Concours divers – option MP

Planche 1 EIVP-TPE

I) Préciser u nilpotent tel que $u \circ u^* = u^* \circ u$ si $\dim E = n$.
II) Trouver toutes les applications f, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et vérifiant $xf'(x) - 2f(-x) = 0$.
III) Trouver tous les nombres premiers p divisant $2^p + 1$.
IV) Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, montrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A.

Planche 2 EIVP-TPE, abordable dès la 1e année

I) Existe-t-il un produit scalaire pour lequel $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation ?
II) Trouver les entiers naturels n tels que $n^4 + 4$ soit premier.

Planche 3 EIVP-TPE, abordable dès la 1e année

I) la loi $*$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $A * B = A + B - AB$ est-elle associative ? Commutative ? Possède-t-elle un élément neutre ? Quels sont les éléments inversibles ?
Si $A + B = AB$, A et B commutent-elles ?
II) Trouver f, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x$.

Planche 4 EIVP-TPE, abordable dès la 1e année

I) Soit u endomorphisme d'un espace E euclidien de dimension 3 ; simplifier $\varphi(x, y, z) = [u(x), y, z] + [x, u(y), z] + [x, y, u(z)]$.
Montrer l'existence de f linéaire telle que :
$\forall (x, y) \in E^2,\ f(x \wedge y) = \big(f(x) \wedge y - f(y) \wedge x | x \wedge y\big)$.
II) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $3x + xy + 2y = 0$.

Planche 5 EIVP-TPE I abordable dès la 1e année

I) Montrer que (u_n) et (v_n), définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + v_n$, $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, convergent vers la même limite.
II) Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(at) - \cos(bt)}{t}\, dt$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La calculer. *Indication : on pourra montrer que cette intégrale vaut* $\ln \dfrac{b}{a}$

Planche 6 EIVP-TPE

I) Nature et somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})}{n}$.
II) Trouver f deux fois dérivable telle que $f'(x) = f(\frac{1}{x})$.

Planche 7 EIVP-TPE

I) Existence de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} x^n$.
Montrer que f vérifie l'équation $x(4 - x)y' - (x + 2)y = -2$ et en déduire une expression de f.
II) Trouver les fonctions f continues vérifiant :
$\displaystyle\frac{1}{2} \int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \right)^2$.

Planche 8 EIVP-TPE

I) Trouver la solution de $\begin{cases} x'(t) + x^2(t)\mathrm{e}^t = 0 \\ x(a) = b \end{cases}$ en fonction de a et b.
II) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3.
Trouver les $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\dim(\operatorname{Ker} u) = \dim(\operatorname{Im} u^2)$.

Planche 9 EIVP-TPE

I) Calculer la limite de la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Calculer un DL à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$ de I_n.

II) Convergence et somme, pour $\theta \in]0,\pi[$, de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n\sin^2(n\theta)}{2^n}$.

Planche 10 EIVP-TPE

I) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; trouver les réels a tels que $(a^n A^n)$ admette une limite non nulle.
II) Résoudre, pour $x > 0$, l'équation différentielle :
$(x\ln x)y' - y = (2\ln x - 1)x^2$. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$?

Planche 11 EIVP-TPE

I) Convergence et somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$.

II) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ normé, l'ensemble des matrices nilpotentes est-il ouvert ? Fermé ? Compact ? Connexe ?

Planche 12 EIVP-TPE

I) Calculer le cardinal de l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
II) Trouver les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à P associe $XP' - P$.
III) Trouver les entiers n tels que $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M^3 - M^2 - M - 2I_n$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

Planche 13 EIVP-TPE

I) Montrer que si p est un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E, $\forall x \in E$, $\| p(x) \| \leqslant \| x \|$.
Montrer que l'ensemble K des projecteurs orthogonaux est compact. Est-ce le cas pour l'ensemble des projecteurs ?

II) Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$. Pour tout $n \geqslant 1$, $U_n = \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Montrer que la série des U_n diverge.

Planche 14 EIVP-TPE

I) Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales réelles est compact dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n réelles.

II) Domaine de définition D de $G(x) = \int_0^1 \ln(t)t^{-x}\mathrm{d}t$.

