

Concours Communs Polytechniques – option PH–MP

Planche 1 abordable en Sup

I) Tracer la courbe définie par $(E) : x^2 + 2x + 4y^2 - 8y + 1 = 0$ dans le plan Oxy (on pourra faire un changement de repère).

Donner la pente des tangentes à la courbe aux points d'intersection entre la courbe et l'axe des y .

II) On veut résoudre $(E) : (x+1)y'' - (3x+4)y' + 3y = (3x+2)e^{3x}$. Si Δ est l'opérateur de dérivation et $Q(X) = X - 3$ on a $Q(\Delta)(y) = y' - 3y$.

Montrer l'existence d'un polynôme P de la forme $a(x)X + b(x)$ tel que (E) devienne $(P(\Delta) \circ Q(\Delta))(y) = (3x+2)e^{3x}$.

Résoudre l'équation à l'aide du changement de variable $z = Q(\Delta)(y)$.

Planche 2

I) Calculer A^n , pour $n \in \mathbb{N}$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

II) Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \frac{\text{Arc sin } x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par f ; en déduire le développement en série entière de f puis le rayon de convergence d'icelui.

Planche 3

I) On considère $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Montrer que f est continue et différentiable sur \mathbb{R}^2 .

II) Soit u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel.

Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $u \circ v$, montrer qu'il l'est aussi de $v \circ u$.

Soit $P \in E = \mathbb{R}[X]$, $u(P) = P'$ et $v(P) = \int_0^x p(t)dt$.

Trouver $\text{Ker } u \circ v$ et $\text{Ker } v \circ u$.

Montrer que la propriété précédente reste valable pour $\lambda = 0$ si E est de dimension finie.

Planche 4

I) Expliquer brièvement pourquoi ${}^tCo(A)A = \det(A)I_n$.

On suppose que A admet n valeurs propres distinctes; que vaut $\det(A)$? Que représente un vecteur propre de A pour ${}^tCo(A)$? Minorer $\dim \text{Ker } {}^tCo(A)$. Prouver que ${}^tCo(A)$ n'admet que deux valeurs propres, les expliciter.

II) Décomposer en éléments simples $f(x) = \frac{-1}{-x^2 + x + 2}$.

Montrer que f est développable en série entière au voisinage de l'origine. Rayon de convergence? DL à l'ordre 3 de f ?

Planche 5 II abordable en Sup

I) Montrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence R .

Montrer que si $R \neq 0$, alors $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable sur $] -R, R[$.

II) On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ et $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base duale de la base canonique de E . On note v et w les éléments de E^* définis par $v(P) = P(1)$ et $w(P) = \int_0^1 P(t)dt$.

Montrer que $e' = (e_1, v, w)$ est une base de E^* . Donner la matrice de passage de e à e' . Donner la base ante-duale de e' .

Planche 6 abordable en Sup

I) Montrer que deux suites réelles (u_n) et (v_n) , équivalentes en $+\infty$, sont de même signe à partir d'un certain rang.

Quel est le signe de $u_n = \sin \frac{1}{n} - \text{th} \frac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$?

II) Allure de la courbe d'équation cartésienne $y^2 - (3x^2 + 2x + 1) = 0$. Lieu des points M d'affixe z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^5 soient alignés.

Planche 7

I) Soient a, b, c réels. $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable

dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Pouvait-on prévoir que 0 est valeur propre?

II) Soit $C(R)$ le quart de disque $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2, R > 0$.

Montrer que $\left(\int_0^R e^{-t^2} dt\right)^2$ est compris entre $\iint_{C(R)} e^{-x^2-y^2} dx dy$

sur et $\iint_{C(R\sqrt{2})} e^{-x^2-y^2} dx dy$. Calculer $\iint_{C(R)} e^{-x^2-y^2} dx dy$.

En déduire l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Planche 8 I abordable en Sup

I) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n > 1$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$, de rang 1, n'est pas forcément un projecteur.

Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$, de rang 1 et de trace 1, est un projecteur.

Trouver une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs.

II) La série de Fourier de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique telle que $\forall t \in]-\pi, \pi[, f(t) = t$ et $f(-\pi) = 0$, converge-t-elle vers f sur \mathbb{R} ?
Expliciter la série de Fourier de f .

Planche 9 I abordable en Sup

I) Soit $A, B \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ et en déduire que, dans un espace vectoriel de dimension finie, les matrices d'un endomorphisme dans deux bases différentes ont même trace.

II) Extremums locaux puis globaux de $f : (x, y) \mapsto x(\ln^2 x + y^2)$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Planche 10 II abordable en Sup

I) Montrer que E , ensemble des $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$

est un sous-anneau et un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension?

On définit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(a + ib) = M(a, b)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.
Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Est-ce un isomorphisme d'anneaux?

II) Pour $a > 0$ et $b > 0$, domaine de définition, continuité et dérivabilité de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$.

Calcul de F à l'aide des symboles usuels.

Planche 11 II abordable en Sup

I) Montrer que, dans un espace vectoriel normé complet, toute série absolument convergente est convergente.

II) Décrire, dans le plan complexe, le lieu des nombres complexes $u = 1 + z + z^2$, où z décrit le cercle unité.

Planche 12 I abordable en Sup

I) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue positive telle que $\int_a^b f(t) dt = 0$. Montrer que $f = 0$.

Application : montrer que $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire de l'espace $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

II) Calculer $a_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Calculer la somme de cette série quand elle existe.

Planche 13 II abordable en Sup

I) Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 + 1}$ sur $]0, +\infty[$.

Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}$ sur $]1, +\infty[$.

II) On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, muni de sa structure euclidienne canonique. Le produit scalaire est noté $(\cdot | \cdot)$. On dit qu'une application $f : E \rightarrow E$ est antisymétrique si $\forall x, y \in E, (x|f(y)) = -(f(x)|y)$.

Montrer qu'une application antisymétrique de E est linéaire. Que dire de sa matrice dans la base canonique de E ?

Montrer que l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E , est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et donner sa dimension.

Planche 14 I abordable en Sup

I) Soit $(P_n)_n$ la suite de polynômes définie par $P_1 = (X - 2)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n^2 - 2$. Calculer le coefficient de X^2 dans P_n .

II) Étudier la convergence de la série de Fourier de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction, 2π -périodique, définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(t) = t$ et telle que $f(-\pi) = 0$. Déterminer cette série de Fourier.

Planche 15

I) Calculer $\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dx dy$, où D est le disque-unité du plan.

II) Soit u un automorphisme orthogonal de E euclidien, et $v = u - id$. Montrer que $\text{Ker } v = (\text{Im } v)^\perp$.

Soit $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} u^k(x)$. Montrer que $(u_n(x))$ converge, pour tout vecteur x , vers le projeté orthogonal de x sur $\text{Ker } v$.

Planche 16

I) $\begin{pmatrix} a+1 & 2 & -2 \\ 2a+2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{C}$, est-elle diagonalisable ?

II) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{+\infty} t^k \exp(-t) dt$.

Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exp(-x) \cos(\sqrt{x}) = \sum_0^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(2k)!} \exp(-x)$.

III) Montrer que, en dimension finie, deux endomorphismes u et v diagonalisables et qui commutent, admettent une base commune de vecteurs propres.

Planche 17

I) Montrer que si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence (on n'utilisera pas le critère de d'Alembert).

Trouver le rayon de convergence de $\sum \frac{i^n n^2}{n^2 + 1} z^n$.

II) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ symétrique, de valeurs propres strictement positives, Montrer que $\forall x \neq 0, (f(x)|x) > 0$.

Pour $u \in \mathbb{R}^n$, on définit g par $g(x) = \frac{1}{2} (f(x)|x) - (u|x)$.

