Exercice 1 [00087] [correction]
On pourra à tout moment s'aider du logiciel de calcul formel.
a) Résoudre sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) : xy' + y = \frac{1}{\ln x}$$

et expliciter (sous forme intégrale) la solution de (E) sur I, notée f, telle que $f(2) = 0$.
Quel est le résultat obtenu avec le logiciel de calcul formel ?
b) Etudier les variations de f. Vérifier que f admet un maximum en un unique point d'abscisse $x_0 \in I$.
Avec le logiciel de calcul formel, donner une valeur approchée de x_0.
c) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $f(x)$ quand $x \to +\infty$. On commencera par établir l'équivalent

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$$

d) Déterminer un équivalent de f lorsque $x \to 1^+$.
e) Tracer le graphe de f avec le logiciel de calcul formel.

Exercice 2 [02469] [correction]
Soit (x_k) une suite de $[0, 1]$ équirépartie :

$$\forall [a, b] \subset [0, 1], \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Card}\,\{k \in [\![1, n]\!] \mid x_k \in [a, b]\} = b - a$$

a) Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{C}([0, 1]), \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

b) Pour $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$, créer, à l'aide de Maple, un programme calculant

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Créer un programme qui réalise la méthode des rectangles. Comparer ces deux programmes avec la valeur donnée par Maple.
c) Adapter la méthode aléatoire au calcul de

$$\iint_{[0,1]^2} \cos(xy)\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Exercice 3 [02477] [correction]
Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$x_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, x_{n+1} = x_n + n/x_n$$

a) Calculer avec Maple, les 10 premiers termes de la suite pour différentes valeurs de x_1. Commenter.
b) Minorer x_n. Si $(y_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la même relation de récurrence, étudier $x_n - y_n$.
En déduire le comportement asymptotique de (x_n).

Exercice 4 [02478] [correction]
a) Subdiviser $\mathbb{R}^+$ en intervalles contigus disjoints, chacun d'entre eux contenant une unique racine de l'équation $(E) : \tan x \,\mathrm{th} x = 1$.
b) On range toutes les racines positives de (E) dans une suite strictement croissante $(x_n)_{n\geqslant 0}$.
Evaluer numériquement les quatre premiers termes.
c) Donner un développement asymptotique de x_n.

Exercice 5 [01479] [correction]
Soit G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ engendré par les deux matrices S et T suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rappelons que c'est le plus petit sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ contenant S et T.
a) Avec le logiciel de calcul formel, créer les matrices S, T. Expliciter les éléments du groupe $\langle R\rangle$ engendré par la matrice $R = ST$ et préciser le cardinal de ce sous-groupe de G.
Quelles sont les matrices SR et R^7S ?
b) Montrer que tout élément de G est soit une puissance R^k de R, soit un produit R^kS. Préciser le cardinal n de G.
Dresser la liste de tous les éléments de G et déterminer la nature géométrique des endomorphismes canoniquement associés dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$.
c) La transformation $\phi_S : g \mapsto S.g$ définit une permutation de l'ensemble G.
A l'aide du logiciel de calcul formel, dresser la séquence des éléments de G et de leurs images par ϕ_S.
Quelle est la signature de la permutation de G (qu'on peut identifier à l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$) ainsi définie ?
Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 6 [02472] [correction]
Montrer que

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3}+\left(\frac{2}{3}-\frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3}$$

est un rationnel. On conseille d'effectuer les calculs par ordinateur.

Exercice 7 [02475] [correction]
Si n est un entier $\geqslant 2$, le rationnel $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ peut-il être entier ?

Exercice 8 [00528] [correction]
On définit pour $n \in \mathbb{N}^\star$ les nombres complexes

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{i}{k^2}\right) \text{ et } v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+2\frac{i}{k}\right)$$

a) On note, dans le plan complexe, A_n et B_n les points d'affixes respectives u_n et v_n.
Utiliser le logiciel de calcul formel pour visualiser les lignes polygonales $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et $B_1, B_2, \ldots, B$ pour diverses valeurs de n : par exemple 50,100,500... Un point du plan d'affixe $z = x + iy$ sera repéré par la liste $[x, y]$ de ses deux coordonnées.
b) Etudier la convergence de la suite (u_n).
S'il y a convergence, donner à l'aide du logiciel de calcul formel, une valeur approchée (par module et argument) de $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
c) Etudier la convergence de la suite (v_n).
On pourra justifier l'existence d'une constante L telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{2}{k} = 2\ln n + L + o(1)$$

et étudier la nature (convergente ou divergente) de la suite complexe $(z_n)_{n\geqslant 1}$:

$$z_n = \exp(2i\ln n)$$

[Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 9 [03060] [correction]
Soient n, p et q trois naturels non nuls et deux applications linéaires $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
a) Démontrer qu'il existe une application linéaire $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ telle que $u = w \circ v$ si, et seulement si, on a l'inclusion des noyaux

$$\ker(v) \subset \ker(u)$$

Dans ce cas, déterminer toutes les applications w qui conviennent.
b) Pour résoudre cette question, on utilisera un logiciel de calcul formel.
Soient A et B les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Existe-t-il une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = CB$?
Déterminer toutes les matrices C solutions.
c) Pour la matrice B donnée dans la question précédente, caractériser par leurs colonnes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = CB$.
Déterminer dans ce cas l'ensemble des solutions C.
d) Soient trois applications linéaires $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ et $v_1, v_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
Démontrer qu'il existe deux applications linéaires $w_1, w_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ telles que $u = w_1 \circ v_1 + w_2 \circ v_2$ si, et seulement si,

$$\ker v_1 \cap \ker v_2 \subset \ker u$$

[Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 10 [02112] [correction]
On pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\frac{x}{2k}}{1+\frac{x}{2k-1}}\right)$$

1.a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente, de limite strictement positive. On note $P(x)$ cette limite.
1.b) Tracer sur $[0, 20]$, le graphe de quelques fonctions P_n.
2.a) Démontrer que P est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
2.b) Etudier le sens de variation de P sur $\mathbb{R}^+$ ainsi que l'existence de limite de P en $+\infty$.

3.a) Calculer $P(2j)$ pour tout entier naturel j. Confirmer le résultat avec le logiciel de calcul formel (on rappelle que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$)
3.b) P est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$?
Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 11 [02474] [correction]
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$f_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+1}}\left(\mathrm{e}^t - \sum_{p=0}^{n} \frac{t^p}{p!}\right)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Soit u_n cette intégrale.
b) A l'aide du logiciel de calcul fourni, calculer u_n pour $1 \leqslant n \leqslant 10$, puis effectuer une conjecture sur l'expression de u_n.
c) Montrer que l'on peut écrire u_n comme somme d'une série et utiliser ce résultat pour démontrer la conjecture précédente.

Exercice 12 [02479] [correction]
Soit pour $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^4 + n^4}$$

a) Donner le domaine de définition de f.
b) La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$?
c) Calculer, avec un logiciel de calcul formel

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

d) Donner un équivalent de f en $+\infty$.
e) Montrer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

Exercice 13 [02480] [correction]
a) Déterminer le domaine de définition réel de $f : a \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2n^2}$.
b) Déterminer $\lim_{a\to 0^+} af(a)$ et $\lim_{a\to+\infty} f(a)$.

Exercice 14 [02485] [correction]
Soit

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(2n+1)}$$

a) Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ que l'on déterminera tel que

$$S = a\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} + b\pi$$

b) Calculer S à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Exercice 15 [02488] [correction]
Soit $a \in \mathbb{Q} \cap]0,2[$ avec $a \neq 1$.
On pose

$$I_n(a) = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1-(1-a)x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

a) Justifier l'existence de $I_n(a)$.
b) Calculer, avec Maple, $I_n(a)$ pour $a \in \{1/5, 1/4, 1/3, 1/2\}$ et pour $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$.
Etablir une conjecture.
c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a

$$I_n(a) = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_{n,p}(1-a)^p$$

où les $\alpha_{n,p}$ sont à déterminer.
On pourra utiliser

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

d) On pose

$$R_n(X) = \frac{(X+1)\dots(X+n)}{(X+n+1)\dots(X+2n+1)}$$

Décomposer R_n en éléments simples.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe des rationnels $r_n(a)$ et $q_n(a)$ tels que

$$I_n(a) = r_n(a) + q_n(a)\ln a$$

[Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 16 [02489] [correction]
a) Simplifier avec un logiciel de calcul formel

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(X-\frac{k}{n}\right)^2 X^k(1-X)^{n-k}$$

Pour $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$B_n(f)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)X^k(1-X)^{n-k}$$

b) On suppose f k-lipschitzienne avec $k>0$.
Montrer que $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
c) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ et f' k-lipschitzienne sur $[0,1]$.
Montrer que $B_n(f)'$ converge uniformément vers f'.
Indice : Utiliser $B_{n-1}(f')-B_n(f)'$.
[Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 17 [01279] [correction]
a) Démontrer que, si deux endomorphismes u et v d'un espace vectoriel E commutent, alors, les sous-espaces propres de u et l'image de u sont stables par v.
Dans les deux cas suivants :

$$A=\begin{pmatrix}20&12&-4&12\\-4&-3&9&-5\\-4&1&5&-5\\-8&-10&6&-2\end{pmatrix}\text{ et }A=\begin{pmatrix}-12&-16&-8&-4\\4&13&1&-1\\4&5&9&-1\\8&10&2&6\end{pmatrix}$$

b) Préciser les matrices qui commutent avec A (structure, dimension, base éventuelle).
c) Etudier dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, puis dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, l'équation

$$X^2=A$$

(nombre de solutions, un exemple de solution quand il y en a, somme et produit des solutions quand elles sont en nombre fini).
Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 18 [01557] [correction]
Soient $(a_1,\dots,a_{2n})\in\mathbb{C}^{2n}$ et $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2n}$ la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par :

$$A=A(a_1,\dots,a_{2n})=\begin{pmatrix}(0)&&a_{2n}\\&\iddots&\\a_1&&(0)\end{pmatrix}$$

autrement dit telle que $a_{i,j}=0$ si $i+j\neq 2n+1$ et $a_{i,2n+1-i}=a_{2n+1-i}$ pour $i=1,\dots,2n$.
a) Etude du cas $n=2$ avec le logiciel de calcul formel : créer la matrice

$$A=A(a,b,c,d)=\begin{pmatrix}(0)&&&d\\&&c&\\&b&&\\a&&&(0)\end{pmatrix}$$

et étudier le caractère diagonalisable de A « en situation générale ».
Etudier séparément avec le logiciel les cas particuliers non envisagés en situation générale.
Vérifier tous les résultats par un étude directe
b) Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $F_1,\dots,F_p$ des sous-espaces vectoriels stables par u tels que

$$E=F_1\oplus\cdots\oplus F_p$$

Démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable, faisant intervenir les restrictions $u_{\restriction F_1},\dots,u_{\restriction F_p}$ (où la restriction $u_{\restriction F_i}$ est considérée comme endomorphisme de F_i).
c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $A(a_1,\dots,a_{2n})$ soit diagonalisable.
d) Comment les résultats sont-ils modifiés si la matrice A est réelle et qu'on étudie si elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?

Exercice 19 [01959] [correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente non nulle. On appelle indice de nilpotence de A le nombre entier

$$\mathrm{Ind}(A)=\min\left\{k\in\mathbb{N}^\star/A^k=0\right\}$$

1. Quelle est la dimension de l'algèbre $\mathbb{K}[A]$ engendrée par A ?
2.a) Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ tel que $P(0)=1$. Démontrer que la matrice $B=AP(A)$ est nilpotente, de même indice que A.
2.b) En déduire qu'il existe un polynôme $Q\in\mathbb{K}[X]$ vérifiant $Q(0)\neq 0$ et $A=BQ(B)$.
3. Cette question doit être traitée avec le logiciel de calcul formel. On considère la matrice $A\in\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall(i,j)\in[\![1,8]\!]^2, A[i,j]=1\text{ si }i=j-1\text{ ou si }i=j-4\text{ et }0\text{ sinon}$$

3.a) Vérifier que A est nilpotente et calculer son indice de nilpotence.

3.b) On suppose ici que $P = 1 + X + 2X^2 + 3X^3$ et $B = AP(A)$. Déterminer explicitement un polynôme Q de coefficient constant non nul tel que $A = BQ(B)$.
Indication : on peut chercher Q de degré strictement inférieur à l'indice de nilpotence de A.
Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 20 [02492] [correction]
Soient f et g deux endomorphismes l'espace euclidien de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représentés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Trouver les droites vectorielles stables par f.
b) Soit P un plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal $\vec{n}$. Montrer que P est stable par f si, et seulement si, $\text{Vect}(\vec{n})$ est stable par $f^\star$.
En déduire les plans stables par f.
c) Donner les droites et les plans stables par g.

Exercice 21 [03103] [correction]
On considère $n+1$ réels deux à deux distincts $a_0, \dots, a_n$ et A le polynôme

$$A(X) = \prod_{k=0}^{n} (X - a_k)$$

Soit B un polynôme réel tel que pour tout $k = 0, \dots, n$, $B(a_k) \neq 0$. On considère l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le reste $R = f(P)$ de la division euclidienne de BP par A.
a) Justifier qu'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Etude d'un exemple avec le logiciel de calcul formel : on demande de résoudre cette question avec le logiciel.
On choisit

$$n = 2,\ A(X) = (X-1)(X-2)(X-3) \text{ et } B(X) = X^3$$

Ainsi f est ici l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui à $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de X^3P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.
Créer l'application f. Utiliser la commande « rem »qui fournit le reste de la division euclidienne. Expliciter alors l'image de $P = aX^2 + bX + c$.
Déterminer le noyau de f.
Suivre le même procédé pour déterminer les éléments propres de f, en annulant les coefficients de $Q = f(P) - \lambda P$.
Créer la matrice de f dans la base canonique de E et retrouver ainsi les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
c) On revient au cas général. Déterminer le noyau, les éléments propres (valeurs propres, sous-espaces propres) et le déterminant de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 22 [03114] [correction]
Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à deux et q un nombre complexe non nul tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}^\star$, $q^k \neq 1$. On considère également une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
1. On suppose qu'il existe $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$M^{-1}AM = qM$$

On notre χ_A le polynôme caractéristique de A. Déterminer une relation entre $\chi_A(X)$ et $\chi_A\left(\frac{X}{q}\right)$.
En déduire que A est nilpotente.
2. Cette question est à résoudre à l'aide du logiciel de calcul formel.
Dans cette question, on suppose que $q = 2$ et que A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$ vérifiant

$$AM = 2MA$$

b) Que dire de l'ensemble des matrices M ainsi obtenues ?
c) Déterminer les matrices $M \in \text{GL}_6(\mathbb{C})$ vérifiant

$$M^{-1}AM = 2A$$

Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 23 [03204] [correction]
Soit $A_n = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$a_{i,i} = 0 \text{ et } a_{i,j} = j \text{ si } i \neq j$$

a) A l'aide de Maple, calculer les valeurs approchées des valeurs propres de A_2, A_3 et, si possible A_{10}.
b) Si λ est valeur propre de A_n, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 1$$

c) Nombre et localisation des valeurs propres de A_n ?
d) On appelle x_n la valeur propre de A_n strictement comprise entre -2 et -1.
Quel est le sens de variation de la suite (x_n) ?
e) Limite de (x_n) et développement asymptotique à deux termes.
Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 24 [02476] [correction]
Si $n \in \mathbb{N}^\star$, soit f_n la fonction continue égale à 0 sur $[0, 1/2]$, affine sur $[1/2, 1/2 + 1/(n+1)]$ et égale à 1 sur $[1/2 + 1/(n+1), 1]$.
a) Représenter f_n avec la fonction

`piecewise`

de Maple.
b) Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy pour la norme $\|\,.\,\|_1$.
c) L'espace muni de $\|\,.\,\|_1$ est-il complet ?

Exercice 25 [02481] [correction]
On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant

$$u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n \text{ et } u_0 = u_1 = -1$$

a) Calculer, avec un logiciel de calcul formel, les 10 premiers termes de la suite.
b) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Trouver f à l'aide d'une équation différentielle.
c) On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Trouver g à l'aide d'une équation différentielle.

Exercice 26 [02482] [correction]
On considère les sommes :

$$S_1 = \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{5\times 7} + \frac{1}{9\times 11} + \cdots \text{ et } S_2 = \frac{1}{1\times 3} - \frac{1}{5\times 7} + \frac{1}{9\times 11} - \cdots$$

a) Calculer la première somme avec Maple. Constater qu'il ne calcule pas la deuxième.
b) On cherche à calculer S_2. On note a_n le terme général de cette série.
Calculer le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$.
c) Exprimer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{4n+3}$$

pour $x \in]-R, R[$.
d) Exprimer S_2 à l'aide d'une intégrale que l'on calculera avec Maple.

Exercice 27 [02483] [correction]
Soit $\alpha > -1$.
a) Donner le rayon de convergence R de

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n$$

On désire trouver un équivalent de f_α lorsque $x \to R^-$.
b) On suppose que α est un entier p.
Calculer f_0, f_1. Donner avec un logiciel de calcul formel l'expression de $f_2, \ldots, f_5$.
Trouver les équivalents recherchés.
Montrer qu'il existe $Q_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$f_p(x) = \frac{Q_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

(on calculera f_p'). En déduire l'équivalent recherché.
c) On suppose $\alpha > -1$ quelconque.
Donner le développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-x)^{1+\alpha}}$$

On notera b_n ses coefficients.

Montrer qu'il existe $A(\alpha) > 0$ tel que $n^\alpha \sim A(\alpha) b_n$. On étudiera la nature de la série de terme général

$$\ln \frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln \frac{n^\alpha}{b_n}$$

En déduire que $f_\alpha(x)$ est équivalente à

$$\frac{A(\alpha)}{(1-x)^{1+\alpha}}$$

quand x tend vers R^-.

Exercice 28 [02484] [correction]

a) Décomposer

$$\frac{1}{1-X^6}$$

en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^6}$$

quand cette intégrale est bien définie.

c) Calculer, pour $x \in \left]0,1\right[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{6n+1}$$

d) Que vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{6n+1}?$$

Exercice 29 [03106] [correction]

Soient $a \in \left]0,1\right[$ et f_n définie sur $I = \left]-\infty, 1/a\right[$ par

$$f_n(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-a^i x}$$

a) Pour $a = 1/2$, tracer, avec Maple, les courbes des fonctions f_n pour $n \in [\![1,10]\!]$ sur $\left[-3,2\right[$ pour observer le comportement de la suite.

b) Montrer que f_{100} est développable en série entière au voisinage de 0 et donner les valeurs des 20 premiers coefficients de ce développement.

c) Pour a quelconque, montrer que (f_n) converge simplement sur I vers

$$f(x) = \prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{1-a^i x}$$

Trouver une relation simple entre $f(x)$ et $f(ax)$.

d) Montrer l'existence et l'unicité d'une fonction g développable en série entière vérifiant

$$g(0) = 1 \text{ et } \forall x \in I, g(ax) = (1-ax)g(x)$$

e) Montrer que f est développable en série entière et exprimer, avec Maple, les coefficients de ce développement en fonction de a.

[Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 30 [02487] [correction]

Soit

$$f : t \in \left]-\infty, 1/4\right[\setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{t\sqrt{1-4t}} - \frac{1}{t}$$

a) Montrer que f se prolonge en une fonction de $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\infty, 1/4\right[$.

b) Tracer le graphe de f à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

c) Etudier la concavité du graphe.

Exercice 31 [02486] [correction]

On pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \ln t \,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

a) Préciser le domaine de définition de f.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une équation différentielle vérifiée par f.

c) Calculer $f(1)$ avec un logiciel de calcul forme et en déduire explicitement f.

d) Retrouver ce résultat par une méthode plus simple.

