

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un ensemble muni d'une relation \mathcal{R} réflexive et transitive.

On définit sur E la relation : $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.

Montrer que \mathcal{S} est une relation d'équivalence.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit \mathcal{R} une relation réflexive et symétrique sur un ensemble E .

On définit sur E la relation :

$x\mathcal{S}y \Leftrightarrow$ il existe une suite finie x_0, x_1, \dots, x_n d'éléments de E (avec $n \geq 1$) tels que $x_0 = x$, $x_n = y$, et $x_p\mathcal{R}x_{p+1}$ pour tout p de $\{0, \dots, n-1\}$.

Montrer que \mathcal{S} est une relation d'équivalence.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient \mathcal{R} et \mathcal{S} deux relations d'équivalence sur un ensemble E .

On définit la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ par : $x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists z, x\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{S}y$.

Montrer que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est une relation d'équivalence $\Leftrightarrow \mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit \mathcal{R} une relation sur un ensemble E .

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence \Leftrightarrow :

- \mathcal{R} est réflexive
- Pour tous éléments x, y, z de E : $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow z\mathcal{R}x$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

\mathcal{S} est (facilement) symétrique et réflexive.

Si $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$, alors $x\mathcal{R}z$ (transitivité de \mathcal{R}) et $z\mathcal{R}x$. Donc $x\mathcal{S}z$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

– Pour la réflexivité, choisir $n = 1$ et $x_0 = x_1$.

– La symétrie de \mathcal{R} implique celle de \mathcal{S} .

– Si $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$, poser $\begin{cases} a_0, a_1, \dots, a_p \\ b_0, b_1, \dots, b_q \end{cases}$ tels que $\begin{cases} x = a_0, a_0\mathcal{R}a_1, \dots, a_{p-1}\mathcal{R}a_p, a_p = y \\ y = b_0, b_0\mathcal{R}b_1, \dots, b_{q-1}\mathcal{R}b_q, b_q = z \end{cases}$
Poser alors $n = p + q$ et $x_0 = a_0, \dots, x_p = a_p, x_{p+1} = b_1, \dots, x_n = b_q$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

– Si $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, et si $x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{S} \circ \mathcal{R}x$.

Il existe donc z tel que $y\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{S}x$. En déduire $x\mathcal{R} \circ \mathcal{S}y$.

Réciproquement, $x\mathcal{R} \circ \mathcal{S}y$ implique $y\mathcal{S} \circ \mathcal{R}x$ puis $x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}y$.

– On suppose maintenant que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

◇ La réflexivité de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est facile en utilisant celle de \mathcal{R} et \mathcal{S} .

◇ Si $x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}y$, alors il existe z tel que $(x\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{S}y)$.

En déduire $y\mathcal{R} \circ \mathcal{S}x$, c'est-à-dire $y\mathcal{S} \circ \mathcal{R}x$.

◇ Si $x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}y$ et $y\mathcal{S} \circ \mathcal{R}z$, on a $x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R} \circ \mathcal{S}z$.

Il existe donc a, b tels que $\begin{cases} x\mathcal{R}a \\ a\mathcal{S}y \end{cases}$ et $\begin{cases} y\mathcal{S}b \\ b\mathcal{R}z \end{cases}$

En déduire $a\mathcal{R} \circ \mathcal{S}z$ (donc $a\mathcal{S} \circ \mathcal{R}z$). Ainsi $x\mathcal{R}a$.

En déduire $x\mathcal{R}c$ puis $x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}z$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

– Si \mathcal{R} est d'équivalence alors $\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow x\mathcal{R}z \Rightarrow z\mathcal{R}x$ (transitivité et symétrie.)

– Réciproquement, si $x\mathcal{R}y$ alors $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}y)$ (réflexivité) donc $y\mathcal{R}x$.

Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $z\mathcal{R}x$ (hypothèse sur \mathcal{R}) et donc $x\mathcal{R}z$ (symétrie).

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Tout comme sa définition, la relation \mathcal{S} est symétrique.

Pour tout x de E , on a $x\mathcal{R}x$ donc $x\mathcal{S}x$: \mathcal{S} est réflexive.

Soient x, y, z dans E tels que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$. On a donc $\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases}$ et $\begin{cases} y\mathcal{R}z \\ z\mathcal{R}y \end{cases}$.

De $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, on tire $x\mathcal{R}z$ (transitivité de \mathcal{R}).

De même, ($z\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$) impliquent $z\mathcal{R}x$.

Ainsi ($x\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{R}x$), c'est-à-dire $x\mathcal{S}z$: la relation \mathcal{S} est donc transitive.

Conclusion : \mathcal{S} est une relation d'équivalence.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

– Soit x un élément de E . On a $x\mathcal{R}x$ donc $x\mathcal{S}x$: avec les notations de l'énoncé on choisit en effet $n = 1$ et $x_0 = x_1 = x$. La relation \mathcal{S} est donc réflexive.

– Soient x et y deux éléments de E tels que $x\mathcal{S}y$.

Il existe donc x_0, x_1, \dots, x_n tels que $x = x_0, x_0\mathcal{R}x_1, x_1\mathcal{R}x_2, \dots, x_{n-1}\mathcal{R}x_n, x_n = y$.

