Concours Commun Centrale-Supélec-option MP

Planche 1 abordable dès la 1e année

I) Tracer la courbe d'équation $x^2 - xy - y^2 = 1$.

II) Montrer que l'application ϕ définie sur $\mathbb{N}$ par $\phi(n) = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est bijective.

Planche 2

Montrer qu'il existe une suite réelle (d_n) telle que :
$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin^2(nx)$. L'expliciter.

Planche 3

Discuter du rang de la comatrice d'une matrice X carrée réelle, en fonction di rang de X, puis résoudre $A = com(A)$.

Planche 4 abordable dès la 1e année

I) Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux familles d'un espace euclidien E.
Montrer que $\forall (i,j) \in [1,n]^2, (x_i|x_j) = (y_i|y_j)$, si et seulement s'il existe un automorphisme orthogonal h tel que $\forall i \in [1,n]$, $h(x_i) = y_i$.
Pour $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, existe-t-il $s \in S(E)$ et une base orthonormée vérifiant $\forall i \in [1,n]$, $s(e_i) = x_i$?
Existe-t-il $s \in S(E)$ telle que $\forall i \in [1,n]$, $s(x_i) = y_i$?
II) Donner l'équation de la parabole de foyer $F(1,1)$ et de directrice $D : x - y + 1 = 0$.

Planche 5 abordable dès la 1e année

Soit $a \in [0,1[$ un paramètre fixé. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ l'équation $E_n : \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt = a$ admet une unique solution positive, notée x_n.
Donner, grâce à Maple, une valeur approchée de x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Étudier la monotonie de (x_n). Étudier la limite de (x_n).
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Planche 6

Soit σ une permutation de $[1,n]$ et f_σ l'endomorphisme défini par $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
Montrer que l'application qui à σ associe f_σ est un morphisme injectif du groupe S_n dans le groupe $GL_n(E)$. Quand est-ce diagonalisable ?
Montrer que $p = \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ est un projecteur orthogonal de E et donner son image.
Montrer que si $x \in \operatorname{Ker} p \backslash \{0\}$, $\big(f_\sigma(x)\big)_{\sigma \in S_n}$ engendre $\operatorname{Ker} p$.

Planche 7

Avec Maple, trouver les extrema de $f(x,y) = y\exp(x) + x\exp(y)$.

Planche 8 abordable dès la 1e année

On munit l'espace vectoriel E d'une norme vérifiant :
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
Montrer que ϕ vérifiant $2\phi(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$ est symétrique et que $\phi(x,x) = \|x\|^2$.
Pour y fixé, on pose $f_y(x) = \phi(x,y)$.
Montrer que $f_y(x+x') = f_y(x) + f_y(x')$, puis que f_y est linéaire.
Conclure.

Planche 9 abordable dès la 1e année

I) Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré $n \geqslant 2$. Soit $x_1, \ldots, x_n$ les n racines distinctes de P. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'}(x_k) = 0$.

II) Déterminer l'ensemble Φ des polynômes $P(X)$ vérifiant : $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Planche 10

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+1}} \left(\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p t^p}{p!} - \mathrm{e}^t \right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$; soit u_n cette intégrale.
À l'aide du logiciel de calcul fourni, calculer u_n pour $0 \leqslant n \leqslant 10$, puis effectuer une conjecture sur l'expression de u_n.
Montrer que l'on peut écrire u_n comme somme d'une série et utiliser ce résultat pour démontrer la conjecture précédente.
Étudier la convergence de (u_n).

Planche 11 abordable dès la 1e année

I) Soient $(G, .)$ un groupe et H, K des sous-groupes de G. On pose $HK = \{x \in G / \exists (h,k) \in H \times K, x = hk\}$
Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.
II) Donner le dernier chiffre de 2004^{2007}.
III) Soient a_n et b_n entiers tels que $\forall n \in \mathbb{N}, (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
Montrer que $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \wedge b_n = 1$.