Montrer que G est continue sur D.
Calculer $G(x)$ pour tout x de D.

Planche 15 EIVP-TPE

Soient $I = \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, $Y_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n)$ et

$f_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kx} + \frac{\mathrm{e}^{-nx} - \mathrm{e}^{-x}}{x}$.

Montrer que (Y_n) et (f_n) convergent respectivement vers Y et f.

Montrer que $\int_{\mathbb{R}+} f = Y$.

Indication : pour cette dernière question, on montrera que $\int Y_n \to Y$ *et que* $\int f_n \to f$ *par convergence dominée.*

Planche 16 EIVP-TPE

I) Résoudre : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

Indication : faire le changement de variable $x = au+bv$, $y = cu+dv$ *avec* (a,b,c,d) *choisis en conséquence.*
II) Quel est le nombre de solutions de l'équation $x_1 + \ldots + x_p = n$ (avec $x_i \in \mathbb{N}$) ?

Planche 17 EIVP-TPE

Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{a}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a+t^2}+\sqrt{a-t^2}}$ ne dépend pas de a et calculer I.

Planche 18 EIVP-TPE

I) Montrer que (u_n) converge dans E compact si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

II) Calculer la limite en $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\sin(nt)|}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Planche 19 EIVP-TPE

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|a_{ii}| > \displaystyle\sum_{i\neq j} |a_{ij}|$, est inversible.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i, j,\ a_{ij} > 0$ et $\forall i, \sum |a_{ij}| = 1$; montrer que 1 est valeur propre de A et que toute valeur propre de A est de module au plus égal à 1.

Planche 20 EIVP-TPE

Pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on définit f_α par $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{1-\sin\alpha\cos x}$.
Montrer qu'il existe une suite de terme général :
$a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{1-\sin\alpha\cos x}\,\mathrm{d}x$, telle que $f_\alpha(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n\cos(nx)$.
Trouver une relation entre a_0 et a_1, puis une relationde récurrence entre les a_n. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{2-\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Planche 21 EIVP-TPE

I) Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)}\cos(\sin(t)-nt)\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$.

II) Que peut-on dire de la série $\sum \dfrac{1}{\ln(n!)}$?

Planche 22 EIVP-TPE, II abordable dès la 1e année

I) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que le polynôme minimal de u s'écrit $\mathcal{M}_u(X) = X^kQ(X)$ avec $k \geqslant 1$ et $Q(0) \neq 0$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u^k) \oplus \mathrm{Im}(u^k)$.
On suppose qu'il existe $h \geqslant 1$ tel que $E = \mathrm{Ker}(u^h) \oplus \mathrm{Im}(u^h)$.
Montrer qu'il existe P, polynôme de valuation h tel que $P(u) = 0$.
II) Soit $(G, \times)$ un groupe abélien, a et b deux éléments de G d'ordre fini p et q premiers entre eux . Montrer que ab est d'ordre pq.

Planche 23 EIVP-TPE

I) Soit (u_n) une suite définie par $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = 2\arctan(u_n) \end{cases}$.
Montrer que la suite (u_n) admet une limite λ.
Quelle est la nature de la série $\sum(u_n - \lambda)$?

II) On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Étudier la définition et le caractère C^1 de φ. Montrer que φ est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

Planche 24 EIVP-TPE

I) Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 6 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer les racines carrées de A.

II) Résoudre $(1+e^x)y'' + 2e^xy' + (1+2e^x)y = \cos(x)$.

Planche 25 EIVP-TPE

I) Justifier l'existence de $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$.
Déterminer la limite l de (u_n) et la nature de $\sum(u_n - l)$.

II) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{1/x}\int_0^x \mathrm{e}^{-1/t}\mathrm{d}t$.
En donner un développement limité à l'ordre 3 en 0.

Planche 26 EIVP-TPE

I) Soit G un groupe fini, $x \in G$ d'ordre n, f un morphisme de G dans le groupe H. Montrer que l'ordre de $f(x)$ divise n.
En déduire les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
II) Soit A carrée d'ordre n ayant n valeurs propres distinctes. Montrer que si $B^2 = A$, B est diagonalisable.

