

Préparez-vous aux

# Concours

Physique

# Mécanique du solide

cours détaillé et résumé de cours  
Problèmes posés aux concours

Mohamed LOTFI  
Professeur agrégé à l'ENS

MP

[Proétudes.blogspot.com](http://Proétudes.blogspot.com)  
**PROÉTUDES**  
*Surfer en toute confiance*

# Tables des matières

|          |                                                                                                  |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Cinétique d'un système de points matériels</b>                                                | <b>3</b>  |
| 1.       | Système matériel . . . . .                                                                       | 3         |
| 2.       | Centre de masse ou centre d'inertie . . . . .                                                    | 4         |
| 3.       | Quantité de mouvement ou résultante cinétique . . . . .                                          | 4         |
| 4.       | Moment cinétique . . . . .                                                                       | 5         |
| 5.       | Énergie cinétique . . . . .                                                                      | 6         |
| 6.       | Référentiel barycentrique . . . . .                                                              | 6         |
| 7.       | Théorèmes de Koenig . . . . .                                                                    | 6         |
| 8.       | Notion de Torseur . . . . .                                                                      | 7         |
| <b>2</b> | <b>Dynamique d'un système de points matériels</b>                                                | <b>9</b>  |
| 1.       | Actions mécaniques . . . . .                                                                     | 9         |
| 2.       | Théorème de la résultante cinétique . . . . .                                                    | 11        |
| 3.       | Théorème du moment cinétique . . . . .                                                           | 11        |
| 4.       | Principe fondamental de la dynamique sous forme torsielle . . . . .                              | 13        |
| 5.       | Énergétique d'un système de points matériels . . . . .                                           | 13        |
| <b>3</b> | <b>Cinématique du solide et des solides en contact</b>                                           | <b>15</b> |
| 1.       | Modèle du solide indéformable . . . . .                                                          | 15        |
| 2.       | Relation des vitesses dans un solide . . . . .                                                   | 15        |
| 3.       | Mouvements particuliers de solide . . . . .                                                      | 16        |
| 4.       | Mouvement de solides en contact . . . . .                                                        | 17        |
| 5.       | Composition des vitesses et des accélérations . . . . .                                          | 19        |
| <b>4</b> | <b>Action de contact entre solides</b>                                                           | <b>21</b> |
| 1.       | Torseur des actions de contact . . . . .                                                         | 21        |
| 2.       | Lois de Coulomb du frottement . . . . .                                                          | 22        |
| 3.       | Puissance des actions de contact . . . . .                                                       | 23        |
| 4.       | Notion de liaison parfaite . . . . .                                                             | 24        |
| <b>5</b> | <b>Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe</b>                                                | <b>25</b> |
| 1.       | Moment cinétique d'un solide . . . . .                                                           | 25        |
| 2.       | Énergétique du solide . . . . .                                                                  | 29        |
| 3.       | Exemple d'étude du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe de direction fixe . . . . . | 31        |
| <b>6</b> | <b>Résumé de mécanique du solide</b>                                                             | <b>33</b> |
| 1.       | Cinétique d'un système matériel . . . . .                                                        | 33        |
| 2.       | Dynamique d'un système de points matériels . . . . .                                             | 35        |
| 3.       | Cinématique du solide et des solides en contact . . . . .                                        | 38        |
| 4.       | Action de contact entre solides . . . . .                                                        | 40        |
| 5.       | Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe . . . . .                                             | 41        |
| <b>7</b> | <b>Problème : Chute d'une tartine (Mines-ponts 99)</b>                                           | <b>43</b> |
| 1.       | Étude de la rotation . . . . .                                                                   | 43        |
| 2.       | Étude de la chute . . . . .                                                                      | 45        |

---

|           |                                                       |           |
|-----------|-------------------------------------------------------|-----------|
| <b>8</b>  | <b>Corrigé : Chute d'une tartine (Mines-ponts 99)</b> | <b>47</b> |
| 1.        | Étude de la rotation . . . . .                        | 47        |
| 2.        | Étude de la chute . . . . .                           | 50        |
| <b>9</b>  | <b>Problème : Étude d'une bicyclette</b>              | <b>53</b> |
| 1.        | . . . . .                                             | 53        |
| 2.        | . . . . .                                             | 53        |
| 3.        | . . . . .                                             | 54        |
| 4.        | . . . . .                                             | 54        |
| 5.        | . . . . .                                             | 54        |
| 6.        | . . . . .                                             | 54        |
| 7.        | . . . . .                                             | 54        |
| <b>10</b> | <b>Corrigé : Étude d'une bicyclette</b>               | <b>55</b> |
| 1.        | . . . . .                                             | 55        |
| 2.        | . . . . .                                             | 56        |
| 3.        | . . . . .                                             | 57        |
| 4.        | . . . . .                                             | 57        |
| 5.        | . . . . .                                             | 58        |
| 6.        | . . . . .                                             | 58        |
| <b>11</b> | <b>Problème : Mouvement d'une voiture (ccp 2004)</b>  | <b>61</b> |
| 1.        | Étude de la phase d'accélération . . . . .            | 62        |
| 2.        | Étude de la phase de freinage . . . . .               | 63        |
| <b>12</b> | <b>Corrigé : Mouvement d'une voiture (ccp 2004)</b>   | <b>65</b> |
| 1.        | Étude de la phase d'accélération . . . . .            | 65        |
| 2.        | Étude de la phase de freinage . . . . .               | 69        |
| <b>13</b> | <b>Problème : Étude d'un wagonnet (ccp 2010)</b>      | <b>73</b> |
| 1.        | Étude de l'équilibre . . . . .                        | 73        |
| 2.        | Étude du mouvement . . . . .                          | 74        |
| <b>14</b> | <b>Corrigé : Étude d'un wagonnet (ccp 2010)</b>       | <b>77</b> |
| 1.        | Étude de l'équilibre . . . . .                        | 77        |
| 2.        | Étude du mouvement . . . . .                          | 78        |

# chapitre 1

## Cinétique d'un système de points matériels

On s'intéresse dans ce chapitre à définir les éléments cinétiques d'un système matériel en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$  : quantité de mouvement, moment cinétique, énergie cinétique. Cette étude va généraliser les notions vues en première année concernant le point matériel.

### 1. SYSTÈME MATÉRIEL

#### 1.1. Définition

Un système matériel ( $\Sigma$ ) est l'ensemble de la matière contenue à l'intérieur d'une surface fermée quelconque  $S$ .

**Remarque :**

On s'intéresse dans ce cours à l'étude des systèmes fermés c'est-à-dire n'échangeant pas de matière avec l'extérieur ( $m = \text{cte}$ ).

#### 1.2. Systèmes discrets

Un système discret est un système formé par  $N$  points matériels  $P_i$  de masse  $m_i$ .  
La masse totale du système est :

$$m = \sum_{i=1}^N m_i$$

#### 1.3. Systèmes continus

Dans l'approximation des milieux continus on oublie le caractère granulaire de la matière et on considère tout échantillon de matière comme étant un système continu. La masse est supposée répartie de manière continue dans l'espace.

On donne la masse élémentaire  $dm_P$  autour d'un point  $P$  :

$$dm_P = \mu(P)d\tau(P)$$

avec  $\mu(P)$  la masse volumique au point  $P$  et  $d\tau(P)$  l'élément de volume entourant  $P$ .  
La masse totale du système, de volume  $\mathcal{V}$ , est donnée par :

$$m = \iiint_{P \in \mathcal{V}} dm_P$$

## 2. CENTRE DE MASSE OU CENTRE D'INERTIE

Le centre d'inertie ou de masse d'un système de points matériels est le point  $G$  défini par :

$$m\vec{OG} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{OP}_i$$

Avec  $O$  un point quelconque.

En effet

$$m\vec{OG} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{OP}_i \Rightarrow m\vec{OA} + m\vec{AG} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{OA} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{AP}_i$$

donc

$$m\vec{OA} + m\vec{AG} = m\vec{OA} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{AP}_i$$

d'où

$$m\vec{AG} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{AP}_i$$

Dans le cas d'un système continu on définit son centre de masse par la relation :

$$m\vec{OG} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{OP} dm_P$$

On peut définir le centre d'inertie en écrivant le cas particulier  $O = G$

- Système discret :

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{GP}_i = \vec{0}$$

- Système continu :

$$\iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{GP} dm_P = \vec{0}$$

Les coordonnées de  $G$  dans le repère cartésien  $Oxyz$  sont données par :

$$x_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i x_{P_i} \quad \text{ou} \quad x_G = \frac{1}{m} \iiint_{P \in \mathcal{V}} x_P dm_P$$

De même pour  $y_G$  et  $z_G$ .

### Remarque :

Si le système admet un élément de symétrie (plan, axe ou centre) alors le centre d'inertie appartient à cet élément de symétrie.

## 3. QUANTITÉ DE MOUVEMENT OU RÉSULTANTE CINÉTIQUE

### 3.1. Définition

Considérons un système fermé  $(\Sigma)$  dont les différents points sont en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . La *quantité de mouvement*  $\vec{P}(\Sigma/\mathcal{R})$  appelé aussi *résultante cinétique* de  $(\Sigma)$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est par définition la somme des quantités de mouvement des points matériels constituant le système.

$$\vec{P}(\Sigma/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}(P_i/\mathcal{R})$$

Avec  $\vec{v}(P_i/\mathcal{R})$  est la vitesse du point  $P_i$  dans  $\mathcal{R}$ .

Dans le cas d'un système continu la résultante cinétique est donnée par :

$$\vec{P}(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm_P$$

### 3.2. Expression en fonction de $\vec{v}_G$

On a

$$\begin{aligned}\vec{P}(\Sigma/\mathcal{R}) &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}(P_i/\mathcal{R}) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{OP}_i}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{OP}_i \\ &= m \frac{d\vec{OG}}{dt}\end{aligned}$$

Donc

$$\vec{P}(\Sigma/\mathcal{R}) = m \vec{v}(G/\mathcal{R})$$

Ce résultat est valable aussi dans le cas d'un système continu.

## 4. MOMENT CINÉTIQUE

### 4.1. Définition

Le moment cinétique d'un système  $(\Sigma)$  en un point quelconque  $A$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  noté  $\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R})$  est défini par :

- Pour un système discret :

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^N \vec{AP}_i \wedge m_i \vec{v}(P_i/\mathcal{R})$$

- Pour un système continu :

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{AP} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm_P$$

### 4.2. Changement de point

On a

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{AP} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm_P$$

donc

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{AB} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm_P + \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{BP} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm_P$$

Ainsi

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{AB} \wedge \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm_P + \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{BP} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm_P$$

d'où

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{L}_B(\Sigma/\mathcal{R}) + \vec{AB} \wedge m \vec{v}_G$$

### 4.3. Moment cinétique par rapport à un axe

Le moment cinétique d'un système  $(\Sigma)$  par rapport à l'axe orienté  $\Delta$  est :

$$L_\Delta(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

$A$  est un point quelconque et appartenant à  $\Delta$ .

$\vec{u}_\Delta$  est un vecteur unitaire directeur de  $\Delta$ .

## 5. ÉNERGIE CINÉTIQUE

- Pour un système discret :

$$E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v^2(P_i/\mathcal{R})$$

- Pour un système continu :

$$E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{1}{2} v^2(P/\mathcal{R}) dm_P$$

## 6. RÉFÉRENTIEL BARYCENTRIQUE

Soit un système  $(\Sigma)$  en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

On définit le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  comme étant le référentiel ayant les caractéristiques :

- $\mathcal{R}^*$  est en mouvement de translation par rapport à  $\mathcal{R}$  ( $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}^*} = \vec{0}$ ).
- le centre d'inertie  $G$  de  $(\Sigma)$  est fixe dans  $\mathcal{R}^*$ .

### Remarque :

Les axes de  $\mathcal{R}^*$  gardent dans  $\mathcal{R}$  des directions fixes, on les choisit en général parallèles à ceux de  $\mathcal{R}$  et  $G$  origine de  $\mathcal{R}^*$ .

les grandeurs dans  $\mathcal{R}^*$  vont être notées avec des  $\star$ .

## 7. THÉORÈMES DE KÆNIG

### 7.1. Théorème de Kœnig pour le moment cinétique

On va faire la démonstration du théorème de KÆNIG pour un système continu.

On sait que

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{AP} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm_P$$

Or d'après la loi de composition des vitesses

$$\vec{v}(P/\mathcal{R}) = \vec{v}(P/\mathcal{R}^*) + \vec{v}(G/\mathcal{R})$$

donc

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{AP} \wedge [\vec{v}^*(P) + \vec{v}(G/\mathcal{R})] dm_P$$

alors

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{AP} \wedge \vec{v}^*(P) dm_P + \left( \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{AP} dm_P \right) \wedge \vec{v}(G/\mathcal{R})$$

d'où le théorème de KÆNIG pour le moment cinétique :

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{L}_A^*(\Sigma) + \vec{AG} \wedge m \vec{v}(G/\mathcal{R})$$

### Remarque :

On a  $\vec{P}^*(\Sigma) = m \vec{v}_G^* = \vec{0}$

donc  $\vec{L}_A^*(\Sigma) = \vec{L}_B^*(\Sigma)$

Le théorème de KÆNIG pour le moment cinétique s'écrit :

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{L}^*(\Sigma) + \vec{AG} \wedge m \vec{v}(G/\mathcal{R})$$



## 7.2. Théorème de Kœnig pour l'énergie cinétique

On va faire la démonstration du théorème de KœNIG pour un système discret.

$$E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v^2(P_i/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i [\vec{v}^*(P_i) + \vec{v}_G]^2$$

donc

$$E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v^{*2}(P_i/\mathcal{R}) + \frac{1}{2} m v_G^2 + \left[ \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}^*(P_i) \right] \cdot \vec{v}_G$$

Or

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}^*(P_i) = \vec{P}^* = \vec{0}$$

d'où le théorème de KœNIG pour l'énergie cinétique :

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} m v_G^2$$

## 8. NOTION DE TORSEUR

### 8.1. Champ de vecteur

on appelle champ de vecteur toute application de l'espace affine  $E_3^\bullet$  vers l'espace vectoriel  $E_3$ , qui fait correspondre à tout point  $A$  un vecteur  $\vec{M}_A$ .

$$\begin{array}{ccc} \vec{M} & : & E_3^\bullet \rightarrow E_3 \\ & & A \rightarrow \vec{M}_A \end{array}$$

### 8.2. Champ de vecteur antisymétrique

Un champ de vecteur  $\vec{M}$  est antisymétrique s'il existe un vecteur  $\vec{R}$  appelé *résultante* tel que pour deux points  $A$  et  $B$  quelconque on a :

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}$$

### 8.3. Torseur

#### 8.3.1. Définition

On appelle torseur  $\tau$  l'ensemble d'un champ antisymétrique  $\vec{M}_A$  et sa résultante  $\vec{R}$ . On le note  $[\vec{R}, \vec{M}_A]$ .

**Vocabulaire :**

$\vec{R}$  : résultante du torseur.

$\vec{M}_A$  : moment du torseur en  $A$ .

**Remarque :**

La donnée des éléments de réduction d'un torseur ( $\vec{R}$  et  $\vec{M}_A$ ) en un point quelconque permet de déterminer son moment en importe quel autre point par la relation du changement du point:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}$$

#### 8.3.2. Exemples

##### 8.3.2.a. torseur cinétique

on définit le torseur cinétique  $\tau_c$   $[\vec{P}, \vec{L}_A]$  par ses éléments de réduction :

$$\tau_c \left\{ \begin{array}{ll} \text{Résultante cinétique} & : \vec{P} = m \vec{v}_G \\ \text{Moment cinétique} & : \vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \sum_i \overrightarrow{AP_i} \wedge m_i \vec{v}(P_i/\mathcal{R}) \end{array} \right.$$

qui vérifie la propriété du changement de point :

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{L}_B(\Sigma/\mathcal{R}) + \overrightarrow{AB} \wedge m \vec{v}_G$$

**8.3.2.b. torseur dynamique**

on définit le torseur dynamique  $\tau_D \left[ \vec{S}, \vec{D}_A \right]$  par ses éléments de réduction :

$$\tau_D \begin{cases} \text{Résultante dynamique} & : \vec{S} = m \vec{a}_G \\ \text{Moment dynamique} & : \vec{D}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \sum_i \overrightarrow{AP_i} \wedge m_i \vec{a}(P_i/\mathcal{R}) \end{cases}$$

qui vérifie la propriété du changement de point :

$$\vec{D}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{D}_B(\Sigma/\mathcal{R}) + \overrightarrow{AB} \wedge m \vec{a}_G$$

**8.3.3. Opération sur les torseurs****8.3.3.a. Somme**

Soient deux torseurs  $\tau_1 \left[ \vec{R}_1, \vec{\mathcal{M}}_{1A} \right]$  et  $\tau_2 \left[ \vec{R}_2, \vec{\mathcal{M}}_{2A} \right]$

Le torseur somme  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ ;  $\tau \left[ \vec{R}, \vec{\mathcal{M}}_A \right]$  a les éléments de réduction :

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{\mathcal{M}}_A &= \vec{\mathcal{M}}_{1A} + \vec{\mathcal{M}}_{2A} \end{aligned}$$

**8.3.3.b. Multiplication par un scalaire**

$$\tau \left[ \vec{R}, \vec{\mathcal{M}}_A \right] \Rightarrow \lambda \tau \left[ \lambda \vec{R}, \lambda \vec{\mathcal{M}}_A \right]$$

**8.3.3.c. Produit scalaire de deux torseurs**

Le produit scalaire de deux torseurs est défini par :

$$(\tau_1, \tau_2) = \vec{R}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_{2A} + \vec{R}_2 \cdot \vec{\mathcal{M}}_{1A}$$

**Remarque :**

Le produit scalaire de deux torseurs est invariant ( ne dépend pas du point où on exprime les éléments de réductions)

$$\vec{R}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_{2B} + \vec{R}_2 \cdot \vec{\mathcal{M}}_{1B} = \vec{R}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_{2A} + \vec{R}_2 \cdot \vec{\mathcal{M}}_{1A}$$

**8.3.4. Torseurs élémentaires****8.3.4.a. Couple**

On appelle couple un torseur de résultante nulle.

$\tau \left[ \vec{R}, \vec{\mathcal{M}}_A \right]$  est couple si et seulement si  $\vec{R} = \vec{0}$  donc  $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}$ .

**8.3.4.b. Glisseur**

$\tau \left[ \vec{R}, \vec{\mathcal{M}}_A \right]$  est glisseur s'il existe un point  $P$  tel que  $\vec{\mathcal{M}}_P = \vec{0}$

Pour un glisseur on a  $\forall M$  on a :

$$\vec{\mathcal{M}}_M = \overrightarrow{MP} \wedge \vec{R}$$

## chapitre 2

# Dynamique d'un système de points matériels

### 1. ACTIONS MÉCANIQUES

#### 1.1. Présentation

La notion d'action mécanique ou effort généralise la notion de force vue en première année. Considérons un système  $(\Sigma)$  subissant une force  $\vec{F}_1$  en un point  $A_1$ . L'action mécanique constitué par cette force se définit mathématiquement par :

- sa résultante qui est la force  $\vec{F}_1$ ;
- son moment en un point quelconque  $A$  :  $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_1) = \vec{AA}_1 \wedge \vec{F}_1$

#### 1.2. Actions extérieures et intérieures

Soit un système de  $N$  points matériels  $P_i$  de masse  $m_i$ .

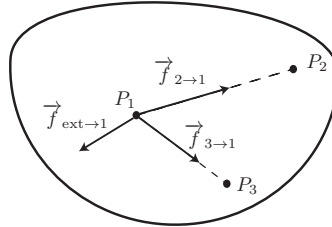


Figure 1:

Un point  $P_i$  du système subit de la part du point  $P_j$  la force  $\vec{f}_{j \rightarrow i}$  et de l'extérieur la force  $\vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i}$  (figure 1).

La force appliquée sur le point  $P_i$  est donc :

$$\vec{f}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{f}_{j \rightarrow i} + \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i}$$

la force intérieure appliquée sur le point  $P_i$  est :

$$\vec{f}_{i,\text{int}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{f}_{j \rightarrow i}$$

### 1.2.1. Actions intérieures

#### 1.2.1.a. Résultante

la résultante des forces intérieures est définie par :

$$\vec{F}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_{i,\text{int}} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{f}_{j \rightarrow i}$$

Or d'après le principe de l'action et de la réaction on a  $\vec{f}_{i \rightarrow j} = -\vec{f}_{j \rightarrow i}$ .  
D'où la résultante des actions intérieures est *nulle*.

$$\vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}$$

#### 1.2.1.b. Moment

Le moment des forces intérieures en  $A$  est défini par :

$$\vec{\mathcal{M}}_{A,\text{int}} = \sum_i \vec{AP}_i \wedge \vec{f}_{i,\text{int}}$$

Montrons que  $\sum_i \vec{AP}_i \wedge \vec{f}_{i,\text{int}}$  s'annule deux à deux.

Pour deux points  $P_1$  et  $P_2$  on a :

$$\vec{AP}_1 \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow 1} + \vec{AP}_2 \wedge \vec{f}_{1 \rightarrow 2} = (\vec{AP}_1 - \vec{AP}_2) \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow 1} = \vec{P_2P_1} \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0}$$

car  $\vec{P_2P_1} \parallel \vec{f}_{2 \rightarrow 1}$

Alors on déduit que

$$\vec{\mathcal{M}}_{A,\text{int}} = \vec{0}$$

### 1.2.2. Actions extérieures

#### 1.2.2.a. Résultante

La résultante des forces extérieures est donnée par :

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i}$$

Les forces extérieures peuvent être :

- Appliquées par un autre système
- forces d'inertie d'entraînement et Coriolis

#### Remarque :

Pour le cas d'un système continu on a :

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \iiint d\vec{F}_{\text{ext}}(P)$$

$d\vec{F}_{\text{ext}}(P)$  force extérieure subit par un élément de masse  $dm_P$  du système.

#### 1.2.2.b. Moment

Le moment des actions extérieures en  $A$  est :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum_{i=1}^N \vec{AP}_i \wedge \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i}$$

Pour un système continu on a :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \iiint \vec{AP} \wedge d\vec{F}_{\text{ext}}(P)$$

On peut montrer la relation de changement de point appelée aussi relation de transport :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_B + \vec{AB} \wedge \vec{F}_{\text{ext}}$$

### 1.3. Torseur des actions mécaniques

Le torseur des actions mécaniques exercées sur un système  $(\Sigma)$  est donné par ses éléments de réduction en un point  $A$  :

$$\tau_f \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \sum_i \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i} \\ \vec{M}_A = \sum_i \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i} \end{array} \right.$$

## 2. THÉORÈME DE LA RÉSVLTANTE CINÉTIQUE

### 2.1. Énoncé

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  la dérivée par rapport au temps de la résultante cinétique d'un système est égale à la résultante des forces extérieures exercées sur ce système :

$$\frac{d\vec{P}(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} /_{\mathcal{R}} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

### 2.2. Théorème du centre de masse

Puisqu'on s'intéresse à un système fermé la masse du système est une constante, donc le théorème de la résultante cinétique s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt} = m \vec{a}(G/\mathcal{R}) = \vec{F}_{\text{ext}}$$

D'où le lien avec la 2<sup>ème</sup> loi de NEWTON : par rapport à un référentiel galiléen le mouvement du centre d'inertie d'un système est équivalent à celui d'un point matériel fictif qui serait affecté de la masse totale du système et soumis à l'ensemble des forces extérieures exercées sur le système.

### 2.3. Conservation de la quantité de mouvement

Un système est dit isolé lorsqu'il n'est soumis à aucune force extérieure. Il est dit pseudo-isolé lorsque les actions extérieures se compensent.

Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système *isolé* ou *pseudo-isolé* se conserve.

## 3. THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE

### 3.1. TMC en un point fixe

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la dérivée par rapport au temps du moment cinétique en un point  $A$ , fixe dans  $\mathcal{R}$ , d'un système  $(\Sigma)$  est égale au moment pris en  $A$  des actions mécaniques extérieures agissant sur  $(\Sigma)$ .

$$\frac{d\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} /_{\mathcal{R}} = \vec{M}_A(\vec{F}_{\text{ext}})$$

### 3.2. TMC au centre d'inertie

Bien que le centre d'inertie  $G$  du système n'est pas à priori un point fixe, on peut appliquer le TMC en  $G$ .

En effet

Soit  $A$  un point fixe dans  $\mathcal{R}$ .

