Exercice 1 [02357] [correction]
Soit E un ensemble de cardinal n, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E ayant k classes d'équivalence et $G = \left\{(x,y) \in E^2 / x\mathcal{R}y\right\}$ le graphe de $\mathcal{R}$ supposé de cardinal p. Prouver qu'on a $n^2 \leqslant kp$.

Exercice 2 [02358] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on désigne par N le nombre de diviseurs positifs de n et par P leur produit.
Relation entre n, N et P ?

Exercice 3 [02359] [correction]
Soit A la somme des chiffres de 4444^{4444}, B celle de A et enfin C celle de B. Que vaut C ?

Exercice 4 [02361] [correction]
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et a, b deux entiers relatifs avec $b > 0$ et $\sqrt{b}$ irrationnel.
a) Exemple : montrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel.
b) Quelle est la forme de $(a+\sqrt{b})^n$?
c) Montrer que si $a+\sqrt{b}$ est racine de P alors $a-\sqrt{b}$ aussi.
d) On suppose que $a+\sqrt{b}$ est racine double de P. Montrer que $P = RQ^2$ avec R et Q dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 5 [02362] [correction]
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer :

$$\sum_{X\subset E} \mathrm{Card} X, \sum_{X,Y\subset E} \mathrm{Card}(X\cap Y) \text{ et } \sum_{X,Y\subset E} \mathrm{Card}(X\cup Y)$$

Exercice 6 [02363] [correction]
Quel est le plus petit entier n tel qu'il existe un groupe non commutatif de cardinal n ?

Exercice 7 [02364] [correction]
Soit un entier $n \geqslant 2$. Combien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ admet-il de sous-groupes ?

Exercice 8 [02365] [correction]
Soit p un nombre premier ; on pose

$$G_p = \left\{z \in \mathbb{C}; \exists k \in \mathbb{N}, z^{p^k} = 1\right\}$$

a) Montrer que G_p est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^\star, \times)$.
b) Montrer que les sous-groupes propres de G_p sont cycliques et qu'aucun d'eux n'est maximal pour l'inclusion.
c) Montrer que G_p n'est pas engendré par un système fini d'éléments.

Exercice 9 [02366] [correction]
Montrer que

$$\left\{x + y\sqrt{3} / x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1\right\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^\star, \times)$.

Exercice 10 [02367] [correction]
Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
a) Soit p un entier et q un entier strictement positif premier avec p. Montrer que si $p/q \in A$ alors $1/q \in A$.
b) Soit I un idéal de A autre que $\{0\}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $I \cap \mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ et qu'alors $I = nA$.
c) Soit p un nombre premier. On pose

$$Z_p = \{a/b; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^\star, p \wedge b = 1\}$$

Montrer que si $x \in \mathbb{Q}^\star$ alors x ou $1/x$ appartient à Z_p.
d) On suppose ici que x ou $1/x$ appartient à A pour tout $x \in \mathbb{Q}^\star$. On note I l'ensemble des éléments non inversibles de A.
Montrer que I inclut tous les idéaux stricts de A. En déduire que $A = \mathbb{Q}$ ou $A = Z_p$ pour un certain nombre premier p.

Exercice 11 [02368] [correction]
Soit n un entier naturel non nul, $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$.
Soit S_n l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Soit $t_i = (1, i)$.
Pour $s \in S_n$, on définit $u_s(e_i) = e_{s(i)}$.
a) Montrer que $(t_2, t_3, \ldots, t_n)$ engendre S_n.
b) Interpréter géométriquement u_s lorsque s est une transposition.
c) Soit $s = (1\ 2\ \ldots\ n-1\ n)$. On suppose que s est la composée de p transpositions. Montrer que $p \geqslant n-1$.
d) Quelle est le cardinal minimal d'une famille de transpositions génératrice de S_n ?

Exercice 12 [02369] [correction]
On suppose que n est un entier $\geqslant 2$ tel que $2^n - 1$ est premier.
Montrer que n est nombre premier.

Exercice 13 [02370] [correction]
On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout entier $n > 0$, on note $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. On note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers au plus égaux à x.
a) Montrer que $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.
b) Montrer que $\binom{2n}{n}$ divise $\prod_{p\in\mathcal{P};p\leqslant 2n} p^{\left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor}$.
c) Montrer que $\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\pi(2n)}$.
d) Montrer que $\frac{x}{\ln x} = O(\pi(x))$ quand $x \to +\infty$

Exercice 14 [03199] [correction]
Soient $A(1,0)$ et $B(0,1)$. Les points $M_0(x_0,y_0)$ et $M_1(x_1,y_1)$ sont donnés.
On construit le point P_0 par les conditions :
– les droites (P_0M_0) et (Ox) sont parallèles ;
– $P_0 \in (AB)$.
On construit le point Q_0 par les conditions :
– les droites (P_0Q_0) et (M_1B) sont parallèles ;
– $Q_0 \in (AM_1)$.
Soit le point $M_2(x_2,y_2)$ tel que le quadrilatère $(M_0P_0Q_0M_2)$ soit un parallélogramme.
On pose
$$M_2 = M_0 \star M_1$$
a) Démontrer
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1y_0 \\ y_0y_1 \end{pmatrix}$$
b) Démontrer que la loi $\star$ est associative, admet un élément neutre et que, si $y_0 \neq 0$, le point M_0 admet un inverse.
c) On définit une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de M_0, de M_1 et de la relation de récurrence valable pour tout entier $n \geqslant 2$
$$M_n = M_{n-1} \star M_{n-2}$$
Déterminer y_n en fonction de y_0 et de y_1.

Exercice 15 [00164] [correction]
Soient p, q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
a) Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$.
b) Préciser alors $\operatorname{Im}(p+q)$ et $\ker(p+q)$.

Exercice 16 [00181] [correction]
Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
a) On suppose $\dim F_1 = \dim F_2$. Montrer qu'il existe G sous-espace vectoriel de E tel que $F_1 \oplus G = F_2 \oplus G = E$.
b) On suppose que $\dim F_1 \leqslant \dim F_2$. Montrer qu'il existe G_1 et G_2 sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \oplus G_1 = F_2 \oplus G_2 = E$ et $G_2 \subset G_1$.

Exercice 17 [02379] [correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^6)$ tel que $\operatorname{rg} f^2 = 3$. Quels sont les rangs possibles pour f ?

Exercice 18 [00198] [correction]
Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et
$$A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$
a) A quelle condition la matrice A est-elle inversible ?
b) Donner son inverse quand cela est possible.

Exercice 19 [00730] [correction]
Soit M une matrice carrée de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$.
Montrer que si $\operatorname{tr} M = 0$, il existe deux matrices A et B telles que
$$M = AB - BA$$

Exercice 20 [01322] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $A^2 = O_3$.
Déterminer la dimension de l'espace
$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM - MA = O_3\}$$

Exercice 21 [02380] [correction]
Quels sont les $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telles que $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$?

Exercice 22 [02382] [correction]
Quelles sont les matrices carrées réelles d'ordre n qui commutent avec $\text{diag}(1, 2, \ldots, n)$ et lui sont semblables ?

Exercice 23 [02385] [correction]
Calculer

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Exercice 24 [02386] [correction]
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ distincts et $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$. Calculer :

$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} \frac{P(X)}{X-\lambda_1} & \frac{P(X)}{X-\lambda_2} & \cdots & \frac{P(X)}{X-\lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Exercice 25 [02387] [correction]
a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0$$

b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.
c) Trouver un contre-exemple à b) si A et B ne commutent pas.
d) Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

Exercice 26 [02388] [correction]
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et H une partie non vide et finie de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ stable par multiplication.
a) Soit $M \in H$. Montrer que $k \in \mathbb{N}^\star \mapsto M^k \in H$ n'est pas injective.
En déduire que H est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.
Soient

$$q = |H| \text{ et } P = \frac{1}{q} \sum_{M \in H} M$$

b) Montrer, si $M \in H$, que $MP = PM = P$. En déduire $P^2 = P$.
c) Trouver un supplémentaire, dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, stable par tous les éléments de H, de

$$\bigcap_{M \in H} \ker(M - I_n)$$

d) Montrer que

$$\sum_{M \in H} \text{tr} M \in q\mathbb{N}$$

Que dire si cette somme est nulle ?

Exercice 27 [02390] [correction]
Soit n un entier $\geqslant 2$ et $\mathcal{A}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable pour le produit matriciel.
a) On suppose que $I_n \notin \mathcal{A}$. Montrer, si $M^2 \in \mathcal{A}$, que $M \in \mathcal{A}$. En déduire que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ que la matrice $E_{i,i}$ est dans $\mathcal{A}$. En déduire une absurdité.
b) On prend $n = 2$. Montrer que $\mathcal{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 28 [03164] [correction]
Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure.
Montrer que T commute avec sa transposée si, et seulement si, la matrice T est diagonale.

Exercice 29 [00760] [correction]
Soit $E = E_1 \oplus E_2$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On considère

$$\Gamma = \{u \in \mathcal{L}(E), \ker u = E_1 \text{ et } \text{Im} u = E_2\}$$

a) Montrer, pour tout u de Γ que $\tilde{u} = u_{E_2}$ est un automorphisme de E_2.
Soit $\phi : \Gamma \to \text{GL}(E_2)$ définie par $\phi(u) = \tilde{u}$.
b) Montrer que $\circ$ est une loi interne dans Γ.

c) Montrer que ϕ est un morphisme injectif de $(\Gamma, \circ)$ dans $(\mathrm{GL}(E_2), \circ)$.
d) Montrer que ϕ est surjectif.
e) En déduire que $(\Gamma, \circ)$ est un groupe. Quel est son élément neutre ?

Exercice 30 [00853] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $f(M) = AM$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) L'application f est-elle un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
b) Etudier l'équivalence entre les inversibilités de A et de f.
c) Etudier l'équivalence entre les diagonalisabilités de A et de f.

Exercice 31 [00867] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^p = 0$.
a) Montrer que $A^n = 0$.
b) Calculer $\det(A + I_n)$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AM = MA$.
c) Calculer $\det(A + M)$ (on pourra commencer par le cas où $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).
d) Le résultat est-il vrai si M ne commute pas avec A ?

Exercice 32 [01324] [correction]
Soient $E = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$,
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$
et $\Phi : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ définie par
$$\Phi(S) = AS + {}^tAS$$
a) Déterminer la matrice de Φ dans une base de E.
b) Quelle relation existe-t-il entre les polynômes caractéristiques χ_Φ et χ_A ?
c) Si Φ est diagonalisable, la matrice A l'est-elle ?
d) Si A est diagonalisable, l'endomorphisme Φ l'est-il ?

Exercice 33 [02389] [correction]
a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $B \in \mathbb{K}[A]$ ou $A \in \mathbb{K}[B]$.
b) Le résultat subsiste-t-il dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$?

Exercice 34 [02391] [correction]
Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et
$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
Montrer que J est diagonalisable.

Exercice 35 [02393] [correction]
Existe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de polynôme minimal $X^2 + 1$?

Exercice 36 [02395] [correction]
Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle. Soient u et v des endomorphismes de E ; on pose $[u, v] = uv - vu$.
a) On suppose $[u, v] = 0$. Montrer que u et v sont cotrigonalisables.
b) On suppose $[u, v] = \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^\star$. Montrer que u est nilpotent et que u et v sont cotrigonalisables.
c) On suppose l'existence de complexes α et β tels que $[u, v] = \alpha u + \beta v$. Montrer que u et v sont cotrigonalisables.

Exercice 37 [02441] [correction]
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, u, v dans $\mathcal{L}(E)$ et a, b dans $\mathbb{C}$. On suppose
$$u \circ v - v \circ u = au + bv$$
a) On étudie le cas $a = b = 0$.
Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.
b) On étudie le cas $a \neq 0$, $b = 0$.
Montrer que u est non inversible.
Calculer $u^n \circ v - v \circ u^n$ et montrer que u est nilpotent.
Conclure que u et v ont un vecteur propre en commun.
c) On étudie le cas $a, b \neq 0$.
Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.

Exercice 38 [03616] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $E^\star = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E.

a) Montrer que $L : E \to E^\star$, $A \mapsto L_A$ où L_A est la forme linéaire $M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$ est un isomorphisme
d'espaces vectoriels. En déduire une description des hyperplans de E.
b) Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$une matrice triangulaire supérieure non nulle et $H = \ker L_T$.
On note T_n^+(respectivement T_n^-) le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) à diagonales nulles.
Déterminer $H \cap T_n^+$.
En discutant selon que T possède ou non un coefficient non nul (au moins) hors de la diagonale, déterminer la dimension de $H \cap T_n^-$.
c) Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.
Prouver que les éléments de $T_n^+ \cup T_n^-$ sont des matrices nilpotentes.
En déduire que H contient au moins $n^2 - n - 1$ matrices nilpotentes linéairement indépendantes.
d) Montrer que tout hyperplan de E contient au moins $n^2 - n - 1$ matrices nilpotentes linéairement indépendantes.
[Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 39 [03113] [correction]
a) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'inverse de

$$\begin{pmatrix} I_n & D \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables telles que $\operatorname{Sp}A \cap \operatorname{Sp}B = \emptyset$.
Montrer que pour tout matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les matrices suivantes sont semblables

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O_n & B \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & B \end{pmatrix}$$

Exercice 40 [03185] [correction]
a) Soit u un endomorphisme inversible d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant

$$u^{-1} = Q(u)$$

b) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui envoie le polynôme $P(X)$ sur $P(2X)$.
Montrer que u est un automorphisme et déterminer ses éléments propres.
Existe-t-il $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$u^{-1} = Q(u)?$$

Exercice 41 [03213] [correction]
Soient $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ endomorphisme de rang 2.
Déterminer le polynôme caractéristique de f en fonction de $\operatorname{tr} f$ et $\operatorname{tr} f^2$.