Planche 12 abordable dès la 1e année

I) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ (i.e. $\det A = 1$) et f_A définie sur $P = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ par $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+b}\cdot$
Montrer que f_A est bien définie et que l'application F qui à A associe f_A est un morphisme du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ dans le groupe des bijections de P. Déterminer son noyau.
II) Montrer qu'un groupe admettant un nombre fini de sous-groupes est fini.

Planche 13

I) Soit E un espace de dimension $n \geqslant 1$, U et V deux sous-espaces complémentaires de $\mathcal{L}(E)$, tels que $\forall (u,v) \in U \times V$, $u \circ v + v \circ u = 0$.
Montrer que s'il existe $p \in U$, $q \in V$ tels que $p + q = Id$, alors p et q sont des projecteurs. Soit r le rang de p.
En considérant les restrictions de $v \in V$ à $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$, montrer que $\dim V \leqslant (n-r)^2$. En déduire U et V.
II) Soit (A_k) une suite de matrices symétriques réelles d'ordre n, A une matrice symétrique réelle d'ordre n, telle que $A - A_k$ est positive ainsi que $A_{kn} - A_k$. Montrer que (A_k) converge.

Planche 14

Résoudre sur $\mathbb{R}$, $y'' + y = \sin x$ et $y'' + y = |\sin x|$.
Montrer que la 2e équation admet une unique solution périodique.
Étudier la convergence de la série de fonctions $u_n(x) = a_n x^n$ et calculer explicitement sa somme.
Trouver une relation de récurrence entre a_n et a_{n-2}. En déduire une expression de a_{2n} et a_{2n+1}.
Calculer $a_n a_{n-1}$ et en déduire un équivalent de a_n en $+\infty$.

Planche 15

I) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^3 = u + \alpha Id$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles u a un déterminant positif.
II) Soit A symétrique réelle d'ordre n et A_k la matrice carrée extraite de A pour $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$.
Montrer que A est définie positive ssi $\forall k \leqslant n$, $\det A_k > 0$.

Planche 16

Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il n'existe au cune matrice X vérifiant $X^2 = A$.
Montrer que si une telle matrice X existe, $XA = AX$.
On suppose le polynôme caractéristique de A premier avec son polynôme dérivé ; montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de X.

Montrer que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre et que X appartient au groupe engendré par $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$.

Planche 17

Soit M fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; on note $C(M)$ l'ensemble des matrices commutant avec M et $I_M = \{A \in C(M),\ A^2 = I_n\}$.
On suppose que M est diagonalisable et possède p valeurs propres distinctes ; donner la dimension de $C(M)$ et le cardinal de I_M.
On suppose M nilpotente : caractériser I_M.
Que dire du cardinal de I_M dans le cas général ?

Planche 18

Décomposer en série de Fourier f, 2π-périodique, définie par : $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ sur $]0, 2\pi]$ où $a \in \mathbb{R}$.
On donnera aussi la décomposition dans $\mathbb{R}$.
Écrire $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1-\mathrm{e}^{-u}} \sin u \mathrm{d}u$ sous la forme d'une somme.
Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \sin u \mathrm{d}u$. Utiliser f pour calculer $I(a)$.
En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Planche 19

Soit f en endomorphisme diagonalisable d'un espace E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Montrer que si $g \in \mathcal{L}(E)$, f et g commutent si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.
Soient λ et μ deux valeurs propres de f. Montrer que tout endomorphisme g vérifiant $g(E_\lambda) \subset E_\mu$, $g(E_\mu) = \{0\}$ est vecteur propre de $\phi : g \mapsto g \circ f - f \circ g$.
Soit A une matrice carrée d'ordre 3 diagonalisable, à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Calculer la dimension du commutant de A en fonction de l'ordre de multiplicité des valeurs propres de A.
Montrer que $\phi(M) = MA - AM$ est diagonalisable dans le cas où A possède une valeur propre double.

Planche 20

Soit α dans $]1, +\infty[$, montrer que $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} \mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. À l'aide de Maple, calculer $G(0)$.
Donner la limite de $G(x)$ quand $x \to +\infty$.
Montrer que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie l'équation différentielle linéaire $y' - y = A_\beta x^{-\beta}$ où l'on exprime A_β à l'aide de la fonction $\Gamma(\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} u^{\beta-1} \mathrm{d}u$.