On sait que

$$\vec{L}_G(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) + \overrightarrow{GA} \wedge m \vec{v}(G/\mathcal{R})$$

d'où

$$\frac{d\vec{L}_G(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} /_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} /_{\mathcal{R}} + \frac{d\overrightarrow{GA}}{dt} /_{\mathcal{R}} \wedge m \vec{v}(G/\mathcal{R}) + \overrightarrow{GA} \wedge m \frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt} /_{\mathcal{R}}$$

$$\text{Or } \frac{d\vec{L}_A(\Sigma)}{dt} / \mathcal{R} = \vec{M}_A(\vec{F}_{\text{ext}})$$

$$\text{et } \vec{GA} \wedge m \frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt} / \mathcal{R} = \vec{GA} \wedge \vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\text{et } \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{M}_A(\vec{F}_{\text{ext}}) + \vec{GA} \wedge \vec{F}_{\text{ext}}$$

Alors

$$\frac{d\vec{L}_G(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} / \mathcal{R} = \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{ext}}) + \frac{d\vec{GA}}{dt} / \mathcal{R} \wedge m \vec{v}(G/\mathcal{R})$$

$$A \text{ est fixe dans } \mathcal{R} \text{ donc } \frac{d\vec{GA}}{dt} / \mathcal{R} = \frac{d\vec{GO}}{dt} / \mathcal{R} + \frac{d\vec{OA}}{dt} / \mathcal{R} = -\vec{v}(G/\mathcal{R})$$

alors

$$\frac{d\vec{L}_G(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} / \mathcal{R} = \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{ext}}) - \vec{v}(G/\mathcal{R}) \wedge m \vec{v}(G/\mathcal{R})$$

d'où le théorème du moment cinétique en  $G$

$$\frac{d\vec{L}_G(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} / \mathcal{R} = \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{ext}})$$

**Remarque :**

Pour un point mobile  $B$  le TMC s'écrit dans un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen :

$$\frac{d\vec{L}_B(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} / \mathcal{R} + \vec{v}(B/\mathcal{R}) \wedge m \vec{v}(G/\mathcal{R}) = \vec{M}_B(\vec{F}_{\text{ext}})$$

### 3.3. TMC dans le référentiel barycentrique

Soit  $\mathcal{R}^*$  le référentiel barycentrique.

D'après le théorème de KOENIG on a

$$\vec{L}_G(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{L}_G(\Sigma/\mathcal{R}^*) = \vec{L}^*(\Sigma)$$

d'où le TMC dans  $\mathcal{R}^*$  :

$$\frac{d\vec{L}^*(\Sigma)}{dt} / \mathcal{R}^* = \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{ext}})$$

La dérivée par rapport au temps dans  $\mathcal{R}$  est égale à celle dans  $\mathcal{R}^*$ .

### 3.4. TMC par rapport à un axe fixe $\Delta$

Soit  $\Delta$  un axe fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et  $A$  un point quelconque de  $\Delta$ .

on a

$$\frac{dL_\Delta(\Sigma/R)}{dt} / \mathcal{R} = \frac{d[\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) \cdot \vec{u}_\Delta]}{dt} / \mathcal{R} = \frac{d\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} / \mathcal{R} \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{M}_A(\vec{F}_{\text{ext}}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Or

$$\vec{M}_A(\vec{F}_{\text{ext}}) \cdot \vec{u}_\Delta = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}})$$

Alors le TMC par rapport à un axe  $\Delta$  fixe :

$$\frac{dL_\Delta(\Sigma/R)}{dt} / \mathcal{R} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}})$$

### 3.5. Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique d'un système *isolé* dans un référentiel galiléen se conserve.

## 4. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE SOUS FORME TOR-SORIELLE

Dans un référentiel galiléen le P.F.D appliqué à un système matériel  $(\Sigma)$  s'écrit :

$$\frac{d[\vec{P}, \vec{L}_A]}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = [\vec{F}_{\text{ext}}, \vec{M}_A(\vec{F}_{\text{ext}})]$$

Avec  $A$  un point fixe dans  $\mathcal{R}$ .

## 5. ÉNERGÉTIQUE D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS

### 5.1. Puissance et travail

#### 5.1.1. Puissance

Soit  $(\Sigma)$  un système de points matériels  $P_i$  animés de vitesse  $\vec{v}_i$  dans un référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  tel que le point  $P_i$  subit la force  $\vec{F}_i$ .

La puissance par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  d'une action mécanique qui agit sur  $(\Sigma)$  est :

$$\mathcal{P} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

On notera que chaque force est multipliée scalairement par la vitesse de son point d'application.

#### 5.1.2. Travail

Le travail élémentaire d'une action mécanique par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est :

$$\delta W_{/\mathcal{R}}(\text{action}) = \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\text{action})dt = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i(P_i)dt = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{OP}_i$$

Le travail fini entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  est :

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt$$

**Remarque :**

- Dans le cas d'un système continu on a

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\text{action}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} d\vec{f}(P) \cdot \vec{v}(P)$$

$$\delta W = \iiint_{P \in \mathcal{V}} d\vec{f}(P) \cdot d\vec{OP}$$

- Malgré que la résultante des actions intérieures est nulle, la puissance des actions intérieures à un système de points n'est pas nulle et indépendante du référentiel d'étude. Par contre la puissance des actions intérieures à un solide indéformable est nulle.

### 5.2. Énergie potentielle

#### 5.2.1. Action mécanique conservative

Une action mécanique (extérieure ou intérieure) est dite conservative dans un référentiel  $\mathcal{R}$  si son travail ne dépend pas du chemin suivi.

#### 5.2.2. Énergie potentielle

L'énergie potentielle liée à une action mécanique conservative dans un référentiel  $\mathcal{R}$  est donnée par :

$$dE_p = -\delta W(\text{action})$$

$E_p$  est définie à une constante près.

L'énergie potentielle totale est la somme des énergies potentielles de toutes les actions conservatives intérieures et extérieures.

### 5.3. Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique d'un système matériel ( $\Sigma$ ) par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  entre deux instants  $t$  et  $t+dt$  est égale à la somme du travail entre ces deux instants des actions intérieures et extérieures s'exerçant sur le système, soit :

$$dE_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \delta W_{\text{int}/\mathcal{R}} + \delta W_{\text{ext}/\mathcal{R}}$$

Entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  le TEC s'écrit :

$$\Delta E_c = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}$$

$t_1 \rightarrow t_2 \quad t_1 \rightarrow t_2 \quad t_1 \rightarrow t_2$

- Théorème de la puissance cinétique est :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

### 5.4. Énergie mécanique

#### 5.4.1. Définition

L'énergie mécanique d'un système est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle soit :

$$E_m(\Sigma/\mathcal{R}) = E_c(\Sigma/\mathcal{R}) + E_p(\Sigma/\mathcal{R})$$

#### 5.4.2. Théorème de l'énergie mécanique

La variation de l'énergie mécanique d'un système matériel ( $\Sigma$ ) dans un référentiel galiléen est égale à la somme des travaux des forces non conservatives tant intérieures qu'extérieures, soit :

$$dE_m(\Sigma/\mathcal{R}) = \delta W_{/\mathcal{R}}(\vec{F}^{nc})$$

ou pour un déplacement fini :

$$\Delta E_m = W_{t_1 \rightarrow t_2}(\vec{F}^{nc})$$

- Théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}^{nc})$$

#### 5.4.3. Conservation de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen tel que le travail des actions non conservatives appliquées sur un système est nul, l'énergie mécanique de ce système est conservée, soit :

$$W(\vec{F}^{nc}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_m = \text{cte}$$

L'équation  $E_m = \text{cte}$  est appelée intégrale première du mouvement.



## chapitre 3

# Cinématique du solide et des solides en contact

### 1. MODÈLE DU SOLIDE INDÉFORMABLE

#### 1.1. Définition

Un solide indéformable ( $\Sigma$ ) est un solide idéal tel que, pour tous points  $P$  et  $Q$  appartenant à ( $\Sigma$ ), la distance  $PQ$  reste constante au cours du temps.

#### 1.2. Degrés de liberté d'un solide

On appelle nombre de degrés de liberté d'un système le nombre de coordonnées d'espace indépendantes qu'il faut connaître pour pouvoir situer tous les points du système.

Par exemple dans le cas d'un point matériel on a trois degrés de liberté :

- en coordonnées cartésiennes ses degrés de liberté sont  $(x, y, z)$
- en coordonnées cylindriques ses degrés de liberté sont  $(r, \theta, z)$
- en coordonnées sphériques ses degrés de liberté sont  $(r, \theta, \varphi)$

Dans le cas d'un solide le nombre de degrés de liberté est au plus 6 qu'on peut donner sous la forme :

- les trois coordonnées d'un point lié au solide;
- les trois angles donnant l'orientation du solide (voir figure 1).

$\theta$  et  $\varphi$  analogue aux coordonnées sphériques.  
 $\Psi$  donnant la rotation de l'axe de la toupie.

### 2. RELATION DES VITESSES DANS UN SOLIDE

#### 2.1. Vecteur rotation instantanée

Le vecteur rotation est le vecteur  $\vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R})$  qui vérifie :  
Pour tout vecteur  $\vec{PQ}$  du solide ( $\Sigma$ ) on a

$$\frac{d\vec{PQ}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{PQ}$$

**Remarque :**

S'il existe un vecteur  $\vec{u}$  fixe lié au solide alors le vecteur rotation  $\vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R})$  est colinéaire à  $\vec{u}$  c'est-à-dire :

$$\vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R}) = \omega \vec{u}$$

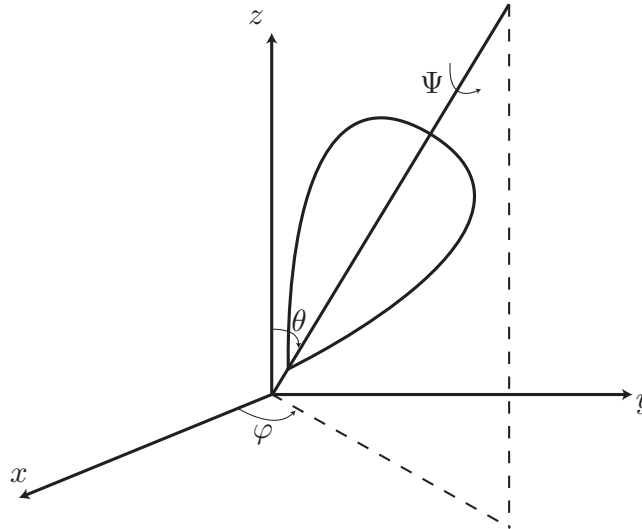


Figure 1:

## 2.2. Formule de Varignon

Soient  $A$  et  $B$  deux points liés au solide  $(\Sigma)$  de vecteur rotation  $\vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R})$ . Les vitesses de  $A$  et  $B$  vérifient la relation du *champ des vitesses* appelée aussi formule de VARIGNON :

$$\vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{v}(B/\mathcal{R}) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R})$$

## 2.3. Torseur cinématique

La formule de VARIGNON est du type de la formule du changement de point d'un torseur, d'où on définit le torseur cinématique  $\tau_v [\vec{\omega}, \vec{v}_A]$  :

$$\tau_v \begin{cases} \text{Résultante} & : \vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R}) \\ \text{Moment} & : \text{vitesse en un point du solide } \vec{v}_A \end{cases}$$

# 3. MOUVEMENTS PARTICULIERS DE SOLIDE

## 3.1. Solide en translation

Un solide  $(\Sigma)$  est dit en mouvement de translation par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  si tous les points liés à  $(\Sigma)$  ont la même vitesse instantanée par rapport à  $\mathcal{R}$ , ou de manière équivalente si  $\vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{0}$ .

**Remarque :**

- La translation n'est pas nécessairement rectiligne.
- Un solide en translation a trois degrés de liberté.

## 3.2. Solide en rotation autour d'un axe fixe

Un solide  $(\Sigma)$  est dit en mouvement de rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel  $\mathcal{R}$  s'il existe une droite liée à  $(\Sigma)$  dont les points sont fixes dans  $\mathcal{R}$  (figure 2).

Soit  $\varphi$  l'angle de rotation de  $(\Sigma)$  autour de  $\Delta$ .

Le vecteur rotation est donné par :

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\Delta$$

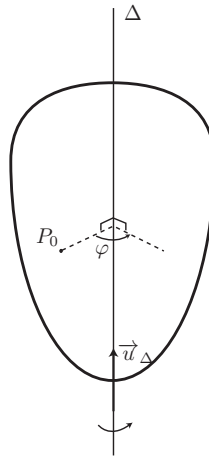


Figure 2:

### 3.3. Solide en rotation autour d'un axe de direction fixe

Lorsque la direction de l'axe  $\Delta$ , autour duquel le solide tourne, est fixe dans  $\mathcal{R}$ , le mouvement de  $(\Sigma)$  se décompose en :

- rotation autour d'un axe passant par  $G$  et de même direction que  $\Delta$ ;
- translation de  $G$  dans  $\mathcal{R}$ .

**Exemple :** Roulement d'un cylindre sur un plan (figure 3).

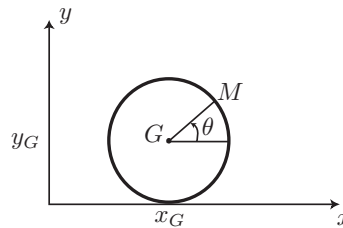


Figure 3:

## 4. MOUVEMENT DE SOLIDES EN CONTACT

### 4.1. Présentation

Le contact entre deux solides peut se faire selon un plan, une droite ou un point.

Considérons le cas de deux solides en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$  tel que le contact est ponctuel (figure 4).

(II) plan tangent commun à  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$ .

En  $I$  on distingue trois points :

- $I$  le point géométrique de contact;
- $I_1$  le point de  $(\Sigma_1)$  qui coïncide à l'instant  $t$  avec  $I$ ;
- $I_2$  le point de  $(\Sigma_2)$  qui coïncide à l'instant  $t$  avec  $I$

**Exemple :**

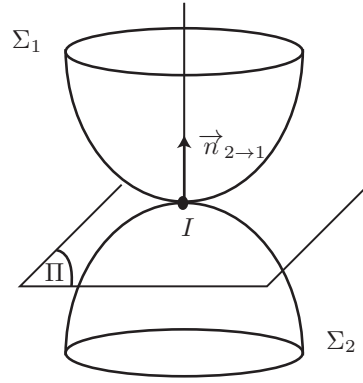


Figure 4:

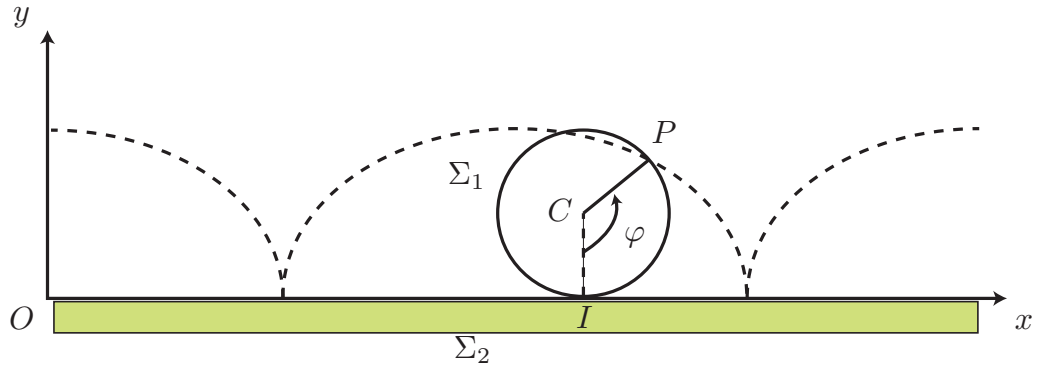


Figure 5:

- $(\Sigma_1)$  est un disque;
- $(\Sigma_2)$  est le sol (fixe);
- la trajectoire de  $I$  est l'axe  $Ox$ ;
- la trajectoire de  $I_1$  est une cycloïde analogue à la trajectoire du point  $P$  représentée en pointillé (figure 5);
- $I_2$  est un point fixe.

#### 4.2. Vitesse de glissement

La vitesse de glissement de  $(\Sigma_1)$  par rapport à  $(\Sigma_2)$  est définie par :

$$\vec{v}_g(\Sigma_1/\Sigma_2) = \vec{v}(I_1/\mathcal{R}) - \vec{v}(I_2/\mathcal{R})$$

$\vec{v}_g$  est indépendante du référentiel.

$$\vec{v}_g(\Sigma_1/\Sigma_2) = \vec{v}(I_1) - \vec{v}(I_2) = \vec{v}(I_1/\Sigma_2)$$

**Remarque :**

- La vitesse de glissement appartient au plan  $(\Pi)$  tangent à  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$  en  $I$ .
- on dit qu'il y a mouvement sans glissement si  $\vec{v}_g(\Sigma_1/\Sigma_2) = \vec{0}$ .

**Exemple :**

Considérons l'exemple du paragraphe précédent (figure 5) :

$\mathcal{R}$  le référentiel d'étude lié à  $(\Sigma_2)$  (le sol).

Soit  $x_C$  l'abscisse du centre  $C$  de  $(\Sigma_1)$ .

La vitesse de  $C$  est donnée par :

$$\vec{v}(C/\mathcal{R}) = \frac{dx_C}{dt} \vec{e}_x$$

Le vecteur rotation du solide est :

$$\vec{\omega}(\Sigma_1/\mathcal{R}) = \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_z$$

Puisque  $I_2$  est fixe dans  $\mathcal{R}$  la vitesse de glissement est donnée par :

$$\vec{v}_g = \vec{v}(I_1/\mathcal{R})$$

et d'après la formule de VARIGNON on a

$$\vec{v}(I_1/\mathcal{R}) = \vec{v}(C/\mathcal{R}) + \vec{IC} \wedge \vec{\omega}(\Sigma_1/\mathcal{R}) = \frac{dx_C}{dt} \vec{e}_x + R \vec{e}_y \wedge \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_z$$

D'où la vitesse de glissement

$$\vec{v}_g = \frac{dx_C}{dt} \vec{e}_x + R \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_x$$

la condition de non glissement  $\vec{v}_g = \vec{0}$  donne :

$$\frac{dx_C}{dt} + R \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad x_C + R\varphi = \text{cte}$$

### 4.3. Roulement, pivotement

Le mouvement relatif de  $(\Sigma_1)$  par rapport à  $(\Sigma_2)$  est aussi caractérisé par le vecteur rotation

$$\vec{\omega}(\Sigma_1/\Sigma_2) = \vec{\omega}(\Sigma_1/\mathcal{R}) - \vec{\omega}(\Sigma_2/\mathcal{R})$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\vec{\omega}(\Sigma_1/\Sigma_2) = \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_\parallel$$

avec :

- $\vec{\omega}_\perp$  : la composante normale au plan  $(\Pi)$  qui correspond à la vitesse angulaire de pivotement;
- $\vec{\omega}_\parallel$  : la composante parallèle au plan  $(\Pi)$  qui correspond à la vitesse angulaire de roulement.

### 4.4. Roulement sans glissement

Il y a roulement sans glissement si :

- le vecteur rotation  $\vec{\omega}(\Sigma_1/\Sigma_2)$  est parallèle au plan tangent  $(\Pi)$ ;
- la vitesse de glissement est nulle.

## 5. COMPOSITION DES VITESSES ET DES ACCÉLÉRATIONS

Soit  $\mathcal{R}$  le référentiel d'étude appelé référentiel absolu.

$\mathcal{R}'$  un référentiel relatif, tel qu'il a un mouvement quelconque par rapport à  $\mathcal{R}$ , caractérisé par la vitesse de son origine  $\vec{v}(O'/\mathcal{R})$  et de son vecteur vitesse rotation  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .  
et soit  $M$  un point quelconque d'un solide  $(\Sigma)$ .

### 5.1. Loi de composition des vitesses

$$\underbrace{\vec{v}(M/\mathcal{R})}_{\text{vitesse absolue}} = \underbrace{\vec{v}(M/\mathcal{R}')}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{O'M}}_{\text{vitesse d'entraînement}}$$

## 5.2. Loi de composition des accélérations

$$\underbrace{\vec{a}(M/\mathcal{R})}_{\text{accélération absolue}} = \underbrace{\vec{a}(M/\mathcal{R}')}_{\text{accélération relative}} + \underbrace{\vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})}_{\text{accélération d'entraînement}=\vec{a}_e} + \underbrace{2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}')}_{\text{accélération de CORIOLIS}=\vec{a}_c}$$

## 5.3. Composition des vecteurs rotations

On a la relation entre les vecteurs rotation du système  $(\Sigma)$  dans  $R$  et dans  $R'$  qui est la suivante :

$$\vec{\omega}(\Sigma/R) = \vec{\omega}(\Sigma/R') + \vec{\Omega}(R'/R)$$

## chapitre 4

# Action de contact entre solides

### 1. TORSEUR DES ACTIONS DE CONTACT

#### 1.1. Frottement de glissement

Considérons deux solides en mouvement et qui sont en contact (figure 1).

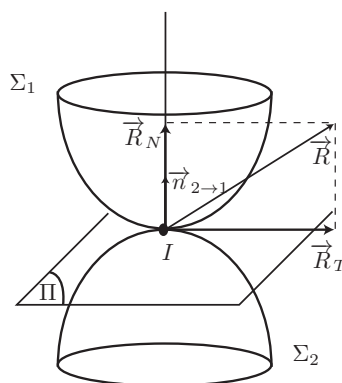


Figure 1:

L'action de contact exercée par  $(\Sigma_2)$  sur  $(\Sigma_1)$  est définie par le torseur d'éléments de réduction :

$$\begin{cases} \text{Résultante :} & \vec{R}(\Sigma_2/\Sigma_1) \\ \text{Moment au point de contact :} & \vec{\mathcal{M}}_I(\Sigma_2/\Sigma_1) \end{cases}$$

On peut décomposer la résultante en une composante normale  $\vec{R}_N$  au plan tangent  $(\Pi)$  et une composante tangentielle  $\vec{R}_T$  au plan  $(\Pi)$ .

$$\vec{R}(\Sigma_2/\Sigma_1) = \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

- La composante normale  $\vec{R}_N$  s'oppose à la pénétration d'un solide dans l'autre d'où la condition

$$\vec{R}_N \cdot \vec{n}_{2 \rightarrow 1} \geq 0$$

$\vec{n}_{2 \rightarrow 1}$  la normale dirigée de  $(\Sigma_2)$  vers  $(\Sigma_1)$ .

- La composante tangentielle  $\vec{R}_T$  s'oppose à un éventuel glissement de  $\Sigma_1$  sur  $\Sigma_2$ , il s'agit du *frottement de glissement*.

#### 1.2. Approximation du contact rigoureusement ponctuel

Malgré que le contact n'est pas rigoureusement ponctuel, on suppose qu'il l'est dans un point  $I$ . Alors le moment des actions de contact, dans l'approximation du contact ponctuel, est nul :

$$\vec{\mathcal{M}}_I = \vec{0}$$

**Conclusion :**

L'action de contact dans l'approximation du contact ponctuel est un glisseur de résultante  $\vec{R}$  appliquée en  $I$ .

**2. LOIS DE COULOMB DU FROTTEMENT****2.1. Cas de non glissement**  $\vec{v}_g = \vec{0}$ 

On note ici  $\vec{v}_g = \vec{v}_g(\Sigma_1/\Sigma_2)$ .

Lorsque  $(\Sigma_1)$  ne glisse pas sur  $(\Sigma_2)$  c'est-à-dire  $\vec{v}_g = \vec{0}$  on a :

$$\|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\|$$

Avec  $f_s$  est un nombre positif sans dimension qui caractérise le contact entre les solides appelé coefficient de frottement statique.

On peut exprimer la loi de frottement sous forme géométrique :

$$\tan \alpha = \frac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|} \leq f_s$$

on peut déduire que dans le cas de non glissement, la résultante des actions de contact est comprise à l'intérieur du cône de sommet  $I$  d'axe  $\vec{n}_{2 \rightarrow 1}$  et de demi-angle au sommet  $\alpha_s = \arctan f_s$  (figure 2).

