Exercice 1 [00591] [correction]
a) Etudier la courbe
$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 2t^3 \end{cases}$$
b) Donner une équation de la tangente et de la normale en $M(t)$.
c) Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à cette courbe.

Exercice 2 [00630] [correction]
Donner la nature de la conique d'équation
$$16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y = 0$$
Préciser les sommet, foyer et directrice.

Exercice 3 [01326] [correction]
Soient $a, b > 0$ et Φ l'arc défini par $x(t) = a\cos^3 t$ et $y(t) = b\sin^3 t$ pour $t \in \mathbb{R}$.
a) Tracer Φ.
b) Quelle est la longueur de l'arc ?
c) Donner le rayon de courbure de Φ et lieu des centres de courbures.

Exercice 4 [01562] [correction]
Soient $A(1, 0)$ et $B(0, 2)$ dans un repère orthonormé (Oxy).
Déterminer une équation cartésienne de la parabole passant par A et B, et tangente respectivement à (Ox) et (Oy) en ces points.

Exercice 5 [02918] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Si $x \in \mathbb{R}^+$, on note P_x le point intersection de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x avec Ox.
a) Montrer, si $\overrightarrow{OP_x}$ a une limite quand $x \to +\infty$ que le graphe de f a une asymptote.
b) Montrer, par un contre-exemple, que la réciproque de a) est fausse.

Exercice 6 [02920] [correction]
Calculer la longueur de la courbe d'équation polaire $(a > 0)$
$$r = a(1 + \cos\theta)$$

Exercice 7 [02921] [correction]
Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation polaire
$$r = \sqrt{\cos(2\theta)}$$
a) Tracer $\mathcal{C}$.
b) Calculer la courbure aux points où elle est définie.
c) Calculer l'aire délimitée par la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 8 [02930] [correction]
Donner l'équation réduite et la nature de la conique donnée par
$$x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 2y + 1 = 0$$

Exercice 9 [02932] [correction]
Soient des réels a, b, a', b'. Montrer que les courbes d'équation respectives
$$(ax + by)^2 + (a'x + b'y)^2 = 1 \text{ et } (ax + a'y)^2 + (bx + b'y)^2 = 1$$
sont isométriques.

Exercice 10 [02933] [correction]
Reconnaître et tracer la courbe d'équation
$$13x^2 - 32xy + 37y^2 = 5$$

Exercice 11 [03064] [correction]
[Astroïde]
a) Etudier et représenter la courbe définie par
$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$
b) Trouver le lieu des points H tels que H est le projeté orthogonal de O sur la normale à la courbe en un point donné

Exercice 12 [02935] [correction]
Reconnaître la surface d'équation

$$z = x^2 - y^2$$

Exercice 13 [02936] [correction]
Soit a un réel. Déterminer la surface balayée par les droites parallèles au plan $y + z = 0$ qui coupent les droites

$$\{x + y = a; z = 0\} \text{ et } \{z = a; x = 0\}$$

Exercice 14 [02937] [correction]
Reconnaître et réduire la quadrique d'équation :

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 4x - 2y - z + 3 = 0$$

Exercice 15 [02938] [correction]
Reconnaître, si $\alpha \in \mathbb{R}$, la quadrique d'équation :

$$x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 4xy + 2xz - 8yz + \alpha x + 2y - z = 1$$

Exercice 16 [03202] [correction]
Montrer que la surface d'équation

$$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz - 14 = 0$$

est un cylindre dont on précisera l'axe et le rayon.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) L'application $t \mapsto M(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à (Ox).
Etude limitée à $[0, +\infty[$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe (Ox)

