# Concours Commun Mines-Ponts – option MP

## Planche 1 II abordable dès la 1e année

**I)** On note $E$ l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $N(f) = \left(f(0)^2 + \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}$, est une norme euclidienne sur $E$ et que $\forall f \in E$, $\| f \|_\infty \leqslant \sqrt{2} N(f)$.

Montrer que $N$ et la norme infinie ne sont pas équivalentes.

*indication : utiliser* $f_n(x) = x^n$

**II)** Montrer que $A = \begin{pmatrix} p & r & q \\ q & p & r \\ r & q & p \end{pmatrix}$ est la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $p, q, r$ sont les racines du polynôme $x^3 - x^2 + \lambda$.

## Planche 2 abordable dès la 1e année

**I)** Montrer que $\exists! A_n \in \mathbb{C}[X]$, $A_n(X + \dfrac{1}{X}) = X^n + \dfrac{1}{X^n}$ ·

Montrer que les racines de $A_n$ sont les $x_k = 2\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Décomposer $R_n = \dfrac{1}{A_n}$ en éléments simples.

**II)** Caractériser $s \circ r \circ s$, où $r$ et $s$ sont respectivement une rotation et une symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ euclidien.

## Planche 3

**I)** Soit $p$ un projecteur d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$, donner les éléments propres de $H$, défini sur $\mathcal{L}(E)$ par $H(g) = \dfrac{1}{2}(g \circ p + p \circ g)$.

**II)** Donner un équivalent en $+\infty$ de $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

## Planche 4

**I)** Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

**II)** Nature de la surface $xy + yz + xz = 1$.

**III)** Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

## Planche 5

**I)** Déterminer l'équation réduite et la nature de la quadrique d'équation $-2x^2 + y^2 - 2z^2 - 4xy - 4yz + 2xz - 6x - 6y - 6z = a$.

**II)** Déterminer la nature de la série $\sum (\ln n)^\alpha \sin(\pi\sqrt{1+n^2})$.

**III)** Donner l'ensemble de définition de $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Donner sa limite en $+\infty$ et proposer un moyen d'obtenir un équivalent.

## Planche 6 II abordable dès la 1e année

**I)** Que peut-on dire de $f$, $2\pi$-périodique, continue, telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) t^n \mathrm{d}t = 0$ ?

**II)** Montrer que l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution $x_n$. Étudier la suite $(x_n)$ : monotonie, limite, équivalent asymptotique aux premier et second ordre.

**III)** Cours : énoncé et démonstration de la formule de la médiane.

## Planche 7

**I)** Soit $A$ une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix}$

Montrer que si $A$ est semblable à $D$, $M$ est semblable à :

$M' = \begin{pmatrix} D & I_n \\ I_n & D \end{pmatrix}$. Montrer que $M$ est diagonalisable.

 

Déterminer les éléments propres de $M$ en fonction de ceux de $A$ et retrouver ainsi le résultat précédent.
**II)** Résoudre sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, en utilisant le changement de variables $(u = xy, v = \dfrac{x}{y})$, l'équation $x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$.

### Planche 8 I abordable dès la 1e année

**I)** Montrer que si $p$ est premier, différent de 2 et de 5, il divise au moins un des nombres de l'ensemble $\{1, 11, 111, 1111, 11111, \ldots\}$.
**II)** Soit $D$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times D$, $tx \in D$.
Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que :
$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times D$, $f(tx) = t^p f(x)$.

Montrer que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = pf(x)$.

Onn suppose réciproquement que $\forall x \in D$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = pf(x)$.

Montrer que $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times D$, $f(tx) = t^p f(x)$.
*Indication : introduire, pour $x$ fixé, $g(t) = f(tx) - t^p f(x)$.*
Résoudre l'équation $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times D$, $f(tx) = t^p f(x)$ pour $n = 2$.
*Indication : passer en coordonnées polaires.*

### Planche 9

**I)** Soit $P$ un polynôme à coefficients réels. Montrer que $P$ est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}$, $| P(z) | \leqslant | \Im(z) |^{degP}$
Soit $(u_j)_j \in \mathbb{N}$ une suite d'endomorphismes diagonalisables de $E$, tendant vers $u$, endormorphisme de $E$. $u$ est-il diagonalisable ? trigonalisable ?
En déduire l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,puis dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
**II)** Calculer pour $t \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x$.

