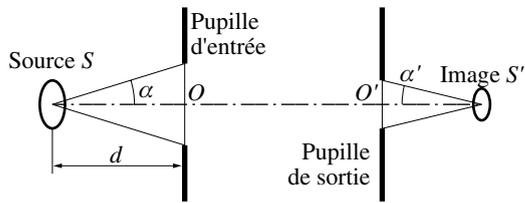


Figure 10.25 • Éclairement des images.

$$E = \frac{I}{d^2} = \frac{LS}{d^2}$$

où I est l'intensité et d la distance de la pupille à l'objet. Le flux Φ qui pénètre dans le système est égal à :

$$\phi = ES = E\pi \left(\frac{O}{2}\right)^2 = \pi \frac{LS}{d^2} \left(\frac{O}{2}\right)^2$$

Dans le cadre de l'approximation des petits angles $\sin \alpha \approx \alpha = \frac{O}{2d}$, ce qui permet d'écrire :

$$\phi = \pi \frac{LS}{d^2} \left(\frac{O}{2}\right)^2 = \pi LS\alpha^2$$

Si par exemple on photographie le Soleil avec un appareil photographique dont l'objectif, qui joue le rôle de pupille d'entrée, a un diamètre de 50 mm, on a $O = 0,05 \text{ m}$. d est la distance Terre-Soleil, égale à $150 \cdot 10^6 \text{ km}$. On trouve $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ rad}$ et $L = 2 \cdot 10^7 \text{ W.m}^{-2}.\text{st}^{-1}$, soit $\phi = \pi \times 2 \cdot 10^7 (1,6 \cdot 10^{-13})^2 \times 1,5 \cdot 10^{11} = 2,6 \text{ W}$.

Le flux lumineux traverse le système en subissant un affaiblissement causé par les réflexions parasites à la surface des lentilles et par les absorptions à l'intérieur des lentilles. On introduit un coefficient de transmission τ qui traduit le fait qu'une partie de l'intensité incidente est perdue. C'est donc une quantité toujours inférieure à 1. Dans un système composé de n lentilles, à chaque traversée de lentille, environ 10 % de la puissance est perdue par réflexion et par absorption ; la fraction de lumière transmise appelée transmission est donc égale $\tau \approx (0,9)^n$; $\tau = 0,81$ pour $n = 2$; $0,56$ pour $n = 3$. Si ϕ' est le flux qui atteint l'image, on peut écrire :

$$\phi' = \phi \tau = \pi L S \tau \alpha^2$$

Sur l'image S' , on reçoit donc un éclairissement :

$$E = \frac{\phi'}{S'} = \tau \pi L \frac{S}{S'} \alpha^2$$

où S' est la surface de l'image. Les dimensions des objets et images sont reliées par la relation de Lagrange-Helmholtz établie dans l'encart 10.11. Elle s'écrit $\frac{A'B'}{AB} = \frac{\alpha n}{\alpha' n'}$. Si γ est le grandissement transversal, les surfaces des objets et des images sont dans un rapport γ^2 et l'on a :

$$\frac{S'}{S} = \gamma^2 = \left(\frac{\alpha n}{\alpha' n'} \right)^2$$

Encart 10.11. La relation de Lagrange-Helmholtz

La relation de Lagrange-Helmholtz permet de calculer l'ouverture des faisceaux arrivant sur l'image. On a représenté sur la figure 10.26 un rayon AI qui se réfracte en I à travers un dioptre sphérique et passe par l'image A' . En A et en A' , il fait avec l'axe principal des angles u et u' . Dans l'approximation de Gauss, on peut confondre H avec S . En tenant compte de l'orientation des angles, on exprime la quantité \overline{SI} de deux manières différentes :

$$\overline{SI} \approx \overline{HI} = \overline{AS} \tan u = \overline{A'S} \tan u' \approx -u \overline{SA} = -u' \overline{SA'}$$

D'après la définition du grandissement, on exprime le rapport des distances p et p' en fonction de n , n' et γ comme :

$$\frac{p'}{p} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{n'}{n} = \frac{n' \overline{A'B'}}{n \overline{AB}}$$

On obtient ainsi la formule dite « de Lagrange-Helmholtz » :

$$n' u' \overline{A'B'} = n u \overline{AB}$$

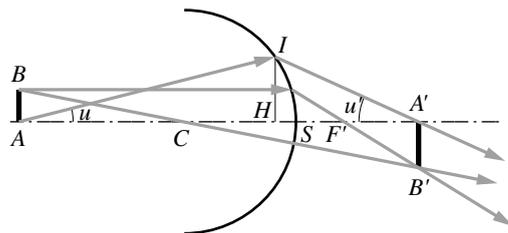


Figure 10.26 • Angles des faisceaux incident et réfracté par rapport à l'axe principal.

Finalement, l'éclairement au niveau de l'image est donné par la relation :

$$E' = \tau \pi L \alpha'^2 \left(\frac{n'}{n} \right)^2$$

L'encart 10.12 discute de la luminance lors de l'observation à travers des jumelles.

Encart 10.12. Le paradoxe de la luminance

Ainsi, si l'on photographie le soleil avec un appareil photographique dont l'objectif est réduit à une lentille de diamètre 50 mm et de distance focale 50 mm, sachant que $\alpha = 32' = 0,0093 \text{ rad}$, $\tau = 0,9$ et $L = 2 \cdot 10^7 \text{ W.m}^{-2}.\text{st}^{-1}$, $E' = 4,9 \cdot 10^3 \text{ W.m}^{-2}$. Si l'on se place derrière l'image, on verra une surface S' qui rayonne l'énergie $\Phi\tau$ dans un cône d'ouverture α' . Par analogie avec la source, on attribue à cette image une luminance L' :

$$\phi\tau = \pi L' S' \alpha'^2 = \tau \pi L S \alpha^2$$

En tenant compte du rapport entre les deux surfaces : $L' = \tau L \left(\frac{n'}{n} \right)^2$. Si les milieux extrêmes sont identiques : $L' = \tau L < L$; la luminance d'une image est toujours plus faible que celle de la source. Par exemple, la luminance de l'image du Soleil vu dans une paire de jumelles est plus faible que celle du Soleil observé à l'œil nu ! Ce résultat semble paradoxal !

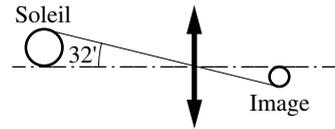


Figure 10.27 • Éclairement de l'image du Soleil.

À RETENIR

- On classe les **instruments d'optique** en deux catégories suivant l'usage qu'on en fait :
 - ceux qui sont destinés à accompagner l'œil dans l'observation et qui servent soit à la vision rapprochée (loupe, microscope...), soit à la vision d'objets éloignés (lunette, télescope...)
 - ceux qui servent à projeter une image sur un écran ou à analyser un rayonnement.
- Les **instruments oculaires** fournissent des images virtuelles regardées par l'œil : loupe, télescope, jumelles, microscope...

Les **instruments de projection** forment une image réelle sur un écran ou sur un détecteur : projecteurs de diapositives, téléobjectifs...
- Pour comparer tous ces instruments, on définit des grandeurs caractéristiques qui nous renseignent sur la taille de l'image et sur l'espace intercepté par l'instrument :
 - le **grandissement transversal** γ . Associé au grandissement longitudinal, il sert à caractériser les images réelles données par les instruments de projection ;

– le **grossissement** G qui a surtout un sens lorsqu'on regarde des objets éloignés : c'est le rapport des angles apparents θ' et θ sous lesquels sont vus l'image et l'objet :

$G = \frac{\theta'}{\theta}$. Si le système est afocal, $G = -\frac{f'_1}{f'_2}$, est le **grossissement intrinsèque**.

Le **grossissement intrinsèque commercial** est celui obtenu pour un objet placé au punctum proximum, soit à 25 cm : $G_i = \frac{1}{4f'} = -\frac{P}{4}$ où P est la puissance ;

– la **puissance** P , utilisée en général pour les objets rapprochés est donnée par :

$$P = -\frac{1}{f'} \left(1 - \frac{d}{\delta} \right)$$

pour un instrument de distance focale image f' . La quantité $P_i = -\frac{1}{f'}$, obtenue quand $d = 0$ (l'œil est au foyer image F') ou quand $\delta \rightarrow \infty$ (l'objet est au foyer objet F) s'appelle la puissance intrinsèque.

- Le **champ** est l'espace objet dont l'instrument forme l'image. Il est limité par le **diaphragme de champ**.
- On appelle **pupille de sortie** le conjugué du diaphragme d'ouverture à travers le sous-système placé *après* lui.
On appelle **pupille d'entrée** le conjugué du diaphragme d'ouverture à travers le sous-système placé *avant* lui.
- Dans un instrument à deux lentilles, le **cercle (ou disque) oculaire** est l'image de l'objectif à travers l'oculaire.
- Le **grossissement commercial** d'un microscope est égal au produit du grandissement de l'objectif (γ_1) par le grossissement de l'oculaire (G_2) :

$$G = \gamma_1 G_2$$

La **puissance** est égale à $4G$.

- L'**éclairement énergétique**, exprimé en W.m^{-2} , est la puissance qui traverse l'unité de surface :

$$E = \frac{\phi}{4\pi d^2}$$

où ϕ est la **puissance totale** de la source isotrope.

On appelle **angle solide** Ω , la surface découpée par un cône sur une sphère de rayon unité. On l'exprime en stéradians (st).

L'**intensité énergétique**, exprimée en W.st^{-1} , est la quantité :

$$I = \frac{\phi}{\Omega} = Ed^2$$

La **luminance énergétique**, exprimée en $\text{W.m}^{-2}.\text{st}^{-1}$ est l'intensité émise par unité de surface par la source :

$$L = \frac{I}{S \cos \theta}$$

ce qui s'écrit encore : $\phi = LS\Omega \cos \theta$

QCM

1 Un microscope est une combinaison optique

- (1) afocale
 (2) convergente
 (3) divergente

2 Une lunette astronomique est composée

- (1) d'un objectif convergent et d'un oculaire convergent.
 (2) d'un objectif convergent et d'un oculaire divergent.
 (3) d'un objectif divergent et d'un oculaire convergent.

3 Une lunette de Galilée est composée

- (1) d'un objectif convergent et d'un oculaire convergent.
 (2) d'un objectif convergent et d'un oculaire divergent.
 (3) d'un objectif divergent et d'un oculaire convergent.

4 Sur une paire de jumelles, on lit l'indication 8×50

- (1) Elles grossissent de 8 à 50 fois.
 (2) Elles grossissent 8 fois pour les objets proches et 50 fois pour les objets éloignés.

(3) Elles grossissent 8 fois et le diamètre de l'objectif est égal à 50 mm.

5 Une lunette grossit 100 fois,

- (1) l'objet regardé semble 100 fois plus proche.
 (2) la surface de l'objet est multipliée par 100.
 (3) le diamètre de l'objectif est 100 fois celui de l'oculaire.

6 Une lunette grossit 100 fois. Si l'on regarde par le « petit bout »

- (1) on ne voit rien.
 (2) l'image est droite
 (3) le grossissement est égal à $1/100^e$.

7 On modifie le grossissement d'un télescope

- (1) en déplaçant l'oculaire.
 (2) en remplaçant l'oculaire.
 (3) en remplaçant le miroir primaire.

Réponses : 1. 1, 2. 1, 3. 2, 4. 3, 5. 1, 6. 3, 7. 2

EXERCICES

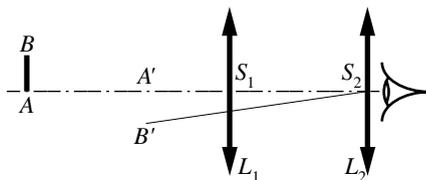
1 Une lunette astronomique en fonctionnement afocal est composée de deux lentilles convergentes distantes de 1 m.

a) Sachant que le grossissement est de 40, quelles sont les distances focales des deux lentilles ?

b) Quel est le grossissement si l'on regarde par le « petit bout de la lunette » ?

2 Une lunette de Galilée est composée d'un objectif de 10δ et d'un oculaire de -12δ . De combien faut-il séparer les deux lentilles pour que le système formé soit afocal ?

3 Une lunette astronomique est composée d'un objectif L_1 de 40 cm de distance focale et d'un oculaire L_2 de 2,5 cm de distance focale. L'œil de l'observateur placé contre l'oculaire est capable d'effectuer la mise au point à une distance de 25 cm. De combien doit-il écarter les deux lentilles pour observer nettement un objet AB situé à 3 m de la première lentille ? Quel est alors le grandissement ?



4 Une lunette astronomique, constituée d'un objectif de distance focale f_1' et d'un oculaire de distance focale f_2' , séparés d'une distance e , est utilisée pour projeter l'image du Soleil AB sur un écran placé derrière l'oculaire en réalisant une image réelle $A'B'$.

a) Le Soleil AB a un diamètre apparent $\theta = 30'$. Exprimer la taille de l'image primaire $A''B''$ formée dans le plan focal de l'objectif en fonction de θ et de f_1' .

b) Exprimer la distance de $A''B''$ à l'oculaire ainsi que la position de l'image finale $A'B'$. En déduire le grandissement de l'oculaire γ et la taille de l'image $A'B'$.

c) Calculer e avec $f_1' = 1\text{ m}$, $f_2' = 1\text{ cm}$ afin d'obtenir une image du Soleil de 50 cm de diamètre.

5 Un œil est placé à 10 cm d'une lentille convergente de 5 cm de distance focale et de 6 cm de diamètre. Une source ponctuelle est placée sur l'axe à 4 cm de la lentille. De combien l'œil doit-il se déplacer latéralement pour ne plus recevoir de lumière de la source ?

6 Une lunette astronomique est composée d'un objectif de 24 cm de distance focale et d'un oculaire de 4 cm de distance focale.

a) En mode de fonctionnement afocal, où est placé le disque oculaire et quel est son diamètre si celui de l'objectif est de 2 cm ?

b) Un observateur place son œil au centre du disque oculaire. L'oculaire ayant un diamètre de 1 cm, déterminer l'angle maximal θ' formé avec l'axe par le rayon passant au bord de l'oculaire et entrant dans l'œil. En tenant compte du grossissement, quelle est l'inclinaison θ du rayon incident avec l'axe ? Dans ces conditions, voit-on la Lune de diamètre $30'$ en entier dans cette lunette ?

7 Une paire de jumelles est constituée de deux tubes fonctionnant sur le principe de la lunette astronomique avec en plus des prismes qui permettent de compacter l'instrument et de redresser l'image. Dans cet exercice, on utilisera uniquement le principe en réduisant l'instrument à deux lentilles, l'objectif convergent de 30 cm de distance focale et l'oculaire.

a) Sur la paire de jumelles, on lit l'indication 10×50 . Que signifie-t-elle ? Où est placé le disque oculaire en fonctionnement afocal et quel est son diamètre ? Dans la suite de l'exercice, on supposera que l'œil de l'observateur occupe toujours le centre du disque oculaire.

b) Un individu à vision normale utilise ces jumelles pour observer un objet A situé à très grande distance :

– En réglant les jumelles, il s'arrange pour placer l'image finale donnée par les jumelles à l'infini. Quelle est le tirage e_1 correspondant à l'écartement des deux lentilles ?

