Concours Communs Polytechniques – option PH-MP

Planche 1 I abordable dès la 1^{re} année

I) Montrer que $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur l'ensemble E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ engendré par:
$f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \mathrm{e}^x$, $f_3(x) = x$.
Pour quels réels a et b la distance de f_2 à $g(x) = ax + b$ est-elle minimale ?
II) Montrer que dans un espace E complet, toute série convergente l'est absolument. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il complet ?

Planche 2 I abordable dès la 1^{re} année

I) Résoudre $y'' + y = \cos x$ par variation des constantes.
II) Quelle est la matrice associée à la surface $xy + yz + zx = \lambda \in \mathbb{R}$? Quelles sont ses valeurs propres ?
Montrer qu'il s'agit d'une surface de révolution autour d'un axe à déterminer.
Étude et tracé qualitatif (allure 3D, éléments générateurs) suivant λ.

Planche 3

I) Quel est le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$?
Est-elle inversible ? Diagonalisable ?
II) En indiquant les hypothèses nécessaires, effectuer le changement de variable $u = \phi(t)$ dans l'equation $(1+t)^2 x'' + tx' + a^2 x = 0$, tel qu'elle devienne une équation à coefficients constants et résoudre.

Planche 4

I) À l'aide de manipulations élémentaires, déterminer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 2001 & 1 & 5 \\ 3 & 2001 & 3 \\ 4 & 2 & 2001 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ? Existe-t-il des matrices B telles que $B^2 = A$? Si oui, combien ?
II) Pour f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et de laplacien nul, on pose $t = \dfrac{x}{y}$ et $h(t) = f(x, y)$. Trouver une équation différentielle dont h est solution et la résoudre. En déduire les fonctions f solutions.

Planche 5 II abordable dès la 1^{re} année

I) Si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, montrer que $\left(\int_a^b f_n\right)$ converge vers $\int_a^b f$.
Que devient ce résultat pour les séries de fonctions ?
Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} = \int_0^{1/2} \sum_{n \geqslant 0} x^n \mathrm{d}x$.
II) Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection sur le plan $x + y + z = 0$ parallèlement à $x = \dfrac{1}{2}\,y = \dfrac{1}{3}\,z$.

Planche 6 I abordable dès la 1^{re} année

I) Tracer l'arc d'équation polaire $\rho = 2(\cos\theta - \cos 2\theta)$ puis donner les tangentes aux points d'angle polaire $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.
II) Développer $f(x) = \mathrm{ch}(x)\cos(x)$ en série entière en l'exprimant à l'aide de fonctions exponentielles.
Retrouver le résultat en remarquant que f est solution de l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$.

Planche 7

I) Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = t$ pour tout $t \in\ ]-\pi, \pi[$ et $f(\pi) = 0$.
La série de Fourier de f est-elle convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$?
Calculer la série de Fourier de f.
II) Montrer que Φ, qui à P associe $(X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
Résoudre l'équation différentielle $y' = \left(\dfrac{5 - \lambda}{2(x-1)} + \dfrac{3 + \lambda}{2(x+1)}\right) y$.

En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Planche 8 abordable dès la 1$^{\text{re}}$ année

I) Calculer $\displaystyle\iiint_D (x+y+z)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}$.
II) Nature, axes et équation réduite de la conique d'équation:
$2x^2 + 3xy + y^2 - 4x - 3y = 0$.

Planche 9 abordable dès la 1$^{\text{re}}$ année

I) Montrer que, au voisinage de $+\infty$, $u_n = \displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \sim \frac{1}{n^2}\cdot$

II) Résoudre, suivant a et b, $\begin{cases} ax+y+z+t=1 \\ x+ay+z+t=b \\ x+y+az+t=b^2 \\ x+y+z+at=b^3 \end{cases}$.