Exercice 32 [02491] [correction]

On considère la fonction suivante I définie par :

$$\forall x \in \mathcal{D}, I(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \,\mathrm{d}t$$

a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$.

b) Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
c) Calculer $I(0), I(1), I(2), I(3), I(4)$.
d) Trouver une relation simple entre $I(x+2)$ et $I(x)$.
e) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Que vaut $I(n)I(n-1)$?
f) Déterminer des équivalents simples de I aux extrémités de $\mathcal{D}$.

Exercice 33 [03183] [correction]
a) Déterminer le domaine définition $\Delta = \mathcal{D}_f$ de la fonction f qui à x réel associe :

$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}\,\mathrm{d}t$$

b) Déterminer la limite puis un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
c) Avec le logiciel de calcul formel, déterminer les développements asymptotiques en $+\infty$ jusqu'au terme $o\left(\frac{1}{x^{7/2}}\right)$ de la fonction

$$x \mapsto \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

puis de f.
Démontrer l'existence de ce développement asymptotique de $f(x)$ en s'aidant du logiciel pour les calculs d'intégrales nécessaires.
d) Etudier les variations de f sur Δ.
e) Avec le logiciel de calcul formel, donner une valeur approchée du maximum de f sur Δ et de son abscisse. Visualiser le tracé du graphe de f.

Exercice 34 [02490] [correction]
On considère l'équation

$$x^{(4)} - 2x^{(3)} + 2x^{(2)} - 2x' + x = 0$$

a) Montrer que $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est solution de E si, et seulement si, $X = {}^t\begin{pmatrix} x & x' & x^{(2)} & x^{(3)} \end{pmatrix}$ est solution de $AX = X'$ avec A à déterminer.
b) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?
c) Montrer que

$$\mathbb{C}^4 = \ker(A - iI_4) \oplus \ker(A + iI_4) \oplus \ker(A - I_4)^2$$

d) Montrer qu'il existe P inversible telle que $P^{-1}AP = B$ avec B diagonale par blocs et triangulaire supérieure.
e) Déterminer les solutions de l'équation différentielle.

Exercice 35 [03061] [correction]
Soient

$$(E) : x(x-4)y' + (x-2)y = -2 \text{ et } (H) : x(x-4)y' + (x-2)y = 0$$

a) Résoudre H, quelles sont les solutions maximales ?
b) Résoudre E sur $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 4[$ et $I_3 =]4, +\infty[$.
c) En déduire les solutions maximales de E.

Exercice 36 [03098] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, on note P_n le polynôme :

$$P_n(X) = (X+1)^n - X^n - 1$$

a) Avec le logiciel de calcul formel :
Que dire, pour $n = 3, 4, 5, 7$ du module des racines complexes de P_n ?
Quelle est la factorisation de P_7 dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{C}[X]$?
Vérifier, à l'aide de valeurs approchées, que le polynôme P_9 possède des racines de module > 1.
b) Démontrer que pour $n > 7$, le polynôme dérivé P_n' admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$ de module > 1.
c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Démontrer que les racines complexe du polynôme dérivé P' sont dans l'enveloppe convexe des racines du polynôme P.
Indice : si $P(X) = c\prod_{i=1}^{n}(X - z_i)^{m_i}$, considérer la fraction P'/P.
d) En déduire que $n = 7$ est le plus grand entier pour lequel toutes les racines de P_n sont de module $\leqslant 1$.

Exercice 37 [03452] [correction]
a) Avec Maple, trouver la solution maximale du problème

$$x'(t) = ax(t)^2, x(0) = 1$$

pour $a \in \mathbb{R}$.
Vérifier et justifier le résultat obtenu, donner l'intervalle de définition.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$(E) : X'(t) = X(t)AX(t), X(0) = I_n$$

pour d'inconnue $t \mapsto X(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = O$ et que pour tout t dans l'intervalle de définition d'une solution$X$, $X(t)$ commute avec A.

Calculer X. Que vaut $X(t)^{-1}$?
c) On suppose que pour tout t dans l'intervalle de définition d'une solution X, $X(t)$ est inversible. L'application $t \mapsto X(t)^{-1}$ est-elle dérivable ? Quels sont ses coefficients ? Exprimer $X(t)$

Exercice 38 [02473] [correction]
Avec Maple, trouver les extrema de

$$f(x,y) = y\exp(x) + x\exp(y)$$

Exercice 39 [01565] [correction]
1. Soit $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$(n,k) \mapsto \frac{(k!)^2}{((n+k+1)!)^2}$$

1.a) Démontrer que pour tout entier naturel n, la série de terme général $F(n,k)$ est convergente. On posera dans la suite

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{+\infty} F(n,k)$$

1.b) Calculer σ_n, pour $n \in [\![0,10]\!]$ avec le logiciel de calcul formel.
2. Soit $G : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$(n,k) \mapsto (3n+2k+3)F(n,k)$$

a) Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. A l'aide du logiciel de calcul formel, comparer :

$$(n+1)^3 F(n+1,k) - (4n+2)F(n,k) \text{ et } G(n,k+1) - G(n,k)$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$(n+1)^3\sigma_{n+1} - (4n+2)\sigma_n = -\frac{3n+3}{((n+1)!)^2}$$

c) Déterminer une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\sigma_{n+1}}{P_{n+1}} - \frac{\sigma_n}{P_n} = -\frac{3\left((n+1)!\right)^2}{(n+1)^2(2n+2)!}$$

3. Conclure que la série de terme général

$$\frac{1}{n^2 C_{2n}^n}$$

est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 C_{2n}^n} = \frac{\pi^2}{18}$$

Indication : on rappelle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 40 [03065] [correction]
L'objectif de cet exercice est de proposer un développement en série alternée du nombre π.
En utilisant votre logiciel de calcul formel :
a) Montrer que, pour n, m entiers naturels

$$\int_0^1 t^n(1-t)^m \,\mathrm{d}t = \frac{n!m!}{(m+n+1)!}$$

b) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi$$

En déduire

$$\frac{3958}{1260} < \pi < \frac{3959}{1260}$$

c) On note $A(x)$ le quotient de $x^4(1-x)^4$ par $1+x^2$ (on ne le calculera explicitement que plus tard)
Montrer que

$$\frac{4}{1+x^2} = \frac{A(x)}{1+\frac{x^4(1-x)^4}{4}}$$

En déduire que

$$\pi = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k \text{ avec } L_k = \int_0^1 A(x)x^{4k}(1-x)^{4k}\,\mathrm{d}x$$

d) Etablir que pour n entier naturel

$$\pi = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k + \lambda \int_0^1 \frac{x^{4(n+1)}(1-x)^{4(n+1)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

où λ est un réel dépendant de n que l'on exprimera.
e) Calculer $A(x)$, L_0, L_1 et proposer un encadrement du nombre π.
[Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 41 [03096] [correction]
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \text{ avec } p \geqslant 2$$

Ses coefficients sont nuls sauf les $a_{i,i} = 3$, $1 \leqslant i \leqslant p$ et $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$, $1 \leqslant i < p$. On dira que A est la matrice de bande $[-1, 3, -1]$.
a) Démontrer que cette matrice est inversible.
On note $X^\star$ l'unique solution du système linéaire $AX = B$ avec $B = {}^t\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.
Le système $AX = B$ est équivalent au système

$$X = CX + \frac{1}{3}B$$

avec C matrice bande à préciser.
Soit T l'application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par

$$X \mapsto CX + \frac{1}{3}B$$

Quel est le vecteur $T(X^\star)$?
b) Question à résoudre avec le logiciel de calcul formel.
On suppose ici $p = 5$. Construire les matrices A, C, le vecteur B et la transformation T.
Confirmer l'inversibilité de A. Expliciter alors $X^\star$ puis une valeur approchée de ce vecteur.
Vérifier la valeur attendue pour $T(X^\star)$.
c) On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme

$$\|X\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant p} |x_j|$$

Montrer que $T : X \mapsto CX + \frac{1}{3}B$ est alors k-lipschitzienne avec une constante $k < 1$ à préciser et que partant d'un vecteur X_0 arbitraire, la suite (X_n) définie par la récurrence

$$X_{n+1} = TX_n$$

converge vers $X^\star$.
d) A partir d'une majoration de $\|X_{n+1} - X_n\|$ puis de $\|X_{n+p} - X_n\|$ à l'aide de $\|X_1 - X_0\|$, établir la formule

$$\|X^\star - X_n\| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\|X_1 - X_0\|$$

e) On choisit $X_0 = 0$. Soit $\varepsilon = 10^{-2}$. Avec le logiciel de calcul formel, construire les termes de la suite (X_n) nécessaires pour obtenir une valeur approchée de $X^\star$ à epsilon près (au sens de la norme $\|\,.\,\|$). On pourra choisir d'écrire une procédure ou non.
Comparer avec la valeur approchée de $X^\star$ lorsque $p = 5$.
Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 42 [03392] [correction]
On considère dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$, un arc Γ de classe $\mathcal{C}^1$ et régulier paramétré par une abscisse curviligne s :

$$M : s \in \mathbb{R} \mapsto M(s) \in \mathbb{R}^2$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on note $G(s)$ le centre de gravité de l'arc $\widehat{M(0)M(s)}$ défini ainsi

$$\forall s \in \mathbb{R}^\star,\ G(s) = \frac{1}{s}\int_0^s M(u)\,\mathrm{d}u \text{ et } G(0) = M(0)$$

Soit alors Δ l'arc paramétré par $G : s \in \mathbb{R} \mapsto G(s)$.
1. Dans cette question, Γ est l'arc paramétré par $N(t) = (t, \cosh t)$ où $\cosh t$ est le cosinus hyperbolique de t. Calculer son abscisse curviligne s nulle en $t = 0$ et paramétrer Γ par s. En déduire les coordonnées de $G(s)$.
Tracer sur un même graphique les supports de Γ et Δ.
2. On suppose dans cette question que l'arc Γ est paramétré par $N(t) = (t, f(t))$ où la fonction f est convexe de classe $\mathcal{C}^1$.
2.a Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$y \geqslant f(x) \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}, y \geqslant f'(u)(x-u) + f(u)$$

2.b En déduire que le support de l'arc Δ est « au dessus »du support de Γ.
3. Reprendre les questions posées au 1. avec l'arc Γ paramétré par $N(t) = (\cos t, \sin t)$.
4. On suppose dans cette question de la fonction M est périodique de période $L > 0$.
4.a Montrer que $G(s)$ converge vers un point Ω lorsque s tend vers $+\infty$.
4.b Que représente Ω pour le support de Γ ? Montrer que Ω est un point multiple de l'arc Δ.
4.c Avec l'exemple de la question 3., compléter le graphique des supports de Γ et Δ par celui des segments de droite $(M(s)G(s))$ pour $s = \pi/2, 3\pi/4$ et π.
Emettre une conjecture puis la démontrer dans le cas général.
Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 43 [03391] [correction]
On considère l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sans valeurs propres réelles vérifiant

$$^tM = M^2$$

1.a) Lorsque $n = 2$, déterminer à l'aide du logiciel de calcul formel l'ensemble $\mathcal{E}_2$; vérifier qu'il est constitué de deux matrices M_1 et M_2.
b) Retrouver ce résultat par le calcul.
c) Montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$^tPM_1P = M_2$$

2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_3$ est vide.
3. Montrer à l'aide du logiciel de calcul formel que la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

appartient à $\mathcal{E}_4$.
4.a Montrer que tout endomorphisme u d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ sans valeurs propres réelles, admet au moins un plan stable.
4.b Soient E un espace vectoriel euclidien et F un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme u dont l'adjoint vérifie $u^\star = u^2$. Montrer que l'orthogonal de F est aussi stable par u.
4.c Montrer, lorsque $n = 4$, que pour toute matrice $M \in \mathcal{E}_4$, il existe $P \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$^tPMP = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

4.d Exprimer une telle matrice P pour la matrice A de la question 3. Vérifier avec le logiciel.
[Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 44 [03394] [correction]
Soient $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t)$$

1.On demande de résoudre cette question avec le logiciel de calcul formel.
Ici $n = 2$, on définit la fonction

$$B : t \mapsto \begin{pmatrix} t & 1 \\ 2 & t \end{pmatrix}$$

Résoudre l'équation différentielle

$$A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t)$$

d'inconnue $A : t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Que dire des valeurs propres de $A(t)$?
Calculer la trace de $A(t)^k$ pour $k = 1, \ldots, 5$.
2.Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la liste des valeurs propres de U répétées avec multiplicité.
Pour $p = 1, \ldots, n$, on définit les quantités

$$\sigma_p(U) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_p} \text{ et } S_p(U) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^p$$

On admet alors les relations générales suivantes (où on a noté S_k et σ_k au lieu de $S_k(U)$ et $\sigma_k(U)$) :

$$\forall p = 1, \ldots, n, S_p + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \sigma_k S_{p-k} + (-1)^p p\sigma_p = 0$$

Démontrer que si $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie pour tout $k = 1, \ldots, n$

$$\mathrm{tr}(U^k) = \mathrm{tr}(V^k)$$

alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est aussi une liste de valeurs propres de V (autrement dit, U et V ont mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités).
3.Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que l'application $t \mapsto A(t)^k$ est dérivable et que sa dérivée s'exprime à l'aide de $A(t)^k$ et $B(t)$.
4.aQu'en déduit-on pour l'application $t \mapsto \mathrm{tr}(A(t)^k)$, $k \in \mathbb{N}^\star$?
4.bQue conclure pour les valeurs propres (réelles ou complexes) de $A(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$?
Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 45 [03549] [correction]
On considère le système différentiel S suivant :

$$S : \begin{cases} x'(t) = x(t)(10 - x(t) - y(t)) \\ y'(t) = y(t)(-6 + x(t) - y(t)) \end{cases}$$

Dans tout l'exercice, il est fortement conseillé d'utiliser le logiciel de calcul formel pour les calculs.
1. Déterminer l'unique solution (x, y) de S avec x et y fonctions constantes non nulles.
Dans la suite, on notera α et β les valeurs respectives de ces fonctions constantes x et y.
2. À l'aide du logiciel de calcul formel, déterminer l'allure des solutions vérifiant respectivement les conditions
initiales suivantes :

$$(x(0), y(0)) \in \{(10, 10), (1, 1), (2, 6)\}$$

Que remarquez-vous ?
Soit maintenant $X = (x, y)$ une solution maximale de S. On va justifier l'existence d'un voisinage U de $\Omega = (\alpha, \beta)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que s'il existe t_0 pour lequel $X(t_0)$ appartient à U alors la solution X est définie sur $[t_0, +\infty[$ et converge vers Ω à vitesse exponentielle.
3. Calculer la matrice jacobienne de l'application

$$f : (x, y) \mapsto (x(10 - x - y), y(-6 + x - y))$$

au point Ω et déterminer ses valeurs propres.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont complexes non réelles et qu'on note $a + ib$ et $a - ib$. Justifier
que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ noté $(. \mid .)$ tel que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, (AX \mid X) = a \|X\|^2$$

où $\| . \|$ désigne la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.
5. Justifier l'existence d'un réel $r > 0$ tel que

$$\forall X \in B(\Omega, r), (f(X) - f(\Omega) \mid X - \Omega) \leqslant - \|X - \Omega\|^2$$

Conclure à l'aide de l'application $t \mapsto \|X(t) - \Omega\|^2$.
Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 46 [03609] [correction]
Soit $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, croissante et non majorée, avec $\beta_0 \geqslant 1$. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\beta_n}$$

a) Justifier que, si pour tout entier n, $u_n > \beta_n$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
Montrer que s'il existe un entier k tel que $u_k \leqslant \beta_k$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.
b) En déduire l'existence d'un élément $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que :

$$\left(u_0 < \lambda \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right) \text{ et } \left(u_0 > \lambda \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\right)$$

c) Pour cette question, on suppose $\beta_n = \sqrt{n+1}$ pour tout n. A l'aide du logiciel de calcul formel, justifier rigoureusement le comportement de la suite pour certaines valeurs de u_0 et en déduire un minorant de λ.
d) On introduit maintenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{\ln u_n}{2^n}$$

Exprimer v_n en fonction de v_0 et des termes de la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
e) On suppose qu'il existe $\rho > 1$ tel que $\beta_n = O(\rho^n)$ quand n tend vers $+\infty$.
Justifier que $\lambda \in \mathbb{R}$ et donner son expression sous la forme d'une somme de série.
f) On reprend le cas particulier de la question 3.
Donner à l'aide du logiciel de calcul formel une valeur approchée de λ.
Déterminer un entier n tel que la somme partielle d'ordre n de la série précédente donne une valeur approchée de λ à 10^{-4} près.
Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur I.
La solution générale homogène est

$$y(x) = \frac{\lambda}{x}$$

Par la méthode de la variation de constante, une solution particulière est

$$y(x) = \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

La solution générale est alors

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(\lambda + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right)$$

La fonction f recherchée est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

La résolution avec Maple

```
dsolve({x*D(y)(x)+y(x)=1/ln(x),y(2)=0},y(x));
```

fait référence à une fonction Ei qui lui est personnelle.
b) La fonction f admet pour dérivée

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln x} - \frac{1}{x^2}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \frac{1}{x^2}g(x)$$

avec

$$g(x) = \frac{x}{\ln x} - \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

Par intégration par parties

$$g(x) = \frac{2}{\ln 2} - \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}$$

Puisque

$$g'(x) = -\frac{1}{(\ln x)^2} < 0$$

la fonction g est strictement décroissante, $g(2) > 0$ et $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$ donc la fonction g s'annule une unique fois en un $x_0 \in I$. Le signe de g puis de f' sont alors immédiats et on peut affirmer que f admet un unique maximum en x_0. On obtient une valeur approchée de x_0 en écrivant

```
fsolve(diff(1/x*int(1/ln(t),t=2..x),x)=0,x);
```

et l'on obtient $x_0 = 6,579728$ à 10^{-6} près.
c) Par intégration par parties

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x\ln 2} + \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}$$

Montrons que

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} = o\left(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right) \text{ quand } x \to +\infty$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $1/\ln t \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, il existe $x_0 \geqslant 2$ tel que

$$\forall t \geqslant x_0, \frac{1}{\ln t} \leqslant \varepsilon$$

et alors

$$\int_{x_0}^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} \leqslant \varepsilon \int_{x_0}^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant \varepsilon \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

De plus, par non intégrabilité d'une fonction positive

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

donc, pour x assez grand

$$\int_2^{x_0} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} = C^{te} \leqslant \varepsilon \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

et alors

$$0 \leqslant \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} \leqslant 2\varepsilon \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

On en déduit

$$f(x) \sim \frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x\ln 2} \sim \frac{1}{\ln x}$$

Une nouvelle intégration par parties donne

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2} = \frac{x}{(\ln x)^2} - \frac{2}{(\ln 2)^2} + 2\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^3}$$

Comme ci-dessus, on montre

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^3} = o\left(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}\right) \text{ quand } x \to +\infty$$

et on en déduit

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln x)^2}\right) \text{ quand } x \to +\infty$$

d) Quand $x \to 1^+$, on peut écrire $x = 1 + u$ avec $u \to 0^+$ et alors

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_1^u \frac{\mathrm{d}s}{\ln(1+s)}$$

Or

$$\frac{1}{\ln(1+s)} = \frac{1}{s} + \frac{s - \ln(1+s)}{s\ln(1+s)}$$

donc

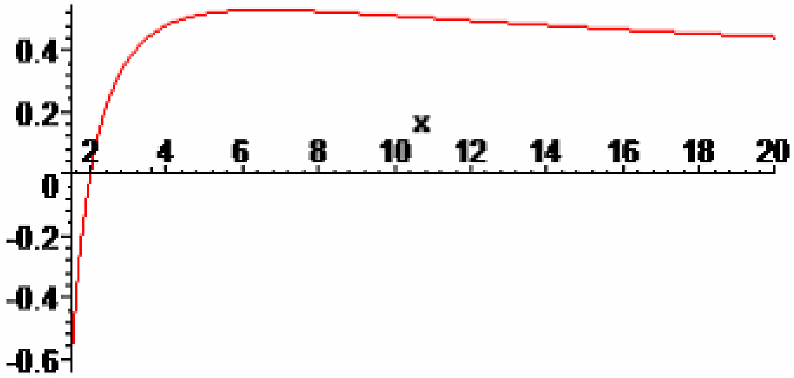
$$\int_1^u \frac{\mathrm{d}s}{\ln(1+s)} = \ln u + \int_1^u \frac{s-\ln(1+s)}{s\ln(1+s)}\,\mathrm{d}s$$

Grâce à un prolongement par continuité, il y a convergence quand $u \to 0^+$ de l'intégrale du second membre et donc on peut affirmer

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \frac{1}{u} \sim \frac{1}{x-1}$$

e) On obtient le graphe de f par la commande

```
plot(1/x*int(1/ln(t),t=2..x),x=1.5..20);
```



Le graphe de f

Remarque :
Les questions c) et d) pouvaient aussi être résolues en faisant référence à des résultats de comparaison d'intégrales partielles de fonctions positives non intégrables (résultats hors-programme).