Planche 27 EIVP-TPE, I abordable dès la 1e année

I) Soit f un endomorphisme d'un espace E de dimension n.
En étudiant $f_{|\operatorname{Im} f}$, montrer que :
$\dim \operatorname{Ker} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f^2 \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} f$.
II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. f définie par $f(M) = \operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A$ est-elle diagonalisable ?

Planche 28 EIVP-TPE

Montrer que A carrée d'ordre n et de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle. $A = \left(\frac{i}{j}\right)$ est-elle diagonalisable ?

Planche 29 EIVP-TPE, II abordable dès la 1e année

I) Trouver le domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\operatorname{Arc tan} nx}{n^2}$.
Étudier la continuité de f, ses limites aux bornes.
Si on note l une telle limite, donner un équivalent de $f(x) - l$.
II) Montrer que, si f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, et vérifie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x-y)f(x+y) \leqslant f(x)^2$, alors $f''(x)f(x) \leqslant f'(x)^2$.

Planche 30 EIVP-TPE, II abordable dès la 1e année

I) Que dire de $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \\ 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 \end{pmatrix}$?

II) Déterminer la distance entre les coubes $C_1 : f(x) = x$ et $C_2 : g(x) = x - 2$.

Planche 31 EIVP-TPE, II abordable dès la 1e année

I) Éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 2i\sqrt{n-1} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec 3 éléments non nuls dont 2 sur la diagonale (et le reste nul).
II) Résoudre $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.

Planche 32 EIVP-TPE, I abordable dès la 1e année

I) Montrer que la famille $(\ln p)_{p \in P}$ où P est l'ensemble des nombres premiers est $\mathbb{Q}$-libre.
II) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles diagonalisables ? Semblables ? Calculer A^n.

Planche 33 EIVP-TPE, II abordable dès la 1e année

I) Déterminer les matrices M telles que $M^2 + M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
II) Soit p un nombre premier de la forme $p = 3q + 1$.
Montrer qu'il existe $\overline{a}$ appartenant à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ non nul tel que $\overline{a}^q \neq \overline{1}$.
En déduire que $-\overline{3}$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Planche 34 EIVP-TPE, II abordable dès la 1e année

I) Soit A carrée, complexe et nilpotente et B commutant avec A.
Montrer que B est inversible si et seulement si $A + B$ l'est aussi.
II) Soient f et g deux endomorphismes en dimension n. Montrer que $\dim \operatorname{Ker} f \circ g \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$, à l'aide de $g_{|\operatorname{Im} f}$.

Planche 35 EIVP-TPE, I abordable dès la 1e année

I) Soit f continue sur $[0,a]$ et $\phi(x) = \dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$ sur $[0, \dfrac{a}{2}[$.
Montrer que si f est dérivable à droite en 0, $\lim\limits_{x\to 0^+} \phi(x) = f_d'(0)$.

Étudier la réciproque pour f continue en 0.

II) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+\ldots+t^n}$.

Planche 36 EIVP-TPE, I abordable dès la 1e année

I) Montrer que $f(P) = P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Ce résultat se conserve-t-il sur $\mathbb{R}[X]$?

II) On rappelle que $\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i}$; trouver la borne supérieure de $\left|\begin{array}{rcl} \phi : \{z\in\mathbb{C}, |\,z\,| \leqslant 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & |\sin z\,| \end{array}\right.$.

Planche 37 EIVP-TPE, II abordable dès la 1e année

I) Résoudre le système $\begin{cases} x' = \dfrac{tx+y}{1+t^2} \\ y' = \dfrac{-x+ty}{1+t^2} \end{cases}$.

II) Calculer le PGCD de $2n-1$ et $9n+4$.

Planche 38 EIVP-TPE, I abordable dès la 1e année

I) Faire un DL à l'ordre 3 en 0 de $g(x) = \operatorname{Arc}\cos(1-x)$, puis donner la limite en 0 de $\dfrac{\operatorname{Arc}\cos(1-x)}{\sqrt{x}}$.

II) Soit f injective et strictement monotone sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ telle que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{f(x)} = 0$.