Planche 10 II abordable dès la 1$^{\text{re}}$ année

I) Montrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles, positives et équivalentes, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Étudier la convergence absolue de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (i-1)\frac{\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}-1}\cdot$

II) On cherche les polynômes $P(X) = (X-a)(X-b) \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X)$ divise $P(X^3)$.
Montrer que, si $a = b$, $P \in \mathbb{R}[X]$ et que si $a \neq b$ et $a^3 \neq b^3$, il existe 6 polynômes dont 4 dans $\mathbb{R}[X]$.
Trouver les polynômes P si $a \neq b$ et $a^3 = b^3$ et en déduire que 13 polynômes en tout conviennent, dont 7 dans $\mathbb{R}[X]$.

Planche 11 II abordable dès la 1$^{\text{re}}$ année

I) Montrer que f définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Montrter que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

II) Étudier et représenter $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln|\sin t| \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}$.

Planche 12 II abordable dès la 1$^{\text{re}}$ année

I) Pour $\theta \in]0, \pi[$, majorer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$.

Montrer que $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$.
En remarquant que $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n-1}\cdot$
En utilisant $|\cos(k\theta)| \geqslant \cos^2(k\theta)$, étudier la convergence de $\sum |u_n|$.
II) Montrer que, si f et g sont deux endomorphismes d'un K-espace vectoriel E de dimension finie, vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$, alors $\operatorname{Ker} g \circ f = \operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g$, $E = \operatorname{Im} g \oplus \operatorname{Ker} f$.

Planche 13 II abordable dès la 1$^{\text{re}}$ année

I) Ensemble de définition de $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^x)^n}\cdot$
Montrer que si $x > 1$, $\sum I_n(x)$ diverge. Calculer $I_n(2)$ pour $n \geqslant 1$.
II) Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ de ϕ défini par $\phi(P)(X) = P(X) - P(X+1)$. En déduire son noyau et son image.

Planche 14 II abordable dès la 1$^{\text{re}}$ année

I) Montrer que la convergence normale d'une série de fonctions sur un ensemble X entraine sa convergence uniforme sur ce même ensemble.
La série $\sum \dfrac{n^3}{n!} z^n$ converge-t-elle uniformément sur tout disque fermé de centre O et de rayon R ?

II) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$; calculer $D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}$.

Planche 15 II abordable dès la première année

I) Développement en série et rayon de convergence de $\ln \dfrac{x+1}{x-1}$.

II) Tracer l'allure de la courbe $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$ et étudier les éventuels points irréguliers.

Planche 16 I abordable dès la 1re année

I) Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, f et g deux endomorphismes de E.
En appliquant le théorème du rang à la restriction h de f au noyau de g, montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - n \leqslant \operatorname{rg}(f \circ g)$.
Pour $n = 3$, trouver tous les endomorphismes de E tels que $f^2 = 0$.
II) Étudier la convergence de la série de Fourier de f, 2π-périodique, définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(x) = x$ et $f(-\pi) = 0$. Calculer cette série.

Planche 17 I abordable dès la 1re année

I) Résoudre $y' - \dfrac{x}{x^2+1}\, y = 2x$ sur $]1, +\infty[$.

II) Étudier la réduction de $\left| \begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{M}_n(K) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(K) \\ M & \longmapsto & \operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A \end{array} \right.$

où A est fixée dans $\mathcal{M}_n(K)$.

Planche 18

I) Étudier la convergence simple sur $[0, 1]$ de (f_n) définie par :
$f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 + n^2x^2}$ et expliquer pourquoi la convergence n'est pas uniforme.
Montrer que (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ converge en utilisant le théorème de convergence dominée.
II) Donner les valeurs propres de M qui des 1 sur la première et la dernière ligne, sur la première et la dernière colonne et des 0 partout ailleurs.
Le commutant de M est-il un sous-espace vectoriel ?
Si oui, donner sa dimension.

