Concours Communs Polytechniques – option PH-MP

Planche 1

I) Calculer, d'abord directement, puis en utilisant la formule de Green-Riemann, $\int_\Gamma (y+xy)\mathrm{d}x$ où γ est la courbe, orientée dans le sens trigonométrique, constituée des portions de courbes comprises entre les points d'intersection de $y_1 = x$ et $y_2 = x^2$.

II) Ensemble de définition et continuité de $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

En trouver un équivalent en 0^+ et la limite en $+\infty$.

Planche 2 II abordable dès la 1e année

I) Montrer que le rayon de convergence de la série de terme général $n^{(-1)^n}x^n$ est 1. Calculer sa somme.

II) Factoriser $P_n(X) = X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$.

Planche 3 II abordable dès la 1e année

I) Cours : On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe dans $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $\left(\sum a_n x^n\right)$ et $\left(\sum (n+1)a_{n+1}x^n\right)$ ont même rayon de convergence $R \neq 0$. Montrer la dérivabilité de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$.

II) Discuter suivant a et b et résoudre $\begin{cases} ax + 2by + 2z = 1 \\ 2x + aby + 2z = b \\ 2x + 2by + az = 1 \end{cases}$.

Planche 4 abordable dès la 1e année

I) Montrez que si deux suites sont équivalentes à l'infini, alors, à partir d'un certain rang, elles ont même signe.

Déterminez le signe de $u_n = \operatorname{sh}\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{n}\cdot$.

II) Étudier la courbe d'équation $\rho(\theta) = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}\cdot$

Planche 5 I abordable dès la 1e année

I) Montrer que l'ensemble E des matrices $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

Montrer que l'application f qui, au complexe $a+ib$ associe $M(a,b)$ est un isomorphisme de groupes. Est-ce un isomorphisme d'anneaux ?

II) Soit ϕ continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E l'ensemble des fonctions continues, de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $N_2(f) = \left(\int f^2\right)^{1/2}$.

Montrer que $u = \phi f$ est un endomorphisme de E.

Soit x_0 fixé dans $\mathbb{R}$ et f_n valant 1 en x_0, affine sur $[x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0]$ et $[x_0, x_0 + \dfrac{1}{n}]$ et nulle ailleurs. Soit g continue sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} = \dfrac{f_n + f_n^2 g}{f_n + f_n^2} = g(x_0)$.

Montrer que u est continue. Quelle est la norme subordonnée ?

Planche 6 abordable dès la 1e année

I) Tracer la courbe paramétrée, définie par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t-1}{t} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t+1} \end{cases}$

II) Pour A et B fixées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, résoudre, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'équation $X = \mathrm{tr}(X)A + B$.

Planche 7

I) Rrang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Est-elle inversible ? Diagonalisable ?

II) Dessiner $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ 1 \leqslant xy \leqslant 2,\ 1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 4\}$.
Montrer que $\phi(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur $]0, +\infty[^2$. Expliciter $\phi(D)$.

Calculer $I = \displaystyle\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $f(x, y) = \dfrac{xy(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2}$.

Étudier les exterma de f.

Planche 8 I abordable dès la 1e année

I) Montrer que si h est continue et positive, $\displaystyle\int_a^b h(t)\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow h = 0$.

Montrer que $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

II) Trouver le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\operatorname{sh} n}{n(n+1)} x^n$.

Calculer la somme dans le bon intervalle.

Planche 9 I abordable dès la 1e année

I) Cours : principe de la démonstration de la formule de Leibniz.

Calculer la dérivée d'ordre n de $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.

II) $\omega(x, y) = x^2\mathrm{d}y + y^2\mathrm{d}x$ est-elle fermée ? Exacte ?
Donner l'ensemble des cercles (parcourus une fois dans le sens direct) le long desquels ω est nulle.

Planche 10 II abordable dès la 1e année

I) Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

II) Étudier et dessiner l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) = \cos t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \cos t \sin t \end{cases}$

Planche 11 I abordable dès la 1e année

I) Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ de $\phi(P)(X) = P(X) - P(X-1)$. En déduire noyau et image de ϕ.

