

Concours Commun Mines – Ponts – option MP

Planche 1

I) Trouver les solutions développables en série entière de l'équation différentielle $x^2 y'' - 4xy' + (x^2 + 6)y = 0$.

Dimension de l'espace des solutions définies sur \mathbb{R} ?

II) Résoudre $X^2 = A$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Planche 2

I) Résoudre $y'' + y' - e^{2x}y = \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x$ en posant $u = e^{-x}$.

II) Quel est le chiffre des unités de 7^{7^7} ?

III) Nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

IV) Nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Planche 3

I) On pose $x = u + v, y = u - v$.

Vérifier que $\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = 1$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}$.

Expliquer ce phénomène « magique » (c'est le mot de l'examinateur) à partir des matrices jacobiniennes.

Trouver les solutions f de l'équation $x^2 + y^2 + \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}\right) f = 0$

en passant en polaires.

II) $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & j & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable ?

Polynôme caractéristique et polynôme minimal de A .

Construire une matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ ayant des propriétés semblables.

Une question de l'examinateur : avez-vous vu un équivalent du théorème spectral mais pour des matrices hermitiennes complexes ? il a fait référence à un théorème qui dit qu'une matrice hermitienne est diagonalisable dans une base orthonormale et que ses valeurs propres sont réelles.

Planche 4 II abordable en Sup

I) Soit $a > 0$, montrer que $f_a(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2 + a^2} dt$ admet des limites en 0 et en $+\infty$ (notées L et L' respectivement).

Calculer $L - L'$ (on pourra faire un changement de variable).

II) Soit un projecteur p d'un espace euclidien E . Montrer que p est orthogonal si, et seulement si on a, pour tout x , $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

III) Soit un réel α et la forme quadratique Q_α sur \mathbb{R}^n définie par $Q_\alpha(x) = \sum x_i^2 - \alpha(\sum x_i)^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que Q_α soit une forme positive.

IV) Prouver la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0, 1]$ par $f_0 = 1$ et $f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2) dt$ (on pourra introduire $g_n(x) = |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$ et vérifier que $g_1(x) \leq \frac{x^2}{2}$).

Planche 5

I) Soit f_n définie sur $[1, +\infty[$ par $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$; étudier les convergences simple et uniforme de (f_n) .

II) Montrer que toute matrice réelle inversible s'écrit comme le produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice symétrique.

III) Rayon de convergence de $\sum e^{\sqrt{n+1}} x^{2n}$ et $\sum e^{-3n} x^{2n}$.

Planche 6 I abordable en Sup

I) Montrer qu'une symétrie orthogonale s , par rapport à un hyperplan H (réflexion) s'écrit sous la forme $s(x) = x - 2 \frac{(x|u)}{\|x\|^2} u$ où u

est un vecteur non nul de H^\perp .

Montrer que si g est une isométrie, $g \circ s \circ g^{-1}$ est une réflexion dont on précisera l'hyperplan.

On dit que deux sous-espaces F et F' sont perpendiculaires si et seulement si $F^\perp \subset F'$ (ou $F'^\perp \subset F$); montrer que deux réflexions d'hyperplans respectifs H et H' commutent si et seulement si H et H' sont perpendiculaires.

II) Nature des séries de terme général respectif $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

$$\text{et } v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Planche 7 III abordable en Sup

I) Convergence et somme de $\sum \frac{n - 3E(\frac{n}{3})}{n(n+1)}$.

II) Trouver $\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - xt - y)^2 dt$.

III) Soit p premier au moins égal à 5, montrer que 24 divise $p^2 - 1$.

Planche 8

I) Montrer que φ , l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à P associe $P - P'$, est bijectif et en expliciter l'inverse.

Déterminer ses éléments propres; est-il diagonalisable?

II) Soit f de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} telle que f et f'' soient semi-intégrables sur \mathbb{R}^+ . Montrer que f et f' tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et que f' est semi-intégrable.

Planche 9 II abordable en Sup

I) Soit la fonction φ de période 1 telle que $\varphi(t) = (t - \frac{1}{2})^2$ pour $0 \leq t \leq 1$. Intégrabilité et calcul de $\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt$.

II) Soit, dans un plan affine euclidien, un cercle (C) de centre O , et un point $M \neq O \notin (C)$. Deux droites orthogonales passant par M recoupent (C) en A et B respectivement. Trouver le lieu du point N tel que $(MANB)$ soit un rectangle.

