X-option MP*

Planche 1

I) Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\| A \| = \sum_{i,j} | a_{ij} |^2$.

Soit U unitaire ($UU^* = I_n$). Montrer que $\| UA \| = \| AU \| = \| A \|$.
Montrer qu'il existe une matrice V unitaire telle que $V^{-1}AV$ soit triangulaire supérieure.

On note λ_i les valeurs propres de A et $\Omega = \{P^{-1}AP, P \in GL_n(\mathbb{C})\}$; Montrer que $\inf_{M \in \Omega} \| M \| \geqslant \sum_{i=1}^{n} | \lambda_i |^2$.

II) Soit K continue sur $[0,1]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $| K(x,y) | < 1$. Montrer qu'il existe f continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) + \int_0^1 K(x,y) f(y) \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Planche 2

Donner le nombre de surjections de $[1, n+1]$ dans $[1, n]$.
Donner le nombre $S_{k,n}$ de surjections de $[1, k]$ dans $[1, n]$ (on cherchera une relation de récurrence et une idée permettant d'exprimer $S_{k,n}$ en fonction des $S_{k,p}$, $p \in [1, n-1]$).

Planche 3

Déterminer le groupe des homographies $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ avec $ad - bc \neq 0$ qui envoient le disque unité sur lui-même.

Planche 4

I) Quelle est la figure obtenue à partir des milieux des côtés d'un quadrangle $ABCD$ du plan ?
On note G l'isobarycentre de A, B, C, D. Montrer que $ABCD$ est orthocentrique (c'est à dire que l'un des 4 points est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres) si et seulement si G est à égale distance des milieux de AB, AC, AD, BC, BD, CD.
II) Une droite D du plan complexe le sépare en deux demi-plans H_1 et H_2. Montrer que pour tout polynôme complexe P non constant, il existe $x \in H_1$ tel que si $P'(x) = 0$ alors $P(H_1) = \mathbb{C}$.

Planche 5

I) Soient a, b, c trois complexes de module 1. On considère le triangle dont les sommets ont pour affixe $a+b$, $b+c$, $c+a$.
1. Position du centre du cercle circonscrit à ce triangle ? De son orthocentre ? [Question en cours de route : définir l'orthocentre et montrer son existence unique].

2. Retrouver la droite d'Euler, en montrant que l'orthocentre du triangle des milieux des côtés d'un triangle est le centre du cercle circonscrit au triangle.
3. Soit $ABCD$ un quadrangle (ou tétraèdre). Figure du quadrangle des milieux des côtés ? On le prend maintenant orthocentrique. Soit G le milieu des diagonales. Montrer que G est le milieux de 6 segments, reliant les sommets et les milieux.

II) Existence et valeur du produit $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Planche 6

I) Soit une partie S de $\mathbb{C}$, et A l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients complexes ayant tous leurs pôles dans S. Montrer que A est un anneau commutatif. Décrire ses idéaux.

II) Soit une suite réelle (a_n) telle que $\lim a_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$. Quel est le comportement asymptotique de la suite (a_n) ?

III) Soit une matrice A dans $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$, de rang $2n$ et de cube nul. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme (par blocs) : $\begin{pmatrix} O & I_n & O \\ O & O & I_n \\ O & O & O \end{pmatrix}$.

Planche 7

Soit Δ l'endomorphisme de $K[X]$ qui à un polynôme P associe $P(X+1)-P(X)$. Soit f un endomorphisme de $K[X]$ qui commute avec Δ.

1. Montrer qu'il existe une suite (a_n) déléments de K telle que l'on puisse écrire $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Delta^n$, en un sens qu'on précisera.

2. Que dire lorsque f est l'endomorphisme de dérivation ?

Planche 8

I) Soit une suite réelle (a_n), et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, enfin $\sigma_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_k$. On suppose que cette dernière suite est convergente.

1. Montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.

2. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Existence et valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$?