Planche 39 Télécom SudParis

I) Montrer que l'application $\phi(A) = \mathrm{e}^A$ est une bijection de $S_n^+(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

II) Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{2}\ln x$ en $+\infty$.

Planche 40 Télécom SudParis

I) Nature de la série de terme général $u_n = \left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$.

II) Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n. Montrer qu'il est équivalent de dire :
(1) $\forall x\in E$, $\big(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\big)$ engendre E ;
(2) les valeurs propres de f sont simples ;
(3) $(Id, f, \ldots, f^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Planche 41 Télécom SudParis, I abordable dès la 1e année

I) Étudier la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

II) À quelles conditions la trajectoire de $M(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, vérifiant $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + \beta y(t) \\ y'(t) = -\beta x(t) + 6y(t) \end{cases}$ est-elle une hyperbole ?

Planche 42 Télécom SudParis, abordable dès la 1e année

I) Soit $P_n(X) = X^n + X^{n-1} + 2X - 1 \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer qu'il existe un unique réel x_n tel que $P(x_n) = x_n$. Montrer que la suite (x_n) est convergente et que sa limite est 1.
II) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.

Planche 43 Télécom SudParis

I) Soit la suite croissante, à terme positifs (u_n) où u_n est solution de $\ln x = \tan x$. Pour x réel, que dire de la convergence de la série de terme général u_n^x ?
II) La matrice A dont les coefficients a_{ij} valent 1 dès que $i=1$, $i=n$, $j=1$ ou $j=n$ et 0 sinon, est-elle diagonalisable ? Donner son polynôme caractéristique et son polynôme minimal.

Planche 44 Télécom SudParis

I) Pour $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{ch}(x))^n}$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$.
II) Soit E un espace vectoriel de dimension finie ($\geqslant 2$) et u un endomorphisme de rang 1. Montrer que u est non diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$.

Planche 45 Télécom SudParis

I) Montrer que s'il existe λ tel que $C = AB - BA = \lambda A$ alors C est nilpotente.
II) Donner la nature de la série de terme général

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x + \ldots + x^{n-1}}\,\mathrm{d}x.$$

Planche 46 Télécom SudParis

I) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E, $v_n = \dfrac{1}{n+1}\,(Id_E + u + \ldots + u^n)$.
Rappeler la définition de la norme subordonnée $\|u\|_L$ de u.
On suppose que $\|u\|_L \leqslant 1$.
Montrer que la suite (v_n) converge simplement vers un projecteur à expliciter. Pour cela, on pourra étudier d'abord la limite de $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $x \in \mathrm{Ker}(u - Id_E)$ puis pour $x \in \mathrm{Im}(u - Id_E)$.
II) Rayon de convergence de la série entière $\sum \arccos(1 - \dfrac{n}{2^n})x^n$.

Planche 47 Télécom SudParis, I abordable dès la première année

I) Pour $n \geqslant 1$, on pose $f_n(x) = -1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \ldots + \dfrac{x^n}{n}$.
Montrer que f_n admet une unique racine $x_n \in\,]0,1[$.
Montrer que la suite (x_n) est décroissante, convergente et donner sa limite.

II) Valeurs et vecteurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) & \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}$.

Planche 48 Télécom SudParis

I) Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E.
Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$ et que le rang de u est pair.
II) Soit f continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que $\phi(x) = \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)\big)^x \mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$.
Calculer $\phi(0)$ et $\phi'(0)$, en déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \big(\phi(x)\big)^{1/x}$.

Planche 49 ENSEA, I abordable dès la 1e année

I) Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, telle que $\exists k \in\,]0, \dfrac{1}{2}[$, $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2$, $|\, f(x) - f(y)\,| \leqslant k(|\, f(x) - x\,| + |\, f(y) - y\,|)$.
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.
Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{C}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\, u_{n+1} - u_n\,| \leqslant \big(\dfrac{k}{1-k}\big)^n\, |\, u_1 - u_0\,|$.
Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.
Montrer que $f(l) = l$.
II) Cours : existe-t-il des matrices symétriques complexes non diagonalisables ?