Exercice 42 [03645] [correction]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$M^2 + {}^tM = I_n$$

a) Montrer

$$M \text{ inversible si, et seulement si, } 1 \notin \operatorname{Sp}M$$

b) Montrer que la matrice M est diagonalisable.

Exercice 43 [02396] [correction]
Soit $(E, \langle\ |\ \rangle)$ un espace euclidien non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{tr}(u) = 0$.
a) Montrer qu'il existe $x \in E \backslash \{0\}$ tel que $\langle u(x) \mid x\rangle = 0$.
b) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

Exercice 44 [02397] [correction]
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u un endomorphisme de E.
a) Réduire l'expression

$$\varphi(x, y, z) = [u(x), y, z] + [x, u(y), z] + [x, y, u(z)]$$

b) Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$v(x \wedge y) = u(x) \wedge y - u(y) \wedge x$$

Exercice 45 [02401] [correction]
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer, si $A^tA = B^tB$, qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = AQ$.

Exercice 46 [02403] [correction]
a) Trouver les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer qu'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 47 [02404] [correction]
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$$

b) Montrer

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$$

c) Peut-on avoir simultanément :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| = n\sqrt{n} \text{ et } \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| = n?$$

Exercice 48 [02408] [correction]
On se place dans l'espace euclidien E.
1) Soit p un projecteur de E.
Etablir l'équivalence des conditions suivantes :
(i) p est un projecteur orthogonal ;
(ii) $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$;
(iii) p est autoadjoint.
2) Soient p et q deux projecteurs orthogonaux.
a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est autoadjoint.
b) Montrer que

$$(\mathrm{Im}p + \ker q)^{\perp} = \mathrm{Im}q \cap \ker p$$

c) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Exercice 49 [03084] [correction]
Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique réelle est positif ou nul.

Exercice 50 [03189] [correction]
Soient E un espace euclidien et $f \in \mathrm{GL}(E)$.
a) Démontrer l'existence d'une base orthonormée de E transformée par f en une base orthogonale.
b) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Démontrer l'existence de deux matrices orthogonales U et V telles que UMV soit diagonale.
Même question avec M non inversible.
c) Application

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 51 [03738] [correction]
a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
A quelles conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c existe-t-il $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PB^tP$?
A quelles conditions nécessaires et suffisantes sur a existe-t-il $b, c \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ tels que $A = PB^tP$?
A quelles conditions nécessaires et suffisantes sur c existe-t-il $a, b \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ tels que $A = PB^tP$?
b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
A quelles conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c, d existe-t-il $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$?
A quelles conditions nécessaires et suffisantes sur a existe-t-il $b, c, d \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tels que $A = PBP^{-1}$?
A quelles conditions nécessaires et suffisantes sur d existe-t-il $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tels que $A = PBP^{-1}$?
c) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier l'existence de

$$\max_{P,Q\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \det\left(PA^tP + QB^tQ\right)$$

d) Calculer ce maximum si $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
e) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\sup_{P,Q\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \det\left(PAP^{-1} + QBQ^{-1}\right)$$

est-il fini en général ? (Si oui, le montrer, si non, donner un contre-exemple).
f) De manière générale, si $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ déterminer

$$\max_{P_1,\ldots,P_k\in\mathcal{O}_2(\mathbb{R})} \det\left(P_1A_1{}^tP_1 + \cdots + P_kA_k{}^tP_k\right)$$

[Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 52 [00006] [correction]
Montrer que si q est une forme quadratique réelle est définie, celle-ci est positive ou négative.

Exercice 53 [02398] [correction]
Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux > 0 telles que

$$A = {}^tPP \text{ et } B = {}^tP\Delta P$$

b) Montrer que

$$\det(A+B) \geqslant \det A + \det B$$

c) Montrer que l'inégalité de b) subsiste si $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 54 [02399] [correction]
Soit $(E, \langle\mid\rangle)$ un espace euclidien et A un endomorphisme symétrique défini positif de $(E, \langle\mid\rangle)$. On pose

$$\langle x \mid y\rangle_A = \left\langle A^{-1}x \mid y\right\rangle$$

pour tous $x, y \in E$.
a) Montrer que $\langle\mid\rangle_A$ est un produit scalaire.
Soit B un endomorphisme autoadjoint de $(E, \langle\mid\rangle)$.
b) Montrer que AB est diagonalisable
Si M est un endomorphisme diagonalisable de E, on note $\lambda_{\min}(M)$ (resp. $\lambda_{\max}(M)$) sa plus petite (resp. grande) valeur propre.
c) Montrer que l'image de $E\setminus\{0\}$ par

$$x \mapsto \frac{\langle Bx \mid x\rangle}{\langle A^{-1}x \mid x\rangle}$$

n'est autre que le segment d'extrémités $\lambda_{\min}(AB)$ et $\lambda_{\max}(AB)$.
d) Montrer que

$$\lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B) \leqslant \lambda_{\min}(AB) \leqslant \lambda_{\max}(AB) \leqslant \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B)$$

Exercice 55 [02400] [correction]
Soit u un automorphisme d'un espace euclidien E.
a) Montrer que $v = u^\star u$ est autoadjoint défini positif.
b) Montrer qu'il existe w autoadjoint positif tel que $v = w^2$, et ρ orthogonal tel que $u = \rho w$.
c) Montrer que cette décomposition de u est unique.
d) Comment interpréter ces résultats de façon matricielle ?

Exercice 56 [02402] [correction]
Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que AB est diagonalisable.

Exercice 57 [02405] [correction]
Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer que le polynôme $\det(A - XB)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 58 [02406] [correction]
Soit $\mathcal{P} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A + {}^tA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\}$.
a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{P}$ si, et seulement si, :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^tXAX > 0$$

b) Soient $A \in \mathcal{P}$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer, si λ est valeur propre complexe de SA, que $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

Exercice 59 [02407] [correction]
Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \leqslant {}^tXBX$$

Montrer

$$\det A \leqslant \det B$$

Exercice 60 [03062] [correction]
Soient $a_1, \dots a_n > 0$ et deux à deux distincts.
Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{x_i x_j}{a_i + a_j}$$

Montrer que q est une forme quadratique définie positive.

Exercice 61 [03610] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dira que M a la propriété (P) si, et seulement si, il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que M soit la sous-matrice de U obtenue en supprimant les dernières ligne et colonne de U et que U soit une matrice orthogonale, soit encore si, et seulement si, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$U = \begin{pmatrix} & & & \alpha_{2n+1} \\ & M & & \vdots \\ & & & \alpha_{n+2} \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$$

a) Ici

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les λ_i pour que M ait la propriété (P).
b) Ici $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M ait la propriété (P).
c) Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = US$.
On admettra qu'une telle décomposition existe encore si M n'est pas inversible.
d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque ait la propriété (P).
Cette condition portera sur ${}^tMM$.
e) Montrer le résultat admis dans la question c).
[Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Notons $n_1, \dots, n_k$ les cardinaux respectifs des k classes d'équivalence de $\mathcal{R}$. D'une part $n = n_1 + \dots + n_k$, d'autre part $p = n_1^2 + \dots + n_k^2$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(n_1 + \dots + n_k)^2 \leqslant k(n_1^2 + \dots + n_k^2)$.

Exercice 2 : [énoncé]
Si n n'est pas un carré alors, en associant dans P^2 chaque diviseur avec celui qui lui est conjugué, on obtient un produit de N termes égaux à n. Ainsi $P^2 = n^N$.
Si n est un carré alors P^2 est un produit de $N-1$ termes égaux à n et donc $P^2 = n^{N-1}$.

Exercice 3 : [énoncé]
Posons $x = 4444^{4444}$, $4444 = 7 \quad [9]$, $7^3 = 1 \quad [9]$ donc $4444^{4444} = 7 \quad [9]$.
$x < 10^{5\times 4444}$ donc $A \leqslant 9 \times 5 \times 4444 = 199980$, $B \leqslant 9 \times 5 + 1 = 46$ puis $C \leqslant 4 + 9 = 13$.
Or $C = B = A = x \quad [9]$ donc $C = 7$

Exercice 4 : [énoncé]
a) Supposons $\sqrt{6} = p/q$ avec $p \wedge q = 1$. On a $6q^2 = p^2$ donc p pair, $p = 2k$. On obtient alors $3q^2 = 2k^2$ et donc q est pair. Absurde car p et q sont premiers entre eux.
b) Par développement selon la formule du binôme de Newton
$(a + \sqrt{b})^n = \alpha_k + \beta_k\sqrt{b}$ avec $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Z}$.
c) $a + \sqrt{b}$ racine de $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ donne $\sum_{k=0}^n a_k\alpha_k = \left(\sum_{k=0}^n a_k\beta^k\right)\sqrt{b}$.
L'irrationalité de $\sqrt{b}$ entraîne $\sum_{k=0}^n a_k\alpha_k = \sum_{k=0}^n a_k\beta_k = 0$ ce qui permet de justifier $P(a - \sqrt{b}) = 0$.
d) Posons $Q = (X - a + \sqrt{b})(X - a - \sqrt{b}) = X^2 - 2aX + a^2 - b \in \mathbb{Z}[X]$.
Par division euclidienne $P = QS + T$ avec $\deg T < 2$. Or en posant cette division euclidienne, on peut affirmer que $S, T \in \mathbb{Z}[X]$ avec $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ et Q unitaire.
$a + \sqrt{b}, a - \sqrt{b}$ racine de P entraîne $T = 0$ et donc $P = QS$ avec $Q, S \in \mathbb{Z}[X]$. En dérivant $P' = Q'S + QS'$ et $a + \sqrt{b}$ entraîne racine de P' donne $a + \sqrt{b}$ racine de S. On peut alors comme ci-dessus justifier $S = QR$ avec $R \in \mathbb{Z}[X]$ et conclure.

Exercice 5 : [énoncé]
Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ parties X à un k éléments dans E. Par suite
$\sum_{X\subset E} \mathrm{Card}(X) = \sum_{k=0}^n k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.
Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ parties Z à k éléments dans E.
Pour une telle partie Z, les parties X contenant Z ont $\ell \in \{k, \dots, n\}$ éléments.
Il y a $\binom{n-k}{\ell-k}$ parties X à ℓ éléments contenant Z.
Pour une telle partie X, une partie Y telle que $X \cap Y = Z$ est une partie Y déterminée par $Z \subset Y \subset Z \cup C_E X$.
Il y a $2^{n-\ell}$ parties Y possibles.
Ainsi, il y a $\sum_{\ell=k}^n \binom{n-k}{\ell-k} 2^{n-\ell} = (1+2)^{n-k} = 3^{n-k}$ couples (X, Y) tels que $X \cap Y = Z$.
$\sum_{X,Y\subset E} \mathrm{Card}(X \cap Y) = \sum_{k=0}^n \sum_{\mathrm{Card} Z=k} \sum_{X\cap Y=Z} \mathrm{Card}(X \cap Y) = \sum_{k=0}^n k\binom{n}{k}3^{n-k}$.
Or $((3+x)^n)' = n(3+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k\binom{n}{k}3^{n-k}x^{k-1}$ donc
$\sum_{X,Y\subset E} \mathrm{Card}(X \cap Y) = n4^{n-1}$.
Enfin $\mathrm{Card}(X \cup Y) = \mathrm{Card} X + \mathrm{Card} Y - \mathrm{Card}(X \cap Y)$ donne
$\sum_{X,Y\subset E} \mathrm{Card}(X \cup Y) = 2^n n2^{n-1} + 2^n n2^{n-1} - n4^{n-1} = 3n4^{n-1}$.

Exercice 6 : [énoncé]
Notons, pour $n = 6$ que $(\mathfrak{S}_3, \circ)$ est un groupe non commutatif à 6 éléments.
Un groupe à $n = 1$ élément est évidemment commutatif.
Pour $n = 2, 3$ ou 5, les éléments d'un groupe à n éléments vérifient $x^n = e$.
Puisque n est premier, un élément autre que e de ce groupe est un élément d'ordre n et le groupe est donc cyclique donc commutatif.
Pour $n = 4$, s'il y a un élément d'ordre 4 dans le groupe, celui-ci est cyclique.
Sinon, tous les éléments du groupe vérifient $x^2 = e$. Il est alors classique de justifier que le groupe est commutatif.

Exercice 7 : [énoncé]
Soient H un sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $a = \min\left\{k > 0, \bar{k} \in H\right\}$.

On a $<\bar{a}>\subset H$. Inversement soit $\bar{k}\in H$. Par division euclidienne de k par a, $\bar{k}=q\bar{a}+\bar{r}$ avec $r\in\{0,\dots,a-1\}$. La minimalité de a entraîne $r=0$ et donc $\bar{k}\in<\bar{a}>$. Ainsi $H=<\bar{a}>$.
De plus, puisque $\bar{0}\in H=<\bar{a}>$, on peut affirmer que a divise n. Inversement, chaque diviseur de n définit un sous-groupe différent de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ainsi, il y a autant de sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que de diviseurs positifs de n.

