NIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
ACULTE DES SCIENCES
EPARTEMENT DE PHYSIQUE
LJADIDA

A.U. 2011-2012
Filières : SMI/SMA

Examen de Mécanique des Solides Rigides
Durée:1h 30 mn

UESTION DE COURS

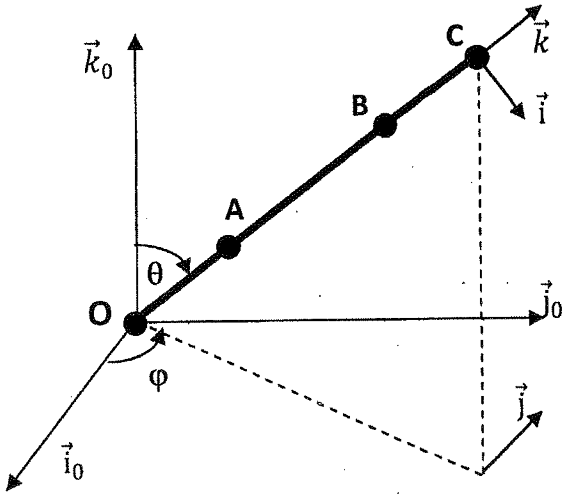
noncer et démontrer le 2ème théorème de Koenig de l'énergie cinétique d'un solide (S).

XERCICE

On considère une tige rectiligne (T) homogène de longueur 4L, de masse m, dont une extrémité est en contact ponctuel avec un bâti solide (S_0), au oint O, origine du repère Galiléen fixe $\mathcal{R}_0(O; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$.

On ajoute quatre masselottes identiques de masse **m** chacune, rigidement ées à la tige (T). Le système (S), ainsi formé de la tige (T) et des quatre asselottes, a pour centre d'inertie G et est repéré par les deux angles θ et (voir figure).

Soit $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un référentiel lié au système (S). Les quatre masselottes ont disposées, dans ($\mathcal{R}$), respectivement, en : O(0,0,0), A(0,0,L), (0,0,3L) et C(0,0,4L). On négligera les moments de résistance au ivotement et au roulement.



.B. Tous les résultats vectoriels doivent être exprimés dans la ase $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

A. Cinématique

) Déterminer le torseur cinématique de (S) par rapport à ($\mathcal{R}_0$) en O. En déduire sa nature

) Déterminer le moment central et donner l'axe central du torseur cinématique de (S).

B. Cinétique

) Montrer, par un calcul détaillé, que la matrice d'inertie du système (S) en O s'écrit: $II_O(S) = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$ avec $J = \frac{142}{3} mL^2$

.B. Dans la suite tous les résultats doivent être exprimés en fonction de J.

2) Calculer le moment d'inertie, I_Δ par rapport à l'axe $\Delta(O,\vec{u})$ avec $\vec{u}$ (L,2L,3L) vecteur de ($\mathcal{R}$).

3) Déterminer le torseur cinétique en O du système (S) par rapport à ($\mathcal{R}_0$)

4) Déterminer le torseur dynamique en O du système (S) par rapport à ($\mathcal{R}_0$)

5) Déterminer l'énergie cinétique du système (S) par rapport à ($\mathcal{R}_0$)

C. Dynamique

1) Ecrire le torseur des actions mécaniques extérieures agissant sur (S) dans ($\mathcal{R}_0$) en G
On notera : $\vec{R} = R_1\vec{i} + R_2\vec{j} + R_3\vec{k}$ la résultante générale du torseur d'action mécanique de contact en O.

2) Calculer la puissance développée dans le mouvement de (S) par rapport à ($\mathcal{R}_0$) et éventuellement l'énergie potentielle. En déduire que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.

3) Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans ($\mathcal{R}_0$) et montrer que $R_2 = 0$.