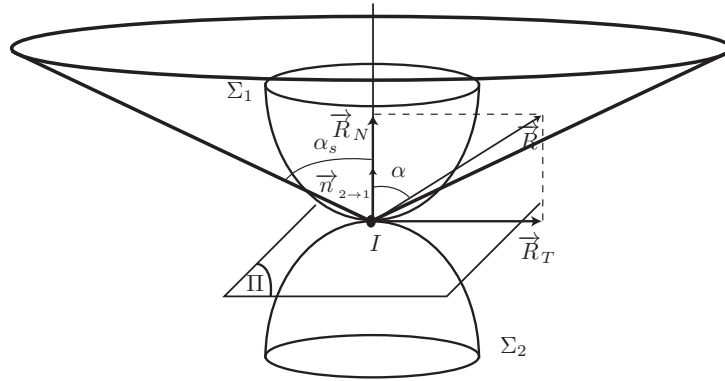


Figure 2: Cône de frottement, cas de non glissement

Ce cône est appelé *cône de frottement statique*.

**2.2. Cas du glissement**  $\vec{v}_g \neq \vec{0}$ 

Lorsque  $(\Sigma_1)$  glisse sur  $(\Sigma_2)$  c'est-à-dire  $\vec{v}_g \neq \vec{0}$  les lois de COULOMB s'écrivent :

- $\vec{R}_T$  et  $\vec{v}_g$  sont colinéaires et de sens opposés :

$$\vec{R}_T \wedge \vec{v}_g = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{R}_T \cdot \vec{v}_g < 0$$

- les normes de  $\vec{R}_T$  et  $\vec{R}_N$  sont reliées par :

$$\|\vec{R}\|_T = f_c \|\vec{R}_N\|$$

Avec  $f_c$  est un nombre positif sans dimension qui caractérise le contact entre les solides appelé coefficient de frottement cinétique ou dynamique .

Souvent on prend  $f_c \simeq f_s = f$

Lorsqu'il y a glissement la résultante des actions de contact est sur le cône de frottement cinétique d'axe  $\vec{n}_{2 \rightarrow 1}$  et demi-angle au sommet  $\alpha_c = \arctan f_c$  (figure 3).



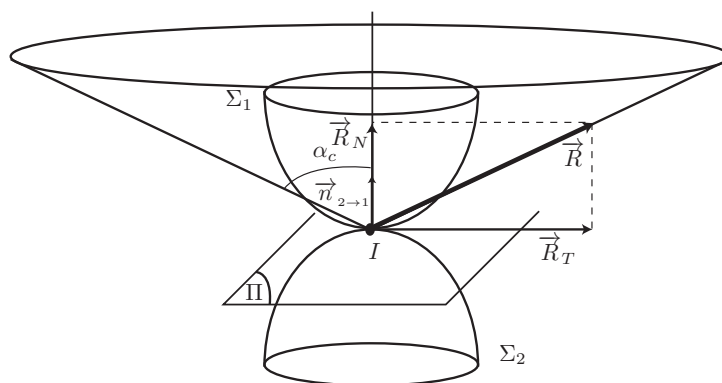


Figure 3: Cône de frottement, cas du glissement

### 2.3. Ordre de grandeur

| Nature du contact       | coefficient de frottement $f$ |
|-------------------------|-------------------------------|
| bois bois               | 0.30 à 0.50                   |
| acier sur acier à sec   | 0.15 à 0.20                   |
| pneu sur route sèche    | 0.7                           |
| pneu sur route mouillée | 0.1                           |

**Remarque :**

Lorsqu'il n'y a pas de frottement ( $f_s = f_c = 0$ ), la résultante des actions de contact est normale au plan tangent ( $\Pi$ ). Dans ce cas il a obligatoirement glissement.

## 3. PUISSANCE DES ACTIONS DE CONTACT

On se place toujours dans l'approximation du contact ponctuel  $\vec{M}_I = \vec{0}$ .

La puissance de la force  $\vec{R}(\Sigma_2/\Sigma_1)$  appliquée par  $\Sigma_2$  sur  $\Sigma_1$  dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  est :

$$\mathcal{P}_2 = \vec{R}(\Sigma_2/\Sigma_1) \cdot \vec{v}(I_1/\mathcal{R})$$

La puissance de la force  $\vec{R}(\Sigma_1/\Sigma_2)$  appliquée par  $\Sigma_1$  sur  $\Sigma_2$  dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  est :

$$\mathcal{P}_1 = \vec{R}(\Sigma_1/\Sigma_2) \cdot \vec{v}(I_2/\mathcal{R})$$

d'où la puissance totale des actions de contact :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \vec{R}(\Sigma_1/\Sigma_2) \cdot \vec{v}(I_2/\mathcal{R}) + \vec{R}(\Sigma_2/\Sigma_1) \cdot \vec{v}(I_1/\mathcal{R})$$

D'après le principe de l'action et de la réaction on a  $\vec{R}(\Sigma_1/\Sigma_2) = -\vec{R}(\Sigma_2/\Sigma_1)$  d'où

$$\mathcal{P} = \vec{R}(\Sigma_2/\Sigma_1) \cdot [\vec{v}(I_1/\mathcal{R}) - \vec{v}(I_2/\mathcal{R})] = \vec{R}(\Sigma_2/\Sigma_1) \cdot \vec{v}_g(\Sigma_1/\Sigma_2)$$

On a  $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$

or  $\vec{v}_g$  appartient au plan tangent ( $\Pi$ ) et  $\vec{R}_N$  est normale à ce plan alors la puissance totale des actions de contact est donnée par :

$$\mathcal{P} = \vec{R}_T(\Sigma_2/\Sigma_1) \cdot \vec{v}_g(\Sigma_1/\Sigma_2)$$

**Remarque :**

- La puissance des actions de contact est dissipative car  $\mathcal{P} \leq 0$  (lois de COULOMB).
- $\mathcal{P}$  est nulle si on n'a pas de glissement  $\vec{v}_g = \vec{0}$  ou si on n'a pas de frottement  $\vec{R}_T = \vec{0}$ .
- Dans le cas d'un contact non ponctuel on a :

$$\mathcal{P} = \vec{R}_T \cdot \vec{v}_g(\Sigma_1/\Sigma_2) + \vec{M}_I \cdot \vec{\omega}(\Sigma_1/\Sigma_2)$$

## 4. NOTION DE LIAISON PARFAITE

### 4.1. Définition

Deux solides sont liés entre eux lorsqu'ils ont des surfaces en contact de telle sorte que seuls quelques mouvements sont possibles.

Une liaison entre deux solides est dite parfaite lorsque les actions mécaniques de liaison ont une puissance totale nulle.

### 4.2. Liaison rotule parfaite

Une liaison est dite rotule si les mouvements possibles sont des rotations autour d'un point fixe dans le référentiel d'étude (schématisation sur la figure 4).

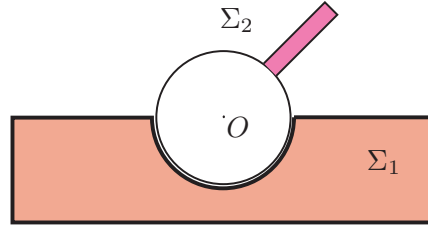


Figure 4: Schématisation d'une liaison rotule

$$\mathcal{P}(\text{liaison}) = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\omega}(\Sigma_2/\Sigma_1)$$

Dans le cas d'une liaison parfaite on a  $\mathcal{P} = 0$  alors  $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0}$ .

### 4.3. Liaison pivot parfaite

On appelle une liaison pivot, une liaison permettant uniquement le mouvement de rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  (schématisation figure 5).

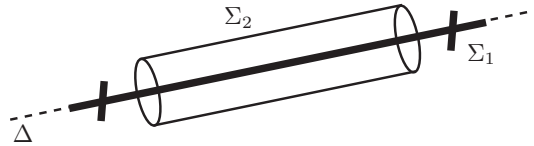


Figure 5: Schématisation d'une liaison pivot

$$\mathcal{P}(\text{liaison}) = \mathcal{M}_\Delta \omega$$

Dans le cas d'une liaison parfaite  $\mathcal{P} = 0$  donc  $\mathcal{M}_\Delta = 0$  d'où on déduit

$$\vec{\mathcal{M}}_O \perp \Delta$$

## chapitre 5

# Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe

### 1. MOMENT CINÉTIQUE D'UN SOLIDE

#### 1.1. Moment d'inertie

Soient :

$\Sigma$  un solide

$\Delta$  un axe

$P$  un point quelconque de  $\Sigma$

$H$  la projection orthogonale de  $P$  sur  $\Delta$  (figure 1).

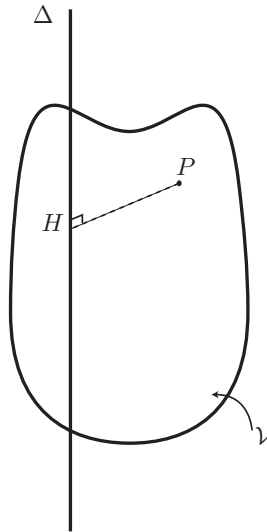


Figure 1:

Le moment d'inertie de  $(\Sigma)$  par rapport à l'axe  $\Delta$  est défini par :

$$J_{\Delta} = \iiint_{P \in \Sigma} PH^2 dm(P) = \iiint_{P \in \Sigma} r^2 dm$$

$J_{\Delta}$  s'exprime dans le S.I des unités en  $\text{kg.m}^2$  et il est toujours positif.

**Remarque :**

Dans le cas d'un système discrets de  $N$  points matériels le moment d'inertie est défini par :

$$J_{\Delta} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \quad \text{avec} \quad r_i = P_i H_i$$

## 1.2. Théorème d'Huygens

Soient  $\Delta$  un axe quelconque et  $\Delta_G$  l'axe parallèle à  $\Delta$  et passant par le centre de masse  $G$  du système (figure 2).

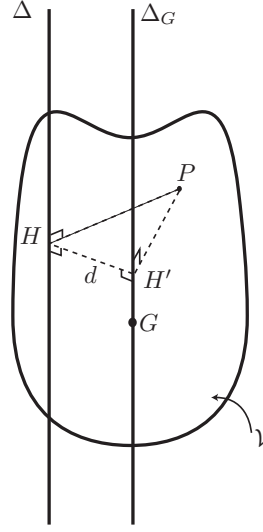


Figure 2:

La relation entre le moment d'inertie par rapport à  $\Delta$  et celui par rapport à  $\Delta_G$  est donnée par le théorème de HUYGENS :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + md^2$$

avec  $d$  la distance entre  $\Delta$  et  $\Delta_G$ .

En effet,

Soit  $H$  et  $H'$  respectivement les projections orthogonales de  $P$  sur  $\Delta$  et sur  $\Delta_G$  (figure 2).

On a

$$J_{\Delta} = \iiint_{P \in V} \overrightarrow{HP}^2 dm(P) = \iiint_{P \in V} (\overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'P})^2 dm(P)$$

d'où

$$J_{\Delta} = \iiint_{P \in V} HH'^2 dm(P) + \iiint_{P \in V} H'P^2 dm(P) + \iiint_{P \in V} 2\overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{H'P} dm(P)$$

L'intégration porte sur le point  $P$  et d'après la définition de  $J_{\Delta_G}$  alors

$$J_{\Delta} = md^2 + J_{\Delta_G} + 2\overrightarrow{HH'} \cdot \iiint_{P \in V} \overrightarrow{H'P} dm(P)$$

Or on sait que

$$m\overrightarrow{H'G} = \iiint_{P \in V} \overrightarrow{H'P} dm(P)$$

Alors

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + md^2 + 2\overrightarrow{HH'} \cdot m\overrightarrow{H'G}$$

et puisque  $\overrightarrow{HH'} \perp \overrightarrow{H'G}$  alors on a le théorème de HUYGENS

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + md^2$$

## 1.3. Moment cinétique d'un solide ayant un point fixe

### 1.3.1. Expression générale

Soit  $\Delta$  un axe fixe autour duquel le solide  $\Sigma$  tourne.

$A$  un point quelconque de  $\Delta$ .

$\vec{u}_{\Delta}$  vecteur unitaire directeur de l'axe  $\Delta$  (figure 3).

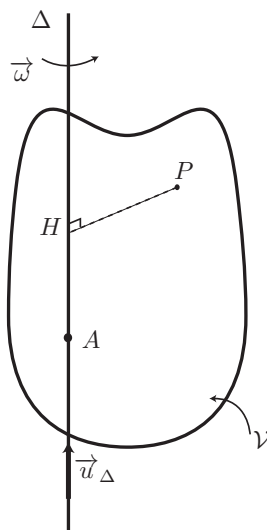


Figure 3:

Par définition le moment cinétique de  $(\Sigma)$  en  $A$  fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm(P)$$

D'après la formule de VARIGNON on a

$$\vec{v}(P/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R})$$

Or  $A$  fixe dans  $\mathcal{R}$  alors

$$\vec{v}(P/\mathcal{R}) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R})$$

d'où

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{AP} \wedge [\overrightarrow{PA} \wedge \vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R})] dm(P)$$

On sait que  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = -(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} + (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b}$  Alors

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = - \iiint_{P \in \mathcal{V}} (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PA}) \vec{\omega} dm(P) + \iiint_{P \in \mathcal{V}} (\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{PA} dm(P)$$

soit

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \left[ \iiint_{P \in \mathcal{V}} AP^2 dm(P) \right] \vec{\omega} - \iiint_{P \in \mathcal{V}} (\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AP} dm(P)$$

On a

$$\overrightarrow{AP}^2 = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HP})^2 = AH^2 + HP^2 \quad \text{car} \quad \overrightarrow{HP} \perp \overrightarrow{AH}$$

et

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\omega} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{\omega} + \overrightarrow{HP} \cdot \vec{\omega}$$

$$\text{Or } \vec{\omega} = \omega \vec{u}_\Delta \quad \text{et} \quad \overrightarrow{HP} \perp \vec{u}_\Delta \text{ alors}$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\omega} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{\omega} = \overrightarrow{AH} \omega$$

d'où

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} AH^2 dm(P) \vec{\omega} + \iiint_{P \in \mathcal{V}} HP^2 dm(P) \vec{\omega} - \iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{AH} \omega \overrightarrow{AP} dm(P)$$

ainsi

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} AH^2 dm(P) \vec{\omega} + \iiint_{P \in \mathcal{V}} HP^2 dm(P) \vec{\omega} - \iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{AH} \omega \overrightarrow{AP} dm(P) - \iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{AH} \omega \overrightarrow{HP} dm(P)$$

et puisque  $\omega \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH}\omega$  alors  $\overrightarrow{AH}\omega \overrightarrow{AH} = AH^2\omega$  d'où

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} HP^2 dm(P) \vec{\omega} - \iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{AH}\omega \overrightarrow{HP} dm(P)$$

ainsi

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = J_\Delta \vec{\omega} - \omega \iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{AH} \overrightarrow{HP} dm(P) = \vec{L}_{A\parallel} + \vec{L}_{A\perp}$$

◇  $\vec{L}_{A\parallel} = J_\Delta \vec{\omega}$  la composante du moment cinétique parallèle à  $\Delta$

◇  $\vec{L}_{A\perp} = \omega \iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{AH} \overrightarrow{HP} dm(P)$  la composante du moment cinétique normale à  $\Delta$

### 1.3.2. Cas particuliers intéressants

- Solide **plan perpendiculaire** à  $\Delta$  et **passant par**  $A$  (figure 4)

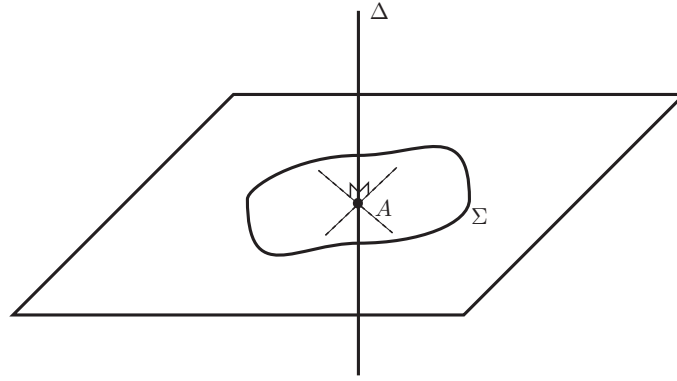


Figure 4:

dans ce cas le moment cinétique en  $A$  s'écrit:

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = J_\Delta \vec{\omega}$$

car  $A \equiv H$  d'où  $\vec{L}_{A\perp} = \vec{0}$ .

- $\Delta$  est un **axe de symétrie** du solide (figure 5).

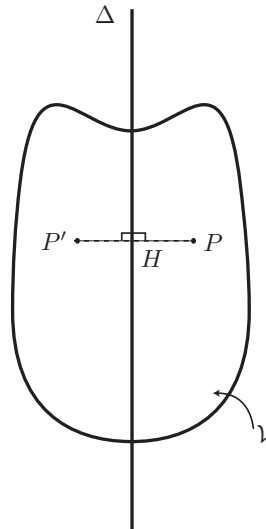


Figure 5:

dans ce cas le moment cinétique en  $A$  s'écrit:

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = J_\Delta \vec{\omega}$$

car les termes  $\overrightarrow{PH}$  et  $\overrightarrow{P'H}$  se compensent dans l'intégrale de  $\vec{L}_{A_\perp}$  ce qui annule ce terme ( $P$  et  $P'$  deux points symétrique par rapport à  $\Delta$ ).

### 1.3.3. Moment cinétique par rapport à l'axe $\Delta$ fixe

Le moment cinétique par rapport à l'axe fixe  $\Delta$  est

$$L_\Delta(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) \cdot \vec{u}_\Delta = J_\Delta \vec{\omega} \cdot \vec{u}_\Delta$$

car  $\vec{L}_{A_\perp} \cdot \vec{u}_\Delta = 0$   
d'où

$$L_\Delta(\Sigma/\mathcal{R}) = J_\Delta \omega$$

## 2. ENÉRGÉTIQUE DU SOLIDE

### 2.1. Energie cinétique

#### 2.1.1. Expression générale

L'énergie cinétique du solide est donnée par

$$E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{1}{2} v^2(P/\mathcal{R}) dm(P) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{1}{2} \vec{v}(P/\mathcal{R}) \cdot \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm(P)$$

D'après la formule de VARIGNON on a

$$\vec{v}(P/\mathcal{R}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R})$$

d'où

$$E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{v}(A/\mathcal{R}) \cdot \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm(P) + \frac{1}{2} \iiint_{P \in \mathcal{V}} [\overrightarrow{PA} \wedge \vec{\omega}] \cdot \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm(P)$$

Puisque l'intégration porte sur le point  $P$  alors

$$E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \vec{v}(A/\mathcal{R}) \cdot \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm(P) + \frac{1}{2} \iiint_{P \in \mathcal{V}} [\overrightarrow{PA} \wedge \vec{\omega}] \cdot \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm(P)$$

Or

$$\begin{aligned} \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm(P) &= m \vec{v}(G/\mathcal{R}) = \vec{P}(\Sigma/\vec{R}) \\ (\overrightarrow{PA} \wedge \vec{\omega}) \cdot \vec{v}(P/\mathcal{R}) &= (\vec{v}(P/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{PA}) \cdot \vec{\omega} = [\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R})] \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

d'où

$$E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \vec{v}(A/\mathcal{R}) \cdot \vec{P}(\Sigma/\mathcal{R}) + \frac{1}{2} \left[ \iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm(P) \right] \cdot \vec{\omega}$$

Or

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm(P)$$

d'où l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \left[ \vec{v}(A/\mathcal{R}) \cdot \vec{P}(\Sigma/\mathcal{R}) + \vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) \cdot \vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R}) \right]$$

#### Conclusion :

L'énergie cinétique d'un solide de mouvement quelconque est égale au comoment des torseurs cinétique et cinématique.

### 2.1.2. Cas particuliers

#### 2.1.2.a. Solide en translation

Dans ce cas on a  $\vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{0}$  et  $\vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{v}(G/\mathcal{R})$  d'où

$$E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}mv^2(G/\mathcal{R})$$

#### 2.1.2.b. Solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta$

on prend  $A$  un point de  $\Delta$  donc  $A$  fixe.

Or

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}).\vec{\omega} = \left[ \vec{L}_{A\parallel}(\Sigma/\mathcal{R}) + \vec{L}_{A\perp}(\Sigma/\mathcal{R}) \right].\omega\vec{u}_\Delta = \vec{L}_{A\parallel}(\Sigma/\mathcal{R}).\omega\vec{u}_\Delta = J_\Delta\omega^2$$

d'où l'énergie cinétique d'un solide de forme quelconque en rotation autour d'un axe fixe :

$$E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2(\Sigma/\mathcal{R})$$

## 2.2. Puissance

### 2.2.1. Expression générale

On s'intéresse au cas d'une action volumique qui agit sur tous les points du solide.

Soit  $\vec{f}_v = \frac{d\vec{f}(P)}{d\tau}$  la densité volumique de la force.

La puissance de l'action est donnée par

$$\mathcal{P}(\text{action})_{/\mathcal{R}} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} d\vec{f}(P). \vec{v}(P/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{f}_v(P). \vec{v}(P/\mathcal{R}) d\tau(P)$$

Soit  $A$  un point de  $\Sigma$  alors

$$\mathcal{P}(\text{action})_{/\mathcal{R}} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{f}_v(P). \left[ \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \vec{PA} \wedge \vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R}) \right] d\tau(P)$$

d'où

$$\mathcal{P}(\text{action})_{/\mathcal{R}} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{f}_v(P). \vec{v}(A/\mathcal{R}) d\tau(P) + \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{f}_v(P). \left[ \vec{PA} \wedge \vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R}) \right] d\tau(P)$$

ainsi

$$\mathcal{P}(\text{action})_{/\mathcal{R}} = \left[ \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{f}_v(P) d\tau(P) \right]. \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \left[ \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{f}_v(P) \wedge \vec{PA} d\tau(P) \right]. \vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R})$$

on a

$$\iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{f}_v(P) d\tau(P) = \vec{F}$$

et

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{AP} \wedge \vec{f}_v(P) d\tau(P) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \vec{f}_v(P) \wedge \vec{PA} d\tau(P)$$

d'où la puissance d'une action, de résultante  $\vec{F}$  et de moment en  $A$  :  $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$ , est

$$\mathcal{P}(\text{action})_{/\mathcal{R}} = \vec{F}. \vec{v}(A/\mathcal{R}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}). \vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R})$$

#### Conclusion :

La puissance d'une action qui agit sur un solide est égale au comoment du torseur de cette action et le torseur cinématique.

### 2.2.2. Cas particuliers

#### 2.2.2.a. Solide en translation

Dans le cas d'un solide en translation la puissance s'écrit

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}. \vec{v}(G/\mathcal{R})$$



**2.2.2.b. Solide en rotation autour d'un axe fixe**

Dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe la puissance s'écrit

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}(\Sigma/R) = \vec{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{F}) \omega \quad ; \quad A \in \Delta$$

**2.2.2.c. Force appliquée en A**

Pour une force appliquée en A on a  $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \vec{0}$  d'où

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(A/R)$$

**2.2.2.d. Cas d'un couple**

Considérons le cas d'un couple de moment  $\vec{\Gamma}$ .

$$\mathcal{P}(\text{couple}) = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega}$$

**2.2.2.e. Puissance des actions intérieures**

pour les forces intérieures on a  $\vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}$  et  $\vec{\mathcal{M}}_{A_{\text{int}}} = \vec{0}$  d'où la puissance des actions intérieures d'un **solide** est nulle :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = 0 \quad \text{pour un solide}$$

### 3. EXEMPLE D'ÉTUDE DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE DE DIRECTION FIXE



# 6

## Résumé de mécanique du solide

### 1. CINÉTIQUE D'UN SYSTÈME MATÉRIEL

#### 1.1. Centre de masse ou centre d'inertie

Le centre d'inertie ou de masse d'un système de points matériels de masse  $m$  est le point  $G$  défini par :

- Système discret :

$$m\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OP_i} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$$

- Système continu :

$$m\overrightarrow{OG} = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{OP} dm_P = \quad \text{ou} \quad \iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{GP} dm_P = \vec{0}$$

#### 1.2. Quantité de mouvement ou résultante cinétique

- Système discret

$$\vec{P}(\Sigma/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}(P_i/\mathcal{R}) = m \vec{v}(G/\mathcal{R})$$

- Système continu

$$\vec{P}(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm_P = m \vec{v}(G/\mathcal{R})$$

#### 1.3. Moment cinétique

Le moment cinétique d'un système  $(\Sigma)$  en un point quelconque  $A$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  noté  $\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R})$  est défini par :

- Pour un système discret :

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AP_i} \wedge m_i \vec{v}(P_i/\mathcal{R})$$

- Pour un système continu :

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R}) dm_P$$

Le moment cinétique vérifie la propriété du changement de point :

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{L}_B(\Sigma/\mathcal{R}) + \overrightarrow{AB} \wedge m \vec{v}_G$$

Le moment cinétique d'un système  $(\Sigma)$  par rapport à l'axe orienté  $\Delta$  est :

$$L_{\Delta}(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) \cdot \vec{u}_{\Delta}$$

$A$  est un point quelconque et appartenant à  $\Delta$ .