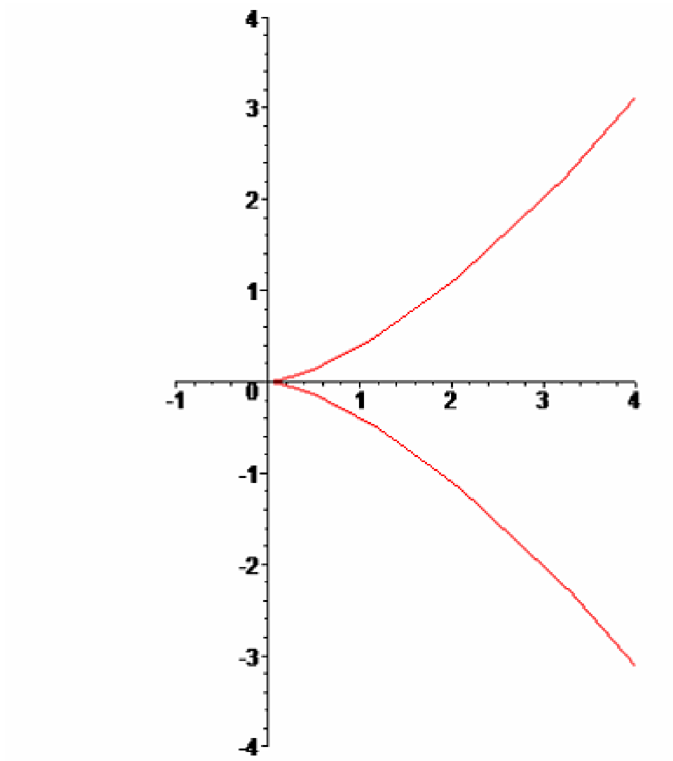
$$\begin{cases} x'(t) = 6t \\ y'(t) = 6t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \\ y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \end{cases}$$

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	$+$	
$m(t)$	$?$	$+$	

Etude en $t = 0$
$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 + 0.t^3 \\ y(t) = 0.t^2 + 2t^3 \end{cases}$$
$p = 2$, $q = 3$, $\vec{u}\left|\begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}\right.$, $\vec{v}\left|\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}\right.$
$M(0)$ est point de rebroussement de première espèce avec tangente horizontale.
Etude quand $t \to +\infty$
$\frac{y(t)}{x(t)} \to +\infty$ et $x(t) \to +\infty$
Il y a une branche parabolique verticale.

```
plot([3*t^2,2*t^3,t=-5..5],view=[-1..4,-4..4]);
```



La courbe $x = 3t^2, y = 2t^3$

b) Pour $t \neq 0$, la tangente $\mathcal{D}_t$ en $M(t)$ a pour équation
$$-t^2(x - 3t^2) + t(y - 2t^3) = 0$$
soit
$$tx - y = t^3$$
Pour $t \neq 0$, la normale $\mathcal{N}_t$ en $M(t)$ a pour équation
$$t(x - 3t^2) - t^2(y - 2t^3) = 0$$
soit
$$tx - t^2 y = 3t^3 - 2t^5$$
Ces équations sont encore valables pour $t = 0$.
c) La tangente $\mathcal{D}_t$ est normale à la courbe au point $M(\tau)$ si, et seulement si,
$$\begin{cases} 3t\tau^2 - 2\tau^3 = t^3 \\ t\tau + t^2\tau^2 = 0 \end{cases}$$

ce qui traduit $M(\tau) \in \mathcal{D}_t$ et l'orthogonalité des tangentes en $M(t)$ et $M(\tau)$.
Si $t = 0$ alors $\tau = 0$ mais le couple $(0, 0)$ n'est pas solution.
Si $t \neq 0$ alors $\tau \neq 0$ et $\tau = -1/t$ puis $\frac{3}{t} + \frac{2}{t^3} = t^3$ d'où $(t^2+1)^2(t^2-2) = 0$
ce qui donne $t = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