Exercice 8 : [énoncé]
a) $G_p\subset\mathbb{C}^\star$, $1\in G_p$, pour $z\in G_p$, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $z^{p^k}=1$ et alors $(1/z)^{p^k}=1$ donc $1/z\in G_p$.
Si de plus $z'\in G_p$, il existe $k'\in\mathbb{N}$ vérifiant $z'^{p^{k'}}$ et alors
$(zz')^{p^{k+k'}}=\left(z^{p^k}\right)^{p^{k'}}\left(z'^{p^{k'}}\right)^{p^k}=1$ donc $zz'\in G_p$.
b) Notons $U_{p^k}=\left\{z\in\mathbb{C}/z^{p^k}=1\right\}$.
Soit H un sous-groupe de G_p différent de G_p.
S'il existe une infinité de $k\in\mathbb{N}$ vérifiant $U_{p^k}\subset H$ alors $H=G_p$ car G_p est la réunion croissante de U_{p^k}.
Ceci étant exclu, on peut introduire le plus grand $k\in\mathbb{N}$ vérifiant $U_{p^k}\subset H$.
Pour $\ell>k$, tous les $U_{p^\ell}\backslash U_{p^k}$ engendrent au moins $U_{p^{k+1}}$, or $U_{p^{k+1}}\not\subset H$ donc$H\subset U_{p^k}$ puis $H=U_{p^k}$
H est donc un sous-groupe cyclique et ne peut être maximal pour l'inclusion car inclus dans le sous-groupe propre $U_{p^{k+1}}$.
c) Si G_p pouvait être engendré par un système fini d'éléments, il existerait $k\in\mathbb{N}$ tel que ses éléments sont tous racines p^kème de l'unité et alors $G_p\subset U_{p^k}$ ce qui est absurde.

Exercice 9 : [énoncé]
Notons

$$H=\left\{x+y\sqrt{3}/x\in\mathbb{N},y\in\mathbb{Z},x^2-3y^2=1\right\}$$

Pour $a\in H$, $a=x+y\sqrt{3}$ avec $x\in\mathbb{N}$, $y\in$ et $x^2-3y^2=1$. On a donc $x=\sqrt{1+3y^2}>\sqrt{3}\,|y|$ puis $a>0$. Ainsi $H\subset\mathbb{R}_+^\star$.
$1\in H$ car on peut écrire $1=1+0\sqrt{3}$ avec $1^2-3.0^2=1$.
Pour $a\in H$, on a avec des notations immédiates, $\frac{1}{a}=x-y\sqrt{3}$ avec $x\in\mathbb{N}$, $-y\in\mathbb{Z}$ et $x^2-3(-y)^2=1$. Ainsi $1/a\in H$.
Pour $a,b\in H$ et avec des notations immédiates, $ab=xx'+3yy'+(xy'+x'y)\sqrt{3}$ avec $xx'+3yy'\in\mathbb{Z}$, $xy'+xy'\in\mathbb{Z}$ et $(xx'+3yy')^2-3(xy'+x'y)^2=1$. Enfin puisque $x>\sqrt{3}\,|y|$ et $x'>\sqrt{3}\,|y'|$, on a $xx'+3yy'\geqslant 0$ et finalement $ab\in H$.

Exercice 10 : [énoncé]
Notons qu'un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ possédant 1 contient nécessairement $\mathbb{Z}$.
a) Par égalité de Bézout, on peut écrire $pu+qv=1$ avec $u,v\in\mathbb{Z}$. Si $\frac{p}{q}\in A$ alors

$$\frac{1}{q}=u\frac{p}{q}+v.1\in A$$

b) $I\cap\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ donc il est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n\in\mathbb{N}$.
Puisque $I\neq\{0\}$, il existe $p/q\in I$ non nul et par absorption, $p=q.p/q\in I\cap\mathbb{Z}$ avec $p\neq 0$. Par suite $I\cap\mathbb{Z}\neq\{0\}$ et donc $n\in\mathbb{N}^\star$.
Puisque $n\in I$, on peut affirmer par absorption que $nA\subset I$.
Inversement, pour $p/q\in I$ avec $p\wedge q=1$ on a $1/q\in A$ et $p\in n\mathbb{Z}$ donc $p/q\in nA$.
Ainsi $I=nA$.
c) On peut vérifier que Z_p est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
Pour $x=a/b\in\mathbb{Q}^\star$ avec $a\wedge b=1$. Si $p\nmid b$ alors $p\wedge b=1$ et $x\in Z_p$. Sinon $p\mid b$ et donc $p\nmid a$ d'où l'on tire $1/x\in Z_p$.
d) Soit J un idéal strict de A. J ne contient pas d'éléments inversibles de A car sinon il devrait contenir 1 et donc être égal à A.
Ainsi J est inclus dans I. De plus, on peut montrer que I est un idéal de A.
En effet $I\subset A$ et $0\in I$.
Soient $a\in A$ et $x\in I$.
Cas $a=0$: $ax=0\in I$.
Cas $a\neq 0$: Supposons $(ax)^{-1}\in A$ alors $a^{-1}x^{-1}\in A$ et donc $x^{-1}=a(a^{-1}x^{-1})\in A$ ce qui est exclu. Ainsi, $(ax)^{-1}\notin A$ et donc $ax\in I$.
Soient $x,y\in I$. Montrons que $x+y\in I$.
Cas $x=0$, $y=0$ ou $x+y=0$: c'est immédiat.
Cas $x\neq 0$, $y\neq 0$ et $x+y\neq 0$: On a $(x+y)^{-1}(x+y)=1$ donc

$$(x+y)^{-1}(1+x^{-1}y)=x^{-1}\text{ et }(x+y)^{-1}(1+xy^{-1})=y^{-1}\ (*)$$

Par l'hypothèse de départ, l'un au moins des deux éléments $x^{-1}y$ ou $xy^{-1}=(x^{-1}y)^{-1}$ appartient à A.
Par opérations dans A à l'aide des relations (*), si $(x+y)^{-1}\in A$ alors x^{-1} ou y^{-1} appartient à A ce qui est exclu. Ainsi $(x+y)^{-1}\notin A$ et donc $x+y\in I$.
Finalement I est un idéal de A.
Par suite, il existe $n\in\mathbb{N}$, vérifiant $I=nA$.
Si $n=0$ alors $I=\{0\}$ et alors $A=\mathbb{Q}$ car pour tout $x\in\mathbb{Q}^\star$, x ou $1/x\in A$ et dans les deux cas $x\in A$ car $I=\{0\}$.
Si $n=1$ alors $I=A$ ce qui est absurde car $1\in A$ est inversible.
Nécessairement $n\geqslant 2$. Si $n=qr$ avec $2\leqslant q,r\leqslant n-1$ alors puisque $1/n\notin A$, au moins l'un des éléments $1/q$ et $1/r\notin A$. Quitte à échanger, on peut supposer $1/q\notin A$. qA est alors un idéal strict de A donc $qA\subset I$. Inversement $I\subset qA$ puisque n est multiple de q. Ainsi, si n n'est pas premier alors il existe un facteur

non trivial q de n tel que $I = nA = qA$. Quitte à recommencer, on peut se ramener à un nombre premier p.
Finalement, il existe un nombre premier p vérifiant $I = pA$.
Montrons qu'alors $A = Z_p$.
Soit $x \in A$. On peut écrire $x = a/b$ avec $a \wedge b = 1$. On sait qu'alors $1/b \in A$ donc si $p \mid b$ alors $1/p \in A$ ce qui est absurde car $p \in I$. Ainsi $p \not| b$ et puisque p est premier, $p \wedge b = 1$. Ainsi $A \subset Z_p$.
Soit $x \in Z_p$, $x = a/b$ avec $b \wedge p = 1$. Si $x \notin A$ alors $x \neq 0$ et $1/x = b/a \in A$ puis $b/a \in I \in pA$ ce qui entraîne, après étude arithmétique, $p \mid b$ et est absurde.
Ainsi $Z_p \subset A$ puis finalement $Z_p = A$.

Exercice 11 : [énoncé]
a) Pour $i \neq j \in \{2, \ldots, n\}$, $(i, j) = (1, i) \circ (1, j) \circ (1, j)$.
Toute transposition appartient à $\langle t_2, t_3, \ldots, t_n \rangle$ et puisque celles-ci engendrent S_n, $S_n = \langle t_2, t_3, \ldots, t_n \rangle$.
b) Si $s = (i, j)$, u_s est la réflexion par rapport à l'hyperplan de vecteur normal $e_i - e_j$.
c) Si s est le produit de p transpositions alors $\ker u_s$ contient l'intersection de p hyperplans. Ici $\ker u_s = \{0\}$ donc $p \geqslant n - 1$.
d) $n - 1$.

Exercice 12 : [énoncé]
Si $n = ab$ avec $a, b \in \mathbb{N}^\star$ alors
$$2^n - 1 = (2^a - 1)(1 + 2^a + \cdots + 2^{a(b-1)})$$
donc $2^a - 1 \mid 2^n - 1$ d'où $2^a - 1 = 1$ ou $2^a - 1 = 2^n - 1$ ce qui implique $a = 1$ ou $a = n$.
Ainsi n ne possède que des diviseurs triviaux, il est premier.

Exercice 13 : [énoncé]
a) Pour k suffisamment grand $\lfloor n/p^k \rfloor = 0$, la somme évoquée existe donc car elle ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls. $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$, parmi les entiers allant de 1 à n, il y en a exactement $\lfloor n/p \rfloor$ divisibles par p, $\lfloor n/p^2 \rfloor$ divisibles par p^2, etc... donc $v_p(n!) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.
b) $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Pour tout $p \in \mathcal{P}$, $v_p\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ or $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 0$ ou 1 donc
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leqslant \mathrm{Card}\left\{k \in \mathbb{N}^\star / \lfloor 2n/p^k \rfloor > 0\right\} \leqslant \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor$.
De plus les nombres premiers diviseurs de $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ sont diviseurs d'un entier inférieur à $2n$ (lemme d'Euclide) et sont donc eux-mêmes inférieur à $2n$. Il en découle $\binom{2n}{n} \mid \prod\limits_{p \in \mathcal{P}; p \leqslant 2n} p^{\left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor}$ car toutes les puissances de nombres premiers intervenant dans la décomposition de $\binom{2n}{n}$ divisent $\prod\limits_{p \in \mathcal{P}; p \leqslant 2n} p^{\left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor}$.
c) $\binom{2n}{n} \leqslant \prod\limits_{p \in \mathcal{P}; p \leqslant 2n} p^{\left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor} \leqslant \prod\limits_{p \in \mathcal{P}; p \leqslant 2n} p^{\frac{\ln(2n)}{\ln p}} \leqslant \prod\limits_{p \in \mathcal{P}; p \leqslant 2n} (2n) = (2n)^{\pi(2n)}$.
d) En passant au logarithme : $\sum\limits_{k=1}^{2n} \ln k - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k \leqslant \pi(2n)\ln(2n)$.
A l'aide d'une comparaison intégrale on obtient
$\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k \leqslant \int_1^{(n+1)} \ln(t)\mathrm{d}t$ donc
$n\ln n - n + 1 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k = n\ln n - n + O(\ln n)$.
Par suite $\sum\limits_{k=1}^{2n} \ln k - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k = 2n\ln(2n) - 2n - 2(n\ln n - n) + O(\ln n)$ puis
$\sum\limits_{k=1}^{2n} \ln k - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k \sim \ln(2)(2n)$.
On en déduit $\frac{2n}{\ln 2n} = O(\pi(2n))$.
Ajoutons $\frac{x}{\ln x} \sim \frac{2\lfloor x/2 \rfloor}{\ln 2\lfloor x/2 \rfloor}$ par calculs et $\pi(x) \sim \pi(2\lfloor x/2 \rfloor)$ car $\pi(x)$ et $\pi(2\lfloor x/2 \rfloor)$ ne différent qu'au plus d'une unité et $\pi(x) \to +\infty$. Finalement, une certaine satisfaction.

Exercice 14 : [énoncé]
a) On a
$$P_0 \left| \begin{array}{l} 1 - y_0 \\ y_0 \end{array} \right. \text{ et } Q_0 \left| \begin{array}{l} 1 + y_0(x_1 - 1) \\ y_0 y_1 \end{array} \right.$$
(en considérant que les cas singuliers sont les prolongements du cas général)
On en déduit
$$\begin{cases} x_2 = x_0 + y_0 x_1 \\ y_2 = y_0 y_1 \end{cases}$$
b) Avec des notations immédiates
$$(M_0 \star M_1) \star M_2 \left| \begin{array}{l} (x_0 + y_0 x_1) + (y_0 y_1) x_2 \\ (y_0 y_1) y_2 \end{array} \right. \text{ et } M_0 \star (M_1 \star M_2) \left| \begin{array}{l} x_0 + y_0(x_1 + y_1 x_2) \\ y_0(y_1 y_2) \end{array} \right.$$

et on vérifie bien l'associativité de la loi $\star$.
On remarque que
$$B \star M = M \star B = M$$
donc B est élément neutre de la loi $\star$.
Enfin si $y_0 \neq 0$ alors pour
$$x_1 = -x_0/y_0$$
$$y_1 = 1/y_0$$
on observe
$$M_0 \star M_1 = M_1 \star M_0 = B$$
et donc on peut affirmer que M_0 est inversible d'inverse M_1.
c) On a
$$y_n = y_{n-1}y_{n-2}$$
et on peut donc affirmer qu'il est possible d'écrire y_n sous la forme
$$y_n = y_0^{a_n} y_1^{b_n}$$
avec
$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 0, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ b_0 = 0, b_1 = 1, b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \end{cases}$$
Les suites (a_n) et (b_n) sont récurrente linéaires d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 = r + 1$ de racines
$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
On obtient après calculs
$$a_n = \frac{r_2}{r_2 - r_1} r_1^n + \frac{r_1}{r_1 - r_2} r_2^n \text{ et } b_n = \frac{r_2^n - r_1^n}{r_2 - r_1}$$