II) Montrer que $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}\mathrm{d}t$ est définie pour $n \geqslant 1$. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}\mathrm{d}t$.

En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Planche 12 I abordable dès la 1e année

I) Tracer P définie par $O + t\vec{i} + at^2\vec{j}$, donner sa matrice et son axe.
Déterminer tangente et normale à P au point M_0 de paramètre t_0.
Factoriser $P(X) = X^3 - (t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2)X + (t_1t_2^2 + t_1^2t_2)$ en produit de polynômes de degré 1.
Montrer que les normales en trois points de P sont concourantes si leur centre de gravité est sur l'axe de P.

II) Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} \operatorname{Arc}\tan(nx)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Planche 13

I) Intégrabilité de $\dfrac{\ln x}{1+x^2}$ sur $]0, +\infty[$ et de $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x-1}}$ sur $]1, +\infty[$.

II) Polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

À quelle condition nécessaire et suffisante A est-elle diagonalisable ?
Indication : étudier les dimensions des sous-espaces propres.

Planche 14

I) Rang de la matrice A dont tous les coefficients valent 1.
Donner ses valeurs propres, ses sous-espaces propres, et les matrices des projecteurs sur les sous-espaces propres.
II) Soit une suite de fonctions (f_n) définies sur un ensemble X non vide, à valeurs dans $\mathbb{C}$, convergeant simplement vers f. Soit une suite de réels (α_n) convergeant vers 0.
Montrer que si $|\,f_n(x) - f(x)\,| \leqslant \alpha_n$, alors (f_n) converge uniformément vers f sur X.
Étudier la convergence de la suite pour $f_n = z^n$ sur le disque ouvert de rayon $\dfrac{1}{2}$, puis sur le disque ouvert de rayon 1.

Planche 15

I) Si la série de terme général $u_n = \ln(1+\frac{x}{n}) - \frac{x}{n}$ converge, on note $S(x)$ sa somme. Montrer que S est dérivable et calculer $S'(1)$.
II) Soit E l'espace des suites (u_n) telles que $\sum u_n^2$ converge, muni du produit scalaire $(u|n) = \sum u_n v_n$.
Déterminer l'orthogonal du sous-espace F des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer que F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires, et que $F \neq (F^\perp)^\perp$.

Planche 16

I) Montrer que (f_n) définie par $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$, converge uniformément sur $[0,1]$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.
II) Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre 4 vérifiant $A^2 = B^2 = I_4$ et $AB = -BA$, f et g les endomorphismes associés.
Donner un polynôme annulateur de A. Montrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres. Qu'en déduit-on pour B ?
On note E_1, E_{-1}, F_1, F_{-1} les sous-espaces propres de A et B respectivement, associés aux valeurs propres 1 et -1 ; montrer que $f(F_1) = F_{-1}$ et que $f(F_{-1}) = F_1$. En déduire que A est semblable à
$\begin{pmatrix} 0 & C \\ C^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ où C est une matrice carrée d'ordre 2 inversible.

Planche 17

I) Cours : Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien réel. Quand a-t-on égalité ?
II) Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.
Calculer les limites de f en $+\infty$ et 1.
Exprimer $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ à l'aide de $f(x)$.
Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Planche 18

I) Résoudre : $(1+x^2)y' - 2xy = x\exp\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.
II) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Réduction rapide de M.
Trouver les sous-espaces stables par f.

Planche 19

I) Cours : Montrer la convergence absolue de $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Montrer que $\forall (zz') \in \mathbb{C}^2,\ f(z+z') = f(z)f(z')$ où $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ sans utiliser $f(z) = \mathrm{e}^z$.
II) Pour $P \in \mathbb{R}_4[X]$, on pose $\phi(P) = (X^2-1)P' - (4X+1)P$.

Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
Résoudre $y' = \left(\dfrac{\lambda+5}{2(X-1)} - \dfrac{\lambda-3}{2(X+1)}\right) y$.
Pour quelles valeurs de λ, les solutions sont-elles dans $\mathbb{R}_4[X]$?
Trouver les éléments propres de ϕ.
Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_4[X]$, il existe un unique quintuplé $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ tel que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{4} a_i (X-1)^i (X+1)^{4-i}$.