Exercice 2 : [énoncé]
a) La propriété est valable pour les fonctions en escalier et se prolonge aux fonctions continues par approximation uniforme.
b)

```
f:=x->exp(-x^2)
somme1:=proc(n)
local k,S;
S:=0; for k from 1 to n do S:=S+f(die()) od; RETURN(S/n);
end;
somme2:=proc(n)
RETURN(sum(f(k/n),k=1..n)/n);
end;
```

La méthode aléatoire donne des résultats instables peu convaincants.
c)

```
g:=(x,y)->cos(x*y)*exp(x^2+y^2);
somme3:=proc(n)
```

```
local k,S;
S:=0; for k from 1 to n do S:=S+g(die(),die()) od; RETURN(S/n);
end;
```

Exercice 3 : [énoncé]
a) Définissons une procédure récursive calculant les termes de la suite

```
x:=proc(n,x1)
local y;
if n=1 then RETURN(x1) else y:=x(n-1,x1); RETURN(y+(n-1)/y); fi
end;
```

On peut alors évaluer les termes de la suite pour différentes valeurs de x_1

```
x1:=5;seq(evalf(x(k,x1)),k=1..10);
```

On remarque que (x_n) tend vers $+\infty$ et on peut même présumer $x_n \sim n$.
On remarque aussi que pour $x_1 = 1$ on a $x_n = n$ ce qu'on justifie aisément par récurrence.
b) La suite proposée est bien définie et à termes dans $]0, +\infty[$.
En exploitant $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, on peut affirmer $x_{n+1} \geqslant 2\sqrt{n}$ donc $x_n \geqslant 2\sqrt{n-1}$ pour $n \geqslant 2$. On en déduit $x_n \to +\infty$.
Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = x_n - y_n$, quitte à échanger éventuellement les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ pour que $u_2 = x_2 - y_2 \geqslant 0$.
On a

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{n}{x_n y_n}\right) u_n$$

Or pour $n \geqslant 2$,

$$1 - \frac{n}{x_n y_n} \geqslant 1 - \frac{n}{4(n-1)} > 0$$

On en déduit que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant 0$ et $(u_n)_{n\geqslant 2}$ décroissante. La suite (u_n) est donc convergente et par conséquent $x_n \sim y_n$.
Puisque pour $y_1 = 1$, on obtient $y_n = n$, on peut affirmer $x_n \sim n$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) La fonction $x \mapsto \tan x \operatorname{th} x$ réalise une bijection continue strictement croissante de $I_0 = [0, \pi/2[$ vers $\mathbb{R}^+$ et de $I_n =]-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi[$ vers $\mathbb{R}$ pour $n \geqslant 1x \mapsto \tan x \operatorname{th} x$. Dans chaque I_n figure une solution unique x_n à l'équation (E).
b) On résout l'équation dans les intervalles $[n\pi, n\pi + \pi/2[$ pour des valeurs successives de n.

```
seq(fsolve(tan(x)*tanh(x)=1,x=n*Pi..Pi/2+n*Pi),n=0..3);
```

c)

Puisque $x_n \in I_n$, on a déjà $x_n \sim n\pi$.
Posons $y_n = x_n - n\pi$. On a $y_n \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\tan y_n \operatorname{th} x_n = 1$ donc $y_n = \arctan \frac{1}{\operatorname{th} x_n}$.
Puisque $x_n \to +\infty$, $\operatorname{th} x_n \to 1$ puis $y_n \to \pi/4$. Ainsi $x_n = n\pi + \pi/4 + o(1)$.
On obtient le développement limité de $x \mapsto \arctan x$ en 1 par

```
series(arctan(x),x=1);
```

On en déduit $y_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\operatorname{th} x_n - 1) + o(\operatorname{th} x_n - 1)$
Or $1 - \operatorname{th} x_n = \frac{2}{e^{2x_n}+1} \sim \frac{2}{e^{2n\pi+\pi/2}}$ donc $y_n - \frac{\pi}{4} \sim -\frac{2}{e^{2n\pi+\pi/2}}$.
Finalement $x_n = n\pi + \pi/4 - \frac{2}{e^{2n\pi+\pi/2}} + o\left(\frac{1}{e^{2n\pi}}\right)$.
On peut observer la rapide convergence vers 0 de $x_n - n\pi + \pi/4$ en écrivant

```
seq(fsolve(tan(x)*tanh(x)=1,x=n*Pi..Pi/2+n*Pi)-evalf(n*Pi+Pi/4),n=0..3);
```

Exercice 5 : [énoncé]
a) On définit les matrices S et T puis on calcule R

```
S:=matrix(2,2,[-1,0,0,1]);
T:=matrix(2,2,[-1,1,1,1])/sqrt(2);
R:=evalm(S&*T);
```

On obtient

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice R est la matrice d'une rotation d'angle $\pi/4$ et donc vérifie $R^8 = I_2$.
On en déduit

$$\langle R \rangle = \left\{I_2, R, R^2, \dots, R^7\right\}$$

groupe cyclique de cardinal 8.
On peut visualiser les éléments de $\langle R \rangle$ en écrivant

```
seq(evalm(R&^k),k=0..7);
```

On calculer SR et R^7S
```
evalm(S&*R);
evalm(R^7&*S);
```
On constate
$$SR = R^7S = T$$
b) Considérons
$$H = \langle R\rangle \cup \langle R\rangle S$$
H est évidemment une partie de G contenant S et T.
On établit aisément $SR^\ell = R^{7\ell}S$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$.
On en déduit alors que H est stable par produit.
On en déduit aussi que H est stable par passage à l'inverse car
$$(R^kS)^{-1} = S^{-1}R^{-k} = SR^{-k} = R^{-7k}S$$
Ainsi H est un sous-groupe inclus dans G contenant S et T. Or G est le plus petit sous-groupe contenant S et T donc $G = H$.
Il y a 8 éléments dans $\langle R\rangle$, l'application $M \mapsto MS$ étant injective, il y aussi 8 éléments dans $\langle R\rangle S$. Enfin les éléments $\langle R\rangle$ sont distincts de ceux de $\langle R\rangle S$ car de déterminants distincts.
On en déduit
$$G = \left\{I_2, R, R^2, \dots, R^7\right\} \cup \left\{S, RS, R^2S, \dots, R^7S\right\}$$
de cardinal $n = 16$.
La séquence de tous les éléments de G est
```
seq(evalm(R&^k),k=0..7),seq(evalm(R&^k&*S),k=0..7);
```
Les endomorphismes canoniquement associés aux éléments R^k sont des rotations, plus précisément, les rotations d'angles $k\pi/4$.
Les endomorphisme canoniquement associés aux éléments R^kS sont des réflexions. L'axe de réflexion s'obtient en recherchant un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
c) On obtient la séquence des images respectives de la séquence précédente donnant les éléments de G en écrivant
```
seq(evalm(S&*R&^k),k=0..7),seq(evalm(S&*R&^k&*S),k=0..7);
```
La permutation de $\{1, 2, \dots, 16\}$ correspondante est
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 9 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
Le nombre d'inversion de celle-ci est
$$8 + (14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8) + 0 + (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0)$$
soit encore
$$(1 + 2 + \cdots + 14) + 1 = 106$$
La permutation considérée est donc paire, i.e. de signature 1.
On peut aussi tenter, un calcul direct avec Maple
On définit la liste des éléments de G.
```
L:=[seq(evalm(R&^k),k=0..7),seq(evalm(R&^k&*S),k=0..7)]:
```
On définit la procédure donnant l'indice d'un élément de G
```
indice:=proc(M)
local k;
global L;
for k from 1 to 16 do
if equal(M,L[k]) then RETURN(k) fi
od
end:
```
Enfin on calcule la signature par la formule
$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$
ce qui se traduit
```
product('product('(indice(M[j])-indice(M[i]))/(j-i)',j=i+1..16)',i=1..15);
```

Exercice 6 : [énoncé]
On définit le nombre x étudié
```
x:=(2/3+41/81*sqrt(5/3))^(1/3)+(2/3-41/81*sqrt(5/3))^(1/3);
```
Attention à définir les racines cubiques par des exposants 1/3 avec parenthèses.
On peut commencer par estimer la valeur cherchée
```
evalf(x);
```
Nous allons chercher à éliminer les racines cubiques. Pour cela on calcule x^3
```
expand(x^3);
```
Dans l'expression obtenue, on peut faire apparaître x par factorisation du terme
$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}$$
Simplifions ce terme

```
simplify((2/3+41/243*sqrt(15))^(1/3)*
(2/3-41/243*sqrt(15))^(1/3),assume=positive);
```

On obtient
$$\frac{1}{81}\left(486+123\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(486-123\sqrt{15}\right)^{1/3}$$
Développons selon $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

```
(486^2-123^2*15)^(1/3);
```

donne 9261. Enfin

```
ifactor(9261);
```

permet de conclure que
$$\left(\frac{2}{3}+\frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{3}-\frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}=\frac{7}{27}$$
Ainsi x est solution de l'équation
$$x^3=\frac{4}{3}+\frac{7}{9}x$$
En factorisant le polynôme sous-jacent

```
factor(x^3-7/9*x-4/3);
```

on obtient
$$(3x-4)(3x^2+4x+3)=0$$
Puisque $3x^2+4x+3>0$, on peut conclure
$$x=4/3$$

Exercice 7 : [énoncé]
On définit la suite

```
H:=n->sum(1/k,k=1..n);
```

puis on regarde les premiers termes de celle-ci

```
seq(H(n),n=2..10);
```

On peut conjecturer que H_n est le rapport d'un entier impair par un entier pair. Ceci assurera $H_n\notin\mathbb{Z}$.

Démontrons la propriété conjecturée par récurrence forte. Pour $n=2$, c'est immédiat. Supposons la propriété établie jusqu'au rang $n-1\geqslant 2$. Cas n impair. On peut écrire $n=2k+1$ et puisque par hypothèse de récurrence H_{n-1} s'écrit $(2p+1)/2q$, on obtient $H_n=H_{n-1}+1/n$ égale au rapport d'un entier impair par un entier pair. Cas n est pair. On peut écrire $n=2k$ avec $k\geqslant 2$ puis
$$H_n=\frac{1}{2}H_k+1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}$$
Par hypothèse de récurrence, H_k est le rapport d'un entier impair par un entier pair, donc $\frac{1}{2}H_k$ aussi.

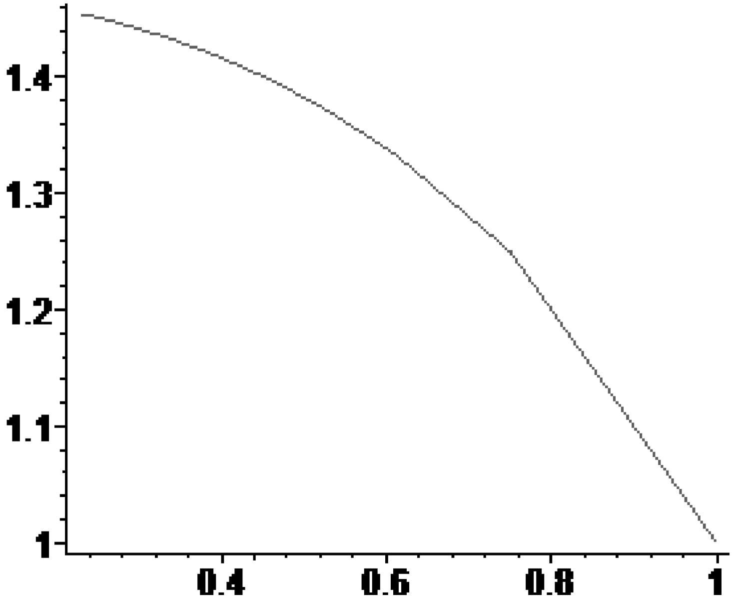
De plus, comme entrevu dans l'étude du cas précédent, l'ajout de l'inverse d'un entier impair conserve la propriété. Ainsi H_n est le rapport d'un entier impair par un entier pair. Récurrence établie.

Exercice 8 : [énoncé]
a) On définit les suites u et v

```
u:=n->product(1+I/k^2,k=1..n);
v:=n->product(1+2*I/k,k=1..n);
```

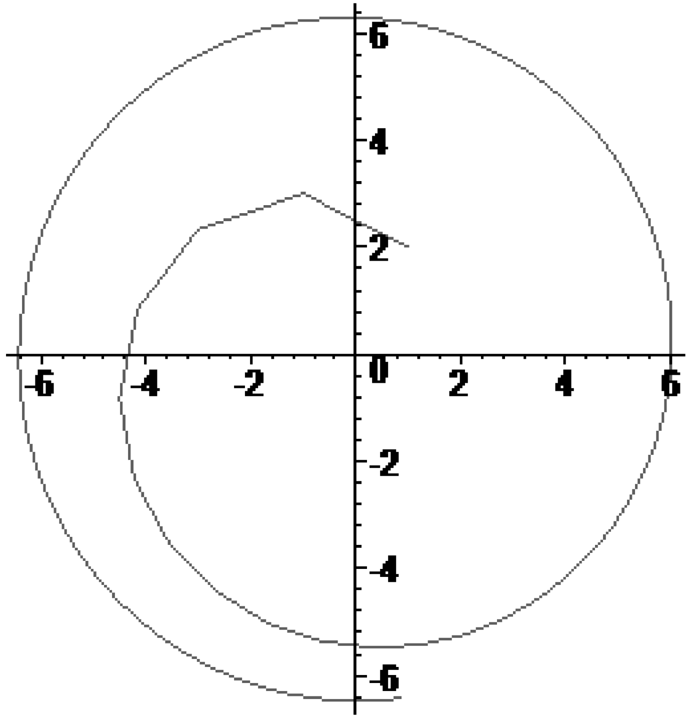
Puis on figure les lignes polygonales

```
plot([seq([Re(u(p)),Im(u(p))],p=1..500)]);
```



La ligne polygonale $A_1, A_2, \dots, A_n$ avec $n = 500$

```
plot([seq([Re(v(p)),Im(v(p))],p=1..n)]);
```



La ligne polygonale $B_1, B_2, \dots, B$ avec $n = 500$

b) On peut écrire $u_n = \rho_n \mathrm{e}^{i\theta_n}$ avec

$$\rho_n = \prod_{k=1}^{n} \left|1 + \frac{i}{k^2}\right| = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^4}\right)^{1/2} \text{ et } \theta_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{k^2}$$

Puisque

$$\ln \rho_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k^4}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{1}{k^4}\right) \text{ et } \theta_n = \sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

il y a convergence des suites $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\theta_n)_{n\geqslant 1}$.
On en déduit la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
Puisque

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{n}$$

on obtient une valeur approchée de la limite (θ_n) à 10^{-2} près en considérant θ_{100}.
```
evalf(argument(u(100)));
```
On observe graphiquement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n \in [1,2]$. Puisque la fonction exp est 10-lipschitzienne sur $[1,2]$, il suffit de connaître $\lim(\ln \rho_n)$ à 10^{-3} près pour connaître $\lim \rho_n$ à 10^{-2} près.
Puisque
$$\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k^4}\right) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} \leqslant \frac{1}{2}\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^4} = \frac{1}{6n^3}$$
on obtient une valeur approchée de la limite de $(\ln \rho_n)$ à 10^{-3} près en considérant $\ln \rho_6$.
```
evalf(abs(u(170)));
```
c) On a
$$\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{k}-\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$
Sachant
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$
on en déduit
$$\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{2}{k} = 2\ln n + L + o(1)$$
avec $L \in \mathbb{R}$.
Etudions la suite (z_n). On a
$$z_{2n} = \exp(2i\ln 2)z_n$$
Si la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ converge, sa limite ℓ vérifie
$$\ell = \exp(2i\ln 2)\ell$$
ce qui entraîne $\ell = 0$.
C'est absurde car les complexes z_n sont tous de module 1. On en déduit que la suite (z_n) diverge.
Un argument de v_n est
$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{2}{k} = 2\ln n + L + o(1)$$
de sorte que
$$v_n = |v_n|\,\alpha_n z_n$$
avec
$$|v_n| \geqslant 1,\ (\alpha_n) \to \alpha,\ |\alpha| = 1 \text{ et } (z_n) \text{ divergente}$$
On en déduit que la suite (v_n) diverge.

Exercice 9 : [énoncé]
a) S'il existe w tel que $u = w\circ v$ alors pour tout $x \in \ker v$,
$u(x) = (w\circ v)(x) = w(v(x)) = w(0) = 0$ et donc $x \in \ker u$. Ainsi $\ker v \subset \ker u$.
Inversement, supposons $\ker v \subset \ker u$.
Soit H un supplémentaire de $\ker v$ dans $\mathbb{R}^p$: $H \oplus \ker v = \mathbb{R}^p$.
On sait que la restriction $v_{\restriction H}$ de v au départ de H est un isomorphisme de H vers l'image de v.
Soit K un supplémentaire de $\mathrm{Im}v$ dans $\mathbb{R}^n$: $K \oplus \mathrm{Im}v = \mathbb{R}^n$.
Considérons ensuite w_0 l'application linéaire définie par
$$\forall x \in \mathrm{Im}v, w_0(x) = u(v_{\restriction H}^{-1}(x)) \text{ et } \forall x \in K, w_0(x) = 0$$
D'une part, pour tout $x \in \ker v$, $(w_0\circ v)(x) = w_0(0) = 0 = u(x)$ car $\ker v \subset \ker u$.
D'autre part, pour tout $x \in H$,
$(w_0\circ v)(x) = (w_0\circ v_{\restriction H})(x) = \left(u\circ v_{\restriction H}^{-1}\circ v_{\restriction H}\right)(x) = u(x)$
Puisque les applications linéaires $w_0\circ v$ et u coïncident sur les sous-espaces vectoriels supplémentaires $\ker v$ et H, c'est deux applications sont égales et on peut donc écrire
$$u = w_0\circ v$$
Soit $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$.
w est solution de l'équation $u = w\circ v$ si, et seulement si, $w\circ v = u = w_0\circ v$ soit encore $(w - w_0)\circ v = 0$.
Or $f\circ g = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}g \subset \ker f$ donc $u = w\circ v \Leftrightarrow \mathrm{Im}v \subset \ker(w - w_0)$.
Par suite les solutions de l'équation $u = w\circ v$ sont de la forme $w_0 + f$ avec $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ vérifiant $\mathrm{Im}v \subset \ker f$.
b) On définit les matrices étudiées :
```
A:=matrix(3,3,[-2,1,1,8,1,-5,4,3,-3]);
B:=matrix(3,3,[1,2,-1,2,-1,-1,-5,0,3]);
```
On détermine les noyaux de celles-ci
```
kernel(A);
kernel(B);
```
On observe que ces noyaux sont égaux à $\mathrm{Vect}\,((3,1,5))$ et donc $\ker B \subset \ker A$. Par l'étude qui précède transposée aux matrices, on peut affirmer que l'équation étudiée possède au moins une solution.
Pour construire une solution à cette équation, il suffit d'introduire une matrice B_0 inversible coïncidant avec B sur un supplémentaire de $\ker B$ et de considérer $C_0 = AB_0^{-1}$.