– Il place maintenant l'image finale à 25 cm de son œil. Quel est le nouveau tirage e_2 ?

c) Il observe maintenant un objet A placé à 10 m, la distance la plus courte où les jumelles permettent d'obtenir une image nette. Déterminer les deux tirages e_3 et e_4 qui donnent une image finale à l'infini, puis à 25 cm de l'œil.

d) Un myope ayant une myopie de -8 dioptries va utiliser les mêmes jumelles. Ce chiffre signifie que l'individu doit porter des verres de -8δ pour accommoder à l'infini sans effort.

– Déterminer la distance p_2 du punctum remotum de cet individu quand il ne porte pas de lunettes.

– L'individu possède une amplitude d'accommodation égale à 5. Déterminer les distances p_3 et p_4 de son punctum proximum avec et sans lunettes.

– Peut-il utiliser les jumelles précédentes sans porter de lunettes ?

– Pour réussir à mettre correctement au point sans lunettes, il colle son œil contre l'oculaire. Peut-il utiliser les jumelles ?

8 Un microscope contient un objectif de 1 cm de distance focale et un oculaire de 5 cm de distance focale. La distance les séparant est fixe et égale à 30 cm. La mise au point s'effectue en déplaçant l'ensemble par rapport à l'objet. Un individu à vision normale regarde l'image finale $A'B'$ d'un objet AB en plaçant son œil contre l'oculaire.

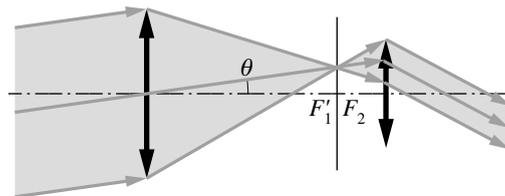
a) Sachant qu'il place l'image finale à 25 cm de son œil, déterminer la position p_2 (par rapport à l'oculaire) de l'image intermédiaire $A''B''$ donnée par l'objectif. En déduire la position p_1 de l'objet AB par rapport à l'objectif. En déduire le grossissement γ_1 causé par l'objectif, et le grossissement γ_2 de l'oculaire ainsi que le grossissement total.

b) Il déplace l'objet AB de telle façon que l'image finale $A'B'$ soit rejetée à l'infini. En déduire la nouvelle position p_1 de l'objet par rapport à l'objectif. Calculer le nouveau grossissement γ_1 et le grossissement G_2 de l'oculaire. Quel est le grossissement final ?

9 On cherche à déterminer le champ observable avec une lunette astronomique composée de deux lentilles convergentes, l'objectif de distance focale $f'_1 = 1$ m et l'oculaire de distance focale $f'_2 = 1$ cm. Les deux lentilles sont placées de telle façon que le système soit afocal.

a) Calculer le grossissement G de cette lunette.

b) La figure suivante représente un faisceau de rayons parallèles ayant la plus grande inclinaison θ et pénétrant en totalité à travers l'oculaire. L'objectif et l'oculaire ayant des diamètres respectivement égaux à D et d , démontrer que, dans le cadre de l'approximation des petits angles :



$$\theta \approx \frac{df'_1 - Df'_2}{2(f'_1 + f'_2)f'_1}$$

Calculer θ avec $D = 10$ cm et $d = 1,5$ cm. La Lune de diamètre $\theta = 30'$ est-elle vue en entier dans cette lunette ?

10 a) Déterminer les éléments cardinaux de l'oculaire négatif d'Huygens {4, 3, 2}.

b) Déterminer les éléments cardinaux de l'oculaire négatif de Dollond-Huygens {3, 2, 1}.

c) Déterminer a et le grossissement commercial quand $f' = 1$ cm.

11 On appelle ϕ l'énergie totale émise en 1 s par une source ponctuelle qui émet de manière isotrope dans toutes les directions.

a) Donner l'expression de l'éclairement E obtenu à une distance d de cette source sur une surface élémentaire placée perpendiculairement aux rayons incidents en précisant les unités utilisées.

A.N. : bougie de puissance $\phi = 0,1$ W placée à une distance $d = 1$ m.

b) La limite de sensibilité de l'œil est de $2 \cdot 10^{-9}$ W.m⁻². À quelle distance peut-on encore « voir » la bougie précédente ? Même question avec le télescope spatial qui peut détecter des éclairements de $7 \cdot 10^{-20}$ W.m⁻².

12 On désire photographier la Lune avec un appareil photographique équipé d'un téléobjectif de distance focale F . On suppose que la Lune émet de manière isotrope avec une puissance ϕ .

a) La Lune étant à une distance moyenne d de la Terre, quel est l'éclairement E produit au niveau de la Terre par le rayonnement lunaire ?

b) On reçoit cette énergie sur la pupille d'entrée de diamètre D . L'énergie qui pénètre dans l'appareil se retrouve sur l'image de la Lune. Si la distance focale de l'objectif est F , quel est le diamètre de l'image sachant que la Lune a un diamètre δ . Quel est l'éclairement E' sur le plan du film au niveau de l'image de la Lune. Calculer E' avec $\phi = 2,7 \cdot 10^{15}$ W, $\delta = 3\,300$ km, $d = 384\,000$ km, $F = 135$ mm ; $D = 34$ mm.

c) La sensibilité S du film est exprimée en ISO ou ASA (*American Standard Association*). Si E' est l'éclairement ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$) et t la durée d'exposition (s), le film est impressionné à condition que $t > t_0 = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{SE'}$. Avec $S = 64$ ASA, quelle est la valeur minimale du temps de pose ?

d) En réalité, il faut augmenter notablement ce temps de pose pour deux raisons :

– pour tenir compte de l'absorption produite par les lentilles. Si n est le nombre de lentilles, la transmission de l'objectif est égale à $\tau = (0,9)^n$;

– multiplier par 100 le minimum t_0 afin d'obtenir une exposition correcte.

Quelle est la valeur du temps de pose si $n = 5$.

e) Sur l'appareil photographique, le posemètre est gradué en fraction de seconde :

1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/15, 1/30, 1/60, 1/125, 1/250, 1/500, 1/1 000

Quelle indication choisissez-vous pour obtenir un bon temps de pose ?

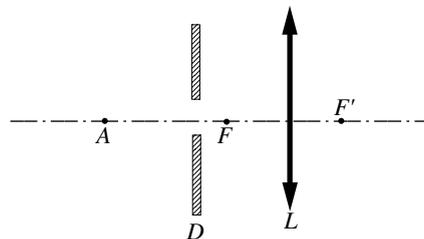
f) On peut également modifier la pupille d'entrée en réduisant ou augmentant le diamètre du diaphragme. Le constructeur indique ce diamètre à l'aide d'une donnée appelée **ouverture numérique** N telle que $D = F/N$ (on dit que l'objectif est ouvert à « F/N »). Donner la nouvelle expression de E' . Comment varie l'éclairement E' sur le film en fonction de N ?

g) On réalise la même photographie avec un télescope qui remplace le téléobjectif. Ses caractéristiques étant $F = 2$ m ; $D = 150$ mm, quel temps de pose faut-il utiliser pour obtenir une image correcte de la Lune. Quel est l'intérêt du télescope par rapport au téléobjectif de 135 mm ?

13 Pupilles

Un diaphragme D de 2 cm de diamètre est placé à 3 cm en avant d'une lentille convergente de distance focale $f'_1 = 2$ cm, et de 6 cm de diamètre. Une source lumineuse A est placée sur l'axe à 6 cm en avant de la lentille.

1) Déterminer la position de A' , l'image de A à travers la lentille.



- 2) Déterminer la position et la taille de D' , l'image de D à travers la lentille.
- 3) Placer sur la figure D' et A' . Faire apparaître les limites du faisceau issu de A après passage à travers la lentille.

14 Lunette astronomique

Une lunette astronomique comporte un objectif de distance focale $f'_1 = 1$ m et un oculaire de distance focale $f'_2 = 2$ cm, assimilés tous les deux à des lentilles minces séparées d'une distance e . L'observateur place son œil au foyer image F'_2 de l'oculaire et observe un objet situé à l'infini. Calculer la position de l'image finale, par rapport à l'oculaire. Calculer e dans les 2 conditions suivantes

- 1) l'œil n'accommode pas.
- 2) l'œil accommode à 25 cm.

Solutions

1 a) Le grossissement est égal au rapport des distances focales. Par ailleurs, si le système est afocal, l'intervalle optique Δ est égal à zéro (chapitre 8). On a donc les deux équations : $e = f'_1 + f'_2 = 100$ cm et $G = \left| -\frac{f'_1}{f'_2} \right| = 40$, ce qui donne $f'_1 = 97,56$ cm et $f'_2 = 2,44$ cm.

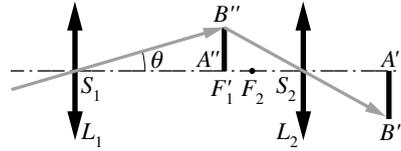
b) Si l'on regarde par « le petit bout de la lunette », on inverse le rôle des lentilles et le grossissement est égal à $\left| -\frac{f'_2}{f'_1} \right| = \frac{1}{40}$.

2 Pour que le système soit afocal, il faut que l'intervalle optique entre les lentilles soit nul, soit $\Delta = e - f'_1 - f'_2 = 0$. Sachant que $\Phi_1 = \frac{1}{f'_1} = 10 \delta$ et $\Phi_2 = \frac{1}{f'_2} = -12 \delta$. On trouve $e = 1,67$ cm.

3 $A'B'$ est l'image finale donnée par l'oculaire L_2 . $p'_2 = \overline{S_2A'} = -25$ cm. Avec une distance focale de 2,5 cm, la formule de conjugaison appliquée à l'oculaire donne $\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f'_2}$. L'objet $A''B''$ est placé en $p_2 = \overline{S_2A''} = -2,27$ cm. $A''B''$ est l'image de AB à travers l'objectif. Par rapport à l'objectif, si e est la distance entre les deux lentilles, sa position est $p'_1 = \overline{S_1A''} = \overline{S_1S_2} + \overline{S_2A''} = e - 2,27$ cm. L'objet AB est tel que $p_1 = -300$ cm. La formule de conjugaison appliquée à l'objectif donne $\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f'_1}$, soit $\frac{1}{e - 2,27} + \frac{1}{300} = \frac{1}{40}$, ce qui donne $e = 48,42$ cm.

Le grandissement est donné par $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 = \frac{p'_2 p'_1}{p_2 p_1} = \frac{(-25)(48,42 - 2,27)}{(-2,27)(-300)} = -1,69$.

- 4 a) Si l'image intermédiaire A'' est placée dans le plan focal, et si θ est l'angle sous lequel est vu le Soleil, on a : $\tan \theta \approx \theta = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{S_1F'_1}}$, ce qui donne $\overline{A''B''} = f'_1\theta$.



- b) Pour l'oculaire L_2 , $p_2 = \overline{S_2A''} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A''} = -e + f'_1$. La relation de conjugaison appliquée à l'oculaire donne $p'_2 = \frac{p_2 f'_2}{f'_2 + p_2} = \frac{f'_2(e - f'_1)}{e - f'_1 - f'_2}$.

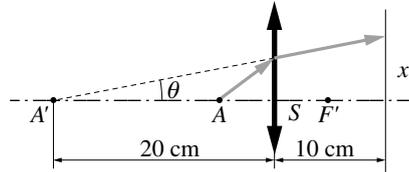
Le grandissement de l'oculaire est : $\gamma = \frac{p'_2}{p_2} = \frac{f'_2}{f'_2 + f'_1 - e} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A''B''}}$ soit $\overline{A'B'} = \frac{\theta f'_1 f'_2}{f'_2 + f'_1 - e}$.

L'image est inversée.

- c) Si $\theta = 30' = 8,7 \cdot 10^{-3}$ rad, et $\overline{A'B'} = -50$ cm alors :

$$e = f'_2 + f'_1 - \frac{\theta}{\overline{A'B'}} f'_1 f'_2 = 101,017 \text{ cm.}$$

- 5 La position de l'image A' est donnée par la relation de conjugaison. On trouve $p' = \overline{SA'} = -20$ cm. Elle est virtuelle à 20 cm en avant de la lentille. Le point le plus éloigné qui voit la source est tel que $\tan \theta = \frac{x}{30} = \frac{3}{20}$, soit $x = 4,5$ cm. L'œil doit se déplacer de 4,5 cm de l'axe pour ne plus voir la source.

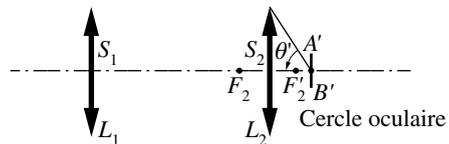


- 6 a) Le disque oculaire est l'image de l'objectif à travers l'oculaire. Il suffit donc d'appliquer la formule de conjugaison à l'oculaire avec $p_2 = \overline{S_2S_1} = -e = -28$ cm. On trouve $p'_2 = \overline{S_2A'} = 4,67$ cm. Il est placé à droite de l'oculaire. Son diamètre est donné par le grandissement de l'oculaire : $\gamma = \frac{p'_2}{p_2} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

Il a un diamètre $A'B' = AB \frac{p'_2}{p_2} = 2 \frac{4,67}{28} = 0,33$ cm.

- b) $\theta' = \frac{d}{2\overline{S_2A'}} = \frac{0,5}{4,67} = 0,107$ rad = $6,14^\circ$, où d est le diamètre de l'oculaire. Le grossissement est défini par $G = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -6$.

On a donc $\theta = \frac{\theta'}{G} = -\frac{6,14}{6} = -1,02^\circ$.



Ceci n'est que le demi-angle sous lequel on voit les objets. L'angle total est $2\theta = -2,04^\circ$. La Lune est visible en entier.

- 7 a)** La signification de cette indication est donnée dans le paragraphe 1.2 du présent chapitre : 10 est le grossissement et 50, le diamètre de l'objectif, exprimé en mm.

Le disque oculaire est par définition l'image de l'objectif à travers l'oculaire. Si l'on applique la formule de conjugaison à l'oculaire, on a $p_2 = -e$ et $p'_2 = \frac{ef'_2}{e - f'_2}$.

Par ailleurs, en fonctionnement afocal, $\Delta = e - f'_1 - f'_2 = 0$, F'_1 et F_2 sont confondus et F et F' rejetés à l'infini. Par ailleurs, comme $G = -\frac{f'_1}{f'_2} = -10$, avec $f'_1 = 30$ cm, on en tire $f'_2 = 3$ cm, $e = 33$ cm et $p'_2 = 3,3$ cm.

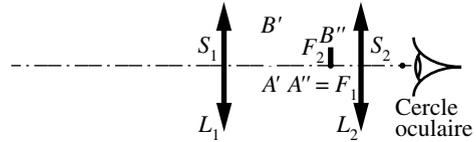
Le grandissement transversal est : $\gamma = \frac{p'_2}{p_2} = -\frac{3,3}{33} = -0,1 = \frac{d'}{d}$, où d' est le diamètre du cercle oculaire et d celui de l'objectif. On trouve donc $d' = 5$ mm.