Exercice 15 : [énoncé]
a) $(\Leftarrow)$ Supposons $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$. On a alors
$$(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$$
$(\Rightarrow)$ Supposons $p + q$ projecteur. Par les mêmes calculs que ci-dessus
$$p \circ q + q \circ p = \tilde{0}$$
En composant cette relation avec p à droite et à gauche, on obtient
$$p \circ q \circ p + q \circ p = \tilde{0} \text{ et } p \circ q + p \circ q \circ p = \tilde{0}$$
On en déduit $q \circ p = p \circ q$ puis $p \circ q = q \circ p = \tilde{0}$.
b) On a évidemment
$$\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$$
Inversement, pour $x \in \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$, on a $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Im}p$ et $b \in \mathrm{Im}q$. Puisque $p \circ q = 0$, $p(b) = 0$ et donc $p(x) = p(a) = a$. De même $q(x) = b$ et donc $x = p(x) + q(x) \in \mathrm{Im}(p+q)$.
Ainsi
$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$$
On a évidemment
$$\ker p \cap \ker q \subset \ker(p+q)$$
Inversement pour $x \in \ker(p+q)$, on a $p(x) + q(x) = 0$ donc $p^2(x) + p(q(x)) = 0$ puis $p(x) = 0$ car $p^2 = p$ et $p \circ q = 0$. Ainsi $x \in \ker p$ et de même $x \in \ker q$.
Finalement
$$\ker p \cap \ker q = \ker(p+q)$$

Exercice 16 : [énoncé]
a) Par récurrence sur $p = \dim E - \dim F_1$.
Si $p = \dim E - \dim F_1$ alors $G = \{0\}$.
Supposons la propriété établie au rang p.
Soient F_1 et F_2 de même dimension tels que $\dim E - \dim F_1 = p + 1$.
Si $F_1 = F_2$ l'existence d'un supplémentaire à tout sous-espace vectoriel en dimension finie permet de conclure.
Sinon, on a $F_1 \not\subset F_2$ et $F_2 \not\subset F_1$ ce qui assure l'existence de $x_1 \in F_1 \backslash F_2$ et de $x_2 \in F_2 \backslash F_1$.
Le vecteur $x = x_1 + x_2$ n'appartient ni à F_1, ni à F_2. On pose alors $F_1' = F_1 \oplus \mathrm{Vect}(x)$ et $F_2' = F_2 \oplus \mathrm{Vect}(x)$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à F_1' et F_2' : on obtient l'existence d'un supplémentaire commun G' à F_1' et F_2'. $G = G' \oplus \mathrm{Vect}(x)$ est alors supplémentaire commun à F_1 et F_2.
Récurrence établie.
b) Soit F_1' un sous-espace vectoriel contenant F_1 et de même dimension que F_2. F_1' et F_2 possèdent un supplémentaire commun G. Considérons H un supplémentaire de F_1 dans F_1'. En posant $G_1 = H \oplus G$ et $G_2 = G$ on conclut.

Exercice 17 : [énoncé]
Puisque $\mathrm{Im}f^2 \subset \mathrm{Im}f \subset \mathbb{R}^6$, on a $3 \leqslant \mathrm{rg}f \leqslant 6$.
Si $\mathrm{rg}f = 6$ alors f est un isomorphisme, donc f^2 aussi et $\mathrm{rg}f^2 = 6$. Contradiction.
Si $\mathrm{rg}f = 5$ alors $\dim\ker f = 1$. Considérons $g = f_{|\mathrm{Im}f}$. Par le théorème du rang $\dim\ker g = 5 - \mathrm{rg}g$. Or $\mathrm{Im}g \subset \mathrm{Im}f^2$ donc $\mathrm{rg}g \leqslant 3$ et par suite $\dim\ker g \geqslant 2$. Or $\ker g \subset \ker f$ donc $\dim\ker f \geqslant 2$. Contradiction.

$\mathrm{rg} f = 3$ et $\mathrm{rg} f = 4$ sont possibles en considérant : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 18 : [énoncé]

a) Par les opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + L_1, \ldots, L_{2n} = L_{2n} + L_n$,

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n & B \\ B + I_n & I_n + B \end{vmatrix}$$

Par les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_{n+1}, \ldots, C_n \leftarrow C_n - C_{2n}$,

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n - B & B \\ O_n & I_n + B \end{vmatrix} = \det(I_n - B)\det(I_n + B)$$

Ainsi A est inversible si, et seulement si, $I_n - B$ et $I_n + B$ le sont (i.e. $1, -1 \notin \mathrm{Sp} B$).

On aurait aussi pu étudier le noyau de A.

b) On peut présumer que l'inverse de A est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix}$$

Puisque

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M + BN & N + BM \\ BM + N & BN + M \end{pmatrix}$$

et puisque

$$\begin{cases} M + BN = I_n \\ BM + N = O_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = \left(I_n - B^2\right)^{-1} \\ N = -B\left(I_n - B^2\right)^{-1} \end{cases}$$

on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (I_n - B^2)^{-1} & -B(I_n - B^2)^{-1} \\ -B(I_n - B^2)^{-1} & (I_n - B^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

On aurait pu aussi inverser l'équation $AX = Y$

Exercice 19 : [énoncé]

Supposons que M soit semblable à une matrice M' via une matrice inversible P i.e.

$$M' = P^{-1}MP$$

Si on peut écrire $M' = A'B' - B'A'$ alors $M = AB - BA$ avec $A = PA'P^{-1}$ et $B = PB'P^{-1}$.

On peut ainsi transformer la matrice M en une matrice semblable sans changer la problématique.

Etablissons maintenant le résultat demandé en raisonnant par récurrence sur la taille de la matrice M.

Si M est taille 1 : ok

Supposons la propriété établie au rang $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soit M une matrice carrée d'ordre $n + 1$ de trace nulle.

Montrons que M est semblable à une matrice de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \star \\ \hline \star & \star \end{array}\right)$$

Si M est matrice d'une homothétie alors $\mathrm{tr} M = 0$ permet de conclure $M = O_n$.

Sinon, il existe des vecteurs qui ne sont pas vecteurs propres de l'endomorphisme associé à M.

Soit x, un tel vecteur. En introduisant une base dont x et $f(x)$ sont les deux premiers vecteurs, on obtient que la matrice M est semblable à celle voulue.

Compte tenu de la remarque préliminaire, on suppose désormais que la matrice M est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline C & M' \end{array}\right)$$

avec $\mathrm{tr} M' = 0$.

Par l'hypothèse de récurrence on peut écrire

$$M' = A'B' - B'A'$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ qui n'est par valeur propre de la matrice B'.

En posant

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & L(B' - \lambda I)^{-1} \\ \hline (\lambda I - B')^{-1}C & A' \end{array}\right)$$

et

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right)$$

on obtient

$$M = AB - BA$$

Récurrence établie.

Exercice 20 : [énoncé]
On vérifie aisément que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car c'est le noyau de l'endomorphisme $M \mapsto AM - MA$.
Puisque $A^2 = O_3$, on a $\mathrm{Im}A \subset \ker A$.
Puisque $A \neq O_3$, la formule du rang et l'inclusion précédente montre

$$\mathrm{rg}A = 1 \text{ et } \dim \ker A = 2$$

Soient $X_1 \in \mathrm{Im}A$ non nul, X_2 tel que (X_1, X_2) soit base de $\ker A$ et X_3 un antécédent de X_1. En considérant la matrice de passage P formée des colonnes X_1, X_2, X_3, on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

En raisonnant par coefficients inconnus, on obtient que les matrices N vérifiant $BN = NB$ sont de la forme

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Par suite les matrice M vérifiant $AM = MB$ sont celle de la forme

$$M = P \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} P^{-1}$$

L'espace $\mathcal{C}$ est donc de dimension 5 et l'on en forme une base à l'aide des matrices

$$M_1 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, M_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, M_3 = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$M_4 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } M_5 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Exercice 21 : [énoncé]
Soit f solution. La matrice de f relative à la base canonique est à coefficients entiers. De plus f est un automorphisme car les vecteurs de la base canonique sont des valeurs prises par f et comme $f^{-1}(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$, la matrice de f^{-1} relative à la base canonique est à coefficients entiers. Inversement, si f est un automorphisme telle que f et f^{-1} soient représentés par des matrices à coefficients entiers dans la base canonique, il est immédiat que $f(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ et que $f^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ donc que $\mathbb{Z}^n \subset f(\mathbb{Z}^n)$ et finalement $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. Notons que les endomorphismes solutions peuvent aussi se décrire comme étant les endomorphismes canoniquement représentés par une matrice à coefficients entiers et qui sont de déterminant égal à 1.

Exercice 22 : [énoncé]
Posons $D = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$. L'étude, coefficient par coefficient, de la relation $MD = DM$ donne que les matrices commutant avec D sont les matrices diagonales. Parmi les matrices diagonales, celles qui sont semblables à D sont celles qui ont les mêmes coefficients diagonaux

Exercice 23 : [énoncé]
Considérons le polynôme

$$P(X) = (X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_n)$$

Celui-ci se développe sous la forme

$$P(X) = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

avec $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ et en particulier $\alpha_k = (-1)^{n-k}\sigma_{n-k}$ où les $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ désignent les expressions symétriques élémentaires en $a_1, \ldots, a_n$.
En procédant à l'opération $C_n \leftarrow C_n + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j C_{j+1} + \sum_{j=n}^{n-1} \alpha_j C_j$, les coefficients de la dernière colonne de la matrice sont transformés en

$$P(a_i) - \alpha_k a_i^k = -\alpha_k a_i^k \text{ car } P(a_i) = 0$$

Ainsi

$$D_k = (-1)^{n+1-k}\sigma_{n-k} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^k \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^{n-1} & a_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^k \end{vmatrix}$$

En permutant de façon circulaire les $n - k$ dernières colonnes, on obtient

$$D_k = \sigma_{n-k} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^k & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^k & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^k & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Sachant calculer un déterminant de Vandermonde, on obtient

$$D_k = \sigma_{n-k} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)$$

Exercice 24 : [énoncé]
En développant selon la première ligne, on peut affirmer que Δ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$.
Pour $k \in \{1,\dots,n\}$,
$\Delta(\lambda_k) = (-1)^{k+1} \prod_{i\neq k} (\lambda_k - \lambda_i) V_{n-1}(\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_k,\dots,\lambda_n) = (-1)^{n+1} V_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$
où $V_n(a_1,\dots,a_n)$ désigne le Vandermonde de $(a_1,\dots,a_n)$.
Le polynôme Δ coïncide en n point avec le polynôme constant égal à $(-1)^{n+1}V_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, ils sont donc égaux.

Exercice 25 : [énoncé]
a) En multipliant les n dernières lignes par i et les n dernières colonnes aussi :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} A & iB \\ -iB & -A\end{pmatrix}$$

puis par opérations sur les lignes

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} A & iB \\ A-iB & -A+iB\end{pmatrix}$$

et par opérations sur les colonnes

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} A+iB & iB \\ 0 & -A+iB\end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix} = (-1)^n \det(A+iB)\det(-A+iB)$$

et enfin

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB)$$

Les matrices A et B étant réelles, cette écriture est de la forme $z\bar{z} = |z|^2 \geqslant 0$.
b) $\det(A+iB)\det(A-iB) = \det(A^2+B^2)$ car A et B commutent donc $\det(A^2+B^2) \geqslant 0$.
c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1\end{pmatrix}$ par exemple.
d) Si A est inversible, on remarque

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B+D\end{pmatrix}$$

donc $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} = \det(A)\det(-CA^{-1}B+D) = \det(AD-CB)$ car A et C commutent.
On étend cette égalité aux matrices non inversibles par densité :
Les applications $A \mapsto \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$ et $A \mapsto \det(AD-CB)$ sont continues et coïncident sur l'ensemble des matrices inversibles commutant avec C. Or cet ensemble est dense dans l'ensemble des matrices commutant avec C : si A commute avec C alors pour tout $\lambda > 0$ assez petit $A+\lambda I_n$ est inversible et commute avec C). Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, les deux applications sont égales.

Exercice 26 : [énoncé]
a) L'application considérée est au départ d'un ensemble infini et à valeurs dans un ensemble fini, elle ne peut donc être injective et il existe $k < \ell \in \mathbb{N}$, $M^k = M^\ell$ ce qui fournit $M^p = I_n$ avec $p = \ell - k$ car M est inversible. On en déduit que $I_n \in H$ et que $M^{-1} = M^{p-1} \in H$. Cela suffit pour conclure que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
b) Si $M \in H$ alors $N \mapsto MN$ et $N \mapsto NM$ sont des permutations de H. On en déduit que $MP = PM = P$ car pour chaque terme les sommes portent sur les mêmes éléments.
$P^2 = \frac{1}{q}\sum_{M\in H} MP = \frac{1}{q}\sum_{M\in H} P = P$.
c) Puisque $P^2 = P$, $\mathrm{Im}P = \ker(P-I_n)$ et $\ker P$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Si $X \in \ker P$ alors $PX = 0$ et pour tout $M \in H$, $PMX = PX = 0$ donc $MX \in \ker P$. Ainsi $\ker P$ est stable par H.
Si $X \in \bigcap_{M\in H} \ker(M-I_n)$ alors pour tout $M \in H$, $MX = X$ donc $PX = X$ puis $X \in \ker(P-I_n)$.
Inversement, si $X \in \ker(P-I_n)$ alors $PX = X$ et pour tout $M \in H$, $X = PX = MPX = MX$ et donc $X \in \bigcap_{M\in H}\ker(M-I_n)$. Ainsi $\bigcap_{M\in H}\ker(M-I_n) = \ker(P-I_n)$ et $\ker P$ est solution du problème posé.
d) P est une projection donc $\mathrm{tr}P = \mathrm{rg}P \in \mathbb{N}$ et donc $\sum_{M\in H}\mathrm{tr}M = q\,\mathrm{tr}P \in q\mathbb{N}$.

Si $\sum_{M\in H} \operatorname{tr} M = 0$ alors $P = 0$. Par suite $\bigcap_{M\in H} \ker(M - I_n) = \{0\}$ et il n'y a donc pas de vecteur non nul invariant pour tous les éléments de H et inversement.

