X-option MP*

Planche 1

I) Caractériser les polynômes P tels que :
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ P(A) = 0 \Rightarrow \mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z}$.
II) Soit f un endomorphisme diagonalisable d'une espace vectoriel E de dimension finie ; montrer que tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par f.

Planche 2

I) Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$; on note $\|\, f \,\| = \left(\displaystyle\int_0^1 |\, f(t)\,|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$, pour $f \in E$.
Soit ϕ, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ telle que ϕ'' soit bornée, on note $T(f) = \displaystyle\int_0^1 \phi\big(f(t)\big)\mathrm{d}t$ pour $f \in E$. Montrer que l'application T ainsi définie est continue sur E. Après avoir rappelé la définition de la différentiabilité, montrer que T est différentiable en tout point de E.
II) Soit G un groupe multiplicatif dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que toutes les matrices de G ont même rang.
Montrer que toute matrice A de G de rang r est semblable à une matrice par blocs $\begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $A_r \in GL_r(\mathbb{R})$, et que la matrice de passage est la même pour toutes les matrices de G.

Planche 3

I) Trouver trois réels a, b, c tels que $\displaystyle\int_0^1 \big(\ln(t) - a - bt - ct^2\big)^2 \mathrm{d}t$ soit minimale.
II) Déterminer la limite, pour $(x,y) \in [0,1[^2$, (x,y) tendant vers $(1,1)$ de $(1-xy^2)(1-x^2y) \displaystyle\sum_{1/2 \leqslant m/n \leqslant 2} x^m y^n$.
III) Soit la suite définie par $x_0 = 4$; $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = 3$ et $\forall n \geqslant 0$, $x_{n+4} = x_{n+1} + x_n$; montrer que pour tout p premier, p divise x_p.

Planche 4

Déterminer les solutions de l'équation différentielle
$$xf'(x) + \lambda f(x) = \frac{1}{x+1}\cdot$$
Trouver les solutions qui ont une limite finie en 0.
Trouver les solutions développables en série entière.
Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}\cdot$

Planche 5

Soit F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E vérifiant $E = F \oplus G = F \oplus H$. Que peut-on dire de G et H ? Peut-on montrer une réciproque ? (on pourra traiter séparément les cas de la dimension finie et infinie, et montrer qu'en dimension infinie la réciproque n'est vraie que si la restriction à $G \cap H$ de l'isomorphisme entre G et H est l'identité).

Planche 6

Soit le fermé $D \in \mathbb{R}^2$ défini par les inéquations $a \leqslant \rho \leqslant b$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$, avec $b > a > 0$ donnés. Chercher R et Φ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $(x,\, y) \in D \longmapsto V(x,\, y) = R(\rho)\Phi(\theta)$ vérifie sur D

l'équation aux dérivées partielles $\rho^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \rho \dfrac{\partial V}{\partial \rho} - \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$, avec pour conditions au bord $V(\rho,\, 0) = V(\rho,\, \frac{\pi}{4}) = 0\,;\ V(a,\, \theta) = V(b,\, \theta) = 0$.

Planche 7

Soit un irrationnel α, et $k \in \mathbb{Z}$.

Étudier la limite de $\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \exp(2i\pi k n \alpha)$ quand $N \to +\infty$.

Pour f 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux,étudier la limite de $\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} f(n\alpha)$.

Soit $a \in \,]0, 1[$ et g 1-périodique valant 1 sur $[0, a]$ et 0 sur $]a, 1[$.

Étudier la limite de $\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} g(n\alpha)$.

Planche 8

I) Trouver les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $y'' = |\, y\,|$.

II) Montrer que si u est un endomorphisme de norme 1 d'un espace vectoriel normé E, $E = \mathrm{Ker}(u - id) \oplus \mathrm{Im}(u - id)$.

Trouver $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\,(x + u(x) + \ldots + u^k(x))$.

Planche 9

Soit A une partie finie d'un espace vectoriel normé E sur un corps infini, ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe une forme linéaire qui ne s'annule pas sur A.

Planche 10

On donne M matrice réelle symétrique d'ordre n. Quels sont les extrema du rang d'une matrice A réelle d'ordre n telle que ${}^tA + A = M$?

