

Pavages et clans

Rappels

Soit E un ensemble, et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de parties de E .

On rappelle que $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\}$ et que $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in A_i\}$.

Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite de parties de E .

- On dit que cette suite est *croissante* si : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.
- On dit qu'elle est *décroissante* si : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}$.

Première Partie

Soit E un ensemble quelconque. Soit \mathcal{P} une partie de $\mathcal{P}(E)$.

On dit que \mathcal{P} est un *pavage* si : $\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2, \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P} \\ A \cap B \in \mathcal{P} \end{cases}$

On dit que le pavage \mathcal{P} est *achevé* si :

- Pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ croissante d'éléments de \mathcal{P} , $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ est encore un élément de \mathcal{P} .
- Pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ décroissante d'éléments de \mathcal{P} , $\bigcap_{n \geq 0} A_n$ est encore un élément de \mathcal{P} .

1. Vérifier que \emptyset et $\mathcal{P}(E)$ sont des pavages achevés de E . [S]
2. Donner tous les pavages de E quand $E = \emptyset$, ou $E = \{a\}$, ou $E = \{a, b\}$ [S].
3. Dans cette question, on suppose que E est un ensemble fini.

Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante (ou décroissante) de parties de E .

(a) Montrer que la suite $(A_n)_{n \geq 0}$ est *stationnaire*.

Autrement dit, il existe un entier p tel que, pour tout $n \geq p$, $A_n = A_p$. [S]

(b) En déduire que tout pavage de E est achevé. [S]

4. Soient \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 deux pavages de E .

(a) L'union $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ est-elle un pavage de E ? [S]

(b) L'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est-elle un pavage de E ? [S]

5. Soit \mathcal{P} un pavage de E .

(a) Montrer que la famille des pavages achevés de E qui contiennent \mathcal{P} est non vide.

On note $\widehat{\mathcal{P}}$ l'intersection de tous les pavages de cette famille. [S]

(b) Montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est lui-même un pavage achevé contenant \mathcal{P} . [S]

- (c) Réciproquement, montrer que si un pavage achevé contient \mathcal{P} , alors il contient $\widehat{\mathcal{P}}$.
 $\widehat{\mathcal{P}}$ est donc, au sens de l'inclusion, le plus petit pavage achevé contenant \mathcal{P} .
On dit que $\widehat{\mathcal{P}}$ est le pavage achevé *engendré* par \mathcal{P} . [S]
- (d) A quelle condition a-t-on $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$? [S]
6. Soit \mathcal{P} un pavage de E . On note $\mathcal{P}_m = \{B \subset E, \forall A \in \mathcal{P}, B \cap A \in \mathcal{P}\}$.
- (a) Montrer que \mathcal{P}_m est un pavage de E qui contient \mathcal{P} . [S]
- (b) Montrer que si \mathcal{P} est achevé, alors \mathcal{P}_m est achevé. [S]

Deuxième Partie

Rappel : on note \overline{F} le complémentaire dans E d'une partie F quelconque de E .

On dit qu'un pavage \mathcal{P} de E est un *clan* si : $\forall (A, B) \in \mathcal{P}^2, A \cap \overline{B} \in \mathcal{P}$.

- Vérifier que \emptyset et $\mathcal{P}(E)$ sont des clans de E . [S]
- Donner tous les clans de E quand $E = \emptyset$, ou $E = \{a\}$, ou $E = \{a, b\}$ [S].
- Montrer que si \mathcal{P} est un clan de E alors \mathcal{P}_m est un clan de E . [S]
- On se donne un clan \mathcal{P} de E . On veut montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un clan de E .
 - Soit A une partie de E . On note $\mathcal{E}_A = \{B \subset E, A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}\}$.
Montrer que \mathcal{E}_A est un pavage de E . [S]
 - Prouver que le pavage \mathcal{E}_A est achevé. [S]
 - En déduire que si A appartient à \mathcal{P} , alors $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans \mathcal{E}_A . [S]
 - Soit B une partie de E . On note $\mathcal{F}_B = \{A \subset E, A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}\}$.
Montrer que \mathcal{F}_B est un pavage achevé de E . [S]
 - En déduire que si B appartient à $\widehat{\mathcal{P}}$, alors $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans \mathcal{F}_B . [S]
 - Conclure. [S]

Corrigé du problème

Première Partie

1. – Si $\mathcal{P} = \emptyset$, l'assertion $(A, B) \in \mathcal{P}^2 \Rightarrow \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P} \\ A \cap B \in \mathcal{P} \end{cases}$ est vraie, tout simplement parce que le prédicat $(A, B) \in \mathcal{P}^2$ est toujours faux (en effet l'ensemble \mathcal{P}^2 est vide.)