Exercice 27 : [énoncé]
a) Supposons $M^2 \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ et $\operatorname{Vect}(I_n)$ étant supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut écrire $M = A + \lambda I_n$ avec $A \in \mathcal{A}$. On a alors $M^2 = A^2 + 2\lambda A I_n + \lambda^2 I_n$ d'où l'on tire $\lambda^2 I_n \in \mathcal{A}$ puis $\lambda = 0$ ce qui donne $M \in \mathcal{A}$.
Pour $i \neq j$, $E_{i,j}^2 = 0 \in \mathcal{A}$ donc $E_{i,j} \in \mathcal{A}$ puis $E_{i,i} = E_{i,j} \times E_{j,i} \in \mathcal{A}$. Par suite $I_n = E_{1,1} + \cdots + E_{n,n} \in \mathcal{A}$. Absurde.
b) Formons une équation de l'hyperplan $\mathcal{A}$ de la forme $ax + by + cz + dt = 0$ en la matrice inconnue $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$. Cette équation peut se réécrire $\operatorname{tr}(AM) = 0$ avec $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
Puisque $I_2 \in \mathcal{A}$, on a $\operatorname{tr} A = 0$. Soit λ une valeur propre de A.
Si $\lambda \neq 0$ alors $-\lambda$ est aussi valeur propre de A et donc A est diagonalisable via une matrice P.
On observe alors que les matrices M de $\mathcal{A}$ sont celles telles que $P^{-1}MP$ a ses coefficients diagonaux égaux.
Mais alors pour $M = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ et $N = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ on a $M, N \in \mathcal{A}$ alors que $MN \in \mathcal{A}$.
Si $\lambda = 0$ alors A est trigonalisable en $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$ via une matrice P.
On observe alors que les matrices M de $\mathcal{A}$ sont celles telles que $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure. L'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme comme voulu.

Exercice 28 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \geqslant 1$.
La propriété est immédiate pour $n = 1$.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$.
Soit $T \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure commutant avec sa transposée.
On peut écrire

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & {}^tX \\ O_{n,1} & S \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.
L'identification du coefficient d'indice $(1, 1)$ dans la relation ${}^tTT = T{}^tT$ donne

$$\alpha^2 = \alpha^2 + {}^tXX$$

On en déduit $X = O_{n,1}$ et l'égalité ${}^tTT = T{}^tT$ donne alors ${}^tSS = S{}^tS$.
Par hypothèse de récurrence, la matrice S est diagonale et par conséquent la matrice T l'est aussi.
Récurrence établie.

Exercice 29 : [énoncé]
a) $\operatorname{Im} u$ est stable pour u donc u_{E_2} est bien défini. Par le théorème du rang la restriction de u à tout supplémentaire de $\ker u$ définit un isomorphisme avec $\operatorname{Im} u$. Ici cela donne u_{E_2} automorphisme.
b) Soient $u, v \in \Gamma$. Si $x \in \ker(v \circ u)$ alors $u(x) \in \operatorname{Im} u \cap \ker v$ donc $u(x) \in E_1 \cap E_2$ et $u(x) = 0$ puis $x \in E_1$. Ainsi $\ker(v \circ u) \subset E_1$ et l'inclusion réciproque est immédiate.
$\operatorname{Im}(v \circ u) = v(u(E)) = v(E_2) = E_2$ car v_{E_2} est un automorphisme de E_2. Ainsi $v \circ u \in \Gamma$.
c) Si $\phi(u) = \phi(v)$ alors $u_{E_2} = v_{E_2}$. Or $u_{E_1} = 0 = v_{E_1}$ donc les applications linéaires u et v coïncident sur des sous-espaces vectoriels supplémentaires et donc $u = v$.
d) Une application linéaire peut être définit de manière unique par ses restrictions linéaires sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Pour $w \in \operatorname{GL}(E_2)$ considérons $u \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par $u_{E_1} = 0$ et $u_{E_2} = w$. On vérifie aisément $E_1 \subset \ker u$ et $E_2 \subset \operatorname{Im} u$. Pour $x \in \ker u$, $x = a + b$ avec $a \in E_1$ et $b \in E_2$. La relation $u(x) = 0$ donne alors $u(a) + u(b) = 0$ c'est-à-dire $w(b) = 0$. Or $w \in \operatorname{GL}(E_2)$ donc $b = 0$ puis $x \in E_1$. Ainsi $\ker u \subset E_1$ et finalement $\ker u = E_1$.
Pour $y \in \operatorname{Im}(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Or on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in E_1$ et $b \in E_2$. La relation $y = u(x)$ donne alors $y = u(a) + u(b) = w(b) \in E_2$. Ainsi $\operatorname{Im} u \subset E_1$ et finalement $\operatorname{Im} u = E_1$. On peut conclure que $u \in \Gamma$ et $\tilde{u} = w$: ϕ est surjectif.
e) φ est un morphisme bijectif : il transporte la structure de groupe existant sur $\operatorname{GL}(E_2)$ en une structure de groupe sur $(\Gamma, \circ)$. Le neutre est l'antécédent de Id_{E_2} c'est-à-dire la projection sur E_2 parallèlement à E_1.

Exercice 30 : [énoncé]
a) oui.
b) Si A est inversible alors $M \mapsto A^{-1}M$ est clairement application réciproque de f.
Si f est inversible alors posons $B = f^{-1}(I_n)$. On a $AB = I_n$ donc A est inversible.
c) On observe que $f^n(M) = A^nM$ donc pour $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(f)(M) = P(A)M$$

Par suite P est annulateur de f si, et seulement si, il est annulateur de A.

Puisque la diagonalisabilité équivaut à l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples, on peut conclure.

Exercice 31 : [énoncé]
a) Si λ est valeur propre de A alors $\lambda^p = 0$ d'où $\lambda = 0$. Par suite $\chi_A = (-1)^n X^n$ puis par Cayley Hamilton $A^n = 0$.
b) $\det(A+I) = \chi_A(-1) = (-1)^n(-1)^n = 1$
c) Si M est inversible $\det(A+M) = \det(AM^{-1}+I)\det M$.
Or A et M^{-1} commutent donc $(AM^{-1})^p = 0$ puis par b) : $\det(A+M) = \det M$.
Si M n'est pas inversible. Posons $M_p = M + \frac{1}{p}I_n$. Quand $p \to +\infty$, M_p est inversible et commute avec A donc $\det(A+M_p) = \det M_p$. Or $\det M_p \to \det M$ et $\det(A+M_p) \to \det(A+M)$ donc on peut prolonger l'égalité à toute matrice qui commute avec A.
d) Non prendre : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 32 : [énoncé]
On vérifie aisément que Φ est endomorphisme de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
a) En choisissant la base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ formée des matrices $E_{1,1}, E_{2,2}$ et $E_{1,2}+E_{2,1}$, on obtient la matrice de Φ suivante

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 & 2b \\ 0 & 2d & 2c \\ c & b & a+d \end{pmatrix}$$

b) Par la règle de Sarrus, on calcule $\chi_\Phi(\lambda)$ et on obtient

$$\chi_\Phi(2\lambda) = -4(2\lambda - (a+d))\chi_A(\lambda)$$

c) Posons Δ égal au discriminant de χ_A.
Si $\Delta > 0$ alors χ_Φ possède trois racines réelles distinctes

$$a+d, a+d+\sqrt{\Delta} \text{ et } a+d-\sqrt{\Delta}$$

Si $\Delta = 0$ alors χ_Φ possède une racine réelle triple

$$a+d$$

Si $\Delta < 0$ alors χ_Φ possède une racine réelle et deux racines complexes non réelles.
Supposons Φ diagonalisable.
Le polynôme caractéristique de Φ est scindé sur $\mathbb{R}$ donc $\Delta \geqslant 0$.
Si $\Delta > 0$ alors χ_A possède deux racines réelles distinctes et donc la matrice A est diagonalisable.
Si $\Delta = 0$ alors Φ est diagonalisable et ne possède qu'une seule valeur propre $\lambda = a+d$ donc l'endomorphisme Φ est une homothétie vectorielle de rapport égal à cette valeur propre. On obtient matriciellement

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 & 2b \\ 0 & 2d & 2c \\ c & b & a+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 & 0 \\ 0 & a+d & 0 \\ 0 & 0 & a+d \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

et donc la matrice A est diagonalisable.
d) Supposons A diagonalisable
Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc $\Delta \geqslant 0$.
Si $\Delta > 0$ alors Φ est diagonalisable car possède 3 valeurs propres réelles distinctes.
Si $\Delta = 0$ alors A possède une seule valeur propre et étant diagonalisable, c'est une matrice scalaire

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

et alors la matrice de Φ est diagonale

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Exercice 33 : [énoncé]
a) Commençons par quelques cas particuliers.
Si $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ alors $A \in \mathbb{K}[B]$ en s'appuyant sur un polynôme constant.
Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors les matrices qui commutent avec A sont diagonales donc B est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$. En considérant $P = aX + b$ tel que $P(\lambda_1) = \alpha_1$ et $P(\lambda_2) = \alpha_2$, on a $B = P(A) \in \mathbb{K}[A]$.
Si $A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$, une étude de commutativité par coefficients inconnus donne $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Pour $P = \frac{\beta}{\mu}X + \gamma$ avec $\frac{\beta\lambda}{\mu} + \gamma = \alpha$, on a $B = P(A) \in \mathbb{K}[A]$.

Enfin, dans le cas général, A est semblable à l'un des trois cas précédent via une matrice $P \in GL_2(\mathbb{K})$. La matrice $B' = P^{-1}BP$ commute alors avec $A' = P^{-1}AP$ donc B' est polynôme en A' et par le même polynôme B est polynôme en A.
b) On imagine que non, reste à trouver un contre-exemple.
Par la recette dite des « tâtonnements successifs »ou saisi d'une inspiration venue d'en haut, on peut proposer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que A et B commutent et ne sont ni l'un ni l'autre polynôme en l'autre car tout polynôme en une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 34 : [énoncé]
Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est J.
Posons $\varepsilon_1 = e_1 + \cdots + e_n$, de sorte que $f(\varepsilon_1) = n\varepsilon_1$.
Puisque $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg} J = 1$, on peut introduire $(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ base du noyau de f.
Il est alors clair que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et que la matrice de f dans celle-ci est diagonale.

Exercice 35 : [énoncé]
Supposons n est impair. Le polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de degré impair possèdera une racine qui sera valeur propre de la matrice et aussi racine de son polynôme minimal. Celui-ci ne peut alors être le polynôme $X^2 + 1$.
Supposons n est pair. Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_n = \mathrm{diag}(A, \ldots, A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

A_n n'est pas une homothétie donc le degré de son polynôme minimal est supérieur à 2.
De plus $A_n^2 = -I_n$ donc $X^2 + 1$ annule A_n.
Au final, $X^2 + 1$ est polynôme minimal de A_n.

Exercice 36 : [énoncé]
a) u admet une valeur propre λ et le sous-espace propre associé est stable par v.
Cela assure que u et v ont un vecteur propre en commun e_1. On complète celui-ci en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Les matrices de u et v dans cette base sont de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \mu & \star \\ 0 & B' \end{pmatrix}$. Considérons les endomorphismes u' et v' de $E' = \mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$ représentés par A' et B' dans $(e_2, \ldots, e_n)$. $AB = BA$ donne $A'B' = B'A'$ et donc $[u', v'] = 0$. Cela permet d'itérer la méthode jusqu'à obtention d'une base de cotrigonalisation.
b) Par récurrence, on vérifie $\left[u^k, v\right] = k\lambda u^k$. L'endomorphisme $w \mapsto [w, v]$ de $\mathcal{L}(E)$ ne peut avoir une infinité de valeurs propres donc il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $u^k = 0$. L'endomorphisme u est nilpotent donc $\ker u \neq \{0\}$ ce qui permet d'affirmer que u et v ont un vecteur propre commun. On peut alors reprendre la démarche de la question a) sachant qu'ici $A'B' - B'A' = \lambda A'$.
c) Si $\alpha = 0$, l'étude qui précède peut se reprendre pour conclure. Si $\alpha \neq 0$, on introduit $w = \alpha u + \beta v$ et on vérifie $[w, v] = \alpha w$. Ainsi w et v sont cotrigonalisables puis u et v aussi cas $u = \frac{1}{\alpha}(w - \beta v)$.

Exercice 37 : [énoncé]
a) Puisque $u \circ v = v \circ u$ les sous-espaces propres de u sont stables par v. Puisque E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, u admet une valeur propre et le sous-espace propre associé est stable par v. L'endomorphisme induit par v sur celui-ci admet une valeur propre et ceci assure l'existence d'un vecteur propre commun à u et v.
b) $u \circ v - v \circ u = au$.
Si u est inversible alors $u \circ v \circ u^{-1} - v = a\mathrm{Id}_E$ et donc $\mathrm{tr}(u \circ v \circ u^{-1}) - \mathrm{tr} v = a \dim E$.
Or $\mathrm{tr}(u \circ v \circ u^{-1}) = \mathrm{tr} v$ ce qui entraîne une absurdité.
On en déduit que u est non inversible.
v admet une valeur propre λ et si x est vecteur propre associé, la relation précédente donne

$$v(u(x)) = (\lambda - a)u(x)$$

Si u est inversible alors $\lambda - a$ est valeur propre de v et en reprenant ce schéma, on obtient $\lambda - na$ valeurs propres de v pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est absurde car v ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres et donc u n'est pas inversible.
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$u^n \circ v - v \circ u^n = nau^n$$

L'endomorphisme $\varphi : w \mapsto w \circ v - v \circ w$ n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres car opère en dimension finie. Si u n'est pas nilpotent alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, na est valeur propre de φ. C'est absurde et donc u est nilpotent.
Enfin, soit $x \in \ker u$. On a $u(v(x)) = v(u(x)) + au(x) = 0$ donc $v(x) \in \ker u$. Par suite $\ker u \neq \{0\}$ est stable v et un vecteur propre de l'endomorphisme induit est vecteur propre commun à u et v.

c) $u\circ v - v\circ u = au + bv$.
Si $a=0$ il suffit de transposer l'étude précédente.
Si $a\neq 0$, considérons $w = au+bv$.
On a

$$(au+bv)\circ v - v\circ(au+bv) = a(u\circ v - v\circ u) = a(au+bv)$$

Par l'étude qui précède, $au+bv$ et v ont un vecteur propre en commun puis u et v ont un vecteur propre en commun.