4) En déduire que dans le cas où : $\varphi(t) = \text{Constante}$, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} - \frac{16mgL}{J}\sin\theta = 0$$

5) Retrouver ce résultat à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
- EL JADIDA -

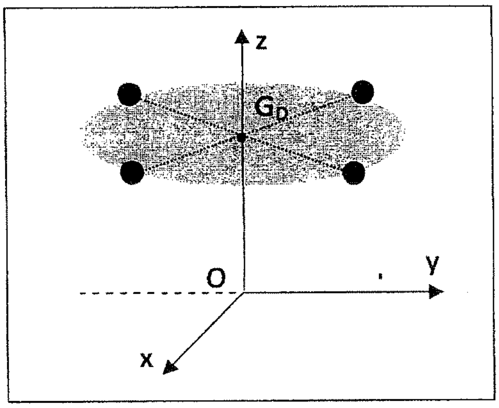
A.U. 2012-2013
Filières : SMI/SMA

Examen final

Mécanique du Solide Indéformable

Durée : 1h30mn

Exercice I (8 pts)



Soit $\mathcal{R}(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct. On considère le système (S) composé :

- d'un disque **(D)** de rayon **R**, homogène de densité surfacique σ, de centre d'inertie G_D**(0, 0, H)**, et de masse **M**.
- et de quatre masselottes identiques soudées au disque **(D)**, de masse **(m/4)** chacune et de coordonnées :

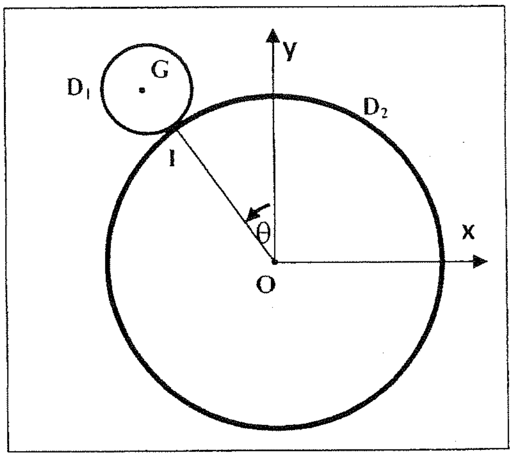
$M_1\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2}, H\right)$ $\quad$ $M_2\left(-\frac{R\sqrt{2}}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2}, H\right)$

$M_3\left(-\frac{R\sqrt{2}}{2}, -\frac{R\sqrt{2}}{2}, H\right)$ $\quad$ $M_4\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}, -\frac{R\sqrt{2}}{2}, H\right)$

1. Déterminer la position du centre d'inertie **G** du système (S). **(1 pts)**
2. Montrer que: $II_G(S) = \begin{bmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & A_G & 0 \\ 0 & 0 & C_G \end{bmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$. On exprimera A_G et C_G en fonction de **m**, **M** et **R**. **(3 pts)**
3. En déduire la matrice d'inertie au point O. $\mathcal{R}(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est-il un repère principal d'inertie ? **(2pts)**
4. Calculer le moment d'inertie $I_{\Delta G}$ par rapport à l'axe $\Delta_G(G,\vec{u})$ avec $\vec{u}$ **(1,1,0)**. En déduire le moment d'inertie I_Δ par rapport à l'axe $\Delta(O,\vec{u})$. **(2pts)**

+CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Exercice II (12pts)



On considère un petit cylindre (D_1) plein homogène, de rayon **r** et de masse **m**, qui roule sans glisser au point de contact **I** sur un grand cylindre (D_2) de rayon **R** supposé fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $\mathcal{R}'(O,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{k})$ un repère en rotation autour de l'axe (Oz) et dont l'axe $(O\vec{e}_r)$ passe constamment par le centre de masse **G** du disque (D_1). L'angle θ caractérise la rotation du repère ($\mathcal{R}'$) par rapport à ($\mathcal{R}$).

On pose : $\vec{\Omega}(D_1/\mathcal{R}) = \dot{\varphi}\,\vec{k}$ et $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\,\vec{k}$.