Donc \emptyset est un pavage de E .

- Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$, l'assertion $(A, B) \in \mathcal{P}^2 \Rightarrow \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{P} \\ A \cap B \in \mathcal{P} \end{cases}$ est toujours vraie.
 $\mathcal{P}(E)$ est donc également un pavage de E .

[Q]

2. – Si $E = \emptyset$. Dans ce cas $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$.

Les pavages de E sont $\mathcal{P} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire les deux seules parties de $\mathcal{P}(E)$.

- Si $E = \{a\}$. Dans ce cas $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

Les pavages de E sont $\mathcal{P} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P} = \{\{a\}\}$, et $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$.

Autrement dit, les quatres parties possibles de $\mathcal{P}(E)$ sont des pavages de E .

- Si $E = \{a, b\}$:

Dans ce cas $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Les pavages de E sont :

$$\begin{array}{llll} \mathcal{P} = \emptyset & \mathcal{P} = \{\emptyset\} & \mathcal{P} = \{\{a\}\} & \mathcal{P} = \{\{b\}\} \\ \mathcal{P} = \{\{a, b\}\} & \mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}\} & \mathcal{P} = \{\emptyset, \{b\}\} & \mathcal{P} = \{\emptyset, \{a, b\}\} \\ \mathcal{P} = \{\{a\}, \{a, b\}\} & \mathcal{P} = \{\{b\}, \{a, b\}\} & \mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\} & \mathcal{P} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\} \\ \mathcal{P} = \mathcal{P}(E) & & & \end{array}$$

On remarque que les seules parties de $\mathcal{P}(E)$ qui ne sont pas des pavages de E sont :

$$\{\{a\}, \{b\}\}, \quad \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \quad \text{et} \quad \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$$

[Q]

3. (a) Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de parties de E .

Supposons par l'absurde que cette suite ne soit pas stationnaire.

En particulier, il existe un entier n_1 tel que $A_0 \subsetneq A_{n_1}$.

On peut donc choisir un élément a_1 dans $A_{n_1} \setminus A_0$.

De même, il existe un entier $n_2 > n_1$ tel que $A_{n_1} \subsetneq A_{n_2}$.

On peut alors choisir un élément a_2 dans $A_{n_2} \setminus A_{n_1}$.

L'étape suivante donne $n_3 > n_2$ tel que $A_{n_2} \subsetneq A_{n_3}$ et un élément a_3 dans $A_{n_3} \setminus A_{n_2}$.

On peut alors itérer indéfiniment ce procédé et construire une suite strictement croissante $0 < n_1 < n_2 < \dots$ d'entiers naturels et une suite d'éléments a_k de E distincts deux à deux par construction.

On arrive ainsi à une absurdité car l'ensemble E est fini.

Conclusion : toute suite croissante de parties de E est stationnaire.

La démonstration est évidemment analogue pour ce qui est des suites décroissantes de parties de E (on pourrait également utiliser un passage au complémentaire pour transformer la suite décroissante en une suite croissante.) [Q]

- (b) Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante (ou décroissante) de parties de E .

On sait que la suite $(A_n)_{n \geq 0}$ est *stationnaire* : $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, A_n = A_p$.

Dans ces conditions $\bigcup_{n \geq 0} A_n = A_p$ et $\bigcap_{n \geq 0} A_n = A_p$ sont encore des éléments de \mathcal{P} .

Ainsi, tout pavage de E est un pavage achevé. [Q]

4. (a) La réponse est non en général. En effet, supposons par exemple $E = \{a, b\}$.

Alors $\mathcal{P}_1 = \{\{a\}\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{\{b\}\}$ sont des pavages, mais pas $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 = \{\{a\}, \{b\}\}$. [Q]

- (b) La réponse est oui. Soient E un ensemble et $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ deux pavages de E .