- b)** L'objet est à l'infini ainsi que l'image finale. Le système est donc afocal (les deux foyers sont à l'infini). On a donc $\Delta = 0$, soit $e_1 = f'_1 + f'_2 = 33$ cm.

L'image finale $A'B'$ est à 25 cm de l'œil ; on a donc :

$$p'_2 = \overline{S_2A'} = \overline{S_2O} + \overline{OA'} = 3,3 - 25 = -21,7 \text{ cm.}$$

La formule de conjugaison appliquée à l'oculaire donne la position de l'image intermédiaire : $p_2 = \overline{S_2A} = -2,63$ cm. Celle-ci est située au foyer de l'objectif (l'objet A est à grande distance). On a donc :



$$p'_1 = \overline{S_1A''} = \overline{S_1S_2} + \overline{S_2A''} = e_2 + p_2 = f'_1 = 30 \text{ cm, soit } e_2 = 32,63 \text{ cm.}$$

- c)** L'objet est à 10 m de l'objectif : la formule de conjugaison appliquée à l'objectif donne $p_1 = -1\,000$ cm et $p'_1 = 30,93$ cm.

• Si l'image finale est à l'infini, l'image intermédiaire est au foyer F_2 de l'oculaire : $p_2 = \overline{S_2A''} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A''} = -e_2 + p'_1 = f_2 = -3$ cm, d'où $e_3 = 33,93$ cm.

• Si l'image finale est à 25 cm de l'œil, l'image intermédiaire est à $p_2 = -2,63$ cm de l'oculaire (voir question (b)) et $e_4 = \overline{S_1S_2} = \overline{S_1A''} + \overline{A''S_2} = p'_1 - p_2 = 30,93 + 2,63 = 33,56$ cm.

- d)** p' est la distance fixe cornée-rétine. Selon que l'on considère le punctum remotum ou le punctum proximum avec ou sans lunettes, les formules de conjugaison appliquées à l'œil sont indiquées dans le tableau suivant :

	Punctum remotum		Punctum proximum	
	sans lunettes	avec lunettes	sans lunettes	avec lunettes
Formule de conjugaison	$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_2} = \Phi$	$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_1} = \Phi - 8$	$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_3} = \Phi + 5$	$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_4} = \Phi + 5 - 8$

Φ est la vergence intrinsèque de l'œil. En vision de loin, elle est diminuée de 8δ avec des lunettes. Pour la vision de près, elle est augmentée de 5δ , pouvoir d'accommodation.

Pour déterminer la distance p_2 de l'objet visible par l'individu qui ne porte pas de lunettes, il suffit d'utiliser les deux premières équations : une fois corrigé, l'œil accomode à l'infini

($p_1 \rightarrow \infty$); on a alors $p' = \frac{1}{\Phi - 8}$. Si l'on reporte cette expression dans la première équation, on en tire facilement, $p_2 = -1/8 = -12,5$ cm.

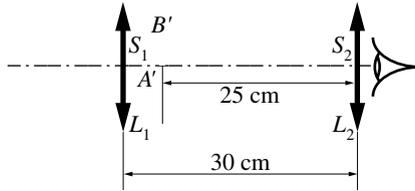
De même, en utilisant les deux dernières équations et la valeur de p' , on trouve $p_3 = -1/13 = -7,7$ cm et $p_4 = -1/5 = -20$ cm.

Sans lunettes, il peut accommoder entre 7,7 et 12,5 cm. Il ne peut donc pas utiliser les jumelles : en collant son œil contre l'oculaire, il gagne 3,3 cm, ce qui n'est pas suffisant.

8 a) Si l'image finale est à 25 cm de l'oculaire, la formule de conjugaison appliquée à l'oculaire donne $p'_2 = -25$ cm et $p_2 = -25/6$ cm = -4,17cm.

Appliquée à l'objectif, on a $p'_1 = \overline{S_1 A''} = \overline{S_1 S_2} + \overline{S_2 A''} = 30 - 4,17 = 25,83$ cm et $p_1 = -1,0402$ cm.

$$\gamma_1 = \frac{p'_1}{p_1} = 24,84, \quad \gamma_2 = \frac{p'_2}{p_2} = 5,99 \quad \text{et} \quad G = \gamma_1 \gamma_2 = 149.$$

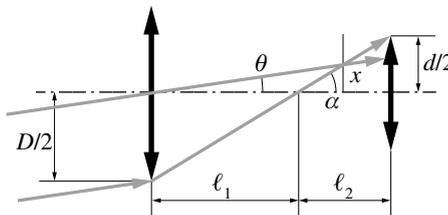


b) Si l'image finale est à l'infini, l'image intermédiaire est au foyer F_2 de l'oculaire et $p_2 = -5$ cm. Alors $p'_1 = 30 - 5 = 25$ cm et $p_1 = -1,04167$ cm.

$$\gamma_1 = -24, \quad G_2 = D P_2 = -\frac{D}{f'_2} = 5 \quad \text{et} \quad G = \gamma_1 G_2 = 120.$$

9 a) La valeur absolue du grossissement est définie par : $G = -\frac{f'_1}{f'_2} = -100.$

b)



En écrivant les tangentes des angles α et θ , on a :

$$2\alpha = \frac{D}{l_1} = \frac{d}{l_2} = \frac{2x}{l_2 - f'_2} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{x}{f'_1}. \quad \text{Par ailleurs, en fonctionnement afocal,}$$

$$l_1 + l_2 = e = f'_1 + f'_2. \quad \text{En combinant ces trois équations pour éliminer } x, l_1 \text{ et } l_2, \text{ on en tire}$$

$$l_2 = \frac{d(f'_1 + f'_2)}{D + d} \quad \text{et} \quad \frac{d/2}{l_2} = \frac{x}{l_2 - f'_2} = \frac{\theta f'_1}{l_2 - f'_2} \quad \text{soit} \quad \theta = \frac{df'_1 - Df'_2}{2(f'_1 + f'_2)f'_1}.$$

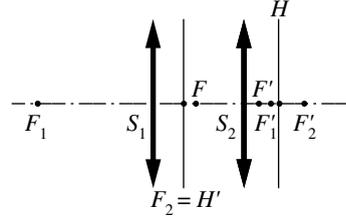
On trouve $\theta = 6,9 \cdot 10^{-3}$ rad = $0,397^\circ = 23,8'$. Le champ est égal à 2θ , soit $47,6'$. On voit donc la Lune en entier.

- 10 a) Il est défini par $f'_1 = 4a$, $e = 3a$, $f'_2 = 2a$ et $\Delta = -3a$, ce qui donne : $\overline{F'_2F'} = -\frac{4}{3}a$,
 $\overline{F_1F} = \frac{16}{3}a$ et $\overline{H'F'} = f' = \frac{8}{3}a$.

Pour cet oculaire, le point principal H' est confondu avec F_2 . En effet,

$$\overline{H'F_2} = \overline{H'F'} + \overline{F'F_2} + \overline{F_2F_2} = \frac{8}{3}a + \frac{4}{3}a - 4a = 0.$$

Pour avoir une distance focale f' de 1 cm, il faut prendre $a = 0,375$ cm, ce qui conduit à $e = -\Delta = 1,125$ cm, $f'_1 = 1,5$ cm, $f'_2 = 0,75$ cm et $\overline{F_1F} = 2$ cm. C'est bien un oculaire négatif, F étant placé entre les deux lentilles. Son grossissement est $G = 25$. C'est un oculaire négatif et convergent.



Éléments cardinaux de l'oculaire négatif de Huygens

- b) Il est défini par $f'_1 = 3a$, $e = 2a$, $f'_2 = a$ et $\Delta = -2a$, ce qui donne :

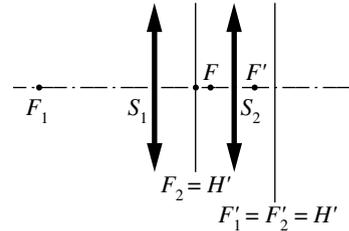
$$\overline{F'_2F'} = -\frac{1}{2}a, \overline{F_1F} = \frac{9}{2}a \text{ et } \overline{H'F'} = f' = \frac{3}{2}a.$$

Pour cet oculaire, H , F'_2 et F'_1 d'une part, F_2 et H' d'autre part sont confondus. En effet, on peut écrire :

$$\overline{F'_2F'_1} = \overline{F'_2S_2} + \overline{S_2S_1} + \overline{S_1F'_1} = -a - 2a + 3a = 0$$

$$\overline{F_2H'} = \overline{F_2F_2} + \overline{F_2F'} + \overline{F'H'} = 2a - \frac{1}{2}a - \frac{3}{2}a = 0$$

$$\overline{HF'_1} = \overline{HF} + \overline{FF_1} + \overline{F_1F'_1} = -\frac{3}{2}a - \frac{9}{2}a + 6a = 0$$



Éléments cardinaux de l'oculaire négatif de Dollond-Huygens

Pour avoir une distance focale f' de 1 cm, il faut prendre $a = 0,66$ cm, ce qui conduit à $e = -\Delta = 1,32$ cm, $f'_1 = 2$ cm, $f'_2 = 0,66$ cm et $\overline{F_1F} = 3$ cm. C'est un oculaire négatif et convergent.

- 11 a) L'éclairement est défini par : $E = \frac{I}{d^2} = \frac{\phi}{\Omega d^2} = \frac{\phi}{4\pi d^2}$, soit $E = 0,00795 \text{ W.m}^{-2}$.

b) Inversement, on a $d = \sqrt{\frac{\phi}{4\pi E}}$. Si E , correspondant à la sensibilité de l'œil, vaut $2 \cdot 10^{-9} \text{ W.m}^{-2}$, on a $d = 2$ km.

Si $E = 7 \cdot 10^{-20} \text{ W.m}^{-2}$, $d = 337\,000$ km.

- 12 a) Comme précédemment, $E = \frac{\phi}{4\pi d^2}$.

b) Si l'objet est à grande distance, l'image est quasiment au foyer. Si l'on appelle x le diamètre de l'image, $\gamma = \frac{x}{\delta} = \frac{p'}{p} \approx \frac{F}{d}$, soit $x \approx \frac{F\delta}{d}$.

Le flux entrant dans l'appareil est égal à l'éclairement de la Lune que multiplie la surface de

la pupille d'entrée : $\phi_e = E \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\phi}{4\pi d^2} \frac{\pi D^2}{4}$.

L'éclairement au niveau de l'image est égal au flux entrant divisé par la surface de l'image :

$$E' = \frac{\phi}{4\pi d^2} \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{F\delta}{d}\right)^2} = \frac{\phi D^2}{4\pi F^2 \delta^2} = 1,25 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2} \quad \text{et} \quad t_0 = 1,49 \cdot 10^{-5} \text{ s.} \quad \text{La distance}$$

Terre-Lune n'intervient pas dans le résultat.

c) On a en réalité $E'_s = E'(0,9)^5 = 0,738 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.

d) $t = 100 \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{0,738 \cdot 64} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$, ce qui correspond à un temps de pause de 1/400.

e) L'indication la plus proche de ce dont on a besoin est 1/250.

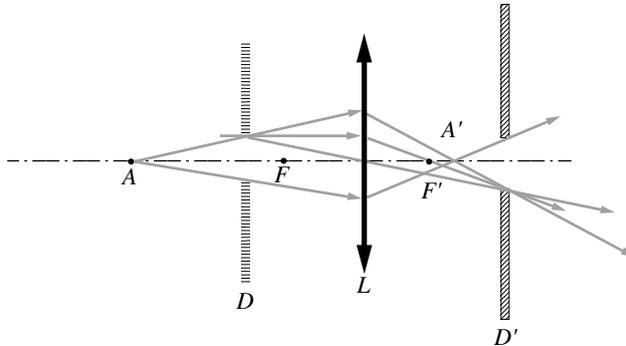
f) L'éclairement sur l'image devient $E' = \frac{\phi(F/N)^2}{4\pi F^2 \delta^2} = \frac{\phi}{4\pi N^2 \delta^2} (0,9)^5$. Il varie comme $1/N^2$.

g) Avec un télescope, $E' = 0,11 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. $t_0 = 1,69 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. $t = 1/30$. L'image de la Lune est beaucoup plus grande.

13 Pupilles

$A : p = -6 \text{ cm}, p' = 3 \text{ cm}$

$D : p = -3 \text{ cm}, p' = 6 \text{ cm}, \gamma = -2, D' = -4 \text{ cm}$



14 Lunette astronomique

Si l'objet A est à l'infini, $p_1 = \overline{S_1 A'_1} = f'_1 = 100 \text{ cm}$, l'image donnée par l'objectif est au foyer F'_1 . Par rapport à l'oculaire,

$$p_2 = \overline{S_1 A'_1} = \overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 A'_1} = p'_1 - e = f'_1 - e$$

$$\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f'_2} \implies p'_2 = \frac{f'_2(f'_1 - e)}{f'_1 + f'_2 - e}$$

1) $p'_2 \rightarrow \infty, e = f'_1 + f'_2 = 1,02 \text{ m}$, le système est afocal.

2) $p'_2 = -25 \text{ cm}, e = 1,0185 \text{ m}$.

On rapproche les lentilles de 15 mm.

CONSTRUCTIONS

Pré-requis

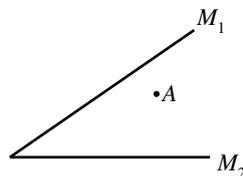
Ce chapitre, destiné à vérifier que toutes les notions abordées dans les chapitres précédents sont acquises, utilise donc l'ensemble du cours.

Objectif

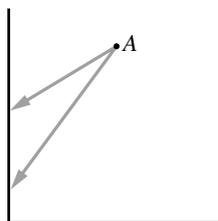
Ce chapitre propose plusieurs types de constructions s'appuyant sur toutes sur les notions de base présentées dans l'ensemble du cours. Il se présente donc différemment puisqu'il demande une participation directe du lecteur. Pour chaque système ou association de système proposé, le lecteur aura à faire lui-même la construction dont il trouvera le corrigé en deuxième partie de chapitre. La technique de constructions est détaillée dans chacun des chapitres correspondants.

1. MIROIRS PLANS

- 1** On appelle A_1 l'image de A à travers M_1 et A_2 l'image de A_1 à travers M_2 . Construire les deux images A_1 et A_2 .