$\vec{u}_{\Delta}$  est un vecteur unitaire directeur de  $\Delta$ .

## 1.4. Énergie cinétique

- Pour un système discret :

$$E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v^2(P_i/\mathcal{R})$$

- Pour un système continu :

$$E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{1}{2} v^2(P/\mathcal{R}) dm_P$$

## 1.5. Théorèmes de Kœnig

### 1.5.1. Référentiel barycentrique

Soit un système  $(\Sigma)$  en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

On définit le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  comme étant le référentiel ayant les caractéristiques :

- $\mathcal{R}^*$  est en mouvement de translation par rapport à  $\mathcal{R}$  ( $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}^*} = \vec{0}$ ).
- le centre d'inertie  $G$  de  $(\Sigma)$  est fixe dans  $\mathcal{R}^*$ .

Les grandeurs dans  $\mathcal{R}^*$  seront notées avec  $\star$ .

### 1.5.2. Théorème de Kœnig pour le moment cinétique

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{L}_A^*(\Sigma) + \vec{AG} \wedge m \vec{v}(G/\mathcal{R})$$

### 1.5.3. Théorème de Kœnig pour l'énergie cinétique

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} m v_G^2$$

## 1.6. Notion de Torseur

### 1.6.1. Définition

On appelle torseur  $\tau$  l'ensemble d'un champ antisymétrique  $\vec{\mathcal{M}}_A$  et sa résultante  $\vec{R}$ . On le note  $[\vec{R}, \vec{\mathcal{M}}_A]$ . qui vérifient la propriété du changement de point :

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{\mathcal{M}}_B(\Sigma/\mathcal{R}) + \vec{AB} \wedge \vec{R}$$

### 1.6.2. Torseur cinétique

$$\tau_c \left\{ \begin{array}{ll} \text{Résultante cinétique} & : \vec{P} = m \vec{v}_G \\ \text{Moment cinétique} & : \vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \sum_i \vec{AP}_i \wedge m_i \vec{v}(P_i/\mathcal{R}) \end{array} \right.$$

### 1.6.3. torseur dynamique

on définit le torseur dynamique  $\tau_D$   $[\vec{S}, \vec{D}_A]$  par ses éléments de réduction :

$$\tau_D \left\{ \begin{array}{ll} \text{Résultante dynamique} & : \vec{S} = m \vec{a}_G \\ \text{Moment dynamique} & : \vec{D}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \sum_i \vec{AP}_i \wedge m_i \vec{a}(P_i/\mathcal{R}) \end{array} \right.$$

## 2. DYNAMIQUE D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS

### 2.1. Torseur des actions mécaniques

Le torseur des actions mécaniques exercées sur un système  $(\Sigma)$  est donné par ses éléments de réduction en un point  $A$  :

$$\tau_f \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \sum_i \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i} \\ \vec{M}_A = \sum_i A\vec{P}_i \wedge \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i} \end{array} \right.$$

Les actions intérieures ont une résultante nulle  $\vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}$  et un moment nul  $\vec{M}_A \vec{F}_{\text{int}} = \vec{0}$

### 2.2. Théorème de la résultante cinétique

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$

$$\frac{d\vec{P}(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} / \mathcal{R} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Qui s'écrit pour un système fermé sous la forme du théorème du centre de masse :

$$m \frac{d\vec{v}(G/\mathcal{R})}{dt} = m \vec{a}(G/\mathcal{R}) = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système *isolé* ou *pseudo-isolé* se conserve.

### 2.3. Théorème du moment cinétique

#### 2.3.1. TMC en un point fixe $A$

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$

$$\frac{d\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} / \mathcal{R} = \vec{M}_A(\vec{F}_{\text{ext}})$$

#### 2.3.2. TMC en $G$

$$\frac{d\vec{L}_G(\Sigma/\mathcal{R})}{dt} / \mathcal{R} = \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{ext}})$$

#### 2.3.3. TMC dans le référentiel barycentrique

$$\frac{d\vec{L}^*(\Sigma)}{dt} / \mathcal{R}^* = \vec{M}_G(\vec{F}_{\text{ext}})$$

#### 2.3.4. TMC par rapport à un axe fixe $\Delta$

$$\frac{dL_\Delta(\Sigma/R)}{dt} / \mathcal{R} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}})$$

#### 2.3.5. Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique d'un système *isolé* dans un référentiel galiléen se conserve.

### 2.4. Principe fondamental de la dynamique sous forme torsorielle

Dans un référentiel galiléen le P.F.D appliqué à un système matériel  $(\Sigma)$  s'écrit :

$$\frac{d[\vec{P}, \vec{L}_A]}{dt} / \mathcal{R} = [\vec{F}_{\text{ext}}, \vec{M}_A(\vec{F}_{\text{ext}})]$$

Avec  $A$  un point fixe dans  $\mathcal{R}$ .

ou aussi on peut dire qu'il y a égalité entre le torseur  $\tau_D$  et le torseur des actions extérieures appliquées sur le système.

## 2.5. Énergétique d'un système de points matériels

### 2.5.1. Puissance

La puissance par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  d'une action mécanique qui agit sur  $(\Sigma)$  est :

$$\mathcal{P} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

### 2.5.2. Travail

Le travail élémentaire d'une action mécanique par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est :

$$\delta W_{/\mathcal{R}}(\text{action}) = \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\text{action})dt = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i(P_i) dt = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{OP}_i$$

**Remarque :**

- Dans le cas d'un système continu on a

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\text{action}) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} d\vec{f}(P) \cdot \vec{v}(P)$$

$$\delta W = \iiint_{P \in \mathcal{V}} d\vec{f}(P) \cdot d\vec{OP}$$

- Malgré que la résultante des actions intérieures est nulle, la puissance des actions intérieures à un système de points n'est pas nulle et indépendante du référentiel d'étude. Par contre la puissance des actions intérieures à un solide indéformable est nulle.

### 2.5.3. Énergie potentielle

Une action mécanique (extérieure ou intérieure) est dite conservative dans un référentiel  $\mathcal{R}$  si son travail ne dépend pas du chemin suivi. dans ce cas on dit que la force dérive d'une énergie potentielle et on a

$$dE_p = -\delta W(\text{action})$$

$E_p$  est définie à une constante près.

L'énergie potentielle totale est la somme des énergies potentielles de toutes les actions conservatives intérieures et extérieures.

### 2.5.4. Théorème de l'énergie cinétique

$$dE_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \delta W_{\text{int}/\mathcal{R}} + \delta W_{\text{ext}/\mathcal{R}}$$

Entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  le TEC s'écrit :

$$\Delta E_c = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}$$

$t_1 \rightarrow t_2 \quad t_1 \rightarrow t_2 \quad t_1 \rightarrow t_2$

- Théorème de la puissance cinétique est :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

### 2.5.5. Théorème de l'énergie mécanique

$$dE_m(\Sigma/\mathcal{R}) = \delta W_{/\mathcal{R}}(\vec{F}^{nc})$$

ou pour un déplacement fini :

$$\Delta E_m = W_{t_1 \rightarrow t_2}(\vec{F}^{nc})$$

- Théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}^{nc})$$

**2.5.6. Conservation de l'énergie mécanique**

Dans un référentiel galiléen tel que le travail des actions non conservatives appliquées sur un système est nul, l'énergie mécanique de ce système est conservée, soit :

$$W(\vec{F}^{\text{nc}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_m = \text{cte}$$

L'équation  $E_m = \text{cte}$  est appelée intégrale première du mouvement.

### 3. CINÉMATIQUE DU SOLIDE ET DES SOLIDES EN CONTACT

#### 3.1. Vecteur rotation instantanée

Pour tout vecteur  $\overrightarrow{PQ}$  du solide ( $\Sigma$ ) on a

$$\frac{d\overrightarrow{PQ}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

S'il existe un vecteur  $\vec{u}$  fixe lié au solide alors le vecteur rotation  $\vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R})$  est colinéaire à  $\vec{u}$ , soit  $\varphi$  l'angle de rotation autour de  $\vec{u}_\Delta$  alors on a :

$$\vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R}) = \omega \vec{u} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\Delta$$

#### 3.2. Torseur cinématique

$$\tau_v \left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R}) \\ \text{vitesse en un point du solide } \vec{v}_A \end{array} \right.$$

On a la formule du changement de point pour la vitesse appelée formule de VARIGNON : pour deux points  $A$  et  $B$  quelconque d'un solide indéformable :

$$\vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{v}(B/\mathcal{R}) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R})$$

#### 3.3. Vitesse de glissement

Soient  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux solides en contact.

La vitesse de glissement de ( $\Sigma_1$ ) par rapport à ( $\Sigma_2$ ) est définie par :

$$\vec{v}_g(\Sigma_1/\Sigma_2) = \vec{v}(I \in \Sigma_1/\mathcal{R}) - \vec{v}(I \in \Sigma_2/\mathcal{R})$$

$\vec{v}_g$  est indépendante du référentiel.

$$\vec{v}_g(\Sigma_1/\Sigma_2) = \vec{v}(I_1/\Sigma_2)$$

- La vitesse de glissement appartient au plan ( $\Pi$ ) tangent à ( $\Sigma_1$ ) et ( $\Sigma_2$ ) en  $I$ .
- on dit qu'il y a mouvement sans glissement si  $\vec{v}_g(\Sigma_1/\Sigma_2) = \vec{0}$ .

#### 3.4. Roulement, pivotement

$\vec{\omega}$  peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{\omega}(\Sigma_1/\Sigma_2) = \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_\parallel$$

avec :

- $\vec{\omega}_\perp$  : la composante normale au plan ( $\Pi$ ) qui correspond à la vitesse angulaire de pivotement;
- $\vec{\omega}_\parallel$  : la composante parallèle au plan ( $\Pi$ ) qui correspond à la vitesse angulaire de roulement.

On dit qu'il y a roulement sans glissement si :

- le vecteur rotation  $\vec{\omega}(\Sigma_1/\Sigma_2)$  est parallèle au plan tangent ( $\Pi$ );
- la vitesse de glissement est nulle.



### 3.5. Composition des vitesses et des accélérations

$$\underbrace{\vec{v}(M/\mathcal{R})}_{\text{vitesse absolue}} = \underbrace{\vec{v}(M/\mathcal{R}')}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\text{vitesse d'entraînement}}$$

$$\underbrace{\vec{a}(M/\mathcal{R})}_{\text{accélération absolue}} = \underbrace{\vec{a}(M/\mathcal{R}')}_{\text{accélération relative}} + \underbrace{\vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})}_{\text{accélération d'entraînement}=\vec{a}_e} + \underbrace{2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}')}_{\text{accélération de CORIOLIS}=\vec{a}_c}$$

$$\vec{\omega}(\Sigma/R) = \vec{\omega}(\Sigma/R') + \vec{\Omega}(R'/R)$$

## 4. ACTION DE CONTACT ENTRE SOLIDES

L'action de contact exercée par  $(\Sigma_2)$  sur  $(\Sigma_1)$  est définie par le torseur d'éléments de réduction :

$$\begin{cases} \text{Résultante :} & \vec{R}(\Sigma_2/\Sigma_1) \\ \text{Moment au point de contact :} & \vec{M}_I(\Sigma_2/\Sigma_1) \end{cases}$$

$$\vec{R}(\Sigma_2/\Sigma_1) = \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

- La composante normale  $\vec{R}_N$  s'oppose à la pénétration d'un solide dans l'autre d'où la condition

$$\vec{R}_N \cdot \vec{n}_{2 \rightarrow 1} \geq 0$$

$\vec{n}_{2 \rightarrow 1}$  la normale dirigée de  $(\Sigma_2)$  vers  $(\Sigma_1)$ .

- La composante tangentielle  $\vec{R}_T$  s'oppose à un éventuel glissement de  $\Sigma_1$  sur  $\Sigma_2$ , il s'agit du *frottement de glissement*.

### 4.1. Lois de Coulomb du frottement

#### 4.1.1. Cas de non glissement $\vec{v}_g = \vec{0}$

On note ici  $\vec{v}_g = \vec{v}_g(\Sigma_1/\Sigma_2)$ .

$$\|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\|$$

Avec  $f_s$  coefficient de frottement statique.

#### 4.1.2. Cas du glissement $\vec{v}_g \neq \vec{0}$

Les lois de COULOMB s'écrivent :

- $\vec{R}_T$  et  $\vec{v}_g$  sont colinéaires et de sens opposés :

$$\vec{R}_T \wedge \vec{v}_g = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{R}_T \cdot \vec{v}_g < 0$$

- les normes de  $\vec{R}_T$  et  $\vec{R}_N$  sont reliées par :

$$\|\vec{R}_T\| = f_c \|\vec{R}_N\|$$

$f_c$  coefficient de frottement cinétique ou dynamique .

Souvent on prend  $f_c \simeq f_s = f$

### 4.2. Puissance des actions de contact

La puissance totale des actions de contact ponctuel :

$$\mathcal{P} = \vec{R}_T(\Sigma_2/\Sigma_1) \cdot \vec{v}_g(\Sigma_1/\Sigma_2)$$

Une liaison entre deux solides est dite parfaite lorsque les actions mécaniques de liaison ont une puissance totale nulle.

## 5. MOUVEMENT D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE

### 5.1. Moment d'inertie

Soient :

$\Sigma$  un solide

$\Delta$  un axe

$P$  un point quelconque de  $\Sigma$

$H$  la projection orthogonale de  $P$  sur  $\Delta$ .

Le moment d'inertie de  $(\Sigma)$  par rapport à l'axe  $\Delta$  est défini par :

$$J_{\Delta} = \iiint_{P \in \Sigma} PH^2 dm(P)$$

### 5.2. Théorème d'Huygens

Soient  $\Delta$  un axe quelconque et  $\Delta_G$  l'axe parallèle à  $\Delta$  et passant par le centre de masse  $G$  du système.

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + md^2$$

### 5.3. Moment cinétique d'un solide ayant un point fixe

#### 5.3.1. Expression générale

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \vec{L}_{A_{\parallel}} + \vec{L}_{A_{\perp}}$$

◇  $\vec{L}_{A_{\parallel}} = J_{\Delta} \vec{\omega}$  la composante du moment cinétique parallèle à  $\Delta$

◇  $\vec{L}_{A_{\perp}} = \omega \iiint_{P \in \Sigma} \overrightarrow{AH} \overrightarrow{HP} dm(P)$  la composante du moment cinétique normale à  $\Delta$

#### 5.3.2. Cas particuliers intéressants

- Solide plan perpendiculaire à  $\Delta$  et passant par  $A$ .

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = J_{\Delta} \vec{\omega}$$

- $\Delta$  est un axe de symétrie du solide.

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = J_{\Delta} \vec{\omega}$$

#### 5.3.3. Moment cinétique par rapport à l'axe $\Delta$ fixe

$$L_{\Delta}(\Sigma/\mathcal{R}) = J_{\Delta} \omega$$

### 5.4. Energie cinétique

#### 5.4.1. Expression générale

$$E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} \left[ \vec{v}(A/\mathcal{R}) \cdot \vec{P}(\Sigma/\mathcal{R}) + \vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) \cdot \vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R}) \right]$$

**Conclusion :**

L'énergie cinétique d'un solide de mouvement quelconque est égale au comoment des torseurs cinétique et cinématique.

### 5.4.2. Cas particuliers

#### 5.4.2.a. Solide en translation

$$E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}mv^2(G/\mathcal{R})$$

#### 5.4.2.b. Solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta$

on prend  $A$  un point de  $\Delta$  donc  $A$  fixe.

$$E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2(\Sigma/\mathcal{R})$$

## 5.5. Puissance

### 5.5.1. Expression générale

Soit un point quelconque du solide.

$$\mathcal{P}(\text{action})_{/\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{v}(A/R) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}(\Sigma/\mathcal{R})$$

#### Conclusion :

La puissance d'une action qui agit sur un solide est égale au comoment du torseur de cette action et le torseur cinématique.

### 5.5.2. Cas particuliers

#### 5.5.2.a. Solide en translation

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(G/R)$$

#### 5.5.2.b. Solide en rotation autour d'un axe fixe

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) \cdot \vec{\omega}(\Sigma/R) = \vec{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{F}) \omega \quad ; \quad A \in \Delta$$

#### 5.5.2.c. Force appliquée en $A$

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \vec{0} \text{ d'où}$$

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(A/\mathcal{R})$$

#### 5.5.2.d. Cas d'un couple

Considérons le cas d'un couple de moment  $\vec{\Gamma}$ .

$$\mathcal{P}(\text{couple}) = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega}$$

#### 5.5.2.e. Puissance des actions intérieures

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = 0 \quad \text{pour un solide}$$

# 7

## Problème : Chute d'une tartine (Mines-ponts 99)

Préoccupé dès le petit-déjeuner par un problème résistant à sa sagacité, un physicien pose distraitemment sa tartine beurrée en déséquilibre au bord de la table, côté beurré vers le haut (figure 1). La tartine tombe et atterrit sur le côté beurré, ce qui ne manque pas d'attirer l'attention du physicien. Répétant l'expérience avec méthode et circonspection, notre héros observe la répétitivité du phénomène et le modélise. Nous allons lui emboîter le pas.

Une tartine, modélisée par un parallélépipède rectangle, homogène, de dimensions suivantes : longueur  $2a$ , largeur  $2b$ , épaisseur  $2e$ , de centre d'inertie  $G$ , de masse  $m$ , est posée sur le bord d'une table dans la position schématisée sur la figure 1.

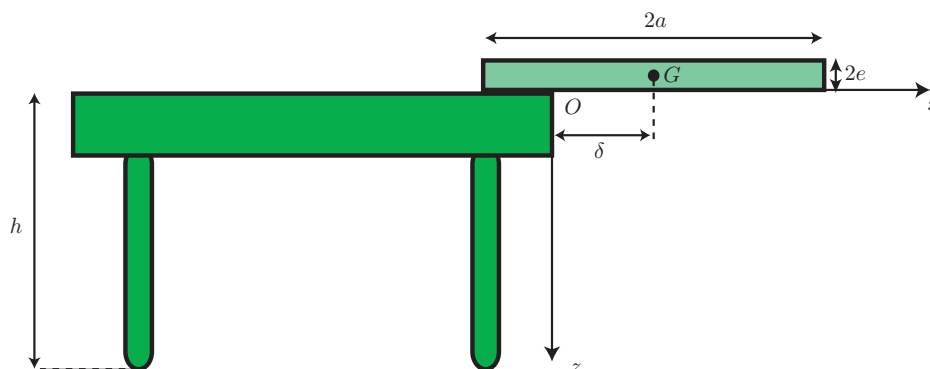


Figure 1:

Le mouvement est décrit dans le repère  $\mathcal{R}(O, x, y, z)$  direct et supposé galiléen :  $O$  est sur le bord de la table, l'axe  $Ox$  est horizontal dirigé vers l'extérieur de la table; l'axe  $Oy$  est porté par le rebord de la table et l'axe  $Oz$ , vertical, est dirigé vers le bas; **les petits côtés de la tartine sont parallèles à  $Oy$ .**

### 1. ÉTUDE DE LA ROTATION

En  $t = 0$ , la tartine est horizontale et sa vitesse est nulle et le point  $G$  se trouve dans le plan  $xOz$  décalé de  $\delta$  selon l'axe  $Ox$  par rapport à l'origine  $O$ . La tartine amorce une rotation **sans glissement** autour de l'arête  $Oy$  du bord de la table. À l'instant  $t$ , la tartine est repérée par l'angle  $\theta$  (figure 2).

On note la vitesse angulaire  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ .

Le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe  $Gy$ , parallèle à  $Oy$  et passant par  $G$ , est  $J_{Gy} = \frac{1}{3}m(a^2 + e^2)$  et celui par rapport à l'axe  $Oy$  est  $J_{Oy} = J_{Gy} + m(e^2 + \delta^2)$ .

#### 1.1. Cinématique de la première phase de rotation sans glissement

1.1.1. Exprimer le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  de la tartine en fonction de  $\frac{d\theta}{dt}$  dans la base directe  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{u})$ .

1.1.2. Exprimer les coordonnées de  $G$  dans le repère  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{u})$  sachant qu'on néglige la dimension de la tartine selon  $Oy$ .

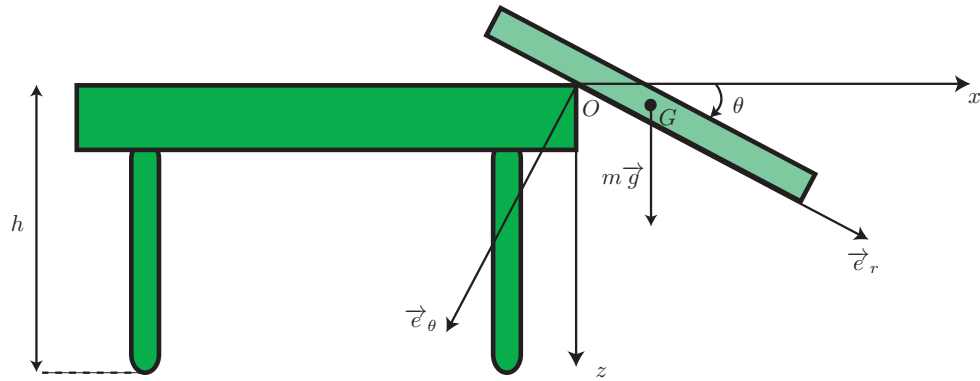


Figure 2:

1.1.3. Exprimer la vitesse  $\vec{v}_G$  de  $G$  dans cette base en fonction de  $e$ ,  $\delta$  et  $\omega$ . Dans la partie 1.4., on fera  $\delta = 0$ . Que devient dans ce cas la vitesse  $\vec{v}_G$ .

1.1.4. Exprimer l'accélération  $\vec{a}_G$  de  $G$  dans cette même base. Dans la partie 1.4., on fera  $\delta = 0$ . Que devient dans ce cas l'accélération  $\vec{a}_G$ .

## 1.2. Étude dynamique de la première phase

La réaction de la table en  $O$  est notée  $\vec{R} = T\vec{e}_r + N\vec{e}_\theta$   
 $T$  : réaction tangentielle et  $N$  : réaction normale.

1.2.1. Écrire les deux relations issues du théorème du mouvement du centre de masse dans le repère galiléen  $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ , en projection sur la base mobile  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{u})$ . On notera  $g$  l'accélération de la pesanteur. Écrire en utilisant les notations définies plus haut.

1.2.2. Écrire la relation issue du théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe. Écrire en utilisant les notations définies plus haut.

1.2.3. Écrire aussi le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique et vérifier que le résultat obtenu est identique au résultat précédent.

1.2.4. En déduire l'expression de  $\omega^2$  en fonction de  $\theta$ ,  $J_{Oy}$  et autres constantes figurant dans l'énoncé.

## 1.3. Étude énergétique de la première phase

1.3.1. Retrouver l'expression de  $\omega^2$  par une étude énergétique. Justifier avec précision l'utilisation du théorème utilisé et expliquer le calcul avec soin.

## 1.4. Approximation du léger déséquilibre

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème, on tient compte du fait que la chute de la tartine a été causée par un très léger déséquilibre. La valeur de  $\frac{\delta}{a}$  est faible : dans les circonstances courantes, ce coefficient de surplomb ne dépasse guère 0,02. **On fait donc pour simplifier  $\delta = 0$ .**

1.4.1. On posera  $\eta = \frac{e}{a}$ . Montrer que l'on a  $\omega^2 = \omega_0^2(1 - \cos \theta)$  et donner l'expression de  $\omega_0^2$  en fonction de  $\eta$ ,  $g$  et  $a$ .

## 1.5. Vérification des hypothèses pour la première phase de rotation

1.5.1. Établir les expressions de  $\frac{T}{mg}$  et  $\frac{N}{mg}$  en fonction de  $\theta$  et  $\eta$ .

1.5.2. Quel est le signe de  $\frac{N}{mg}$  pour  $\theta = 0$  ? Pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ? Commenter la signification physique.

1.5.3. Étudier le signe de  $\frac{T}{mg}$ . Commenter éventuellement.