Montrons que l'intersection $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est un pavage de E .

Soient A et B deux éléments de \mathcal{P} , donc des éléments de \mathcal{P}_1 et de \mathcal{P}_2 .

Puisque \mathcal{P}_1 est un pavage, $A \cup B$ et $A \cap B$ sont éléments de \mathcal{P}_1 .

Pour la même raison, ils sont dans \mathcal{P}_2 et finalement dans $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Conclusion : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est un pavage. [Q]

5. (a) On sait que $\mathcal{P}(E)$ lui-même est un pavage de E , et il est évidemment achevé.

Il contient bien sûr le pavage \mathcal{P} . Ainsi l'ensemble des pavages achevés contenant \mathcal{P} est non vide puisque $\mathcal{P}(E)$ en est un représentant. [Q]

- (b) Il faut montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage, et que ce pavage est achevé.

Notons $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ l'ensemble des pavages achevés de E qui contiennent \mathcal{P} .

La question précédente a montré que $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} \neq \emptyset$: plus précisément $\mathcal{P}(E) \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$.

– Soient A et B deux parties quelconques de E , toutes deux éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Il faut montrer que $A \cup B$ et $A \cap B$ sont encore des éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Soit \mathcal{Q} un pavage achevé quelconque contenant \mathcal{P} (c'est-à-dire un élément de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$).

Par définition de $\widehat{\mathcal{P}}$, on a l'inclusion $\widehat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{Q}$.

Les ensembles A et B sont donc des éléments de \mathcal{Q} . Puisque celui-ci est un pavage, $A \cup B$ et $A \cap B$ sont encore éléments de \mathcal{Q} .

Ainsi $A \cup B$ et $A \cap B$ sont éléments de tout pavage achevé de E contenant \mathcal{P} , c'est-à-dire de tout élément de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$.

Les ensembles $A \cup B$ et $A \cap B$ sont donc éléments de l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ c'est-à-dire éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Ainsi $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage de E . Remarque : cette démonstration généralise celle qui a été vue dans la question précédente, et on peut finalement annoncer qu'une intersection *quelconque* de pavages est un pavage.

- Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de parties de E , toutes éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.
 Si \mathcal{Q} est un pavage achevé de E contenant \mathcal{P} , les A_n sont éléments de \mathcal{Q} .
 Il en découle, par définition d'un pavage achevé, que $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ est élément de \mathcal{Q} .
 Ainsi cette réunion est élément de tous les pavages achevés \mathcal{Q} contenant \mathcal{P} , donc élément de l'intersection $\widehat{\mathcal{P}}$ de ceux-ci.
 On procéderait de même pour traiter le cas des suites $(A_n)_{n \geq 0}$ décroissantes.
 Conclusion : le pavage $\widehat{\mathcal{P}}$ est achevé.

[Q]

- (c) Soit \mathcal{Q} un pavage achevé contenant \mathcal{P} .

Avec les notations précédentes, \mathcal{Q} appartient à $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$.

Puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, il est contenu dans chacun d'eux, donc en particulier dans \mathcal{Q} .

Ainsi $\widehat{\mathcal{P}}$ est le plus petit, au sens de l'inclusion, des pavages achevés contenant \mathcal{P} . [Q]

- (d) Si $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$, alors \mathcal{P} est lui-même un pavage achevé.

Réciproquement, si \mathcal{P} est un pavage achevé, il est bien évidemment le plus petit, au sens de l'inclusion, des pavages achevés contenant \mathcal{P} : il est donc égal à $\widehat{\mathcal{P}}$.

Conclusion : $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}$ si et seulement si le pavage \mathcal{P} est achevé. [Q]

6. (a) Tout d'abord \mathcal{P}_m est bien une partie de $\mathcal{P}(E)$.

Soient X, Y deux éléments de \mathcal{P}_m .

Montrons que $X \cup Y$ et $X \cap Y$ sont dans \mathcal{P}_m .

Pour cela, on se donne un élément quelconque B de \mathcal{P} .

On a $(X \cup Y) \cap B = (X \cap B) \cup (Y \cap B)$ et $(X \cap Y) \cap B = X \cap (Y \cap B)$.