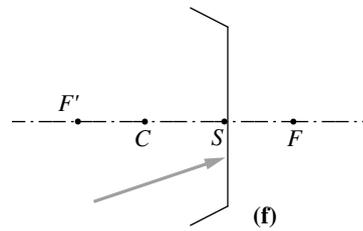
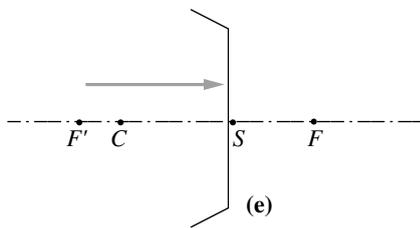
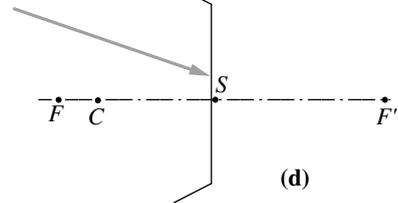
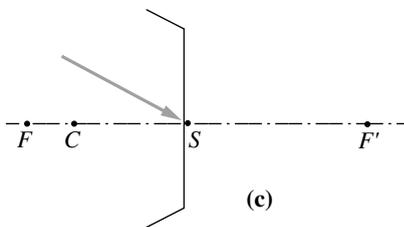
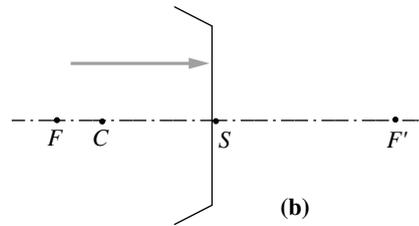
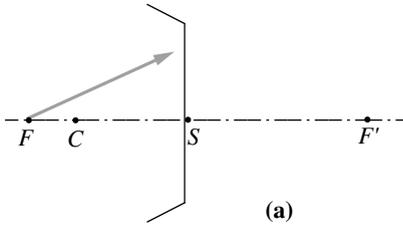


- 2** Construire le faisceau émergent de A après réflexion sur les deux miroirs.

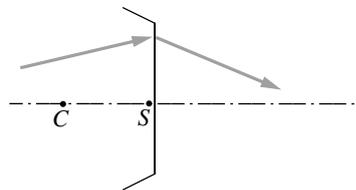


2. DIOPTRES SPHÉRIQUES

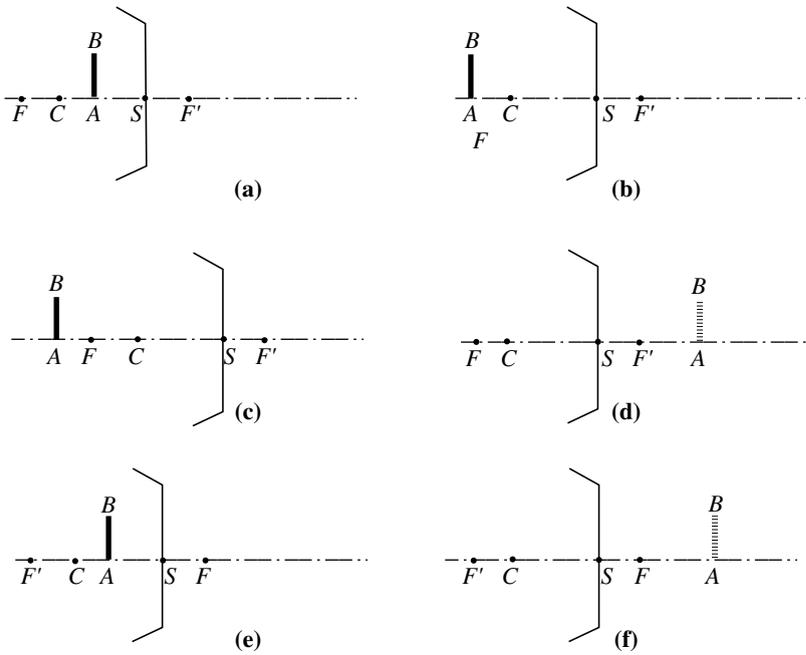
3 Construire le rayon manquant.



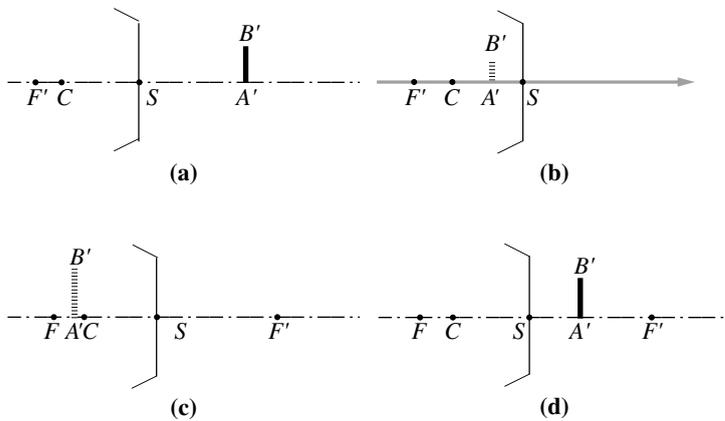
4 Placer les foyers.



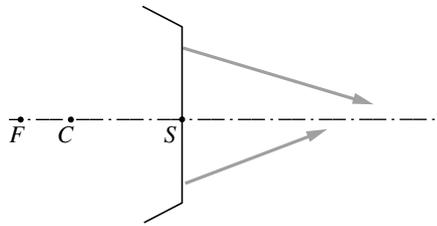
5 Construire l'image de l'objet.



6 Placer l'objet à partir de l'image.

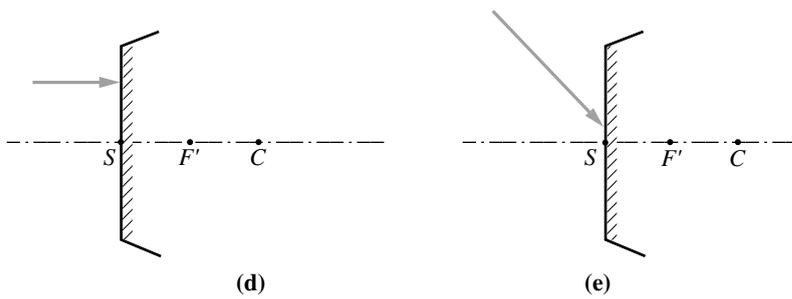
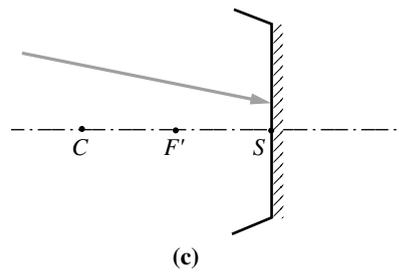
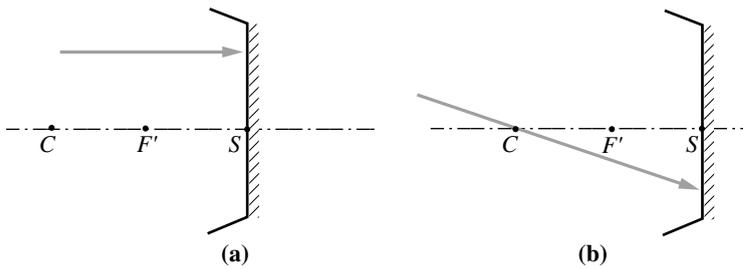


7 Construire le faisceau conjugué du faisceau donné.

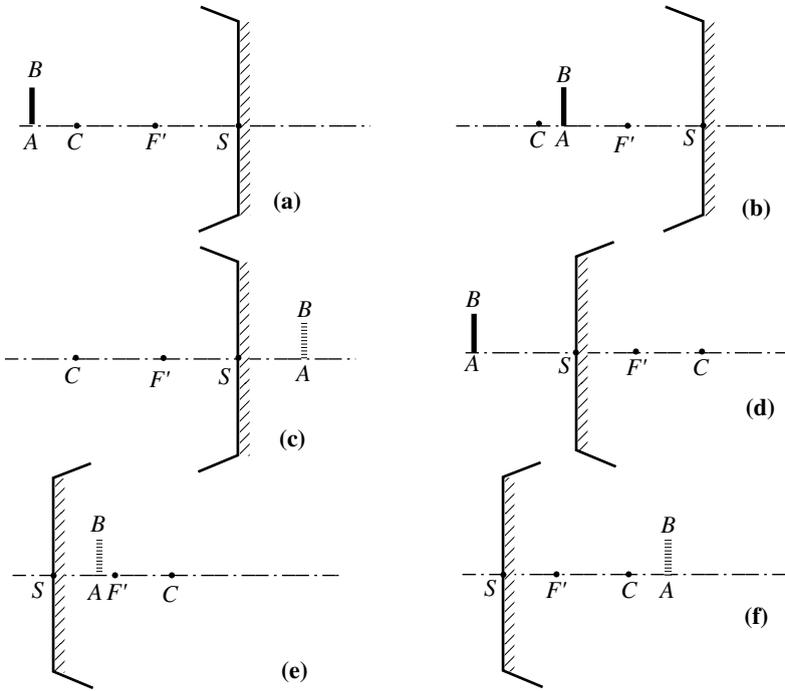


3. MIROIRS SPHÉRIQUES

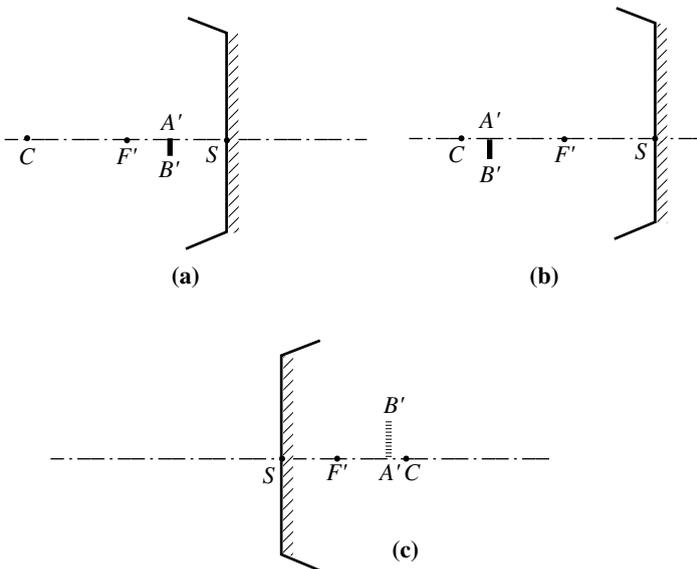
8 Construire le rayon manquant.



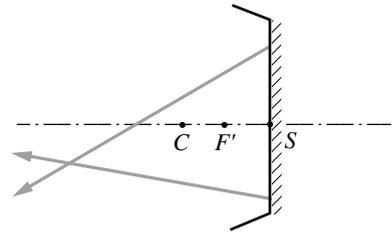
9 Construire l'image de l'objet.



10 Placer l'objet à partir de l'image.



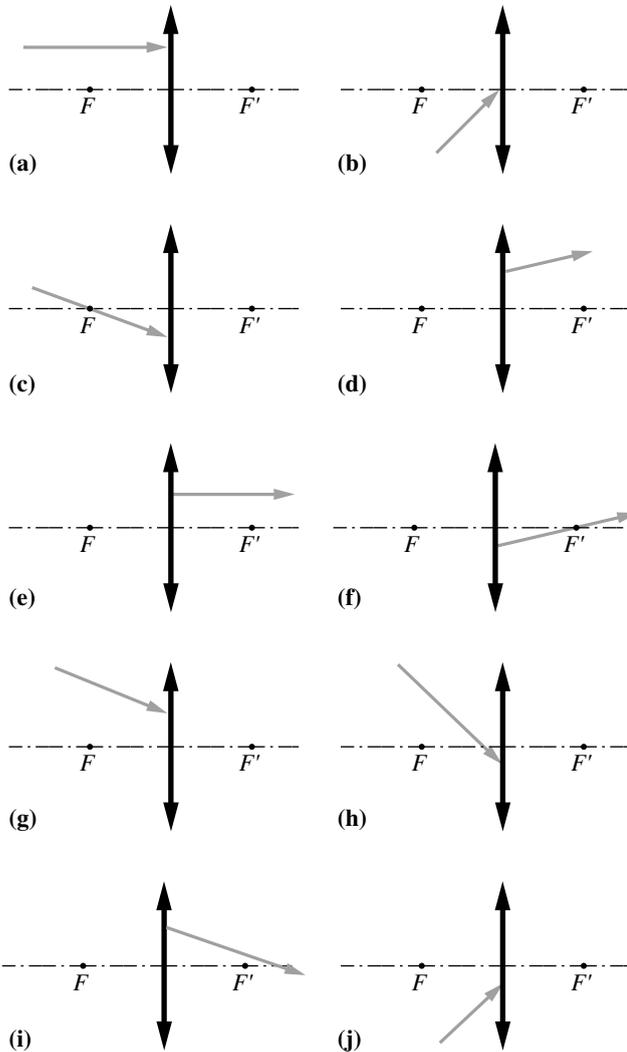
- 11** Construire le faisceau conjugué du faisceau donné.



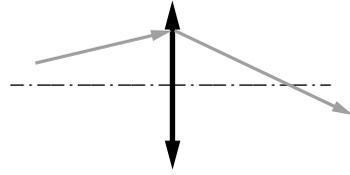
4. LENTILLES MINCES

4.1 Lentilles minces convergentes

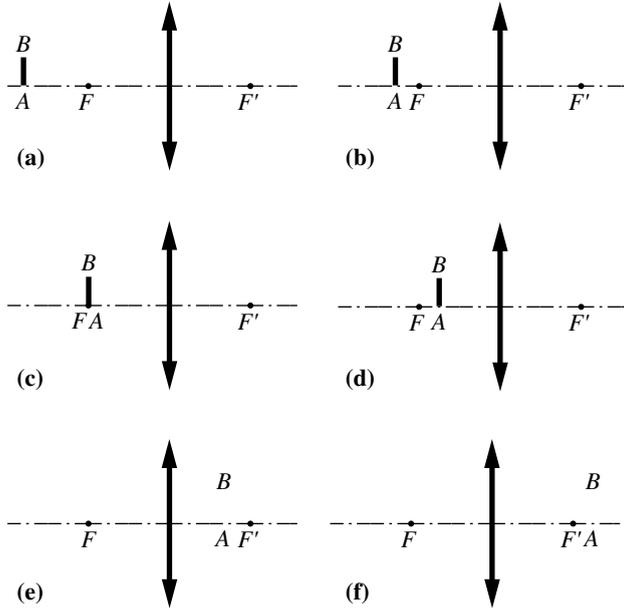
- 12** Construire le rayon manquant.



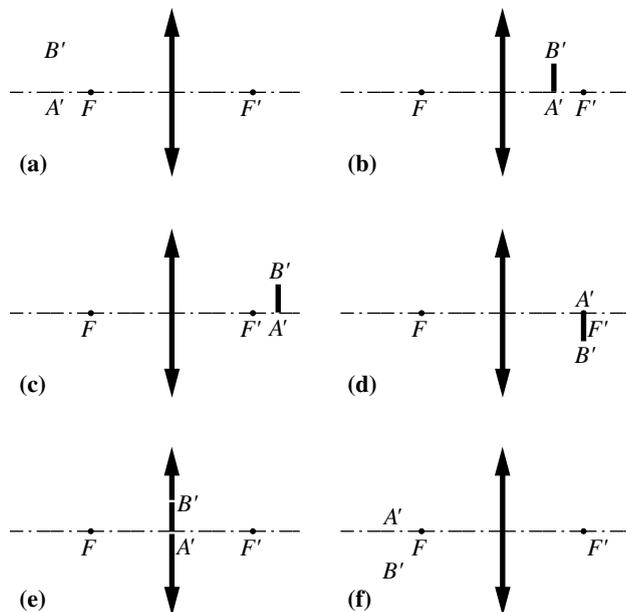
13 Placer les foyers.