Montrer que g admet des dérivées partielles et les expliciter.

Montrer que g admet un unique point critique et que ce point est un minimum global de f .

Planche 18 II abordable en Sup

I) Étudier l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 + 1}$ sur $]0, +\infty[$; de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}$ sur $]1, +\infty[$.

II) Soient $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

Interpréter $\phi(a, b) = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right)^{1/2}$ comme la distance d'un vecteur de \mathbb{R}^n à un vecteur d'un sous-espace de \mathbb{R}^n .

Montrer que ϕ admet un minimum absolu et déterminer le couple

(a, b) correspondant en fonction de $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ et $y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$.

Planche 19 III abordable en Sup

I) Soit (f_n) une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$; montrer que la suite de terme général

$$\int_a^b f_n(t) dt \text{ tend vers } \int_a^b f(t) dt.$$

II) Montrer de deux manières différentes que :

$$\int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}.$$

III) Calculer la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 du projecteur sur le plan $x + y + z = 0$ parallèlement à la droite $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

Planche 20 I abordable en Sup

I) Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que 2 matrices de u ont la même trace.

II) Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+x} dt$.

Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

Calculer $F'(x)$ et en déduire l'expression de $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{t+1} \frac{\ln(t)}{t^2 + 2t \text{ch}(\theta) + 1} dt$.

Planche 21 abordable en Sup

I) Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle $y' - \frac{x}{x^2-1} y = 2x$.

II) Soit E un espace euclidien de dimension paire, notée $2n$, F et G deux sous-espaces de E tels que $\dim F = \dim G$ et $E = F \oplus G$, soit p_F et p_G les projections orthogonales sur F et G respectivement et enfin soit φ un opérateur orthogonal de E tel que $\varphi(F) \subset G$.

Pour tout $x \in E$, $f(x) = \varphi(p_F(x)) + \varphi^{-1}(p_G(x))$.

Montrer que $\varphi(F) = G$, $f^2 = \text{Id}_E$, $f(F) = G$, $f(G) = F$.

Montrer que f est un opérateur orthogonal si et seulement si pour tout $(x, x') \in F^2$, $(x|\varphi(x')) = (\varphi(x)|x')$

Planche 22 I abordable en Sup

I) Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E . Montrer que $E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \implies \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ et $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \implies \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

II) Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'intégrabilité de $f_a(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^a}$ sur $]0, +\infty[$ dans le cas $a \geq 3$ et dans le cas $1 < a < 3$.

On suppose $a \leq 1$. Étudier l'intégrabilité de f_a en utilisant la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f_a(x) dx$.

Planche 23 I abordable en Sup

I) Préciser les symétries éventuelles de la courbe d'équation polaire $\rho = 2\sqrt{\cos(2\theta)}$. Donner l'allure de la courbe.

II) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $x \in [0, 1]$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} x^n \exp(-nx)$.

Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\beta u_n(x)$.

Pour quelles valeurs de α la série $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, 1]$? Uniformément?

Planche 24 II abordable en Sup

I) Montrer que la série entière $\sum a_n z^n$, de rayon $R \neq 0$, converge uniformément sur tout disque fermé de rayon $r < R$.

Montrer que l'application $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de rayon R .

II) Soit E un espace vectoriel, soient L, M, N 3 sous-espaces vectoriels de E . L'égalité $L \cap (M + N) = (L \cap M) + (L \cap N)$ est-elle toujours vraie? Quelle inclusion est vraie?

Planche 25

I) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^n .

II) Étudier la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{nx^2 \exp(-nx)}{(1 - \exp(-x))^2}$.

Planche 26

I) Soit E un espace euclidien, soit A un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $E = A \oplus A^\perp$ et que $(A^\perp)^\perp = A$.

II) Montrer que la forme différentielle $\omega = (x^2 + y^2 - 1)dx - 2xydy$ n'est pas exacte.