Par définition de \mathcal{P}_m , les ensembles $X \cap B$ et $Y \cap B$ sont éléments de \mathcal{P} .

Celui-ci étant un pavage, la réunion $(X \cap B) \cup (Y \cap B)$ est dans \mathcal{P} .

De même $\begin{cases} Y \cap B \in \mathcal{P} \\ X \in \mathcal{P}_m \end{cases} \Rightarrow X \cap (Y \cap B) \in \mathcal{P}$.

Ainsi, pour tout élément B de \mathcal{P} , $(X \cup Y) \cap B$ et $(X \cap Y) \cap B$ sont dans \mathcal{P} .

Cela signifie que $X \cup Y$ et $X \cap Y$ sont dans \mathcal{P}_m .

D'autre part, pour tout B de \mathcal{P} , on a : $\forall A \in \mathcal{P}, B \cap A \in \mathcal{P}$. cela signifie que les éléments B de \mathcal{P} sont aussi éléments de \mathcal{P}_m . Autrement dit \mathcal{P} est inclus dans \mathcal{P}_m .

Conclusion : l'ensemble \mathcal{P}_m est un pavage contenant \mathcal{P} . [Q]

- (b) On suppose maintenant que \mathcal{P} est achevé.

Montrons que \mathcal{P}_m est achevé.

Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante, pour l'inclusion, d'éléments de \mathcal{P}_m .

Il faut prouver que $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ est encore dans \mathcal{P}_m . Fixons B dans \mathcal{P} .

Il suffit de vérifier que $B \cap (\bigcup_{n \geq 0} A_n)$ est dans \mathcal{P} . Or $B \cap (\bigcup_{n \geq 0} A_n) = \bigcup_{n \geq 0} (B \cap A_n)$.

Pour chaque entier n , l'ensemble $B \cap A_n$ est élément de \mathcal{P} (définition de \mathcal{P}_m .)

De plus la suite des $B_n = B \cap A_n$ est croissante pour l'inclusion.

En effet, pour tout n de \mathbb{N} , on a l'implication $A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow B_n \subset B_{n+1}$.

On en déduit que $\bigcup_{n \geq 0} (B \cap A_n)$ est élément de \mathcal{P} (car \mathcal{P} est achevé.)

Ainsi $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ est un élément de \mathcal{P}_m .

On procéderait de même avec des intersections de suites décroissantes pour l'inclusion.

Conclusion : si le pavage \mathcal{P} est achevé, il en est de même du pavage \mathcal{P}_m . [Q]

Deuxième Partie

1. On sait que \emptyset et $\mathcal{P}(E)$ sont des pavages de E .

Que l'on note $\mathcal{P} = \emptyset$ ou $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$, l'implication $(A, B) \in \mathcal{P}^2 \Rightarrow A \cap \overline{B} \in \mathcal{P}$ est évidente (et dans le cas $\mathcal{P} = \emptyset$ c'est parce que l'assertion $(A, B) \in \mathcal{P}^2$ est fausse...)

Conclusion : \emptyset et $\mathcal{P}(E)$ sont des clans de E . [Q]

2. Dans la question 2 de la première partie, on a trouvé les pavages de E .

Il suffit donc d'éliminer les pavages qui ne sont pas des clans.

– Si $E = \emptyset$. Dans ce cas $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$.

Les clans de E sont $\mathcal{P} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$.

– Si $E = \{a\}$. Dans ce cas $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

Les clans de E sont $\mathcal{P} = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$, et $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$.

– Si $E = \{a, b\}$. Dans ce cas $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Les clans E sont :

$$\mathcal{P} = \emptyset \quad \mathcal{P} = \{\emptyset\} \quad \mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}\}$$

$$\mathcal{P} = \{\emptyset, \{b\}\} \quad \mathcal{P} = \{\emptyset, \{a, b\}\} \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$$

[Q]

3. Soit \mathcal{P} un clan de E . On sait déjà que \mathcal{P}_m est un pavage.

Il reste à prouver l'implication : $(X, Y) \in \mathcal{P}_m \Rightarrow X \cap \overline{Y} \in \mathcal{P}_m$.