Planche 21

I) Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer le polynôme minimal de J.
Exprimer A en fonction des puissances de J et des a_k.
Diagonaliser A.
II) Dans $\mathbb{R}^3$, existe-t-il une parabole passant par p droites affines ?

Planche 22

Étudier l'intégrabilité de $f : x > 0 \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{ch}(x)} \cdot$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Exprimer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ sous la forme d'une série.
Donner une expression de I en fonction de π, γ (constante d'Euler) et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$, sachant que $-\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln x \ dx = \gamma$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Planche 23

Soient $E = \mathbb{C}_n[X]$, $A \in \mathbb{C}[X]$ et $\prod_{i=0}^{n}(X - \lambda_i)$ où les λ_i sont des nombres complexes deux à deux distincts. On note f, l'application qui à un polynôme P de E associe le reste de la division euclidienne de AP par B.
Montrer que f est un endomorphisme et déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ?

Planche 24

Soit $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, stable par u. Montrer que si u est diagonalisable alors la restriction de u à F l'est aussi.
Soit $p \in [1, n-1]$. Montrer que si tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ de dimension p sont stables par u alors u est diagonalisable.
Montrer que si u et v commutent, u et v diagonalisables, alors ils le sont dans la même base.

Planche 25

Existence de $K_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1} - t^n}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.
Calculer K_0, K_1, K_2, K_3 à l'aide de Maple et en déduire une expression de K_n.
En posant $u = \ln t$, trouver f telle que $K_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f$.
Trouver g, a et b tels que $f(u) = \displaystyle\int_a^b g(u,v)\mathrm{d}v$ et en déduire K_n.

Planche 26

Existence de $u_n = \displaystyle\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\ln(p)}$.
Montrer que $4u_n$ s'exprime comme suit :

$$(-1)^n \frac{3\ln(n+1) - \ln n}{\ln(n)\ln(n+1)} + \sum_{p=n}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{\ln(p)} - \frac{2}{\ln(p+1)} + \frac{1}{\ln(p+2)} \right).$$

Développement asymptotique de $\dfrac{1}{\ln(p)} - \dfrac{2}{\ln(p+1)} + \dfrac{1}{\ln(p+2)}$ (avec Maple). Équivalent de u_n. Étude de $\sum u_n x^n$.

Planche 27

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telle que l'équation $AX = XB$ admet une solution non nulle X_0.
Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)X_0 = X_0 P(B)$.
Montrer que A et B ont une valeur propre commune.
Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ ayant une valeur propre commune.
Montrer que si M et N sont deux matrices non nulles, il existe une matrice Q telle que MQN soit non nulle.
Montrer que l'équation $AX = XB$ a une solution non nulle en utilisant les polynômes minimaux de A et B. Conclure.
Cours : théorème de Cayley-Hamilton ; conditions de diagonalisabilité.

Planche 28

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, vérifiant $u \circ v - v \circ u = \alpha u + \beta v$.
Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.
Indication : on distinguera les cas $\alpha = \beta = 0$; $\alpha \neq 0, \beta = 0$; $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$.

Planche 29

À l'aide de Maple ou Mathematica, montrer que pour $0 \leqslant m, n \leqslant 4$, $I_{m,n} = \int_0^{\pi} t^{2m}\cos(nt)\mathrm{d}t = \sum \alpha_k(m,n)\pi^{2k+1}$ où les α_k sont dans $\mathbb{Q}$.
Démontrer ce résultat pour tout (m, n) (on cherchera une relation entre $I_{m,n}$ et $I_{m-1,n}$).
Expliciter la série de Fourier de f_m, 2π-périodique, définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^{2m}$.
Soit $Z_m = \dfrac{1}{t^{2m}} \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^{2m}}$; à l'aide de $f_m(\pi)$, trouver une relation de récurrence pour les Z_k.