En prenant pour supplémentaire de $\ker B$ l'espace $\text{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$, la matrice

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

convient. Définissons-la et calculons C_0 :

```
B0:=matrix(3,3,[1,2,0,2,-1,0,-5,0,1]);
C0:=evalm(A&*B0^(-1));
```

On obtient

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier l'exactitude de cette solution par le calcul

```
evalm(A-C0&*B);
```

Les autres matrices solutions se déduisent de C_0 par ajout d'une matrice E telle que $\text{Im}B \subset \ker E$. On détermine l'image de B

```
colspace(B);
```

On obtient $\text{Vect}\left((1,0,-1),(0,1,-2)\right)$

La condition $\text{Im}B \subset \ker E$ donne les relations $C_1 = C_3$ et $C_2 = 2C_3$ sur les colonnes de E qui est donne une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 2a & a \\ b & 2b & b \\ c & 2c & c \end{pmatrix}$$

c) Il existe C tel que $A = CB$ si, et seulement si, $\ker B \subset \ker A$ ce qui équivaut à la condition $AX = 0$ avec $X = {}^t\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Cela donne la condition $3C_1 + C_2 + 5C_3 = 0$ sur les colonnes de A.

Si cette condition est remplie, l'étude qui précède donne que les solutions de l'équation $A = CB$ sont les matrices de la forme

$$AB_0^{-1} + \begin{pmatrix} a & 2a & a \\ b & 2b & b \\ c & 2c & c \end{pmatrix}$$

d) Si $u = w_1 \circ v_1 + w_2 \circ v_2$ alors il est immédiate que $\ker v_1 \cap \ker v_2 \subset \ker u$.

Inversement, supposons $\ker v_1 \cap \ker v_2 \subset \ker u$.

Considérons $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^{2n})$ déterminé par $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$.

Puisque $\ker v = \ker v_1 \cap \ker v_2 \subset \ker u$, l'étude qui précède assure l'existence de $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^q)$ vérifiant $u = w \circ v$. Posons alors $w_1 : y_1 \in \mathbb{R}^n \mapsto w(y_1, 0_{\mathbb{R}^n})$ et $w_2 : y_2 \in \mathbb{R}^n \mapsto w(0_{\mathbb{R}^n}, y_2)$.

$w_1, w_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ et vérifient $w(y_1, y_2) = w_1(y_1) + w_2(y_2)$ de sorte que $u = w \circ v$ donne $u = w_1 \circ v_1 + w_2 \circ v_2$.

Exercice 10 : [énoncé]

1.a) Les facteurs du produit définissant $P_n(x)$ étant tous strictement positifs, on a

$$\ln P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{2k}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{2k-1}\right)\right]$$

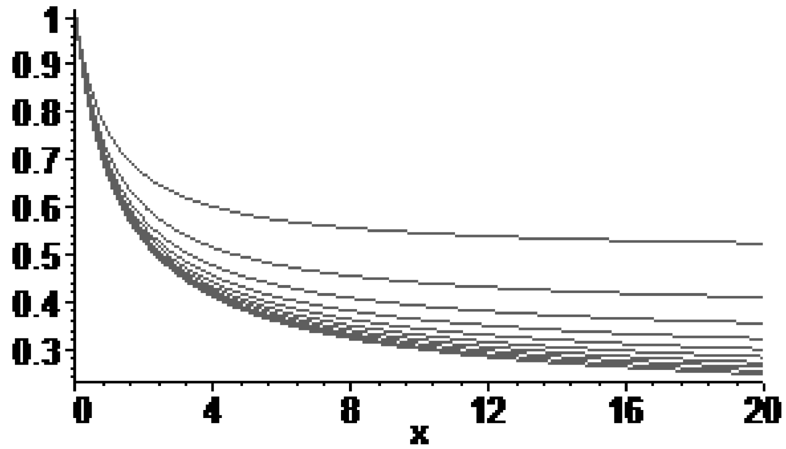
Or

$$\ln\left(1 + \frac{x}{2k}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{2k-1}\right) = \frac{x}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{x}{2k-1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

est le terme général d'une série absolument convergente, donc la suite $(\ln P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et on en déduit que la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers un réel strictement positif.

1.b) On définit la suite de fonctions puis on en trace quelques éléments

```
P:=(n,x)->product((1+x/(2*k))/(1+x/(2*k-1)),k=1..n):
plot([seq(P(n,x),n=1..10)],x=0..20,color=red
```



Quelques éléments de la suite (P_n)

2.a) Posons $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{2k}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{2k-1}\right)$$

Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et on peut calculer $f_n'(x)$ avec Maple par exemple

```
f:=(n,x)->ln(1+x/(2*n))-ln(1+x/(2*n-1));
```

`normal(diff(f(n,x),x));`
On obtient
$$f_n'(x) = -\frac{1}{(x+2n)(x+2n-1)}$$
On a alors
$$|f_n'(x)| \leqslant \frac{1}{2n(2n-1)}$$
et donc
$$\|f_n'\|_\infty = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
Puisque les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, que la série $\sum f_n$ converge simplement et que $\sum f_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, on peut affirmer que la fonction
$$S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et par suite $P = \exp S$ aussi.
2.b) Les fonctions f_n sont toutes décroissantes donc S est décroissante puis, par composition, P est décroissante.
Puisque P est décroissante, P admet une limite en $+\infty$ qui est sa borne inférieure.
Puisque $P \geqslant 0$, on peut même affirmer que P converge vers un réel positif.
3.a) On a
$$P_n(2j) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1+\frac{j}{k}}{1+\frac{2j}{2k-1}}\right) = \frac{\prod_{k=1}^n (k+j)}{\prod_{k=1}^n k}\frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{\prod_{k=1}^n (2k-1+2j)}$$
avec
$$\frac{\prod_{k=1}^n (k+j)}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{(n+j)!}{j!n!}, \prod_{k=1}^n (2k-1)! = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$
et
$$\prod_{k=1}^n (2k-1+2j) = \frac{(2n+2j)!}{2^{n+j}(n+j)!}\frac{2^j j!}{(2j)!} = \frac{(2n+2j)!j!}{2^n(n+j)!(2j)!}$$
Ainsi
$$P_n(2j) = \left(\frac{(n+j)!}{j!n!}\right)^2 \frac{(2n)!(2j)!}{(2n+2j)} = \frac{(2j)!}{(j!)^2}\frac{((n+1)(n+2)\dots(n+j))^2}{(2n+1)(2n+2)\dots(2n+2j)}$$
En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient
$$P(2j) = \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}$$
Il reste à comparer avec le résultat fourni par Maple.
`limit(P(n,2*j),n=infinity);`
Donne une expression à l'aide de la fonction Γ. Sachant $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$, on peut faire le lien avec l'expression précédente.
Contentons-nous d'observer la coïncidence des premières valeurs...
`seq(limit(P(n,2*j),n=infinity),j=1..10);`
`seq((2*j)!/(j!)^2/2^(2*j),j=1..10);`
3.b) La fonction P est définie et continue sur $[0,+\infty[$.
On étudie le comportement de $P(2j)$ quand $j \to +\infty$
`series((2*j)!/(j!)^2/2^(2*j),j=infinity);`
On obtient
$$P(2j) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi j}}$$
Sachant P décroissante, on montrer par comparaison avec une intégrale, que si la fonction P est intégrable alors la série $\sum P(2j)$ converge. Ceci n'est visiblement par le cas et donc la fonction P n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 11 : [énoncé]
a) f_n est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+\star}$, se prolonge par continuité en 0 et vérifie $t^2 f_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
b) On définit les termes de la suite
`u:=n->int(exp(-t)/t^(n+1)*(exp(t)-sum(t^p/p!,p=0..n)),t=0..infinity);`
On évalue les 10 premiers termes
`seq(u(k),k=1..10);`
Pour conjecturer une expression, on peut utiliser l'instruction `ifactor`. Cela permet d'entrapercevoir des factoriels.
Le calcul suivant
`seq(u(k)*k!,k=1..10);`
permet de conjecturer $u_n = 1/(n.n!)$.
c) En partant de
$$f_n(t) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{t^p \mathrm{e}^{-t}}{p!t^{n+1}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p \mathrm{e}^{-t}}{(p+n+1)!}$$
en justifiant l'intégration terme à terme par convergence de la série des intégrales

des valeurs absolues, on obtient

$$u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p!}{(p+n+1)!}$$

On a alors

$$nu_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(n+p+1)p!}{(n+p+1)!} - \frac{(p+1)p!}{(n+p+1)!} = \frac{1}{n!}$$

après télescopage.

Exercice 12 : [énoncé]
a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par absolue convergence.
b) Les fonctions sommées sont de classe $\mathcal{C}^1$. Par convergence normale sur tout segment de la série des dérivées, f est de classe $\mathcal{C}^1$.
c) On calcule l'intégrale

```
int(1/(1+t^4),t=0..infinity);
```

On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

d) Par comparaison avec une intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{t^4+u^4} \leqslant f(t) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{t^4+u^4}$$

Or par changement de variable affine

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+u^4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4t^3}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+u^4} = \frac{1}{t^3}\int_{1/t}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{1+s^4} \sim \frac{\sqrt{2}\pi}{4t^3}$$

Ainsi

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}\pi}{4t^3}$$

e) Par sommation géométrique

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{4k} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{4n+1}}{1+t^4}$$

En intégrant,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4k+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{4n+1}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{4n+1}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^{4n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4n+2} \to 0$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 13 : [énoncé]
a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^\star$.
b) Par convergence normale sur $[1,+\infty[$, $\lim\limits_{a\to+\infty} f(a) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{-a^2n^2} = 1$.
Par comparaison avec une intégrale
$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2n^2} \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2t^2}\,\mathrm{d}t$.
Or on peut calculer l'intégrale :

```
assume(a>0);
simplify(int(a*exp(-(a*t)^2),t=0..infinity));
```

donne $\sqrt{\pi}/2$.
On peut conclure $\lim\limits_{a\to0^+} af(a) = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 14 : [énoncé]
a) Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(3n+1)(2n+1)} = \frac{3}{3n+1} - \frac{2}{2n+1}$$

En écrivant

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{an+1} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{an}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^6} + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{a(N+1)}}{1+t^a}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{a(N+1)}}{1+t^6}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{a(N+1)}\,\mathrm{d}t \to 0$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{an+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$$

On en déduit

$$S=3\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}-\frac{\pi}{2}$$

b) Reste à calculer l'intégrale par

```
int(1/(1+t^3),t=0..1);
```

Exercice 15 : [énoncé]

a) Pour $a>1$ ou $a<1$, les variations de $x\mapsto 1-(1-a)x$ montrent que 0 n'est pas valeur prise pour $x\in[0,1]$.

b) On définit l'intégrale

```
J:=n->int(x^n*(1-x)^n/(1-(1-a)*x)^(n+1),x=0..1);
```

On calcule les valeurs demandées

```
a:=1/5;seq(J(n,a),n=1..10);
```

etc.

On peut conjecturer $I_n(a)\in\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\ln a$ (fortement inspiré par la dernière question).

c) En dérivant à l'ordre n la relation

$$\frac{1}{1-(1-a)x}=\sum_{p=0}^{+\infty}(1-a)^px^p$$

on obtient

$$\frac{1}{(1-(1-a)x)^{n+1}}=\sum_{p=0}^{+\infty}\binom{n+p}{p}(1-a)^px^p$$

Posons

$$f_p(x)=\binom{n+p}{p}(1-a)^px^{n+p}(1-x)^n$$

de sorte que $\frac{x^n(1-x)^n}{(1-(1-a)x)^{n+1}}=\sum\limits_{p=0}^{+\infty}f_p(x)$.

On a

$$\int_0^1|f_p(x)|\,\mathrm{d}x=|1-a|^p\,\frac{[(n+p)!]^2}{p!(2n+p+1)!}$$

Pour étudier la convergence de la série de terme général $\int_0^1|f_p|$ on peut étudier la limite du facteur de $|1-a|^p$

```
limit(((n+p)!)^2/p!/(2*n+p+1)!,p=infinity);
```

Ainsi $\int_0^1|f_p|=o\left(|1-a|^p\right)$ donc $\sum\int_0^1|f_p|$ converge.

On peut permuter somme et intégrale ce qui donne

$$I_n(a)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{[(n+p)!]^2}{p!(2n+p+1)!}=\sum_{p=0}^{+\infty}R_n(p)(1-a)^p$$

avec R_n introduit dans la question qui suit.

d) $\deg R_n<0$ donc

$$R_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{X+n+k+1}$$

avec

$$a_k=\frac{(-1)^k(n+k)!}{(k!)^2(n-k)!}$$

On peut alors écrire

$$I_n(a)=\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(1-a)^p}{n+k+1+p}$$

Or on sait

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^p}{p}=-\ln(1-t)$$

pour $t\in\left]-1,1\right[$.

Par décalage d'indice et en exploitant $a\in\mathbb{Q}$, on obtient

$$I_n(a)\in\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\ln a$$

Exercice 16 : [énoncé]

a) On propose un premier calcul

```
sum(binomial(n,k)*(X-k/n)^2*X^k*(1-X)^(n-k),k=0..n);
```

Une simplification s'impose

```
simplify(%);
```

Le résultat n'est pas encore optimal. Il convient de signifier à Maple que n est entier

```
assume(n,integer);
```

On peut reprendre la simplification

```
simplify(%);
```

Finalement
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(X-\frac{k}{n}\right)^2 X^k(1-X)^{n-k}=\frac{X(1-X)}{n}$$
b) On remarque
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(x+1-x)^n=1$$
Par suite
$$f(x)-B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f(x)-f\left(k/n\right)\right)x^k(1-x)^{n-k}$$
puis
$$\left|f(x)-B_n(f)(x)\right|=\rho\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left|x-k/n\right|x^k(1-x)^{n-k}$$
en notant ρ plutôt que k le rapport de lipschitzianité.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\left|\sum_{k=0}^{n}x_ky_k\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=0}^{n}x_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}y_k^2}$$
On peut aussi affirmer, pour $a_k>0$:
$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_kx_ky_k\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=0}^{n}a_kx_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}a_ky_k^2}$$
On en déduit
$$\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left|x-k/n\right|x^k(1-x)^{n-k}\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x-k/n)^2x^k(1-x)^{n-k}}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}$$
Ainsi
$$\left|f(x)-B_n(f)(x)\right|=\rho\frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}}$$
puis $\left\|f-B_n(f)\right\|_\infty\to 0$.
c) En exploitant
$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}\text{ et }(n-k)\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k}$$
on obtient
$$B_n(f)'(x)=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-1-k}$$
Par suite
$$B_n(f)'(x)-B_{n-1}(f')(x)=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}f'\left(\frac{k}{n-1}\right)\right)x^k(1-$$
Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_k\in\left]k/n,(k+1)/n\right[$ tel que
$$f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}f'(c_k)$$
et alors
$$\left|f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}f'\left(\frac{k}{n-1}\right)\right|\leqslant\frac{\rho}{n}\left|c_k-\frac{k}{n-1}\right|$$
Puisque
$$\frac{k}{n-1}\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\text{ et }c_k\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$$
on a
$$\left|c_k-\frac{k}{n-1}\right|\leqslant\left|\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right|=\frac{1}{n}$$
et donc
$$\left|f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}f'\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{\rho}{n^2}$$
puis
$$\left|B_n(f)'(x)-B_{n-1}(f')(x)\right|\leqslant\frac{\rho}{2n}$$
Ainsi $\left\|B_n(f)'-B_{n-1}(f')\right\|_\infty\to 0$.
Or par l'étude qui précède $\left\|B_{n-1}(f')-f'\right\|_\infty\to 0$ donc $\left\|B_n(f)'-f'\right\|_\infty\to 0$.

Exercice 17 : [énoncé]
a) C'est du cours.
b) On charge le package permettant les manipulations linéaires puis on définit la matrice

```
with(linalg):
A:=matrix(4,4,[20,12,-4,12,-4,-3,9,-5,-4,1,5,-5,-8,-10,6,-2]);
```

On recherche les éléments propres de cette matrice

```
eigenvects(A);
```

On peut conclure que A est diagonalisable semblables à $\operatorname{diag}(8,4,12,-4)$ et concrétiser cette diagonalisation

```
P:=concat(vector([-2, 3/2, 3/2, 1]),vector([-2, 1, 1,
2]),vector([-4, 1, 1, 2]),vector([-1, 1, 0, 1]));
evalm(inverse(P)&*A&*P);
```

On peut faire la même étude avec la deuxième matrice

```
B:=matrix(4,4,[-12,-16,-8,-4,4,13,1,-1,4,5,9,-1,8,10,2,6]);
eigenvects(B);
Q:=concat(vector([-4, 1, 1, 2]),vector([1, 0, -3, 1]),vector([0, 1,
-3, 2]),vector([-2, 1, 1, 2]));
evalm(inverse(Q)&*B&*Q);
```

et on observe que la deuxième matrice est semblable à $\operatorname{diag}(-4,8,8,4)$.
Puisque dans les deux cas la matrice A est diagonalisable, les matrices commutant avec A sont celles laissant stables les sous-espaces propres de A.
Dans le premier cas, les matrices commutant avec A sont de la forme PDP^{-1} avec D matrice diagonale et P la matrice de passage définie dans le code Maple précédent..
L'ensemble de ces matrices est une sous-algèbre de dimension 4 de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.
Dans le deuxième cas, les matrices commutant avec A sont de la forme $Q\Delta Q^{-1}$ avec Δ diagonale par blocs de la forme suivante

$$\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

et Q la matrice de passage définie dans le code Maple précédent
L'ensemble de ces matrices est une sous-algèbre de dimension 6 de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.
c) Dans les deux cas, si X est solution de l'équation $X^2 = A$ alors X commute avec A et la droite vectorielle sous-espace propre associée à la valeur propre strictement négative de A est stable par X (aussi l'argument $\det A < 0$ permet d'affirmer l'incompatibilité de l'équation $X^2 = A$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$).
Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, les solutions de l'équation $X^2 = A$ sont à rechercher parmi les matrices commutant avec A et sont donc de la forme PDP^{-1} (ou $Q\Delta Q^{-1}$) avec D (ou Δ) de carré convenable.
Dans le premier cas, on obtient 16 solutions de la forme

$$P\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}\varepsilon_1 & & & (0) \\ & 2\varepsilon_2 & & \\ & & 2\sqrt{3}\varepsilon_3 & \\ (0) & & & 2i\varepsilon_4 \end{pmatrix}P^{-1}$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$.