Planche 19 II abordable dès la 1re année

I) Cours : montrer que si u_n et v_n sont positifs et équivalents, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(i-1)\sin\dfrac{1}{n}}{\sqrt{n}-1}$.

II) Montrer que la transposée de la matrice A, de taille $n+1$ et de coefficient $\dbinom{i}{j}$ pour $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ et 0 sinon, représente l'endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\phi(P)(X) = P(X+1)$.
Soit b_n le nombre de permutations de $[1, n]$ n'ayant aucun point fixe ; montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k = n!$ (on pourra calculer le nombre de permutations qui fixent p éléments).
Calculer b_n à l'aide des questions précédentes.

Planche 20

I) Cours : si λ est une valeur propre de multiplicité m d'un endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie, montrer que :
$1 \leqslant \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda Id) \leqslant m$.

Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; est-elle diagonalisable ?

II) Déterminer l'ensemble de défintion de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x \mathrm{e}^{x\sqrt{n}}$.

S est-elle intégrable sur cet ensemble ?

Planche 21 I abordable dès la 1^{re} année

I) Montrer que l'on peut restreindre l'étude de $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ à $[0, \frac{\pi}{4}]$.
Tracer cette courbe et donner l'équation de la tangente en un point n'appartenant pas aux axes.

II) Soit $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^a}$ ·

Pour $a \leqslant 1$, étudier la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\mathrm{d}x$ et en déduire l'intégrabilité de f sur $[0, +\infty[$.
Montrer que, pour $a \geqslant 3$, f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.
Montrer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $1 < a < 3$.

Planche 22 II abordable dès la 1^{re} année

I) Montrer que $u_n = \displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ défini pour $n \geqslant 1$ est équivalent à $\dfrac{1}{n^2}$ en $+\infty$. Déterminer les x pour lesquels $\sum u_n x^n$ converge.

II) Donner une BON de $F : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ dans $\mathbb{R}^4$, puis exprimer la projection orthogonale sur F. En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base canonique.

Planche 23 abordable dès la 1^{re} année

I) Calculer $\displaystyle\iint_{\{x>0,\, y>0, y+x-1<0\}} (xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

II) Montrer que si p est un projecteur de E, espace de dimension finie, $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires.
Si u est un endomorphisme de E, montrer que u et p commutent si et seulement si $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par u.

Planche 24 I abordable dès la 1^{re} année

I) Résoudre $y' - y\tan x = -\cos^2 x$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

II) Pour u vecteur unitaire fixé de $\mathbb{R}^3$ et $a \in \mathbb{R}^*$, montrer que $f_a(x) = x + a(x|u)u$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que : $\exists! a' \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\| f_{a'}(x) \| = \| x \|$.
Montrer que $\operatorname{Ker}(f_{a'} + Id)$ et $\operatorname{Ker}(f_{a'} - Id)$ sont supplémentaires.
Pour a quelconque, montrer que f_a est symétrique et déterminer ses éléments propres.

Planche 25

I) Étudier $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)}$ ·

II) Cours : montrer que si f est un endomorphisme d'un espace E de dimension n, $(Id, f, \ldots, f^{n^2})$ est liée. En déduire que f admet un polynôme annulateur P non nul.
Soit λ une valeur propre de f ; montrer que $P(\lambda) = 0$.
Justifier succintement que $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$.

Planche 26 I abordable dès la 1^{re} année

I) Montrer que $\phi(A, B) = \operatorname{tr}({}^t AB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrer que $F = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel et trouver une base orthonormale de $F^\perp$.
Donner la projection orthogonale sur F de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

II) Ensemble de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ ·
Trouver une équation différentielle d'ordre 3 dont f est solution ; la transformer en une équation différentielle d'ordre 2 par un changement de variable, puis la résoudre.