Planche 30

Montrer que $\| A \| = \sup\limits_{i\in[1,n]} \sum\limits_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,|^2$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (elle vérifie $\| AB \| \leqslant \| A \| \| B \|$).
Montrer que ϕ défini par $\phi(A) = \chi_A(X)$ est continu pour cette norme et la norme infinie de $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n, est scindé si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\, P(z) \,| \geqslant |\, \Im(z) \,|^n$.
Montrert que l'adhérence de l'ensemble des matrice diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est incluse dans l'ensemble des matrices trigonalisables. Y-a-t-il égalité ?

Planche 31 I abordable dès la 1e année

I) Si p est un projecteur de $\mathbb{R}^n$ euclidien, montrer l'équivalence des quatre propriétés suivantes :
(1) p est orthogonal ; (2) $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Im} p^{\perp}$; (3) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\| p(x) \| \leqslant \| x \|$
(4) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $< p(x)|y > = < x|p(y) >$.
Pour $n = 5$ expliciter l'expression du projecteur orthogonale sur F d'équations $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5} i x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{5} i^2 x_i = 0 \end{cases}$ où $(x_1, \ldots, x_5)$ est une base de $\mathbb{R}^5$.
II) Cours : que dire des matrices orthogonales diagonalisables ?
$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est-il monogène ?
$X^4 + 1$ est-il réductible dans $\mathbb{R}[X]$?
Donner un endomorphisme qui n'admette pas de polynôme minimal.

Planche 32 abordable dès la 1e année

Montrer que le triangle de sommets :
$A(1, 0)$, $B(\cos\beta, \sin\beta)$, $C(\cos\gamma, \sin\gamma)$
a pour aire $\mathcal{A} = 2\left| \sin\dfrac{\gamma-\beta}{2} \sin\dfrac{\beta}{2} \sin\dfrac{\gamma}{2} \right|$.
Déterminer les triangles ABC d'aire maximale.
Déterminer les triangles d'aires maximale dont les sommets sont sur une ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Planche 33

Pour A et B matrices carrées réelles de coefficients respectifs a_{ij} et b_{ij}, on note $A \circ B$ la matrice de coefficient $a_{ij}b_{ij}$.
On suppose A et B symétriques et positives.
Montrer que la forme quadratique de rang r, $q_A(X) =^t XAX$ s'écrit comme somme des carrés de r formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^n$.
En déduire que A est la somme de r matrices symétriques de rang 1. Quelle est la forme la plus générale d'une matrice de rang 1 ?
Montrer que $A \circ B$ est aussi symétrique positive.
On suppose maintenant A et B symétriques, définies et positives. Montrer que $A \circ B$ l'est aussi.
Étudier la matrice de coefficient $\exp(a_{ij}b_{ij})$.

Planche 34 abordable dès la 1e année

Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\exists ! x_n \geqslant 0$ solution de l'équation :

$E_n : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{k}{n}\Big)^x = 1$.

À l'aide de Maple, calculer $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{100}$ et comparer $\dfrac{x_n}{n}$ à $\ln 2$.

Montrer que $\forall q \in [1, n-1]$, $\forall t > 0$, $\big(1 - \dfrac{q}{n}\big)^{nt} \leqslant \mathrm{e}^{-qt}$ et en déduire que $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{x_n}{n} \leqslant \ln 2$. Montrer que (x_n) croit et diverge vers $+\infty$.

Planche 35

I) Montrer que la série de terme général $(-1)^n \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \mathrm{d}t$ converge. Calculer explicitement sa somme.

Le reste de cette série est-il équivalent à $\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \mathrm{d}t$?

Montrer $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \mathrm{d}t \sim \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$ en $+\infty$.

II) Donner un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k$.

Trouver deux suites (u_n) et (v_n), équivalentes en $+\infty$, mais telles que $\ln(u_n)$ et $\ln(v_n)$ ne soit pas équivalents en $+\infty$.
Quand $u_n \sim v_n$ entraine-t-il $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$?