Déterminer une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que la forme différentielle $\omega' = f(x^2 - y^2)\omega(x, y)$ soit exacte, et déterminer toutes les fonctions U de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 telles que $dU = \omega'$

Planche 27 I abordable en Sup

I) Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle $y' + \frac{x}{x^2 - 1}y = 2x$.

II) Soit E un espace euclidien, f un endomorphisme de E tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^2 + \text{Id} = 0$. Montrer que f est orthogonal.

Soit g un endomorphisme de E tel que $g \circ g^* = g^* \circ g$ et il existe deux réels a et b non nuls tels que $(g - a \text{Id})^2 + b^2 \text{Id} = 0$.

Montrer qu'il existe des sous-espaces V_1, \dots, V_r de E , stables par g , tels que $E = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ et la matrice de la restriction de g à chaque V_k est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Planche 28 II abordable en Sup

I) Domaine de définition de $B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du$ et de

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}du.$$

Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} u^{2x-1}e^{-u^2}du$.

Écrire $\Gamma(x)\Gamma(y)$ sous forme d'une intégrale double.

À l'aide des coordonnées polaires, montrer que $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire $B(m, n)$.

II) Montrer que E , ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$,

est un sous-espace et un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que l'application ϕ qui à $a + ib \in \mathbb{C}$ associe la matrice correspondante dans E est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Est-ce un isomorphisme d'anneaux ?

Planche 29

I) Étudier la convergence simple de la série $\sum z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$. Preuve détaillée attendue.

Étudier la convergence simple de la série $\sum e^{-nx^2}$. En donner la somme.

II) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable mais non

diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $M^2 = A$. Montrer que le spectre de M contient 0 et est inclus dans $\{0, 1, -1\}$.

Montrer que les sous-espaces propres de M sont des droites.

Déterminer toutes les matrices M qui conviennent.

Planche 30

I) La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{1-x^2}$ est-elle intégrable sur $]1, +\infty[$?

La fonction $x \mapsto \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, diagonale. On note x_1, \dots, x_k les valeurs propres distinctes de A et n_1, \dots, n_k leurs multiplicités.

Donner le degré p du polynôme minimal de A .

On note F l'ensemble des $P(A)$ quand P décrit $\mathbb{C}[X]$. Montrer que (I_n, A, \dots, A^{p-1}) est une base de F .

On note A la matrice diagonale de diagonale (a_1, \dots, a_n) et C l'ensemble des matrices qui commutent avec A .

Montrer que C est l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})$ telles que $\forall (i,j), a_i \neq a_j \Rightarrow m_{i,j} = 0$. En déduire la dimension de C .

Planche 31 I abordable en Sup

I) Résoudre dans l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$ l'équation différentielle $(1+x^2)y' - 2xy = x \exp \frac{1}{1+x^2}$.

II) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes. Soit v dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si u et v admettent une base commune de vecteurs propres.

Soit e une base de E et A la matrice de u dans e . Trouver le nombre de solutions de l'équation $X^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(K)$.

Planche 32

I) Rayon de convergence des séries entières $\sum n^a x^n$ où a est un réel donné, et $\sum \cos \frac{2n\pi}{3} x^n$.

II) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f et g deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent.

Montrer qu'il existe une base diagonalisant à la fois f et g .

On suppose que f possède n valeurs propres distinctes. Montrer que toute base diagonalisant f diagonalise aussi g .

On donne une matrice carrée symétrique complexe d'ordre 4 de la forme $A + iB$ avec A et B symétriques réelles qui commutent.

Dire si elle est diagonalisable.

Planche 33 abordable en Sup

I) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue positive telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$. Montrer que $f = 0$.

Application : montrer que $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire de l'espace $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

II) Soit $p > 3$ premier. Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 12.