Planche 27 I abordable dès la 1^{re} année

I) Symétrie(s) éventuelle(s) et allure de $\rho = \cos(2\theta)$.
Donner la tangente en $\theta = \dfrac{\pi}{4}\cdot$

II) Rayon de convergence et calcul de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{(-1)^n} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = \dfrac{2a_n}{n+1}$ (on pourra poser $b_n = a_n x^n$ et s'intéresser à b_{2n} et b_{2n+1}).

Planche 28

I) Écrire la matrice de $q(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz + 2xz$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses valeurs propres.
Trouver une base dans laquelle q s'écrive $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2$.

II) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

Planche 29

I) Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer que la série converge uniformément (on pourra utiliser un théorème permettant de majorer le reste de la série), puis montrer qu'il n'y a pas convergence normale.

II) Soient A et B deux matrices complexes carrées d'ordre n vérifiant $AB - BA = B^2$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $AB^k - B^kA = kB^{k+1}$.
Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $AP(B) - P(B)A = B^2P'(B)$.
Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $B^{2p}Q^{(p)}(B) = 0$, où Q est le polynôme caractéristique de B.

Planche 30 II abordable dès la 1^{re} année

I) Solutions développables en série entière de $2xy' + y = 3x\phi(x)$ où $\phi(x) = \mathrm{ch}(x^{3/2})$ pour $x \geqslant 0$ et $\phi(x) = \cos\big((-x)^{3/2}\big)$ pour $x < 0$.

II) Calculer directement $I = \displaystyle\int_\Gamma y\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y$ où Γ est la courbe fermée constituée des deux portions des courbes $y = x$ et $y = x^2$ entre leurs points d'intersection, puis calculer I par la formule de Green-Riemann.

Planche 31 abordable dès la 1^{re} année

I) Résoudre $y' - \dfrac{x}{x^2-1}\, y = 2x$ sur $]1, +\infty[$.

II) Tracer $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{t^2-1} \\ y = \dfrac{2t+1}{t^2} \end{cases}$; on précisera notamment la position des tangentes aux points particuliers et les coordonnées du point double.

Planche 32 II abordable dès la 1^{re} année

I) Cours : énoncer et démontrer la formule de Cauchy-Schwarz dans le cas réel et étudier le cas d'égalité.

II) Montrer que $x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1)$ et en déduire $\displaystyle\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a\cos t + 1)\mathrm{d}t$ pour $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

Planche 33 I abordable dès la 1^{re} année

I) Étudier la courbe définie par $\rho = 2(\cos\theta - \cos 2\theta)$. Indiquer l'allure de la courbe et préciser les tangentes aux points situés sur l'axe Ox.

II) Soit A et B deux vecteurs libres de $\mathbb{R}^n$. Soit $M = {}^tAB + {}^tBA$. Montrer que φ, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M, est diagonalisable. Donner le noyau puis les éléments propres de φ.

Planche 34 I abordable dès la 1^{re} **année**

I) Calculer $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où D est le le domaine défini par $x^2+y^2-1 \leqslant 0$.

II) Soit A une matrice de taille $2n-1$ comportant des a sur la diagonale principale, des b sur l'autre diagonale, et des zéros partout ailleurs. Le terme au croisement des diagonales est $a+b$, les scalaires a et b étant des réels. Montrer que A est diagonalisable ; donner une matrice de passage, sans calculer le polynôme caractéristique, et enfin en déduire ce polynôme caractéristique.

Planche 35 I abordable dès la 1^{re} **année**

I) Donner la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P)(X) = P(X) - P(X-1)$.
En déduire le noyau et l'image de φ.

II) Déterminer le domaine de définition de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}\cdot$

Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Planche 36

I) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Est-elle diagonalisable ?

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$; Déterminer les valeurs propres $B = aI_3 + bA + cA^2$.

II) Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{Arc\,tan}(nx)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

III) Rayon de convergence et calcul de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{ch}(n) x^{3n+1}$.

Planche 37 I abordable dès la 1^{re} **année**

I) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau de l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$. f est-il surjectif ?
Donner une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et une base de $\operatorname{Im}(f)$.