Exercice 2 : [énoncé]
La matrice $\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 0 et 25.
Posons $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{\imath} + \frac{4}{5}\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{\jmath}$ vecteurs propres unitaires associées à ces valeurs propres.
Dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{u}, \vec{v})$ l'équation de Γ est

$$25y^2 - 50y - 25x = 0$$

soit encore

$$(y-1)^2 = x + 1$$

Γ est la parabole de sommet $S \left| \begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array} \right.$, d'axe focal $(S; \vec{u})$ et de paramètre $p = 1/2$.
Le foyer est $F = S + \frac{1}{2}\vec{u}$ et la directrice passe par $K = S - \frac{1}{2}\vec{u}$ et est dirigée par $\vec{v}$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) L'application $t \mapsto M(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$M(t + 2\pi)$ et $M(t)$ sont confondus.
$M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox)
$M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Oy)
On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0, \pi/2]$. La courbe obtenue sera complétée par les symétries d'axe (Oy) puis (Ox).
Tableau des variations simultanées

$$\begin{cases} x'(t) = -3a \sin t \cos^2 t \\ y'(t) = 3b \cos t \sin^2 t \end{cases}$$

t	0		$\pi/2$
$x'(t)$	0	$-$	0
$x(t)$	a	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	b
$y'(t)$	0	$+$	0
$m(t)$	?	$-$	-1

Etude en $t = 0$
Quand $t \to 0$

$$\begin{cases} x(t) = a - \dfrac{3}{2}at^2 + 0.t^3 + o(t^3) \\ y(t) = 0.t^2 + bt^3 + o(t^3) \end{cases}$$

$p = 2$, $q = 3$, $\vec{u} \left| \begin{array}{l} -1 \\ 0 \end{array} \right.$ et $\vec{v} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right.$.
La tangente est horizontale et il y a point de rebroussement de première espèce.
Etude en $t = \pi/2$.
On obtient une tangente verticale et un point de rebroussement de première espèce.
L'allure de Φ est celle d'une astroïde transformée par affinité.
b) On a

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3\left|\cos t \sin t\right| \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$$

donc

$$L = 12 \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \, \mathrm{d}t$$

Si $a = b$ alors $L = 6a$.
Si $a \neq b$ alors pour fixer les idées, supposons $a > b$.
Puisque $\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin t^2} = \sqrt{(a^2 - b^2)\cos^2 t + b^2}$ et puisque $\left((\cos t)^2\right)' = -2 \sin t \cos t$, on a

$$L = \frac{4}{a^2 - b^2} \left[\left((a^2 - b^2)\cos^2 t + b^2\right)^{3/2}\right]_0^{\pi/2} = 4\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$$

et cette relation est encore valable si $a < b$.
c) Calculons la courbure en un point régulier de paramètre $t \in]0, \pi/2[$. La courbure en les autres points se déduira par symétrie.
Les vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$ de la base de Frénêt sont

$$\vec{T} \left| \begin{array}{l} -\dfrac{a \sin t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \\ \dfrac{b \cos t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \end{array} \right. \text{ et } \vec{N} \left| \begin{array}{l} \dfrac{b \cos t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \\ \dfrac{a \sin t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \end{array} \right.$$

La relation $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma \vec{N}$ permet de calculer γ. On obtient

$$\gamma = \frac{-ab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$$

Les centres de courbures sont donnés par

$$I(t) = M(t) + \frac{1}{\gamma(t)}\vec{N}(t)$$

Exercice 4 : [énoncé]
Soit $\mathcal{P}$ une parabole solution. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey = k$$

avec $ac - b^2 = 0$ car $\mathcal{P}$ est une conique dégénérée.
Puisque les tangentes (Ox) et (Oy) sont sécantes en O, la parabole $\mathcal{P}$ ne passe pas O et donc $k \neq 0$. En divisant les coefficients inconnus a, b, c, d, e par k, on peut supposer $k = 1$.
Puisque $A \in \mathcal{P}$, on a

$$a + 2d = 1$$

Par dédoublement, la tangente en A à $\mathcal{P}$ a pour équation

$$ax + by + d(x+1) + ey = 1$$

Cette droite correspond à l'axe (Ox) si, et seulement si,

$$\begin{cases} d = 1 \\ a + d = 0 \\ b + e \neq 0 \end{cases}$$

On en déduit $a = -1$ et $d = 1$.
L'étude similaire en B donne

$$\begin{cases} 4c + 4e = 1 \\ e = 1/2 \\ 2c + e = 0 \\ 2b + d \neq 0 \end{cases}$$

On en déduit $c = -1/4$ et $e = 1/2$.
Enfin la condition $ac - b^2 = 0$ donne $b = \pm 1/2$.
Or $b + e \neq 0$ (ou $2b + d \neq 0$) impose $b \neq -1/2$ et il reste $b = 1/2$.
Au final

$$\mathcal{P} : -x^2 + xy - \frac{1}{4}y^2 + 2x + y = 1$$

Inversement, cette parabole est solution.