Planche 20

I) Étudier la convergence de la série $\sum z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$.
On redémontrera tous les théorèmes relatifs aux résultats énoncés.
Étudier la convergence et donner la valeur de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$.

II) Existence et calcul de $I(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+ixy)}$.

Planche 21

I) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire. Étudier le cas d'égalité.

II) Soit $f(x) = \exp(\frac{x^2}{2}) \displaystyle\int_0^x \exp(-\frac{t^2}{2}) \mathrm{d}t$.
Trouver une équation différentielle dont f est solution.
Montrer que f est développable en série entière et déterminer ce développement.

Planche 22 I abordable dès la première année

I) Soit E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces de E.
Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$; $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

II) Soit E un espace vectoriel normé complet, f une application de E dans E telle qu'il existe un réel $k \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ vérifiant :
$\forall (x,y) \in E \times E$, $\|f(x) - f(y)\| \leqslant k(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|)$.
Montrer que, si f admet un point fixe, alors il est unique.
Soit (x_n) une suite définie par $x_0 \in E$ et $x_{n+1} = f(x_n)$.
Montrer que la suite $(\|x_{n+1} - x_n\|)$ tend vers 0.
Montrer que la suite (x_n) est convergente.
En déduire que f admet un unique point fixe.

Planche 23

I) Soit (a_n) et (b_n) deux suites complexes telles que $|a_n| \sim |b_n|$.
Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont le même rayon de convergence. *indication : ne pas utiliser d'Alembert.*
Rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{i^n n^2}{1+n^2} z^n$.

II) Déterminer les valeurs propres de $\begin{pmatrix} a & c & \dots & c \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \dots & \ddots & \ddots & c \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq c$. Est-elle diagonalisable ?
Indication : calculer d'abord $\begin{vmatrix} a+t & (c+t) \\ (b+t) & a+t \end{vmatrix}$, $t \in \mathbb{C}$, *en remarquant que c'est un polynôme dont on précisera le degré.*

Planche 24

I) Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

II) Rappeler le domaine de définition de la fonction Gamma, montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donner ses dérivées successives.
Soit $a \in [-1, 1]$ et $x > 0$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \Gamma(x) \frac{a^n}{(n+1)^x} = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t^{x-1}}{1 - ae^{-t}} \mathrm{d}t$.

Planche 25

I) Décomposer $F(X) = \dfrac{1}{-X^2+X+2}$ en éléments simples.

Donner le développement en série entière de F au voisinage de 0 en précisant le rayon de convergence.

Donner un développement limité à l'ordre 3 de F au voisinage de 0.

II) Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel normé E de dimension m, tels que $f^2 = g^2 = f \circ g + g \circ f = I_m$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f et g ont pour matrices respectives $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Planche 26

I) Soit E un espace euclidien muni d'une base B orthonormale et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que la matrice de u^* dans B est la transposée de celle de u.

Comparer les rangs de u et u^* et montrer que si l'un est bijectif, l'autre aussi.

Montrer que $||| \, u \, ||| = ||| \, u^* \, |||$.

II) Montrer que la série de terme général $v_k = \ln(1-\dfrac{1}{2k}) - \dfrac{1}{2}\ln(1-\dfrac{1}{k})$ converge.

Montrer que $\ln\Big(\dfrac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times \ldots \times (2n)}\Big)^\alpha = \alpha\Big(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln n\Big)$.

Donner une condition sur α pour que la série de terme général $\Big(\dfrac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times \ldots \times (2n)}\Big)^\alpha$ converge.

Planche 27 II abordable dès la 1e année

I) Étudier l'intégrabilité de $f(t) = \mathrm{e}^{-t} \,|\sin t\,|$ sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t$; calculer v_0 ; montrer l'existence d'un réel p tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = p^n v_0$.

Montrer la convergence de $\sum v_n$ et calculer sa somme.

Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f(t)\mathrm{d}t$.

II) Décomposer $X^{2n} - 2\cos(n\alpha)X^n + 1$ en produit de polynômes premiers de $\mathbb{R}[X]$.

Planche 28 I abordable dès la 1e année

I) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f défini sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = AM$.

Trouver $\operatorname{Ker} f$. f est-elle injective ? Surjective ?

Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

II) Résoudre (E) : $x(x+2)y' + (x+1)y - 1 = 0$. sur $]-2, 0[$ et $]0, +\infty[$. Trouver une solution sur $]-2, +\infty[$.

Trouver le développement en série entière de cette solution et son rayon de convergence.

Planche 29 I abordable dès la 1e année

I) Si E est de dimension finie, montrer que :

$\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$; $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

II) Justifier que $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est définie sur $]0, +\infty[$.

Trouver une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$, puis en déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les limites en 0 et $+\infty$ de $\Gamma(x)$.

Planche 30 II abordable dès la 1e année

I) Montrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes positifs, équivalentes en $+\infty$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Étudier l'absolue convergence de $\sum \dfrac{(i-1)\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}-1}$.

II) Montrer que les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sont linéaires.

Montrer que l'ensemble E des matrices $M(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$ est stable par produit, par passage à l'inverse. Deux matrices de E commutent-t-elles ?
Déterminer les applications ϕ définies par $\phi(t)=M\big(a(t),b(t),c(t)\big)$ où a,b,c sont dérivables, vérifiant $\phi(t+t')=\phi(t)+\phi(t')$.

Planche 31 II abordable dès la 1e année

I) Chercher la limite de (f_n) définie par $f_n(x)=\cos\left(\dfrac{nx}{n+1}\right)$
Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment de la forme $[-a,a]$ où a est un réel positif.
Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
II) Soit E un espace euclidien de dimension 4 et (e_1,e_2,e_3,e_4) une base de E. Soient $a=e_1+e_2+e_3+e_4$, $b=2e_2-3e_4$, et $F=Vect(a,b)$.
Donner la matrice du projecteur orthogonal de E sur F dans la base (e_1,e_2,e_3,e_4).

Planche 32 II abordable dès la 1e année

I) Pour $x\in[0,1]$, montrer que $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{x}{n})-\frac{x}{n}$ est dérivable sur $[0,1]$ et calculer $S'(1)$.
II) Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$, $H=\{P\in E, P(1)=0\}$.
Pour $P=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$ et $Q=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}b_iX^i$ appartenant à E, montrer que $(P|Q)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_ib_i$ définit un produit scalaire sur E et trouver une base de E orthonormée pour ce produit scalaire.
Calculer la distance de X à H.
Soit $e_i=X^i-X^{i-1}$. Montrer que $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de H.
Déterminer la base de H obtenue en appliquant à la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Planche 33 II abordable dès la 1e année

I) Pour quelles valeurs de $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ la série de termé général $f_n(x)=\dfrac{x}{1+\lambda^nx^2}$ existe-t-elle ?
Pour quelles valeurs de λ la convergence est-elle uniforme ?
La série de terme général $g_n(x)=\dfrac{\ln(1+2^nx^2)}{2^{n+1}}$ existe-t-elle ?
Sa somme est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^\infty$?
II) Rappeler la méthode d'étude de la position relative d'un point par rapport à sa tangente sur un arc paramétré.
Faire cette étude en $t=0$ pour $\begin{cases}x(t)=t^3\\y(t)=t^6\end{cases}$ et $\begin{cases}x(t)=t^2\\y(t)=t^4\end{cases}$
Retrouver ces résultats plus simplement.

Planche 34 II abordable dès la 1e année

I) Déterminer les extremums de $f(x,y)=\sqrt{4-y^2-x^2}$.
Retrouver ce résultat par une méthode géométrique, après avoir reconnu la surface d'équation $z=\sqrt{4-y^2-x-2}$.
II) Étude et représentation de $\begin{cases}x=t(t^2-1)\\y=t^2(t^2-1)\end{cases}$.

Planche 35

I) Calculer $\displaystyle\iint_D(xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^{*2},\ x+y-1\leqslant 0\}$.
II) Montrer, en utilisant la décomposition des noyaux, que pour tout projecteur p de E, $E=\operatorname{Ker}p\oplus\operatorname{Im}p$.
Soit $u\in\mathcal{L}(E)$; montrer que u et p commutent si et seulement si $\operatorname{Ker}p$ et $\operatorname{Im}p$ sont stables par u.