Exercice 38 : [énoncé]
a) Notons qu'il est immédiat de vérifier que L_A est une forme linéaire sur E.
Par linéarité de la trace, on vérifie $\mathrm{tr}((\lambda A+\mu B)M) = \lambda\mathrm{tr}(AM)+\mu\mathrm{tr}(BM)$ ce qui fournit la linéarité de l'application L.
Puisque $\dim E = \dim E^\star < +\infty$, il suffit désormais de vérifier l'injectivité de L pour assurer qu'il s'agit d'un isomorphisme. Si $L_A = 0$ (l'application nulle) alors en particulier $L_A({}^t\bar A) = 0$ et donc $\mathrm{tr}(A{}^t\bar A) = \mathrm{tr}({}^t\bar A A) = 0$.
Or

$$\mathrm{tr}({}^t\bar A A) = \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2$$

donc $A=0$.
Puisque les hyperplans sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles, on peut assurer que pour tout hyperplan H de E, il existe $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que

$$H = \{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})/\mathrm{tr}(AM)=0\}$$

b) Pour tout matrice $M\in T_n^+$, le produit TM est triangulaire à coefficients diagonaux nuls donc $\mathrm{tr}(TM)=0$. Ainsi $T_n^+\subset H$ puis $H\cap T_n^+ = T_n^+$.
Concernant $H\cap T_n^-$, ou bien c'est un hyperplan de T_n^-, ou bien c'est T_n^- entier.
S'il n'y a pas de coefficient non nul dans le bloc supérieur strict de T alors T est diagonale et un calcul analogue au précédent donne $H\cap T_n^- = T_n^-$ (de dimension $n(n-1)/2$)
Sinon, on peut déterminer une matrice élémentaire dans T_n^- qui n'est pas dans H (si $[T]_{i,j}\neq 0$ alors $E_{j,i}$ convient) et donc $H\cap T_n^-$ est un hyperplan de T_n^- (de dimension $n(n-1)/2-1$).
c) Les matrices triangulaire strictes sont bien connes nilpotentes...
Une base de T_n^+ adjointe à une base de $H\cap T_n^-$ fournit une famille libre (car T_n^+ et T_n^- sont en somme directe) et celle-ci est formée d'au moins $n(n-1)/2+n(n-1)/2-1 = n^2-n-1$ éléments.
d) Soit H un hyperplan de E. Il existe $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que

$$H = \{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})/\mathrm{tr}(AM)=0\}$$

La matrice A est trigonalisable donc on peut écrire $A = PTP^{-1}$ avec $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure non nulle. Posons alors l'isomorphisme $\varphi : M\to P^{-1}MP$ et considérons l'hyperplan

$$K = \{N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})/\mathrm{tr}(TN)=0\}$$

On constate

$$M\in H\Leftrightarrow \varphi(N)\in K$$

Par l'isomorphisme φ, on transforme une famille de n^2-n-1 matrices nilpotentes linéairement indépendantes d'éléments de K en une famille telle que voulue.

Exercice 39 : [énoncé]
a) On vérifie

$$\begin{pmatrix} I_n & D\\ O_n & I_n\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -D\\ O_n & I_n\end{pmatrix}$$

b) On observe

$$\begin{pmatrix} I_n & D\\ O_n & I_n\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & C\\ O_n & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & D\\ O_n & I_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & E\\ O_n & B\end{pmatrix}$$

avec $E = AD+C-DB$.
Pour conclure, montrons qu'il existe $D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $DB-AD=C$.
Considérons pour cela l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\varphi(M) = MB-AM$$

Pour $M\in\ker\varphi$, on a $MB=AM$.
Pour tout X vecteur propre de B associé à une valeur propre λ, on a

$$AMX = MBX = \lambda MX$$

Puisque λ est valeur propre de B, λ n'est pas valeur propre de A et donc $MX = O_{n,1}$.
Puisqu'il existe une base de vecteurs propres de B et puisque chacun annule M, on a $M=O_n$.
Ainsi l'endomorphisme φ est injectif, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie donc φ est bijectif. Ainsi il existe une matrice D telle $\varphi(D)=C$ et, par celle-ci, on obtient la similitude demandée.

Exercice 40 : [énoncé]
a) Par le théorème de Cayley Hamilton, on a

$$\chi_u(u) = \tilde{0}$$

avec χ_u polynôme de coefficient constant $\det u \neq 0$.
En écrivant

$$\chi_u(X) = XP(X) + \det u$$

le polynôme

$$Q(X) = -\frac{1}{\det u} P(X)$$

est solution.
b) Considérons l'endomorphisme v de $\mathbb{K}[X]$ qui envoie le polynôme $P(X)$ sur $P(X/2)$.
On vérifie aisément $u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id}$ ce qui permet d'affirmer que u est inversible d'inverse v.
Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme de degré exactement n.
Si $u(P) = \lambda P$ alors par identification des coefficients de degré n, on obtient

$$\lambda = 2^n$$

puis on en déduit

$$P = a_n X^n$$

La réciproque étant immédiate, on peut affirmer

$$\mathrm{Sp} u = \{2^n / n \in \mathbb{N}\} \text{ et } E_{2^n}(u) = \mathrm{Vect}(X^n)$$

Si par l'absurde il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$u^{-1} = Q(u)$$

alors le polynôme non nul

$$XQ(X) - 1$$

est annulateur de u. Les valeurs propres de u sont alors racines de celui-ci ce qui donne une infinité de racines.
C'est absurde.

Exercice 41 : [énoncé]
Dans une base adaptée au noyau f, la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & \vdots & & \vdots \\ \star & \star & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \star & \star & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\chi_f(X) = (-1)^n X^{n-2} \left(X^2 - (a+d)X + ad - bc\right)$$

Or

$$\mathrm{tr} f = a + d \text{ et } \mathrm{tr} f^2 = a^2 + 2bc + d^2$$

donc

$$\chi_f(X) = (-1)^n X^{n-2} \left(X^2 - \mathrm{tr}(f)X + \frac{(\mathrm{tr} f)^2 - \mathrm{tr}(f^2)}{2}\right)$$

Exercice 42 : [énoncé]
a) Si M n'est pas inversible, il existe une colonne X non nulle telle que $MX = 0$ et alors l'identité de l'énoncé donne ${}^tMX = X$ donc $1 \in \mathrm{Sp}({}^tM) = \mathrm{Sp} M$.
Inversement, si $1 \in \mathrm{Sp} M$ alors il existe une colonne X non nulle telle que $MX = X$ et alors l'identité de l'énoncé donne ${}^tMX = 0$ et donc ${}^tM$ n'est pas inversible. Or $\det({}^tM) = \det M$ donc M n'est pas inversible non plus.
b) La relation donnée entraîne

$$\left({}^tM\right)^2 = \left(I_n - M^2\right)^2 = M^4 - 2M^2 + I_n$$

Or

$$\left({}^tM\right)^2 = {}^t\left(M^2\right) = I_n - M$$

donc

$$M^4 - 2M^2 + I_n = I_n - M$$

et donc la matrice M est annulé par le polynôme

$$P(X) = X^4 - 2X^2 + X = X(X-1)(X^2 + X - 1)$$

C'est un polynôme scindé à racines simples donc la matrice M est diagonalisable.

Exercice 43 : [énoncé]
a) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. $\mathrm{tr}u = 0$ donne

$$\sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid u(e_i)\rangle = 0$$

Si $\dim E = 1$: ok
Si $\dim E > 1$, il existe $i \neq j$ tel que $\langle e_i \mid u(e_i)\rangle \geqslant 0$ et $\langle e_j \mid u(e_j)\rangle \leqslant 0$.
L'application $t \mapsto \langle u(te_i + (1-t)e_j) \mid te_i + (1-t)e_j\rangle$ est continue, à valeurs réelles et change de signe, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule et donc il existe $t \in [0,1]$ tel que pour $x = te_i + (1-t)e_j$, $\langle u(x) \mid x\rangle = 0$.
De plus, l'indépendance de e_i et e_j assure $x \neq 0$.
b) Il existe ε_1 vecteur unitaire tel que

$$\langle \varepsilon_1 \mid u(\varepsilon_1)\rangle = 0$$

On complète celui-ci en une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. La matrice de u dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & A \end{pmatrix}$$

avec $\mathrm{tr}A = 0$. Considérons alors u' l'endomorphisme de $E' = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de matrice A dans la base $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Puisque $\mathrm{tr}u' = \mathrm{tr}A = 0$, un principe de récurrence permet de former une base orthonormée $(\varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n')$ de E' dans laquelle u' est représenté par une matrice de diagonale nulle. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n')$ est alors une base orthonormée solution du problème posé.

Exercice 44 : [énoncé]
a) φ est une forme trilinéaire alternée sur E de dimension 3 donc φ est proportionnel au déterminant. Pour (i,j,k) base orthonormée,
$\varphi(i,j,k) = (i \mid u(i)) + (j \mid u(j)) + (k \mid u(k)) = \mathrm{tr}u$ donc $\varphi(x,y,z) = \mathrm{tr}u.\,[x,y,z]$.
b) $(u(x) \wedge y - u(y) \wedge x \mid z) = [u(x),y,z] + [x,u(y),z] = \mathrm{tr}u\,[x,y,z] - [x,y,u(z)] = (x \wedge y, (\mathrm{tr}u.\mathrm{Id} - u)(z))$. L'adjoint de $(\mathrm{tr}u.\mathrm{Id} - u)$ résout notre problème.

Exercice 45 : [énoncé]
La résolution est évidente si A est inversible puisque la matrice $Q = A^{-1}B$ convient.
Dans le cas général, munissons $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et considérons les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^n$ canoniquement représentés par A et B. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ étant orthonormée on a $uu^\star = vv^\star$. Or il est connu que $r = \mathrm{rg}u = \mathrm{rg}uu^\star$ donc $\mathrm{Im}u = \mathrm{Im}uu^\star$ puis $\mathrm{Im}u = \mathrm{Im}v$.
Puisque $\dim\ker u = \dim(\mathrm{Im}u)^\perp$, il existe $\rho_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ transformant $(\mathrm{Im}u)^\perp$ en $\ker u$. Considérons alors $u' = u\rho_1$. On vérifie $u'u'^\star = uu^\star$ et $\ker u' = (\mathrm{Im}u)^\perp$. De même, on définit $\rho_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ tel que $v' = v\rho_2$ vérifie $v'v'^\star = vv^\star$ et $\ker v' = (\mathrm{Im}u)^\perp$.
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée adaptée à la décomposition $\mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Im}u^\perp = \mathbb{R}^n$. Dans cette base les matrices de u' et v' sont de la forme $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A', B' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ inversibles et vérifiant $A'^tA' = B'^tB'$. Il existe alors $Q' \in \mathcal{O}_r(\mathbb{R})$ vérifiant $B' = A'Q'$. En considérant ρ l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, on obtient $v' = u'\rho$ avec $\rho \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Il en découle la relation $v = u(\rho_1\rho\rho_2^{-1})$ avec $\rho_1\rho\rho_2^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ qu'il suffit de retraduire matriciellement pour conclure.

Exercice 46 : [énoncé]
a) Les valeurs propres d'une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable ne pouvant être que 1 et -1, celle-ci vérifie $U^2 = I_n$. Les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$ sont les matrices des symétries orthogonales.
b) Soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On peut construire une base orthonormée de trigonalisation de tout endomorphisme complexe donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $P^\star P = I_n$ et $P^\star UP \in T_n^+(\mathbb{R})$. Or $(P^\star UP)^\star = P^\star U^{-1}P = (P^\star UP)^{-1}$ donc $P^\star UP$ est diagonale et ses éléments diagonaux sont de module 1.

Exercice 47 : [énoncé]
a) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} 1^2} = \sqrt{n}$$

donc $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.
b) Pour $X = {}^t\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, on vérifie $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} = {}^tXAX$. Or ${}^tXAX = (X \mid AX)$ donc toujours par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|{}^tXAX| \leqslant \|X\|\,\|AX\|$. Or $\|X\| = \sqrt{n}$ et $\|AX\| = \|X\| = \sqrt{n}$ car $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc
$\left|\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n.$

c) On peut avoir l'égalité si $n = 1$ mais aussi si $n = 4$ avec

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En fait, un approfondissement du problème donne $\sqrt{n} \in 2\mathbb{Z}$ condition nécessaire à l'obtention de l'égalité.