1. Déterminer la condition de roulement sans glissement du cylindre (D_1) par rapport au cylindre (D_2) au point **I**. En déduire le torseur cinématique de (D_1) par rapport à ($\mathcal{R}$) au point **I** en fonction de **R**, **r** et $\dot{\theta}$. **(2pts)**
2. Déterminer les torseurs cinétique et dynamique au point **I** de (D_1) par rapport à ($\mathcal{R}$). **(3 pts)**
3. Ecrire, au point I, le torseur des actions mécaniques extérieures agissant sur (D_1) dans ($\mathcal{R}$). Calculer la puissance développée dans le mouvement de (D_1) par rapport à ($\mathcal{R}$) et éventuellement l'énergie potentielle. **(3pts)**
4. Déterminer l'énergie cinétique de (D_1) par rapport à ($\mathcal{R}$). En déduire l'équation du mouvement de (D_1) par rapport à ($\mathcal{R}$). **(2pts)**
5. Trouver les composantes, normale et de frottement **N** et **T**, de la force de contact au point I en fonction θ, **m** et **g** sachant qu'à l'instant initial, θ(t=0) = 0 et que le cylindre (D_1) est lâché sans vitesse initiale. Pour quel angle θ_d, le cylindre (D_1) décolle-t-il du cylindre (D_2) ? **(2pts)**

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
- EL JADIDA -

A.U. 2012-2013
Filières : SMI/SMA

Examen de Rattrapage

Mécanique du Solide Indéformable

Durée : 1h30mn

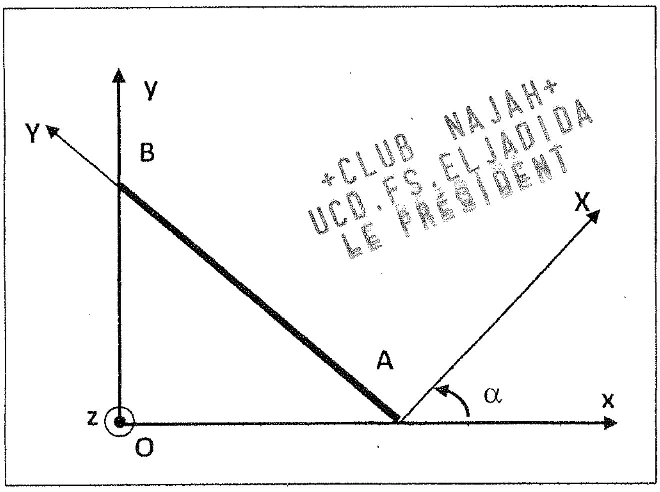
Exercice I (10 pts)

Une tige (T) de longueur L et d'extrémités A et B glisse sur les axes (Ox) et (Oy) du référentiel R(O;xyz) de base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).
Soit R_1(A, XYz) un référentiel lié à la tige (T) de base ($\vec{I}, \vec{J}, \vec{k}$) et tel que : $\overrightarrow{AB} = L\,\vec{J}$. On pose $\alpha = (\vec{i}, \vec{I}) = (\vec{j}, \vec{J})$.

N.B. Tous les résultats vectoriels doivent être exprimés dans la base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)