Exercice 5 : [énoncé]
a) L'abscisse de P_x est $x - f(x)/f'(x)$. L'hypothèse posée signifie donc

$$x - f(x)/f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$$

Ainsi, on peut écrire

$$f(x)/f'(x) = x - \ell + o(1)$$

Pour $x \to +\infty$, $x - \ell + o(1) \to +\infty$ et donc, il existe $a \in \mathbb{R}^+$, tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \geqslant a$.
On peut alors passer à l'inverse et écrire

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} + \frac{\ell}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

puis en intégrant de a à x on obtient

$$\ln|f(x)| - \ln|f(a)| = \ln x - \ln a - \frac{\ell}{x} + \frac{\ell}{a} + \int_a^x o\left(\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_a^x o\left(\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} o\left(\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t - \int_x^{+\infty} o\left(\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_x^{+\infty} o\left(\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc la relation précédente donne $\ln|f(x)| = \ln x + C^{te} - \frac{\ell}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
puis $|f(x)| = \mathrm{e}^C x \mathrm{e}^{-\frac{\ell}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} = \mathrm{e}^C x\left(1 - \frac{\ell}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.
Enfin puisque f est de signe constant sur $[a, +\infty[$ (car continue et ne s'annulant pas), on obtient une relation de la forme $f(x) = \alpha x + \beta + o(1)$ qui donne la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ asymptote à graphe de f en $+\infty$.
b) Considérons $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$. La droite d'équation $y = x$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ et $x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 + x\sin x}{x^2 + x\cos x - \sin x} = \frac{x^2\cos x - 2x\sin x}{x^2 + x\cos x - \sin x}$.
Pour $x = 2n\pi$, $x - \frac{f(x)}{f'(x)} \xrightarrow[n\infty]{} 1$ et pour $x = (2n+1)\pi$, $x - \frac{f(x)}{f'(x)} \xrightarrow[n\infty]{} -1$.
Ceci fournit un contre-exemple.

Exercice 6 : [énoncé]
On a $r'(\theta) = -a\sin\theta$ donc

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

puis

$$L = 2\int_{-\pi}^{\pi} a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} a\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 8a$$

Exercice 7 : [énoncé]

a) $r:\theta\mapsto r(\theta)=\sqrt{\cos 2\theta}$ est définie et continue sur les intervalles $[-\pi/4,\pi/4]+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

La fonction r est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les intervalles $]-\pi/4,\pi/4[+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

$r(\theta+\pi)=r(\theta)$ donc $M(\theta+\pi)$ est l'image du point $M(\theta)$ par la symétrie de centre O.

$r(-\theta)=r(\theta)$ donc $M(-\theta)$ est l'image du point $M(\theta)$ par la symétrie d'axe (Ox)

On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0,\pi/4]$. La courbe obtenue sera complétée par les symétries de centre O et d'axe (Ox).

On a le tableau de variation

θ	0		$\pi/4$
$r(\theta)$	1	$\searrow$	0

Etude en $\theta=0$.

$r(0)=1$ et $r'(0)=0$.

Il y a une tangente orthoradiale.

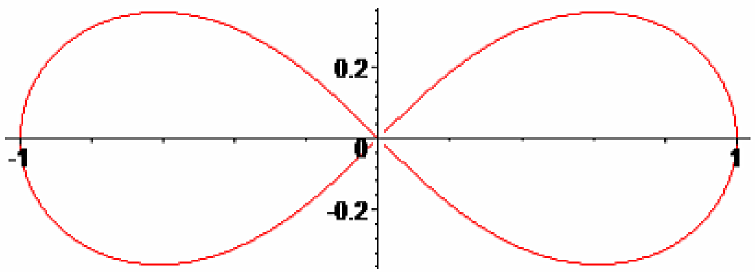
Etude en $\theta=\pi/4$.