**1.5.4.** Donner l'allure sur un même graphique des courbes représentant  $\left| \frac{T}{mg} \right|$  et  $f \left| \frac{N}{mg} \right|$  en fonction de  $\theta$ . La tartine peut-elle quitter le coin de la table sans glisser ? Justifier avec précision.

## 1.6. Deuxième phase de rotation

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème, l'épaisseur de la tartine étant "petite", la valeur de  $\eta = \frac{e}{a}$  est faible : On travaille donc pour simplifier au premier ordre en  $\eta$ . (On néglige les termes du deuxième ordre).

La tartine commence à glisser pour  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ .

**1.6.1.** Déterminer le coefficient de frottement  $f$  entre la table et la tartine.

## 2. ÉTUDE DE LA CHUTE

On s'intéresse maintenant à la chute de la tartine. À partir du moment où elle commence à glisser, la tartine perd très vite le contact avec la table **conservant quasiment la même orientation et la même vitesse angulaire qu'au début de cette phase très brève de glissement**. On considère donc ici que la tartine est en chute libre dès  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ . On prend l'origine des temps au début de la chute libre.

On néglige les frottements de l'air sur la tartine.

On suppose, bien entendu, qu'il n'y a pas de contact ultérieur de la tartine avec la table.

### 2.1. La chute

**2.1.1.** Écrire le théorème du centre de masse, le théorème du moment cinétique. Écrire la conservation de l'énergie mécanique totale.

**2.1.2.** Quelle est la loi d'évolution ultérieure de l'angle  $\theta$ . Justifier. Donner l'expression de  $\theta$  en fonction de  $t$ ,  $\theta_0$  et  $\omega_0$  (notation définie plus haut).

**2.1.3.** Écrire les équations littérales du mouvement de  $G$  en fonction de  $g$ ,  $t$ ,  $\theta_0$ ,  $\omega_0$  et  $e$ .

### 2.2. L'arrivée au sol

On considère que, lorsque la tartine atteint le sol, à l'instant  $\tau$ , elle ne subit pas de rebond et que toute son énergie cinétique devient négligeable.

**2.2.1.** Quels sont les angles limites  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ( $\theta_2 > \theta_1$ ) tels que la tartine atterrisse côté pain, en admettant qu'elle fasse moins d'un tour avant de toucher le sol. Faire un schéma représentant 5 ou 6 des positions de la tartine (dont les positions initiale et finale) dans le plan  $xOz$  pour cette chute dans le cas limite  $\theta_2$ . Indiquer clairement la face beurrée.

**2.2.2.** En négligeant toutes les dimensions de la tartine devant  $h$  (hauteur de la table), évaluer la durée de la chute  $\tau$  si la hauteur de la table est  $h$  et donner l'angle dont a tourné la tartine depuis sa position d'équilibre initiale.

**2.2.3. Applications numériques :** calculer  $\tau$  et l'angle en degrés pour  $h = 75$  cm,  $g = 9,8$  m.s<sup>-2</sup>,  $a = 4$  cm,  $e = 0,4$  cm. Conclusion ?





# 8

## Corrigé : Chute d'une tartine (Mines-ponts 99)

### 1. ÉTUDE DE LA ROTATION

#### 1.1. Cinématique de la première phase de rotation sans glissement

1.1.1. On a

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{u} \quad (1)$$

1.1.2. Puisqu'il y a mouvement sans glissement alors on a

$$\vec{OG} = \delta \vec{e}_r - e \vec{e}_\theta \quad (2)$$

1.1.3.

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \vec{v}(O \in \text{tartine}) + \vec{OG} \wedge \vec{\omega}$$

Mouvement sans glissement alors  $\vec{v}(O \in \text{tartine}) = \vec{0}$  d'où

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = e\omega \vec{e}_r + \delta\omega \vec{e}_\theta \quad (3)$$

dans le cas où  $\delta = 0$  alors

$$\vec{v}(G/\mathcal{R}) = e\omega \vec{e}_r$$

#### 1.2. Étude dynamique de la première phase

1.2.1. Par dérivation de l'équation (3) on obtient

$$\vec{a}(G/R) = e\dot{\omega} \vec{e}_r + e\omega^2 \vec{e}_\theta + \delta\dot{\omega} \vec{e}_\theta - \delta\omega^2 \vec{e}_r = (e\dot{\omega} - \delta\omega^2) \vec{e}_r + (e\omega^2 + \delta\dot{\omega}) \vec{e}_\theta \quad (4)$$

dans le cas où  $\delta = 0$  alors

$$\vec{a}(G/R) = e\dot{\omega} \vec{e}_r + e\omega^2 \vec{e}_\theta$$

1.2.2. Le théorème de la résultante cinétique permet d'écrire

$$m \vec{g} + \vec{R} = m \vec{a}_G$$

et par projection sur  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  on obtient les deux relations

$$mg \sin \theta + T = m(e\dot{\omega} - \delta\omega^2) \quad (5)$$

$$mg \cos \theta + N = m(e\omega^2 + \delta\dot{\omega}) \quad (6)$$

1.2.3. Le théorème du moment cinétique dans  $\mathcal{R}$  permet d'écrire

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{R})$$

Or dans  $\mathcal{R}$  la tartine tourne autour de l'axe fixe ( $Oy$ ) alors

$$\vec{L}_O = J_{Oy} \vec{\omega}$$

$\vec{R}$  est appliquée en  $O$  alors  $\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{0}$   
et

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} = mg(\delta \cos \theta + e \sin \theta) \vec{u}$$

d'où

$$J_{Oy} \dot{\omega} = mg(\delta \cos \theta + e \sin \theta) \quad (7)$$

**1.2.4.** Le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  s'écrit

$$\frac{d\vec{L}_G^*}{dt}_{/\mathcal{R}^*} = \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{R})$$

Dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  la tartine tourne autour de l'axe fixe ( $Gy$ ) d'où

$$\vec{L}_G^* = J_{Gy} \vec{\omega}$$

$\vec{P}$  est appliquée en  $G$  alors  $\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P}) = \vec{0}$   
et

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{R}) = \vec{GO} \wedge \vec{R} = -(\delta N + eT) \vec{u}$$

d'où

$$J_{Gy} \dot{\omega} = -(\delta N + eT) \quad (8)$$

En remplaçant  $T$  de à partir de l'équation (5) et  $N$  à partir de l'équation (6) dans l'équation (8) on obtient

$$J_{Gy} \dot{\omega} = -\delta [m(e\omega^2 + \delta\dot{\omega}) - mg \cos \theta] - e [m(e\dot{\omega} - \delta\omega^2) - mg \sin \theta]$$

d'où

$$[J_{Gy} + m(\delta^2 + e^2)] \dot{\omega} = mg(\delta \cos \theta + e \sin \theta)$$

d'où on obtient la même équation que (7)

**1.2.5.** En multipliant l'équation (7) par  $\dot{\theta}$  et remplaçant  $\omega$  par  $\dot{\theta}$  on obtient

$$J_{Oy} \ddot{\theta} = mg(\delta \cos \theta + e \sin \theta) \dot{\theta}$$

par intégration on obtient

$$\frac{1}{2} J_{Oy} \dot{\theta}^2 + \text{cte} = mg(\delta \sin \theta - e \cos \theta)$$

or à  $t = 0$  on a  $\theta = 0$  et  $\dot{\theta} = 0$  alors  $\text{cte} = -mge$  d'où

$$\omega^2 = \dot{\theta}^2 = \frac{2mg}{J_{Oy}} [\delta \sin \theta + e(1 - \cos \theta)] \quad (9)$$

### 1.3. Étude énergétique de la première phase

**1.3.1.** Puisque on n'a pas de glissement  $\vec{R}$  ne travaille pas d'où on a la seule force qui travaille est le poids qui est une force conservative d'où la conservation de l'énergie mécanique

$$E_m = \text{cte}$$

On a

$$E_c = \frac{1}{2} J_{Oy} \omega^2$$

et

$$E_p = -m \vec{g} \cdot \vec{OG} = -mg(\delta \sin \theta - e \cos \theta) \quad \text{à une cte près}$$

alors

$$E_m = \frac{1}{2} J_{Oy} \omega^2 - mg(\delta \sin \theta - e \cos \theta)$$

or  $\frac{dE_m}{dt} = 0$ , en dérivant on obtient

$$J_{Oy} \dot{\omega} = mg(\delta \cos \theta + e \sin \theta)$$

## 1.4. Approximation du léger déséquilibre

1.4.1. Pour  $\delta = 0$  l'équation (9) devient

$$\omega^2 = \frac{2mge}{J_{Oy}}(1 - \cos \theta)$$

d'où

$$\omega_0^2 = \frac{2mge}{J_{Oy}} = \frac{2mge}{\frac{1}{3}m(a^2 + e^2) + me^2}$$

alors

$$\omega_0^2 = \frac{6g\eta}{a(1 + 4\eta^2)} \quad (10)$$

## 1.5. Vérification des hypothèses pour la première phase de rotation

1.5.1. En dérivant  $\omega^2$  on obtient

$$2\omega\dot{\omega} = \omega_0^2 \omega \sin \theta$$

d'où

$$\dot{\omega} = \frac{\omega_0^2}{2} \sin \theta$$

En remplaçant  $\dot{\omega}$  dans les équations (5) et (6) on obtient

$$\frac{T}{mg} = -\frac{1 + \eta^2}{1 + 4\eta^2} \sin \theta \quad (11)$$

$$\frac{N}{mg} = \frac{6\eta^2}{1 + 4\eta^2} - \frac{1 + 10\eta^2}{1 + 4\eta^2} \cos \theta \quad (12)$$

1.5.2. Pour  $\theta = 0$  on a  $\frac{N}{mg} = -1$  donc négative ce qui traduit le fait que la table applique une force qui pousse la tartine.

Pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$  on a  $\frac{N}{mg} = \frac{6\eta^2}{1 + 4\eta^2}$  positive ce qui signifie qu'il n'y a plus de contact entre la tartine et la table.

1.5.3.  $T$  est négative pour  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , la loi de COULOMB ne donne pas ce signe dans le cas de non glissement.

1.5.4. L'allure est sur la figure 1.

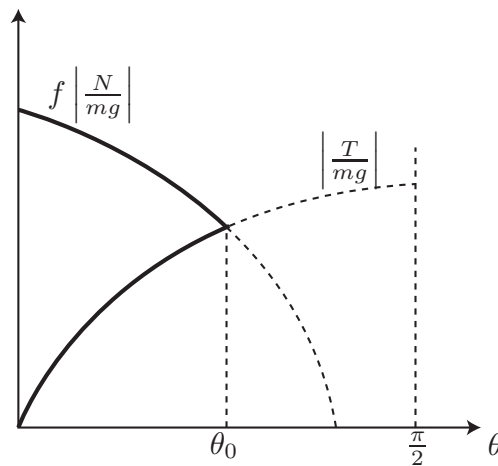


Figure 1:

D'après les lois de COULOMB on a  $\left| \frac{T}{N} \right| \leq f$  et en regardant la courbe de la figure 1 alors en  $\theta = \theta_0$  aura glissement après y'aura plus de contact entre la tartine et la table.

## 1.6. Deuxième phase de rotation

1.6.1. À l'ordre 1 en  $\eta$  on trouve

$$\frac{T}{mg} = -\sin \theta \quad \text{et} \quad \frac{N}{mg} = -\cos \theta$$

Or le glissement commence pour  $\theta_0$  tel que

$$\frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} = f$$

Or  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$  alors

$$f = 1$$

## 2. ÉTUDE DE LA CHUTE

### 2.1. La chute

2.1.1. Le théorème du centre de masse

$$m \vec{a}_G = m \vec{g}$$

$G$  est en chute libre. Le théorème du moment cinétique dans  $\mathcal{R}^*$

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M}_G(\vec{P}) = \vec{0}$$

d'où  $\vec{L}^* = \text{cte}$  alors

$$\omega = \text{cte}$$

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_{Gy}\omega^2 - mgz = \text{cte}$$

2.1.2. Puisque  $\omega = \text{cte}$   
alors

$$\dot{\theta} = \omega = \omega(\text{fin première phase}) = \omega_0 \sqrt{1 - \cos \theta_0}$$

d'où

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t \sqrt{1 - \cos \theta_0}$$

2.2. Puisque  $G$  est en chute libre alors

$$\vec{OG} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_G(t=0)t + \vec{OG}(t=0)$$

avec

$$\vec{v}_G(t=0) = e\omega_{\text{fin}}\vec{e}_{r_{\text{fin}}} \quad \text{et} \quad \vec{OG}(t=0) = -e\vec{e}_{\theta_{\text{fin}}}$$

Par projection sur  $(Ox)$  et  $(Oz)$  on obtient

$$x_G = e\omega_0 t \cos \theta_0 \sqrt{1 - \cos \theta_0} + e \sin \theta_0$$

$$z_G = \frac{1}{2}gt^2 + e\omega_0 t \sin \theta_0 \sqrt{1 - \cos \theta_0} - e \cos \theta_0$$

### 2.3. L'arrivée au sol

2.3.1. voir figure 2

Les cas limites sont

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{2}$$

Pour que la tartine tombe coté pain sur le sol il faut que  $\theta \leq \theta_1$  ou  $\theta \geq \theta_2$

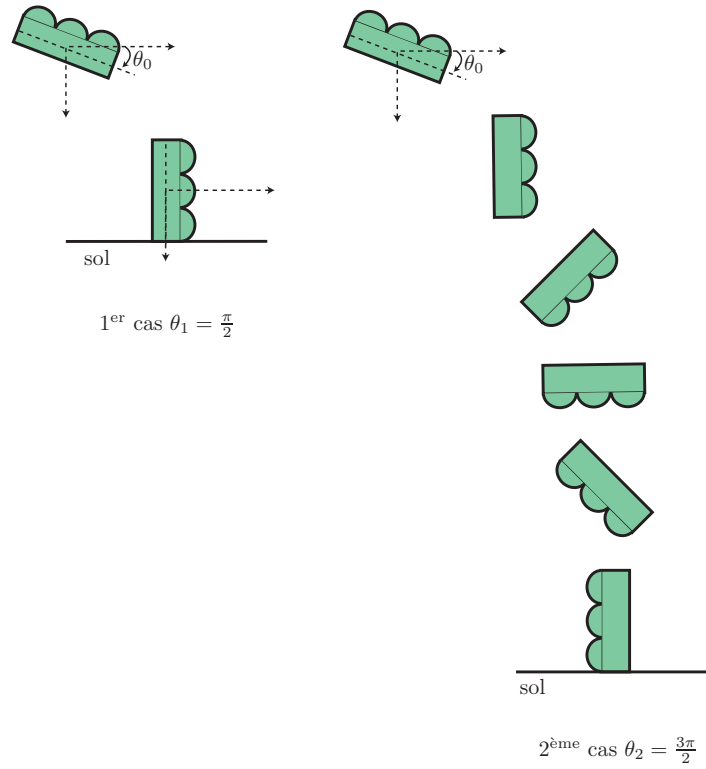


Figure 2:

**2.3.2.** En négligeant toutes les dimensions de la tartine devant  $h$  on obtient

$$h \simeq \frac{1}{2}g\tau^2 \quad \text{d'où} \quad \tau \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

et d'après l'équation (10) et à l'ordre 1 en  $\eta$  on a

$$\omega_0 \simeq \sqrt{\frac{6g\eta}{a}} \simeq \frac{1}{a}\sqrt{6ge}$$

d'où

$$\theta = \theta_0 + \frac{\sqrt{6ge}}{a}\sqrt{1 - \cos\theta_0}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

**2.3.3. Application numérique :**

$$\tau = 0,39 \text{ s} \quad \theta = 192^\circ$$

On a trouvé  $\theta < \theta_2$  donc la tartine va tomber coté beurre.



## 9

# Problème : Étude d'une bicyclette

Une bicyclette roule sans glisser dans un plan vertical sur un sol horizontal (axe  $Ox$ ) du repère galiléen  $\mathcal{R}(O, x, y, z)$  (figure 1).

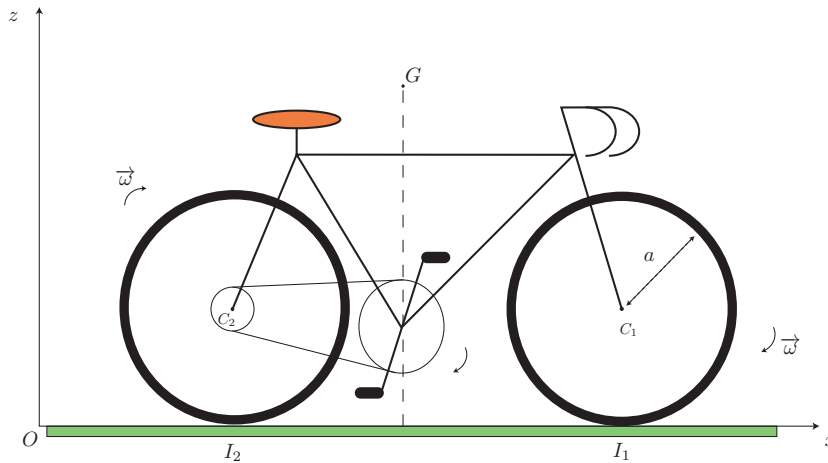


Figure 1:

La roue avant a pour centre  $C_1$  et la roue arrière  $C_2$ . Chaque roue a pour rayon  $a$ , pour masse  $m$  et pour moment d'inertie autour de son axe de rotation  $J$ . La masse totale du système cycliste-bicyclette est  $M$ . On note  $\vec{v} = v\vec{e}_x$  le vecteur vitesse du centre de masse  $G$  et  $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_y$  le vecteur rotation instantanée des roues.

Les réactions du sol aux points de contact  $I_1$  et  $I_2$  des roues avant et arrière avec le sol sont notées  $\vec{R}_1 = T_1\vec{e}_x + N_1\vec{e}_z$  et  $\vec{R}_2 = T_2\vec{e}_x + N_2\vec{e}_z$ .

Le frottement de l'air est modélisé par une force agissant sur le cycliste au point  $G$  et d'expression  $\vec{f} = -k\vec{v}$  où  $k$  est le coefficient de frottement fluide.

Le cycliste exerce sur la roue arrière par l'intermédiaire de la pédale et de la chaîne un couple constant  $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{e}_y$ .

Les liaisons des roues avec la bicyclette, au niveau de leur axe, sont supposées parfaites.

L'accélération de la pesanteur a pour valeur  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

1. Écrire le théorème de la résultante cinétique et le théorème du moment cinétique pour chaque roue.
2. Écrire le théorème de la résultante cinétique et le théorème du moment cinétique pour le système total.

3. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $v(t)$ . Introduire une vitesse limite  $v_{\text{lim}}$  et un temps caractéristique  $\tau$ .

4. Retrouver l'équation différentielle par application du théorème de la puissance cinétique.

**Données :**

$$M = 75 \text{ kg}$$

$$a = 0,35 \text{ m}$$

$$J = 0,12 \text{ kg.m}^2$$

La vitesse limite du cycliste est  $v_{\text{lim}} = 45 \text{ km.h}^{-1}$  lorsqu'il développe une puissance  $\mathcal{P} = 420 \text{ W}$ .

5. Quelle est la valeur numérique du coefficient de frottement fluide  $k$  ?

6. Quelle est la force moyenne exercée par le cycliste sur les pédales ? La longueur des pédales est  $p = 0,17 \text{ m}$ , le plateau et le pignon possèdent respectivement  $n_1 = 56$  et  $n_2 = 12$  dents. On admet que la force exercée par le cycliste sur les pédales est perpendiculaire à la pédale, en son extrémité. Comparer la force exercée au poids du cycliste dont la masse est  $M' = 68 \text{ kg}$ .

7. Le cycliste ne cherche pas la performance. Quand il atteint la vitesse  $v_1 = 30 \text{ km.h}^{-1}$  (2/3 de la vitesse limite), il cesse de pédaler. Il est alors en régime "de roue libre". Il se remet à pédaler quand sa vitesse devient  $v_2 = 15 \text{ km.h}^{-1}$  (1/3 de la vitesse limite).

7.1. Représenter graphiquement qualitativement la variation de  $v$  en fonction du temps en régime périodique de période  $\tau_1 + \tau_2$  où  $\tau_1$  représente le temps de l'effort et  $\tau_2$  le temps de roue libre. On prendra l'origine des temps au moment où la vitesse est égale à  $v_2$ .

7.2. Déterminer  $\tau_1$  et  $\tau_2$  en fonction du temps caractéristique  $\tau$ .

7.3. Calculer numériquement la période du mouvement.



# Corrigé : Étude d'une bicyclette

1.

• **Roue avant**

Les actions extérieures appliquées sur la roue avant sont :

- ◊ Le poids  $\vec{P}_1 = m \vec{g}$
- ◊ La réaction du sol  $\vec{R}_1 = T_1 \vec{e}_x + N_1 \vec{e}_z$
- ◊ L'action de liaison de l'axe sur la roue :  $\vec{F}_{l_1}$

Le théorème de la résultante s'écrit

$$\vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{F}_{l_1} = m \vec{a}(C_1/\mathcal{R}) \quad (1)$$

La projection de l'équation (1) sur les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  donne

$$\begin{cases} T_1 + F_{l_{1x}} = m \frac{dv}{dt} & (2.1) \\ F_{l_{1y}} = 0 & (2.2) \\ -mg + N_1 + F_{l_{1z}} = 0 & (2.3) \end{cases} \quad (2)$$

On va appliquer le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}_1^*$  de la roue 1 au point  $C_1$

$$\frac{d\vec{L}_1^*}{dt} / \mathcal{R}_1^* = \overrightarrow{C_1 I_1} \wedge \vec{R}_1 + \vec{\mathcal{M}}_{C_1}(\vec{F}_{l_1}) + \overrightarrow{C_1 C_1} \wedge \vec{P}_1 \quad (3)$$

Or on a  $\vec{L}_1^* = J\omega \vec{e}_y$

et puisque la liaison roue 1-axe est parfaite alors  $\vec{\mathcal{M}}_{C_1}(\vec{F}_{l_1}) \cdot \vec{e}_y = 0$

$\overrightarrow{C_1 I_1} \wedge \vec{R}_1 = -aT_1 \vec{e}_y$

la projection de l'équation (3) sur l'axe  $Oy$  donne

$$-aT_1 = J\dot{\omega} \quad (4)$$

• **Roue arrière**

Les actions extérieures appliquées sur la roue arrière sont :

- ◊ Le poids  $\vec{P}_2 = m \vec{g}$
- ◊ La réaction du sol  $\vec{R}_2 = T_2 \vec{e}_x + N_2 \vec{e}_z$
- ◊ L'action de liaison de l'axe sur la roue :  $\vec{F}_{l_2}$
- ◊ Le couple de moment  $\vec{\Gamma}$  et de résultante nulle

Le théorème de la résultante s'écrit

$$\vec{P}_2 + \vec{R}_2 + \vec{F}_{l_2} = m \vec{a}(C_1/\mathcal{R}) \quad (5)$$

La projection de l'équation (5) sur les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  donne

$$\begin{cases} T_2 + F_{l_{2x}} = m \frac{dv}{dt} & (6.1) \\ F_{l_{2y}} = 0 & (6.2) \\ -mg + N_2 + F_{l_{2z}} = 0 & (6.3) \end{cases} \quad (6)$$

On va appliquer le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}_2^*$  de la roue 2 au point  $C_2$

$$\frac{d\vec{L}_2^*}{dt} / \mathcal{R}_2^* = \vec{C_2 I_2} \wedge \vec{R}_2 + \vec{M}_{C_2}(\vec{F}_{l_2}) + \vec{C_2 C_2} \wedge \vec{P}_2 + \vec{\Gamma} \quad (7)$$

Or on a  $\vec{L}_2^* = J\omega \vec{e}_y$

et puisque la liaison roue 1-axe est parfaite alors  $\vec{M}_{C_2}(\vec{F}_{l_2}) \cdot \vec{e}_y = 0$

$$\vec{C_2 I_2} \wedge \vec{R}_1 = -aT_2 \vec{e}_y$$

$$\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_y$$

la projection de l'équation (7) sur l'axe  $Oy$  donne

$$-aT_2 + \Gamma = J\dot{\omega} \quad (8)$$

## 2. Les actions extérieures appliquées sur le système total sont

◇ Le poids  $\vec{P} = M\vec{g}$

◇ La réaction du sol sur la roue avant  $\vec{R}_1 = T_1 \vec{e}_x + N_1 \vec{e}_z$

◇ La réaction du sol sur la roue arrière  $\vec{R}_2 = T_2 \vec{e}_x + N_2 \vec{e}_z$

◇ Le frottement de l'air  $\vec{f} = -k\vec{v}$

Le théorème de la résultante cinétique pour le système total s'écrit dans  $\mathcal{R}$

$$\vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{f} = M \vec{a}(G/\mathcal{R}) \quad (9)$$

La projection de l'équation (9) sur les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  donne

$$\begin{cases} T_2 + T_1 - kv = M \frac{dv}{dt} & (10.1) \\ 0 = 0 & (10.2) \\ -Mg + N_1 + N_2 = 0 & (10.3) \end{cases} \quad (10)$$

On applique le théorème du moment cinétique au système total dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  du système en  $G$  ce qui donne

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} / \mathcal{R}^* = \vec{GI_1} \wedge \vec{R}_1 + \vec{GI_2} \wedge \vec{R}_2 \quad (11)$$

On a  $\vec{M}_G(\vec{P}) = \vec{0}$  car  $\vec{P}$  est appliquée en  $G$ .

et  $\vec{M}_G(\vec{f}) = \vec{0}$  car le support de  $\vec{f}$  passe par  $G$ .