Une solution particulière est obtenue par

```
evalm(P&*diag(2*sqrt(2),2,2*sqrt(3),2*I)&*inverse(P));
```

La somme des solutions est nulle et le produit des solutions vaut A^8.
Dans le second cas, on obtient une infinité de solution de la forme

$$Q\begin{pmatrix} 2i\varepsilon_1 & & (0) \\ & 2\sqrt{2}S & \\ (0) & & 2\varepsilon_2 \end{pmatrix}Q^{-1}$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$ et $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $S^2 = I_2$.
Une solution particulière est obtenue par

```
evalm(Q&*diag(2*I,2*sqrt(2),2*sqrt(2),2)&*inverse(Q));
```

Exercice 18 : [énoncé]
a) On charge le package linalg et on définit la matrice étudiée

```
with(linalg):
A:=matrix(4,4,[0,0,0,d,0,0,c,0,0,b,0,0,a,0,0,0]);
```

On détermine ses éléments propres

```
eigenvects(A);
```

Dans le cas où a,b,c,d sont non nuls, on obtient quatre vecteurs propres non colinéaires et la matrice est diagonalisable.
Si $a = 0$ et $d \neq 0$

```
A:=matrix(4,4,[0,0,0,d,0,0,c,0,0,b,0,0,0,0,0,0]);
```

```
eigenvects(A);
```

On obtient 0 valeur propre double et le sous-espace propre correspondant est de dimension 1.
La matrice A n'est alors pas diagonalisable.
Si $b = 0$ et $c \neq 0$, ou si $c = 0$ et $b \neq 0$, ou encore si $d = 0$ et $a \neq 0$, c'est semblable.
Dans les cas complémentaires (par exemple $a = d = 0$ et $b, c \neq 0$), la matrice est diagonalisable.

b) Si u est diagonalisable alors les endomorphismes $u_{F_1}, \dots, u_{F_p}$ le sont aussi (car sont annulé par un polynôme scindé simple annulant u).
Inversement, si les endomorphismes $u_{F_1}, \dots, u_{F_p}$ sont diagonalisables alors, sachant $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$, on peut former une base de E diagonalisant u en accolant des bases des F_i diagonalisant u_{F_i}.
Finalement, u est diagonalisable si, et seulement si, les endomorphismes $u_{F_1}, \dots, u_{F_p}$ le sont.
c) Soient $(e_1, \dots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{2n})$ de matrice A dans cette base.
Les espaces $F_1, \dots, F_n$ définis par $F_i = \text{Vect}(e_i, e_{2n+1-i})$ sont stables par u et vérifient $\mathbb{C}^{2n} = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$.
Par ce qui précède, u est diagonalisable si, et seulement si, les endomorphismes $u_{F_1}, \dots, u_{F_n}$ le sont.
Or la matrice de u_{F_i} dans la base (e_i, e_{2n+1-i}) est

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{2n+1-i} \\ a_i & 0 \end{pmatrix}$$

et cette dernière est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si, et seulement si,

$$a_i a_{2n+1-i} \neq 0 \text{ ou } a_i = a_{2n+1-i} = 0$$

On peut alors affirmer que A est diagonalisable si, et seulement si,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i a_{2n+1-i} \neq 0 \text{ ou } a_i = a_{2n+1-i} = 0$$

d) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable si, et seulement si,

$$ab > 0 \text{ ou } a = b = 0$$

En adaptant l'étude qui précède, on obtient que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ si, et seulement si,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i a_{2n+1-i} > 0 \text{ ou } a_i = a_{2n+1-i} = 0$$

Exercice 19 : [énoncé]
1. $\mathbb{K}[A] = \text{Vect}\left\{A^k / k \in \mathbb{N}\right\}$.
En notant p l'indice de nilpotence de A, $\mathbb{K}[A] = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$.
D'autre part, on établit facilement que la famille $(I_n, A, \dots, A^{p-1})$ est libre et donc on peut conclure $\dim \mathbb{K}[A] = p$.
2.a) $B^p = A^p P(A)^p = 0$ donc B est nilpotente et $\text{Ind}(B) \leqslant \text{Ind}(A)$.
Si $B^q = 0$ alors $A^q P(A)^q = 0$ et donc le polynôme $X^q P(X)^q$ est annulateur de A. Or le polynôme minimal de A est X^p et celui-ci divise tout polynôme annulateur de A donc X^p divise $X^q P(X)^q$. Sachant $P(0) \neq 0$, on obtient que X^p divise X^q et donc $p \leqslant q$.
2.b) Puisque B est un polynôme en A, on a $\mathbb{K}[B] \subset \mathbb{K}[A]$. Or par égalité des indices de nilpotence, on a égalité des dimensions et donc $\mathbb{K}[B] = \mathbb{K}[A]$. Par suite il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = R(B)$.
Puisque $A^p = 0$, le polynôme $R(X)^p$ est annulateur de B, or le polynôme minimal de B est X^p donc X^p divise $R(X)^p$ et on en déduit $R(0) = 0$. Cela permet d'écrire $R(X) = XQ(X)$ et donc $A = BQ(B)$.
Si $Q(0) = 0$, alors on peut encore écrire $A = B^2 S(B)$ et alors l'indice de nilpotence de A est inférieur au plus petit entier supérieur à $p/2$. Si $p > 1$, c'est absurde et donc on peut affirmer $Q(0) \neq 0$.
Dans le cas $p = 1$, on a $A = 0$, $B = 0$ et la résolution est immédiate.
3.a) On définit la matrice étudiée
```
A:=matrix(8,8,(i,j)->if i=j-1 or i=j-4 then 1 else 0 fi);
```
Cette matrice est triangulaire supérieure, donc nilpotente.
On évalue les puissances successives de la matrice A
```
seq(evalm(A^k),k=1..8);
```
On observe alors $\text{Ind}(A) = 8$.
3.b) On définit la matrice B
```
B:=evalm(A*(1+A+2*A^2+3*A^3));
```
On cherche ensuite le polynôme Q a coefficients inconnus. On définit celui-ci
```
Q:=unapply(add(a[k]*X^k,k=0..6),X);
```
ainsi que la matrice $C = BQ(B)$
```
C:=evalm(B&*Q(B));
```
En jouant avec le facteur de zoom, on observe la structure de cette matrice et celle-ci correspond à A si, et seulement si, les a_k sont solutions d'un système facile à former. On résout celui-ci
```
solve(C[1,2]=1,C[1,3]=0,C[1,4]=1,seq(C[1,k]=0,k=5..8));
```
On peut vérifier l'exactitude de cette solution
```
assign(%);
evalm(B&*Q(B));
```
Finalement, on obtient le polynôme

$$Q(X) = 1 - X + X^2 - 2X^3 + 9X^4 - 32X^5 + 72X^6$$

Exercice 20 : [énoncé]
a) On définit la matrice A et obtient ses éléments propres :

```
A:=matrix(3,3,[1,2,0,-4,3,4,2,2,-1]);
eigenvects(A);
```

La matrice A est diagonalisable et ses espaces propres sont des droites vectorielles. Puisqu'une droite vectorielle est stable si, et seulement si, elle est engendré par un vecteur propre, les droites vectorielles stables par f sont celles engendrée par
$\varepsilon_1 = (1,0,1)$, $\varepsilon_{-1} = (-1,1,-2)$ et $\varepsilon_3 = (1,1,1)$.
b) Rappelons F stable par f si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par $f^\star$.
On en déduit que P est stable par f si, et seulement si, $\mathrm{Vect}(\vec{n})$ est stable par $f^\star$ i.e. $\vec{n}$ vecteur propre de $f^\star$. Déterminons ces derniers.

```
eigenvects(transpose(A));
```

Les plans vectoriels stables par f sont ceux de vecteurs normaux

$$n_1 = (-3,1,2), n_{-1} = (-1,0,1) \text{ et } n_3 = (-1,1,1)$$

c) On définit la matrice B et on détermine les éléments propres de B et de ${}^tB$.

```
B:=matrix(3,3,[0,-1,2,0,-1,0,-1,1,-3]);
eigenvects(B);
eigenvects(transpose(B));
```

Les droites vectorielles stables par g sont celles incluses dans le plan d'équation $x - y + 2z = 0$ et celle dirigée par $(-1,0,1)$.
Les plans vectoriels stables par g sont ceux de droite normale incluse dans le plan d'équation $x = z$ et ou dirigée par $(-1,1,-2)$.

Exercice 21 : [énoncé]
a) Puisque $\deg A = n+1$, un reste de division euclidienne par A est de degré au plus n. Ainsi l'application f va de $\mathbb{R}_n[X]$ vers lui-même.
Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$.
On a $BP_1 = Q_1A + f(P_1)$ et $BP_2 = Q_2A + f(P_2)$ avec $\deg f(P_1), \deg f(P_2) \leqslant n$.
Par combinaison linéaire on a alors
$B(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2) = (\lambda_1Q_1 + \lambda_2Q_2)A + \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$ avec
$\deg(\lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)) \leqslant n$
On peut alors identifier le reste de la division euclidienne de $\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2$ par A et affirmer

$$f(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$$

Finalement f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) On définit le polynôme A
`A:=(X-1)*(X-2)*(X-3);`
Puis l'endomorphisme f
`f:=P->rem(X^3*P,A,X);`
On peut alors calculer l'image Q de $P = aX^2 + bX + c$
`P:=a*X^2+b*X+c;`
`Q:=f(P);`
Enfin on détermine les éléments du noyau en résolvant le système formé par l'annulation des coefficients de Q
`solve(seq(coeff(Q,X,k)=0,k=0..2),a,b,c);`
Enfin on peut trouver les éléments propres de f en résolvant le système associé à l'équation $f(P) = \lambda P$
`solve(seq(coeff(Q,X,k)=coeff(lambda*P,X,k),k=0..2),a,b,c,lambda);`
On définit la matrice M de f dans la base $(1, X, X^2)$
`M:=matrix(3,3,[6,36,150,-11,-60,-239,6,25,90]);`
Puis on calcule ses éléments propres
`with(linalg);`
`eigenvects(M);`
c) Introduisons les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n$ associés aux réels $a_0, \ldots, a_n$.
La famille $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $k = 0, \ldots, n$

$$BL_k = Q_kA + f(L_k)$$

En évaluant cette relation en les a_j, on obtient

$$f(L_k)(a_j) = B(a_j)\delta_{j,k}$$

et donc

$$f(L_k) = B(a_k)L_k$$

La famille $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de diagonalisation de l'endomorphisme f. On en déduit

$$\det f = \prod_{k=1}^{n} B(a_k) \neq 0 \text{ et } \ker f = \{0\}$$

Les valeurs propres de f sont les $B(a_k)$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre $B(a_k)$ est

$$\mathrm{Vect}\left\{L_j / j = 0, \ldots, n, B(a_j) = B(a_k)\right\}$$

Exercice 22 : [énoncé]
1. Puisque les matrices A et qA sont semblables, elles ont le même polynôme

caractéristique

$$\chi_A(X) = \chi_{qA}(X) = \det(qA - XI_n) = q^n \det\left(A - \frac{X}{q}I_n\right) = q^n \chi_A\left(\frac{X}{q}\right)$$

Introduisons les coefficients du polynôme χ_A

$$\chi_A(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$$

L'égalité précédente entraîne $a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0$ car $q^k \neq 1$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Ainsi $\chi_A = a_n X^n$ et puisque χ_A est annulateur de A, la matrice A est nilpotente.

2.

On définit la matrice A

```
A:=matrix(6,6,(i,j)->if j=i+1 or (i=1 and j=6) then 1 else 0 fi);
```

a) On introduit une matrice M quelconque et on calcule $AM - 2MA$

```
M:=matrix(6,6);
B:=evalm(A&*M-2*M&*A);
```

On résout le système correspondent à l'équation $AM = 2MA$

```
solve(seq(seq(B[i,j]=0,i=1..6),j=1..6));
```

Enfin on visualise la matrice M

```
assign(%);
evalm(M);
```

On obtient les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} & m_{1,5} & m_{1,6} \\ 0 & 2m_{1,1} & 2m_{1,2} & 2m_{1,3} & 2m_{1,4} & 2m_{1,5} - 30m_{1,1} \\ 0 & 0 & 4m_{1,1} & 4m_{1,2} & 4m_{1,3} & 4m_{1,4} \\ 0 & 0 & 0 & 8m_{1,1} & 8m_{1,2} & 8m_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16m_{1,1} & 16m_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32m_{1,1} \end{pmatrix}$$

b) L'ensemble des matrices obtenu est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_6(\mathbb{C})$. C'est entendu car c'est en fait le noyau de l'application linéaire $M \mapsto AM - 2MA$.

c) Une matrice M inversible vérifiant $M^{-1}AM = 2A$ doit aussi vérifier $AM = 2MA$ et est donc de la forme précédente. De plus, une matrice de la forme précédente est inversible si, et seulement si, $m_{1,1} \neq 0$.

Inversement, une matrice M de la forme précédente avec $m_{1,1} \neq 0$ vérifie $M^{-1}AM = 2A$.

Exercice 23 : [énoncé]

a) Commençons par charger le package linalg

```
with(linalg);
```

Définissons la matrice A_2 et calculons ses valeurs propres

```
A2:=matrix(2,2,[0,2,1,0]);
eigenvals(A2);
```

et pour obtenir les valeurs approchées

```
map(evalf,eigenvals(A2));
```

Procédons de même avec A_3 et A_{10}

```
A3:=matrix(3,3,[0,2,3,1,0,3,1,2,0]);
map(evalf,eigenvals(A3));
A10:=matrix(10,10,(i,j)->if i=j then 0 else j fi);
map(evalf,eigenvals(A10));
```

b) Soient λ une valeur propre de A_n et $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

L'équation $A_n X = \lambda X$ conduit au système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = (\lambda+1)x_1 \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = (\lambda+2)x_2 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = (\lambda+n)x_n \end{cases}$$

S'il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\lambda + k = 0$ alors les égalités

$$(\lambda + j)x_j = (\lambda + k)x_k$$

donne $x_j = 0$ pour tout $j \neq k$ et l'égalité

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = (\lambda + k)x_k$$

donne $x_k = 0$. Ainsi $X = 0$ et cette situation est donc à exclure.

On a donc pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda + k \neq 0$ et le système donne

$$x_j = \frac{\lambda+1}{\lambda+j}x_1 \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots, n\}$$

Puisque $X \neq 0$, le coefficient x_1 est non nul et la première équation du système donne

$$\frac{\lambda+1}{\lambda+1}x_1 + \frac{2(\lambda+1)}{\lambda+2}x_1 + \cdots + \frac{n(\lambda+1)}{\lambda+n}x_1 = (\lambda+1)x_1$$

et en simplifiant on obtient

$$\frac{1}{\lambda+1} + \frac{2}{\lambda+2} + \cdots + \frac{n}{\lambda+n} = 1$$

c) Inversement, si λ vérifie l'équation

$$\frac{1}{\lambda+1}+\frac{2}{\lambda+2}+\cdots+\frac{n}{\lambda+n}=1$$

alors en posant

$$X={}^t\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda+1} & \frac{1}{\lambda+2} & \cdots & \frac{1}{\lambda+n}\end{pmatrix}$$

on obtient une colonne $X\neq 0$ vérifiant $A_nX=\lambda X$.
Ainsi les valeurs propres de A_n sont exactement les racines de l'équation

$$\frac{1}{\lambda+1}+\frac{2}{\lambda+2}+\cdots+\frac{n}{\lambda+n}=1$$

Considérons la fonction f définie par

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\cdots+\frac{1}{x+n}$$

La fonction f est strictement décroissante sur chacun des intervalles

$$]-\infty,-n[\,,\,]-n,-(n-1)[\,,\cdots,\,]-2,-1[\,,\,]-1,+\infty[$$

et les limites de f aux extrémités de ces intervalles sont aisées. On en déduit que A_n admet une valeur propre dans chacun des intervalles

$$]-n,-(n-1)[\,,\cdots,\,]-2,-1[\,,\,]-1,+\infty[$$

Notons que de plus la somme des valeurs propres de A_n étant égale à $\mathrm{tr}A_n=0$, l'unique valeur propre positive est comprise entre

$$\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}\text{ et }\sum_{k=2}^{n}k=\frac{(n-1)(n+1)}{2}$$

d) Le terme x_n est caractérisé par

$$\frac{1}{x_n+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+n}=1\text{ et }x_n\in\,]-2,-1[$$

Si $x_{n+1}\leqslant x_n$ alors

$$1=\frac{1}{x_{n+1}+1}+\cdots+\frac{1}{x_{n+1}+n+1}>\frac{1}{x_{n+1}+1}+\cdots+\frac{1}{x_{n+1}+n}\geqslant\frac{1}{x_n+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+n}=1$$

ce qui est absurde.
On en déduit que $x_n<x_{n+1}$ et donc que la suite (x_n) est strictement croissante.

e) La suite (x_n) est croissante et majorée par -1 donc cette suite converge vers $\ell\leqslant -1$.
Si $\ell<-1$ alors la relation

$$\frac{1}{x_n+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+n}=1$$

donne

$$1\geqslant\frac{1}{\ell+1}+\cdots+\frac{1}{\ell+n}$$

pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.
Or la série numérique $\sum\frac{1}{\ell+k}$ est divergente et donc ce qui précède est absurde.
On en déduit que la suite (x_n) croît vers -1.
On peut donc écrire $x_n=-1-y_n$ avec $y_n\to 0^+$, $y_n\in\,]0,1[$ et

$$-\frac{1}{y_n}+\frac{1}{1-y_n}+\cdots+\frac{1}{(n-1)-y_n}=1$$

On en déduit

$$\frac{1}{y_n}=\frac{y_n}{1-y_n}+\frac{1}{2-y_n}+\cdots+\frac{1}{(n-1)-y_n}$$

Puisque

$$\frac{y_n}{1-y_n}\to 0$$

et

$$\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\leqslant\frac{1}{2-y_n}+\cdots+\frac{1}{(n-1)-y_n}\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-2}$$

avec les termes encadrant tout deux équivalents à $\ln n$.
On en déduit

$$\frac{1}{y_n}\sim\ln n$$

puis

$$x_n=-1-\frac{1}{\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

Exercice 24 : [énoncé]
a) On définit la suite de fonctions

```
f:=(n,x)->piecewise(x<=1/2,0,x<=1/2+1/(n+1),(n+1)*(x-1/2),1);
```

puis on représente celle-ci pour une valeur concrète de n

```
plot(f(3,x),x=0..1);
```

ou bien on représente plusieurs de ces fonctions simultanément

```
plot([seq(f(n,x),n=1..5)],x=0..1);
```

b) On a

$$\|f_{n+p} - f_n\|_1 = \int_{1/2}^{1/2+1/(n+1)} |f_{n+p}(t) - f_n(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}$$

donc $\|f_{n+p} - f_n\|_1$ tend vers 0 uniformément en p.
La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy pour la norme $\|\,.\,\|_1$.
c) Si l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ normé par $\|\,.\,\|_1$ est complet alors la suite (f_n) converge vers un élément $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
Or la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux définie par $g(x) = 0$ si $x \in [0,1/2]$ et $g(x) = 1$ si $x \in]1/2,1]$. Par application du théorème de convergence dominée, $\int_0^1 |f_n(t) - g(t)| \,\mathrm{d}t \to 0$.
Cependant on a aussi $\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| \,\mathrm{d}t \to 0$ donc $\int_0^1 |f(t) - g(t)| \,\mathrm{d}t = 0$ puis $f = g$. C'est impossible car f est continue alors que g ne l'est pas.

Exercice 25 : [énoncé]
a) On définit la suite u par une procédure récursive

```
u:=proc(n);
if n<=1 then RETURN(-1) else RETURN((n-1)*u(n-1)-n*u(n-2)) fi
end;
```

Si l'efficacité de cette procédure est discutable (cf. suite de Fibonacci), elle permet de calculer facilement les 10 premiers de la suite (u_n)

```
seq(u(k),k=0..9);
```

b) On a

$$u_{n+2}x^n = (n+1)u_{n+1}x^n - nu_nx^n - 2u_nx^n$$

En sommant pour n allant de 0 à $+\infty$, on obtient

$$\frac{f(x) - (f(0) + f'(0)x)}{x^2} = f'(x) - xf'(x) - 2f(x)$$

Or $f(0) = u_0$ et $f'(0) = u_1$.
On parvient alors à l'équation différentielle

$$x^2(x-1)f'(x) + (2x^2+1)f(x) = -1 - x$$

On résout cette équation.

```
dsolve(x^2*(x-1)*D(f)(x)+(2*x^2+1)*f(x)=-1-x,f(x));
```

La portion correspondant à la solution générale homogène n'est pas développable en série entière en 0 à cause du terme $\mathrm{e}^{-1/x}$.
On en déduit qu'a priori

$$f(x) = -\frac{x^2+2x-1}{(x-1)^3}$$

Cette fonction rationnelle dont 0 n'est pas pôle est développable en série entière. Puisqu'elle est solution de l'équation différentielle proposée les coefficients de son développement en série entière vérifie la relation de récurrence proposée ainsi que les conditions initiales imposées.
On peut aussi corroborer l'exactitude du développement par

```
series(-(x^2+2*x-1)/(x-1)^3,x=0,10);
```

c) On pose $v_n = \frac{u_n}{n!}$ et on vérifie

$$(n+2)(n+1)v_{n+2} = (n+1)nv_{n+1} + (n+1)v_{n+1} - (n+2)v_n$$

ce qui conduit à l'équation différentielle

$$(1-x)g''(x) - (1-x)g'(x) + 2g(x) = 0$$

On résout celle-ci

```
dsolve((1-x)*D(D(g))(x)-(1-x)*D(g)(x)+2*g(x),g(0)=-1,D(g)(0)=-1,g(x));
```

pour obtenir

$$g(x) = \mathrm{e}^x(x^2-1)$$

Par le même raisonnement que ci-dessus on valide la solution et on peut la corroborer par Maple.