En utilisant la symétrie de \mathcal{R} , on trouve : $y = x_n, x_n\mathcal{R}x_{n-1}, \dots, x_2\mathcal{R}x_1, x_1\mathcal{R}x_0, x_0 = x$.

Ce résultat implique $y\mathcal{S}x$. La relation \mathcal{S} est donc symétrique.

– Soient x, y, z trois éléments de E tels que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$.

Il existe $p \geq 1$ et a_0, a_1, \dots, a_p tels que $x = a_0, a_0\mathcal{R}a_1, a_1\mathcal{R}a_2, \dots, a_{p-1}\mathcal{R}a_p, a_p = y$.

Il existe $q \geq 1$ et b_0, b_1, \dots, b_q tels que $y = b_0, b_0\mathcal{R}b_1, b_1\mathcal{R}b_2, \dots, b_{q-1}\mathcal{R}b_q, b_q = z$.

Posons $n = p + q$ et $x_0 = a_0, \dots, x_p = a_p, x_{p+1} = b_1, \dots, x_n = b_q$.

Avec ces notations, on a : $x = x_0, x_0\mathcal{R}x_1, x_1\mathcal{R}x_2, \dots, x_{n-1}\mathcal{R}x_n, x_n = z$.

Ainsi $x\mathcal{S}z$. La relation \mathcal{S} est transitive. C'est une relation d'équivalence.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

– On suppose que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Soient x, y deux éléments de E . Supposons $x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}y$. On en déduit $y\mathcal{S} \circ \mathcal{R}x$ par symétrie de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Il existe donc z dans E tel que $y\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{S}x$.

Mais \mathcal{R} et \mathcal{S} sont symétriques. On a donc $x\mathcal{S}z$ et $z\mathcal{R}y$. On en déduit $x\mathcal{R} \circ \mathcal{S}y$.

Réciproquement, $x\mathcal{R} \circ \mathcal{S}y$ implique $y\mathcal{S} \circ \mathcal{R}x$ puis $x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}y$.

Ainsi $x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}y \Leftrightarrow x\mathcal{R} \circ \mathcal{S}y$: les relations $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ sont identiques.

– On suppose maintenant que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

◇ Soit x un élément de E . On a $x\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{S}x$ car \mathcal{R} et \mathcal{S} sont réflexives.

Ainsi $x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}x$. La relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est donc réflexive (on n'a pas utilisé $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$).

- ◇ Soient x, y deux éléments de E tels que $x\mathcal{S}\circ\mathcal{R}y$.
Il existe donc z dans E tel que ($x\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{S}y$).
Les relations \mathcal{R} et \mathcal{S} étant symétriques, on en déduit ($y\mathcal{S}z$ et $z\mathcal{R}x$).
Autrement dit, on a $y\mathcal{R}\circ\mathcal{S}x$. Or par hypothèse $\mathcal{R}\circ\mathcal{S} = \mathcal{S}\circ\mathcal{R}$.
On en déduit $y\mathcal{S}\circ\mathcal{R}x$, ce qui prouve que $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ est symétrique.
- ◇ Soient x, y, z dans E tels que $x\mathcal{S}\circ\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{S}\circ\mathcal{R}z$.
Compte tenu de l'hypothèse, on peut écrire $x\mathcal{S}\circ\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}\circ\mathcal{S}z$.
Il existe donc a et b dans E tels que $\begin{cases} x\mathcal{R}a \\ a\mathcal{S}y \end{cases}$ et $\begin{cases} y\mathcal{S}b \\ b\mathcal{R}z \end{cases}$.
En utilisant la transitivité de \mathcal{S} , on trouve $x\mathcal{R}a$ et $\begin{cases} a\mathcal{S}b \\ b\mathcal{R}z \end{cases}$.
Ce dernier système implique $a\mathcal{R}\circ\mathcal{S}z$, ou encore $a\mathcal{S}\circ\mathcal{R}z$.
Ainsi on a $x\mathcal{R}a$ et il existe c tel que $\begin{cases} a\mathcal{R}c \\ c\mathcal{S}z \end{cases}$.
On en déduit $x\mathcal{R}c$ car \mathcal{R} est transitive.
Le système $\begin{cases} x\mathcal{R}c \\ c\mathcal{S}z \end{cases}$ conduit enfin à $x\mathcal{S}\circ\mathcal{R}z$.
On a ainsi prouvé que $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ est transitive. C'est une relation d'équivalence.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

- Si \mathcal{R} est une relation d'équivalence alors elle est réflexive et pour tous x, y de E , on a :
($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$) \Rightarrow $x\mathcal{R}z$ \Rightarrow $z\mathcal{R}x$ (on utilise la transitivité puis la symétrie.)
- Réciproquement, supposons que \mathcal{R} possède les deux propriétés indiquées par l'énoncé.
Soient x, y, z trois éléments quelconques de E .
Si $x\mathcal{R}y$ alors ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}y$) en utilisant la réflexivité.
L'une des deux hypothèses sur \mathcal{R} donne alors $y\mathcal{R}x$: la relation \mathcal{R} est symétrique.
Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $z\mathcal{R}x$ (hypothèse sur \mathcal{R}) et donc $x\mathcal{R}z$ (symétrie).
Ainsi \mathcal{R} est transitive : c'est donc une relation d'équivalence.