

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $E$  et  $\mathcal{S} = \{X \subset E, f^{-1}(f(X)) = X\}$ .

1. Soit  $A$  une partie quelconque de  $E$ . Montrer que  $f^{-1}(f(A))$  appartient à  $\mathcal{S}$ .
2. Montrer que toute intersection ou réunion d'éléments de  $\mathcal{S}$  est encore élément de  $\mathcal{S}$ .

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

1. Montrer que pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $f^{-1}(f(A)) \supset A$ .
2. Montrer que pour toute partie  $B$  de  $F$ ,  $f(f^{-1}(B)) = f(E) \cap B$ .
3. Prouver que  $f$  est injective  $\Leftrightarrow \forall A \subset E, f^{-1}(f(A)) = A$ .
4. Prouver que  $f$  est surjective  $\Leftrightarrow \forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B$ .

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides d'un ensemble  $E$ .

On considère l'application  $f$ , de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$  définie par  $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$ .

1. Montrer que  $f$  est injective  $\Leftrightarrow A \cup B = E$ .
2. Montrer que  $f$  est surjective  $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ .
3. Dans le cas où  $f$  est bijective, déterminer  $f^{-1}$ .

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $A$  une partie d'un ensemble  $E$ .

On lui associe l'application  $\chi_A$ , de  $E$  vers  $\{0, 1\}$ , définie par  $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

Montrer que  $A \mapsto \chi_A$  est une bijection de  $\mathcal{P}(E)$  sur l'ensemble  $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ .

## Indications ou résultats

### INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1.  $B = \overline{f(A)}$  contient  $A$ , donc  $f(B)$  contient  $f(A)$ .  
Utiliser aussi le fait que  $\overline{f(A)}$  est inclus dans  $A$ .
2. Pour la réunion c'est évident.  
Pour l'intersection, vérifier que  $\overline{f(\bigcap A_i)}$  est inclus dans  $\bigcap A_i$  puis qu'il le contient.

### INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Soit  $a \in A$  et  $b = f(a)$ . On a  $b \in B = f(A)$ , donc  $a$  est dans ...
2. Par équivalences successives, à partir de  $b \in f(\overline{f(B)})$ .
3. Si  $f$  est injective, il suffit (cf 1) de vérifier  $\overline{f(A)} \subset A$ .  
Réciproquement, si  $f(a) = f(b)$ , montrer que  $b \in \overline{f(\{a\})} = \dots$
4. L'hypothèse signifie ici (cf 2) que  $\forall B \subset F, B = f(E) \cap B$ , donc que...

### INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Noter que  $f(A \cup B) = f(E) = (A, B)$ .  
Réciproquement, si  $\begin{cases} A \cup B = E \\ f(X) = f(Y) \end{cases}$ , alors  $\begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases}$ , puis, par réunion...
2. Si  $A \cap B = \emptyset$ , vérifier que  $f(A' \cup B') = (A', B')$ .  
Réciproquement, si  $f$  est surjective, il existe  $X \subset E$  tel que  $f(X) = (\emptyset, B)$ .
3. Si  $f$  est bijective, alors  $B = \overline{A}$  et la question précédente donne  $f^{-1}$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Pour  $f : E \mapsto \{0, 1\}$ , l'unique  $A \subset E$  tel que  $f = \chi_A$  est l'image réciproque de  $\{1\}$ .

## Corrigés des exercices

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Remarque (voir exercice suivant) :

- Pour toute partie  $X$  de  $E$  on a  $f^{-1}(f(X)) \supset X$ .
- Pour toute partie  $Y$  de  $E$ , on a  $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$

1. Soit  $A$  une partie de  $E$ , et soit  $B = f^{-1}(f(A))$ .

On utilise deux fois la remarque précédente.

D'une part  $B$  contient  $A$ . L'ensemble  $f(B)$  contient donc  $f(A)$ .

D'autre part  $f(B) = f(f^{-1}(f(A)))$  est inclus dans  $f(A)$ .

On en déduit  $f(B) = f(A)$ , puis  $f^{-1}(f(B)) = f^{-1}(f(A)) = B$ , ce qu'il fallait démontrer.

2. Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille quelconque d'éléments de  $\mathcal{S}$ .

Pour la réunion c'est évident :

$$f^{-1}\left[f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)\right] = f^{-1}\left[\bigcup_{i \in I} f(A_i)\right] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(f(A_i)) = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Pour l'intersection, il y a une inclusion :

$$f^{-1}\left[f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right] \subset f^{-1}\left[\bigcap_{i \in I} f(A_i)\right] \subset \bigcap_{i \in I} f^{-1}(f(A_i)) \subset \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Mais on sait que l'inclusion inverse  $f^{-1}\left[f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right] \supset \bigcap_{i \in I} A_i$  est vraie.

On a donc prouvé que  $\bigcup_{i \in I} A_i$  et  $\bigcap_{i \in I} A_i$  sont éléments de  $\mathcal{S}$ .

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Soit  $A$  une partie de  $E$ . Soit  $a$  un élément de  $A$ .

Par définition l'image  $b$  de  $a$  est dans  $B = f(A)$  donc  $a$  est dans  $f^{-1}(B)$ .