Exercice 26 : [énoncé]
a) On calcule S_1

```
sum(1/(4*n+1)/(4*n+3),n=0..infinity);
```

On obtient $S_1 = \pi/8$. On calcule S_2

```
sum((-1)^n/(4*n+1)/(4*n+3),n=0..infinity);
```

L'expression obtenue est une expression de `hypergeom`.

b) $a_n \sim (-1)^n/16n^2$ donc $R = 1$.

c) En considérant les séries entières dérivées

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{4n+3} = \int_0^x \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

d) Par un argument de convergence uniforme sur le segment $[0,1]$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+3} = \int_0^1 \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

Par décomposition en éléments simples,

$$\frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{1/2}{4n+1} - \frac{1/2}{4n+3}$$

On en déduit

$$S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

On calcule cette intégrale

```
int((1-t^2)/(1+t^4),t=0..1);
```

On obtient

$$S_2 = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

Par une évaluation numérique via l'instruction `evalf`, on peut observer l'exactitude de cette formule.

Exercice 27 : [énoncé]

a) $R = 1$.

b) $f_0(x) = \frac{x}{1-x}$, $f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

On obtient les expressions de $f_2, \dots, f_5$ par

```
seq(normal(sum(n^k*x^n,n=1..infinity)),k=2..5);
```

On peut présumer un équivalent de la forme $\frac{C_\alpha}{(1-x)^{1+\alpha}}$.

On peut obtenir les premières valeurs de C_α par

```
seq(eval(simplify(sum(n^k*x^n,n=1..infinity)*(1-x)^(k+1)),x=1),k=0..5);
```

Cela laisse présumer $C_\alpha = (-1)^{\alpha+1}\alpha!$.

Pour $x \in \left]-1,1\right[$, $f_p'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p+1}x^{n-1}$ donc $xf_p'(x) = f_{p+1}(x)$.

En raisonnant par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, on définit la suite (Q_p) de polynômes de sorte que

$Q_0 = X$ et $Q_{p+1}(X) = X(1-X)Q_p'(X) + (p+1)XQ_p(X)$.

On observe $Q_{p+1}(1) = (p+1)Q_p(1)$ de sorte que $Q_p(1) = p!$.

On peut alors affirmer $f_p(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{p!}{(1-x)^{1+p}}$.

c) A partir du développement connu de$(1+u)^\alpha$, on obtient $b_n = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}$.

$\ln\frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln\frac{n^\alpha}{b_n} = \alpha\ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{b_{n+1}}{b_n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum \ln\frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln\frac{n^\alpha}{b_n}$ est absolument convergente.

On en déduit que la suite de terme général $\ln\frac{n^\alpha}{b_n}$ converge puis que $\frac{n^\alpha}{b_n}$ tend vers une constante $A(\alpha) > 0$.

On peut alors conclure en exploitant le résultat suivant :

$a_n \sim b_n$ avec $a_n > 0$, $R = 1$ et $\sum a_n$ diverge entraine $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n$.

Pour établir ce résultat :

– d'une part, on montre que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$,

– d'autre part, on écrit $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - b_n| + \varepsilon\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ en choisissant N de sorte que $|a_n - b_n| \leqslant \varepsilon a_n$ pour $n \geqslant N$.

On peut alors conclure que $f_\alpha(x) \sim \frac{A(\alpha)}{(1-x)^{1+\alpha}}$.

Exercice 28 : [énoncé]

a) On obtient la décomposition en éléments simples par

```
convert(1/(1-X^6),parfrac,X);
```

b) On peut calculer l'intégrale par

```
int(1/(1-t^6),t=0..x);
```

Le résultat obtenu est cependant décevant car présente un nombre complexe et un logarithme calculé sur un réel strictement négatif.
En décomposant le calcul par la décomposition en éléments simples précédente et en isolant le problème ci-dessus, on obtient
$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^6} = \frac{1}{6}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$.
c) Posons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{6n+1}$. On a $(xS(x^6))' = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{6n} = \frac{1}{1-x^6}$ sur $]-1,1[$.
donc $S(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\int_0^{\sqrt[6]{x}} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^6}$ pour $x \in]0,1[$.
d) En écrivant $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{6n+1} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{6n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^6} + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{6(N+1)}}{1+t^6}\,\mathrm{d}t$
avec $0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{6(N+1)}}{1+t^6}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{6(N+1)}\,\mathrm{d}t \to 0$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{6n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^6}$.
On obtient la valeur de cette intégrale en écrivant

```
int(1/(1+t^6),t=0..1);
```

Exercice 29 : [énoncé]
a) On définit a et les éléments de la suite de fonctions

```
a:=1/2;
f:=(n,x)->product(1/(1-a^i*x),i=1..n);
```

On trace les graphes souhaités en prenant soin de fixer l'échelle en y

```
plot([seq(f(k,x),k=1..10)],x=-3..2,-2..5,color=red);
```

Il semble y avoir convergence de la suite avec croissance pour $x \geqslant 0$ et décroissance pour $x \leqslant 0$
b) f_{100} est développable en série entière sur $]-1/a, 1/a[$ en tant que produit de fonctions qui le sont.
Les coefficients de son développement en série entière sont les coefficients de son développement de Taylor.
Malheureusement un calcul explicite par les instructions `series` ou `taylor` n'est pas possible pour résoudre cette question. Inspiré par l'étude qui suit, considérons $f_{100}(ax)$. On a

$$f_{100}(ax) = \prod_{i=1}^{100} \frac{1}{1-a^{i+1}x} = \prod_{i=2}^{101} \frac{1}{1-a^i x}$$

Ainsi

$$f_{100}(ax) = \frac{1-ax}{1-a^{101}x} f_{100}(x)$$

puis

$$(1-a^{101}x)f_{100}(ax) = (1-ax)f_{100}(x)$$

En introduisant la suites α_n des coefficients du développement en série entière de f_{100}, la relation qui précède donne

$$\alpha_n a^n - a^{101}a^{n-1}\alpha_{n-1} = \alpha_n - a\alpha_{n-1} \text{ avec } \alpha_0 = 1$$

On en déduit

$$\alpha_n = \frac{a-a^{n+100}}{1-a^n}\alpha_{n-1}$$

Un calcul des coefficients α_n est dès lors possible, par exemple par récursivité

```
alpha:=proc(n)
if n=0 then RETURN(1)
else
RETURN((a-a^(n+100))/(1-a^n)*alpha(n-1))
fi;
end:
```

c) Soit $x \in I$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $a^n x < 1$, on peut considérer

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-a^i x}\right) = \sum_{i=1}^{N} -\ln\left(1-a^i x\right)$$

Puisque $a^i x \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$, on a $-\ln\left(1-a^i x\right) \sim a^i x$ et puisque la série $\sum a^i$ converge, par équivalence de séries à termes positifs, on peut affirmer la convergence de la suite de terme général

$$\sum_{i=1}^{N} -\ln\left(1-a^i x\right)$$

On en déduit la convergence de

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-a^i x}$$

Ainsi la suite des fonctions f_n converge simplement sur I.

Puisque $f_n(ax) = (1-ax)f_{n+1}(x)$, on obtient à la limite

$$f(ax) = (1-ax)f(x)$$

d) Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$g(0) = 1 \text{ et } \forall x \in I, g(ax) = (1-ax)g(x)$$

Si cette fonction est continue au voisinage de 0 alors la relation

$$g(x) = \frac{g(ax)}{1-ax}$$

donne par itération

$$g(x) = f_n(x)g(a^n x)$$

et donc par passage à limite $g(x) = f(x)$ d'où l'unicité d'une telle fonction.
Pour déterminer une solution développable en série entière, procédons par analyse synthèse.
Analyse :
Supposons que g est au voisinage de 0 égal à la somme d'une série entière $\sum \alpha_n x^n$ de rayon de convergence > 0. $g(0) = 1$ donne $\alpha_0 = 1$ et la relation $g(ax) = (1-ax)g(x)$ donne $\alpha_n a^n = \alpha_n - a\alpha_{n-1}$.
Ainsi la suite (α_n) est déterminée par

$$\alpha_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \frac{a}{1-a^n}\alpha_{n-1}$$

Synthèse :
Soit (α_n) la suite déterminée comme ci-dessus. Par la règle de d'Alembert, on peut affirmer que la série entière $\sum \alpha_n x^n$ est de rayon de convergence $R = 1/a$.
De plus, par les calculs ci-dessus sa somme S vérifie $S(0) = 1$ et
$S(ax) = (1-ax)S(x)$ sur $]-1/a, 1/a[$.
En reprenant l'étude d'unicité qui précède, on peut affirmer que S est égale à f sur $]-1/a, 1/a[$.
e) Ce qui précède vient de donner que f est développable en série entière ainsi qu'une relation permettant de calculer les coefficients de ce développement

```
alpha:=proc(n)
if n=0 then RETURN(1)
else
RETURN(a)/(1-a^n)*alpha(n-1))
fi;
end:
```

Exercice 30 : [énoncé]
a) $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-4t}} - 1$ est développable en série entière sur $]-1/4, 1/4[$ et le coefficient constant de son développement est nul. Cela permet de prolonger f en une fonction développable en série entière sur $]-1/4, 1/4[$ et donc $\mathcal{C}^\infty$.
b) On définit la fonction

```
f:=t->1/t/sqrt(1-4*t)-1/t;
```

On obtient le graphe

```
plot(f(t),t=-1..1/4);
```

c) Le dénominateur de la dérivée seconde de f est obtenu par

```
denom(normal(D(D(f))(t)));
```

Son signe est immédiat, c'est celui de t.
Le numérateur de la dérivée seconde de f est obtenu par

```
numer(normal(D(D(f))(t)));
```

On définit la fonction correspondante

```
n:=unapply(numer(normal(D(D(f))(t))),t) ;
```

Sa dérivée s'annule en 0 et le signe de sa dérivée seconde est facile. On en déduit les variations puis le signe du numérateur qui est celui de t. Au final $f''(t) \geqslant 0$ donc le graphe de f est convexe.

Exercice 31 : [énoncé]
a) f est définie pour $x > 0$.
b) Par domination sur tout segment, on obtient aisément f de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -t \ln t \,\mathrm{e}^{-xt} \,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties,

$$xf'(x) = \left[t \ln t \,\mathrm{e}^{-xt}\right]_0^{+\infty} - f(x) - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \,\mathrm{d}t$$

Ainsi
$$xf'(x)+f(x)+\frac{1}{x}=0$$
c) On obtient la valeur de $f(1)$ par

```
int(ln(t)*exp(-t),t=0..infinity);
```

On résout l'équation différentielle

```
dsolve({x*D(f)(x)+f(x)+1/x,f(1)=-gamma},f(x));
```

On en déduit $f(x)=-\frac{\gamma+\ln x}{x}$.
d) On peut commencer en exprimant f via le changement de variable $u=xt$.
On a
$$xf(x)=\int_0^{+\infty}\ln u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u-\int_0^{+\infty}\ln x\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$
qui conduit au même résultat que ci-dessus sachant
$$\int_0^{+\infty}\ln u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=-\gamma$$

Exercice 32 : [énoncé]
a) Pour $x\geqslant 0$, $I(x)$ est définie comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.
Pour $x<0$, $I(x)$ est une intégrale généralisée en 0^+ avec $(\sin t)^x\underset{t\to 0}{\sim}\frac{1}{t^{-x}}$.
Cette dernière converge si, et seulement si, $-x<1$.
Ainsi $\mathcal{D}=\left]-1,+\infty\right[$.
b) Posons $f:(x,t)\mapsto(\sin t)^x=\exp(x\ln(\sin t))$.
Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)=(\ln(\sin t))^k\,(\sin t)^x$.
$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est continue sur $\mathcal{D}\times\left]0,\pi/2\right]$ et pour tout $a>-1$,
$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant|\ln(\sin t)|^k\,(\sin t)^a$ pour tout $x\geqslant a$.
Par domination sur tout compact, on peut affirmer que I est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
c) On définit la fonction I qu'on appellera J pour éviter une confusion avec le i de Maple

```
J:=x->int(sin(t)^x,t=0..Pi/2);
```

Puis on calcule les valeurs demandées

```
seq(J(k),k=0..4);
```

d) Par intégration par parties $I(x+2)=\frac{x+1}{x+2}I(x)$.
e) Regardons les premiers termes

```
seq(J(n)*J(n-1),n=1..10);
```

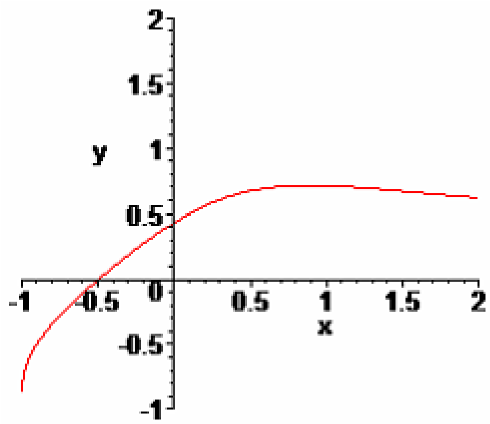
On présume $I_nI_{n-1}=\frac{\pi}{2n}$ ce que l'on établit par récurrence.
f) Puisque $I(x)=\frac{x+2}{x+1}I(x+2)$, quand $x\to -1^+$,
$$I(x)\sim\frac{1}{x+1}I(1)=\frac{1}{x+1}$$
Pour obtenir un équivalent de $I(x)$ quand $x\to+\infty$, commençons par étudier $I(n)$.
La fonction I est décroissante et positive donc $I(n+1)\leqslant I(n)\leqslant I(n-1)$ puis
$$\frac{\pi}{2(n+1)}\leqslant I(n)^2\leqslant\frac{\pi}{2n}$$
et enfin
$$I(n)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
Puisque $I(n+1)\sim I(n)$ et I monotone, on a $I(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}I(\lfloor x\rfloor)$ et on en déduit
$$I(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

Exercice 33 : [énoncé]
a) L'existence de la fonction intégrée exige $t>-1$. Par convergence de l'intégrale pour $x=-1$, on obtient $\Delta=\left[-1,+\infty\right[$.
b) On a
$$0\leqslant f(x)\leqslant\int_x^{x+1}\frac{(x+1)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3+1}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^3+1}}$$
donc
$$f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$
On a
$$\int_x^{x+1}\frac{x\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(x+1)^3+1}}\leqslant f(x)\leqslant\int_x^{x+1}\frac{(x+1)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3+1}}$$
donc
$$\frac{x}{\sqrt{(x+1)^3+1}}\leqslant f(x)\leqslant\frac{x+1}{\sqrt{x^3+1}}$$
On en déduit
$$f(x)\sim\frac{1}{x^{1/2}}$$
c) La commande

`series(int(1/sqrt(t),t=x..x+1),x=infinity);`
donne un développement asymptotique à un ordre supérieur à celui demandé.
`series(t/sqrt(t^3+1),t=infinity);`
donne
$$\frac{t}{\sqrt{t^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\frac{1}{t^{7/2}} + o\left(\frac{1}{t^{7/2}}\right) \text{ quand } t \to +\infty$$
donc
$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{7/2}} + \int_x^{x+1} o\left(\frac{1}{t^{7/2}}\right) \mathrm{d}t \text{ quand } x \to +\infty$$
Or on obtient facilement (en en revenant aux ε) que
$$\int_x^{x+1} o\left(\frac{1}{t^{7/2}}\right) \mathrm{d}t = o\left(\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{7/2}}\right) \text{ quand } x \to +\infty$$
Comme précédemment, on a
$$\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{7/2}} \sim \frac{1}{x^{7/2}}$$
donc
$$f(x) = \frac{1}{x^{1/2}} - \frac{1}{4}\frac{1}{x^{3/2}} + \frac{1}{8}\frac{1}{x^{5/2}} - \frac{37}{64}\frac{1}{x^{7/2}} + o\left(\frac{1}{x^{7/2}}\right)$$
Notons qu'un calcul direct par Maple n'est guère avenant.
`series(int(t/sqrt(t^3+1),t=x..x+1),x=infinity);`
d) Soit F une primitive sur $]-1,+\infty[$ de la fonction continue
$$t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}$$
On a $f(x) = F(x+1) - F(x)$. On en déduit que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et
$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^3+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$$
du signe de
$$g(x) = (x+1)\sqrt{x^3+1} - x\sqrt{(x+1)^3+1}$$
Si $x \in [-1,0]$ est négatif, cette quantité est assurément positive.
Si $x \in [0,+\infty[$, $g(x)$ est du signe de
$$h(x) = (x+1)^2(x^3+1) - x^2((x+1)^3+1)$$
`expand((x+1)^2*(x^3+1)-x^2*((x+1)^3+1));`
donne
$$h(x) = 1 + 2x - x^2 - 2x^3 - x^4$$
dont la dérivée est
$$h'(x) = 2 - 2x - 6x^2 - 4x^3$$
Sur $[0,+\infty[$ cette dérivée est strictement décroissante et s'annule donc une unique fois en un $\alpha \in [0,+\infty[$.
On en déduit les variations puis le signe de $h(x)$ sur $[0,+\infty[$

x	0		α		β		$+\infty$
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	$h(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Avec Maple, on peut déterminer une valeur approchée de β
`fsolve((x+1)^2*(x^3+1)-x^2*((x+1)^3+1));`
En excluant la solution négative, on obtient $\beta = 0,88$ à 10^{-2} près.
Finalement f est croissante sur $[-1,\beta]$ et décroissante sur $[\beta,+\infty[$.
e) Le maximum de f est β. Sa valeur est
`f:=x->int(t/sqrt(t^3+1),t=x..x+1);`
`f(.8832035059);`
ce qui fournit 0,7103307033...
Pour obtenir un tracé satisfaisant de la fonction f, commençons par redéfinir celle-ci à l'aide d'une forme inerte
`f:=x->int(t/sqrt(t^3+1),t=x..x+1);`
puis procédons au tracé
`plot(f(x),x=-1..2,y=-1..2);`



La fonction f étudiée

Exercice 34 : [énoncé]
a)

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&2&-2&2\end{pmatrix}$$

convient.
b) On définit la matrice par :

```
A:=matrix(4,4,[0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,-1,2,-2,2]);
```

On obtient son polynôme caractéristique factorisé par

```
factor(charpoly(A,X));
```

et ses éléments propres par

```
eigenvects(A);
```

On constate que 1 est valeur propre double mais que le sous-espace propre associé est de dimension 1. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.
c) Puisque $\chi_A=(X-1)^2(X-i)(X+i)$ est annulateur de A, il suffit d'appliquer le lemme de décomposition des noyaux.
d) Par l'étude des éléments propres précédents, on prend $C_1={}^t\begin{pmatrix}-1&-i&1&i\end{pmatrix}$, $C_2={}^t\begin{pmatrix}-1&i&1&-i\end{pmatrix}$ et $C_3={}^t\begin{pmatrix}1&1&1&1\end{pmatrix}$ vecteurs propres associées aux valeurs propres $i,-i$ et 1.
On détermine enfin une colonne C_4 vérifiant $AC_4=C_4+C_3$.

```
linsolve(A-diag(1,1,1,1),vector([1,1,1,1]));
```

On choisit parmi les solutions $C_4={}^t\begin{pmatrix}0&1&2&3\end{pmatrix}$.
Finalement pour

$$P=\begin{pmatrix}-1&-1&1&0\\-i&i&1&1\\1&1&1&2\\i&-i&1&3\end{pmatrix}$$

on obtient

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}i&0&0&0\\0&-i&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