### Planche 10 I abordable dès la 1e année

**I)** Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que l'ensemble :
$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AM - MA = 0\}$ soit un corps.
**II)** Soit $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ; on cherche les $F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant :
(1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x,0) = f(x)$ ;
(2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $F(x + 2\pi, t) = F(x,t)$ ;
(3) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ existe, est continue et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \dfrac{\partial F}{\partial t}$.
Montrer que s'il existe une solution, elle est unique.
Montrer que si $f \in C^3_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe une solution .

### Planche 11 I abordable dès la 1e année

**I)** Trouver les polynômes $P$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.
**II)** Soit $f$ définie sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Calculer la limite de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$.
**III)** Résoudre $x'' + x = \operatorname{cotan} t$ sur $]0, \pi[$.

### Planche 12 I abordable dès la 1e année

**I)** À l'aide d'un projecteur sur un espace judicieusement choisi, minimiser $I_{a,b} = \displaystyle\int_0^1 (t \ln t - at - b)^2 \mathrm{d}t$ et préciser les valeurs de $a$ et $b$ réalisant ce minimum.
**II)** Nature de la convergence, dommaine de définition et limite de $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x (1 - \frac{t}{n})^n \mathrm{d}t$.

 

## Planche 13

Étudier les convergences simple, uniforme et normale de la série de fonctiosn $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ définies sur $]-1,1[$.
Montrer que, sur son domaine de définition, sa somme $S$ vérifie $S(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{1-x^p}\cdot$ Donner un équivalent au voisinage de 1 de $(1-x)S(x)$. On rappelle que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \ln 2$.

## Planche 14

**I)** Domaine de définition ; continuité et étude aux bornes du domaine de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{Arc}\tan t\mathrm{d}t$.

**II)** Pour $n \geqslant 2$, simplifier l'exprssion $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}\cdot$

## Planche 15

**I)** Déterminer les éléments propres de $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 \end{pmatrix}$

où les $a_i$ sont tous distincts.
**II)** Soit $f$, $2\pi$-périodique, définie sur $]0,2\pi[$ par $f(t) = t$, et $f(0)$ =une valeur que l'on attribuera.
Calculer les coefficients de Fourier de $f$, étudier la convergence de la série de Fourier, préciser le cas $t = \dfrac{\pi}{2}\cdot$.

Déterminer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nt)}{n}\cdot$

## Planche 16

**I)** Soit $A$ une matrice carrée réelle de coefficient $a_{ij}$ ; montrer que si $\forall i \in [1,n]$, $|\,a_{ii}\,| > \displaystyle\sum_{j\in[1,n]\setminus\{i\}} |\,a_{ij}\,|$, alors $A$ est inversible.

Montrer que les valeurs propres $\lambda$ de $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ sont de la forme $\lambda = 2\cos\theta - 2$, puis diagonaliser.
**II)** Développer en série de Fourier $f(x) = \dfrac{1}{2-\mathrm{e}^{ix}}\cdot$

## Planche 17 I en 200

**I)** Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\tan\theta}\mathrm{d}\theta$.
**II)** Montrer que deux matrices réelles, semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le sont aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
**III)** Que dire d'une matrice réelle orthogonale et symétrique ? Même question pour une matrice complexe.