On se donne donc deux éléments quelconques de X et Y de \mathcal{P}_m .

Soit A un élément de \mathcal{P} . Il faut prouver que $(X \cap \overline{Y}) \cap A$ appartient à \mathcal{P} .

Or $(X \cap \overline{Y}) \cap A = \overline{Y} \cap B$, où $B = X \cap A$ est un élément de \mathcal{P} .

D'autre part $B \cap \overline{Y} = B \cap (\overline{Y} \cup \overline{B}) = B \cap (\overline{Y \cap B})$.

L'ensemble $Y \cap B$ est dans \mathcal{P} car Y est dans \mathcal{P}_m et B est dans \mathcal{P} .

Puisque \mathcal{P} est un clan, l'intersection $B \cap \overline{(Y \cap B)}$ est un élément de \mathcal{P} .

Ainsi $X \cap \overline{Y}$ est dans \mathcal{P}_m . On en déduit que \mathcal{P}_m est un clan. [Q]

4. (a) On commence par prouver que \mathcal{E}_A est un pavage de E .

Pour cela, on se donne deux éléments X et Y de \mathcal{E}_A .

Il s'agit de prouver que $X \cup Y$ et $X \cap Y$ sont encore des éléments de \mathcal{E}_A .

$$- \text{ On a : } A \cap \overline{(X \cup Y)} = A \cap \overline{X} \cap \overline{Y} = (A \cap \overline{X}) \cap (A \cap \overline{Y}).$$

Par définition de \mathcal{E}_A , les ensembles $A \cap \overline{X}$ et $A \cap \overline{Y}$ sont éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Il en est donc de même de leur intersection, puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage.

On en déduit que $X \cup Y$ est un élément de \mathcal{E}_A .

$$- \text{ On a : } A \cap \overline{(X \cap Y)} = A \cap \overline{(X \cup Y)} = (A \cap \overline{X}) \cup (A \cap \overline{Y}).$$

Comme précédemment, les ensembles $A \cap \overline{X}$ et $A \cap \overline{Y}$ sont dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

Il en est de même de leur réunion, puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage.

On en déduit que $X \cap Y$ est un élément de \mathcal{E}_A .

On a donc prouvé que \mathcal{E}_A est un pavage de E . [Q]

- (b) Il faut maintenant prouver que \mathcal{E}_A est stable par passage à la réunion dans une suite croissante, et par passage à l'intersection dans une suite décroissante.

$$- \text{ Soit } (B_n)_{n \geq 0} \text{ une suite croissante d'éléments de } \mathcal{E}_A, \text{ et } B = \bigcup_{n \geq 0} B_n.$$

$$\text{ Il faut prouver } A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}. \text{ Or } A \cap \overline{B} = A \cap \left(\bigcap_{n \geq 0} \overline{B_n} \right) = \bigcap_{n \geq 0} (A \cap \overline{B_n}).$$

Pour chaque entier n , l'ensemble $A \cap \overline{B_n}$ est un élément de $\widehat{\mathcal{P}}$.

D'autre part, la suite des $A_n = A \cap \overline{B_n}$ est décroissante pour l'inclusion.

Puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est achevé, il en résulte que $\bigcap_{n \geq 0} (A \cap \overline{B_n})$ est un élément de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Ainsi $B = \bigcup_{n \geq 0} B_n$ est un élément de \mathcal{E}_A .

$$- \text{ Soit } (B_n)_{n \geq 0} \text{ une suite décroissante de parties de } \mathcal{E}_A, \text{ et } B = \bigcap_{n \geq 0} B_n.$$

Il faut prouver que $A \cap \overline{B}$ est dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

$$\text{ Or } A \cap \overline{B} = A \cap \left(\bigcup_{n \geq 0} \overline{B_n} \right) = \bigcup_{n \geq 0} (A \cap \overline{B_n}).$$

Les $A \cap \overline{B_n}$ forment une suite croissante d'éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est achevé, leur réunion $\bigcup_{n \geq 0} (A \cap \overline{B_n})$ est donc dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

Ainsi $B = \bigcap_{n \geq 0} B_n$ est un élément de \mathcal{E}_A .

Conclusion : le pavage \mathcal{E}_A est achevé. [Q]

(c) On suppose donc que A est un élément de \mathcal{P} .

