Exercices et Problèmes
Corrigés et détaillés
Cours et Points Méthodes

MATHÉMATIQUES EN AFRIQUE
EN TERMINALES C,D&SI

COLLECTION MATHS EN AFRIQUE
ÉDITION 2023

AVANT PROPOS

Dans le souci d'apporter un ouvrage adapté au programme en vigueur en terminales scientifiques, j'avais à coeur de mettre à disposition des lycéens du Gabon et des pays d'Afrique francophone cet outil de travail : **Mathématiques en Afrique tome 1**.

Celui-ci participe d'une collection intitulée **Collection maths en Afrique** qui ambitionne de donner à chaque lycéen du Gabon et d'Afrique francophone des outils d'assimilation du cours, de le soutenir dans son travail personnel pour une préparation efficace et sereine à l'épreuve de mathématiques au baccalauréat.

Le présent volume, de la collection, est rédigé à l'attention des élèves de terminales séries C,D et SI. Il a pour objectifs de :

- ☞ fournir des outils permettant d'organiser une préparation optimale à l'épreuve de mathématiques au baccalauréat;

- ☞ permettre aux futurs étudiants d'acquérir une culture mathématique très solide afin de faciliter la transition lycée - université;

- ☞ proposer des exercices de synthèse, ceux-ci permettent de vérifier si les notions présentées sont assimilées et de déjouer les pièges qui s'y rapportent.

Les mathématiques sont, comme toute autre discipline à caractère scientifique, à la portée de l'élève qui veut non seulement les apprivoiser, mais aussi et surtout faire les efforts constants afin de combler ses propres lacunes, d'approfondir ses acquis et d'affermir ses aptitudes. Mon souhait le plus cher est de contribuer à l'amélioration des performances de chaque élève de terminale avant et après le baccalauréat.

L'auteur

Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer.

Francis BACON *philosophe, scientifique (1561- 1626).*

c'est–à–dire pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$, $x \leq \tan x$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \sin t$.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = \cos t \leq 1$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité des accroissements finis nous permet d'obtenir l'inégalité pour tout $t \in [0; x]$ ou $t \in [x; 0]$,

$$|g(x) - g(0)| \leq 1 \times |x - 0|$$

   c'est–à–dire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.

7.4.3 Variations et signe de la dérivée

L'application la plus importante du **théorème de Rolle** (page 80) est sans doute celle qui lie les variations d'une fonction au signe de sa dérivée :

Théorème. *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *d'intérieur non vide, de bornes a et b* $(a < b)$, *et* $f: I \to \mathbb{R}$ *une application continue sur* I *et dérivable sur l'interieur* $]a, b[$ *de* I. *Alors :*

1. (f *croissante sur* I) $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in]a, b[\ f'(x) \geq 0)$.
2. (f *décroissante sur* I) $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in]a, b[\ f'(x) \leq 0)$.
3. (f *est constante sur* I) $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in]a, b[\ f'(x) = 0)$.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

☞ *On dit qu'un intervalle* $I = [a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *est d'intérieur non vide si pour tout* x *de l'inter–valle ouvert* $]a, b[$ *il existe un intervalle ouvert* $]c, d[$ *contenant* x *tel que* $]c, d[\subset]a, b[$.

☞ En considérant les hypothèses du théorème ci–dessus, on en déduit le théorème suivant :

Théorème. *L'applivation* $f: I \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante sur* I *si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

1. $\forall x \in]a, b[\ f'(x) \geq 0$,
2. *L' ensemble* $\{x \in]a, b[/ f'(x) = 0\}$ *ne contient pas d'intervalle de longueur non nulle.*

Exercice 56. Définition de la fonction arctangente
Soit f la fonction définie de $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \tan x$.

1. Démontrer que f admet une bijection réciproque définie sur $\mathbb{R}$ que l'on notera arctan. En déduire sa fonction dérivée.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, calculer :

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a alors $\frac{z_1}{z_2} = \lambda$, donc

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv 0[2\pi] &\Leftrightarrow \arg(z_1) - \arg(z_2) \equiv 0[2\pi] \\ &\Leftrightarrow \arg(z_1) \equiv \arg(z_2)[2\pi]\end{aligned}$$

Lorsqu'on a l'égalité, z_1 et z_2 ont le même argument, modulo 2π.

II. 1) Montrons par récurrence que l'on a :

$$\forall n \geq 2, \forall (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

- **Initialisation :** pour $n=2$, on a $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ d'après la question **A.I.2**. Donc, (H_2) est vraie.
- **Hérédité :** supposons l'hypothèse vraie au rang n.
  On choisit le $(n+1)$-uplet $(z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1})$ de nombres complexes. On a :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} |z_k| + z_{n+1}\right| \\ \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| \\ \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|\end{aligned}$$

  L'hypothèse reste donc encore vraie au rang $n+1$.
  Donc pour tout $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

2) Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des nombres complexes tous non nuls.

Supposons que $\forall k \in [\![1, n]\!], \ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \ z_k = \lambda_k z_1$.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_1\right| \\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1\right| \\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) |z_1| \ \text{ car } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \geq 0 \\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k |z_1|) \\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k z_1| \\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \sum_{k=1}^{n} |z_k|\end{aligned}$$

Synthèse–Montrons alors par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$: $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. On a $P(0)$ et $P(1)$ vérifiées par définition de (λ, μ). Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et $u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n \\ u_{n+2} &= a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ u_{n+2} &= \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2} \end{aligned}$$

car ${r_1}^2 = a r_1 + b$ et ${r_2}^2 = a r_2 + b$. Ainsi on a $P(n+2)$ vraie. En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Supposons maintenant que l'equation admette une solution double $r \neq 0$

Analyse–Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$. On cherche $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant cette relation. Pour $n=0$ et $n=1$, on obtient $\begin{cases} \lambda = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{cases}$. Ce systleme admet une unique solution $(\lambda, \mu) = \left(u_0, \frac{u_1 - r u_0}{r}\right)$. Ainsi, le couple (λ, μ) est unique.