## Planche 18

**I)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\phi$, défini sur $I$ par $\phi(t) = \mathrm{tr}\Big(P\big(f(t)\big)\Big)$ est $\mathcal{C}^1$ et calculer $\phi'(t)$.
Pour $A$ et $B$ symétriques, réelles et positives, donner le signe de $\mathrm{tr}(AB)$.
On suppose de plus $A - B$ positive. Si $P$ est croissant sur $\mathbb{R}_+$, comparer $\mathrm{tr}\big(P(A)\big)$ et $\mathrm{tr}\big(P(B)\big)$.
De même, si $\sum a_j z^j$ est de rayon de convergence infini, les $a_j$ étant positifs, comparer $\sum a_j A^j$ et $\sum a_j B^j$.

 

**II)** Pour $r \in ]0,1[$, on définit $P_r$ sur $\mathbb{R}$ par $P_r(t) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$ ;
Soit $f$ $2\pi$-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r_c \in ]0,1[$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\, f(x) - T(f)(x)\,| \leqslant \varepsilon$ avec $T(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi} \pi f(x-t)P_r(t)\mathrm{d}t$.

### Planche 19

**I)** Étudier $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t$.
Donner un équivalent de $f$ en $+\infty$.
**II)** On note $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de l'endomorphisme $u$ autoadjoint dans $E$ euclidien de dimension $n$.
Montrer que pour tout sous-espace $F$ de $E$ de dimension $k$, $\displaystyle\sup_{x\in F\setminus\{0\}} \frac{(u(x)|x)}{\|\, x^2\,\|} \geqslant \lambda_k$.
En déduire que $\lambda_k = \displaystyle\min_{\dim F = k}\left(\max_{x\in F\setminus\{0\}} \frac{(u(x)|x)}{\|\, x^2\,\|}\right)$.
On pourra commencer par le cas $k = n$.

### Planche 20 II abordable dès la première année

**I)** Étude de la série de terme général $(-1)^n(n!)^{1/n}$
**II)** Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une famille de $E$.
Montrer que $f$ est libre si et seulement s'il existe $(x_1, \ldots, x_n)$, réels tels que la matrice de coefficient $f_i(x_j)$ soit inversible.

### Planche 21

**I)** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? La trigonaliser.
Calculer $\exp(tA)$.
**II)** Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n - 1}$.

**III)** Calculer de deux manières différentes $\displaystyle\int_\Gamma x^3\mathrm{d}y - y^3\mathrm{d}x$ sur le cercle unitaire orienté directement.

### Planche 22

**I)** Les $a_n$ étant non nuls, donner une CNS pour que $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$,
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
**II)** Montrer que si $A$ est symétrique réelle définie et positive, sa comatrice l'est aussi. Est-ce encore vrai si $A$ n'est pas définie ?

### Planche 23

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $a < b$, $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites réelles et $f_n(x) = a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ définie sur $[a,b]$.
Montrer que si $f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ alors $a_n \to 0$ et $b_n \to 0$.

### Planche 24

Trouver les solutions centrées en 0 de $y'' + \dfrac{1}{1+x^2}\,y = 0$.
Soit $y$, solution bornée sur $[x_0, +\infty[$ ; montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.
Est-il possible d'avoir des solutions non bornées ?

### Planche 25

À une matrice $A$ carrée d'ordre $n$ on associe la matrice par bloc $M = \begin{pmatrix} A & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\chi_M$, le spectre de $M$ et la dimension des sous-espaces propres de $M$ en fonction de ceux de $A$.
$M$ est-elle diagonalisable ?
Lien entre les polynômes minimaux $\mu_M$ et $\mu_A$.
Réiterer alors la discussion précédente.

## Planche 26

Donner sans calcul le rang et le déterminant de $A$, carrée d'ordre $n$, dont tous les coefficients valent $a$. Calculer $A^n$.
Déterminer le polynôme caractéristique de $A$ et en donner deux polynômes annulateurs.

**II)** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n \ln x \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln x \mathrm{d}x$.

## Planche 27

**I)** Domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^x (\frac{1+x^2}{(x\ln x)^2 - t^2})^{1/3}\mathrm{d}t$.
Trouver la limite de $f$ en $+\infty$.
**II)** Étudier la suite puis la série de terme général :
$u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \big(\cos(\frac{\pi}{2}\sin x)\big)^{2n}\mathrm{d}x$.