Planche 10 I abordable en Sup

I) Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Que peut-on en dire si $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$?

II) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $k \geq 2$ tels que $M^{2k} = I_2$ et $M^\ell \neq I_2$ si $0 < \ell < 2k$. Montrer que $M^k = -I_2$.

Planche 11

I) Calcul de l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx$ (on pourra faire le changement de variable $u = \sqrt{\tan x}$).

II) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Calculer $\exp(A)$.

Construire une matrice d'ordre n nilpotente d'indice 2.

Planche 12

I) Intégrabilité de $t \mapsto \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos(2t)}}$ entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, puis calcul de

l'intégrale.

II) Soit E un espace préhilbertien réel et $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille libre de E .

On suppose que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |(e_i|x)|^2$. Montrer que e est une base orthonormale de E .

Planche 13

- I) Développement en série entière de $x \mapsto \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+t^2+t^4} dt$.
- II) Montrer qu'il existe des entiers k tels que $1983 \times k$ ne s'écrive (en décimal) qu'avec des chiffres 1 (on pourra introduire l'ensemble E des entiers qui ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1, et étudier la structure de $\mathbb{Z}/1983\mathbb{Z}$).
- III) On suppose $A = \alpha B + \beta C$, $A^2 = \alpha^2 B + \beta^2 C$, $A^3 = \alpha^3 B + \beta^3 C$ où A, B, C sont des matrices non nulles et α, β des scalaires non nuls et distincts. Montrer que A est diagonalisable puis calculer $\exp(A)$.

Planche 14 I et III abordable en Sup

- I) Pour $n \in \mathbb{N}$, Quel est le cardinal de A_n , l'ensemble contenant tous les entiers k compris entre 10^n et $10^{n+1} - 1$ et dont l'écriture décimale ne fait pas apparaître le chiffre 5 ?
- Montrer que $S_5 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{k \in A_n} \frac{1}{k}$ est finie et inférieure ou égale à 72.
- On crée de même S_0, \dots, S_9 . Que dire de $S_0 + \dots + S_9$? Conclusion ?
- II) $a > 0$, montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Sans diagonaliser effectivement A , calculer $\exp(A)$.

- III) La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ si x est rationnel et $f(x) = 0$ sinon est-elle continue ? dérivable ?

Planche 15 III abordable en Sup

- I) Développement en série entière de $\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$.
- II) Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne et A un endomorphisme de E . Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $Y' = AY$ sont de norme constante, si et seulement si A est antisymétrique.
- III) Un nombre entier ayant une écriture décimale de la forme $mmmmmmmmmm$, où m est un motif de la forme $aabb$, peut-il être un carré parfait ?

Planche 16

- I) Étudier la convergence simple puis uniforme, de la suite de fonctions définie sur $[1, +\infty[$ par $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$.
- II) Soit une matrice A réelle et inversible. Montrer qu'il existe une matrice O orthogonale et une matrice S symétrique définie positive telles que $A = OS$.
- III) Rayon de convergence de $\sum e^{\sqrt{n+1}} x^{2n}$ et $\sum e^{-3n} x^{2n}$.

Planche 17 I et II abordables dès la Sup

- I) Trouver la matrice de la projection sur le plan Π d'équation $z = x - y$ parallèlement à la droite $\Delta : x = -y = z$.
- II) Montrer que $M = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation, si et seulement si p, q, r sont solutions d'une équation de la forme $x^3 - x^2 + \lambda = 0$.
- III) Soit une suite (a_n) croissante et non bornée. Montrer que :
- $$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-a_n t} dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{a_n}.$$

Planche 18

- I) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et A une partie non vide de E . Montrer que A et \bar{A} ont le même diamètre. Est-ce le cas pour l'intérieur ?
- II) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A et B deux éléments de E . Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(X) = AX$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
- Même étude avec $g : X \mapsto XB$.
- Soient (X_1, X_2, \dots, X_n) et (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) deux bases de \mathbb{C}^n . Montrer que la famille des n^2 matrices $X_i \cdot {}^t Y_j$ est une base de E .
- Soit alors $\Phi : X \mapsto AXB$, avec A et B diagonalisables. Montrer que Φ est diagonalisable. La réciproque est-elle vraie ?

Planche 19

I) Nature de la série $\sum \ln\left(\tan \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right)$.

II) Soit un endomorphisme f de \mathbb{C}^n , $\omega = \exp \frac{2i\pi}{n}$ et des endomorphismes p_0, \dots, p_{n-1} tels que l'on ait pour tout k compris entre 1 et $n+1$ la relation $f^k = \sum_{q=0}^{n-1} \omega^{kq} p_q$.