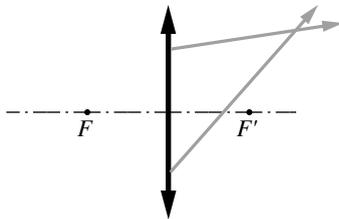
14 Construire l'image $A'B'$ de l'objet donné.



15 Placer l'objet AB à partir de l'image.

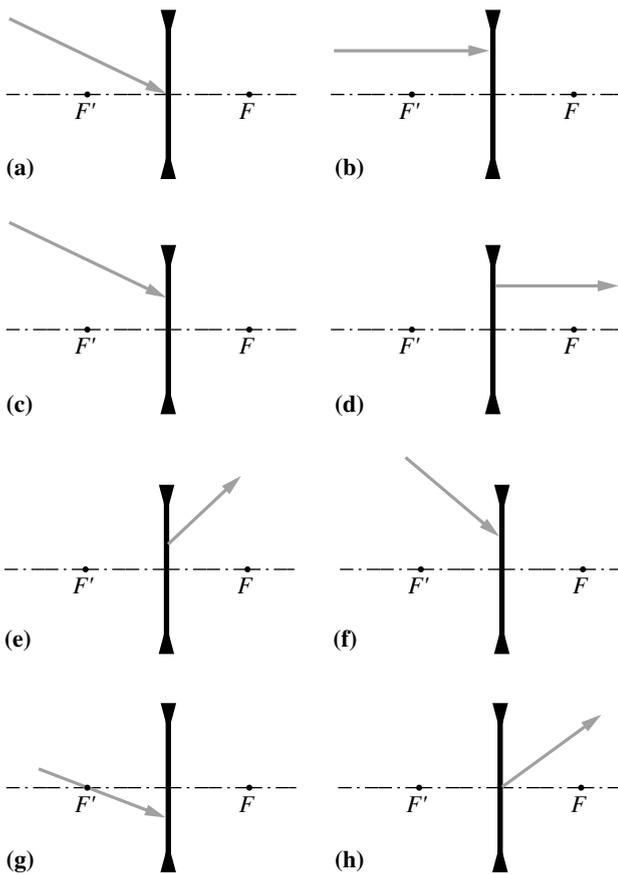


- 16** Construire le faisceau conjugué du faisceau donné et placer objets et images.

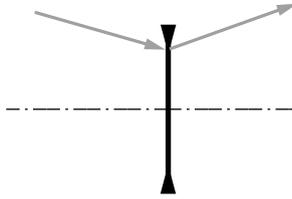


4.2 Lentilles minces divergentes

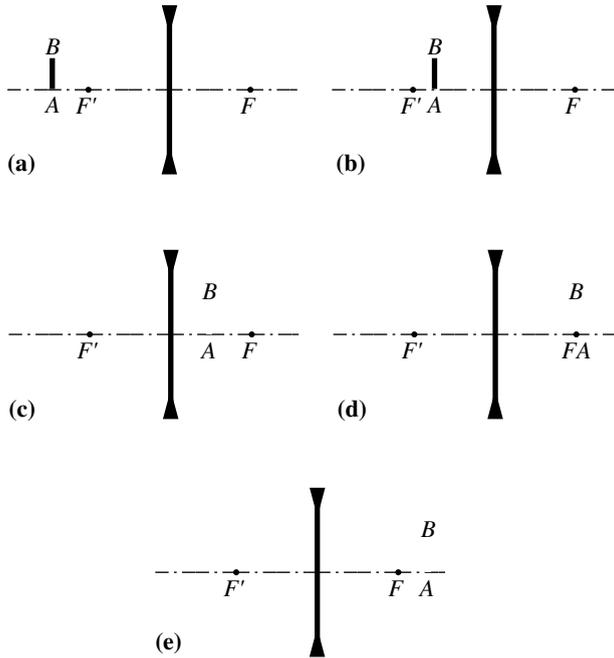
- 17** Construire le rayon manquant.



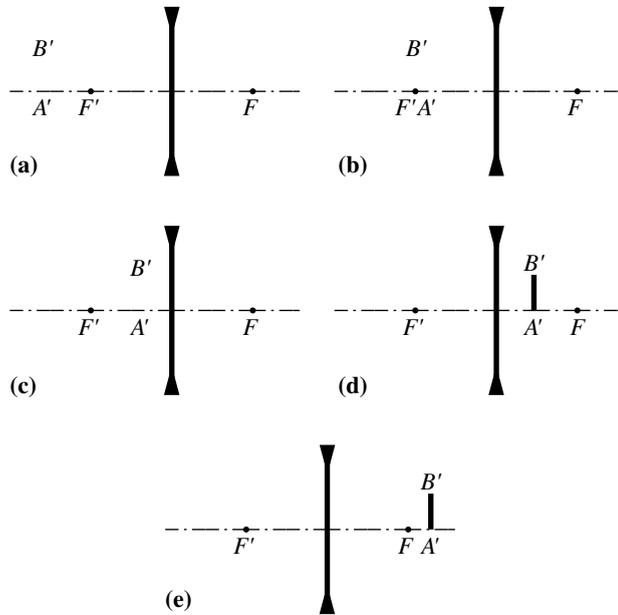
18 Placer les foyers.



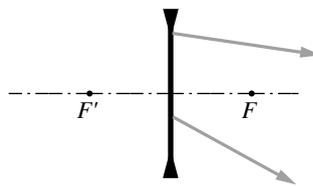
19 Construire l'image $A'B'$ de l'objet donné.



20 Placer l'objet AB à partir de l'image.

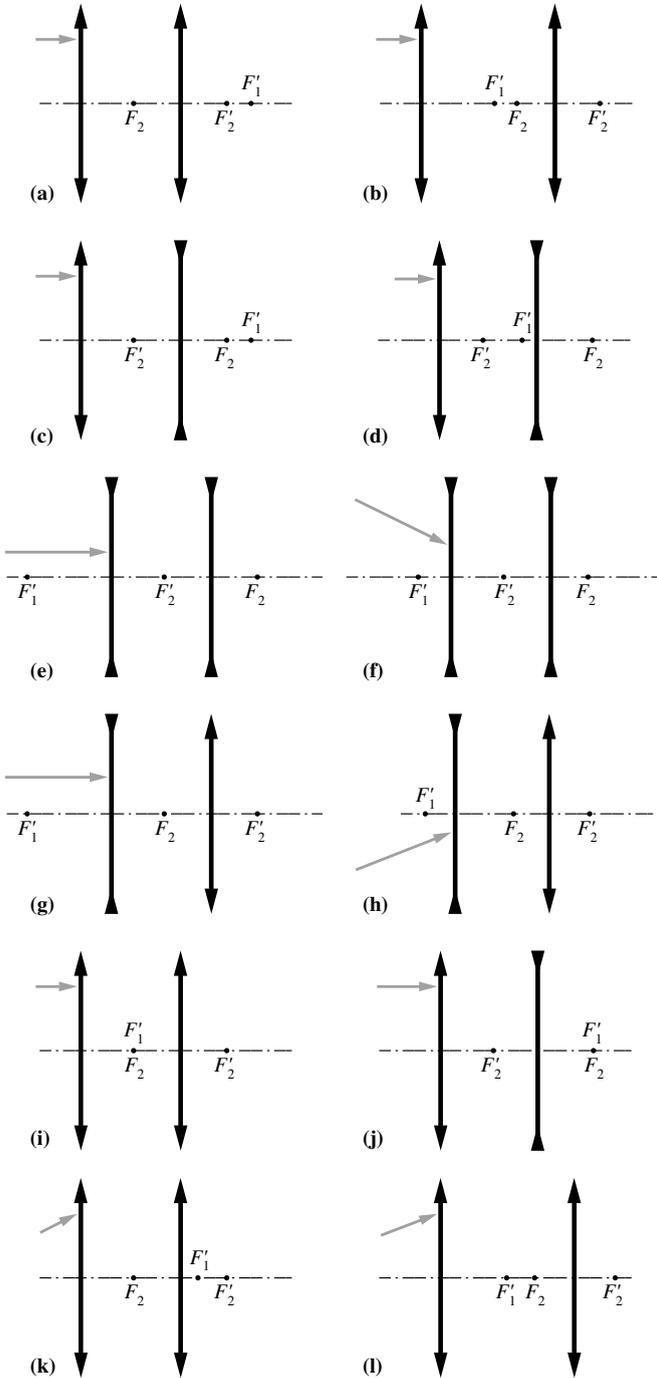


21 Construire le faisceau conjugué du faisceau donné.

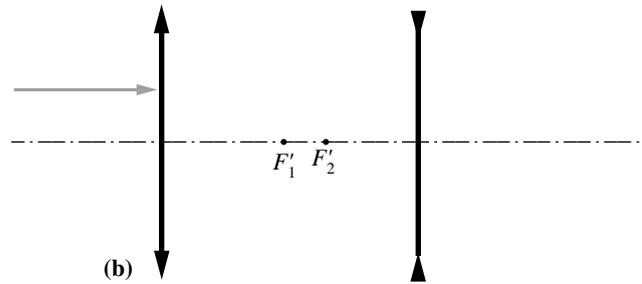
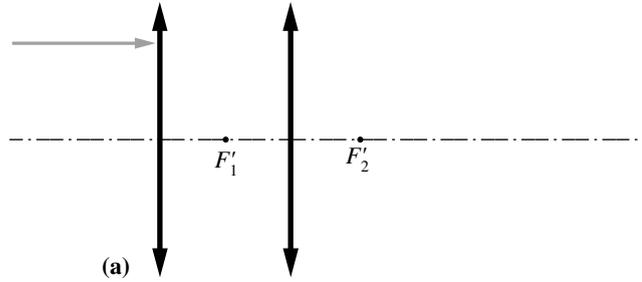


5. ASSOCIATIONS

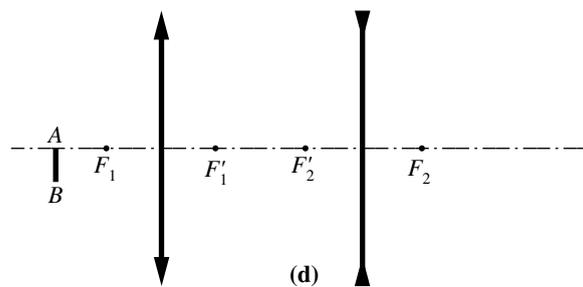
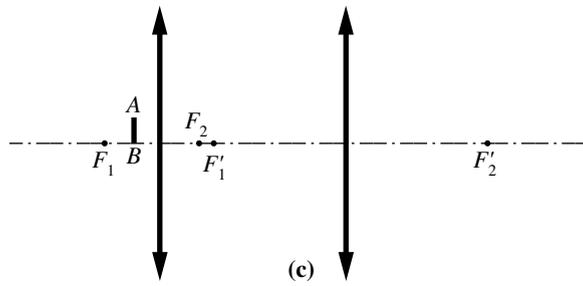
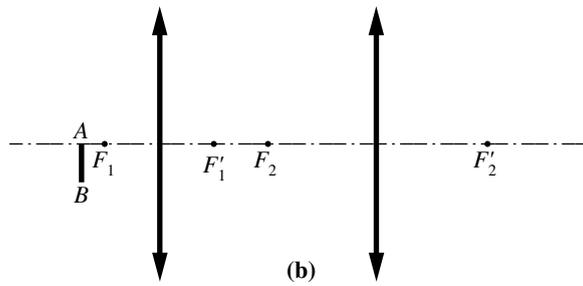
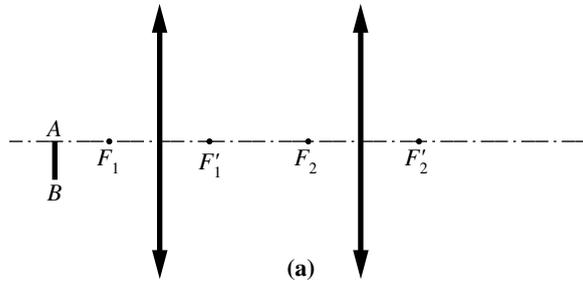
22 Construire le rayon conjugué. Si possible, placer le foyer F' du système.



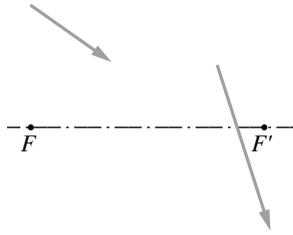
- 23** Construire le rayon émergent correspondant au rayon incident. Placer le foyer F' ainsi que le point principal H' . Le système est-il convergent ou divergent ?



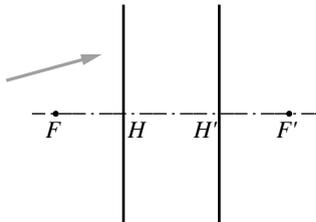
24 Placer les images successives $A''B''$ et $A'B'$.



25 Construire les plans principaux.

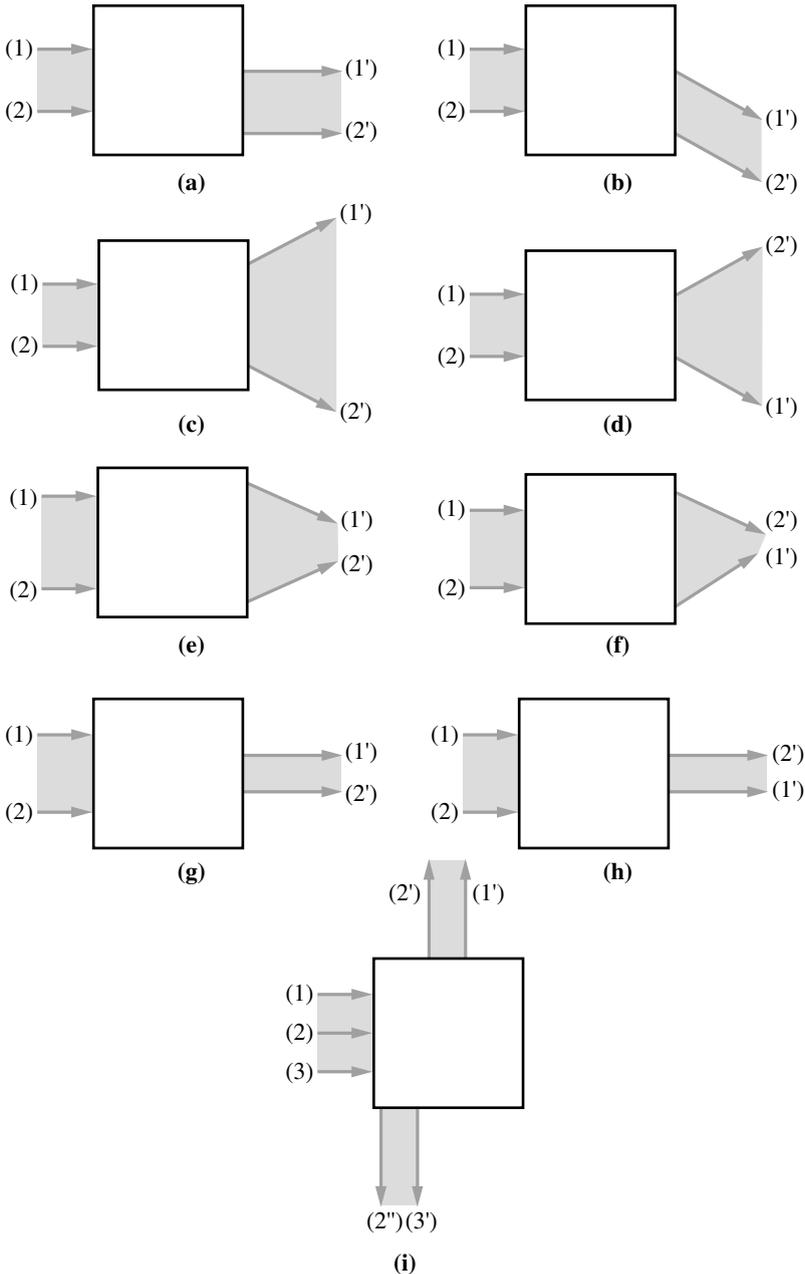


26 Tracer le rayon conjugué.



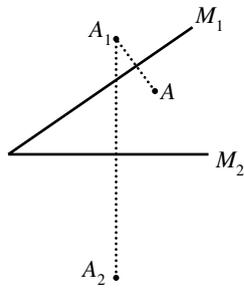
6. BOÎTES MYSTÉRIEUSES

27 Dans chaque boîte, placer au maximum deux éléments optiques (lame à faces parallèles, prisme, lentille...) pour obtenir le faisceau émergent correspondant au faisceau incident. Il peut y avoir plusieurs solutions pour le même exemple. Il faut tenir compte du dessin de chaque rayon qui matérialise le bord du faisceau.