## Planche 28 I abordable dès la 1e année

**I)** Montrer que $S = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = M\}$ est un espace vectoriel et calculer sa dimension.
**II)** Résoudre $y'' + y = \cos nt$, $n \in \mathbb{N}$.
Résoudre $y'' + y = \displaystyle\sum_0^{+\infty} a_n \cos nt$ où $a_n$ est le terme général d'une série absolument convergente.

## Planche 29 II abordable dès la 1e année

**I)** Cours : montrer que dans un espace normé complet, toute série absolument convergente est convergente ; donner des exemples d'espaces normés complets.
**II)** Representer $u = 1 + z + z^2$ où $z$ parcourt une fois le cercle unité.

## Planche 30 I abordable dès la 1e année

**I)** Cours : Soit $E$ euclidien de dimension $n$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $A$ dans $\mathcal{B}$.
Montrer les équivalences entre :
(1) : $u \in O(E)$ (2) : ${}^tAA = I_n$ (3) : $A \in GL(E)$ et $A^{-1} = {}^tA$ .

**II)** Pour $n \geqslant 1$, on pose $f_n(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^x)^n}$.

Trouver l'ensemble de définition de $f_n$.

Étudier la convergence de $(\sum f_n)_{n\geqslant 1}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

## Planche 31 I abordable dès la 1e année

**I)** Comment démontre-t-on la formule de Leibniz ?

Calculer la dérivée d'ordre $n$ de $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$ ·

**II)** Soit $N$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $N(MP) \leqslant N(M)N(P)$.
Montrer que $N\big((-1)^k M^k\big) \leqslant N(M)^k$
Montrer que si $N(A) \leqslant 1$, la série de terme général $(-1)^k A^k$ converge et en déduire que $I_n + A$ est inversible.

## Planche 32

**I)** Montrer que si $f$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$, la famille $(Id, f, \ldots, f^{n^2})$ est liée. En déduire que $f$ admet un polynôme annulateur non nul.
Montrer que si $P$ est un polynôme annulateur de $f$ et $\lambda$ une valeur propre, alors $P(\lambda) = 0$. Justifier que $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$.
**II)** Soient $\Gamma_1 = a(1-t)\vec{i} + bt\vec{j}$ pour $0 < t < 1$ ;
$\Gamma_2 = a\cos u\vec{i} + b\sin u\vec{j}$ pour $0 < u < \dfrac{\pi}{2}$ ·.
Calculer $I_1 = \displaystyle\oint_{\Gamma_1} y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y$ et $I_2 = \displaystyle\oint_{\Gamma_2} y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y$.

 

**Planche 33 II abordable dès la 1e année**

**I)** Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites complexes telles que :
$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \left|\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right|$ à partir d'un certain rang.
Montrer que si $(v_n)$ tend vers 0, $(u_n)$ aussi.
Montrer que si $(|\,u_n\,|)$ tend vers $+\infty$, $(|\,v_n\,|)$ aussi.
**II)** Soit $E$ de dimension finie $n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
**III)** Convergence de la série de terme général $\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ·

**Planche 34 II abordable dès la 1e année**

**I)** Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} n^{-n}$.
**II)** Montrer que $f(P) = P - P'$ est bijectif sur $\mathbb{R}_n[X]$, d'abord en utilisant sa matrice, puis sans cette aide.
Pour $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, résoudre $P - P' = Q$.

**Planche 35**

**I)** Dire sans calculs si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible, diagonalisable. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Soit la base $(e_1, e_2, e_3, e_4)$, $F = Vect(e_1, e_4)$, $G = Vect(e_2, e_3)$.
En remarquant que $E = F \oplus G$, trouver une base dans laquelle $M$ est diagonale et donner les valeurs propres de $M$.
**II)** Soit $f(x) = \ln(1 + \sin x)$.
Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $f$.
Montrer que la série de terme général $\ln(1 + \sin\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha})$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$.
Déterminer les valeurs de $\alpha$ telles que la série converge.