$r(\pi/4)=0$, il s'agit d'un passage par l'origine.

θ		$\pi/4$	
$r(\theta)$	$+$	0	$\|\|$

Il y a une demi-tangente en $M(\pi/4)=O$ qui est la droite d'équation polaire $\theta=\pi/4$.

```
plot([sqrt(cos(2*t)),t,t=0..2*Pi],coords=polar,numpoints=200,xtickmarks=3,ytickmarks=3);
```



Lemniscate de Bernoulli

b) On a

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

Une détermination angulaire α s'obtient par $\alpha=\theta+V$ avec

$$\begin{cases}\cos V=-\sin 2\theta\\ \sin V=\cos 2\theta\end{cases}$$

$V=\frac{\pi}{2}+2\theta$ convient puis $\alpha=\frac{\pi}{2}+3\theta$.

On en déduit

$$\gamma=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=3\sqrt{\cos 2\theta}$$

c) L'aire délimitée par $\mathcal{C}$ peut-être calculée par une intégrale curviligne en prenant soin de considérer un parcours en sens direct de la courbe.

Pour θ allant de $-\pi/4$ à $\pi/4$, la boucle de droite est parcourue en sens direct et par considération de symétrie

$$\mathcal{A}=\oint_\Gamma \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta=2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta=1$$

Exercice 8 : [énoncé]

La forme quadratique sous-jacente a pour valeurs propres $\frac{3\pm\sqrt{10}}{2}$. C'est une conique à centre.

Par annulation des dérivées partielles, le centre est $\Omega\left|\begin{array}{l}2\\-1\end{array}\right.$.

On obtient l'équation réduite

$$\frac{\sqrt{10}-3}{2}x^2-\frac{3+\sqrt{10}}{2}y^2=1$$

La conique étudiée est une hyperbole.

Exercice 9 : [énoncé]

Les deux courbes sont des coniques.

Pour réduire la première, on étudie la matrice

$$\begin{pmatrix}a^2+a'^2 & ab+a'b'\\ ab+a'b' & b^2+b'^2\end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$X^2-2X(a^2+a'^2+b^2+b'^2)+(ab'-a'b)^2$$

La réduction de la deuxième conique conduit au même polynôme caractéristique. Il existe donc deux repères orthonormés d'origine O dans lesquels ces deux courbes sont définies par la même équation réduite. Ces courbes sont donc isométriques.

Exercice 10 : [énoncé]
On réduit la matrice $\begin{pmatrix} 13 & -16 \\ -16 & 37 \end{pmatrix}$ de valeurs propres 5 et 45.
C'est une conique à centre
Pour $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} - 2\vec{j})$, dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ la courbe a pour équation :

$$x^2 + 9y^2 = 1$$

On reconnaît une ellipse d'axe focal $(O; u)$ déterminée par $a = 1$ et $b = 1/3$.

Exercice 11 : [énoncé]
a) L'application $t \mapsto M(t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$M(t + 2\pi)$ et $M(t)$ sont confondus.
$M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox)
$M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Oy)
$M(\pi/2 - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à la droit $\Delta : y = x$.
On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0, \pi/4]$. La courbe obtenue sera complétée par les symétries d'axe Δ, (Oy) puis (Ox).
Tableau des variations simultanées

$$\begin{cases} x'(t) = -3\sin t \cos^2 t \\ y'(t) = 3\cos t \sin^2 t \end{cases}$$