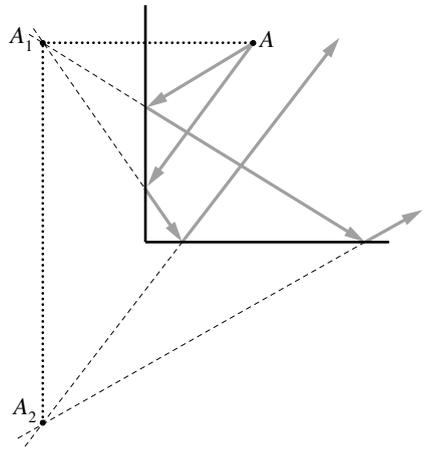


Solutions

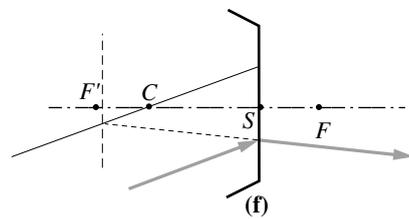
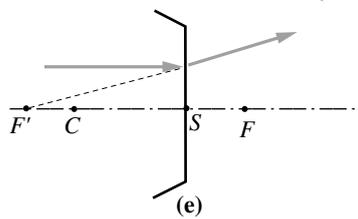
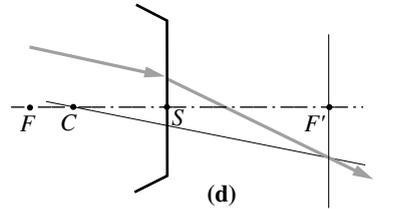
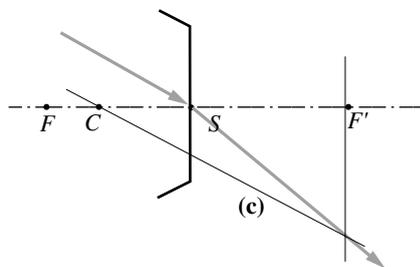
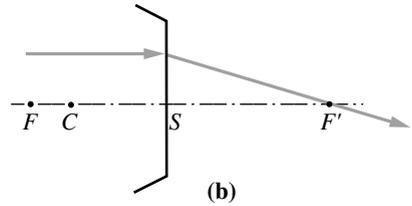
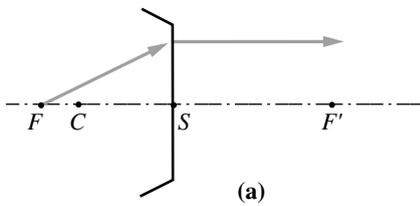
1



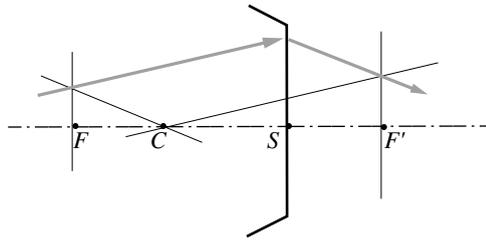
2



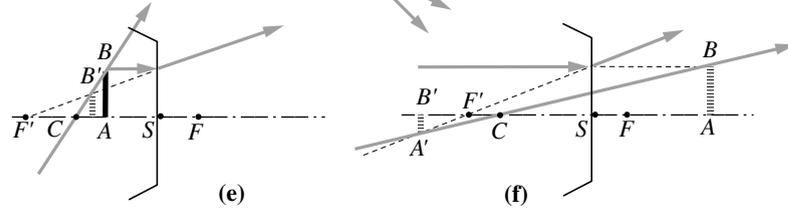
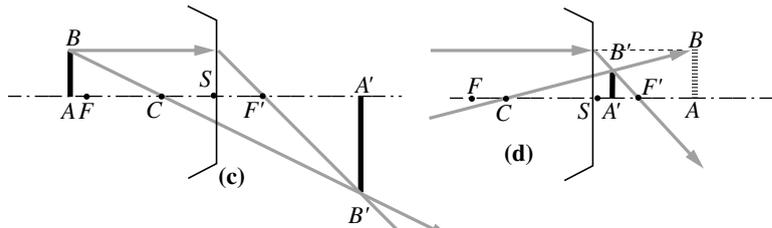
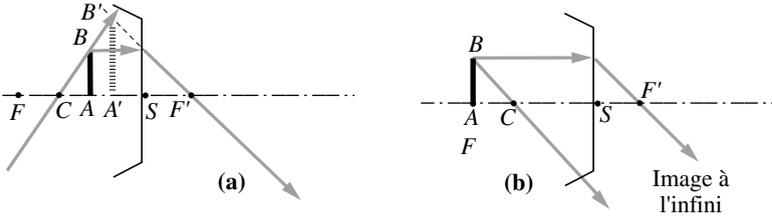
3



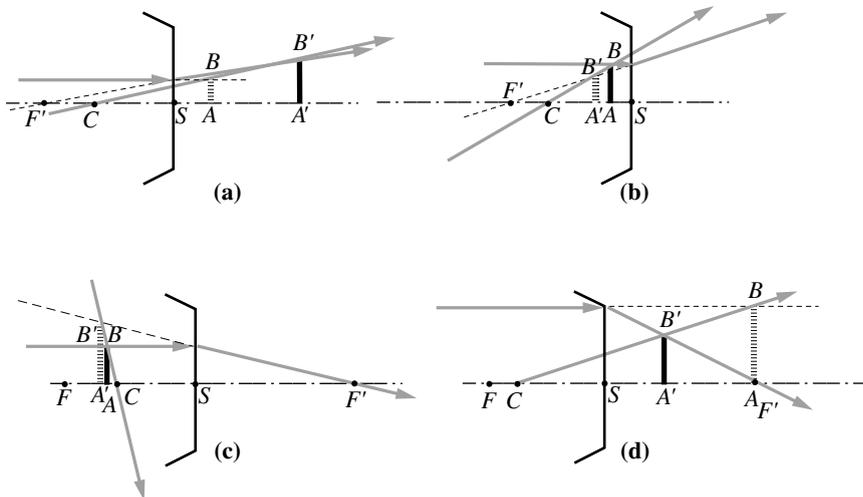
4



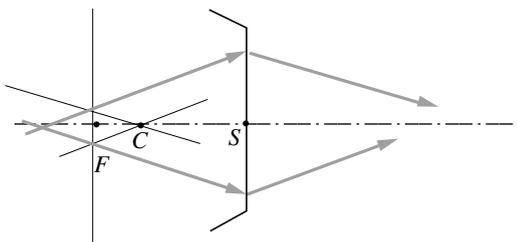
5



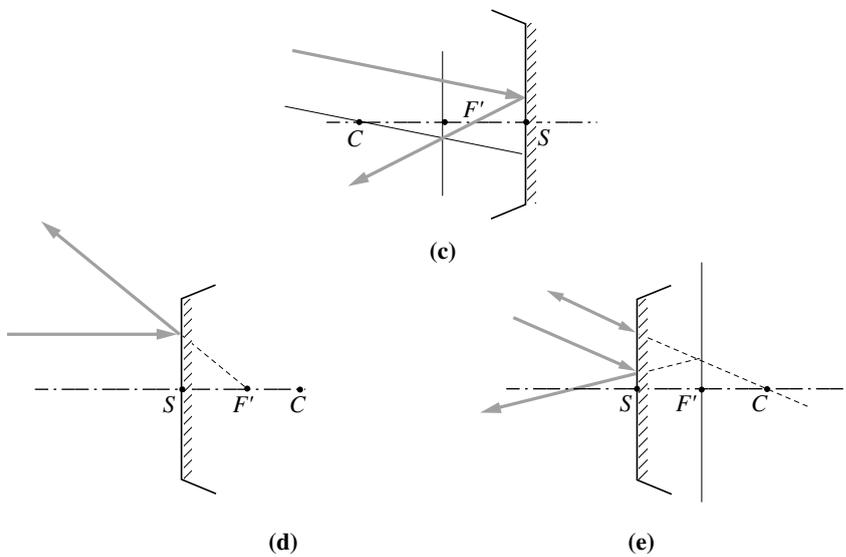
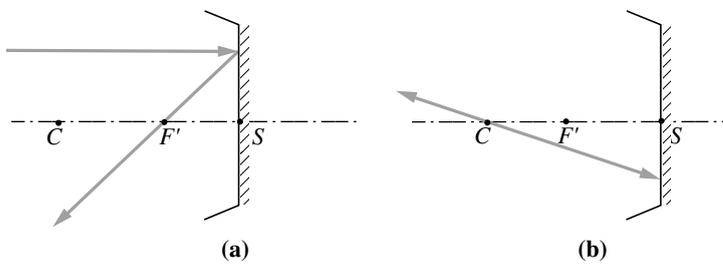
6