On peut vérifier l'exactitude

```
P:=matrix(4,4,[-1,-1,1,0,-I,I,1,1,1,1,1,2,I,-I,1,3]);
B:=evalm(inverse(P)&*A&*P);
```

```
e)
```

Les solutions de l'équation $X'=AX$ sont les fonctions $X(t)=\exp(tA)X(0)$.
$\exp(tA)=P^{-1}\exp(tB)P$ permet le calcul de$\exp(tA)$.
Sachant

$$B^n=\begin{pmatrix}i^n&0&0&0\\0&(-i)^n&0&0\\0&0&1&n\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

on a

$$\exp(tB)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{itb}&0&0&\\0&\mathrm{e}^{-itb}&0&0\\0&0&\mathrm{e}^t&t\mathrm{e}^t\\0&0&0&\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$$

On achève le calcul de $\exp(tA)$ avec Maple

```
evalm(P&*matrix(4,4,[exp(I*t),0,0,0,0,exp(-I*t),0,0,0,0,exp(t),t*exp(t),0,0
```

Puis on détermine X

```
X:=evalm(%&*vector([x(0),D(x)(0),D(D(x))(0),(D@@3)(x)(0)]));
```

et enfin $x(t)$

```
X[1];
```

Exercice 35 : [énoncé]
a) Sur I_1,I_2 ou I_3, l'équation H est équivalente à l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène

$$y'+\frac{x-2}{x(x-4)}y=0$$

On peut résoudre cette équation avec Maple

```
dsolve(x*(x-4)*D(y)(x)+(x-2)*y(x)=0,y(x));
```

La solution obtenue s'interprète en fonction du signe du contenu de la racine pour affirmer que la solution de H est

$$y_1(x)=\frac{\lambda_1}{\sqrt{-x(4-x)}}\text{ sur } I_1, y_2(x)=\frac{\lambda_2}{\sqrt{x(4-x)}}\text{ sur } I_2 \text{ et } y_3(x)=\frac{\lambda_3}{\sqrt{x(x-4)}}\text{ sur } I_3$$

Pour raccorder deux solutions y_1 et y_2 en 0, la seule possibilité est que $\lambda_1=\lambda_2=0$ car sinon il y a divergence en 0. De même, pour raccorder y_2 et y_3 en 4, la seule possibilité est $\lambda_2=\lambda_3=0$.
Au final, en dehors de la fonction nulle qui est solution sur $\mathbb{R}$, les fonctions y_1,y_2,y_3 définies pour $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\neq 0$ sont les solutions maximales de E.
b) La mise en place de la méthode la variation constante invite aux déterminations des primitives de

$$\frac{1}{\sqrt{-x(4-x)}}\text{ sur } I_1, \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\text{ sur } I_2 \text{ et } \frac{1}{\sqrt{x(x-4)}}\text{ sur } I_3$$

On obtient celles-ci par les commandes

```
int(1/sqrt(-x*(4-x)),x);

int(1/sqrt(x*(4-x)),x);

int(1/sqrt(x*(x-4)),x);
```

La première expression obtenue est un logarithme d'un contenu négatif, on pourra y préférer une expression à l'aide de la fonction argch...
On obtient comme solution générale à l'équation E :

$$y_1(x)=\frac{2\operatorname{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right)+\lambda_1}{\sqrt{-x(4-x)}}\text{ sur } I_1, y_2(x)=\frac{2\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+\lambda_2}{\sqrt{x(4-x)}}\text{ sur } I_2$$

$$\text{et } y_3(x)=\frac{-2\operatorname{argch}\left(\frac{x-2}{2}\right)+\lambda_3}{\sqrt{x(x-4)}}\text{ sur } I_3$$

c) Pour raccorder une solution y_1 et une solution y_2 en 0, il est nécessaire que $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=\pi$.
La fonction ainsi obtenue est alors dérivable en 0 et solution de l'équation différentielle E comme on peut le vérifier en procédant à un développement limité

```
series((2*arccosh((2-x)/2))/sqrt(-x*(4-x)),x=0);

series((2*arcsin((x-2)/2)+Pi)/sqrt(x*(4-x)),x=0);
```

Pour raccorder une solution y_2 et une solution y_3 en 4, il est nécessaire que $\lambda_2=-\pi$ et $\lambda_3=0$.
La fonction ainsi obtenue est alors dérivable en 4 et solution de l'équation différentielle E.
Résumons :
Les deux fonctions précédemment proposées sont solutions maximales de E sur respectivement $]-\infty,4[$ et $]0,+\infty[$. En dehors de celles-ci, les solutions maximales sont les fonctions y_1,y_2,y_3 proposées ci-dessus pour $\lambda_1\neq 0,\lambda_2\neq\pm\pi$ et $\lambda_3\neq 0$.

Exercice 36 : [énoncé]
a) On définit le polynôme P_n

```
P:=n->(X+1)^n-X^n-1;
```

On évalue pour des valeurs concrètes de n le module de ses racines

```
map(abs,[solve(P(7)=0,X)]);
```

On factorise P_7 dans $\mathbb{R}[X]$

```
factor(P(7));
```

et dans $\mathbb{C}[X]$ en précisant une extension avec laquelle Maple peut travailler

```
factor(P(7),[I,sqrt(3)]);
```

Enfin, on évalue numériquement le module des racines de P_9

```
map(evalf@abs,[solve(P(9)=0,X)]);
```

b) Les racines P_n' sont les solutions de l'équation

$$(x+1)^{n-1}=x^{n-1}$$

Après résolution, celles-ci sont les

$$x_k=\frac{1}{\omega_k-1}\text{ avec } \omega_k=\exp\left(\frac{2ik\pi}{(n-1)}\right), k=1,\dots,n-2$$

Le module de la racine x_k est

$$|x_k|=\frac{1}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)}$$

et la racine de plus grand module est obtenue pour $k=1$.
On observe alors que pour $n>7$,

$$2\sin\frac{\pi}{n-1}<2\sin\frac{\pi}{6}=1$$

et donc $|x_1|>1$.
c) Pour $P(X)=c\prod_{i=1}^{n}(X-z_i)^{m_i}$ on a

$$\frac{P'}{P}=\sum_{i=1}^{m}\frac{m_i}{X-z_i}$$

Soit z une racine de P'. Si z est l'un des z_i la propriété voulue est vraie, sinon, l'égalité $P'(z)=0$ donne

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{m_i}{z-z_i}=0$$

En conjuguant cette relation et en multipliant chaque terme par sa quantité conjuguée, on obtient

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{m_i}{|z-z_i|^2}(z-z_i)=0$$

et donc

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)z=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i \text{ avec } \lambda_i=\frac{m_i}{|z-z_i|^2}>0$$

Ainsi z est combinaison convexe des $z_1,\dots,z_n$.
d) Pour $n=7$, les racines de P_n sont de modules inférieurs à 1.
Pour $n>7$, P_n' admet au moins une racine de module strictement supérieur à 1 et donc P_n aussi.

Exercice 37 : [énoncé]
a) La commande

```
dsolve({D(x)(t)=a*x(t)^2,x(0)=1},{x(t)});
```

donne

$$x(t)=\frac{1}{1-at}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz qui s'applique à cette équation autonome, on peut affirmer qu'une solution de l'équation qui s'annule est la fonction nulle.

Puisqu'ici on cherche une solution ne s'annulant pas en 0, on peut affirmer qu'elle ne s'annule pas sur son intervalle de définition et donc

$$x'(t)=ax(t)^2 \text{ et } x(0)=1\Leftrightarrow\frac{x'(t)}{x(t)^2}=a \text{ et } x(0)=1$$

La résolution se poursuit alors par intégration et donne

$$x(t)=\frac{1}{1-at}$$

solution maximale sur $]-\infty,1/a[$ quand $a\neq 0$ et sur $\mathbb{R}$ quand $a=0$.
b) On montrer par récurrence que X est de classe $\mathcal{C}^n$ sur son intervalle de définition et

$$X^{(n)}=n!X(t)^{n+1}A^n$$

En particulier

$$X^{(k)}=O \text{ et } \forall 0\leqslant j\leqslant k-1, X^{(j)}(0)=j!A^j$$

On en déduit

$$X(t)=I_n+tA+t^2A^2+\cdots+t^{k-1}A^{k-1}$$

Puisque

$$(I_n-tA)X(t)=I_n-t^kA^k=I_n$$

on peut affirmer que $X(t)$ est inversible et

$$X(t)^{-1}=I_n-tA$$

c) Puisque X est dérivable et que les coefficients de X^{-1} sont des expressions rationnelles des coefficients de X, on peut affirmer que $t\mapsto X^{-1}(t)$ est dérivable.
Puisque

$$X(t)X^{-1}(t)=I_n$$

on obtient en dérivant

$$X'(t)X^{-1}(t)+X(t)(X^{-1}(t))'=O_n$$

Or X est solution de (E) donc $X'(t)=X(t)AX(t)$ puis on obtient

$$X(t)A+X(t)(X^{-1}(t))'=0$$

On en déduit

$$\left(X^{-1}(t)\right)'=-A$$

puis

$$X^{-1}(t)=I_n-tA$$

et enfin

$$X(t)=(I_n-tA)^{-1}$$

Exercice 38 : [énoncé]
On définit la fonction
```
f:=(x,y)->x*exp(y)+y*exp(x);
```
On recherche les points critiques :
```
solve(D[1](f)(x,y)=0,D[2](f)(x,y)=0,x,y);
```
La réponse fournie par Maple, s'exprime à l'aide de `RootOf` . On concrétise celle-ci par
```
allvalues(%);
```
On obtient un seul point critique $(-1,-1)$.
On peut confirmer le résultat précédent en introduisant
```
g:=t->t*exp(1/t)+exp(t);
```
Cette fonction est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée obtenue par
```
diff(g(t),t);
```
assure que g est strictement croissante sur $]-\infty,0[$.
Cela permet d'affirmer que le `RootOf` précédent ne conduit qu'à la valeur -1.
On étudie le point critique en posant
```
r:=D[1,1](f)(-1,-1);
s:=D[1,2](f)(-1,-1);
t:=D[2,2](f)(-1,-1);
```
et en calculant
```
r*t-s^2;
```
La valeur obtenue est strictement négative, il n'y a pas d'extremum en $(-1,-1)$.
On peut confirmer ce résultat en par la représentation
```
plot3d(f(x,y),x=-2..0,y=-2..0);
```

Exercice 39 : [énoncé]
1.a) Puisque $(n+k+1)! \geqslant (k+1)!$,

$$0 \leqslant F(n,k) \leqslant \frac{(k!)^2}{\left((k+1)!\right)^2} = \frac{1}{(k+1)^2}$$

et par comparaison de série à termes positifs, on peut affirmer la convergence de la série de terme général $F(n,k)$, $k \in \mathbb{N}$.
1.b) On définit la fonction F puis on calcule les σ_n voulus
```
F:=(n,k)->(k!)^2/((n+k+1)!)^2:
sigma:=n->sum(F(n,k),k=0..infinity):
seq(sigma(n),n=0..10);
```
2.a) On définit la fonction G puis on compare les quantités proposées
```
G:=(n,k)->(3*n+2*k+3)*F(n,k):
simplify((n+1)^3*F(n+1,k)-(4*n+2)*F(n,k));
simplify(G(n,k+1)-G(n,k));
```
On constate que les quantités proposées sont égales.
2.b) En sommant les relations précédente pour $k \in \mathbb{N}$, on obtient

$$(n+1)^3\sigma_{n+1} - (4n+2)\sigma_n = \sum_{k=0}^{+\infty} G(n,k+1) - G(n,k) = -G(n,0)$$

grâce à la convergence des séries étudiées.
2.c) On passe du second membre de la relation précédente au second membre de la relation voulue en multipliant par le facteur

$$\frac{((n+1)!)^4}{(n+1)^3(2n+2)!}$$

On peut alors présumer

$$P_n = \frac{(n+1)^3(2n+2)!}{(4n+2)\left((n+1)!\right)^4} = \frac{(2n)!}{(n!)^4}$$

et vérifier avec Maple que cette quantité convient
```
P:=n->(2*n)!/(n!)^4;
P(n+1);
simplify(1/((n+1)!)^4*(n+1)^3*(2*n+2)!/(n+1)^3);
```
3. On observe que

$$-3\frac{((n+1)!)^2}{(n+1)^2(2n+2)!} = -3\frac{1}{(n+1)^2 C_{2(n+1)}^{n+1}}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 C_{2n}^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\sigma_n}{P_n} - \frac{\sigma_{n+1}}{P_{n+1}}\right) = \frac{1}{3}\frac{\sigma_0}{P_0}$$

avec convergence des séries engagées car $\sigma_n/P_n = O\left(1/P_n\right) \to 0$.
On en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 C_{2n}^n} = \frac{\pi^2}{18}$$

Exercice 40 : [énoncé]
a) On calcule l'intégrale
```
int(t^n*(1-t)^m,t=0..1);
```
On convertit le résultat sous forme de nombres factoriels
```
convert(%,factorial);
```

b) On calcule l'intégrale

```
int(x^4*(1-x)^4/(1+x^2),x=0..1);
```

Pour $x \in [0,1]$, on a

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$$

On en déduit

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{22}{7} - \pi \leqslant \int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x$$

ce qui fournit, après calcul, l'encadrement proposé.

c) La division euclidienne de $x^4(1-x)^4$ par $1+x^2$ permet d'écrire

$$x^4(1-x)^4 = A(x)(1+x^2) + R(x) \text{ avec } \deg R \leqslant 1$$

En évaluant en $x = i$, on obtient $R(i) = -4$ et donc $R(x) = -4$ car R est un polynôme réel.

Par suite

$$\frac{x^4(1-x)^4}{4} + 1 = A(x)\frac{1+x^2}{4}$$

puis la relation proposée.

D'une part

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi$$

D'autre part

$$\int_0^1 \frac{A(x)}{1+\frac{x^4(1-x)^4}{4}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} A(x)x^{4x}(1-x)^{4x}\,\mathrm{d}x$$

relation obtenue en utilisant le développement en série entière

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n \text{ pour } u = \frac{x^4(1-x)^4}{4}$$

Puisque ce développement en série entière converge normalement sur tout segment inclus dans $]-1,1[$ et puisque

$$0 \leqslant \frac{x^4(1-x)^4}{4} \leqslant \frac{1}{4}$$

il y a convergence uniforme de la série dans l'expression intégrale précédente. Ceci permet d'intégrer terme à terme cette somme de fonctions continues et d'obtenir

$$\int_0^1 \frac{A(x)}{1+\frac{x^4(1-x)^4}{4}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k$$

d) En découpant la somme infinie en une somme partielle et son reste

$$\pi = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k$$

Or

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k}{4^k} A(x)x^{4k}(1-x)^{4k}\,\mathrm{d}x$$

Par le même argument que celui qui précède, on peut intégrer terme à terme et ainsi

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k = \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}} \int_0^1 \frac{A(x)}{1+\frac{x^4(1-x)^4}{4}} x^{4(n+1)}(1-x)^{4(n+1)}\,\mathrm{d}x$$

puis

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k = \frac{(-1)^{n+1}}{4^n} \int_0^1 \frac{x^{4(n+1)}(1-x)^{4(n+1)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Le réel λ cherché vaut

$$(-1)^{n+1}/4^n$$

e) On calcule $A(x)$

```
quo(x^4*(1-x)^4,1+x^2,x);
```

On obtient

$$A(x) = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4$$

On définit les intégrales L_k

```
L:=k->int((x^6-4*x^5+5*x^4-4*x^2+4)*x^(4*k)*(1-x)^(4*k),x=0..1);
```

On calcule L_0 et L_1

```
L(0);L(1);
```

On obtient respectivement $22/7$ et $76/15015$.

Par suite

$$L_0 - \frac{1}{4}L_1 + \frac{1}{8}\int_0^1 x^8(1-x)^8\,\mathrm{d}x \leqslant \pi \leqslant L_0 - \frac{1}{4}L_1 + \frac{1}{4}\int_0^1 x^8(1-x)^8\,\mathrm{d}x$$

ce qui fournit l'encadrement

$$\frac{38491543}{12252240} \leqslant \pi \leqslant \frac{38491550}{12252240}$$

Exercice 41 : [énoncé]

a) Posons D_p le déterminant de la matrice A de taille p.
Par développement de déterminant tridiagonal, on a $D_{p+2} = 3D_{p+1} - D_p$.
On en déduit $D_{p+2} - D_{p+1} = D_{p+1} + (D_{p+1} - D_p)$.
En raisonnant par récurrence sur $p \geqslant 1$, on peut montrer la propriété « $D_{p+1} \geqslant D_p$ et $D_{p+1} > 0$ ».
On en déduit que la matrice A introduite est inversible.

$$AX = B \Leftrightarrow X = X - \frac{1}{3}AX + \frac{1}{3}B$$

La matrice $C = I - \frac{1}{3}A$ convient, c'est la matrice de bande $[1/3, 0, 1/3]$.
Puisque $AX^\star = B$, on a $X^\star = CX^\star + \frac{1}{3}B$ et donc $T(X^\star) = X^\star$.

b) On charge le package « linalg »

```
with(linalg):
```

On définit les matrices considérées avec un peu d'astuce pour la matrice A

```
A:=matrix(5,5,(i,j)->if i=j then 3 elif abs(i-j)=1 then -1 else 0
fi);
B:=vector([1,1,1,1,1]);
C:=evalm(diag(1,1,1,1,1)-1/3*A);
```

et la transformation T

```
T:=X->evalm(C&*X+B/3);
```

on vérifie l'inversibilité de A par la non nullité de son déterminant

```
det(A);
```

on calcule le vecteur $X^\star$ et sa valeur approchée

```
Xetoile:=evalm(inverse(A)&*B);
map(evalf,Xetoile);
```

enfin on confirme que $X^\star$ est point fixe de T

```
T(Xetoile);
```

c) On a

$$T(X) - T(Y) = C(X - Y)$$

et puisque C admet au plus deux coefficients par ligne égaux à $1/3$, on a

$$\|T(X) - T(Y)\| \leqslant \frac{2}{3}\|X - Y\| = k\|X - Y\|$$

avec $k = 2/3$
Par lipschitzianité, on a

$$\|X^\star - X_{n+1}\| = \|T(X^\star) - T(X_n)\| \leqslant k\|X^\star - X_n\|$$

On en déduit

$$\|X^\star - X_n\| \leqslant k^n\|X^\star - X_0\| \to 0$$

car $k \in [0, 1[$.

d) Par lipschitzianité

$$\|X_{n+1} - X_n\| \leqslant k^n\|X_1 - X_0\|$$

puis

$$\|X_{n+p} - X_n\| \leqslant \|X_{n+p} - X_{n+p-1}\| + \cdots + \|X_{n+1} - X_n\|$$

donc

$$\|X_{n+p} - X_n\| \leqslant k^{n+p-1}\|X_1 - X_0\| + \cdots + k^n\|X_1 - X_0\| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\|X_1 - X_0\|$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient

$$\|X^\star - X_n\| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\|X_1 - X_0\|$$

e) Pour assurer X_n valeur approché de $X^\star$ à ε près, on prend

$$n \geqslant \frac{\ln(3d/\varepsilon)}{\ln(3/2)} \text{ avec } d = \|X_1 - X_0\|$$

```
Xapproch:=proc(epsilon)
global T;
local d,k,n,X0,X1;
X0:=vector([0,0,0,0,0]);
X1:=T(X0);
d:=max(seq(abs(X0[k]-X1[k]),k=1..5));
n:=1+floor(ln(3*d/epsilon)/ln(3/2));
for k from 2 to n do
X1:=T(X1)
od;
RETURN(evalm(X1));
end;
```

On peut alors vérifier que la solution approchée proposée est convenable.