Exercice 48 : [énoncé]
a) (i)⇒(ii) par le théorème de Pythagore.
(ii)⇒(i) Supposons (ii). Pour $x \in \mathrm{Im}p$ et $y \in \ker p$, $p(x + \lambda y) = x$ donc

$$\|x\|^2 \leqslant \|x + \lambda y\|^2$$

puis

$$0 \leqslant 2\lambda(x \mid y) + \lambda^2 \|y\|^2$$

Cette relation devant être valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(x \mid y) = 0$.
Par suite $\mathrm{Im}p$ et $\ker p$ sont orthogonaux et donc p est une projection orthogonale.
(i)⇒(iii) car en décomposant x et y on observe

$$(p(x) \mid y) = (p(x) \mid p(y)) = (x \mid p(y))$$

(iii)⇒(i) car $\mathrm{Im}p = \mathrm{Im}p^\star = (\ker p)^\perp$.
b) α) $(p \circ q \circ p)^\star = p \circ q \circ p$ car $p^\star = p$ et $q^\star = q$.
β) $(\mathrm{Im}p + \ker q)^\perp = (\mathrm{Im}p)^\perp \cap (\ker q)^\perp = \ker p \cap \mathrm{Im}q$.
γ) $p \circ q \circ p$ est autoadjoint donc diagonalisable. De plus $\mathrm{Im}p$ est stable par $p \circ q \circ p$ donc il existe donc une base $(e_1, \ldots, e_r)$ de $\mathrm{Im}p$ diagonalisant l'endomorphisme induit par $p \circ q \circ p$. On a alors $(p \circ q \circ p)(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Or $e_i \in \mathrm{Im}p$ donc $p(e_i) = e_i$ puis

$$(p \circ q)(e_i) = \lambda_i e_i$$

On complète cette famille de vecteurs propres de $p \circ q$ par des éléments de $\ker q$ pour former une base de $\mathrm{Im}p + \ker q$. Sur ces vecteurs complétant, q est nul donc $p \circ q$ aussi.
Enfin, on complète cette dernière famille par des éléments de $\mathrm{Im}q \cap \ker p$ pour former une base de E. Sur ces vecteurs complétant, $p \circ q$ est nul car ces vecteurs sont invariants par q et annule p. Au final, on a formé une base diagonalisant $p \circ q$.

Exercice 49 : [énoncé]
Soit A une matrice antisymétrique réelle.
Le déterminant de A est le produit des valeurs propres complexes de A comptées avec multiplicité. Puisque la matrice A est réelle, ses valeurs propres complexes non réelles sont deux à deux conjuguées et forment donc un produit positif. Il reste à étudier les valeurs propres réelles de A.
Soient λ une valeur propre réelle de A et X est une colonne propre associée.
D'une part

$${}^tXAX = \lambda^tXX$$

D'autre part

$${}^tXAX = -^t(AX)X = -\lambda^tXX$$

On en déduit $\lambda = 0$ sachant $X \neq 0$.
Par suite le déterminant de A est positif ou nul.

Exercice 50 : [énoncé]
a) Considérons l'endomorphisme $u = f^\star \circ f$. Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ dans laquelle la matrice de u est diagonale

$$\mathrm{Mat}_\mathcal{B} u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On a alors pour tout $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$,

$$(f(\varepsilon_i) \mid f(\varepsilon_j)) = (\varepsilon_i \mid u(\varepsilon_j)) = \lambda_j(\varepsilon_i \mid \varepsilon_j) = 0$$

Ainsi l'endomorphisme f transforme la base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ en une famille orthogonale.
b) M est la matrice dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ d'un certain automorphisme f. Par ce qui précède, il existe une base orthonormée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dont l'image par f est une famille orthogonale. Celle-ci ne comporte pas le vecteur nul car f est un automorphisme et donc en posant

$$\varphi_i = \frac{f(\varepsilon_i)}{\|f(\varepsilon_i)\|}$$

on forme une base orthonormée $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ telle que la matrice de l'application linéaire f dans les bases $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \|f(\varepsilon_1)\| & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \|f(\varepsilon_n)\| \end{pmatrix}$$

Par formule de changement de bases orthonormées, on obtient

$$UMV = D$$

avec U, V matrices orthogonales

$$U = \mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(\varphi_1,\dots,\varphi_n) \text{ et } V = {}^t\mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$$

Si M n'est pas inversible, ce qui précède peut être repris en posant

$$\varphi_i = \frac{f(\varepsilon_i)}{\|f(\varepsilon_i)\|}$$

quand $f(\varepsilon_i) \neq 0$ et choisissant les autres φ_i dans une base orthonormée de $(\mathrm{Im} f)^\perp$ pour former une base orthonormée $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ satisfaisante.
c) On a

$${}^tMM = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Une base orthonormée diagonalisant ${}^tMM$ est formée des vecteurs

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon_2 \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et puisque

$$M\varepsilon_1 = \sqrt{10}\varphi_1 \text{ avec } \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on prend

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et on obtient

$$UMV = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$U = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 51 : [énoncé]
a) Si A et B sont orthogonalement semblables, ces deux matrices sont semblables et ont donc même trace et même déterminant. On en tire les conditions nécessaires $a + c = 4$ et $ac - b^2 = 3$

Inversement, si $a + c = 4$ et $ac - b^2 = 3$ alors A et B ont le même polynôme caractéristique $X^2 - 4X + 3$ de racines 1 et 3. Les matrices A et B étant symétriques réelles, elles sont toutes les deux orthogonalement semblables à $D = \mathrm{diag}(1,3)$ et donc A et B sont orthogonalement semblables.
Pour a fixé, on trouvera b et c convenables si, et seulement si, on peut trouver $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^2 = ac - 3 = a(4-a) - 3$ d'où la condition nécessaire et suffisante $1 \leqslant a \leqslant 3$.
Par symétrie, pour c fixé, on obtient la condition $1 \leqslant c \leqslant 3$.
b) Le raisonnement est analogue au précédent en parlant seulement de matrices semblables et l'on obtient la condition double $a + d = 4$ et $ad - bc = 3$.
Pour a fixé, il existe toujours $b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que A et B soient semblables : il suffit de prendre $d = 4 - a$ et b et c de sorte que $bc = -a^2 + 4a - 3$.
Pour d fixé : idem.
c) La fonction $(P,Q) \mapsto \det(PA^tP + QB^tQ)$ est continue, à valeurs réelles et définie sur le compact non vide $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, elle y admet donc un maximum.
d) Après réduction, la matrice symétrique réelle$A$ est orthogonalement semblable à la matrice $D = \mathrm{diag}(\sqrt5, -\sqrt5)$ ce qui permet d'écrire $A = UD^tU$ avec $U \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. On a alors

$$\det(PA^tP + QB^tQ) = \det(D + VB^tV)$$

avec $V = {}^tU^tPQ$ parcourant $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. La matrice VB^tV est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ avec } a + c = 4, ac - b^2 = 3 \text{ et } 1 \leqslant a \leqslant 3$$

et donc

$$\det(PA^tP + QB^tQ) = 2(2-a)\sqrt5 - 2$$

est maximal pour $a = 1$. Finalement

$$\max_{P,Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \det\left(PA^tP + QB^tQ\right) = 2\left(\sqrt5 - 1\right)$$

e) Non, prenons par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice

$$C = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$$

est semblable à B et peut donc s'écrire $C = QBQ^{-1}$ avec $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Pour $P = I_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, on obtient

$$PAP^{-1} + QBQ^{-1} = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ x & 2-x \end{pmatrix}$$

de déterminant
$$x(2-x)-x(1-x)=x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$$
f) En remplaçant A_i par une matrice orthosemblable, on peut supposer A_i de la forme
$$A_i=\begin{pmatrix}\alpha_i & 0\\ 0 & \beta_i\end{pmatrix}\text{ avec }\alpha_i\geqslant\beta_i$$
et donc écrire
$$A_i=\frac{\mathrm{tr}(A_i)}{2}I_2+\begin{pmatrix}\delta_i & 0\\ 0 & -\delta_i\end{pmatrix}\text{ avec }\delta_i=\frac{\alpha_i-\beta_i}{2}\geqslant 0$$
Une matrice orthogonale P_i peut s'écrire sous la forme
$$P_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}\text{ ou }P_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & \sin\theta_i\\ \sin\theta_i & -\cos\theta_i\end{pmatrix}$$
et alors dans les deux cas
$$P_iA_i{}^tP_i=\frac{\mathrm{tr}(A_i)}{2}I_2+\begin{pmatrix}\delta_i\cos(2\theta_i) & \delta_i\sin(2\theta_i)\\ \delta_i\sin(2\theta_i) & -\delta_i\cos(2\theta_i)\end{pmatrix}$$
En posant
$$m=\frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(A_1)+\dots+\mathrm{tr}(A_k)\right)$$
on peut écrire
$$\det\left(P_1A_1{}^tP_1+\dots+P_kA_k{}^tP_k\right)=\det\left(mI_2+\sum_{i=1}^k\begin{pmatrix}\delta_i\cos(2\theta_i) & \delta_i\sin(2\theta_i)\\ \delta_i\sin(2\theta_i) & -\delta_i\cos(2\theta_i)\end{pmatrix}\right)$$
et après calcul
$$\det\left(P_1A_1{}^tP_1+\dots+P_kA_k{}^tP_k\right)=m^2-\left[\left(\sum_{i=1}^k\delta_i\cos(2\theta_i)\right)^2+\left(\sum_{i=1}^k\delta_i\sin(2\theta_i)\right)^2\right]$$
Pour maximiser le déterminant, il suffit de savoir minimiser la fonction donnée par
$$f(\alpha_1,\dots,\alpha_k)=\left(\sum_{i=1}^k\delta_i\cos(\alpha_i)\right)^2+\left(\sum_{i=1}^k\delta_i\sin(\alpha_i)\right)^2$$
On peut interpréter f dans le plan complexe
$$f(\alpha_1,\dots,\alpha_k)=\left|\delta_1\mathrm{e}^{i\alpha_1}+\dots+\delta_k\mathrm{e}^{i\alpha_i}\right|^2$$
Quitte à réordonner les matrices A_i, on peut supposer
$$\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\ldots\geqslant\delta_k$$
Cas $\delta_1\leqslant\delta_2+\dots+\delta_k$
On peut montrer que la fonction f s'annule : c'est assez facile si $k=2$ car alors $\delta_1=\delta_2$, c'est aussi vrai si $k\geqslant 3$ en établissant que le système suivant possède une solution
$$\begin{cases}\delta_2\sin\alpha=\delta_3\sin\beta\\ \delta_2\cos\alpha+\delta_3\cos\beta=\delta_1-(\delta_4+\dots+\delta_k)\end{cases}$$
que l'on obtient avec
$$\alpha=\arcsin\left(\frac{\delta_3\sin\beta}{\delta_2}\right)\text{ et }\beta\in[0,\pi/2]\text{ bien choisi}$$
Dans ce cas le maximum de $\det\left(P_1A_1{}^tP_1+\dots+P_kA_k{}^tP_k\right)$ vaut m^2.
Cas $\delta_1>\delta_2+\dots+\delta_k$
La fonction f ne peut s'annuler car
$$\left|\delta_1\mathrm{e}^{i\alpha_1}+\dots+\delta_k\mathrm{e}^{i\alpha_i}\right|=0\Rightarrow\delta_1=-\left(\delta_2\mathrm{e}^{i(\alpha_2-\alpha_1)}+\dots+\delta_k\mathrm{e}^{i(\alpha_k-\alpha_1)}\right)$$
et en passant au module on obtient alors $\delta_1\leqslant\delta_2+\dots+\delta_k$.
La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ et admet donc un minimum sur le compact $[0,2\pi]^k$ qui est un point critique. Si $(\beta_1,\dots,\beta_k)$ est un point critique alors
$$\forall 1\leqslant i\leqslant k,\frac{\partial f}{\partial\alpha_i}(\beta_1,\dots,\beta_k)=0$$
ce qui donne
$$\forall 1\leqslant i\leqslant k, C\sin\beta_i=S\cos\beta_i\text{ avec }C=\sum_{j=1}^k\delta_j\cos\beta_j\text{ et }S=\sum_{j=1}^k\delta_j\sin\beta_j$$
Ici $(C,S)\neq(0,0)$ car on est dans le cas où la fonction f ne s'annule pas. On obtient alors
$$\begin{vmatrix}\cos\beta_i & \cos\beta_j\\ \sin\beta_i & \sin\beta_j\end{vmatrix}=0$$
Les points du cercles trigonométriques repérés par les angles β_i et β_j sont alors confondus ou diamétralement opposés. Cela permet d'écrire pour chaque indice i
$$\cos\beta_i=\varepsilon_i\cos\alpha\text{ et }\sin\alpha_i=\varepsilon_i\sin\alpha$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$ et α un angle fixé. On a alors

$$f(\beta_1, \dots, \beta_n) = \left(\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \delta_i\right)^2$$

et donc

$$\min f = \left(\min_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1} \left|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \delta_i\right|\right)^2 = \mu^2$$

et alors la borne supérieure cherchée vaut

$$m^2 - \mu^2 = (m - \mu)(m + \mu)$$

Cette quantité peut aussi s'interpréter comme égale à

$$\lambda(2m - \lambda)$$

avec λ la quantité la plus proche de m que l'on parvient à obtenir en sommant k valeurs chacune choisies parmi les deux valeurs propres possibles de chaque matrice $A_1, \dots, A_k$.
Cette résolution m'a pris des heures... elle me semble bien compliquée et n'exploite pas la positivité des matrices A_i ! Néanmoins l'expression compliquée de la solution et, notamment la discussion, ne me semble pas pouvoir être évitée !

Exercice 52 : [énoncé]
Soient $a, b \in E$. L'application

$$t \mapsto q((1-t)a + tb)) = (1-t)^2 q(a) + 2t(1-t)\varphi(a, b) + t^2 q(b)$$

est continue et prend la valeur $q(a)$ en $t = 0$ et $q(b)$ en $t = 1$.
Si $q(a)q(b) < 0$ alors cette application s'annule et donc puisque l'on suppose q définie, il existe $t \in]0, 1[$ tel que $(1-t)a + tb = 0$. Mais alors $(1-t)a = -tb$ donne $(1-t)^2 q(a) = t^2 q(b)$ et donc $q(a)q(b) \geqslant 0$.
Il y a contradiction et donc pour tout $a, b \in E$, $q(a)q(b) \geqslant 0$ c'est-à-dire $q(a)$ et $q(b)$ sont de même signe.
On peut alors conclure que q est définie positive ou définie négative.