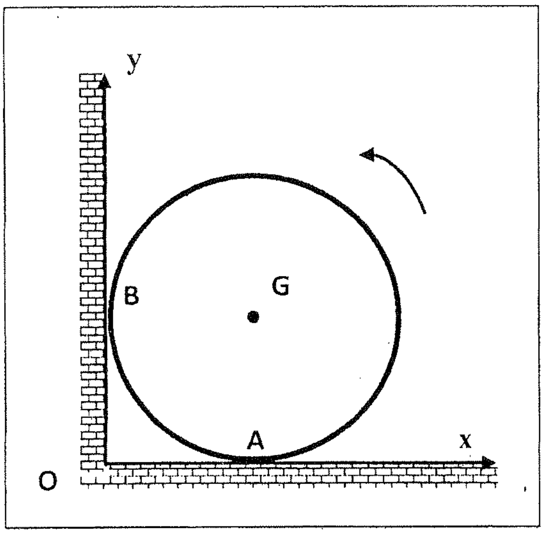
Déterminer

1. Le torseur cinématique de la tige au point A.
2. Le moment central et l'axe central
3. Le vecteur vitesse, $\vec{v}(B/R)$, du point B
4. Le vecteur vitesse, $\vec{v}(O \in T/R)$, du point O supposé lié à (T).
5. Le vecteur accélération, $\vec{\gamma}(B/R)$, du point B.
6. Le vecteur accélération, $\vec{\gamma}(O \in T/R)$, du point O supposé lié à (T).
7. Le centre instantané de rotation, I, par calcul et géométriquement.
8. La base (b) et la roulante (r) du mouvement plan sur plan de (T).
9. Les vecteurs vitesse : $\vec{v}(I/b)$ et $\vec{v}(I/r)$. Conclure



Exercice II (10pts)

Un disque **(D)** homogène de rayon **R**, de centre d'inertie **G** et de masse **M** est mis en contact à l'instant t = 0 avec deux parois perpendiculaires, l'une horizontale et l'autre verticale d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ **(O; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)**. Soit **A** le point de contact de **(D)** avec la paroi horizontale et soit **B** celui avec la paroi verticale. Les coefficients de frottement de glissement des deux parois avec le disque aux points **A** et **B** sont respectivement f_A et f_B. On néglige les moments de résistance au pivotement et au roulement. Initialement le disque possède une vitesse angulaire ω_0. On posera : $\vec{\Omega}(D/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\,\vec{k}$.



1. Déterminer la matrice d'inertie, $II_G(D)$, du disque **(D)** au point **G**.
2. Déterminer, au point **G**, le torseur cinétique de **(D)** par rapport à ($\mathcal{R}$).
3. Déterminer l'énergie cinétique de **(D)** par rapport à ($\mathcal{R}$).
4. Déterminer, au point **G**, le torseur des actions mécaniques extérieures agissant sur **(D)** dans ($\mathcal{R}$).
5. Déterminer l'équation du mouvement de **(D)** par rapport à ($\mathcal{R}$)
6. Calculer le temps nécessaire, T_0, pour stopper le disque.
7. Calculer la puissance développée dans le mouvement de **(D)** par rapport à ($\mathcal{R}$).

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
ELJADIDA

A.U. 2013-2014
Filières : SMI/SMA
Mécanique du Solide Rigide

Examen de Rattrapage

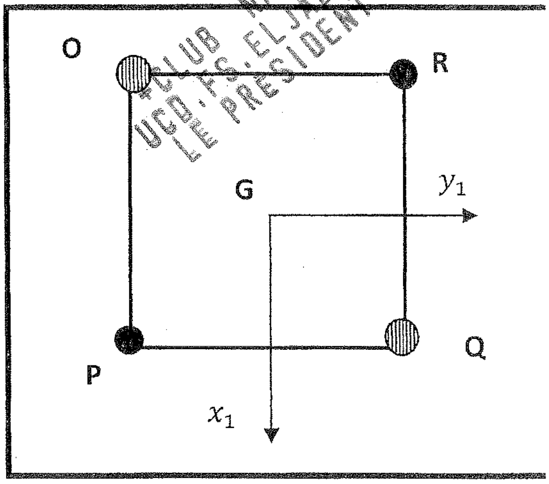
Durée:1h 30 mn

***Cours* (3 points) :** Enoncer, pour un solide rigide (S), le théorème de Koenig de :

1. moment cinétique
2. moment dynamique
3. l'énergie cinétique

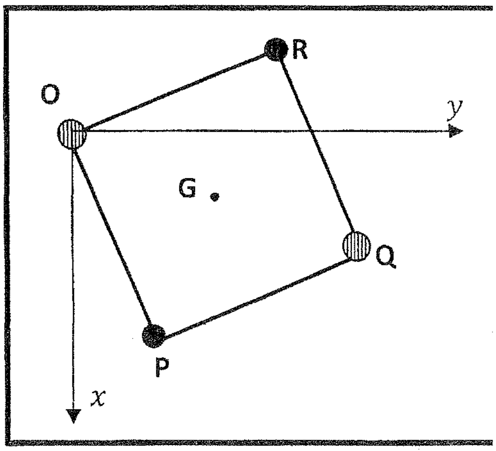
Expliquer le sens de chacun des termes qui y apparaissent.