II) Montrer que, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\dfrac{2t}{\pi} \leqslant \sin(t)$.

On pose $f_n(x) = (1 - \sin\dfrac{x}{n})^n$ si $0 \leqslant x \leqslant n\dfrac{\pi}{2}$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n\dfrac{\pi}{2}\cdot$

Étudier la convergence simple sur $[0, +\infty[$ de la suite (f_n).

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

Planche 38

I) Montrer que $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence. Étudier la dérivabilité de $\sum a_n x^n$ sur $]-R, R[$.

II) On note (U_0, U_1, U_2) la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et on définit V et W par $V(P) = P(1)$, $W(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que (U_0, V, W) est une base du dual de $\mathbb{R}_2[X]$.
Donner la matrice de passage de (U_0, U_1, U_2) à (U_0, V, W).
Déterminer la base de $\mathbb{R}_3[X]$ dont (U_0, V, W) est la base duale.

Planche 39

I) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \dfrac{n}{\sqrt{t}} \ln\bigl(1 + \dfrac{1}{nt}\bigr)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et sur $]0, 1]$. Existence et calcul de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

II) Montrer que f, défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $f(M) = AM$ où A est une matrice fixée, est inversible si et seulement si A l'est.
Montrer que f et A ont même spectre et que f est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Planche 40

I) Cours : définir une valeur propre ; montrer que λ est valeur propre de f si et seulement si $\det(f-\lambda\,\mathrm{Id})=0$ et en déduire que f admet au plus n valeurs propres.

II) Montrer que $\sum \dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}$ est convergente et préciser son rayon de convergence. Calculer sa somme.
(On pourra calculer $(1+x^2)S'(x)$ en fonction de $xS(x)$).

Planche 41

I) Cours : définir une valeur propre ; montrer que λ est valeur propre de f si et seulement si $\det(f-\lambda\,\mathrm{Id})=0$ et en déduire que f admet au plus n valeurs propres. En dimension 2, donner un endomorphisme de valeurs propres 0 et 1 qui ne soit pas une projection.
II) Tracer le graphe de f paire, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, définie sur $[0,\pi[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
Si $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n\cos(nx)$ est la série de Fourier de f, calculer a_0 et donner a_n sous forme d'une intégrale entre n et 1.
Montrer que $\displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$ admet une limite l en $+\infty$; on admettra que $l=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.
Montrer qu'il existe une constante A telle que $a_n\sim\dfrac{A}{n^{3/2}}$ en $+\infty$.
Que dire de la série de Fourier de f ?

Planche 42

Décomposer $F(X)=\dfrac{1}{-X^2-X+2}$ en éléments simples, puis déterminer le développement en série entière de F en 0 et donner son rayon de convergence.
Déterminer le développement limité de F à l'ordre 3 en 0.

II) Étudier les convergences simple et uniforme sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, de la série de terme général $\cos x(\sin x)^n$.

III) Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\sim\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$ au voisinage de $+\infty$.

Planche 43

I) Calculer $I_n=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{int}}{1-2\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}t$ pour $n\in\mathbb{N}$ puis pour $n\in\mathbb{Z}$.

II) Réduire $\begin{pmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&6\end{pmatrix}$.

Planche 44

I) Cours : énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas d'égalité.

II) Existence de $I(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2+zt}\mathrm{d}t$ où $z\in\mathbb{C}$.
Calculer $I(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.
Montrer que $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(t+ix)^2}\mathrm{d}t$ est constante sur $\mathbb{R}$ et la calculer. Calculer $I(z)$ sur $\mathbb{C}$.

Planche 45

I) Déterminer les solutions de $y''+y=\sin x$ par la méthode de variation de la constante.
II) Soit u un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien et $v=u-\mathrm{Id}$; montrer que $\operatorname{Ker} v=\operatorname{Im} v^{\perp}$.
Montrer que la suite de terme général $u_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{n}\,u^k(x)$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\operatorname{Ker} v$ (on pourra se servir de la question précédente et décomposer x de manière judicieuse).