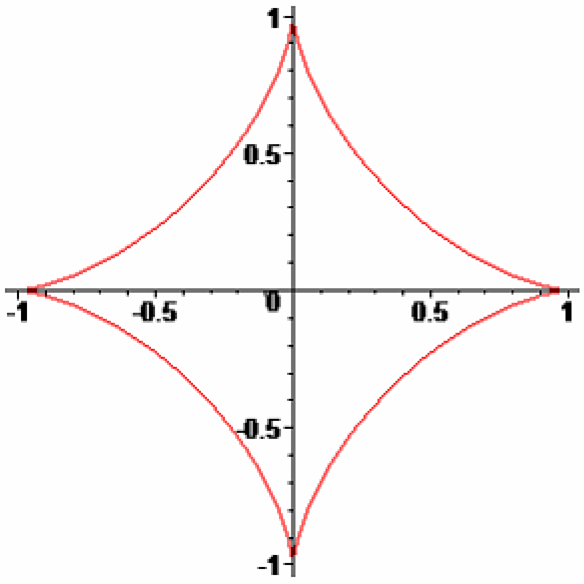
t	0		$\pi/4$
$x'(t)$	0	$-$	$-3/\sqrt{8}$
$x(t)$	1	$\searrow$	$2^{-3/2}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$2^{-3/2}$
$y'(t)$	0	$+$	$3/\sqrt{8}$
$m(t)$	?	$-$	-1

Etude en $t = 0$
Quand $t \to 0$

$$\begin{cases} x(t) = 1 - \dfrac{3}{2}t^2 + 0.t^3 + o(t^3) \\ y(t) = 0.t^2 + t^3 + o(t^3) \end{cases}$$

$p = 2$, $q = 3$, $\vec{u} \begin{vmatrix} -3/2 \\ 0 \end{vmatrix}$ et $\vec{v} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$.
La tangente est horizontale et il y a point de rebroussement de première espèce.

```
plot([cos(t)^3,sin(t)^3,t=0..2*Pi]);
```



L'astroïde

b) En un point régulier $M(t)$ la normale étant la droite perpendiculaire en $M(t)$ à la tangente en ce point qui est dirigée par le vecteur vitesse, cette droite à pour équation

$$x'(t)\,(x - x(t)) + y'(t)\,(y - y(t)) = 0$$

Après simplification, on obtient l'équation

$$-\cos(t)x + \sin(t)y + \cos(2t) = 0$$

et cette équation est encore valable lorsque le point $M(t)$ n'est par régulier.
Le projeté orthogonal du point O sur cette droite est un point H de coordonnées (x_0, y_0) vérifiant

$$\begin{cases} -\cos(t)x_0 + \sin(t)y_0 + \cos(2t_0) = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{cases}$$

C'est le point de coordonnées

$$\begin{cases} x_0 = \cos(2t)\cos(t) \\ y_0 = -\cos(2t)\sin(t) \end{cases}$$

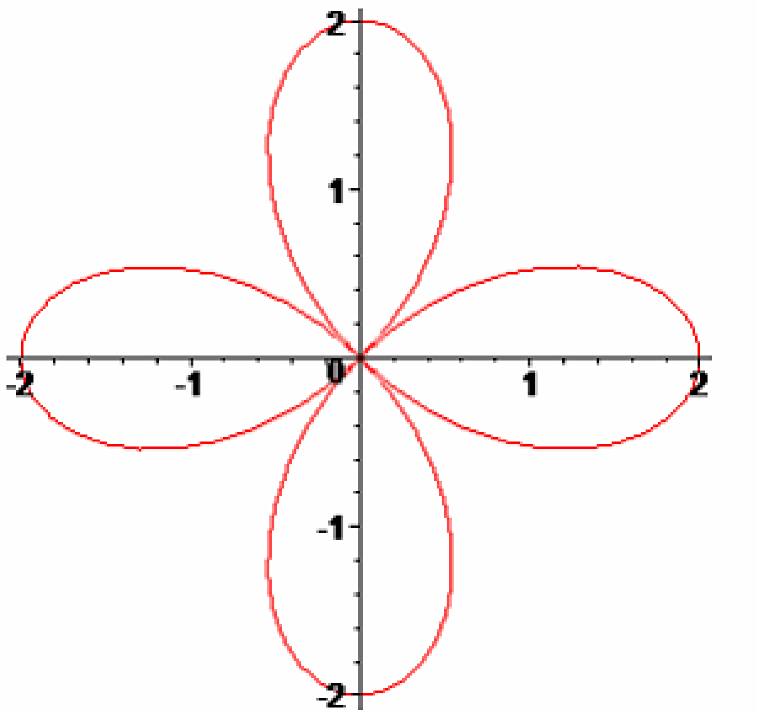
Le lieu des points H apparaît alors comme étant la courbe d'équation polaire