Planche 50 ENSEA, I abordable dès la 1e année

I) Montrer que $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $E = C^2([0,1]\,,\mathbb{R})$.
Soit $F = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E, f'' = f\}$.
Montrer que $E = F \oplus G$ et que F et G sont orthogonaux.
Pour $f \in E$, déterminer la projection orthogonale de f sur G.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$. On pose $E_{\alpha,\beta} = \{f \in E, f(0) = \alpha, f(1) = \beta\}$.

Déterminer $m_{\alpha,\beta} = \inf \left\{ \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) \mathrm{d}t,\ f \in E_{\alpha,\beta} \right\}$.

II) Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entère de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. Rappeler les propriétés qui définissent R.
On suppose que $S(x)$ a une limite réelle l quand x tend vers R par valeurs inférieures. A-t-on alors $S(R) = l$?

Planche 51 ENSEA

I) Trouver les endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace E vérifiant $f^2 = -Id$. Montrer que le $\mathbb{R}$-espace E muni de la loi $(a+ib)*x = ax - bf(x)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Comparer les dimensions de E sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
II) Montrer que f impaire, continue par morceaux, 2π-périodique et définie sur $]0, \pi[$ par $f(x) = x(\pi - x)$ est développable en série de Fourier. Trouvez sa série de Fourier.

Planche 52 ENSEA, II abordable dès la première année

I) Existence et continuité sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arc}\tan(xt)}{t(t^2+1)} \mathrm{d}t$.
Dérivabilité et expression de f'.
En déduire f et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arc}\tan t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.
II) Soit E euclidien de dimension 3 et de base (a, b, c).
Déterminer $(x, y, z) \in E^3$ tels que $y \wedge z = a$; $z \wedge x = b$; $x \wedge y = c$.

Planche 53 ENSEA, II abordable dès la 1e année

I) Soit $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{t}{\sqrt{(t^2+1)(a^2-t^2)}} \mathrm{d}t$.
Montrer l'existence de $I(a)$ pour $a > 0$.
Donner un équivalent de $I(a)$ quand $a \to 0^+$. Calculer $I(a)$.
II) Soient $(x_1, \dots, x_n)$ des réels et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Existe-t-il $(a_0, \dots, a_n)$ tels que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{i=1}^{k} (X - x_i) + a_0$? Y-a-t-il unicité ?
Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, trouver b_n et b_0 en fonction de $(a_0, \dots, a_n)$.

Planche 54 ENSEA, II abordable dès la première année

I) Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \cos(a)\cos(t)}$ pour $a \in \mathbb{R}$.
II) Soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $K = \left[\exp(2i\pi\, u\, v/n)\right]_{(u,v) \in [1,n]^2}$.
Calculer $K\overline{K}$. Montrer que K est inversible. Calculer $\left|\det(K)\right|$.

Planche 55 ENSIIE

I) Cours : Séries de Fourier, théorème de convergence en moyenne quadratique et théorème de Parseval.
II) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Quelles sont ses valeurs propres ?
Trouver B telle que $B^2 = A$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, trouver C telle que $C^n = A$.

Planche 56 ENSIIE, II abordable dès la première année

I) Cours : en dimension finie et sur $\mathbb{R}$, montrer que si u est diagonalisable alors il annule un polynôme scindé à racines simples. La réciproque est-elle vraie ?
II) Pour $n \geqslant 2$, montrer que le polynôme $x^n + x - 1$ admet une unique racine strictement positive notée x_n. Montrer que la suite (x_n) converge vers un réel l et le trouver.
III) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$, $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ et $B(0, b)$ trois points du plan muni de $(O, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormé direct et D_1 domaine délimité par les segments $[AB]$, $[A'B]$ et $[AA']$. Soient C le demi-cercle de centre A et de rayon a pour les y positifs, et D_2 le domaine délimité par C et l'axe (Ox). Calculer $\displaystyle\iint_{D_1} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et $\displaystyle\iint_{D_2} xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Planche 57 ENSIIE, I abordable dès la première année

I) Représenter la courbe d'équation : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2-1} \\ y = \dfrac{1}{t^2+t-2} \end{cases}$ et déterminer les éventuels points multiples.
À quelle condition, nécessaire et suffisante, trois points distincts de la courbe sont-ils alignés ?
II) Cours : énoncé et démonstration du théorème sur la dérivation de la limite d'une suite de fonctions.