**Planche 36**

**I)** Montrer que, si $(f_n)$ converge simplement vers $f$, et s'il existe une suite $(x_n)$ convergeant vers $x$ telle que la suite $f_n(x_n) - f(x)$ ne tend pas vers 0, alors $(f_n)$ n'est pas uniformément convergente.

Étudier les convergences simple et uniforme de $(\dfrac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2})$ sur $]a, +\infty[$ puis sur $]0, +\infty[$.

**II)** Montrer que $\phi(P) = \left(\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)^2\right)^{1/2}$ est une norme dérivant d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Donner la matrice de $\phi^2$ et la diagonaliser.

En déduire une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

**Planche 37**

Préciser la troisième ligne puis la $n^{\text{ième}}$ ligne de :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 3a^2 & \dots & na^{n-1} \\ na^{n-1} & 1 & 2a & \dots & (n-1)a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$ carrée d'ordre $n$.

Donner les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité et les représenter pour $n = 6$.

Soit $\omega$ une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$.

Calculer $AX$ en fonxtion de $X$ et $\omega$. $A$ est-elle diagonalisable ?

**II)** Étudier la série de terme général $\big(\ln(4n+1)\big)^{1/5} - \big(\ln(4n)\big)^{1/5}$.

 

## Planche 38

**I)** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues convergeant simplement vers $f$ continue sur $[a,b]$.
Montrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou décroissante alors il y a convergence uniforme.
Montrer que si $\forall n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n$ est croissante ou décroissante alors il y a convergence uniforme.
**II)** Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $f$ et $g$ deux applications linéaires sur $E$.
Montrer que $sp(f)\cap sp(g)\neq\emptyset \Leftrightarrow \exists h\in\mathcal{L}(E),\ g\circ h = h\circ f$

## Planche 39

**I)** Donner les domaines de définition de :
$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \text{ et } \xi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\cdot$$
Montrer que $\forall x>1, \Gamma(x)\xi(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^{t-1}}\,\mathrm{d}t$.

**II)** Calculer $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\cdot$

**III)** Soient $u$ et $v$ diagonalisables qui commutent. Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres qui diagonalise $u$ et $v$.

## Planche 40

**I)** Soient $A\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :
$AB=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&-2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$. $BA$ est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ? Comment trouver les vecteurs propres associés ?

**II)** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin\big(t^2+\frac{1}{t^2}\big)\mathrm{d}t$ est convergente et impropre.

Donner un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^x\left|\sin\big(t^2+\frac{1}{t^2}\big)\right|\mathrm{d}t$.

## Planche 41

**I)** Soit $f$ application d'un espace $E$ dans un espace $F$, tous deux de dimension finie.

Montrer que $f$ est continue si et seulement si $\forall A\subset E,\ f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$.

**II)** Soit $u$ un endomorphisme symétrique à valeurs propres strictement positives d'un espace euclidien $E$.

Montrer que $\forall(x,y)\in E^2,\ (x|y)\leqslant\big(u(x)|x\big)\big(u^{-1}(y)|y\big)$.

Trouver $m=\inf\{\big(u(x)|x\big)\big(u^{-1}(x)|x\big),\ \|\,x\,\|=1\}$.

Trouver, pour $y\in E\backslash\{0\}$, $m_y(u)=\inf\{\big(u(x)|x\big),\ (x|y)=1\}$.

Soit $v$ un endomorphisme symétrique à valeurs propres strictement positives. Justifier que $u+v$ est aussi un endomorphisme symétrique à valeurs propres strictement positives.

Montrer que $m_y(u+v)\leqslant m_y(u)+m_y(v)$.

## Planche 42

**I)** Nature de la série de terme général $\dfrac{1}{\ln n+(-1)^n n^\alpha}$ , $\alpha\in\mathbb{R}$.

**II)** Soient $A$ et $B$ sont réelles et semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer qu'il existe $Q$ et $R$ réelles telles que :

$AR=RB,\ AQ=QB,\ Q+iR\in GL_n(\mathbb{C})$.