Montrer que f est diagonalisable.

Exprimer les p_i comme polynômes en f .

Planche 20 III abordable en Sup

I) Soit la matrice A de taille $2n+1$, ayant des coefficients tous nuls sauf des 1 en ligne et en colonne n .

Montrer que les valeurs propres de A sont toutes entières si, et seulement si, $8n+1$ est un carré parfait.

II) Montrer que s'il existe une solution bornée et non nulle f de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$, q étant une fonction continue, intégrable sur \mathbb{R}_+ , alors f' tend vers 0 à l'infini.

Peut-on avoir des solutions non bornées ?

III) Soit H une partie de \mathbb{C}^* , finie, non vide, et stable par la multiplication. Montrer que (H, \times) est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) . Que peut-on dire de plus sur H ?

Planche 21

I) Nature de la série de terme général $\cos\left(\frac{\pi(2n^2 + n + a \ln n)}{2(n+b)}\right)$,

avec a réel et b réel non entier.

II) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$

tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(1) = \int_{-1}^1 \frac{A(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Peut-on remplacer $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}[X]$?

Planche 22

I) Dans \mathbb{R}^3 euclidien, l'endomorphisme $f(X) = A \wedge (B \wedge X)$, les vecteurs A et B étant fixés, est-il diagonalisable ?

II) Montrer que l'ensemble des suites convergentes forme un sous-espace fermé de l'espace ℓ^∞ des suites réelles bornées.

Étudier la convergence simple, uniforme de la suite de fonctions (f_p) donnée par $f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

En déduire que l'ensemble des suites sommables (i.e. suites (a_n) telles que la série $\sum |a_n|$ converge) n'est pas fermé dans ℓ^∞ .

Planche 23

I) $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

Déterminer et dessiner $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \lim_{m \rightarrow +\infty} A^m = 0\}$.

II) Soit (u_n) une suite positive décroissante.

Montrer que $\sum u_n < +\infty \Rightarrow u_n \in o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Montrer que $\sum u_k$ et $\sum k(u_k - u_{k+1})$ sont de même nature (on pourra remarquer que $\sum_{k=n}^{\infty} k(u_k - u_{k+1}) \geq n \sum_{k=n}^{\infty} (u_k - u_{k+1})$).

Planche 24

I) Montrer qu'une matrice complexe de taille n est nilpotente si et seulement si les traces de ses puissances jusqu'à la n -ième sont nulles.

II) Trouver la formule du déterminant de Vandermonde.

III) Trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} k^{-a}$ pour $a > 1$.

IV) Nommer les surfaces d'équation $xy = z^2$ et $z = x^2 + y^2$.

Planche 25

I) Intégrabilité sur $]1, +\infty[$ de $\frac{x-1}{|x^\alpha - 1|^\beta}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

II) Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $I_n - 2u^t u$ est orthogonale.

Nature de l'endomorphisme canoniquement associé ?

Montrer que $M - M^3$ est différentiable. Quelle est sa différentielle ?

III) Cours : citer toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour que u dans $\mathcal{L}(E)$ soit diagonalisable.

Planche 26

I) Montrer que $(E) : xy' + \ln(1-x)y = 0$ admet une solution développable en série entière au voisinage de 0.

II) Montrer que $q(M) = \text{Tr}({}^t M M) + (\text{Tr}(M))^2$ est une forme quadratique. Est-elle positive ?

III) Nature de la série de terme général $U_n = \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{(k \ln(k))^2}$.

Planche 27

I) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & a^4 & 1 \\ a^2 & a^3 & a^4 & 1 & a \\ a^3 & a^4 & 1 & a & a^2 \\ a^4 & 1 & a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Calculer $\exp(A)$. $A + I_5$ est-elle inversible ?

II) Calculer $I = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Planche 28 II abordable en Sup

I) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [0, 1]$, on pose $g_n(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

Montrer que $|g'(t)| \leq \frac{e^t}{n}$ puis que $\left|e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right| \leq \frac{t}{n}$.

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions :

$$I_n(x) = \int_0^1 t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

II) Trouver tous les triplets (x, y, z) de \mathbb{Z}^3 tels que x divise $y + z$, y divise $x + z$, z divise $x + y$.

III) Montrer que les valeurs propres de $M = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ sont dans \mathbb{R}_+^* .