Planche 36

I) Pour A et B matrices carrées complexes, montrer qu'il est équivalent de dire :
(1) $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AX - XB = Y$.
(2) $AX - XB = 0 \Rightarrow X = 0$.
(3) A et B n'ont pas de valeur propre commune.
Indication : on pourra montrer que si (3), $\chi_B(A)$ est inversible.
II) À quelle condition sur sa taille, une matrice A carrée réelle, admettant 1 et -1 pour valeurs propres et vérifiant $A^3 = A^5$ est-elle diagonalisable ?

Planche 37

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à l'équation $X^2 + pX + qI_n = 0$, avec $X \in \mathcal{M}_n(K)$, et $p, q \in K$.
Si $K = \mathbb{C}$, résoudre et discuter l'équation.
On suppose maintenant $K = \mathbb{R}$. Traiter le cas où le polynôme $t^2 + pt + q$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
Dans cette question, on suppose $p = 0, q = 1$. Montrer que n est pair ($n = 2m$) et que X est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$.
On pourra commencer par le cas $m = 1$ puis traiter le cas général.

Planche 38

Soit $u_n(x) = \left(\dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\int_0^a (\ln(1+t))^n \mathrm{d}t\right) x^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$.
Étudier la convergence de $\sum u_n(x)$ en fonction des 3 paramètres α, a et x.

Planche 39

Soit X un espace vectoriel normé complet. Soit (α_n) une suite réelle positive telle que $\sum \alpha_n$ converge.
Soit T une application de X dans lui-même telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in X^2, \| T^n(x) - T^n(y) \| \leqslant \alpha_n \| x - y \|$.
Soit (x_n) une suite dans X telle que $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = T(x_n)$. Montrer que (x_n) converge.
On note l la limite de cette suite. Vérifier que c'est un point fixe de T. Est-ce le seul ?

Montrer que $\| x_n - l \| \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \alpha_k\right) \| x_1 - x_0 \|$.

T est maintenant telle que : $T(y)(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t f(s, y(s)) \mathrm{d}s$. Montrer que $\| T^n(y)(t) - T^n(z)(t) \| \leqslant \dfrac{M^n |t|^n}{n!} \| y - z \|_\infty$.

Planche 40

Soient $\alpha < \beta$ deux réels et $(L_k)_{k\in[0,n]}$ les polynômes de Lagrange associés aux $n+1$ réels dinstincts $a_0, a_1, \dots, a_n$. Pour $V = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ on note Q la forme quadratique déinie par

$$Q(V) = \int_\alpha^\beta \Big(\sum_{k=0}^n x_k - L_k(t)\Big)^2 \mathrm{d}t.$$

Montrer que $\exists(\gamma,\delta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\forall V$, $\gamma \sum_{k=0}^n x_k^2 \leqslant Q(V) \leqslant \delta \sum_{k=0}^n x_k^2$.

Retrouver l'équivalence des normes définies sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\| P \|_1 = \Big(\int_\alpha^\beta \big(P(t)\big)^2 \mathrm{d}t\Big)^{1/2} \text{ et } \| P \|_2 = \Big(\sum_{k=0}^n \big(P(a_k)\big)^2\Big)^{1/2}.$$

Planche 41

Soit $a_1, \dots, a_n$ réels ; calculer le déterminant de $M = \big(\sin(a_i + a_j)\big)$.
Montrer que, dans E euclidien de dimension n, pour toute base $(e_1, \dots, e_n)$, il existe une unique base $(f_1, \dots, f_n)$, telle que :

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^n (x|e_i) f_i.$$

Montrer que $\phi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.
Appliquer le résultat précédent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.
Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, générateur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et dont tout élément a ses valeurs propres complexes de module 1. Montrer que G est borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Planche 42

Avec Maple : décomposer $\dfrac{1}{1-t^6}$ en élémentes simples.

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^6}$ sur $]-1,1[$ et en déduire $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{6n+1}$ sur $]-1,0]$.

Que vaut $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{6n+1}$?

Planche 43

Calculer les coefficients de Fourier de f, 2π-périodique, définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(t) = \cos(at)$, $a \in\,]0,1[$.
Préciser la convergence de la série de Fourier.