Montrer que l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $\phi(\lambda)=\det(Q+\lambda R)$ est polynômiale et en déduire que $A$ et $B$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est semblable à $\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}$ ou $\rho\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$.

 

**Planche 43 II abordable dès la 1e année**

**I)** Développement en série entière de $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-2x\cos\alpha+1}$ avec $\alpha \in\ ]0,\pi[$. En déduire le développement en série de Fourier de $g(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}\cos\alpha}\cdot$

**II)** Montrer qu'une famille de $n$ fonctions $(f_1,\dots,f_n)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est libre si et seulement si il existe $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que $\det\Big(\big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Big)\neq 0$.

**Planche 44 I abordable dès la 1e année**

**I)** Montrer que la dérivée d'ordre $n$ de $\dfrac{1}{1+x^2}$ est de la forme $\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ où $P_n$ est un polynôme dont on précisera les racines.

**II)** Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2=-I_n$.
Montrer que $n$ est pair.

Montrer que $A$ est semblable à $\begin{pmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B \end{pmatrix}$ où $B$ est la matrcie de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dans le plan.

**III)** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

**Planche 45 II abordable dès la 1e année**

**I)** Expliciter $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(tx)}{t^2}\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

**II)** Trouver $\operatorname{Ker} p\circ q$ et $\operatorname{Im} p\circ q$ si $p$ et $q$ sont deux projecteurs qui commutent.

**III)** Soit $O=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$ orthogonale réelle de taille $n$, avec $A$ et $D$ de taille respective $p$ et $q$. Montrer que $\det A^2=\det D^2$.

**Planche 46**

**I)** Que dire de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ ? Calculer son polynôme caractéristique, son polynôme minimal, son exponentielle.
*Indication : pour ce dernier calcul, on effectuera la division euclidienne de $X^n$ par le polynôme carcatéristique et on se ramènera à deux calculs de somme de série.*

**II)** Étudier la suite de terme général $u_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dots+\dfrac{1}{2n}\cdot$

**III)** Que peut-on dire d'une matrice orthogonale et symétrique ? De l'endomorphisme canoniquement associé ? Donner la matrice de cet endomorphisme dans une base adaptée.

**Planche 47 I abordable dès la 1e année**

**I)** Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists T_n\in\mathbb{R}[X]$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$.
Décomposer $\dfrac{1}{T_n}$ en éléments simples.

**II)** Nature de la série de terme général $\ln\!\Big(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(1+n)}\Big)$.

**Planche 48**

**I)** Trouver $a,b,c$ des réels positifs tels que la série de terme général $u_n=a^{1/n}-\dfrac{1}{2}\,(b^{1/n}+c^{1/n})$ converge.

**II)** Soit $P\in\mathbb{C}[X,Y]$ tel que $P(X,Y)=P(Y,X)$. On suppose que $X-Y\mid P(X,Y)$. Montrer que $(X-Y)^2\mid P(X,Y)$.

**III)** Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive.
Montrer que $\det(A+I_n)^{1/n}\geqslant 1+(\det A)^{1/n}$.
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $\exp(A)\in O_n(\mathbb{R})$.

 

**Planche 49**

**I)** Donner un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}}{\ln(1-t^n)}\,\mathrm{d}t$.
**II)** Soit $A$ et $B$ deux vecteurs libres de $\mathbb{R}^n$ de coefficients respectifs $a_i$ et $b_i$. Diagonaliser la matrice de coefficient $a_ib_j + a_j + b_i$.
**III)** Décrire $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

**Planche 50 II abordable dès la 1e année**

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha > 1$ on pose :
$\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,\ f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $f_\alpha(0) = \Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})$.
**II)** Soit un groupe $G$ dont tout élément $x$ vérifie $x^2 = e$.
Montrer qu'il existe un unique entier $n$ tel que $G$ soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

 