Planche 34

I) Si $|a_n| \sim |b_n|$, montrer que la série entière des $a_n z^n$ et celle des $b_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Rayon de convergence de la série des $\frac{i^n n^2}{n^2 + 1} z^n$?

II) Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donner la matrice de passage.

Planche 35

I) Justifier que u , endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n , admet au plus n valeurs propres distinctes.

Trouver $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant 0 et 1 comme valeurs propres

II) Ensemble de définition de S donnée par $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}$.

Montrer que S est continue puis qu'elle est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Planche 36

I) Cours : convergence uniforme, convergence normale.

La série $f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{n!} z^n$ converge-t-elle uniformément sur un

disque de centre 0 et de rayon R ?

II) Cours : critère de diagonalisabilité d'un endomorphisme à l'aide des polynômes annulateurs.

Soit $u \in GL(E)$, \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^2 l'est.

Soit un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(u)$ soit inversible, montrer que u est diagonalisable si et seulement si $P(u)$ l'est.

Planche 37 I abordable en Sup

I) Montrer que f , défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = P - P'$, est bijectif, d'abord sans utiliser sa matrice, puis en l'utilisant.

Trouver l'antécédent de Q par f (on pourra considérer $P^{(n+1)}$).

II) Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cos(n^2 x)$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et qu'elle n'admet pas de développement en série de Taylor au voisinage de 0.

Planche 38 II abordable en Sup

I) Soit (a_n) une suite réelle convergente, de limite a non nulle. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n} x^n$.

On note f la somme de cette série sur son domaine d'existence ; montrer que : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{\ln(1-x)} = -a$.

II) Dessiner la conique d'équation (dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})) $x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$ (un changement de repère peut être nécessaire).

Calculer l'équation des tangentes aux points d'intersection entre la conique et l'axe (O, \vec{j}) .

Planche 39 abordable en Sup

I) Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + y = \cos(x)$. Que pouvez-vous dire à propos de l'existence et l'unicité des solutions ? Résoudre cette équation différentielle (on pourra s'aider de la méthode de variations des constantes).

II) Soit E un espace euclidien de dimension 2, soit (u, v) une base de vecteurs unitaires de E .

Montrer que $(u|v) \in]-1, 1[$. On notera désormais θ le réel de $]-\pi, \pi[$ tel que $(u|v) = \cos(\theta)$.

Soit i et j les vecteurs unitaires de même direction et même sens que $u + v$ et $u - v$ respectivement. Exprimer i et j en fonction de u, v et θ . Montrer que (i, j) est une base orthonormale de E .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$ et φ l'endomorphisme de E défini par $\varphi(x) = \lambda(x|u)u + \mu(x|v)v$; trouver une ou des conditions sur λ, μ et θ pour que φ soit un opérateur orthogonal de E .

Planche 40 I abordable en Sup

I) f , définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$, est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?

L'étude de la limite de $f(x, x)$ quand x tend vers 0 serait-elle suffisante pour conclure ? f est-elle différentiable sur \mathbb{R}^2 ?

II) Soit E un espace vectoriel, soit u et v deux endomorphismes de E . Montrer que toute valeur propre non nulle de $u \circ v$ est valeur propre de $v \circ u$.

Soit u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ définis par $u(P) = P'$ et $v(P)(x) = \int_0^x P(t) dt$. Trouver les noyaux de $u \circ v$ et $v \circ u$.

Démontrer que la propriété énoncée se conserve pour la valeur propre 0 lorsque E est de dimension finie.

Planche 41 II abordable en Sup

I) Soit $f_n(x) = nx^2 \exp(-x\sqrt{n})$. Étudier les convergences simple, uniforme et normale de la série $\sum f_n$ sur $[0, +\infty[$.

II) Reconnaître et tracer C , la courbe du plan euclidien \mathbb{R}^2 d'équation $x^2 + 4y^2 + 2x + 8y + 1 = 0$.

Déterminer les tangentes à C aux points d'intersection de C et de l'axe Oy .