Concours divers option MP

Planche 1 EIVP-TPE

I) Déterminer la série de Fourier de $f(x) = \dfrac{1}{13+12\cos x}$ et en déduire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{13+12\cos t}\,\mathrm{d}t$.

II) Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant $f'(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

Planche 2 EIVP, I abordable dès la 1re année

I) Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, trouver une condition nécessaire et suffisante sur $f \in \mathcal{L}(E)$, pour que tout sous-espace de E admette un supplémentaire stable par f.

II) Montrer que E euclidien est somme directe orthogonale de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f^*$. Montrer que si $f^2 = f \circ f^*$, alors $f = f^*$.

Planche 3 EIVP, II et III abordables dès la 1re année

I) Montrer que $\big((x_k)|(y_k)\big) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \bar{x}_n y_n$ est un produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$. Montrer que $F = \{(x_k) \in \mathbb{C}^n, \displaystyle\sum_{k=1}^n x_k = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ et déterminer son orthogonal.

II) Résoudre $y' = y^2\cos^2 x$ avec $y(0) = \dfrac{1}{3}\cdot$

III) Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A+B) = \det A + \det B$.

Planche 4 EIVP-TPE

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geqslant \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ et que $\forall n \geqslant 6$, $\left(\dfrac{n}{2}\right)^n \geqslant n!$.

Nature de $\sum \dfrac{1}{\ln n!}\cdot$

Planche 5 EIVP, II abordable dès la 1re année

I) Deux cercles C et C', de rayons respectifs r et r', sont tangents extérieurement en un point A ; deux points M et M' parcourent respectivement les cercles C et C'.
Quelle est l'aire maximale du triangle AMM' ?

II) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\cos(xt)\mathrm{d}t$.

Planche 6 EIVP, II abordable dès la 1re année

I) Quelles sont les courbes du plan ($y = f(x)$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$) telles que la normale en chaque point passe par un même point fixe ?
Soit une surface S de l'espace ($z = f(x,y)$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$) ; montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
la surface S est de révolution autour de l'axe (Oz).
Pour tout point M de S, la normale en M et (Oz) sont coplanaires.

II) Résourde $x^2y'' - xy' + y = 0$ sur $]0,+\infty[$.

Planche 7 EIVP, abordable dès la 1re année

I) Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et vérifiant $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ (on pourra utiliser les coordonnées polaires).

II) Pour $(p,n) \in \mathbb{N}^2$, combien l'équation $x_1 + \ldots + x_p = n$ a-t-elle de solutions ?

Planche 8 EIVP-TPE

I) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$ (on pourra utiliser des intégrales doubles).

II) Ensemble de définition et continuité de $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+(-1)^n x}\cdot$

Planche 9 EIVP, I abordable dès la 1^{re} année

I) On note $P(x) = \begin{vmatrix} x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & x & a_n \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$; calculer $P(a_k)$, $k \in [1, n]$.

Décomposer $\dfrac{P(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)}$ en éléments simples et en déduire $P(x)$.

II) Soit u un endomorphisme de rang p d'un espace vectoriel E de dimension $n \geqslant p$; calculer la dimension de $F = \{v \in \mathcal{L}(E),\ v \circ u = 0\}$.

Planche 10 EIVP-TPE

I) Soit f continue et de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ a un sens pour $x > 0$.

Déterminer les limites de $\dfrac{F(x)}{\sqrt{x}}$ en 0 et en $+\infty$.

II) On pose $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + 2\,\dfrac{a_{n-1}}{n+1}$ pour $n \geqslant 1$.

Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.
On appelle f la fonction-somme. Déterminer f à partir de $(1-x)f(x)$.
En déduire une expression de $n \longmapsto a_n$.

Planche 11 EIVP, II abordable dès la 1^{re} année

I) Quel est le polynôme minimal de M, la matrice d'ordre n de terme général $1 - \delta_{ij}$? En déduire une expression des puissances de M.
II) Résoudre l'équation différentielle $4x^3yy' = 3x^4 + y^4$, $y(1) = 2$ (on pourra poser $y = tx$).

Planche 12 EIVP-TPE

Existence et calcul de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$

Planche 13 EIVP, abordable dès la 1^{re} année

I) Soit I un idéal non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \in I$; montrer que I contient toutes les matrices de même rang que A.
Montrer que I contient une matrice de rang 1 et en déduire I.
II) Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension n.
Montrer que $F = \{v \in \mathcal{L}(E),\ v \circ u = 0\}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ et donner sa dimension.

