



## Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  un ensemble. Trouver toutes les applications  $f$  de  $E$  telles que, pour toute application  $g$  de  $E$ , on ait  $g \circ f = f \circ g$ .

EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Déterminer l'erreur dans le raisonnement suivant :

*Si une relation  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$  est symétrique et transitive alors elle est réflexive car pour tous  $x, y$  de  $E$  :  $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$  puis  $(x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x\mathcal{R}x$*

EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Quelle est la seule relation sur  $E$  qui soit à la fois réflexive, symétrique et antisymétrique ?



## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [ [Retour à l'énoncé](#) ]

Considérer des applications  $g$  constantes.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [ [Retour à l'énoncé](#) ]

Et si un élément  $x$  de  $E$  n'est en relation avec aucun autre élément ?

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [ [Retour à l'énoncé](#) ]

C'est l'égalité.

## Corrigés des exercices

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Soit  $x$  un élément de  $E$ , et  $g$  l'application constante qui à tout élément  $t$  de  $E$  associe  $x$ .

L'hypothèse  $g \circ f = f \circ g$ , évaluée en un point quelconque de  $E$ , donne  $x = f(x)$ .

L'application  $f$  est donc nécessairement l'identité de  $E$ .

Réciproquement, l'application identité de  $E$  convient de manière évidente.

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

L'erreur vient du fait que pour tout  $x$  on suppose l'existence d'un  $y$  dans  $E$  tel que  $x\mathcal{R}y$ .

Supposons par exemple que  $E$  soit réduit à une paire  $\{x, y\}$  et que la relation  $\mathcal{R}$  soit définie par le *seul*  $x\mathcal{R}x$ , alors  $\mathcal{R}$  est symétrique et transitive sans être réflexive.

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Remarquons que la relation "égalité" sur  $E$  vérifie les trois propriétés.

Réciproquement, soit  $\mathcal{R}$  réflexive, symétrique et antisymétrique.

D'une part, pour tout  $x$  de  $E$  on a  $x\mathcal{R}x$ .

D'autre part, si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de  $E$  tels que  $x\mathcal{R}y$ , alors on a  $y\mathcal{R}x$  par symétrie et donc  $x = y$  par antisymétrie :  $\mathcal{R}$  est donc la relation "égalité".