Exercice 42 : [énoncé]

1. On a

$$s(t) = \int_0^1 \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{sh}t$$

On en déduit

$$N(s)\left|\begin{array}{l}\mathrm{argsh}s \\ \sqrt{1+s^2}\end{array}\right. \text{ et } G(s)\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^s \mathrm{argsh}u\,\mathrm{d}u \\ \dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^s \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\end{array}\right.$$

On obtient le tracé désiré par les commandes suivantes

```
G1:=plot([arcsinh(s),sqrt(1+s^2),s=0..2]):
G2:=plot([1/s*int(arcsinh(u),u=0..s),1/s*int(sqrt(1+u^2),u=0..s),s=0..2]):
plots[display]([G1,G2]);
```

2.a L'implication ($\Leftarrow$) est immédiate en prenant $u=x$.
L'implication ($\Rightarrow$) se déduit de l'inégalité

$$f(x)\geqslant f'(u)(x-u)+f(u)$$

exprimant que le graphe d'une fonction convexe $\mathcal{C}^1$ est au dessus de sa tangente en un point.
2.b L'abscisse curviligne est donnée par

$$s(t)=\int_0^t\sqrt{1+f'(t)^2}\,\mathrm{d}t=\varphi(t)$$

avec φ une bijection strictement croissante.
En paramétrant en abscisse curviligne

$$M(s)\left|\begin{array}{l}\varphi^{-1}(s)\\ f(\varphi^{-1}(s))\end{array}\right.\text{ et }G(s)\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^s\varphi^{-1}(u)\,\mathrm{d}u\\ \dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^s f(\varphi^{-1}(u))\,\mathrm{d}u\end{array}\right.$$

Pour une abscisse x donnée, le point correspondant de Γ a pour ordonnée

$$y=f(x)$$

tandis que le point de Δ a pour ordonnée

$$z=\frac{1}{s}\int_0^s f(\varphi^{-1}(u))\,\mathrm{d}u\text{ avec }\frac{1}{s}\int_0^s\varphi^{-1}(u)\,\mathrm{d}u=x$$

Le signe de $z-u$ est alors celui de

$$\frac{1}{s}\int_0^s f(\varphi^{-1}(u))\,\mathrm{d}u-f(x)$$

Puisque

$$f(\varphi^{-1}(u))\geqslant f'(x)(\varphi^{-1}(u)-x)+f(x)$$

on obtient en intégrant (que s soit positif ou non)

$$\frac{1}{s}\int_0^s f(\varphi^{-1}(u))\,\mathrm{d}u\geqslant f'(x)\times 0+f(x)$$

et donc $z\geqslant y$.
3. Ici $s=t$

```
G1:=plot([cos(s),sin(s),s=0..4*Pi]):
G2:=plot([sin(s)/s,(1-cos(s))/s,s=0..4*Pi]):
plots[display]([G1,G2]);
```

4.a Posons

$$x_0=\frac{1}{L}\int_0^L x(s)\,\mathrm{d}s\text{ et }y_0=\frac{1}{L}\int_0^L y(s)\,\mathrm{d}s$$

Notons n_s le plus grand entier tel que $n_sL\leqslant s$. On a

$$x(s)-x_0=\frac{1}{s}\int_0^s x(u)\,\mathrm{d}u-\frac{1}{n_sL}\int_0^{n_sL}x(u)\,\mathrm{d}u$$

donc

$$x(s)-x_0=\frac{1}{s}\int_{n_sL}^s x(u)\,\mathrm{d}u+\left(\frac{n_sL-s}{s}\right)x_0\xrightarrow[s\to+\infty]{}0$$

De même $y(s)\xrightarrow[s\to+\infty]{}y_0$ et donc $\Omega(x_0,y_0)$ est point limite de Δ quand $s\to+\infty$.

4.b Ω est le centre de gravité de l'arc $\widehat{M(0)M(L)}$, c'est donc le centre de gravité de l'arc Γ représenté sur une période.
Par périodicité $x(nL)=x_0$ et $y(nL)=y_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ donc Ω est point multiple.
4.c Adjoignons quelques segments à la représentation précédente

```
segment1:=plot(eval([[cos(s),sin(s)],[sin(s)/s,(1-cos(s))/s]],s=Pi/2)):
segment2:=plot(eval([[cos(s),sin(s)],[sin(s)/s,(1-cos(s))/s]],s=3*Pi/4)):
segment3:=plot(eval([[cos(s),sin(s)],[sin(s)/s,(1-cos(s))/s]],s=Pi)):
plots[display]([G1,G2,segment1,segment2,segment3]);
```

Il semble que la droite $G(s)M(s)$ est tangente en $G(s)$ à l'arc Δ.
Cette droite est en faite dirigée par

$$\vec{u}\left|\begin{array}{l}x(s)-\dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^s x(u)\,\mathrm{d}u\\ y(s)-\dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^s y(u)\,\mathrm{d}u\end{array}\right.$$

alors que la tangente est dirigée par

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l}-\dfrac{1}{s^2}\displaystyle\int_0^s x(u)\,\mathrm{d}u+\dfrac{1}{s}x(s)\\ -\dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^s y(u)\,\mathrm{d}u+\dfrac{1}{s}y(s)\end{array}\right.$$

Puisque
$$\vec{v} = \frac{1}{s}\vec{u}$$
la conjecture est confirmée !

Exercice 43 : [énoncé]
Commençons par charger le package « linalg »
`with(linalg);`
1.a) Définissons une matrice générale M et résolvons le système correspondant à l'équation ${}^tM = M^2$
`M:=matrix(2,2,[a,b,c,d]);`
`solve(seq(seq(evalm(transpose(M))[i,j]=evalm(M^2)[i,j],i=1..2),j=1..2));`
Parmi, les solutions nous éliminons celles qui sont symétriques (car possédant des valeurs propres réelles) et il reste à l'ordre près
$$M_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
1.b) Une matrice M solution possède deux valeurs propres complexes distinctes conjuguées λ et μ. Puisque ${}^tM$ et M^2, ont les mêmes valeurs propres, on a
$$\{\lambda, \mu\} = \left\{\lambda^2, \mu^2\right\}$$
Puisque $\lambda^2 = \lambda$ est impossible car $\lambda \notin \mathbb{R}$, il reste
$$\lambda^2 = \mu \text{ et } \mu^2 = \lambda$$
On en déduit $\lambda^4 = \lambda$ puis $\lambda = j$ ou j^2 sachant $\lambda \notin \mathbb{R}$.
Finalement et à l'ordre près,
$$\lambda = j \text{ et } \mu = j^2$$
On en déduit le polynôme caractéristique de M et le théorème de Cayley Hamilton donne
$$M^2 + M + I_2 = O_2$$
d'où l'on tire
$$M + {}^tM = -I_2$$
Ainsi la matrice M est de la forme
$$M = \begin{pmatrix} -1/2 & b \\ c & -1/2 \end{pmatrix}$$
La relation $M^2 = {}^tM$ donne alors $b = -c$ et $bc = -3/4$ d'où l'obtention de M_1 et M_2.

c) La matrice
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
fait l'affaire.
2. En dimension impaire, toute matrice réelle possède une valeur propre.
3. Posons la matrice
`A:=1/2*matrix(4,4,[-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,1,-1,-1,1,-1,-1,-1,-1]);`
On vérifie l'équation `evalm(transpose(A)-A^2);`
et l'absence de valeurs propres réelles
`eigenvals(A);`
4.a La matrice A de u dans une base possède au moins une valeur propre complexe λ. Son conjugué $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de A et donc la matrice réelle
$$A^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda)A + |\lambda|^2 I$$
n'est pas inversible. On en déduit que l'endomorphisme
$$u^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda)u + |\lambda|^2 \mathrm{Id}$$
n'est pas injectif. Considérons alors un vecteur x de son noyau et l'espace
$$P = \mathrm{Vect}(x, u(x))$$
Puisque x n'est pas vecteur propre de u, P est un plan et celui-ci est stable par u car
$$u^2(x) = 2\mathrm{Re}(\lambda)u(x) - |\lambda|^2 x$$
4.b Soit $x \in F^\perp$ et $y \in F$. On a
$$(u(x) \mid y) = (x \mid u^\star(y)) = (x \mid u^2(y)) = 0$$
car $u^2(y) \in F$. Ainsi $u(x) \in F^\perp$.
4.c Soit u endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique représenté par M dans la base canonique. Il existe un plan stable par u et son orthogonal est aussi stable par u. Chaque endomorphisme induit par u sur ces plans est représenté dans une base orthonormée par une matrice de $\mathcal{E}_2$ et en vertu de 1.c), on peut supposer que cette matrice est M_1. On peut ainsi former une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ telle que la matrice de u dans celle-ci est de la forme
$$\begin{pmatrix} M_1 & O_2 \\ O_2 & M_1 \end{pmatrix}$$
et conclure.

4.d Avec des notations entendues, $e_1 + e_2$ est envoyé sur $-(e_2 + e_4)$. Considérons le plan

$$\text{Vect}(e_1 + e_2, e_2 + e_4)$$

et son orthogonal

$$\text{Vect}(e_3, e_1 - e_2 + e_4)$$

On peut facilement proposer des bases orthonormées de ces plans puis, quitte à procéder à des passages à l'opposé sur les vecteurs de base, déterminer une matrice P convenable comme celle-ci

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 44 : [énoncé]
Commençons par charger le package d'algèbre linéaire
```
with(linalg);
```
1. On introduit la matrice $A(t)$ a coefficients inconnus et la matrice $B(t)$
```
A:=t->matrix(2,2,[a(t),b(t),c(t),d(t)]);
B:=t->matrix(2,2,[t,1,2,t]);
```
puis on résout l'équation différentielle
```
dsolve(seq(seq(diff(A(t)[i,j],t)=evalm(A(t)&*B(t)-B(t)&*A(t))[i,j],i=1..2),j=
```
On définit les coefficients solutions
```
assign(%);
```
et enfin on recherche les valeurs propres de $A(t)$
```
eigenvals(A(t));
```
On remarque que ces valeurs propres ne dépendent pas du paramètre t.
On calcule les traces demandées
```
seq(expand(trace(A(t)&^k)),k=1..5);
```
2. Par hypothèse, on obtient

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n, S_k(U) = S_k(V)$$

Par récurrence forte, on démontre

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n, \sigma_k(U) = \sigma_k(V)$$

On vertu des relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé, on peut affirmer que les polynômes caractéristiques de U et V sont égaux et donc que V possède les mêmes valeurs propres que U.

3. Par récurrence, on obtient

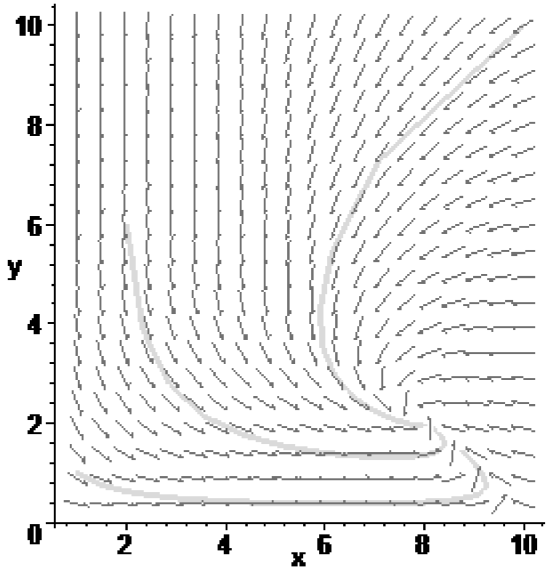
$$\forall k \in \mathbb{N}, \left[A(t)^k\right]' = A(t)^k B(t) - B(t)A(t)^k$$

4.a Sachant $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$, on obtient que l'application $t \mapsto \text{tr}(A(t)^k)$ est constante.
4.b Les valeurs propres de $A(t)$ ne dépendent pas de t.

Exercice 45 : [énoncé]
1. Il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

```
solve(x+y=10,x-y=6,x,y);
```
On obtient $\alpha = 8$ et $\beta = 2$.
2. On charge le package DEtools
```
with(DEtools);
```
puis on exploite la commande DEplot
```
DEplot([D(x)(t)=x(t)*(10-x(t)-y(t)),D(y)(t)=y(t)*(-6+x(t)-y(t))],[x(t),y(t)
```



Quelques lignes de champs...

On remarque que les lignes de champ convergent vers le point Ω.

3. On définit les applications composantes de f

```
f1 :=(x,y)->x*(10-x-y) ;
f2 :=(x,y)->y*(6-x+y) ;
```

puis la matrice jacobienne cherchée

```
J :=eval(matrix(2,2,[diff(f1(x,y),x),diff(f1(x,y),y),diff(f2(x,y),x),diff(f2(x,y),y)]),[x=8,y=2]) ;
```

On charge le package linalg

```
with(linalg) ;
```

et on détermine les valeurs propres de J

```
eigenvals(J) ;
```

On obtient $-3 \pm \sqrt{41}$.

4. Les valeurs propres de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

sont elles aussi $a \pm ib$.

Les deux matrices A et M sont donc toutes les deux semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à la matrice

$$D = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$$

car diagonalisables.

Or lorsque deux matrices réelles sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, c'est un exercice classique que de démontrer qu'elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P^{-1}MP$$

Pour $X, Y \in \mathbb{R}^2$, posons

$$(X \mid Y) = {}^t(PX)PY$$

On vérifie aisément que $(. \mid .)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ (car la matrice P est inversible).

On a alors

$$(AX \mid X) = {}^t(PAX)PX = {}^t(MPX)PX = {}^t(PX)MPX$$

Or un calcul simple permet de vérifier

$${}^tYMY = a{}^tYY$$

et donc

$$(AX \mid X) = a{}^t(PX)PX = a\,\|X\|^2$$

5. Puisque f est différentiable en Ω,

$$f(X) = f(\Omega) + \mathrm{d}f(\Omega)(X-\Omega) + o(X-\Omega) \text{ quand } X \to \Omega$$

et donc

$$(f(X) - f(\Omega) \mid X - \Omega) = (A(X-\Omega) \mid X - \Omega) + o\left(\|X-\Omega\|^2\right)$$

puis

$$(f(X) - f(\Omega) \mid X - \Omega) \sim -3\,\|X-\Omega\|^2$$

On peut donc affirmer que sur un voisinage $B(\Omega, r)$ du point Ω,

$$(f(X) - f(\Omega) \mid X - \Omega) \leqslant -\|X-\Omega\|^2$$

Considérons maintenant $X_0 \in B(\Omega, r)$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué sur l'ouvert $B(\Omega, r)$, introduisons une solution maximale de S telle que $X(t_0) = X_0$ et telle que les valeurs prises par X sont dans $B(\Omega, r)$.

Cette solution est définie sur un intervalle I ouvert contenant t_0, éventuellement non borné.

Considérons ensuite la fonction $f : t \mapsto \|X(t) - \Omega\|^2$.

La fonction f est dérivable sur I et

$$f'(t) = 2\,(X'(t) \mid X(t) - \Omega) = 2\,(f(X(t)) \mid X(t) - \Omega)$$

donc

$$f'(t) + 2f(t) = 2\,(f(X(t)) + X(t) - \Omega \mid X(t) - \Omega) \leqslant 0$$

en vertu de la relation qui vaut sur $B(\Omega, r)$ et sachant $f(\Omega) = 0$.

On en déduit que

$$\left[f(t)\mathrm{e}^{2t}\right]' \leqslant 0$$

puis que

$$\forall t \in I, f(t) \leqslant f(t_0)\mathrm{e}^{-2(t-t_0)}$$

Montrons maintenant par l'absurde que l'intervalle I n'est pas majoré.

Par l'absurde, supposons donc que l'intervalle I admet une extrémité droite finie a.

Puisque les valeurs prises par la fonction continue f sur le compact $\overline{B(\Omega, r)}$ sont bornées, on peut affirmer que la fonction $t \mapsto f(X(t))$ est intégrable sur $[t_0, a[$ et donc

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} X'(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[t \to a]{} X(t_0) + \int_{[t_0, a[} f(X(t))\,\mathrm{d}t = X_1$$

En passant la relation $f(t) \leqslant f(t_0)\mathrm{e}^{-2(t-t_0)}$ à la limite quand $t \to a$, on assure que X_1 est élément de la boule ouverte $B(\Omega, r)$ et on peut alors prolonger la fonction X en a en posant $X(a) = X_1$. Ce prolongement est encore solution de S et contredit la maximalité de X en tant que solution à valeurs dans l'ouvert $B(\Omega, r)$.
C'est absurde.
On en déduit que la fonction X est définie sur $[t_0, +\infty[$ et l'étude précédente donne

$$\|X(t) - \Omega\| = O\left(e^{-t}\right) \text{ quand } t \to +\infty$$

Exercice 46 : [énoncé]
a) La suite (β_n) tend vers $+\infty$ donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \beta_n) \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

S'il existe un entier k tel que $u_k \leqslant \beta_k$ alors par récurrence, on obtient

$$\forall n \geqslant k, u_n \leqslant \beta_n$$

ce qui permet d'établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant k}$ est décroissante. De plus celle-ci est minorée par 0 donc convergente et la relation

$$u_n = \frac{u_{n-1}^2}{\beta_{n-1}}$$

donne à la limite $u_n \to 0$ car $\beta_{n-1} \to +\infty$.
b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n^2}{\beta_n}$$

On vérifie par une récurrence facile que

$$u_0 \leqslant v_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$$

On en déduit que l'ensemble

$$I = \{u_0 > 0/(u_n) \to 0\}$$

est un intervalle de $\mathbb{R}$.
De plus, celui-ci est non vide car $1 \in I$ (puisque $\beta_0 \geqslant 1$).
λ apparaît alors comme étant l'extrémité supérieure de l'intervalle I.

c) Définissons la suite (β_n)
```
beta:=n->sqrt(n+1);
```
puis par une procédure récursive la suite (u_n)
```
u:=proc(u0,n)
if n=0 then RETURN(u0) else RETURN(u(u0,n-1)^2/beta(n-1)) fi
end:
```
On peut alors tester le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de u_0
```
seq(evalf(u(1.28,k)),k=1..10);
```
et assurer une convergence de cette suite dès l'apparition d'un terme négatif dans la série suivante
```
seq(evalf(u(1.289,k)-beta(k)),k=1..10);
```
La valeur de λ est donc minorée par $1,289$.
d) On observe

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2^{n+1}} \ln \beta_n$$

donc

$$v_n = v_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln \beta_k}{2^{k+1}}$$

e) Si $\beta_n = O(\rho^n)$ alors la série $\sum \frac{\ln \beta_k}{2^k} = \sum \frac{O(k)}{2^k}$ converge et donc

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell = v_0 - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\ln \beta_k}{2^{k+1}}$$

Si $\ell > 0$ alors $u_n = \mathrm{e}^{2^n v_n} \to +\infty$ et si $\ell < 0$ alors $u_n \to 0$.
On en déduit que λ est donné par la condition $\ell = 0$ ce qui fournit

$$\lambda = \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\ln \beta_k}{2^{k+1}}\right)$$

Définissons les valeurs partielles
```
lambda:=n->exp(sum(ln(beta(k))/2^(k+1),k=0..n));
```
et estimons λ
```
evalf(lambda(100));
```
Pour estimer plus précisément λ commençons par observer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\ln \beta_k}{2^{k+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{k+2}} = \frac{1}{2}$$

Posons ensuite

$$\lambda_n = \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\ln \beta_k}{2^{k+1}}\right)$$

Puisque la fonction exp à une dérivée bornée par $e^{1/2}$ sur $[0,1/2]$, on a en vertu de l'inégalité des accroissements finis

$$|\lambda - \lambda_n| \leqslant e^{1/2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln \beta_k}{2^{k+1}} \leqslant e^{1/2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k}{2^{k+1}} = e^{1/2} \frac{n+1}{2^n}$$

Ce majorant est une expression décroissante de n et l'on constate numériquement que $n = 22$ convient

```
n:=22;evalf(exp(1/2)*(n+1)/2^n);
```

Il reste à calculer λ_{22} ce qui donne 1.289064511.