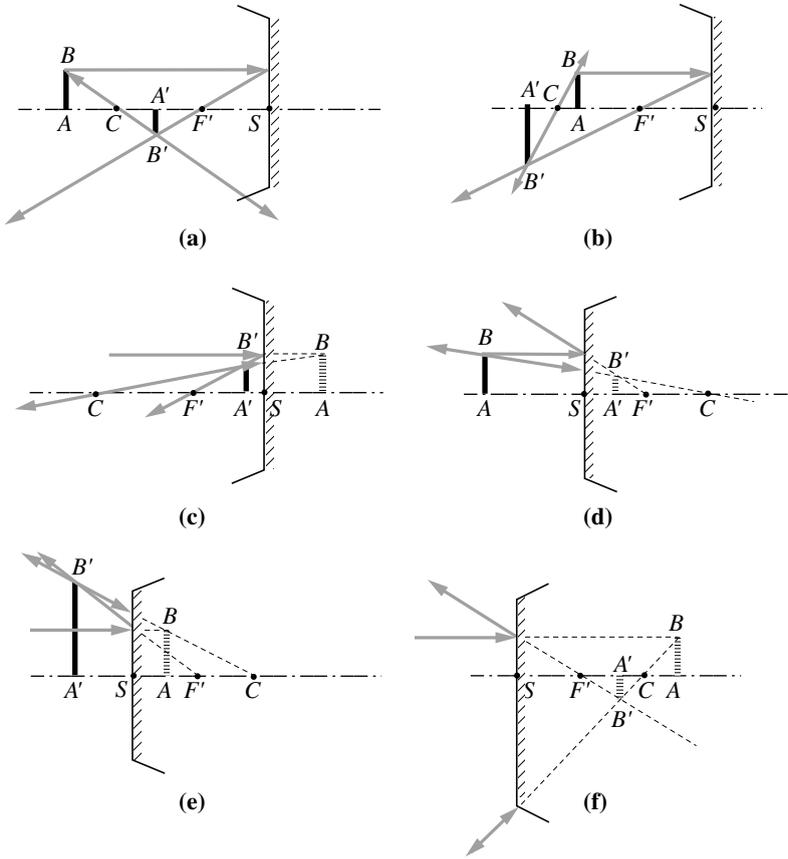
7



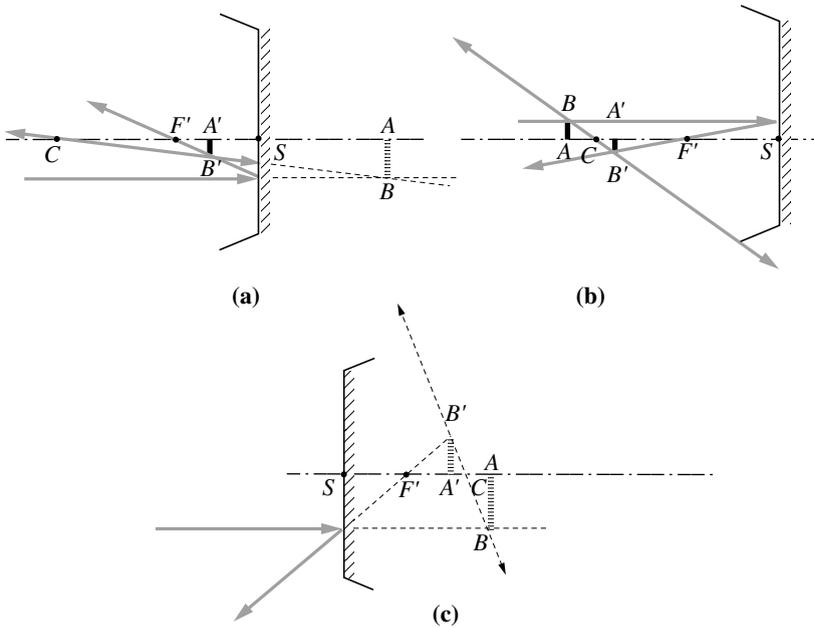
8



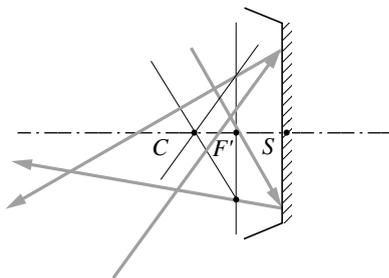
9



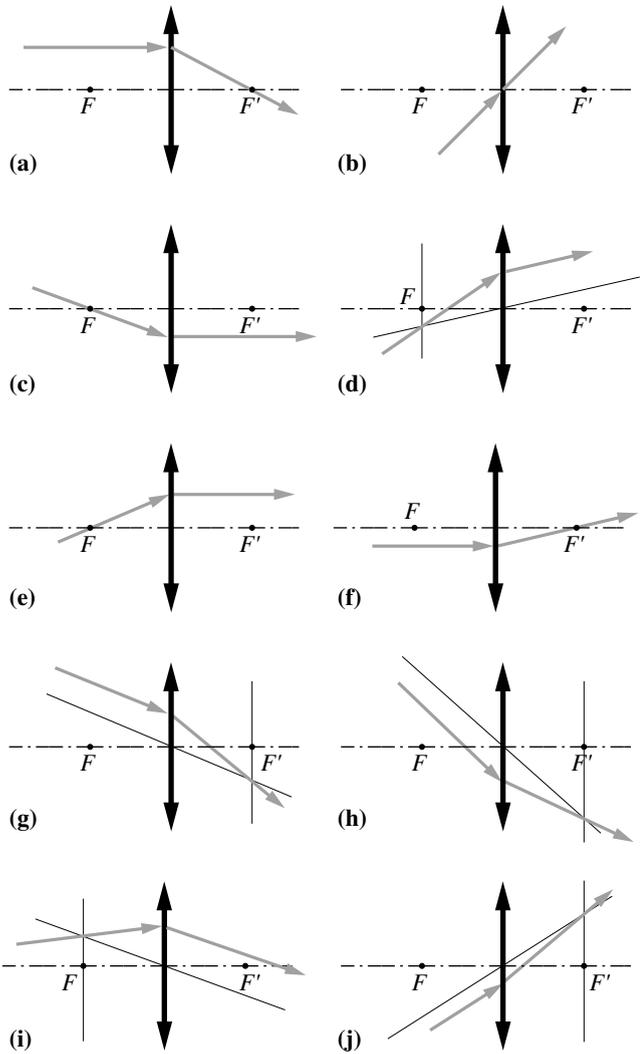
10



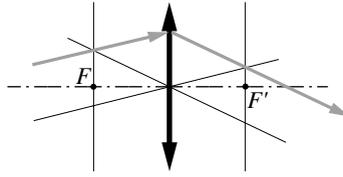
11



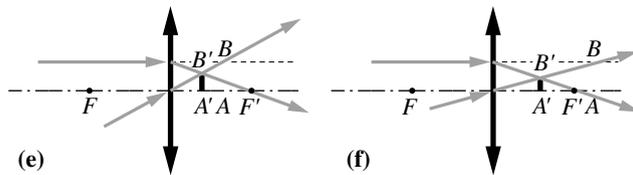
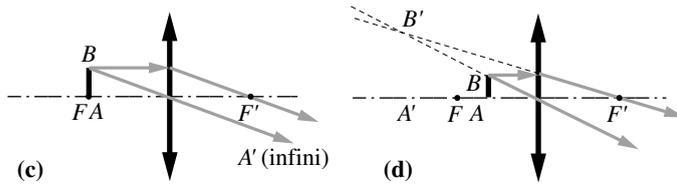
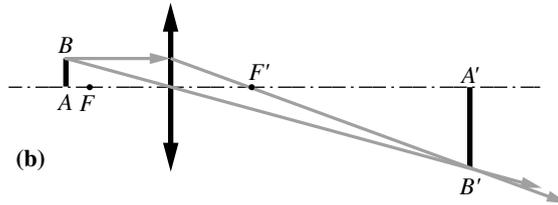
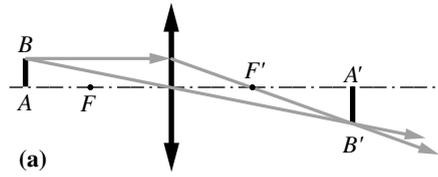
12



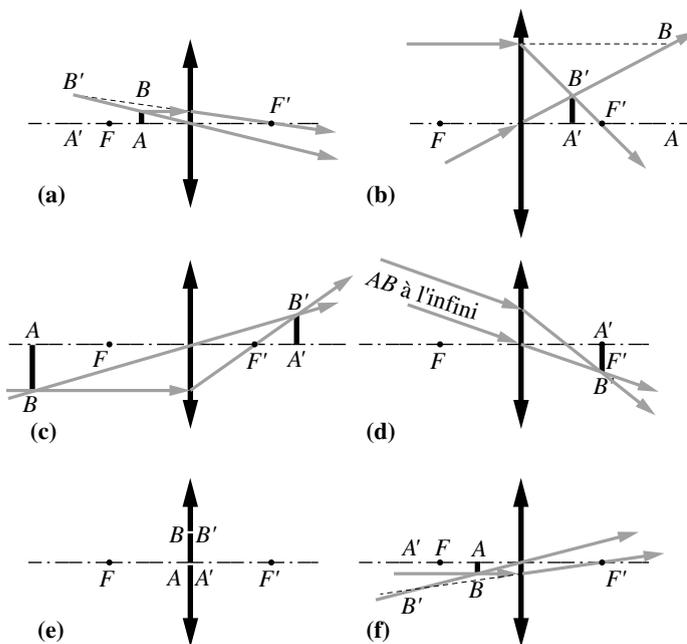
13



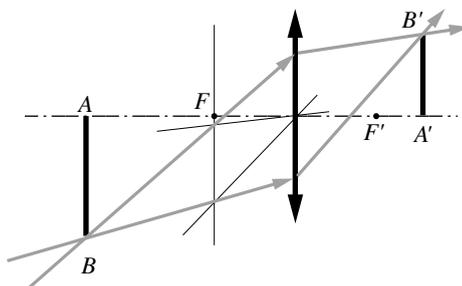
14



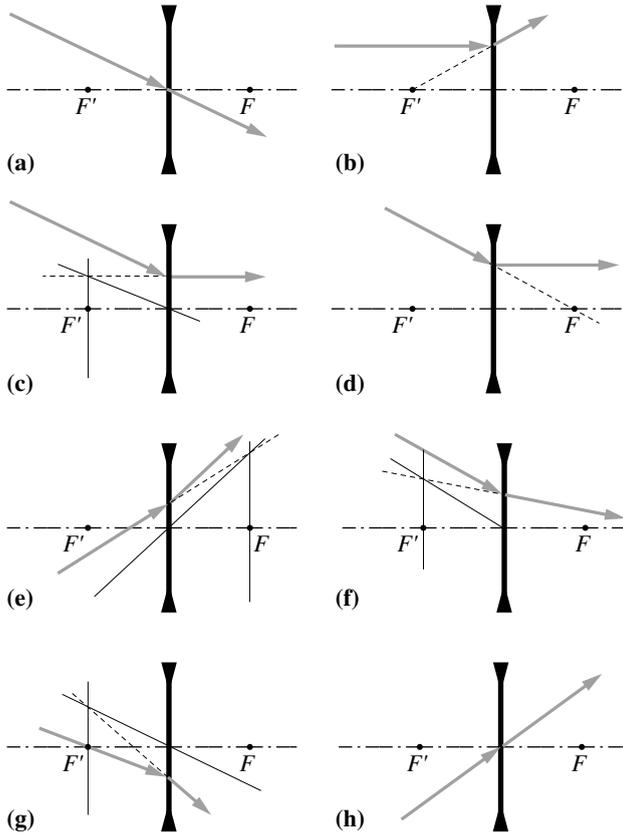
15



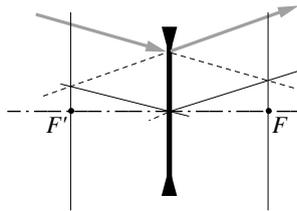
16



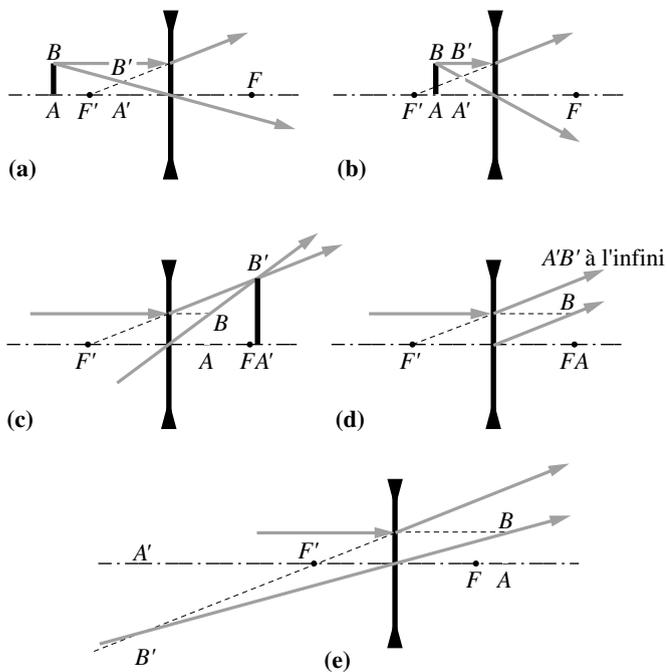
17



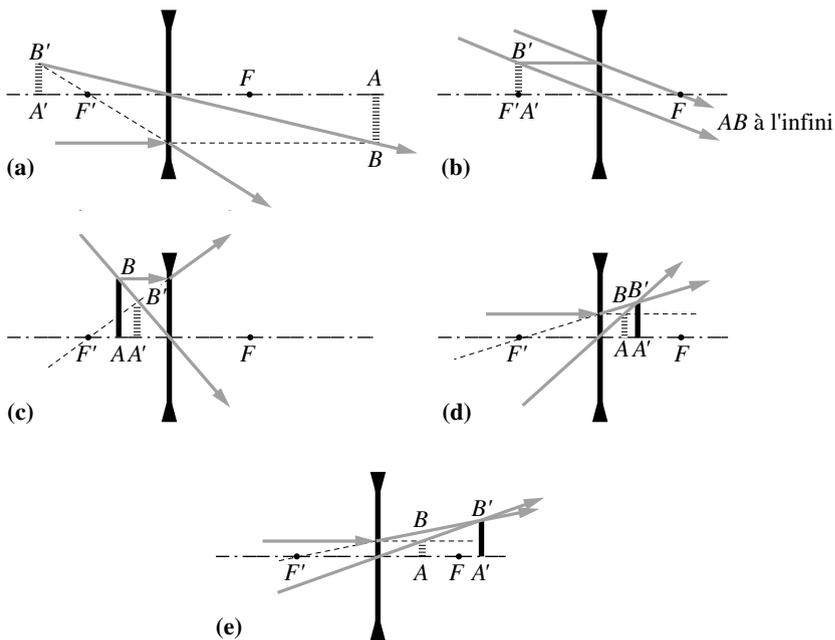
18



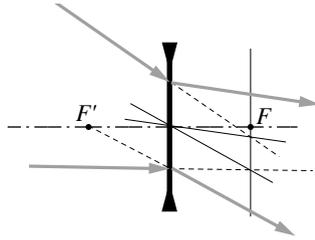
19



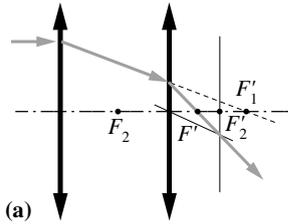
20



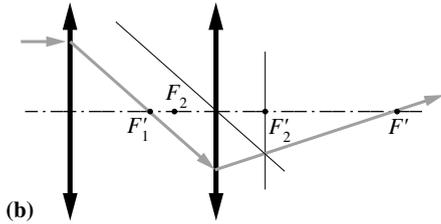
21



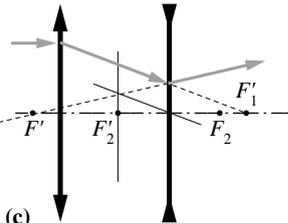
22



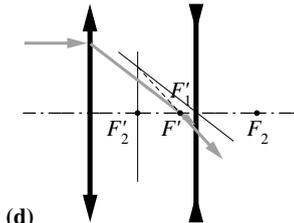
(a)



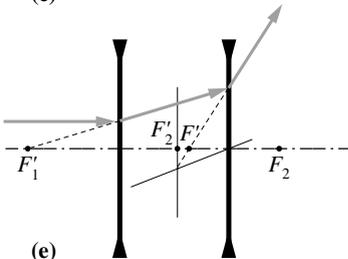
(b)



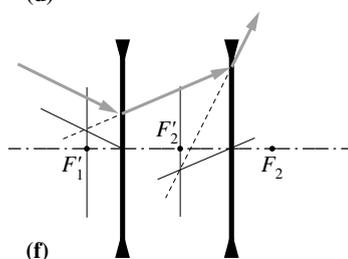
(c)



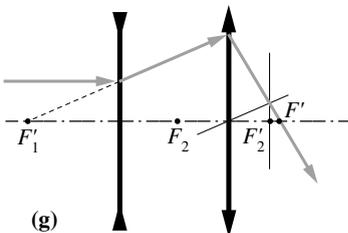
(d)



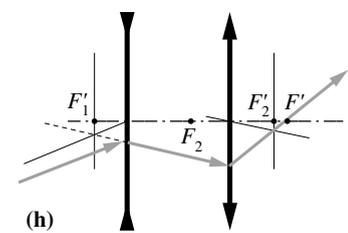
(e)



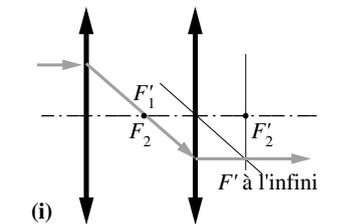
(f)



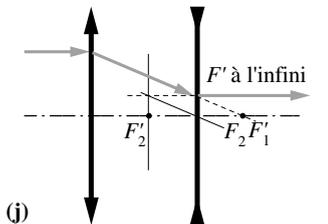
(g)



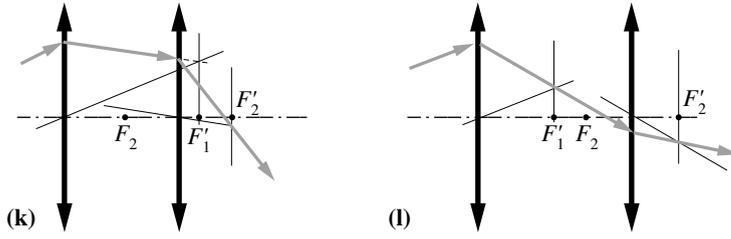
(h)



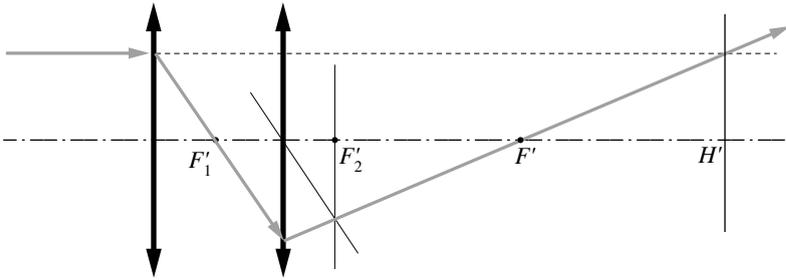
(i)



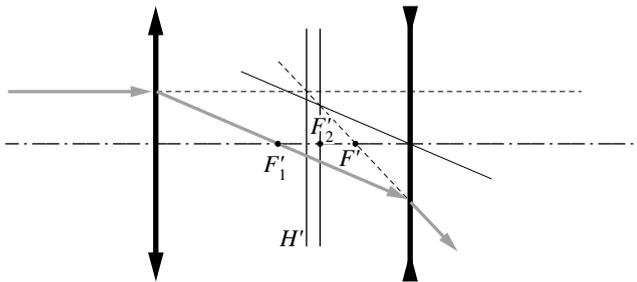
(j)