Puisque \mathcal{P} est un clan, tout élément B de \mathcal{P} vérifie $A \cap \overline{B} \in \mathcal{P}$.

Et puisque \mathcal{P} est inclus dans $\widehat{\mathcal{P}}$, on a $A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}$, c'est-à-dire $B \in \mathcal{E}_A$.

On en déduit que le pavage \mathcal{P} est inclus dans le pavage achevé \mathcal{E}_A .

Or $\widehat{\mathcal{P}}$ est, au sens de l'inclusion, le plus petit des pavages achevés contenant \mathcal{P} .

Il en résulte l'inclusion $\widehat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{E}_A$. [Q]

(d) Il s'agit d'une question analogue aux questions (a) et (b).

– Soient X, Y dans \mathcal{F}_B . Montrons que $X \cup Y$ et $X \cap Y$ sont dans \mathcal{F}_B .

On a : $(X \cup Y) \cap \overline{B} = (X \cap \overline{B}) \cup (Y \cap \overline{B})$ et $(X \cap Y) \cap \overline{B} = (X \cap \overline{B}) \cap (Y \cap \overline{B})$.

Par définition de \mathcal{F}_B , les ensembles $(X \cap \overline{B})$ et $(Y \cap \overline{B})$ sont dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

Il en est donc de même de leur réunion et de leur intersection, car $\widehat{\mathcal{P}}$ est un pavage.

Ainsi $X \cup Y$ et $X \cap Y$ sont dans \mathcal{F}_B : celui-ci est donc un pavage de E .

– Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de parties de \mathcal{F}_B , et $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$.

Il faut prouver A est dans \mathcal{F}_B , c'est-à-dire que $A \cap \overline{B}$ est dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

Or $A \cap \overline{B} = \left(\bigcup_{n \geq 0} A_n \right) \cap \overline{B} = \bigcup_{n \geq 0} (A_n \cap \overline{B})$.

Les $A_n \cap \overline{B}$ forment une suite croissante d'éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est achevé, leur union est dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

Ainsi A est un élément de \mathcal{F}_B .

– Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de parties de \mathcal{F}_B , et $A = \bigcap_{n \geq 0} A_n$.

Il faut prouver A est dans \mathcal{F}_B , c'est-à-dire que $A \cap \overline{B}$ est dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

Or $A \cap \overline{B} = \left(\bigcap_{n \geq 0} A_n \right) \cap \overline{B} = \bigcap_{n \geq 0} (A_n \cap \overline{B})$.

Les $A_n \cap \overline{B}$ forment une suite décroissante d'éléments de $\widehat{\mathcal{P}}$.

Puisque $\widehat{\mathcal{P}}$ est achevé, leur intersection est dans $\widehat{\mathcal{P}}$.

Ainsi A est un élément de \mathcal{F}_B .

– Conclusion : \mathcal{F}_B est un pavage achevé de E .

[Q]

- (e) On suppose donc que B est un élément de $\widehat{\mathcal{P}}$. Montrons l'inclusion $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}_B$.
Pour cela, on se donne un élément quelconque A de \mathcal{P} .
On sait d'après la question (b) que $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans \mathcal{E}_A .
Autrement dit, l'élément B de $\widehat{\mathcal{P}}$ vérifie $A \cap \overline{B} \in \widehat{\mathcal{P}}$.
Un autre façon d'interpréter cette égalité est de dire que A est dans \mathcal{F}_B .
Ainsi \mathcal{P} est inclus dans le pavage achevé \mathcal{F}_B .
Mais $\widehat{\mathcal{P}}$ est le plus petit, pour l'inclusion, des pavages achevés contenant \mathcal{P} .
Il en résulte l'inclusion $\widehat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{F}_B$. [Q]
- (f) On se donne deux éléments A et B de $\widehat{\mathcal{P}}$.
On sait que $\widehat{\mathcal{P}}$ est inclus dans le pavage achevé \mathcal{F}_B . Donc $A \in \mathcal{F}_B$.
On en déduit que $A \cap \overline{B}$ est dans $\widehat{\mathcal{P}}$, ce qui prouve que $\widehat{\mathcal{P}}$ est un clan. [Q]