Synthèse–Montrons alors par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$: $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$. On a $P(0)$ et $P(1)$ vérifiées par définition de (λ, μ). Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$ et $u_{n+1} = \lambda r^{n+1} + \mu (n+1) r^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n \\ u_{n+2} &= a(\lambda r^{n+1} + \mu (n+1) r^{n+1}) + b(\lambda r^n + \mu n r^n) \\ u_{n+2} &= \lambda r^{n+2} + \mu (n+2) r^{n+2} \end{aligned}$$

car $r^2 = ar + b$ et $r = \frac{a}{2}$. Ainsi on a $P(n+2)$ vraie. En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. □

Propriété 2. *Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Cas réel)*
Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ *et* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite définie par* $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ *et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

L'equation $r^2 - ar - b = 0$ *est appelée l'equation caractéristique.*

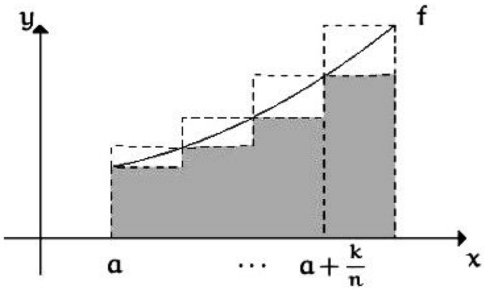
- *Si l'equation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes* r_1 *et* r_2*, alors :*
$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
- *Si l'equation caractéristique admet une solution réelle double* r*, alors :*
$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$$
- *Si l'quation caractéristique admet deux racines complexes (non réelles) conjuguées* $r_1 = r e^{i\theta}$ *et* $r_2 = r e^{-i\theta}$ *(avec* $r > 0$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$*), alors :*
$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$

9.2.2 Méthode des rectangles

Soient I un intervalle (non vide, non réduit à un point) et f une fonction dérivable sur I telle que : $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq M$ où M est un nombre réel positif.

On fixe deux réels $a, b \in I$, tel que $a \leq b$. Pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ on pose

$$\begin{aligned} x_k &= a + k\frac{b-a}{n}, \text{ pour } k = 0, 1, \ldots n \\ s_n &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) \end{aligned}$$



cas particulier.

Proposition.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$, telle que $|f'|$ admet un majorant M sur cet intervalle. Lorsque l'on partage $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude et d'extrémités $a = x_0 < x_2 < \cdots < x_n = b$, on a :

- *la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$, converge vers $\int_a^b f(x)dx$.*
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|s_n - \int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \frac{M}{2n}(b-a)^2$

Démonstration.

■ **Montrons d'abord l'inégalité :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|s_n - \int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \frac{M}{2n}(b-a)^2$.

Pour tout $k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n-1$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx\right) &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\ \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx\right) &= \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

Puisque $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$ et de l'égalité précédente on en déduit :

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \\ s_n &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right)\int_{x_k}^{x_{k+1}} dx \\ s_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dx\right) \end{aligned}$$

par suite,

$$h\left(2+\frac{j}{n}\right)\int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}}dx \le \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}}h(x)dx \le h\left(2+\frac{j+1}{n}\right)\int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}}dx$$

c'est-à-dire : $\frac{1}{n}h\left(2+\frac{j}{n}\right) \le \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}}h(x)dx \le \frac{1}{n}h\left(2+\frac{j+1}{n}\right)$

c) De la question précédente, on en déduit successivement les inégalités .

$$\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{n}h\left(2+\frac{j}{n}\right) \le \sum_{j=0}^{n-1}\int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}}h(x)dx \le \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{n}h\left(2+\frac{j+1}{n}\right)$$

par suite, $u_n-\frac{1}{n}h(3) \le \int_2^3 h(x)dx \le \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}h\left(2+\frac{j}{n}\right)$ ce qui entraîne que pour tout entier naturel non nul n : $u_n-\frac{1}{n}h(3) \le I \le u_n-\frac{1}{n}h(2)$.

d) D'après l'inégalité précédente, on en déduit pour tout entier naturel non nul n, $\frac{1}{n}h(3) \le I-u_n \le -\frac{1}{n}h(2)$

Puisque $\lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{1}{n}h(3)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{1}{n}h(2)\right] = 0$ alors par le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite $(u_n)_n$ converge vers I c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}h\left(2+\frac{j}{n}\right) = \int_2^3 h(x)dx$$

Exercice 118. Extrait bac C Côte d'Ivoire 97

On considère les intégrales I_n et J_n définies par :

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}dx$ et, pour tout entier naturel non nul, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin x)^n}{\cos x}dx$;

$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,dx$ et, pour tout entier naturel non nul, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin x)^n\cos x\,dx$.

1. a) Calculer J_0 et J_n pour tout entier naturel non nul n.
   b) Calculer $I_2 - I_0$ et démontrer que pour tout entier naturel n,
   $$I_{n+2}-I_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$
2. a) Calculer I_1.
   b) En déduire I_3.
3. Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.
   a) Démontrer que, pour tout x réel : $\cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.
   b) On pose, pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$: $u(x) = \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.
   Calculer $\frac{u'(x)}{u(x)}$. En déduire une primitive de f sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.
   c) Calculer I_0 puis I_2 et I_4.