Montrer que $\displaystyle\frac{a\pi}{\sin(a\pi)} = 1 + 2a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - a^2}\cdot$

Étudier l'intégrabilité de $h(t) = \dfrac{t^{a-1}}{1+t}$ sur $]0,+\infty[$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ peut s'écrire sous forme de série.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}\cdot$

Planche 44

Avec Maple : donner le domaine de définition de F définie par $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(u^2+i)t^2}}{u^2+i}\,\mathrm{d}u$.
Donner la limite de F en $+\infty$. Est-elle dérivable ? Si oui calculer F'.

Déduire de $F(0)$ la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t^2 \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t^2 \mathrm{d}t$.

Planche 45

Domaine de définition D de $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\ln t}}\cdot$

f admet-elle une limite à la borne inférieure α de D ? Donner un équivalent de f en α.
Donner un équivalent de f à la borne supérieure de D.
À l'aide d'une fonction auxiliaire, donner les variations de f.
À l'aide d'un programme informatique, donner une approximation de la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est maximal.

Planche 46 abordable dès la 1e année

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$.
Montrer que $\exists (A,B) \in \mathbb{R}[X]^2$, $P = A^2 + B^2$.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $P(x) \geqslant 0$.
Montrer que $\exists (A,B) \in \mathbb{R}[X]^2$, $P = A^2 + B^2$.
Soit P un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$, montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}$, $P(x) \in \mathbb{Q}$.

Planche 47

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles de la variable réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$; soit $p \in]-1,0[\cup]0,1[$, $q = 1-p$, et u l'endomorphisme défini sur E par $u(f)(x) = f(px+q)$.
Montrer que u est un automorphisme, que ses valeurs propres sont dans $]-1,1]$, et que si f est un vecteur propre de u, $\exists k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = 0$.

Planche 48

Avec Maple, tracer quelques trajectoires solutions de :

$$y'(x) = xy(x) + \frac{y(x)}{1+y^2(x)}\,.$$

Que peut-on conjecturer quant à l'intervalle de définition des trajectoires maximales ?
Montrer que ces trajectoires maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.
Que dire des branches asymptotiques en l'infini ?

Planche 49 II abordable dès la 1e année

I) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n et ϕ_u défini sur $\mathcal{L}(E)$ par $\phi_u(v) = u \circ v$.
Montrer que ϕ_u est un endomorphisme, puis qu'il est diagonalisable si et seulement si u l'est, d'abord en utilisant les polynômes annulateurs, puis en comparant les spectres et sous-espaces propres.
II) Caractériser les endomorphismes de E, de dimension finie, vérifiant $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$. *Indication : montrer que* $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$

Planche 50

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme subordonnée à une norme de $\mathbb{C}^n$. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ inclus dans la boule de centre I_n et de rayon R, $g \in G$ et λ une valeur propre de g.

Montrer que $|\,1-\lambda\,| \leqslant R$, puis que $|\,\lambda\,| = 1$, puis que si $R < \sqrt{3}$ alors $\lambda = 1$. Si $R < \sqrt{3}$, déterminer G.

Planche 51

Montrer que $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = f'(0) = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Montrer que $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |\,f(x)\,|$, $N_1(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |\,f(x) + f''(x)\,|$ et $N(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |\,f(x)\,| + \sup\limits_{x\in[0,1]} |\,f''(x)\,|$ sont trois normes sur E.

Montrer que N_∞ et N ne sont pas équivalentes mais que N et N_1 le sont.

Peut-on exhiber une suite de (E, N_∞) n'admettant pas de sous-suite convergente ?

Planche 52

Décomposer $f_n(x) = \dfrac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x+i)}$ en éléments simples.

Soit $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$; à l'aide de Maple, donner les valeurs numériques de $V = [J_1, J_2, \dots, J_{10}]$.

Exprimer V dans la base $V_1 = [1]_{1\leqslant n\leqslant 10}$, $V_2 = [\dfrac{1}{\ln n}]_{1\leqslant n\leqslant 10}$, $V_3 = [n]_{1\leqslant n\leqslant 10}$.