Ainsi  $a$  appartient à  $f^{-1}(f(A))$ . On a donc prouvé  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .

2. Soit  $B$  une partie de  $F$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} b \in f(f^{-1}(B)) &\Leftrightarrow \exists a \in f^{-1}(B), f(a) = b \Leftrightarrow \exists a \in E, f(a) \in B, f(a) = b \\ &\Leftrightarrow \exists a \in E, f(a) = b, b \in B \Leftrightarrow b \in f(E) \cap B \end{aligned}$$

On a donc prouvé l'égalité  $f(f^{-1}(B)) = f(E) \cap B$ , et il en découle  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .

3. On suppose que  $f$  est injective. Soit  $A$  une partie de  $E$ .

Pour prouver l'égalité  $f^{-1}(f(A)) = A$ , il suffit de vérifier l'inclusion  $f^{-1}(f(A)) \subset A$ .

On se donne donc un élément  $b$  de  $f^{-1}(f(A))$ .

Par définition  $f(b)$  est dans  $f(A)$ . Donc il existe  $a$  dans  $A$  tel que  $f(b) = f(a)$ .

Mais l'égalité  $f(b) = f(a)$  et l'injectivité de  $f$  donnent  $b = a$  donc  $b \in A$ .

Ainsi on a l'inclusion  $f^{-1}(f(A)) \subset A$ , puis l'égalité.

On suppose réciproquement que pour toute partie  $A$  de  $E$ , on a  $f^{-1}(f(A)) = A$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $E$  tels que  $f(a) = f(b)$ . Il faut prouver  $a = b$ .

$$f(b) = f(a) \Rightarrow f(b) \in \{f(a)\} = f(\{a\}) \Rightarrow b \in f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}.$$

Ce dernier résultat signifie  $b = a$ , ce qu'il fallait démontrer.

4. L'hypothèse s'exprime ici par :  $\forall B \subset F, B = f(E) \cap B$  (question 2).

Autrement dit, elle signifie que pour toute partie  $B$  de  $F$ , on a  $B \subset f(E)$ , ce qui équivaut évidemment à  $f(E) = F$ , c'est-à-dire à la surjectivité de  $f$ .

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3** [[Retour à l'énoncé](#)]

1. On note que pour toute partie  $X$  de  $E$  contenant  $A$  et  $B$ , on a  $f(X) = (A, B)$ .

En particulier,  $f(A \cup B) = f(E) = (A, B)$ .

Il s'ensuit que si  $f$  est injective alors  $A \cup B = E$ .

Réciproquement, supposons  $A \cup B = E$ , et soient  $X, Y$  deux parties de  $E$  telles que  $f(X) = f(Y)$ .

On a donc  $X \cap A = Y \cap A$  et  $X \cap B = Y \cap B$ .

Par réunion, on en déduit :  $(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$ , donc  $X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$ , ou encore  $X \cap E = Y \cap E$  c'est-à-dire  $X = Y$ .

Conclusion :  $f$  est injective si et seulement si  $A \cup B = E$ .

2. Supposons  $A \cap B = \emptyset$ . Soient  $A'$  une partie de  $A$  et  $B'$  une partie de  $B$ .

Pour montrer que  $f$  est surjective, il faut trouver  $X \subset E$  telle que 
$$\begin{cases} X \cap A = A' \\ X \cap B = B' \end{cases}$$

On constate que  $X = A' \cup B'$  convient. En effet :

$$\begin{aligned} f(A' \cup B') &= ((A' \cup B') \cap A, (A' \cup B') \cap B) \\ &= ((A' \cap A) \cup (B' \cap A), (A' \cap B) \cup (B' \cap B)) \\ &= (A' \cup \emptyset, \emptyset \cup B') = (A', B') \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons  $f$  surjective. Alors il existe  $X \subset E$  tel que  $f(X) = (\emptyset, B)$ .

Autrement dit, il existe  $X \subset E$  tel que 
$$\begin{cases} X \cap A = \emptyset \\ X \cap B = B \end{cases} \text{ c'est-à-dire tel que } \begin{cases} X \subset \bar{A} \\ B \subset X \end{cases}$$

On en déduit  $B \subset \bar{A}$ , ce qui exprime que l'intersection  $A \cap B$  est vide.

Conclusion :  $f$  est surjective si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .

3. On suppose que  $f$  est bijective, c'est-à-dire que 
$$\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = E \end{cases}, \text{ ce qui s'écrit } B = \bar{A}.$$

D'après la première partie de la question précédente, la bijection réciproque de  $f$  est l'application  $g$  de  $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$  vers  $\mathcal{P}(E)$  définie par  $g(A', B') = A' \cup B'$ .

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4** [[Retour à l'énoncé](#)]

Pour toute application  $f$  de  $E$  dans  $\{0, 1\}$ , il existe effectivement une et une seule partie  $A$  de  $E$  telle que  $f = \chi_A$  : c'est l'ensemble des éléments  $x$  de  $E$  tels que  $f(x) = 1$ , c'est-à-dire l'image réciproque du singleton  $\{1\}$ .