23

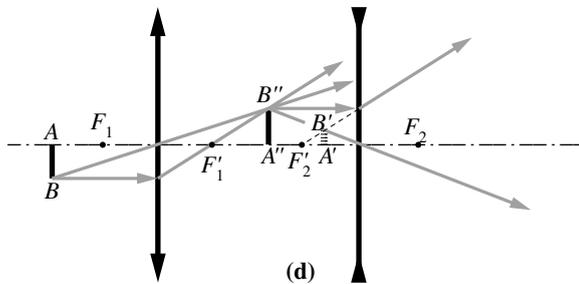
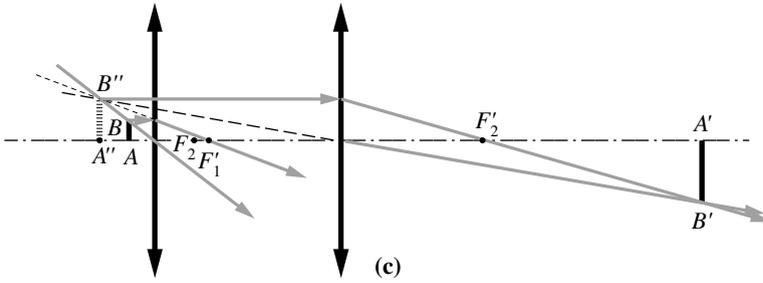
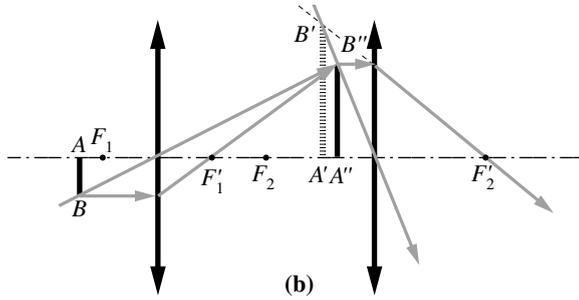
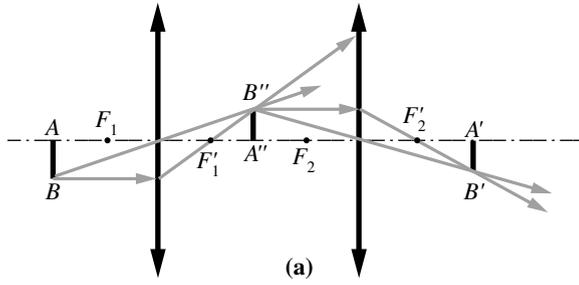


(a) $\overline{H'F'}$ est négatif. C'est un système divergent

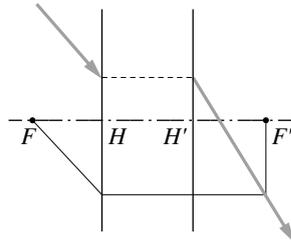


(b) $\overline{H'F'}$ est positif. C'est un système convergent

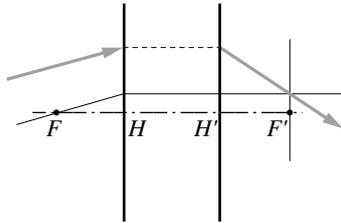
24



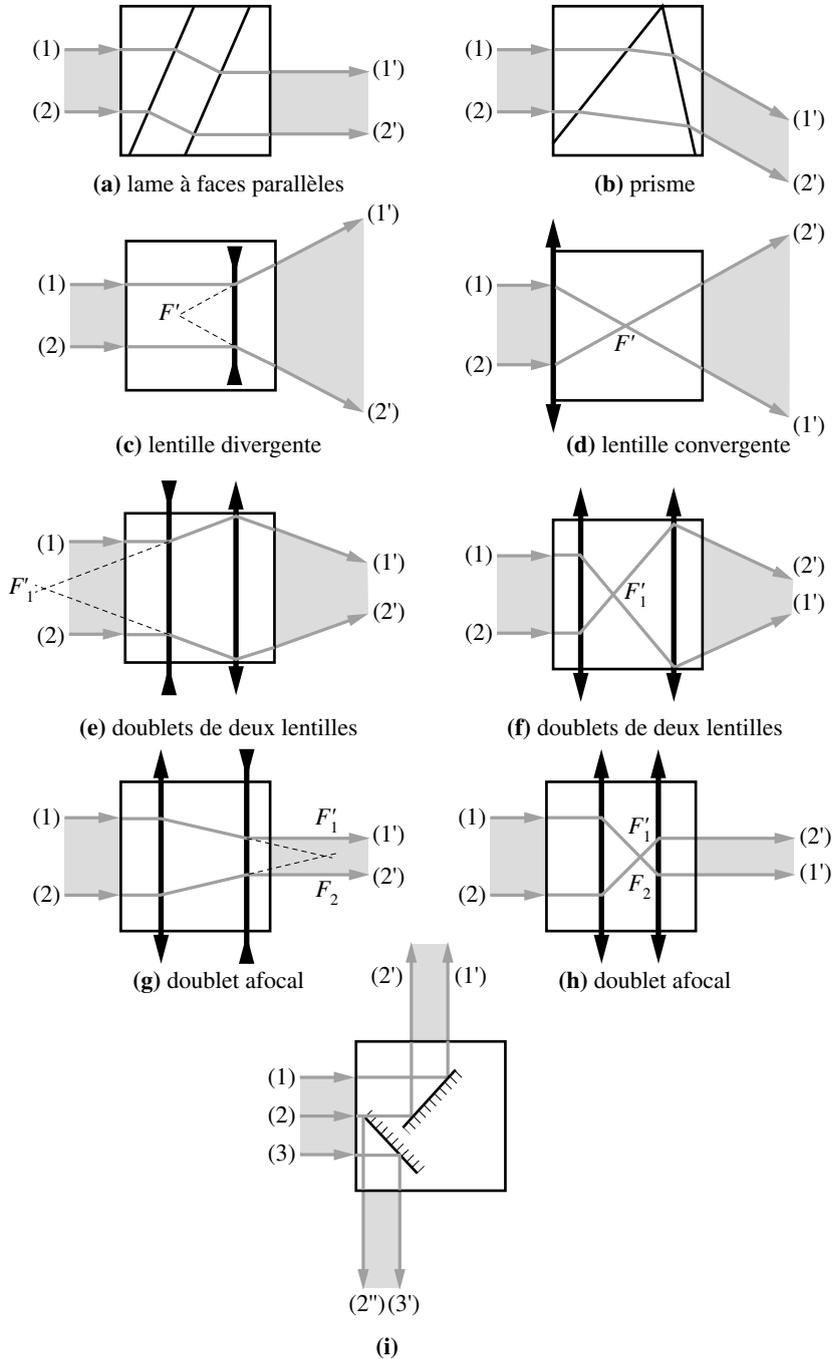
25



26



27



INDEX

A

aberration, 97
aberration chromatique, 300
Ahlazen, 1
Amici, 67
amplitude d'accommodation, 271
angle d'incidence, 23, 26
angle de déviation, 31
angle de réflexion, 26
angle de réfraction, 26
 limite, 29
angle solide, 306
angles, 24
aplanétisme, 98
aplatissement du Soleil, 96
arc-en-ciel, 64, 65
associations, 219
axe optique, 187
axe principal, 119

B

bâtonnets, 265
biconcave, 189
biconvexe, 188

C

catadioptrique, 101
catoptrique, 101
Cauchy (loi de), 9, 62
célérité, 4
centre, 119
centre de courbure, 187
cercle (ou disque) oculaire, 294
champ, 286, 290
champ de pleine lumière, 291
champ électrique, 3
champ extrême ou de contour, 291
champ magnétique, 3
champ moyen, 291
choroïde, 264

combinaisons, 219
concave, 120
cônes, 265
construction d'images, 131, 161, 194,
 229,323
convexe, 120
cornée, 263
cristallin, 264
critères de convergence, 224

D

de Broglie (Louis), 2
Descartes (relation de), 130, 225
Descartes (René), 2
déviation, 55
diamètre apparent, 133
diaphragme d'ouverture, 292
diaphragme de champ, 290
dioptre, 26
dioptre convergent, 125
dioptre divergent, 120, 126
dioptres plans, 34
dioptrie, 123
dioptrique (système de), 101
Dirac (Paul), 2
dispersion optique, 9
distances focales objet, image, 128
distorsion, 97
doublet afocal, 232
Dove (prisme de), 68

E

éclairage (énergétique), 304
éclipse, 8
Einstein (Albert), 2
éléments cardinaux, 227
espace image, 101
espace objet, 101
Euclide, 1

F

Faraday (Michael), 2
 Fata Morgana, 95, 96
 faux soleils, 64
 Fermat (Pierre de), 2, 21
 Fermat (principe de), 21
 fibre optique, 35
 flux, 304
 formulation matricielle, 234
 formule de Gullstrand, 229
 fovéa, 265
 foyers objet, image, 128, 192
 fréquence, 3
 Fresnel (Augustin), 2

G

Galilée, 2, 5
 Gauss (approximation de), 99, 123
 Gauss (condition de), 98
 Gladstone (loi de), 10
 glandes lacrymales, 264
 grandissement longitudinal, 136, 165, 198
 grandissement transversal, 134, 164, 196, 285
 Grimaldi, 2
 grossissement, 200, 286, 287
 grossissement commercial, 200
 grossissement équipupillaire, 303
 grossissement intrinsèque, 289
 grossissement intrinsèque commercial, 289
 Gullstrand, 228

H

Heisenberg (Werner), 2
 Hertz (Heinrich), 2
 humeur aqueuse, 264
 humeur vitrée, 264
 Huygens (construction de), 32

I

image, 87
 image réelle, virtuelle, 100
 indice absolu, 9
 instruments de projection, 285
 instruments visuels, 285
 intensité, 305
 intensité énergétique, 306
 intervalle optique, 222
 iris, 264
 isotrope, 303

K

Kepler (loi de), 33

L

Lagrange-Helmholtz (relation de), 308
 Lambert (formule de), 307
 lame à faces parallèles, 34, 88
 lentille, 187
 lentille épaisse, 233
 lentille mince, 189
 lentilles accolées, 201
 lentilles convergentes, divergentes, 188
 longueur d'onde, 3
 loupe, 199
 lumière, 1
 lumière (retour inverse de la), 27
 lumière (source de), 11
 lumière (vitesse de), 5
 luminance, 306
 luminance énergétique, 306
 lunette astronomique, 300
 lunette de Galilée, 303
 lunette terrestre, 300

M

matrice de réfraction, 235
 Maxwell (James Clark), 2
 ménisque, 188, 189
 microscope, 296
 milieu homogène, inhomogène, 10
 milieux isotropes, transparents, 10
 minimum de déviation, 57
 mirage, 95
 mirage inférieur, 95
 mirage supérieur, 95
 miroir concave, 152
 miroir convexe, 152
 miroir parabolique, 167
 miroir plan, 87, 90, 151
 miroir sphérique, 151
 miroir sphérique stigmatique, 167

N

nerf optique, 265
 Newton (Isaac), 2
 Newton (relation de), 130, 161, 193, 222

O

objectif, 294, 300
 objet, 101
 objet réel, 100, 101, 125
 objet virtuel, 101
 oculaire, 294, 295, 300
 oculaire négatif, 295
 oculaire positif, 295
 œil, 263, 267

œil directeur, 266
 œil emmétrope, 269
 œil hypermétrope, 272
 œil myope, 272
 ombre, 8
 onde monochromatique, 3
 onde polychromatique, 3
 ondes électromagnétiques, 3
 ondes sinusoïdales, 3
 optique géométrique, 11
 optique ondulatoire, 11
 optique quantique, 11
 ouverture numérique, 36

P

parhélies, 65
 pénombre, 8, 9
 période temporelle, 3
 phénomène naturel, 93
 photométrie, 303
 photométrie énergétique, visuelle, 303
 photopique, 266
 pinceau, 8
 plan d'incidence, 26, 53
 plan focal image objet, 128, 157
 plan-concave, 189
 plan-convexe, 188
 plans focaux, 128
 plans principaux, 226
 point d'incidence, 26
 points cardinaux, 237
 points conjugués, 123
 points principaux, 226
 pouvoir d'accommodation, 264
 presbyte, 270
 principe de la propagation rectiligne, 7, 10, 27
 prisme (déviation), 53
 projecteur de diapositives, 200
 propagation, 7
 puissance, 286
 puissance intrinsèque, 287
 puissance lumineuse, 303
 pulsation, 3
 punctum proximum, 200, 269
 punctum remotum, 269
 pupille, 264, 292
 pupille d'entrée, de sortie, 293
 Purkinje (phénomène de), 266

R

rayon de courbure, 119, 120, 187
 rayon réfléchi, réfracté, 26
 rayon vert, 97

rayons lumineux, 7
 rayons paraxiaux, 99
 réflexion, 22, 23
 réflexion totale, 31
 réfraction, 24
 réfraction atmosphérique, 93
 relation de conjugaison, 155, 190
 relation de conjugaison du dioptré sphérique, 122
 résolution, 302
 rétine, 264
 rétrorélecteur solide, 68
 Römer (Olaüs), 5

S

scélrotique, 263
 scotopique, 266
 Sellmeier (loi de), 9
 sextant, 91
 Snell-Descartes, 10
 Snell-Descartes (deuxième loi de), 24
 Snell-Descartes (première loi de), 23
 source, 12
 source primaire, 12
 source secondaire, 12
 sources ponctuelles, 12
 spectre électromagnétique, 4, 6
 stigmatisme, 98, 99
 système afocal, 288
 système centré, 187
 système dioptrique, 188

T

tache aveugle, 266
 téléobjectif, 298
 télescope, 299
 télescope de Cassegrain, 300
 télescope de Newton, 300

V

vergence, 123, 191, 229
 VIBUJOR, 13
 virtuel, 100, 101
 visible, 6
 vision d'images, 87
 vision sous l'eau, 89
 vitesse de propagation, 4

Cours de physique DEUG Sciences

Cours et exercices avec solutions

- *Thermodynamique*

Claude Coulon, Sylvie Le Boiteux, Patricia Segonds.

- *Optique*

Jean-Paul Parisot, Patricia Segonds, Sylvie Le Boiteux.

- *Mathématiques pour la physique*

Yves Noirot, Jean-Paul Parisot, Nathalie Brouillet.

- *Mécanique du point*

Nathalie Brouillet, Yves Noirot, Jean-Paul Parisot. (À paraître)

- *Électromagnétisme*

Sylvie le Boiteux, Patricia Segonds. (À paraître)

Conseillers scientifiques

Jean-Louis Ligier, Docteur ingénieur, Chef de section de calcul au centre de recherches de Renault.

Adolphe Pacault, Professeur émérite de l'université Bordeaux I.

Stéphanie Moreau, maître ès sciences.

Jean-Pierre Delville, Chargé de recherches au CNRS.

Bernard Pouligny, Directeur de recherches au CNRS.

Bruno Chassagne, Docteur en physique.

Jacques Baudon, Professeur à l'université Paris XIII.