***Exercice* (17 points)**



A. On considère un carré, (C), plein et homogène, de côté a, de masse m et de centre d'inertie G. Soit $\Re_1$ $(Gx_1y_1z_1)$, de base orthonormée directe $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un référentiel lié au carré (C). Aux quatre sommets du carré, on fixe quatre masselottes : O et Q de masse $m_1/2$ chacune, et P et R de masse $m_2/2$ chacune avec $m_1 \neq m_2$ (voir figure). Un système (S) est ainsi formé par le carré (C) et les quatre masselottes : O $(m_1/2)$, P$(m_2/2)$, Q$(m_1/2)$ et R$(m_2/2)$.

1. Montrer, par un calcul détaillé, que la matrice d'inertie, au point G, du système (S s'écrit : $II_G(S) = \begin{bmatrix} I_G & -J_G & 0 \\ -J_G & I_G & 0 \\ 0 & 0 & 2I_G \end{bmatrix}$. On exprimera I_G et J_G en fonction des données du problème
2. En déduire la matrice d'inertie, au point O, du système (S), $II_O(S)$.
3. Le repère $\Re_1$ est-il un repère principal d'inertie ? Admet-il un axe principal d'inertie ?(Justifier)
4. Trouver un repère principal d'inertie pour (S). Faites un schéma montrant la disposition des axes du repèr principal d'inertie par rapport à ceux de $\Re_1$.
5. Calculer le moment d'inertie $I_{\Delta G}$, du système (S), par rapport à l'axe $\Delta_G(G,\vec{u})$ avec $\vec{u}$ (0, 0, a) vecteur de $\Re_1$. E déduire le moment d'inertie I_Δ par rapport à l'axe $\Delta(O, \vec{u})$.



B. On suppose maintenant que le système (S) est en rotation avec la vitesse angulaire non constante ω autour de l'axe (Oz) du repère fixe, $\Re(O\,xyz)$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \equiv \vec{k}_1)$. **Dans la suite, on exprimera tous les résultats vectoriels dans la base mobile $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$ liée à (S).**

1. Déterminer au point G:
   a. Le torseur cinématique : $[\mathcal{V}(S/\Re)]$
   b. Le torseur cinétique : $[\mathcal{C}(S/\Re)]$
   c. Le torseur dynamique : $[\mathcal{D}(S/\Re)]$
2. Déterminer l'énergie cinétique de (S) par rapport à $(\Re)$ en fonction de ω et de I_Δ.
3. En déduire la puissance développée dans le mouvement de (S) par rapport à $(\Re)$.

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
ELJADIDA

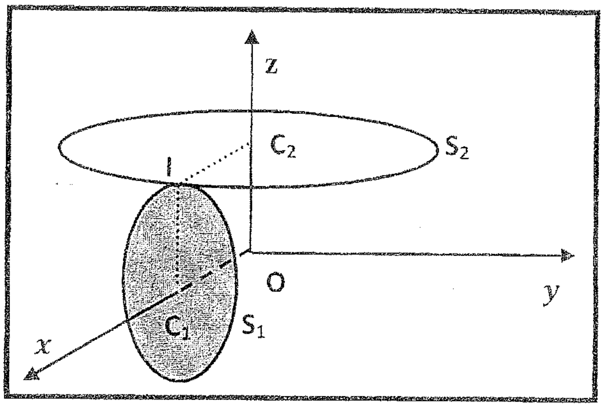
A.U. 2013-2014
Filières : SMI/SMA

Examen de Mécanique des Solides Rigides

Durée:1h 30 mn

Cours (2,5 points) : Donner et expliquer en détail les lois d'Amontons-Coulomb du frottement solide pour la force de frottement tangentielle $\vec{T}$ entre deux solides (S_1) et (S_2).