Planche 58 ENSIIE

I) Cours : montrer l'existence d'une bse orthonormée dans un espace euclidien.

II) On définit (f_n) sur $[0,1]$ par $f_0 = 1$ et $f_{n+1}(x) = 2\displaystyle\int_0^x \sqrt{f_n(t)}\mathrm{d}t$.
Justifier l'existence de f_n et calculer f_1 et f_2.
Montrer que $f_n(x) = a_n x^{b_n}$ où l'on explicitera b_n et où l'on écrira a_n en fonction de a_{n-1} et de n.
Montrer que $2^n \ln a_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.
Donner un équivalent de a_n.
Étudier les convergences simple et uniforme de (f_n).

Planche 59 ENSIIE, II abordable dès la première année

I) Cours : normes et équivalence de normes, définition et exemples.
II) Représenter $(C) : x^2 + y^2 - 4y = 0$ et $(\Gamma) : \rho^2 = 8\cos(2\theta)$.
Trouver l'aire intérieure à (Γ) mais extérieure au cercle.

Planche 60 ENSIIE

I) Cours : endomorphismes auto-adjoints, définition, caractérisation.

II) Soit $x \in [-1,1]$, montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est dérivable, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et développable en série entière.

Planche 61 ENSIIE, I abordable dès la première année

I) Cours : inégalité de Cauchy-Schwarz (énoncé, démonstration, cas d'égalité).

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$.

II) soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, calculer le rayon de convergence et la somme $f(x)$ de la série entière $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n!} x^n$.
Montrer que f est solution de l'équation $y'' + 2\cos(\theta)y' + y = 0$.
Retrouver l'expression de $f(x)$.

Planche 62 ENSIIE, abordable dès la première année

I) Cours : formule de Taylor avec reste intégral (avec démonstration).
II) Montrer que si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E, vérifiant $\forall x \in E, < u(x)|x >= 0$, alors $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u^\perp$.
La réciproque est-elle vraie ?
Déterminer un tel endomorphisme en dimension 2.
II) Soit $A(a,0)$ et $B(-a,0)$ deux points du plan euclidien.
Déterminer le lieu des points M vérifiant $MA.MB = b^2$ en coordonnées polaires.
Pour $a = b$, montrer que cette équation peut se mettre sous la forme $\rho = a\sqrt{2\cos(2\theta)}$.

Planche 63 Navale

I) Montrer que u, endomorphisme de rang 1 d'un espace de dimension finie, est non diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$.
Donner les caractérisations des endomorphismes diagonalisables.
II) Que peut-on dire de u vérifiant $u \circ u^* = -Id$?
Donner les caractérisations des endomorphismes autoadjoints.

Planche 64 Air

I) Soit f continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, l'application qui à t associe $\exp(-tx)f(t)$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$? On note F cette intégrale.
Montrer que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur$\mathbb{R}_+^*$. Pour f 2π-périodique, calculer $\lim\limits_{x\to 0} xF(x)$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \exp(-tx)f(t)\mathrm{d}t$.
II) Soit A élément de G groupe fini inclus dans $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable.
Indication : considérer le sous-groupe de G engendré par A.

Planche 65 Air

I) Soit E un espace de dimension finie, f un endomorphisme de E.
Montrer que $\phi(u) = f \circ u$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
Soit λ une valeur propre de f ; montrer que u est vecteur propre de ϕ si et seulement si $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda Id)$.
En déduire que les valeurs propres de f sont valeurs propres de ϕ.
Déterminer la dimension du sous-espace propre de ϕ associé à λ.
II) Convergence de la série de terme général $u_n = \mathrm{e} - (1 + \dfrac{1}{n})^n$.

Planche 66 Air, I abordable dès la 1e année

I) Montrer que $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une rotation dont on donnera l'axe et l'angle.
II) À l'aide de séries entières, résoudre $x^2y'' + (x - x^2)y' - y = 0$.