$$r = \cos(2t)$$

$r(t+\pi) = r(t)$, $r(-t) = r(t)$ et $r(\pi/2 - t) = -r(t)$.
On peut limiter l'étude à l'intervalle $[0, \pi/4]$ et l'on complète la courbe par :
– la symétrie orthogonale par rapport à la perpendiculaire à la droite d'équation $\theta = \pi/4$;
– la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses ;
– la symétrie de centre O.
Le tableau de variation de la fonction r est

t	0		$\pi/4$
$r(t)$	1	$\searrow$	0

En $\theta = 0$
$r(0) = 1, r'(0) = 0$, il y a une tangente orthoradiale.
En $\theta = \pi/4$
$r(\pi/4) = 0$, il y a passage par l'origine, la tangente est la droite d'équation polaire $\theta = \pi/4$.



La courbe d'équation polaire $r = \cos(2\theta)$

Exercice 12 : [énoncé]
C'est un paraboloïde hyperbolique.

Exercice 13 : [énoncé]
Soient A et B deux points parcourant les droites proposées : $A(t, a-t, 0)$ et $B(0, t', a)$.
On a $\overrightarrow{AB}(-t, t+t'-a, a)$. La droite (AB) est parallèle au plan $y+z=0$ si, et seulement si, $t+t'=0$.
La droite (AB) est alors déterminée par le paramétrage

$$\begin{cases} x = -\lambda t \\ y = -t - \lambda a \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = a + \lambda a \end{cases}$$

Par élimination, la surface balayée par les droites (AB) est celle d'équation

$$(z-a)(y+z-a) - ax = 0$$

C'est l'équation d'un paraboloïde hyperbolique.

Exercice 14 : [énoncé]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}A = \{0, 2, 3\}$.
Soient $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$, $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(i-j+k)$ et $w = \frac{1}{\sqrt{6}}(-i+j+2k)$.
Dans le repère orthonormé $(O; u, v, w)$, l'équation de la quadrique est :

$$2x^2 + 3y^2 + \sqrt{2}x + \frac{5}{\sqrt{3}}y + \frac{8}{\sqrt{6}}z + 3 = 0$$

Après translation d'origine, c'est un paraboloïde elliptique.

Exercice 15 : [énoncé]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}A = \{-5, 0, 6\}$
Soient $u = \frac{1}{\sqrt{6}}(i - 2j + k)$, $v = \frac{1}{\sqrt{5}}(j + 2k)$, $w = \frac{1}{\sqrt{30}}(5i + 2j - k)$.
Dans le repère orthonormé $(O; u, v, w)$, l'équation de la quadrique est :

$$6x^2 - 5y^2 - \frac{5-\alpha}{\sqrt{6}}x + \frac{\sqrt{30}(1+\alpha)}{6}z = 1$$

Si $\alpha \neq -1$, on obtient un paraboloïde hyperbolique.
Si $\alpha = -1$, on obtient un cylindre de base la conique d'équation

$$6x^2 - 5y^2 - \sqrt{6}x = 1$$

qui après réduction est une hyperbole.

Exercice 16 : [énoncé]
La surface étudiée est une quadrique et la forme quadratique associée a pour matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Après réduction, on obtient
$$\mathrm{Sp}A = \{0, 14\}$$

et la forme quadratique a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

dans la base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ avec

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right), \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} - j) \text{ et } \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{60}}(3\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k})$$

Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, la surface a pour équation

$$y^2 + z^2 = 1$$

et c'est donc un cylindre d'axe $(O; \vec{u})$ et de rayon 1.