EXERCICE 1 (7,5 points)



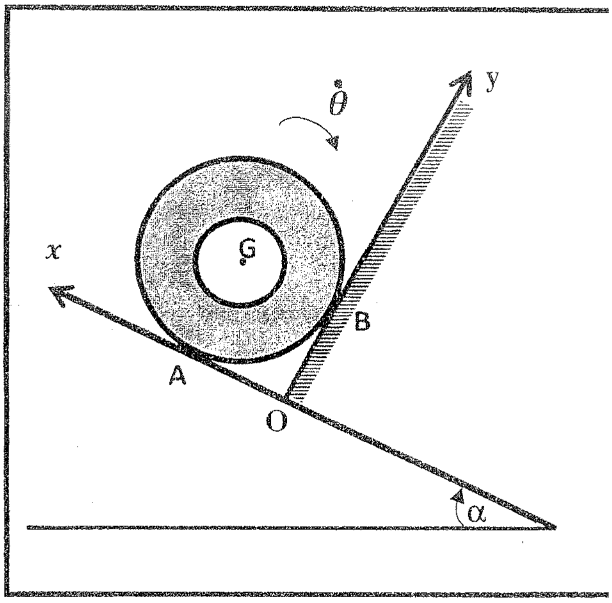
Soit R(Oxyz) un repère fixe de base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Un disque (S_1) de centre C_1 et de rayon R_1, tourne autour de l'axe (Ox). Le centre C_1 est sur (Ox) et le plan de (S_1) est perpendiculaire à (Ox). Un plateau circulaire (S_2) de centre C_2 tourne autour de l'axe (Oz). Le centre C_2 est sur (Oz) et le plan de (S_2) est perpendiculaire à (Oz). Le plateau circulaire roule sans glisser sur le disque (S_1) en un point I tel que : $\overrightarrow{C_2I} = R_2\,\vec{i}$ avec $(R_2 > 0)$.

On posera :

$\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1\vec{i}$ et $\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2\vec{k}$

1. Déterminer la relation entre la vitesse angulaire ω_2 du plateau (S_2) et la vitesse angulaire ω_1 du disque (S_1).
2. Déterminer le vecteur rotation de pivotement et le vecteur rotation de roulement du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) en fonction de ω_1, R_1 et R_2.

EXERCICE 2 (10 points)



Soit un référentiel galiléen $\Re(Oxyz)$ de base associée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormée directe. On considère un disque plein homogène, de rayon **R** évidé en son centre par un trou de rayon **r**. Le système **(S)** ainsi formé, de centre d'inertie **G** et de masse **m**, est maintenu en contact avec deux parois perpendiculaires **fixes**, l'une parallèle à la pente d'angle α disposée suivant l'axe (Ox) et l'autre parallèle avec l'axe (Oy) (voir figure). Soit **A** le point de contact de (S) avec la pente et soit **B** le point de contact avec la paroi perpendiculaire à la pente. Le système (S) est alors mis en rotation avec une vitesse angulaire initiale, ω_0. Les coefficients de frottement de glissement des deux parois avec le disque aux points A et B sont respectivement f_A et f_B. On néglige les moments de résistance au pivotement et au roulement.

On posera : $\vec{\Omega}(S/R) = \dot{\theta}\,\vec{k}$

1. Déterminer la matrice d'inertie du disque évidé (S) au point **G**, $II_G(S)$, en fonction de **R**, **r** et **m**.
2. Déterminer au point **G**, le torseur cinétique de (S) par rapport à $(\Re)$
3. Déterminer l'énergie cinétique de (S) par rapport à $(\Re)$
4. Déterminer au point **G**, le torseur des actions mécaniques extérieures agissant sur (S) dans $(\Re)$.
5. Déterminer l'équation du mouvement de (S) par rapport à $(\Re)$
6. Calculer alors le temps nécessaire pour stopper le disque évidé. Comparer ce temps avec celui obtenu si le disque était plein.
7. Calculer la puissance développée dans le mouvement de (S) par rapport à $(\Re)$. L'énergie mécanique est-elle conservée ?