Planche 53

I) Soit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(3n+1)(2n+1)}$.
Montrer qu'il existe deux réels a et b, que l'on déterminera, tels que : $S = a\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^3} + b\pi$.
Déterminer, si possible en utilisant le logiciel fourni, la valeur exacte de S.
II) Soit $k \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite de fonctions k-lipschitziennes convergeant simplement vers u sur $[0,1]$.
Montrer que u est aussi k-lipschitzienne.
Montrer que la convergence est uniforme.
III) Cours : Montrer que le développement en série entière de $x \mapsto \mathrm{Arc}\tan x$ reste valable en 1.

Planche 54 abordable dès la 1a année

Rechercher $\lambda > 0$ minimal tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} (P')^2 \leqslant \lambda \int_{-1}^{1} P^2$.

Planche 55

Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{t-i}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ seulement.
Montrer que f est à valeurs imaginaires.
Montrer qu'il existe A tel que :
$\forall x \neq 0, f(x) = \dfrac{A}{x^2}\, g(x)$ avec $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{(t-i)^3}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ et vérifie une équation différentielle d'ordre 1 très simple.
Grâce à $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, calculer f sur $\mathbb{R}^{*-}$.
Calculer f sur $\mathbb{R}^{*-}$. (Calculer $f(1)$ grâce à Maple)

Planche 56

Soit C le cercle de centre $(0,a)$ et de rayon $a > 0$. Pour M et N sur C, on note $f(M,N)$ la surface du triangle OMN. Montrer qu'il existe M_0 et N_0 tels que f soit maximale. Trouver tous les couples (M_0,N_0) qui conviennent.

Planche 57

Montrer que la suite (u_n), définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \cos u_n$, converge vers une limite l dont on calculera une valeur approchée à l'aide d'un logiciel de calcul formel. Justifier la précision obtenue.
Soit $\varepsilon_n = l - u_n$; avec le même logiciel, étudier le comportement de la suite de terme général $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}$.
Montrer que $\varepsilon_{n+1} = k\varepsilon_n + k'\varepsilon_n^2 + o(\varepsilon_n^2)$ où k et k' sont à préciser.
À l'aide de séries, montrer que la suite de terme général $\dfrac{\varepsilon_n}{k^n}$ converge. Montrer que $\varepsilon_n = Ak^n + Bk^{2n} + o(k^{2n})$. Montrer que A est non nul.

Planche 58

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme définie par $N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}^2$.
Montrer qu'il existe un unique disque fermé de rayon minimum contenant A.

Planche 59

I) Tracer avec Maple la surface d'équation $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.
Étudier les extremums de f.
II) Trouver les solutions de $x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$ développables en série entière au voisinage de 0.
Résoudre cette équation, directement, puis à l'aide de Maple.

Planche 60 abordable dès la 1e année

Soient $A_1, \ldots, A_n$, n points de $\mathbb{R}^3$ euclidien et u une isométrie affine de $\mathbb{R}^3$. On note $E = \{A_1, \ldots, A_n\}$ et on suppose $u(E) \subset E$.
Montrer que $u_{|E}$ est surjective.
Montrer que l'isobarycentre de $A_1, \ldots, A_n$ est un point fixe de u. Quitte à prendre cet isobarycentre pour origine, on suppose désormais u linéaire et $n = 4$.
Donner les coordonnées (les plus simples possibles) d'un tétraèdre de $\mathbb{R}^3$. Déterminer le groupe G des isométries affines laissant invariant ce tétraèdre. Déterminer les sous-groupes de G.
G est-il isomorphe au groupe des isométries affines laissant invariant un carré ?

Planche 61 abordable dès la 1e année

On note $C = \{AB - BA,\, (A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(K)\big)^2\}$, N l'ensemble des matrices de diagonale nulle et D la matrice diagonale de diagonale $(1, 2, \ldots, n)$.
Montrer que $\phi \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(K)\big)$ défini par $\phi(X) = DX - XD$, induit un automorphisme sur N.
Monter que si M est semblable à un élément de C, $M \in C$.
Monter que $\mathrm{tr}(A) = 0$ si et seulement si A est semblable à un élément de N. Montrer que C est l'ensemble des matrices de trace nulle.