Or

$$\vec{L}^* = \vec{L}_1^* + \vec{L}_2^* + \vec{L}^*(\text{cadre-cycliste})$$

Les référentiels  $\mathcal{R}_1^*$ ,  $\mathcal{R}_2^*$  et  $\mathcal{R}^*$  sont équivalents car les points  $G$ ,  $C_1$  et  $C_2$  ont le même mouvement de translation d'où  $\vec{L}_1^* = J\vec{\omega}$

$$\vec{L}_2^* = J\vec{\omega}$$

et  $\vec{L}^*(\text{cadre-cycliste}) = \vec{0}$  car on n'a ni rotation ni translation du système cadre-cycliste dans  $\mathcal{R}^*$ .

Ainsi le théorème du moment cinétique du système total s'écrit

$$\vec{GI_1} \wedge \vec{R}_1 + \vec{GI_2} \wedge \vec{R}_2 = 2J\dot{\omega} \vec{e}_y \quad (12)$$

3. La relation de non glissement de l'une quelconque des deux roue est

$$v = a\omega \quad (13)$$

Les équations (4) et (13) donnent

$$T_1 = -\frac{J}{a}\dot{\omega} = -\frac{J}{a^2}\frac{dv}{dt} \quad (14)$$

Les équations (8) et (13) donnent

$$T_2 = -\frac{J}{a}\dot{\omega} + \frac{\Gamma}{a} = -\frac{J}{a^2}\frac{dv}{dt} + \frac{\Gamma}{a} \quad (15)$$

Remplaçons  $T_1$  et  $T_2$  dans l'équation (10.1) ce qui donne

$$\left(2\frac{J}{a^2} + M\right)\frac{dv}{dt} + kv = \frac{\Gamma}{a}$$

qu'on écrit sous la forme

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{\frac{\Gamma}{a}}{M + 2\frac{J}{a^2}} \quad (16)$$

On déduit

$$\tau = \frac{M + 2\frac{J}{a^2}}{k} \quad (17)$$

Quand le cycliste atteint la vitesse limite alors  $v = v_{\text{lim}} = \text{cte}$  d'où d'après l'équation (16) on trouve

$$v_{\text{lim}} = \frac{\Gamma}{ak} \quad (18)$$

4. Le théorème de la puissance cinétique appliqué au système total dans  $\mathcal{R}$  s'écrit

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext}}) + \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{int}})$$

$$\text{On a } \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext}}) = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{R}_1) + \mathcal{P}(\vec{R}_2) + \mathcal{P}(\vec{f})$$

$$\mathcal{P}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{v} = -Mg\vec{e}_z \cdot v\vec{e}_x = 0$$

$$\mathcal{P}(\vec{R}_1) = \vec{R}_1 \cdot \vec{v}_g = 0 \text{ car non glissement.}$$

$$\mathcal{P}(\vec{R}_2) = \vec{R}_2 \cdot \vec{v}_g = 0 \text{ car non glissement.}$$

$$\mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v} = -kv^2$$

d'où

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext}}) = -kv^2$$

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{int}}) = \mathcal{P}(\vec{\Gamma}) + \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{liaison roue 1}}) + \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{liaison roue 2}})$$

$$\text{on a } \mathcal{P}(\vec{\Gamma}) = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega} = \Gamma\omega$$

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{liaison roue 1}}) = 0 \text{ car liaison parfaite.}$$

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{liaison roue 2}}) = 0 \text{ car liaison parfaite. d'où}$$

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{int}}) = \Gamma\omega = \Gamma\frac{v}{a}$$

Or

$$E_c = E_{c_{\text{roue 1}}} + E_{c_{\text{roue 2}}} + E_{c_{\text{cadre-cycliste}}}$$

Pour une roue on a d'après le théorème de KOENIG

$$E_{c_{\text{roue}}} = E_c^* + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Le système cadre-cycliste de masse  $M - 2m$  est en translation d'où

$$E_{\text{cadre-cycliste}} = \frac{1}{2}(M - 2m)v^2$$

ainsi

$$E_c = 2E_{\text{roue}} + E_{\text{cadre-cycliste}} = \frac{1}{2}Mv^2 + J\omega^2$$

Alors le théorème de l'énergie cinétique donne

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}Mv^2 + J\omega^2 \right) = \Gamma \frac{v}{a} - kv^2$$

En dérivant et en simplifiant par  $v$  on obtient la même équation

$$\left( M + \frac{2J}{a^2} \right) \frac{dv}{dt} + kv = \frac{\Gamma}{a}$$

5. La puissance fournie par le cycliste lorsqu'il atteint la vitesse limite est

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{cycliste}} = \Gamma\omega = \frac{\Gamma v_{\text{lim}}}{a}$$

d'où

$$\Gamma = \frac{a\mathcal{P}}{v_{\text{lim}}}$$

or d'après l'équation (18) on a

$$k = \frac{\Gamma}{av_{\text{lim}}}$$

alors

$$k = \frac{\mathcal{P}}{v_{\text{lim}}^2}$$

**Application numérique :**  $k = 2,7 \text{ kg.s}^{-1}$

6. Puisqu'on néglige les frottements alors la puissance fournie par le cycliste est totalement transmise à la roue arrière d'où

$$\Gamma \omega = \Gamma_{\text{pédale}} \omega_{\text{pédale}}$$

Or on a

$$n_1 \omega_{\text{pédale}} = n_2 \omega$$

alors

$$\Gamma_{\text{pédale}} = \frac{n_1}{n_2} \Gamma$$

or

$$\Gamma_{\text{pédale}} = pF$$

alors

$$F = \frac{\Gamma_{\text{pédale}}}{p} = \frac{n_1}{n_2 p} \Gamma$$

**Application numérique :**  $F = 323 \text{ N}$

Le poids du cycliste est  $P = M'g = 666 \text{ N}$

La force  $F$  appliquée par le cycliste sur la pédale est égale à la moitié de son poids car lorsqu'il appuie sur les pédales il appuie avec un seul pied.

**6.1.** La représentation de  $v(t)$  est sur la figure (1)

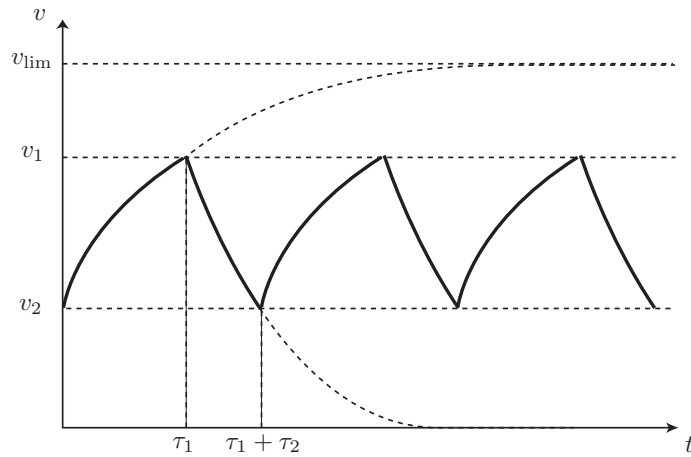


Figure 1:

**6.2.** Durant la phase où le cycliste pédale on a d'après l'équation (16)

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = v_{\text{lim}}$$

alors

$$v = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_{\text{lim}}$$

Or à  $t = 0$  on a  $v(t = 0) = v_2$  alors

$$v = (v_2 - v_{\text{lim}}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_{\text{lim}}$$

en  $t = \tau_1$  on a  $v = v_1$  d'où

$$v_1 = (v_2 - v_{\text{lim}}) \exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right) + v_{\text{lim}}$$

alors

$$\tau_1 = \tau \ln\left(\frac{v_{\text{lim}} - v_2}{v_{\text{lim}} - v_1}\right)$$

Or  $v_1 = \frac{2}{3}v_{\text{lim}}$  et  $v_2 = \frac{1}{3}v_{\text{lim}}$  alors

$$\tau_1 = \tau \ln 2$$

On change ici l'origine des temps en  $t = \tau_1$  et donc pendant la phase où le cycliste arrête de pédaler l'équation que vérifie  $v$  est

$$v + \tau \frac{dv}{dt} = 0$$

qui a pour solution  $v = B \exp -\frac{t}{\tau}$  avec  $v(t = 0) = v_1$  d'où

$$v = v_1 \exp -\frac{t}{\tau}$$

Or à  $t = \tau_2$  on a  $v(t = \tau_2) = v_2$  alors  $v_2 = v_1 \exp -\frac{\tau_2}{\tau}$  d'où

$$\tau_2 = \tau \ln \frac{v_1}{v_2} = \tau \ln 2$$

**6.3.** La période du mouvement est

$$T = \tau_1 + \tau_2 = 2\tau \ln 2$$

**Application numérique :**  $T = 39,7 \text{ s}$



# 11

## Problème : Mouvement d'une voiture (ccp 2004)

Ce problème étudie les performances en accélération et freinage d'une automobile se déplaçant en ligne droite. On considère le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  associé au repère  $(Oxyz)$  comme étant galiléen. On note  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  le trièdre associé. On considère que la voiture (figure 1) est composée de 3 systèmes notés  $(S_1)$ ,  $(S_2)$ ,  $(S)$ .

On appelle  $\mathcal{R}^*$  le référentiel du centre de masse de la voiture.

Le système  $(S_1)$ , de masse  $m_1$  est constitué par l'essieu de longueur  $L$  et les deux roues avant de la voiture. On note  $J_1$ , son moment d'inertie par rapport à l'axe  $G_1y$ , où  $G_1$  est le centre d'inertie de  $(S_1)$ .

Les roues avant, assimilées à deux disques de rayon  $a$  de centre  $O_1$  et  $O'_1$ , sont motrices et donc soumises pendant la phase d'accélération à un couple de forces dont le moment résultant en  $G_1$  est assimilable à  $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_y$  avec  $\Gamma > 0$ .

On considère que la résultante des actions de contact du sol sur  $(S_1)$  est représentée par :  $\vec{F}_1 = T_1 \vec{e}_x + N_1 \vec{e}_z$  s'exerçant sur chaque roue en  $I_1$  et  $I'_1$ .

On appelle  $\mathcal{R}_1^*$  le référentiel du centre de masse de  $(S_1)$ .

$(S_1)$  est animé dans  $\mathcal{R}_1^*$ , d'un mouvement de rotation autour de  $G_1y$  à la vitesse angulaire  $\omega$ .

Le système  $(S_2)$ , de masse  $m_2$  est constitué par l'essieu et les deux roues arrières de la voiture.

On note  $J_2$ , son moment d'inertie par rapport à l'axe  $G_2y$ , où  $G_2$  est le centre d'inertie de  $(S_2)$ .

Les roues arrières sont également assimilées à deux disques de rayon  $a$  de centre  $O_2$  et  $O'_2$ .

On considère que la résultante des actions de contact du sol sur  $(S_2)$  est représentée par :  $\vec{F}_2 = T_2 \vec{e}_x + N_2 \vec{e}_z$  s'exerçant sur les deux roues en  $I_2$  et  $I'_2$ .

On appelle  $\mathcal{R}_2^*$ , le référentiel du centre de masse de  $S_2$ .

$(S_2)$  est animé dans  $\mathcal{R}_2^*$ , d'un mouvement de rotation autour de  $G_2y$  à la vitesse angulaire  $\omega$ .

Le système  $(S)$ , de masse  $M$ , est constitué du reste de la voiture. On néglige les mouvements de  $(S)$  par rapport à  $(S_1)$  et  $(S_2)$  considérés comme faibles et on ne prend pas en compte les déformations de la suspension.

Le centre d'inertie  $G$  de l'ensemble du véhicule se trouve à une hauteur  $h$  du sol, une distance  $l_1$  de  $G_1$  et une distance  $l_2$  de  $G_2$  suivant l'axe  $Ox$ .

Le coefficient de frottement de glissement, noté  $f_0$ , entre une roue et le sol est identique pour les quatre roues.

On considère que les forces de frottement de l'air sur le véhicule sont équivalentes à une force unique  $\vec{F}_{\text{air}}$  appliquée en  $G$  avec :  $\vec{F}_{\text{air}} = -\frac{\rho c_x v^2 S}{2} \vec{e}_x$  lorsque la voiture se déplace d'un mouvement de translation rectiligne suivant l'axe  $Ox$ .

où :

$\rho$  est la masse volumique de l'air avec  $\rho = 1,23 \text{ kg.m}^{-3}$ ,

$c_x$  est le coefficient de traînée qui dépend du profil de la voiture avec  $c_x = 0,3$ ,

$v$  est la vitesse de la voiture,

$S$  est la valeur du maître couple, c'est-à-dire l'aire de la plus grande section transversale de la voiture avec  $S = 1,93 \text{ m}^2$ .

On note  $\overrightarrow{OG}(t) = x(t)\vec{e}_x$ .

### Données numériques :

On donne :  $l_1 = 1,3 \text{ m}$  ;  $l_2 = 1,7 \text{ m}$  ;  $h = 0,8 \text{ m}$  ;  $a = 0,3 \text{ m}$  ;  $M = 1370 \text{ kg}$  et  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

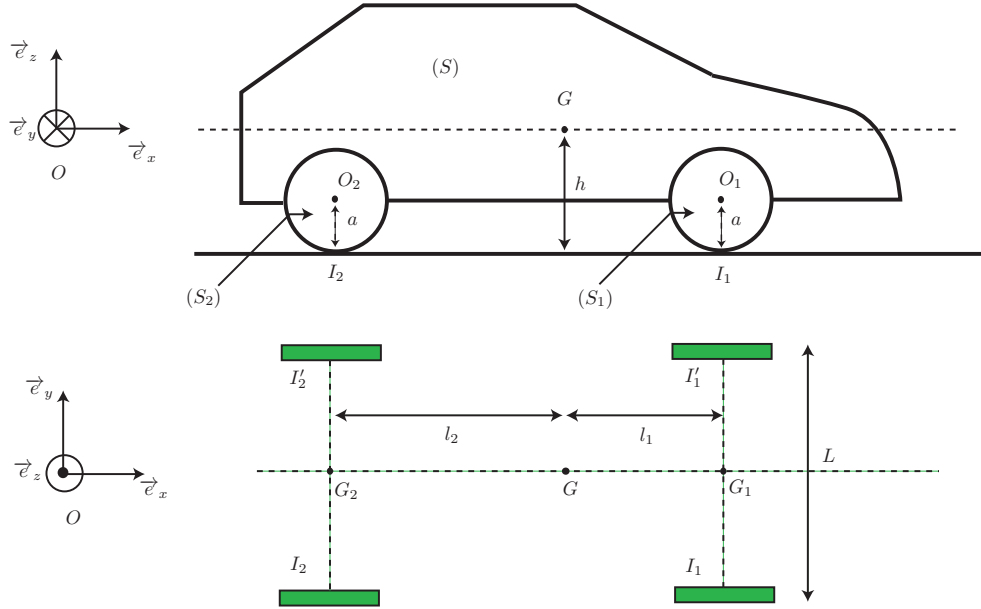


Figure 1:

## 1. ÉTUDE DE LA PHASE D'ACCÉLÉRATION

**1.1.** Écrire le théorème du centre d'inertie dans  $\mathcal{R}$  pour la voiture. En déduire deux relations notées 1 et 2.

**1.2.** Écrire le théorème du moment cinétique en  $G$  pour la voiture dans  $\mathcal{R}^*$ ; la relation obtenue est notée 3.

**1.3.** Écrire le théorème du moment cinétique respectivement en  $G_1$  et  $G_2$  pour le système  $(S_1)$  dans  $\mathcal{R}_1^*$  et  $(S_2)$ , dans  $\mathcal{R}_2^*$ . En déduire deux relations notées 4 et 5.

### 1.4.

**1.4.1.** Écrire la relation de non glissement des roues liant la vitesse linéaire  $v(t) = \dot{x}(t)$  de la voiture et la vitesse angulaire  $\omega$  des roues.

**1.4.2.** Donner alors l'équation différentielle du mouvement relative à  $x(t)$ .

On ne fait aucune supposition sur la nature du mouvement des roues dans les questions suivantes et on considère pour la suite du problème (y compris la partie 2.) que la masse de  $(S_1)$  et celle de  $(S_2)$  sont très petites devant celle de  $(S)$ , ce qui revient à poser  $m_1 = m_2 = 0$  et  $J_1 = J_2 = 0$  dans les relations des questions 1.1. , 1.2. et 1.3.



**1.5.**

**1.5.1.** Que deviennent les relations 1, 2 et 3 ? Donner alors l'expression de  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $N_1$  et  $N_2$  en fonction de  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $h$ ,  $a$ ,  $M$ ,  $g$  et  $\Gamma$ . Comparer  $N_1$  et  $N_2$ . Quel est le sens de  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$  ?

**1.5.2.** Déterminer la valeur maximale de  $\Gamma$ , notée  $\Gamma_{\max}$  qui assure un roulement sans glissement des roues de la voiture. Comment varie  $\Gamma_{\max}$  en fonction de  $l_2$ , de  $h$  et de  $f_0$  ? Quel est le sens physique de ces dépendances ?

**1.5.3. Application numérique :** calculer les valeurs de  $\Gamma_{\max}$  pour  $f_0 = 0,7$  (pneus en bon état et route sèche), pour  $f_0 = 0,4$  (route mouillée) et pour  $f_0 = 0,1$  (route verglacée).

**1.5.4.** Pour  $\Gamma < \Gamma_{\max}$ , la roue avant peut-elle décoller ? La roue arrière peut-elle décoller ?

**1.6.** Le fonctionnement à la limite du roulement sans glissement n'étant jamais atteint en raison d'une puissance moteur insuffisante, on considère une valeur de  $\Gamma$  inférieure à  $\Gamma_{\max}$ .

**1.6.1.** Donner l'expression de la vitesse limite, notée  $v_{\lim}$ , atteinte par la voiture ainsi que sa valeur numérique en  $\text{km.h}^{-1}$ .

**Application numérique :**  $\Gamma = 300 \text{ N.m}$

**1.6.2.** Intégrer alors l'équation du mouvement afin de donner la vitesse instantanée  $v(t)$  en fonction de  $v_{\lim}$ , en considérant  $v(0) = 0$ . On posera  $\alpha = \frac{\Gamma}{a.M.v_{\lim}}$ .

**1.6.3.** Estimer et calculer le temps  $\tau$  tel que pour  $t \ll \tau$  la résistance de l'air peut être négligée. Déterminer l'expression asymptotique de  $v(t)$  lorsque  $t \ll \tau$ . Calculer le temps  $t_1$  (en tenant compte de la résistance de l'air) pour lequel  $v_1 = \frac{v_{\lim}}{2}$ .

**1.7.** Donner l'expression de l'abscisse de la voiture  $x(t)$  sachant que  $x(0)=0$ .

## 2. ÉTUDE DE LA PHASE DE FREINAGE

Pendant la phase de freinage, les roues avant sont soumises à un couple de forces dont le moment résultant en  $G_1$  est assimilable à  $\vec{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \vec{e}_y$  avec  $\Gamma_1 < 0$ .

De même, les roues arrière sont soumises à un couple de forces dont le moment résultant en  $G_2$  est assimilable à  $\vec{\Gamma}_2 = \Gamma_2 \vec{e}_y$  avec  $\Gamma_2 < 0$ . On considère toujours que  $m_1 = m_2 = 0$  et  $J_1 = J_2 = 0$ .

**2.1.** Quelle est la modification à apporter aux équations 1, 2, 3, 4, 5 des questions 1.1. , 1.2. , 1.3. de la partie 1. ? Écrire ces équations.

**2.2.** En déduire l'expression et le sens de  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ . Quelle doit être la condition pour que  $N_2 > 0$  ?

**2.3.**

**2.3.1.** Donner l'expression des valeurs maximales des valeurs absolues de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , notées  $\Gamma_{1M}$  et  $\Gamma_{2M}$ , pour que le freinage s'effectue sans glissement.

**2.3.2.** Exprimer le rapport  $\frac{\Gamma_{1M}}{\Gamma_{2M}}$  en fonction de  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $f_0$  et  $h$ . Quelles sont les roues qui se bloquent en premier ?

**2.3.3. Application numérique :** calculer  $\Gamma_{1M}$  et  $\Gamma_{2M}$  pour  $f_0 = 0,7$ ,  $f_0 = 0,4$  et  $f_0 = 0,1$ .

**2.4.** On se place à la limite du roulement sans glissement.

**2.4.1.** Donner la valeur numérique du module de la résistance de l'air  $F_{\text{air}}$  pour  $v = 130 \text{ km.h}^{-1}$ ,  $v = 50 \text{ km.h}^{-1}$  et  $v = 10 \text{ km.h}^{-1}$

**2.4.2.** En négligeant la résistance de l'air, quelle est la décélération maximale de l'automobile ? Donner la valeur numérique de la force de freinage  $F_F$  due aux frottements s'exerçant sur la voiture pour  $f_0 = 0,7$ ,  $f_0 = 0,4$  et  $f_0 = 0,1$ .

**2.4.3.** Montrer alors que la résistance de l'air peut être négligée et exprimer alors la distance parcourue  $d_{ar}$  depuis l'instant où la voiture roule à une vitesse  $v_0$  jusqu'à l'arrêt.

**Application numérique :** calculer  $d_{ar}$  avec  $f_0 = 0,7$  pour  $v_0 = 130 \text{ km.h}^{-1}$ ,  $v_0 = 90 \text{ km.h}^{-1}$  et pour  $v_0 = 50 \text{ km.h}^{-1}$ . Que deviennent ces résultats si  $f_0 = 0,4$  puis  $f_0 = 0,1$  ?

**2.5.** Retrouver l'expression de  $d_{ar}$  en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à la voiture.

# 12

## Corrigé : Mouvement d'une voiture (ccp 2004)

### 1. ÉTUDE DE LA PHASE D'ACCÉLÉRATION

**1.1.** Les actions extérieures qui s'exercent sur la voiture sont :

- le poids  $P = (m_1 + m_2 + M)\vec{g}$ ;
- les actions de contact entre le sol et les roues;
- la force de frottement de l'air  $\vec{F}_{\text{air}}$

D'après le théorème du centre de masse de l'ensemble de la voiture dans le référentiel  $\mathcal{R}$  on a :

$$(M + m_1 + m_2)\vec{a}(G/\mathcal{R}) = (M + m_1 + m_2)\ddot{x}\vec{e}_x = (M + m_1 + m_2)\vec{g} + 2\vec{F}_1 + 2\vec{F}_2 + \vec{F}_{\text{air}}$$

Par projection sur  $Ox$  et  $Oz$  on obtient les deux relations :

$$(M + m_1 + m_2)\ddot{x} = 2T_1 + 2T_2 + F_{\text{air}} \quad (1)$$

$$(M + m_1 + m_2)g = 2N_1 + 2N_2 \quad (2)$$

**1.2.** Le théorème du moment cinétique en  $G$  pour la voiture dans  $\mathcal{R}^*$  donne :

$$\frac{d\vec{L}_G^*}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{G}\vec{G} \wedge \vec{P} + \vec{G}\vec{I}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{G}\vec{I}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{G}\vec{I}'_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{G}\vec{I}'_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{G}\vec{G} \wedge \vec{F}_{\text{air}}$$

on a

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_{\text{ext}}) = (\vec{G}\vec{I}_1 + \vec{G}\vec{I}'_1) \wedge \vec{F}_1 + (\vec{G}\vec{I}_2 + \vec{G}\vec{I}'_2) \wedge \vec{F}_2$$

Or

$$\vec{G}\vec{I}_1 = l_1\vec{e}_x - \frac{L}{2}\vec{e}_y - h\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{G}\vec{I}'_1 = l_1\vec{e}_x + \frac{L}{2}\vec{e}_y - h\vec{e}_z$$

alors

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_{\text{ext}}) \cdot \vec{e}_y = -2hT_1 - 2l_1N_1 - 2hT_2 + 2l_2N_2$$

Le système  $(S)$  est immobile dans  $\mathcal{R}^*$  alors

$$\vec{L}_G^*(S) = \vec{0}$$

Pour le système  $(S_1)$  on a

$$\vec{L}_G^*(S_1) = \vec{L}_{G_1}^*(S_1) + \vec{G}\vec{G}_1 \wedge m_1\vec{v}^*(G_1) = \vec{L}_{G_1}^*(S_1) = J_1\omega\vec{e}_y \quad \text{car} \quad \vec{v}^*(G_1) = \vec{0}$$

de même pour le système  $(S_2)$  on a

$$\vec{L}_G^*(S_2) = \vec{L}_{G_2}^*(S_2) + \vec{G}\vec{G}_2 \wedge m_2\vec{v}^*(G_2) = \vec{L}_{G_2}^*(S_2) = J_2\omega\vec{e}_y \quad \text{car} \quad \vec{v}^*(G_2) = \vec{0}$$

Donc la projection du T.M.C selon  $Oy$  donne

$$J_1\dot{\omega} + J_2\dot{\omega} = -2hT_1 - 2l_1N_1 - 2hT_2 + 2l_2N_2 \quad (3)$$

**1.3.** Les actions extérieures appliquées sur  $(S_1)$  sont le poids  $\vec{P}_1$ , l'action du sol  $\vec{F}_1$  et l'action du moteur équivalente à un couple.

