

École Polytechnique – option MP

Planche 1

I) On donne A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$e^A - e^B = \int_0^1 e^{sA}(A - B)e^{(1-s)B} ds$$

II) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nilpotente ; montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $e^M = I_n + N$.

Planche 2 abordable en Sup

Soit un polynôme $P \in \mathbb{C}_d[X]$, n'ayant que des racines (complexes) de module inférieur ou égal à 1, et u un complexe de module 1. On pose $Q_u(z) = P(z) + uz^d \overline{P}(\frac{1}{z})$, \overline{P} désignant le polynôme aux coefficients conjugués. Montrer que les racines de Q_u sont toutes de module 1.

Planche 3 III abordable en Sup

I) Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable, et telle que $f^2 + (1 + f')^2 \leq 1$, est nulle.

II) Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction continue et K un segment inclus dans $f(I)$. Montrer qu'il existe un segment $L \subset I$ tel que $f(L) = K$.

III) Soit G un groupe de cardinal $2p$, p premier supérieur à 2. Montrer que G admet au moins un élément d'ordre p .

Planche 4 III abordable en Sup

I) On considère les fonctions $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$ (distance entre le réel x et l'entier le plus proche) et $g(x) = |\sin(\pi x)|$. Montrer que $f \leq g$.

Trouver le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{|\sin(n\pi y)|}$.

II) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver A^n et montrer qu'il existe une matrice B telle que $A = B^2$.

III) P est un polynôme à deux indéterminées tel que la fonction polynôme associée soit symétrique (i.e. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, P(x, y) = P(y, x)$). Montrer que P est formellement symétrique (i.e. les coefficients de $X^k Y^{n-k}$ et $Y^k X^{n-k}$ sont les mêmes pour tout k).

Planche 5 I abordable en Sup

I) Soit un cercle C du plan de centre O , un point P du plan ; une droite D quelconque passant par P recoupe C en M et M' . Montrer que $\frac{\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|} \cdot \frac{\overrightarrow{PM'}}{|\overrightarrow{PM'}|}$ ne dépend pas du choix de D .

Quel rapport peut-on faire avec la transformation $z \mapsto \frac{1}{z}$ de \mathbb{C}^* dans lui-même ?

II) Calculer $1 + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{6 \times 7} + \dots$

Planche 6

Soit une suite de fonctions (u_n) , continues sur $[a, b]$ et à valeurs positives. On suppose que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[a, b]$. Montrer que la somme de la série est continue si, et seulement si, la convergence est uniforme.

Planche 7

I) Soit, pour g continue sur $[0, 1]$, $\varphi(g)(x) = \int_0^x \sqrt{|g(t)|} dt$.

Quel est le comportement de la suite de fonctions (f_n) définie par $f_0 = 1$ et $f_{n+1} = \varphi(f_n)$?

II) Énoncé détaillé du théorème de Cauchy-Lipschitz (cas non linéaire).

Planche 8 abordable en Sup

Soit une fonction f continue de I dans \mathbb{R} , où I est un intervalle de \mathbb{R} . On suppose que f vérifie pour tout (x, y) de I^2 , $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue et telle que :
 $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad |g(x+y) + g(x-y) - 2g(x)| \leq M$ (M fixé);
montrer que $h : x \mapsto g(x) + M \frac{x^2}{2}$ est convexe.

Planche 9

Soit M la matrice de taille n et de coefficients $a_{ij} = \frac{1}{1 + |i - j|}$.

Montrer que M est symétrique définie positive (on pourra interpréter a_{ij} comme une intégrale et montrer que si, pour une matrice symétrique réelle, tous les déterminants mineurs principaux (à cheval sur la diagonale) sont strictement positifs alors la matrice est définie positive).

Planche 10 abordable en Sup

Soit une fonction f continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et telle que pour tout (a, b) on ait $(b - a)f(\frac{a+b}{2}) \leq \int_{[a,b]} f(t)dt$. Montrer que f est convexe.

Planche 11

N est une matrice complexe nilpotente. Soit une fonction $t \mapsto U(t)$ de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de classe \mathcal{C}^1 , et pour tout t , les matrices $U(t)$ et $U'(t)$ commutent. Montrer que $\frac{d}{dt} \exp(U(t)) = U'(t) \exp(U(t))$.

On définit la fonction matricielle $\varphi(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} t^k N^k$.

Calculer $\varphi'(t)$ et en déduire qu'il existe une matrice S nilpotente et telle que $\exp(S) = I + N$.

Montrer que la fonction exponentielle, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vers $GL_n(\mathbb{C})$, est surjective.

Qu'en est-il sur le corps des réels? Que dire des matrices qui sont des exponentielles de matrices réelles? Contre-exemples.

Planche 12 abordable en Sup

Soient α et β deux réels tels que $\alpha \geq \beta$. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, tel que $x > 0$. Montrer que : $\left| \frac{e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}}{z} \right| \leq \left| \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right|$.

Donner une condition sur $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ pour que l'on ait

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Planche 13

Soient deux matrices symétriques positives A, B . Soit la matrice symétrique C de coefficients $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. Montrer que C est positive, et même définie positive si A et B le sont.

Montrer qu'une matrice symétrique réelle A est positive si et seulement si pour toute matrice symétrique B positive, on a $\sum_{i,j} a_{ij}b_{ij} \geq 0$.

Planche 14

Soit un entier n et k un entier tiré au hasard dans $\{1, \dots, n\}$.

On note n_k le reste de la division euclidienne de n par k , et p_n la probabilité d'avoir $n_k = \frac{k}{2}$.

Expression de p_n ? Limite de p_n quand n tend vers l'infini (on pourra s'intéresser à des sommes de Riemann).

Trouver la limite de $\sum_{k=1}^n \frac{n_k}{k}$.

Planche 15

Soit une loi de composition non associative, notée $*$, sur un ensemble E . Soit $P(n)$ le nombre maximum de valeurs possibles pour un produit de la forme $x_1 * x_2 * \dots * x_n$ (il s'agit en fait du nombre de parenthésages). Calculer $P(n)$ en fonction de n (on pourra introduire la série génératrice $S(x) = \sum P(n)x^n$ et considérer $S(x)^2$).

Planche 16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$. Montrer qu'il existe une

matrice P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & A_r & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_k \\ \lambda_k & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$, symétrique. On suppose S définie positive. Montrer que $|\det(S)| \leq |\det(M)|$ (on pourra écrire $M = S + A$ et utiliser la question précédente).

Planche 17

On dira que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale si et seulement si $A{}^tA = {}^tAA$. On suppose que A est trigonalisable : montrer qu'il existe une matrice T triangulaire supérieure et une matrice P orthogonale telles que $A = PT{}^tP$.

Montrer que A est normale si et seulement si T est diagonale.

On suppose que A est normale : montrer que, si V_1 et V_2 sont deux vecteurs propres de A associés à deux valeurs propres distinctes, alors V_1 et V_2 sont orthogonaux.

Planche 18

Soit (λ_n) une suite croissante de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty, (a_n) \text{ une suite réelle telle que } a_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right).$$

On pose $A(x) = \sum_{n \setminus \lambda_n \leq x} a_n$, et on suppose que A vérifie $\frac{1}{x} \int_0^x A(u) du$

tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$

Montrer que la série $\sum a_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.