Planche 46

I) Étudier la semi-convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

II) Cours : montrer que AB et BA ont même trace ; en déduire que deux matrices semblables ont même trace, de même que leurs puissances.

Planche 47 abordable dès la 1^re^ année

I) Calculer $\displaystyle\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où D est le domaine fini délimité par les courbes $y = x^2$ et $y = x^3$.

II) Éléments caractéristiques de la conique $13x^2-16xy+37y^2-5 = 0$.

Planche 48

I) $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & -b & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

II) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est définie.

Étudier la monotonie de (I_n) et montrer que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$; en déduire la valeur de I_{2p}.

Montrer que $nI_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$; en déduire un équivalent de I_n.

Planche 49

I) Montrer que si $\sum \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, où (u_n) est une suite de réels strictement positifs, tend vers $l < 1$, alors $\sum u_n$ converge.

Étudier la convergence de $\sum \dfrac{n}{(n+3)!}$.

II) Montrer que l'image F du projecteur orthogonal de E, espace de dimension n, est exactement l'ensemble des vecteurs x de E vérifiant $\| p(x) \| = \| x \|$. Montrer que $\forall x \in E$, $\| p(x) \| \leqslant \| x \|$.

Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, $\big(p(x)|y\big) = \big(x|p(y)\big)$; qu'en déduit-on ?

Planche 50 I abordable dès la 1^re^ année

I) On note E l'espace des polynômes de degré au plus égal à n. Montrer que f, l'endomorphisme de E défini par $f(P) = P-P'$, est bijectif, d'abord sans utiliser la matrice de f, ensuite en l'utilisant.

Soit $Q \in E$; déterminer $P \in E$ tel que $P - P' = Q$.

II) Étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \cos \dfrac{1}{n}$ ·

Déterminer de deux façons différentes la nature de la série de terme général $(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Planche 51

I) Donner, sans calcul, le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que 0 est valeur propre d'ordre 2 de l'endomorphisme f canoniquement associé à A. Montrer que f est diagonalisable.

Calculer A^2. Retrouver la diagonalisabilité de f.

II) Domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-(t^2 + \frac{x^2}{t^2})\right) \mathrm{d}t$.

Étudier sa continuité et sa dérivabilité.

Montrer que $f' + 2f = 0$ et calculer f.

Planche 52

I) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = \dfrac{1}{1 + t^2 + t^n\mathrm{e}^{-t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donner la limite en $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

II) Pour $a \neq 0$, calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & b \end{pmatrix}$ de trois manières différentes.

Planche 53

I) Dire, sans calcul, si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible, diagonalisable.

Donner valeurs et vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à M dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4), F le sous-espace engendré par e_1 et e_4, G le sous-espace engendré par e_2 et e_3. En utilisant $E = F \oplus G$, trouver une base dans laquelle la matrice de f est diagonale et en déduire les valeurs propres de M.

II) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que f_n, définie par $f_n(x) = \mathrm{e}^{x^n}$ est sommable sur $[1, +\infty[$.

Montrer rapidement que $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est sommable sur $[1, +\infty[$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Planche 54 II abordable dès la 1^{re} année

I) Montrer que $(f|g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur l'espace E engendré par les fonctions $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = \sin x$, $f_4(x) = \cos(2x)$, $f_5(x) = \sin(2x)$.

Montrer que f_4 et f_5 sont unitaires et orthogonaux.

Déterminer $Vect(f_1, f_2, f_3, f_4)^\perp$.

II) Calculer $I = \displaystyle\iint_{(x^2/a^2)+(y^2/b^2)\leqslant 1} (x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Calculer $J = \displaystyle\oint_{(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1} y^3\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$.

Quel lien y a-t-il entre I et J ?