On supposera que l'action de la liaison de  $(S)$  sur  $(S_1)$  est parfaite, la projection du moment correspondant sur  $Oy$  est donc nulle.

Le théorème du moment cinétique en  $G_1$  pour le système  $S_1$  dans le référentiel  $\mathcal{R}^*$  donne :

$$\frac{d\vec{L}_{G_1}^*(S_1)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{G_1}(\vec{P}_1) + \vec{\mathcal{M}}_{G_1}(\vec{F}_1) + \vec{\Gamma}$$

On a  $\vec{\mathcal{M}}_{G_1}(\vec{P}_1) = \vec{0}$

$\vec{\mathcal{M}}_{G_1}(\vec{F}_1) = \vec{G_1I_1} \wedge (T_1 \vec{e}_x + N_1 \vec{e}_y)$

$\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_y$

Par projection du T.M.C sur  $Oy$  on obtient

$$J_1 \dot{\omega} = \Gamma - 2aT_1 \quad (4)$$

Par un raisonnement analogue, on obtient pour le système  $(S_2)$  (qui ne subit pas le couple  $\vec{\Gamma}$ )

$$J_2 \dot{\omega} = -2aT_2 \quad (5)$$

## 1.4.

**1.4.1.** La vitesse de glissement de la roue 1 s'écrit

$$\vec{v}_g(\text{roue1/sol}) = \vec{v}(I_1 \in S_1) - \vec{v}(I_1 \in \text{sol}) = \vec{v}(I_1 \in S_1)$$

Or

$$\vec{v}(I_1 \in S_1) = \vec{v}(O_1) + \vec{I_1O_1} \wedge \vec{\omega} = \dot{x} \vec{e}_x - a\omega \vec{e}_x$$

La condition de non-glissement donne

$$\dot{x} = a\omega$$

Pour les autres roues les expressions sont identiques.

**1.4.2.** Les équations (4) et (5) permettent d'exprimer  $T_1$  et  $T_2$ , qu'on remplace dans l'équation (1)

$$(M + m_1 + m_2)\ddot{x} = \frac{\Gamma - J_1 \dot{\omega} - J_2 \dot{\omega}}{a} - \frac{\rho c_x \dot{x}^2 S}{2}$$

et en remplaçant  $\omega$  par son expression en fonction de  $\dot{x}$  on trouve

$$\left( M + m_1 + m_2 + \frac{J_1}{a^2} + \frac{J_2}{a^2} \right) \ddot{x} = \frac{\Gamma}{a} - \frac{\rho c_x \dot{x}^2 S}{2}$$

## 1.5.

**1.5.1.** On a

$$\begin{cases} (1) & \text{donne} & M\ddot{x} = 2T_1 + 2T_2 + F_{\text{air}} & (6.1) \\ (2) & \text{donne} & Mg = 2N_1 + 2N_2 & (6.2) \\ (3) & \text{donne} & 0 = -2hT_1 - 2l_1N_1 - 2hT_2 + 2l_2N_2 & (6.3) \\ (4) & \text{donne} & \Gamma = 2aT_1 & (6.4) \\ (5) & \text{donne} & 0 = -2aT_2 & (6.5) \end{cases} \quad (6)$$

Alors d'après les équations (6.4) et (6.5) on a

$$T_1 = \frac{\Gamma}{2a} \quad \text{et} \quad T_2 = 0 \quad (7)$$

L'équation (6.2) donne

$$N_2 = \frac{Mg}{2} - N_1$$

qu'on remplace dans (6.3) et on obtient

$$N_1 = \frac{Mgal_2 - h\Gamma}{2a(l_1 + l_2)} \quad (8)$$

et

$$N_2 = \frac{Mgal_1 + h\Gamma}{2a(l_1 + l_2)} \quad (9)$$

Pour comparer  $N_1$  et  $N_2$  on va calculer leur différence

$$N_2 - N_1 = \frac{Mgal_1 + h\Gamma - Mgal_2 + h\Gamma}{2a(l_1 + l_2)} = \frac{Mga(l_1 - l_2) + 2h\Gamma}{2a(l_1 + l_2)}$$

soit  $\Gamma_0 = \frac{Mga(l_2 - l_1)}{2h}$  d'où

$$N_2 - N_1 = \frac{2h(\Gamma - \Gamma_0)}{2a(l_1 + l_2)}$$

Donc

$$\text{si } \Gamma > \Gamma_0 \quad \text{alors } N_2 > N_1$$

et

$$\text{si } \Gamma < \Gamma_0 \quad \text{alors } N_2 < N_1$$

$T_1 > 0$  le frottement sur la roue motrice est orienté vers l'avant, c'est cette force qui met en mouvement la voiture.

$T_2 = 0$  cela implique que la roue arrière ne glisse jamais.

**1.5.2.** Pour qu'il y ait roulement sans glissement des roues avant il faut que

$$|T_1| \leq f_0 |N_1|$$

d'où

$$\frac{\Gamma}{2a} \leq f_0 \frac{Mgal_2 - h\Gamma}{2a(l_1 + l_2)}$$

Alors

$$\Gamma \leq af_0 \frac{Mgl_2}{l_1 + l_2 + f_0 h}$$

d'où

$$\Gamma_{\max} = af_0 \frac{Mgl_2}{l_1 + l_2 + f_0 h} \quad (10)$$

$\Gamma_{\max}$  croît avec  $f_0$  : plus l'adhérence avec le sol est grande, plus le couple moteur peut être grand sans avoir glissement.

$\Gamma_{\max}$  décroît avec  $h$  : les voitures dont le centre de gravité est bas, peuvent exercer sur les roues un couple moteur plus grand (les voitures de formule 1 sont très plates en particulier pour abaisser leur centre de gravité).

$\Gamma_{\max}$  croît avec  $l_2$  de 0 à  $af_0 Mg$  : lorsque  $l_2$  croît,  $N_1$  croît donc le glissement est moins facile, on peut exercer un couple plus important.

**Application numérique :**

$$\text{Pour } f_0 = 0,7 \quad \text{on a } \Gamma_{\max} = 1,35 \cdot 10^3 \text{ N.m}^{-1}$$

$$\text{Pour } f_0 = 0,4 \quad \text{on a } \Gamma_{\max} = 8,26 \cdot 10^2 \text{ N.m}^{-1}$$

$$\text{Pour } f_0 = 0,1 \quad \text{on a } \Gamma_{\max} = 2,22 \cdot 10^2 \text{ N.m}^{-1}$$

**1.5.3.** Lorsqu'une roue décolle il n'y a plus de contact avec le sol alors dans ce cas  $N = 0$ . Pour que la roue avant décolle il faut que

$$N_1 = \frac{Mgal_2 - h\Gamma}{2a(l_1 + l_2)} = 0$$

c'est-à-dire

$$\Gamma = \frac{Mgal_2}{h}$$

dans le cas où  $\Gamma < \Gamma_{\max} = af_0 \frac{Mgl_2}{l_1 + l_2 + f_0 h}$  alors on doit avoir

$$\frac{Mgal_2}{h} < af_0 \frac{Mgl_2}{l_1 + l_2 + f_0 h}$$

ainsi

$$f_0 h > l_1 + l_2 + f_0 h \quad \Rightarrow \quad l_1 + l_2 < 0$$

ce qui est impossible alors la roue avant ne peut jamais décoller.

Pour la roue arrière, l'expression de  $N_2$  montre qu'on a toujours  $N_2 > 0$  donc la roue arrière ne peut pas décoller.

## 1.6.

**1.6.1.** En remplaçant les équations de (7) et la formule de  $F_{\text{air}}$  dans l'équation (6.1) obtient

$$M\ddot{x} = \frac{\Gamma}{a} - \frac{\rho c_x \dot{x}^2 S}{2}$$

Quand la voiture atteint la vitesse limite sa vitesse reste constante alors  $\ddot{x} = 0$ , donc

$$v_{\text{lim}} = \dot{x}_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2\Gamma}{\rho a c_x S}} \quad (11)$$

### Application numérique :

$$v_{\text{lim}} = 5,3 \cdot 10^1 \text{ m.s}^{-1} = 191 \text{ km.h}^{-1}$$

**1.6.2.** L'équation différentielle de la vitesse s'écrit :

$$M\dot{v} = \frac{\Gamma}{a} - \frac{\rho c_x S}{2} v^2$$

où encore en utilisant l'expression de  $v_{\text{lim}}$

$$\dot{v} = \frac{\Gamma}{aM} \left( 1 - \frac{v^2}{v_{\text{lim}}^2} \right)$$

Soit le changement de variable  $u = \frac{v}{v_{\text{lim}}}$  donc l'équation différentielle de  $v$  devient

$$\frac{\dot{u}}{1 - u^2} = \alpha$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{\Gamma}{aMv_{\text{lim}}}$$

Or

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{1}{1 + u} + \frac{u}{1 - u^2}$$

Donc la primitive s'écrit

$$\int \frac{1}{1 - u^2} du = \int \frac{1}{1 + u} du + \int \frac{u}{1 - u^2} du = \ln(1 + u) - \frac{1}{2} \ln(1 - u^2) = \ln \sqrt{\frac{1 + u}{1 - u}}$$

Ainsi la solution de l'équation différentielle de  $v$  s'écrit

$$\ln \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{v_{\text{lim}}}}{1 - \frac{v}{v_{\text{lim}}}}} = \alpha t + \text{cte}$$

Or  $v(t=0) = 0$  alors  $\text{cte}=0$

donc

$$\frac{v + v_{\text{lim}}}{v_{\text{lim}} - v} = \exp(2\alpha t)$$

d'où

$$v = v_{\text{lim}} \frac{\exp(2\alpha t) - 1}{\exp(2\alpha t) + 1} = v_{\text{lim}} \frac{\exp(\alpha t) - \exp(-\alpha t)}{\exp(\alpha t) + \exp(-\alpha t)}$$

alors

$$v = v_{\text{lim}} \tanh(\alpha t)$$

**1.6.3.** Soit  $\tau = \frac{1}{\alpha}$  alors pour  $t \ll \tau$ , on a  $\tanh(\alpha t) \approx \alpha t$  et donc  $v = \alpha t v_{\text{lim}}$

Or  $v(t_1) = \frac{v_{\text{lim}}}{2}$  alors  $v_{\text{lim}} \tanh(\alpha t_1) = \frac{v_{\text{lim}}}{2}$  d'où

$$t_1 = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\right)$$

**Application numérique :**

$t_1 = 40$  s

**1.7.** On a  $\dot{x} = v_{\text{lim}} \tanh(\alpha t)$  donc

$$x = \frac{v_{\text{lim}}}{\alpha} \ln [\cosh(\alpha t)] + \text{cte}$$

et puisque  $x(t=0) = 0$  alors  $\text{cte}=0$  d'où

$$x = \frac{v_{\text{lim}}}{\alpha} \ln [\cosh(\alpha t)]$$

## 2. ÉTUDE DE LA PHASE DE FREINAGE

**2.1.** Les équations (6) restent valables, il faut juste rajouter un couple sur les roues arrières, on a donc

$$\left\{ \begin{array}{lll} (6.1) & \text{donne} & M\ddot{x} = 2T_1 + 2T_2 + F_{\text{air}} \quad (12.1) \\ (6.2) & \text{donne} & Mg = 2N_1 + 2N_2 \quad (12.2) \\ (6.3) & \text{donne} & 0 = -2hT_1 - 2l_1N_1 - 2hT_2 + 2l_2N_2 \quad (12.3) \\ (6.4) & \text{donne} & \Gamma_1 = 2aT_1 \quad (12.4) \\ (6.5) & \text{donne} & \Gamma_2 = -2aT_2 \quad (12.5) \end{array} \right. \quad (12)$$

**2.2.** On a les équations (12.4) et (12.5) donnent

$$T_1 = \frac{\Gamma_1}{2a} \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{\Gamma_2}{2a} \quad (13)$$

Les équations (12.2) et (12.3) donnent

$$N_1 = \frac{Mgal_2 - h(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2a(l_1 + l_2)} \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{Mgal_1 + h(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2a(l_1 + l_2)} \quad (14)$$

On a  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  négatifs, donc  $T_1$  et  $T_2$  sont aussi négatifs (ils sont suivant  $-\vec{e}_x$ ), ce sont ces forces qui freinent la voiture). D'autre part le contact impose  $N_1$  et  $N_2$  positif (orientées vers le haut).

$$N_2 \geq 0 \quad \text{alors} \quad -(\Gamma_1 + \Gamma_2) \leq \frac{l_1}{h} Mga$$

$\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  étant négatifs, cela implique qu'en valeur absolue la somme des couples de freinage sur les roues doit être inférieure à une certaine valeur sinon la roue arrière peut décoller.

En revanche,  $N_1 > 0$  quel que soit  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , la roue avant ne peut jamais décoller.

## 2.3.

**2.3.1.** Pour qu'il y ait freinage sans glissement il faut que

$$|T_1| \leq f_0 |N_1| \quad \text{et} \quad |T_2| \leq f_0 |N_2|$$

d'où

$$-\frac{\Gamma_1}{2a} \leq f_0 \frac{Mgal_2 - h(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2a(l_1 + l_2)} \quad - \text{et} \quad \frac{\Gamma_2}{2a} \leq f_0 \frac{Mgal_1 + h(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2a(l_1 + l_2)}$$

Si on suppose que les couple de freinage sont les mêmes sur les roues avant et arrière  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  alors

Pour les roues avant

$$\left| \frac{\Gamma}{a} \right| \leq f_0 \frac{Mgal_2 + 2h|\Gamma|}{a(l_1 + l_2)} \quad \text{d'où} \quad |\Gamma| \leq \Gamma_{1M} = f_0 \frac{Mgal_2}{l_1 + l_2 - 2hf_0}$$

Pour les roues arrières :

$$\left| \frac{\Gamma}{a} \right| \leq f_0 \frac{Mgal_1 - 2h|\Gamma|}{a(l_1 + l_2)} \quad \text{d'où} \quad |\Gamma| \leq \Gamma_{2M} = f_0 \frac{Mgal_1}{l_1 + l_2 + 2hf_0}$$

**2.3.2.** On a

$$\frac{\Gamma_{1M}}{\Gamma_{2M}} = \frac{l_2}{l_1} \frac{l_1 + l_2 + 2hf_0}{l_1 + l_2 - 2hf_0} > 1$$

Donc  $\Gamma_{1M} > \Gamma_{2M}$ , ce sont les roues arrière qui glissent en premier.

**2.3.3. Application numérique :**

$$\text{Pour } f_0 = 0,7 \quad \text{on a} \quad \Gamma_{1M} = 2,55.10^3 \text{ N.m}^{-1} \text{ et } \Gamma_{2M} = 8,9.10^2 \text{ N.m}^{-1}$$

$$\text{Pour } f_0 = 0,4 \quad \text{on a} \quad \Gamma_{1M} = 1,16.10^3 \text{ N.m}^{-1} \text{ et } \Gamma_{2M} = 5,76.10^2 \text{ N.m}^{-1}$$

$$\text{Pour } f_0 = 0,1 \quad \text{on a} \quad \Gamma_{1M} = 4,41.10^2 \text{ N.m}^{-1} \text{ et } \Gamma_{2M} = 1,66.10^2 \text{ N.m}^{-1}$$

## 2.4.

**2.4.1. Application numérique :**

$$\text{Pour } v = 130 \text{ km.h}^{-1} \quad \text{on a} \quad F_{\text{air}} = 460 \text{ N}$$

$$\text{Pour } v = 50 \text{ km.h}^{-1} \quad \text{on a} \quad F_{\text{air}} = 69 \text{ N}$$

$$\text{Pour } v = 10 \text{ km.h}^{-1} \quad \text{on a} \quad F_{\text{air}} = 2,7 \text{ N}$$

**2.4.2.** À la limite du roulement sans glissement, les roues arrières sont à la limite du glissement donc  $\Gamma = -\Gamma_{2M}$ .  
alors

$$T_1 = T_2 = -\frac{\Gamma_{2M}}{2a} = -\frac{f_0}{2} \frac{Mgl_1}{l_1 + l_2 + 2hf_0}$$

La force de freinage est

$$F_F = 2T_1 + 2T_2 = -2f_0 \frac{Mgl_1}{l_1 + l_2 + 2hf_0}$$

**Application numérique :**

$$\text{Pour } f_0 = 0,7 \quad \text{on a} \quad |F_F| = 2970 \text{ N}$$

$$\text{Pour } f_0 = 0,4 \quad \text{on a} \quad |F_F| = 1920 \text{ N}$$

$$\text{Pour } f_0 = 0,1 \quad \text{on a} \quad |F_F| = 553 \text{ N}$$



**2.4.3.** On constate que dans presque tous les cas (sauf si  $v = 130 \text{ km.h}^{-1}$  et  $f_0 = 0,1$ ), on peut toujours négliger les frottements de l'air.

On utilise alors la relation (1) pour obtenir l'équation du mouvement en négligeant  $F_{\text{air}}$  ce qui permet d'obtenir

$$M\ddot{x} = 2T_1 + 2T_2 = -2f_0 \frac{Mgl_1}{l_1 + l_2 + 2hf_0} \quad \text{donc} \quad v = v_0 - 2f_0 \frac{gl_1}{l_1 + l_2 + 2hf_0} t$$

On en déduit le temps au bout duquel la voiture s'arrête ( $v = 0$ )

$$t_{ar} = \frac{l_1 + l_2 + 2hf_0}{2f_0gl_1} v_0$$

La distance parcourue lors du freinage est donnée par

$$d = v_0 t - f_0 \frac{gl_1}{l_1 + l_2 + 2hf_0} t^2$$

en injectant  $t_{ar}$  dans la formule de  $d$  on obtient:

$$d_{ar} = \frac{l_1 + l_2 + 2hf_0}{4f_0gl_1} v_0^2$$

**Application numérique :**

|      |                                            |      |                          |
|------|--------------------------------------------|------|--------------------------|
| Pour | $f_0 = 0,7$ et $v = 130 \text{ km.h}^{-1}$ | on a | $d_{ar} = 150 \text{ m}$ |
| Pour | $f_0 = 0,7$ et $v = 50 \text{ km.h}^{-1}$  | on a | $d_{ar} = 22 \text{ m}$  |
| Pour | $f_0 = 0,7$ et $v = 10 \text{ km.h}^{-1}$  | on a | $d_{ar} = 0,7 \text{ m}$ |
| Pour | $f_0 = 0,4$ et $v = 130 \text{ km.h}^{-1}$ | on a | $d_{ar} = 233 \text{ m}$ |
| Pour | $f_0 = 0,4$ et $v = 50 \text{ km.h}^{-1}$  | on a | $d_{ar} = 34 \text{ m}$  |
| Pour | $f_0 = 0,4$ et $v = 10 \text{ km.h}^{-1}$  | on a | $d_{ar} = 1,4 \text{ m}$ |
| Pour | $f_0 = 0,1$ et $v = 130 \text{ km.h}^{-1}$ | on a | $d_{ar} = 808 \text{ m}$ |
| Pour | $f_0 = 0,1$ et $v = 50 \text{ km.h}^{-1}$  | on a | $d_{ar} = 119 \text{ m}$ |
| Pour | $f_0 = 0,1$ et $v = 10 \text{ km.h}^{-1}$  | on a | $d_{ar} = 4,8 \text{ m}$ |

**2.5.** Appliquons le théorème de la puissance cinétique à l'ensemble du système

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}} = 2\mathcal{P}(\vec{T}_1) + \mathcal{P}(\vec{T}_2) + \mathcal{P}(\Gamma_1 = \Gamma_{2M}) + \mathcal{P}(\Gamma_2 = \Gamma_{2M})$$

Or  $\mathcal{P}(\vec{T}_1) = \vec{v}_g \cdot \vec{T}_1 = 0$  et  $\mathcal{P}(\vec{T}_2) = \vec{v}_g \cdot \vec{T}_2 = 0$  car pas de glissement.  
D'où

$$\frac{dE_c}{dt} = 2\Gamma_{2M}\omega = 2\Gamma_{2M}a\dot{x}$$

En intégrant entre le départ avec la vitesse  $v_0$  et l'arrêt  $v = 0$  on trouve

$$0 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = 2\Gamma_{2M}ad_{ar} = 2af_0 \frac{Mgl_1}{l_1 + l_2 + 2hf_0} ad_{ar}$$

D'où

$$d_{ar} = \frac{l_1 + l_2 + 2hf_0}{4f_0gl_1} v_0^2$$



# 13

## Problème : Étude d'un wagonnet (ccp 2010)

Un wagonnet destiné au transport de matière minérale comprend : une plateforme, une benne, deux essieux portant chacun deux roues. L'ensemble présente un plan de symétrie vertical (il s'agit du plan  $xOy$  qui sera défini ultérieurement et qui contient les points  $O_0$ ,  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $G_0$  et  $G$ , voir figure 1). L'ensemble benne-plateforme-essieux sera considéré comme un solide unique, indéformable, de masse  $M = 60$  kg, de centre d'inertie  $G_0$  dont la position est précisée par les longueurs  $a = 0,5$  m et  $b = 0,8$  m. Les quatre roues circulaires et identiques sont de masse  $m = 15$  kg et de rayon  $r = 0,15$  m; elles ont pour centres d'inertie respectifs les points  $G_1$  et  $G_4$  (pour les roues avant) et les points  $G_2$  et  $G_3$  (pour les roues arrière). Ces roues reposent sur deux rails parallèles, écartés de  $2e = 0,6$  m. Le coefficient de frottement d'une roue quelconque sur le rail est noté  $f$ ; il ne sera pas fait de distinction entre coefficients de frottement statique ou dynamique. Les points de contact roues-rail sont appelés  $I_1$  et  $I_4$  (pour les roues avant),  $I_2$  et  $I_3$  (pour les roues arrière).  $O_1$  est le milieu du segment  $I_1I_4$ ,  $O_2$  est le milieu du segment  $I_2I_3$ ,  $O_0$  est le milieu du segment  $O_1O_2$ . Les actions des rails sur les roues se résument à quatre forces  $\vec{R}_1$ ,  $\vec{R}_2$ ,  $\vec{R}_3$ ,  $\vec{R}_4$  dont les points d'application sont  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ . Pour simplifier le problème, on supposera que ces forces n'ont pas de composantes suivant la direction  $\vec{e}_z$  et que, de plus,  $\vec{R}_1 = \vec{R}_4$  et  $\vec{R}_2 = \vec{R}_3$ . On posera  $\vec{R}_1 = T_1\vec{e}_x + N_1\vec{e}_y$  et  $\vec{R}_2 = T_2\vec{e}_x + N_2\vec{e}_y$ ,  $[\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z]$  étant une base définie ci-après.

