

ENS option MP

Planche 1 Ulm-Lyon-Cachan

À quelle condition, nécessaire et suffisante sur U , matrice symétrique réelle, existe-t-il V antisymétrique telle que $U + V$ soit orthogonale ?

Planche 2 Ulm-Lyon-Cachan, abordable dès la 1e année

Soit $c < 4$. On pose $c_1 = 2 - c$ et, pour $n \geq 1$, $c_{n+1} = 2 - c_n^2$.

Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $c_n \geq 0$.

Soit $P = X^2 - \alpha X + \beta \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x > 0$, $P(x) > 0$.

On pose, si c'est possible, $c = \frac{\alpha^2}{\beta}$, (c_n) est définie comme ci-dessus,

et on note $P_n = X^{2^{n+1}} + \beta^{2^{n-1}} c_n X^{2^n} + \beta^{2^n}$,

$Q_n = X^{2^{n+1}} - \beta^{2^{n-1}} c_n X^{2^n} + \beta^{2^n}$.

Montrer que P s'écrit comme le quotient de deux polynômes à coefficients positifs. *Indication : on pourra calculer $P_n Q_n$.*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\forall x > 0$, $P(x) > 0$. Montrer que P s'écrit comme le quotient de deux polynômes à coefficients positifs.

Planche 3 Ulm-Lyon-Cachan, abordable dès la 1e année

Déterminer les morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \cdot)$; on commencera par déterminer les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Déterminer les morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(SL_2(\mathbb{R}), \times)$.

Soit S le cercle unité du plan. Pour $A \in SL_2(\mathbb{R})$ on définit f_A par : soit P un point de S , $f_A(P)$ est l'intersection de S avec la demi-droite positive engendrée par $A(0\vec{P})$ (action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur S).

Pour chaque A , quels P sont fixes par f_A ?

Pour chaque A , pour quels P l'orbite de $P : (P, f_A(P), f_A^2(P), \dots)$ est-elle fermée ?

Planche 4 abordable dès la 1e année

Soit $f \in E$, espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit T_f sur $[0, 1]$ par $T_f(x) = \inf_{[0,1]} (f(y) + (x - y)^2)$

Montrer que T_f est continue et lipschitzienne.

Trouver les fonctions f telles que $T_f = f$.

Planche 5 Cachan, abordable dès la 1e année

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe a tel que $f(a) = 0$. Soit $I = [a - r, a + r]$ ($r > 0$). On suppose que f est $\mathcal{C}^2$ sur I et que f' ne s'y annule pas. Soit enfin $M = \sup_I \left| \frac{f''}{f'} \right|$.

Montrer que $\forall x \in I$, $\left| \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \leq \frac{e^{M|x-a|} - 1}{M}$.

Montrer que $\exists h, \forall x \in]a - h, a + h[$, $\left| x - \frac{f(x)}{f'(x)} + a \right| \leq M(x - a)^2$.

Planche 6 Cachan

Soit (a_n) une suite réelle telle que pour toute suite (b_n) tendant vers 0, la série $\sum a_n b_n$ soit convergente. Montrer que $\sum |a_n| < +\infty$.

Planche 7 Ulm-Lyon-Cachan

Soit P un polynôme de degré n à coefficients complexes, à racines toutes distinctes notées M_i , $i \in [1, n]$ et de coefficient dominant 1.

On appelle discriminant de P le nombre $(-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i \neq j} (M_i - M_j)$.

Montrer que le discriminant de P s'écrit $(-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^n P'(M_i)$.

Soit A une matrice carrée à coefficients complexes dont le polynôme caractéristique est à racines simples et de coefficient dominant 1. Soit B la matrice carrée dont les coefficients sont définis par $b_{ij} = \text{tr}(A^{i+j-2})$. Montrer que le discriminant du polynôme caractéristique de A est égal au déterminant de B .

Planche 8 Ulm

Montrer que le centre de gravité ($\vec{OG} = \frac{1}{\text{aire}(K)} \iint_K \vec{OM} dM$) d'un convexe compact K de $\mathbb{R}^2$, d'intérieur non vide, est intérieur à K .

On se place dans le repère polaire de centre G ; montrer qu'il existe f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que $K = \{M(r, \theta), r \leq f(\theta)\}$.

Planche 9 Ulm, abordable dès la 1e année

Trouver toutes les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(2x) = 0$. Soient $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ distincts. Trouver toutes les $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, [f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0]$.

Planche 10 Ulm-Lyon-Cachan

Trouver l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\{A^k X, k \in \mathbb{Z}\}$ soit non borné pour tout vecteur X non nul.

Planche 11 Ulm

Montrer que toute matrice inversible peut s'écrire $TP_\sigma T'$ où T et T' sont triangulaires supérieures et P_σ une matrice de permutation. Cette écriture est-elle unique ?

Planche 12 Cachan, abordable dès la 1e année

Montrer que $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible.

Planche 13 Ulm-Lyon-Cachan

Soient A et B deux matrices carrées de même taille. Comparer χ_{AB} et χ_{BA} , puis μ_{AB} et μ_{BA} .

Planche 14

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $a_f : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ g - g \circ f$.

Si f est nilpotent, montrer que a_f l'est.

Si f est diagonalisable, montrer que a_f l'est. Montrer la réciproque.

Planche 15 Lyon

Existence et unicité des solutions de l'équation $\begin{cases} y' = \alpha\sqrt{y} - x \\ y(0) = a \end{cases}$ sur

$\mathbb{R}^+$, avec $\alpha > 0$ et $a \geq 0$. On suppose $a = 0$. Montrer que, pour tout α assez grand, il existe des solutions polynômiales.

Note pour la suite : chercher $y = \gamma^2 x^2$ donne $2\gamma^2 - \alpha\gamma + 1 = 0$.

Soient γ_1, γ_2 les solutions de l'équation *supra*.

Montrer que toute solution vérifie, sur un intervalle $[0, T[$, soit

$\frac{y(x)}{x} > \gamma_2^2$, soit $\frac{y(x)}{x} \in [\gamma_1^2, \gamma_2^2]$, soit $\frac{y(x)}{x} < \gamma_1^2$.

Peut-on trouver d'autres solutions pour $a = 0$?

Planche 16 Ulm

Donner $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{C}, P - \lambda M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\}$.

Application : soit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ tel que $u(\text{GL}_n(\mathbb{C})) \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $u^{-1}(\text{GL}_n(\mathbb{C})) \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que :

$\text{Card}\{\lambda \in \mathbb{C} \mid P - \lambda M \notin \text{GL}_n(\mathbb{C})\} = \text{rg } M$.