Planche 55 abordable dès la 1^{re} année

I) Montrer qu'un endomorphisme u d'un espace euclidien E, de matrice A dans une base, est orthogonal si et seulement si ${}^tAA = I$ ce qui équivaut à A inversible et $A^{-1} = {}^t A$.

Montrer que u est orthogonal si et seulement si $u^* = u^{-1}$.

II) Montrer que si f est continue sur $[0, 1]$, à valeur dans $\mathbb{R}$ et non nulle en 1, $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^n\mathrm{d}t - \frac{f(1)}{n+1} = \int_0^1 \big(f(t) - f(1)\big)t^n\mathrm{d}t$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^n\mathrm{d}t$ est équivalent à $\dfrac{f(1)}{n+1}$ en $+\infty$.

Planche 56 II abordable dès la 1^{re} année

I) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$ est définie et que $\big((-1)^n I_n\big)$ est décroissante. A-t-elle une limite ? $\sum I_n$ converge-t-elle ?

II) Soient u et v des endomorphismes d'un espace de dimension finie E ; trouver une relation entre $\mathrm{rg}(u + v)$ et $\mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v$.

On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est inversible ; montrer que $\mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v = \dim E$.

Planche 57 II abordable dès la 1^{re} année

I) Montrer que, dans un espace normé complet, toute série absolument convergente est convergente. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il complet ?

II) Soit $D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\phi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\phi & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\phi \end{vmatrix}$ pour $\phi \neq n\pi$.

Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $D_n = \lambda \mathrm{e}^{in\phi} + \bar{\lambda}\mathrm{e}^{-in\phi}$.

Montrer que $\lambda = \dfrac{\mathrm{e}^{2i\phi}}{\mathrm{e}^{2i\phi} - 1}$ et vérifier que $D_n = \dfrac{\sin(n+1)\phi}{\sin\phi}$.

Que vaut D_n si $\phi = n\pi$?

Planche 58

I) Montrer que $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
Trouver P orthogonale telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.
II) Donner le domaine de convergence de la suite de fonctions f_n définies par $f_n(x) = n^2x(x-1)^n + \operatorname{Arc}\sin(x-1)$ sur $[0,2]$.
La convergence est-elle uniforme sur $[\alpha, 2-\alpha]$? Sur $[0,1]$?

Planche 59 II abordable dès la 1^{re} année

I) Quel est le rang de M n'ayant que des 0 sur sa diagonale et des 1 partout ailleurs ? En déduire une valeur propre de M.
M est-elle diagonalisable ? Donner ses éléments propres.
II) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et non nulle en 1.
Trouver $l = \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{f(1)}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n f(1)}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \sim \frac{f(1)\ln 2}{n}$ en $+\infty$.
Donner un développement asymptotique de $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(1)}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

Planche 60

I) Soit (f_n) une suite de fonctions d'un espace vectoriel normé X telle qu'il existe une fonction f et une suite (α_n) tendant vers 0 vérifiant $\forall x \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\| f_n(x) - f(x) \| \leqslant \alpha_n$.
Montrer que (f_n) converge uniformément vers f.
Montrer que la suite complexe (z^n) converge uniformément sur le disque ouvert de centre O et rayon $\dfrac{1}{2}$ $\cdot$ Y a-t-il convergence uniforme sur le disque ouvert de centre O et rayon 1 ?
II) Donner les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 12 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

Planche 61

I) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, +\infty[$, étudier le mode de convergence de la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-x}$.

Étudier le mode de convergence de la série $\sum f_n$.

Cours : lien entre les convergences simple, absolue, uniforme et normale (sans preuve).

II) Élements propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Méthodes de calcul des puissances de A. Calculer A^n.

Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n si, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = -2b_n + c_n \\ b_{n+1} = -3a_n + b_n + 3c_n \\ c_{n+1} = -a_n + b_n + 3c_n \end{cases}.$$

Planche 62 I abordable dès la 1^{re} année

I) Tracer la courbe paramétrée : $x(t) = \dfrac{t-1}{t}$ $y(t) = \dfrac{t}{t+1}$ $\cdot$

II) On note ℓ^1 l'espace des suites $a = (a_n)$ telles que $\sum |\, a_n \,|$ converge.

Soit la série entière $\displaystyle\sum a_n x^n$, de rayon de convergence R ; la suite (a_n) est-elle dans ℓ^1 ?

Soit $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)(3-x)}$; la suite $\left(\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)$ est-elle dans ℓ^1 ?

L'espace ℓ^2 des suites (a_n) telles que la série $\sum |\, a_n \,|^2$ converge contient-il ℓ^1 ?

Planche 63 II abordable dès la 1^{re} année

I) Soit $\mu \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Calculer la sére de Fourier de f 2π-périodique, définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(t) = \cos(\mu t)$. Montrer sa convergence.

En déduire que $\operatorname{cotan} x = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$ sur un domaine à préciser.

II) Soit u en endomorphisme d'un espace euclidien E.
Montrer que, si $\forall (x, y) \in E^2$, $(x|y) = \big(u(x)|u(y)\big)$, u est bijectif.
Montrer que les automorphismes orthogonaux de E forment un groupe pour la composition des applications.

Planche 64

I) Soient E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces de E.
Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
II) Montrer que $f(x) = \operatorname{Arc}\tan x$ est développable en série entière au voisinage de 0 et que la somme de cette série entière est continue sur $[0, 1]$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Planche 65

I) Montrer l'existence de $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$. Étudier la convergence de la suite (u_n), et, le cas échéant, donner sa limite.
II) Montrer que $f(M) = M + \operatorname{tr}(M) I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner ses valeurs propres. Est-il diagonalisable ?
Montrer qu'il est inversible et calculer son inverse.

Planche 66

I) Montrer que toute série de fonctions normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.

Montrer que $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est uniformément convergente sur le disque fermé de centre O et rayon R.

II) Calculer $D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \dots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$.

Planche 67

I) Dans E euclidien, montrer que E est somme directe de tout sous-espace A et de $A^\perp$ (on pourra admettre que toute famille orthogonale peut être complétée en base orthogonale). Montrer que $A = (A^\perp)^\perp$.

II) Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \mathrm{e}^{-n} \cos(n^2 x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, mais que f n'est pas développable en série de Taylor au voisinage de 0.

Planche 68

I) Rappeler les DSE de $\ln(1+x)$, de $\ln(1-x)$ et de $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

Rayon de convergence et somme de $\sum \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)(n+1)}$.

Calculer, après justification rigoureuse, $\sum \dfrac{1}{(2n+1)(n+1)}$.

II) Cours : montrer que si f est un endomorphisme d'un espace de dimension n, alors $(\mathrm{Id}, f, \dots, f^{n^2})$ est liée et en déduire que f admet un polynôme annulateur non nul.

Montrer que toute valeur propre de f est racine de tout polynôme annulateur de f. Justifier succintement que $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$.

Planche 69 manque fin exo II

I) Montrer que la convergence normale entraine la convergence uniforme. Donner le rayon de convergence de $\sum \dfrac{n^2}{n!}\, x^n$.

II) Pour A matrice carrée d'ordre n, réelle, de coefficient a_{ij}, on note $r_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,|$.

Pour λ valeur propre de A de vecteur propre associé X de coefficient x_i, montrer que $\forall i \in [1, n]$, $|\,\lambda\,|\,|\,x_i\,| \leqslant r_i \,\|\, X \,\|$ avec $\|\, X \,\| = \max |\, x_i\,|$, puis $\exists k \in [1, n]$, $|\,\lambda\,| \leqslant r_k$.

Calculer le polynôme caractéristique de :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ -c_0 & -c_1 & \dots & -c_{n-1} & -c_n \end{pmatrix}.$$