Soit un référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe un repère cartésien orthonormé direct  $Oxyz$ , de vecteurs unitaires associés  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$ , le plan  $xOy$  est vertical, il passe également par les points  $O_0$ ,  $O_1$ ,  $O_2$ , l'axe  $Ox$  étant parallèle aux rails. Par symétrie le centre d'inertie  $G$  du wagonnet se situe dans le plan  $xOy$ , sa position est précisée par une abscisse  $X$  telle que  $\vec{OG} = X\vec{e}_x + c\vec{e}_y$ . Il est à remarquer que les points  $O_0$ ,  $G$  et  $G_0$  sont alignés.

Pour l'accélération due à la pesanteur, on pourra prendre  $g = \|\vec{g}\| = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

### 1. ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE

Dans un premier temps, on va étudier l'équilibre du wagonnet en présence d'une pente.

Un dispositif de freinage (non figuré) bloque les deux roues avant et laisse libre les roues arrière (dans ce cas on a donc  $T_2 = 0$ ). Les rails se situent dans un plan incliné d'un angle  $\alpha = 5^\circ$  par rapport à l'horizontale (voir figure 2).

**1.1.** Déterminer l'expression de l'ordonnée  $c$  du centre d'inertie  $G$  en fonction de  $m$ ,  $M$ ,  $b$  et  $r$ .

**1.2.** En écrivant que la résultante dynamique du wagonnet est nulle, établir deux relations liant  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $T_1$ ,  $M$ ,  $m$ ,  $g$  et  $\alpha$ .

**1.3.** Calculer la valeur numérique de  $T_1$ .

**1.4.** Le moment dynamique du wagonnet relativement au point  $O_2$  étant nul, établir l'expression de  $N_1$  en fonction de  $M$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $\alpha$ ,  $c$  et  $a$ .

**1.5.** Des questions précédentes, déduire l'expression de  $N_2$ .

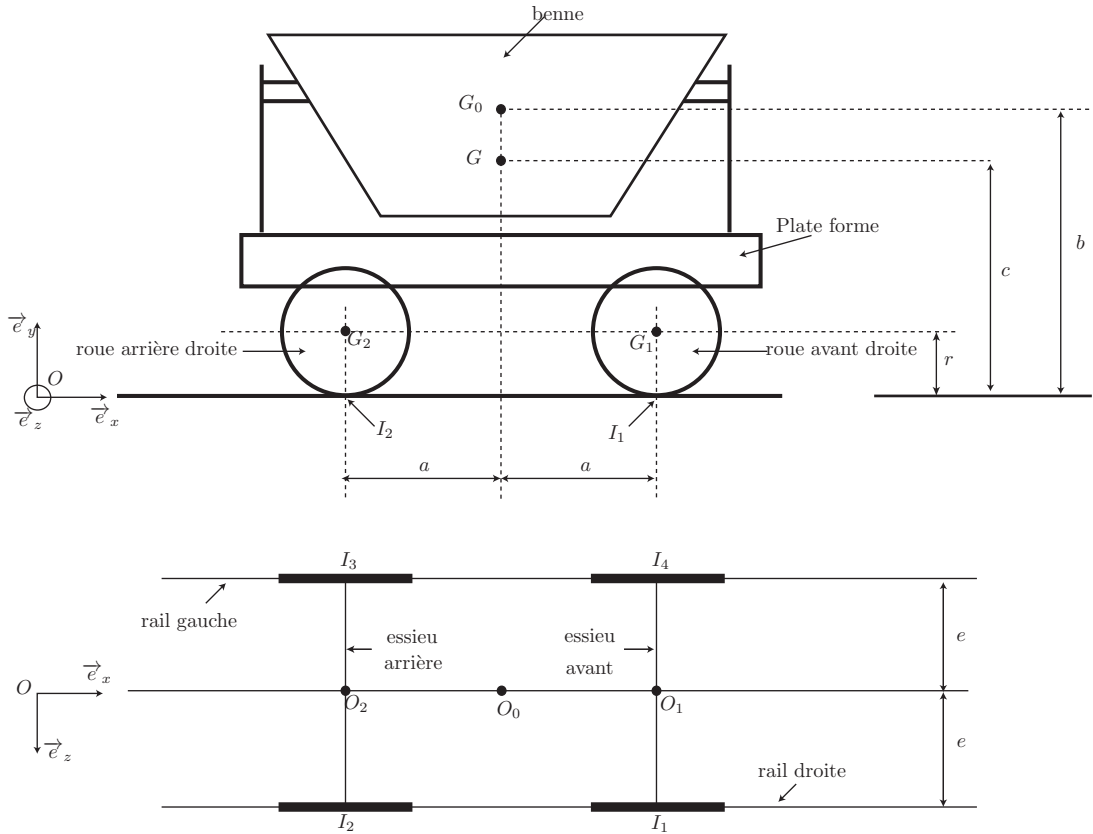


Figure 1:

## 2. ÉTUDE DU MOUVEMENT

Dans un second temps, le système de freinage étant débloqué, le wagonnet se situant toujours sur une pente inclinée de l'angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, on soumet celui-ci à une force  $\vec{F} = F\vec{e}_x$  située dans le plan de symétrie vertical du wagonnet  $xOy$ . Cette force est caractérisée par son intensité constante  $F$  ( $F > 0$ ), sa ligne d'action étant une parallèle aux rails passant par le point  $G$ . Les accélération et vitesse observées étant suffisamment faibles, la résistance à l'avancement du milieu ambiant sera négligée. Le mouvement des roues sur les rails est supposé s'effectuer sans glissement. La vitesse de rotation instantanée est donc identique pour chacune des roues et sera notée  $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ .

- 2.1. Établir la relation de roulement sans glissement liant  $\omega$ ,  $\frac{dX}{dt}$  et  $r$ .
- 2.2. Soit  $J = \frac{1}{2}mr^2$ , le moment d'inertie de l'une quelconque des roues relativement à son axe de rotation. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'une quelconque des roues en fonction de  $m$  et  $\frac{dX}{dt}$ .
- 2.3. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble benne-plateforme-essieux en fonction de  $M$  et  $\frac{dX}{dt}$ , puis celle de l'énergie  $E_c$  du wagonnet en fonction de  $m$ ,  $M$  et  $\frac{dX}{dt}$ .
- 2.4. Retrouver l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du wagonnet.
- 2.5. Exprimer la puissance  $\mathcal{P}$  fournie par la force  $\vec{F}$  en fonction de  $F$ ,  $\frac{dX}{dt}$ .
- 2.6. Les liaisons étant supposées parfaites, déduire des résultats précédents l'expression de l'accélération  $\frac{d^2X}{dt^2}$  en fonction de  $F$ ,  $M$ ,  $m$ ,  $\alpha$ ,  $g$ .

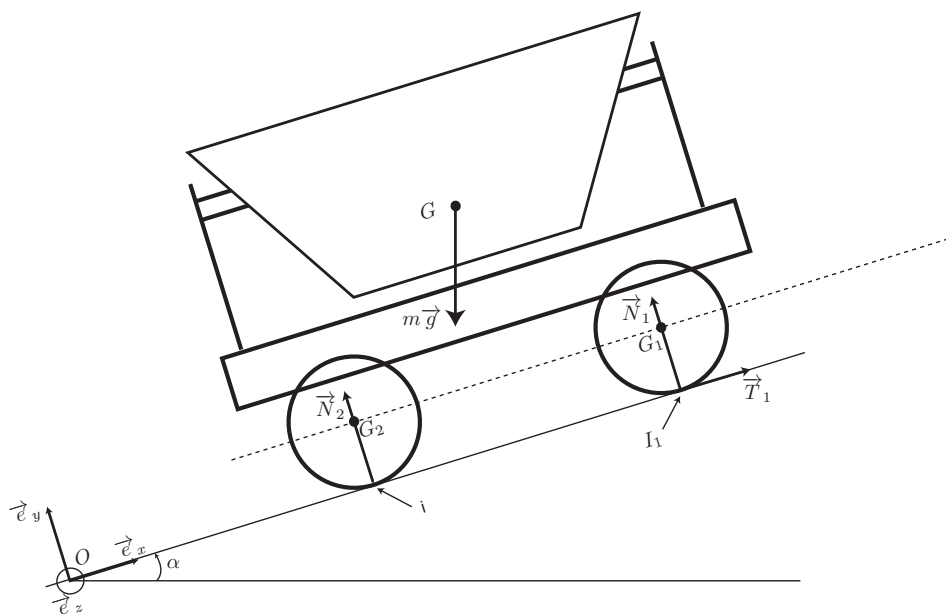


Figure 2:

**2.7.** Donner l'expression du moment cinétique (en  $G_1$ ) de la première roue (avant droit) soit  $\vec{L}_1(G_1)$  en fonction de  $J$  et  $\omega$ .

**2.8.** Appliquer le théorème du moment dynamique pour la première roue. En déduire l'expression de  $T_1$  en fonction de  $m$ ,  $r$  et  $\omega$ , puis en fonction de  $m$ ,  $M$ ,  $g$ ,  $F$  et  $\alpha$ .

**2.9.** Montrer que  $T_1 = T_2$ . Calculer la valeur numérique de ces grandeurs pour  $F = 564,5 \text{ N}$ .

**2.10.** Par projection des forces agissant sur le wagonnet suivant la direction de  $Oy$ , trouver une première relation entre  $N_1$  et  $N_2$ .

**2.11.** Les moments cinétiques aux points  $G_2$ ,  $G_3$ ,  $G_4$  pour les autres roues, soient  $\vec{L}_2(G_2)$ ,  $\vec{L}_3(G_3)$ ,  $\vec{L}_4(G_4)$  possèdent des expressions identiques à celle de  $\vec{L}_1(G_1)$ .

En utilisant ce résultat, donner l'expression de  $\vec{L}(G)$ , moment cinétique en  $G$  du wagonnet. Pour cela, on remarquera que les points  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  et  $G_4$  possèdent la même vitesse soit

$$\vec{V}_{G_1} = \vec{V}_{G_2} = \vec{V}_{G_3} = \vec{V}_{G_4} = \frac{dX}{dt} \vec{e}_x$$

et, de plus, on remarquera que :

$$\vec{GG}_1 + \vec{GG}_2 + \vec{GG}_3 + \vec{GG}_4 = -4(c-r) \vec{e}_y$$

**2.12.** Donner le moment relativement au point  $G$  de la force  $\vec{F}$  et du poids du wagonnet.

**2.13.** Par utilisation du théorème du moment dynamique et d'après les résultats des questions précédentes, trouver une seconde relation entre  $N_1$  et  $N_2$ .

**2.14.** Établir les expressions de  $N_1$  et  $N_2$  en fonction de  $M$ ,  $m$ ,  $c$ ,  $r$ ,  $a$ ,  $g$ ,  $\frac{d^2X}{dt^2}$  et  $\alpha$ .



# Corrigé : Étude d'un wagonnet (ccp 2010)

## 1. ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE

**1.1.** Le centre de masse du système peut être défini par rapport au point  $O_0$  par la relation :

$$(M + 4m)\overrightarrow{O_0G} = m\overrightarrow{O_0G_1} + m\overrightarrow{O_0G_2} + m\overrightarrow{O_0G_3} + m\overrightarrow{O_0G_4} + M\overrightarrow{O_0G_0}$$

En projetant sur  $Oy$  on obtient

$$(M + 4)c = 4mr + Mb$$

d'où

$$c = \frac{4mr + Mb}{M + 4m} \quad (1)$$

**1.2.** La résultante dynamique du wagonnet est nulle alors la somme des forces extérieures appliquées sur le système est nulle d'après le théorème de la résultante cinétique.

Les forces extérieures appliquées sur le wagonnet sont :  $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \vec{R}_4$  et le poids  $\vec{P} = (M + 4m)\vec{g}$   
D'où

$$(M + 4m)\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 + \vec{R}_4 = \vec{0}$$

Les projections sur  $Ox$  et  $Oy$  donnent :

$$\begin{cases} -(M + 4m)g \sin \alpha + 2T_1 = 0 & (2.1) \\ -(M + 4m)g \cos \alpha + 2N_1 + 2N_2 = 0 & (2.2) \end{cases} \quad (2)$$

**1.3.** D'après l'équation (2.1) on déduit que

$$T_1 = \frac{(M + 4m)g \sin \alpha}{2} \quad (3)$$

**Application numérique :**

$$T_1 = 52,3 \text{ N}$$

**1.4.** Le moment dynamique du wagonnet relativement au point  $O_2$  étant nul,  $O_2$  fixe donc d'après le théorème du moment cinétique la somme des moments en  $O_2$  des forces extérieures appliquées sur le wagonnet est nulle d'où

$$\vec{M}_{O_2}(\vec{R}_1) + \vec{M}_{O_2}(\vec{R}_2) + \vec{M}_{O_2}(\vec{R}_3) + \vec{M}_{O_2}(\vec{R}_4) + \vec{M}_{O_2}(\vec{P}) = \vec{0}$$

Or toutes les forces sont ponctuelles alors

$$\vec{M}_{O_2}(\vec{R}_i) = \overrightarrow{O_2I_i} \wedge \vec{R}_i \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, 3 \text{ ou } 4$$

On a  $\vec{R}_1 = \vec{R}_4$  et  $\vec{R}_2 = \vec{R}_3$  alors

$$\vec{M}_{O_2}(\vec{R}_1) + \vec{M}_{O_2}(\vec{R}_4) = (\overrightarrow{O_2I_1} + \overrightarrow{O_2I_4}) \wedge \vec{R}_1 = 2\overrightarrow{O_2O_0} \wedge \vec{R}_1 = 4aN_1\vec{e}_z$$

et

$$\vec{\mathcal{M}}_{O_2}(\vec{R}_2) + \vec{\mathcal{M}}_{O_2}(\vec{R}_3) = (\vec{O_2I_2} + \vec{O_2I_3}) \wedge \vec{R}_2 = \vec{0}$$

Le moment du poids est

$$\vec{\mathcal{M}}_{O_2}(\vec{P}) = \vec{O_2G} \wedge \vec{P} = (M + 4m)g(-a \cos \alpha + c \sin \alpha) \vec{e}_z$$

La projection du théorème du moment cinétique selon  $Oz$  donne

$$N_1 = \frac{(M + 4m)g}{4a}(a \cos \alpha - c \sin \alpha) \quad (4)$$

**1.5.** D'après les équations (2.2) et (4) on trouve

$$N_2 = \frac{(M + 4m)g}{4a}(a \cos \alpha + c \sin \alpha) \quad (5)$$

## 2. ÉTUDE DU MOUVEMENT

**2.1.** La condition de roulement sans glissement pour la roue<sub>1</sub> par exemple est

$$\vec{v}_g(\text{roue}_1/\text{sol}) = \vec{0}$$

Or

$$\vec{v}_g(\text{roue}_1/\text{sol}) = \vec{v}(I_1 \epsilon \text{ roue}_1/\mathcal{R}) - \vec{v}(I_1 \epsilon \text{ sol}/\mathcal{R}) = \vec{v}(I_1 \epsilon \text{ roue}_1/\mathcal{R}) = \vec{v}(G_1/\mathcal{R}) + \vec{I_1G_1} \wedge \vec{\omega}$$

puisque  $G_1$  et  $G$  sont en translation alors  $\vec{v}(G_1/\mathcal{R}) = \vec{v}(G/\mathcal{R}) = \dot{X} \vec{e}_x$   
ainsi

$$\vec{v}_g(\text{roue}_1/\text{sol}) = (\dot{X} + r\omega) \vec{e}_x$$

D'où la condition de non glissement

$$\dot{X} = -r\omega \quad (6)$$

**2.2.** Pour une roue on a d'après le théorème de KOENIG :

$$E_{c_{\text{roue}}} = E_{c_{\text{roue}}}^* + \frac{1}{2}mv_G^2$$

Or

$$E_{c_{\text{roue}}}^* = \frac{1}{2}J\omega^2$$

et d'après l'équation (6) et puisque  $J = \frac{1}{2}mr^2$  alors

$$E_{c_{\text{roue}}} = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{3}{4}m\dot{X}^2$$

**2.3.** Puisque le système benne-plate forme-essieux est en translation alors son énergie cinétique est

$$E_{c_{b-p-e}} = \frac{1}{2}M\dot{X}^2$$

Ainsi l'énergie cinétique du wagonnet s'écrit

$$E_c = 4E_{c_{\text{roue}}} + E_{c_{b-p-e}} = \frac{1}{2}(M + 6m)\dot{X}^2 \quad (7)$$

**2.4.** On sait que

$$dE_p = -\delta W(\vec{P}) = -\vec{P} \cdot d\vec{OG} = -\vec{P} \cdot dX \vec{e}_x = (M + 4m)g \sin \alpha dX$$

d'où

$$E_p = (M + 4m)gX \sin \alpha + \text{cte} \quad (8)$$

On va prendre la constante nulle (la problème ne précise pas les conditions aux limites pour déterminer la constante).



**2.5.** Puisque la force  $\vec{F}$  est ponctuelle et son point d'application a la même vitesse que  $G$  alors sa puissance est

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(G/\mathcal{R}) = F\dot{X}$$

**2.6.** On a d'après le théorème de la puissance cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}) + \mathcal{P}(\vec{R}_1) + \mathcal{P}(\vec{R}_2) + \mathcal{P}(\vec{R}_3) + \mathcal{P}(\vec{R}_4) + \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{int}})$$

avec  $\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{int}})$  la puissance des forces de liaison, et puisque les liaisons sont parfaites alors

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{int}}) = 0$$

Or il y'a roulement sans glissement des roues alors

$$\mathcal{P}(\vec{R}_i) = \vec{R}_i \cdot \vec{v}_g = 0 \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \text{ ou } 4$$

Ainsi

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}) + \mathcal{P}(\vec{P}) = -\frac{dE_p}{dt} + F\dot{X}$$

d'après les équations (7) et (8) on trouve

$$(M + 6m)\dot{X}\ddot{X} = -(M + 4m)g\dot{X}\sin\alpha + F\dot{X}$$

d'où

$$\ddot{X} = \frac{F - (M + 4m)g\sin\alpha}{M + 6m} \quad (9)$$

**2.7.** D'après le théorème de KOENIG on a

$$\vec{L}_{G_1}(\text{roue}_1/\mathcal{R}) = \vec{L}_{G_1}^*(\text{roue}_1) + \overrightarrow{G_1G_1} \wedge m\vec{v}(G_1/\mathcal{R}) = \vec{L}_{G_1}^*(\text{roue}_1)$$

Or  $\vec{L}_{G_1}^*(\text{roue}_1) = J\vec{\omega}$  d'où

$$\vec{L}_{G_1}(\text{roue}_1/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}mr^2\omega\vec{e}_z \quad (10)$$

**2.8.** Le théorème du moment cinétique de la roue<sub>1</sub> s'écrit

$$\frac{d\vec{L}_{G_1}(\text{roue}_1)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{G_1}(\vec{P}_1) + \vec{\mathcal{M}}_{G_1}(\vec{R}_1) + \vec{\mathcal{M}}_{G_1}(\vec{F}_{\text{liaison}_1})$$

La force de liaison s'applique en  $G_1$ , la même chose pour le poids  $\vec{P}_1$  d'où

$$\vec{\mathcal{M}}_{G_1}(\vec{F}_{\text{liaison}_1}) = \vec{0} \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_{G_1}(\vec{P}_1) = \vec{0}$$

Le moment de la réaction  $\vec{R}_1$  s'écrit

$$\vec{\mathcal{M}}_{G_1}(\vec{R}_1) = \overrightarrow{G_1I_1} \wedge \vec{R}_1 = -r\vec{e}_y \wedge (T_1\vec{e}_x + N_1\vec{e}_y) = rT_1\vec{e}_z$$

et d'après l'équation (10) le théorème du moment cinétique s'écrit

$$\frac{1}{2}mr^2\frac{d\omega}{dt} = rT_1$$

d'où

$$T_1 = \frac{1}{2}mr\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2}m\ddot{X} \quad (11)$$

Ans d'après l'équation (9)

$$T_1 = -\frac{1}{2}m\frac{F - (M + 4m)g\sin\alpha}{M + 6m} \quad (12)$$

**2.9.** Il n'y a aucune différence entre la roue<sub>2</sub> et la roue<sub>1</sub>, donc par un calcul analogue on trouve la formule de  $T_2$  qui sera la même que celle de  $T_1$ .

**Application numérique :**

$$T_1 = T_2 = -23 \text{ N}$$

**2.10.** Par rapport à la relation (2), qui était la projection du théorème de la résultante cinétique selon  $Oy$ , rien ne change puisque le seul changement c'est la force  $\vec{F}$  et cette force est selon  $Ox$ . donc

$$N_1 + N_2 = \frac{(M + 4m)g \cos \alpha}{2} \quad (13)$$

**2.11.** On a d'après l'équation (10) :  $\vec{L}_{G_1}(\text{roue}_1) = \frac{1}{2}mr^2\omega\vec{e}_z$  or d'après la relation du changement de point on a

$$\vec{L}_G(\text{roue}_1) = \vec{L}_{G_1}(\text{roue}_1) + \vec{G}\vec{G}_1 \wedge m\vec{v}(G_1)$$

d'où on a pour les autres roues

$$\begin{cases} \vec{L}_G(\text{roue}_1) = \frac{1}{2}mr^2\omega\vec{e}_z + \vec{G}\vec{G}_1 \wedge m\dot{X}\vec{e}_x \\ \vec{L}_G(\text{roue}_2) = \frac{1}{2}mr^2\omega\vec{e}_z + \vec{G}\vec{G}_2 \wedge m\dot{X}\vec{e}_x \\ \vec{L}_G(\text{roue}_3) = \frac{1}{2}mr^2\omega\vec{e}_z + \vec{G}\vec{G}_3 \wedge m\dot{X}\vec{e}_x \\ \vec{L}_G(\text{roue}_4) = \frac{1}{2}mr^2\omega\vec{e}_z + \vec{G}\vec{G}_4 \wedge m\dot{X}\vec{e}_x \end{cases}$$

L'ensemble benne-plate forme- essieux est en translation donc

$$\vec{L}_{G_{b-p-e}} = M\vec{G}\vec{G}_0 \wedge \dot{X}\vec{e}_x$$

Ainsi le moment cinétique du wagonnet est

$$\vec{L}_G = 2mr^2\omega\vec{e}_z + \left( M\vec{G}\vec{G}_0 + m\vec{G}\vec{G}_1 + m\vec{G}\vec{G}_2 + m\vec{G}\vec{G}_3 + m\vec{G}\vec{G}_4 \right) \wedge \dot{X}\vec{e}_x$$

Par définition du centre de masse le terme entre parenthèse est nul d'où

$$\vec{L}_G = 2mr^2\omega\vec{e}_z \quad (14)$$

**2.12.** La force  $\vec{F}$  et le poids  $\vec{P}$  passe par  $G$  donc leur moment par rapport à  $G$  sont nuls

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P}) = \vec{0}$$

**2.13.** Le théorème du moment cinétique en  $G$  permet d'écrire

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{R}_1) + \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{R}_2) + \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{R}_3) + \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{R}_4) + \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}) = \frac{d(2mr^2\omega\vec{e}_z)}{dt}$$

On a

$$\vec{G}\vec{I}_1 \wedge \vec{R}_1 + \vec{G}\vec{I}_4 \wedge \vec{R}_4 = 2\vec{G}\vec{O}_1 \wedge \vec{R}_1 = (2aN_1 + 2cT)\vec{e}_z$$

et

$$\vec{G}\vec{I}_2 \wedge \vec{R}_2 + \vec{G}\vec{I}_3 \wedge \vec{R}_3 = 2\vec{G}\vec{O}_2 \wedge \vec{R}_2 = -(2aN_2 + 2cT)\vec{e}_z$$

d'où d'après l'équation (6)

$$2a(N_1 - N_2) + 4cT = 2mr^2\frac{d\omega}{dt} = -2mr\ddot{X}$$

et d'après l'équation (11) on trouve

$$a(N_1 - N_2) - mc\ddot{X} = -mr\ddot{X}$$

ainsi

$$N_1 - N_2 = \frac{m(c-r)}{a}\ddot{X} \quad (15)$$

**2.14.** D'après les équations (13) et (15) on trouve

$$N_1 = \frac{1}{4} \left[ (M + 4m)g \cos \alpha + \frac{2m}{a}(c - r)\ddot{X} \right]$$

$$N_2 = \frac{1}{4} \left[ (M + 4m)g \cos \alpha - \frac{2m}{a}(c - r)\ddot{X} \right]$$

**Proétudes.blogspot.com**  
**PROÉTUDES**  
**Surfer en toute confiance**