Planche 67 Mines AADN, abordable dès la 1e année

I) Trouver l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f''(x) + f(-x) = x$.
II) Montrer que $X^n + X + 1$ n'a que des racines simples.

Planche 68 Mines AADN

I) Justifier que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n \sin t \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin t}{1-t}\,\mathrm{d}t$.
II) Montrer que f, défini par $f(P)(X) = X^2P'(X) - nXP(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour $n = 2$ donner sa matrice dans la base canonique.
f est-il diagonalisable pour tout n ?

Planche 69 Mines AADN

I) Nature des séries de terme général $u_n = \sin\big(\pi(2-\sqrt{3})^n\big)$ et $v_n = \sin\big(\pi(2+\sqrt{3})^n\big)$.
II) Soit u l'endomorphisme de E défini dans la base $B : (e_1, \ldots, e_n)$ par $u(e_k) = e_{k+1}$ pour $k < n$ et $u(e_n) = e_1$.
Écrire la matrice U de u dans B et calculer U^2 et U^n.
U est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
Calculer $u(X)$ avec $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \rho^{k-1}e_k$ où $\rho^n = 1$.
U est elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
Donner la dimension du commutant de U.

Planche 70 Mines AADN

I) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin x \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x$.
Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin x \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x$.
Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ sachant que $\sin(x) = \Im\big(\exp(ix)\big)$.

Planche 71 Mines AADN

Polynôme caractéristique de A $\begin{pmatrix} -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Réciproquement, soit P un polynôme à coefficients réels. À quelles conditions existe-t-il A matrice réelle carrée de taille n, telle que son polynôme caractéristique soit égal à P ?

Planche 72 Mines AADN, I abordable dès la première année

I) Soit α réel, montrer que $(\alpha_i)_{\in[0,n]}$ telle que $\alpha_i(X) = (X-\alpha)^i$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer sa base duale et en déduire la formule de Taylor pour les polynômes.
II) On pose $E = \mathbb{R}^2 - \{(0,v) | v \in \mathbb{R}\}$. SMontrer que φ, défini sur E par $\varphi(u,v) = (u, \frac{v}{u})$, est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E sur U, un ouvert à préciser.

Soit $f : U \to \mathbb{R}^2$ et $g = f \circ \varphi$. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u, \frac{v}{u})$ et de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(u, \frac{v}{u})$.
III) Trouver un équivalent de $u_n = \dfrac{1}{2^n(2n+1)} \binom{2n}{n}$.

Planche 73 Mines AADN, abordable dès la première année

I) Déterminer les fonstions f à valeurs réelles et continues telles que $f(x) = x^2 + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$.

II) Déterminer les minima de $F(a,b) = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t - a - bt^2 \mathrm{d}t$.

III) Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n-x \end{vmatrix}$.
Indication : trouver les x annulant le déterminant.

Planche 74 Mines AADN, I abordable dès la première année

I) L'ensemble D des nombres décimaux est-il un anneau ? Un corps ? Quel est l'ensemble des inversibles de D ?
II) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Soit F l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \det(Id - xf)$.
Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(0)$.

Planche 75 Mines AADN

I) Soit $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan x)^n \mathrm{d}x$. Calculer $a_n + a_{n+2}$ et donner un équivalent de a_n.
Donner le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum a_n x^n$.
II) Soit $p \geqslant 2$. Montrer que l'ensemble E des suites complexes (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$, est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Montrer que $\phi(u) = S = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k$ est une forme linéaire.

Montrer que $T(u) = v$ défini par $v_n = S - u_n$ est un endomorphisme de E. Est-il diagonalisable ?

Planche 76 ICNA, II abordable dès la 1e année

I) Soit l'espace vectoriel $E_n = \big\{P \in \mathbb{C}[X] \mid \deg(P) \leqslant n\big\}$.
Soit f, définie sur $\mathbb{C}[X]$, par $f(P)(X) = P(1-X)$.
Déterminer $\dim(E_n)$ et une base de E_n.
Montrer que f est un endomorphisme de E_n.
Quels sont les éléments propres de f ?
II) Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