Planche 9

I) Montrer que la suite de terme général $\dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ converge vers une limite non nulle, sans utiliser la formule de Stirling.

II) On se donne dans le plan euclidien deux points A et B d'affixes a et b. Trouver une application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout point P du plan, d'affixe z, le point d'affixe $f(z)$ soit le symétrique de P par rapport à la droite AB.
Montrer que pour tout triangle ABC les symétriques de l'orthocentre par rapport à chacun des côtés sont sur le cercle circonscrit.

Planche 10

I) Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni d'une norme quelconque. On note $B(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r, et $S(a,r)$ la sphère de centre a et de rayon r. On considère une fonction f de $\overline{B(a,r)}$ dans $\mathbb{R}$, continue et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $B(a,r)$.
Montrer que f atteint son maximum et son minimum.
On suppose que le laplacien de f est strictement positif sur $B(a,r)$. Montrer que f atteint son maximum sur $S(a,r)$.
Même question lorsque le laplacien est positif ou nul.

II) Soit une suite (u_n) de réels strictement positifs telle qu'il existe un entier p strictement supérieur à 1, tel que pour tout n, $u_n u_{n+1} u_{n+2}^p + u_{n+2} - u_n = 0$. Montrer que la suite (u_n) tend vers une limite finie.

III) Soit une fonction f définie sur un espace normé E et à valeurs réelles, uniformément continue. Montre qu'il existe des réels a et b tels que, pour tout x, $|f(x)| \leqslant a \parallel x \parallel + b$.

Planche 11

Soit dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ une conique située dans le plan d'équation $z = 0$. Trouver l'ensemble des points M tels qu'il existe un trièdre orthogonal de sommet M et s'appuyant sur la conique.

Planche 12

Étudier (u_n) telle que $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}$.

Planche 13

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; on suppose que, pour $X \in \mathbb{C}^n$, $\overline{{}^tX}AX = \overline{{}^tXB}X = 0 \Longrightarrow X = 0$.
Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\overline{{}^tP}AP$ et $\overline{{}^tP}BP$ soient triangulaires supérieures.

Planche 14

Montrer que $E = \{x + y\sqrt{2} \,|\, (x,\, y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } x^2 - 2y^2 = 1\}$ est un sous-groupe monogène de $\mathbb{R}^*$. Montrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Planche 15

Soit f k-lipschitzienne de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $g(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$ est un C^2-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
Soit f de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(\theta + 2\pi) - f(\theta) \in 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
À quelle condition existe-t-il une fonction g différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $g(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r\cos f(\theta), r\sin f(\theta))$ pour tout couple (r,θ) ?

Planche 16

Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{C}$ telle que $\sum |\, a_n\,|^2$ converge.
Montrer que $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$ converge pour $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Montrer que $\forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, f peut s'écrire $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t_n$.
Montrer que si $f(t) = 0$, $\forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, alors $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.
Calculer le rayon de convergence de la série entière.

Planche 17

Soit F un sous-groupe de $(\mathbb{Z}^n, +)$ tel que $d\mathbb{Z}^n \subset F$, $d \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il existe $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$, base de $\mathbb{R}^n$ et base de F.
Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Q})$.
Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\{P^{-1}AP, A \in G\}$ soit un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{Z})$.

Planche 18

Étude de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{(2^n-1)}}{1 + x^{(2^n)}}$.

Planche 19

Soit a, b des réels strictement positifs, x solution de $x'' + 2ax' + bx = 0$. Limite de x en $+\infty$? Étudier les solutions.
Comment construire une solution périodique ?

Planche 20

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et telle que il existe a, b continues de J dans $\mathbb{R}^+$ telles que, pour tout (t, y), $\big(f(t, y)|y\big) \leqslant a(t) \parallel y \parallel^2 + b(t)$.
Montrer que toute solution maximale de $y' = f(t, y)$ est définie sur J tout entier.