Exercice 53 : [énoncé]
a) Sur $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(X, Y) = {}^t XAY$ définit un produit scalaire et $\psi(X, Y) = {}^t XBY$ définit une forme bilinéaire symétrique. Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée de E pour φ diagonalisant la forme bilinéaire symétrique ψ. Pour la matrice de passage P de la base canonique de E (dans laquelle φ et ψ sont représentées par A et B) vers la base orthonormée précédente la relation de changement de base donne : $A = {}^t P I_n P$ et $B = {}^t P \Delta P$.
De plus, la forme bilinéaire symétrique ψ étant définie positive, les valeurs diagonales de Δ sont strictement positives.
b) Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs diagonales de Δ.
$\det A = (\det P)^2$, $\det B = \lambda_1 \dots \lambda_n (\det P)^2$ et
$\det(A + B) = (1 + \lambda_1) \dots (1 + \lambda_n)(\det P)^2$
Les λ_i étant positifs :

$$1 + \lambda_1 \dots \lambda_n \leqslant (1 + \lambda_1) \dots (1 + \lambda_n)$$

donc

$$\det A + \det B \leqslant \det(A + B)$$

c) Toute matrice symétrique réelle positive peut-être diagonalisée via une matrice orthogonale en une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs. Cette dernière peut se voir comme limite d'une suite de matrices diagonales à coefficients diagonaux strictement positifs. Par suite $\mathcal{S}_n^{+\star}(\mathbb{R})$ est dense $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Par continuité du déterminant et densité, la relation précédente s'étend à $A, B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

Exercice 54 : [énoncé]
a) $A \in \mathcal{S}_n^{+\star}(E)$ donc $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{+\star}(E)$ et par suite $\langle\ |\ \rangle_A$ est un produit scalaire sur E.
b) On a

$$\langle x \mid ABy \rangle_A = \left\langle A^{-1}x \mid ABy \right\rangle = \langle x \mid By \rangle = \langle Bx \mid y \rangle = \langle ABx \mid y \rangle_A$$

L'endomorphisme AB est autoadjoint dans $(E, \langle\ |\ \rangle_A)$ donc diagonalisable.
c) On a

$$\frac{\langle Bx \mid x \rangle}{\langle A^{-1}x \mid x \rangle} = \frac{\langle ABx \mid x \rangle_A}{\|x\|_A^2}$$

En introduisant une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $(E, \langle\ |\ \rangle_A)$ formée de vecteurs propres de AB, on peut écrire pour $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,

$$\frac{\langle ABx \mid x \rangle_A}{\|x\|_A^2} = \frac{\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de AB. Il est clair que cette quantité est comprise entre $\lambda_{\min}(AB)$ et $\lambda_{\max}(AB)$. De plus ces deux valeurs propres sont valeurs prise par

$$\frac{\langle ABx \mid x \rangle_A}{\|x\|_A^2}$$

en x vecteur propre associé. Enfin $E\setminus\{0\}$ est connexe par arcs et l'image d'un connexe par arcs par une application continue est un connexe par arcs. On peut donc conclure que les valeurs prises par

$$x \mapsto \frac{\langle Bx \mid x\rangle}{\langle A^{-1}x \mid x\rangle}$$

sur $E\setminus\{0\}$ constituent le segment

$$[\lambda_{\min}(AB), \lambda_{\max}(AB)]$$

d) On a $\langle Bx \mid x\rangle \leqslant \lambda_{\max}(B)\left\|x\right\|^2$ et $\left\langle A^{-1}x \mid x\right\rangle \geqslant \lambda_{\min}(A^{-1})\left\|x\right\|^2$ donc

$$\frac{\langle Bx \mid x\rangle}{\langle A^{-1}x \mid x\rangle} \leqslant \frac{\lambda_{\max}(B)}{\lambda_{\min}(A^{-1})}$$

Or $\lambda_{\min}(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{\max}(A)}$ donc

$$\frac{\langle Bx \mid x\rangle}{\langle A^{-1}x \mid x\rangle} \leqslant \lambda_{\min}(A)\lambda_{\max}(B)$$

et la conclusion est dès lors facile.

Exercice 55 : [énoncé]
a) $v^\star = v$ et$(v(x) \mid x) = \left\|u(x)\right\|^2 \geqslant 0$ et $= 0 \Leftrightarrow x = 0$ car $u \in \mathrm{GL}(E)$.
b) Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de v est de la forme $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$. L'endomorphisme w dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ convient. Notons que cet endomorphisme est autoadjoint car représenté par une matrice symétrique dans une base orthonormée.
On pose ensuite $\rho = uw^{-1}$ et on vérifie sans peine $\rho^\star\rho = \mathrm{Id}$ donc $\rho \in \mathcal{O}(E)$.
c) Si $u = \rho w$ alors $w^2 = v$. Nous allons établir l'unicité de w. v est diagonalisable donc E est somme des sous-espaces propres $E_\lambda(v)$ avec $\lambda \geqslant 0$. Comme v et w commutent, ces sous-espaces sont stables par w. Or w est diagonalisable donc l'endomorphisme induit par w sur $E_\lambda(v)$ aussi et puisque les valeurs propres de w sont positives, il est nécessaire que l'endomorphisme induit par w sur $E_\lambda(v)$ soit $\sqrt{\lambda}\mathrm{Id}$. Ceci détermine w de manière unique et puisque $\rho = uw^{-1}$, r aussi est unique.
d) $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \exists!(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), A = OS$ (décomposition de Cartan).

Exercice 56 : [énoncé]
Par diagonalisation d'une forme bilinéaire symétrique dans un espace euclidien dont le produit scalaire est défini par la matrice A, on peut écrire affirmer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$ avec D diagonale.
On a alors $AB = {}^tPP^tPDP$ donc $({}^tP)^{-1}AB^tP = P^tPDP^tP$.
La matrice AB est donc semblable à P^tPDP^tP qui est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable.

Exercice 57 : [énoncé]
Par diagonalisation d'une forme bilinéaire symétrique dans un espace euclidien dont le produit scalaire est défini par la matrice B, on peut écrire affirmer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $B = {}^tPP$ et $A = {}^tPDP$. On a alors $\det(A - XB) = (\det P)^2\chi_D(X)$ scindé.

Exercice 58 : [énoncé]
a) Supposons $A + {}^tA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Pour $X \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, ${}^tXAX = {}^tX^tAX$ donc

$${}^tXAX = \frac{1}{2}\left({}^tX(A + {}^tA)X\right) > 0$$

Inversement, si la condition

$$\forall X \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}, {}^tXAX > 0$$

est vérifiée alors on a aussi

$$\forall X \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}, {}^tX^tAX > 0$$

donc

$$\forall X \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}, {}^tX(A + {}^tA)X > 0$$

Puisque la matrice $A + {}^tA$ est évidemment symétrique, on obtient $A + {}^tA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
b) Commençons par observer que pour $A \in \mathcal{P}$, les valeurs propres complexes de A sont de partie réelle strictement positive. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Z \in \mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ vérifiant $AZ = \lambda Z$. En écrivant $Z = X + iY$ avec X, Y colonnes réelles et $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la partie réelle de la relation $Z^\star AZ = \lambda Z^\star Z$ donne ${}^tXAX + {}^tYAY = \alpha\left\|Z\right\|^2$. On en déduit $\alpha > 0$.
Pour $A \in \mathcal{P}$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on peut écrire $S = {}^tPP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a alors $({}^tP)^{-1}SA^tP = PA^tP$. En posant $B = PA^tP$, on peut affirmer que SA et B sont semblables et ont donc les mêmes valeurs propres.
Pour $X \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, ${}^tXBX = {}^tYAY$ avec $Y = {}^tPX \neq 0$ donc ${}^tXBX > 0$. Par suite $B \in \mathcal{P}$ ce qui permet de conclure.

Exercice 59 : [énoncé]
Par diagonalisation d'une forme bilinéaire symétrique dans un espace euclidien dont le produit scalaire est défini par la matrice A, on peut écrire affirmer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$ avec D diagonale, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
En notant E_j les colonnes élémentaires, pour $X = P^{-1}E_j$, la condition ${}^tXAX \leqslant {}^tXBX$ donne $1 \leqslant \lambda_j$.
On a alors

$$\det B = (\det P)^2 \prod_{j=1}^n \lambda_j \geqslant (\det P)^2 = \det A$$

Exercice 60 : [énoncé]
Notons E l'espace des fonctions continues de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et de carrés intégrables.
On définit un produit scalaire ϕ sur E par

$$\phi(f,g) = \int_{]0,1]} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $i \in \{1,\ldots,n\}$, posons $f_i : t \mapsto t^{a_i - 1/2}$ élément de E.
Pour $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et $y = (y_1,\ldots,y_n)$ éléments de $\mathbb{R}^n$, posons

$$b(x,y) = \phi\left(\sum_{i=1}^n x_i f_i, \sum_{i=1}^n y_i f_i\right)$$

L'application b est évidemment une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ et pour celle-ci

$$b(x,x) = \int_{]0,1]} \sum_{i,j=1}^n x_i x_j t^{a_i+a_j-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{i,j=1}^n \frac{x_i x_j}{a_i + a_j} = q(x)$$

Ainsi q est une forme quadratique.
De plus, puisque la forme bilinéaire symétrique ϕ est positive, il en de même de b et donc la forme quadratique q est positive.
Enfin, si $q(x) = 0$ alors $\sum_{i=1}^n x_i f_i = 0$.
Ainsi $\sum_{i=1}^n x_i t^{a_i - 1/2} = 0$ pour tout $t \in]0,1]$.
En multipliant par $t^{1/2}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n x_i t^{a_i} = 0 \text{ pour tout } t \in]0,1] \quad (*)$$

En posant $t = 1$, on obtient l'équation $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.
En dérivant (*) et en multipliant par t, on obtient

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i t^{a_i} = 0 \text{ pour tout } t \in]0,1] \quad (**)$$

En posant $t = 1$, on obtient l'équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$.
En reprenant ce principe, on obtient

$$\sum_{i=1}^n a_i^k x_i = 0 \text{ pour tout } k \in \{0,\ldots,n-1\}$$

Le n-uplet $(x_1,\ldots,x_n)$ est alors solution d'un système linéaire homogène à n équations qui est un système de Cramer car son déterminant est un déterminant de Vandermonde non nul puisque les $a_1,\ldots,a_n$ sont deux à deux distincts. Par suite $x_1 = \ldots = x_n = 0$ et ainsi $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
Finalement q est une forme quadratique définie positive.

Exercice 61 : [énoncé]
a) Si M possède la propriété (P) alors les colonnes de la matrice U introduites doivent être unitaires donc

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \lambda_i^2 + \alpha_i^2 = 1$$

et elles doivent être deux à deux orthogonales donc

$$\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \alpha_i \alpha_j = 0$$

Cette dernière condition ne permet qu'au plus un α_k non nul et alors $|\lambda_k| \leqslant 1$ tandis que pour $i \neq k$, $|\lambda_i| = 1$.
Inversement, si tous les λ_i vérifient $|\lambda_i| = 1$ sauf peut-être un vérifiant $|\lambda_k| < 1$, alors on peut construire une matrice U affirmant que la matrice M possède la propriété (P) en posant

$$\forall 1 \leqslant i \neq k \leqslant n, \alpha_i = \alpha_{2n+2-i} = 0, \alpha_k = \alpha_{2n+2-k} = \sqrt{1-\lambda_k^2} \text{ et } \alpha_{n+1} = -\lambda_k$$

b) La matrice M est orthogonalement diagonalisable, on peut donc écrire

$$M = {}^tPDP \text{ avec } P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$$

Considérons alors la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Si la matrice M possède la propriété (P) alors on peut introduire $U \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ prolongeant M et alors

$$V = {}^tQUQ = \begin{pmatrix} & & & \beta_{2n+1} \\ & D & & \vdots \\ & & & \beta_{n+2} \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n & \beta_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$$

ce qui entraîne que les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de M sont toutes égales à ± 1 sauf peut être une élément de $[-1, 1]$.
La réciproque est immédiate.
c) La matrice ${}^tMM$ est symétrique définie positive. On peut donc en diagonalisant orthogonalement celle-ci déterminer une matrice S symétrique définie positive telle que

$${}^tMM = S^2$$

On pose alors $U = MS^{-1}$ et on vérifie $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par le calcul de ${}^tUU$.
d) Supposons que la matrice $M = US$ possède la propriété (P). En multipliant par la matrice

$$V = \begin{pmatrix} {}^tU & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$$

on démontre que la matrice S possède aussi la propriété (P).
Puisque les valeurs propres de S sont les racines des valeurs propres de ${}^tMM$, on obtient la condition nécessaire suivante : les valeurs propres de ${}^tMM$ doivent être égales à 1 sauf peut-être une dans $[0, 1]$ (ces valeurs propres sont nécessairement positives).
La réciproque est immédiate.
e) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour p assez grand, la matrice

$$M_p = M + \frac{1}{p} I_n$$

est assurément inversible ce qui permet d'écrire $M_p = U_p S_p$ avec U_p orthogonale et S_p symétrique réelle.
La suite (U_p) évolue dans le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, elle possède une valeur d'adhérence $U_\infty \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et la matrice $S_\infty = U_\infty^{-1} M$ est symétrique réelle en tant que limite d'une suite de matrices symétriques réelles.
On peut donc conclure.