Planche 62

Pour $n \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + |\, n - x\,|}\cdot$
Montrer que f_n^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer son intégrale.
Étudier la convergence de (f_n). Quel en est le type ?
Soit g de carré intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que $f_n g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et étudier la convergence de la suie $\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n g\right)$. Quelle est sa limite ?

Planche 63

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty], \mathbb{R}_+)$ intégrable. Montrer qu'il existe une fonction g à valeurs positives ou nulles, croissante, avec $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (donc non intégrable) telle que fg soit encore intégrable.
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty], \mathbb{R}_+)$ non intégrable. Montrer qu'il existe une fonction g à valeurs positives ou nulles, décroissante, intégrable, avec $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ telle que fg soit non intégrable.

Planche 64

Montrer que $N(f) = \left(\displaystyle\int_a^b f^2 + \int_a^b f'^2\right)^{1/2}$ est une norme dérivant d'un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$.
En étudiant $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b (b - x) f'(x)\mathrm{d}x$, montrer que :

$$|\, f(a)\,| < \frac{1}{(b-a)^{1/2}}\left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} + \left(\frac{b-a}{3}\right)^{1/2}\left(\int_a^b f'^2\right)^{1/2}.$$

Montrer que $\exists \alpha > 0,\ \displaystyle\sup_{x \in [a,b]} f(x) \leqslant \alpha N(f)$.
Indication : écrire $f(x) = f(a) + f(x) - f(a)$.
$\sup f$ et $N(f)$ sont-elles équivalentes ?
Indication : considérer $f_n(x) = \left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)^n$.

Planche 65

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E.
Que peut-on dire de $v = \dfrac{1}{2}\,(u + u^*)$?
Trouver l'image de la sphère unité S de E par q défini par $q(x) = \big(u(x)|x\big)$ en fonction des valeurs propres de v.
Application : Trouver $\displaystyle\sup_{x \in S}\{(a|x)(b|x), (a, b) \in S^2\}$ en fonction de a et b. *Indication : on pourra considérer le rang du système* $\{a, b\}$.

Planche 66

I) Soit $(E) : y' = \sqrt{4y^3 + 2y^2 + 9}$.
Trouver une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$.
Trouver une solution de (E) définie sur $]-\infty, b[$ $(b \in \mathbb{R})$.
Trouver toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
II) Trouver une série non triviale dont la somme vaut $\dfrac{\pi}{4}\cdot$

Planche 67

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t$
Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition.
Équivalent de f en $+\infty$, en 0.

Planche 68 abordable dès la 1e année

I) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$; résoudre $\mathrm{tr}(A)X - \mathrm{tr}(X)A = B$.
II) Étudier f défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $f(X) = X - \mathrm{tr}(X)A$.
En déduire les solutions de $X - \mathrm{tr}(X)A = B$.

Planche 69 abordable dès la 1e année

Montrer que $\ln(x)\tan(x) = 1$ admet une infinité de racines sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la suite des racines (x_n) est, pour chaque n dans $I_n =]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
Calculer une valeur approchée de la séquence des racines sur I_n pour $5 \leqslant n \leqslant 10$ en programmant sur Maple et comparer avec la valeur approchée de la séquence des $n\pi$ pour $5 \leqslant n \leqslant 10$ également à programmer.
Déterminer un équivalent simple de x_n, puis la limite de $(x_n - n\pi)$.
Effectuer un développement asymptotique de x_n.

Planche 70 abordable dès la 1e année

Soit u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ euclidien et σ défini par :
$\sigma(x) = x - 2(x|u)u$.
Déterminer $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3,\ \big(\sigma(x)|x\big) \leqslant 0 \leqslant (x|u)\}$.
Montrer que $x \in \Omega \Leftrightarrow \forall y \in \Omega,\ (x|y) \geqslant 0$.
Donner un exemple de famille génératrice de Ω.
Existe-t-il une famille génératrice finie ?