Planche 14 EIVP-TPE

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ (on pourra utiliser $f(x,t) = \dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$).

Planche 15 EIVP, II abordable dès la 1^{re} année

I) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

II) Calculer le rayon de courbure de $2\mathrm{e}^{x+y} = (1 + \mathrm{e}^x)(1 + \mathrm{e}^y)$.

Planche 16 EIVP-TPE

I) Montrer que $\Omega = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

II) Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n}^{3n} \sin\frac{1}{k}\,\cdot$

Planche 17 EIVP, II abordable dès la 1^{re} année

I) Trouver les fonctions F de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\forall (x,y) \in \,]0, +\infty[^2$, $\alpha x\,\dfrac{\partial F}{\partial x} + \beta y\,\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

II) Trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} P^{(k)}(X) = X^5$.

Planche 18 EIVP-TPE

I) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^n}\cdot$.

II) Soit (E,N) un espace vectoriel normé, B l'ensemble des suites bornées de E. Montrer que $\phi(x_n) = (y_n) = (x_{n+1} - x_n)$ est un endomorphisme de B continu et déterminer sa norme.
Soient A et B deux fermés disjoints et non vides de E ; contruire une application f continue de E dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à A soit nulle et la restriction à B soit constante égale à 1.

Planche 19 EIVP-TPE II abordable dès la 1re année

I) Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, S est réelle symétrique positive, et vérifie $AS^2 = S^2A$, alors $AS = SA$.
II) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $3x + 5y = 1$; $3x + 5y = 2$; $9x + 15y = 2$.
III) Donner, si c'est possible, une matrice symétrique complexe non diagonalisable.

Planche 20 EIVP-TPE

I) Développer $f(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\lambda x}\,\mathrm{d}x$ en série entière et en donner un équivalent en $+\infty$.

II) Existence et dérivabilité de f définie par $\displaystyle\int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = 1$.

Montrer que la courbe de f est symétrique par rapport à la droite $y = -x$. Étudier la branche infinie.

Planche 21 EIVP-TPE

I) Donner les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & n \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

II) f défini sur $\mathbb{C}_{2n}[X]$ par $f(P)(X) = X(X-1)P'(X) - 2nXP(X)$ est-il diagonalisable ?

Planche 22 EIVP-TPE

I) Résoudre $\left\{\begin{array}{l} x' = -x + y \\ y' = -y + z \\ z' = -z + \mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$.

II) Résoudre $x^2 + 2x - 3 = 0$ dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

Planche 23 EIVP-TPE

I) On note F l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $\phi \in F$, bijective de $[0,1]$ dans lui-même, montrer que L_ϕ, défini sur F par $L_\phi(f) = f\circ\phi$ est un endomorphisme de F.
Montrer que L_ϕ est continu pour la norme sup.
Si $\phi(x) = x^2$, montrer que L_ϕ n'est pas continu pour la norme 1.
Montrer que, si ϕ est un difféomorphisme de $[0,1]$ sur lui-même, L_ϕ est continu pour la norme 1.
Montrer que, si ϕ a une dérivée nulle en un point de [0,1], L_ϕ n'est pas continu au sens de la norme 1.

II) Montrer que F définie par $F(x) = \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$ (encore noté F) et que ce prolongement est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Montrer que, si f est dérivable en 0, alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Planche 24 EIVP-TPE I abordable dès la 1re année

I) Soient E un K-espace vectoriel et p un projecteur non nul de E. Déterminer $A = \{t \in K, \mathrm{Id} + tp \in GL(E)\}$ et montrer que $\{\mathrm{Id} + tp, t\in A\}$ est un sous-groupe de $GL(E)$.
II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $Sp(A) \subset \mathbb{C}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$.
Montrer que $\mathrm{e}^A - I_n$ est inversible.
Soit B continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, 1-périodique.
Montrer que $X'(t) = AX(t) + B(t)$ admet une et une seule solution 1-périodique.

Planche 25 EIVP-TPE

I) Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, où $a_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \Big(\frac{t}{1+t^2}\Big)^n \mathrm{d}t$.
Étudier la convergence au bord de l'intervalle de convergence.
Exprimer la somme de la série entière sous forme intégrale.
II) Soient E un espace vectoriel normé et $f \in E^*$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est dense dans E si et seulement si f n'est pas continue.

Planche 26 ENSEA

I) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice diagonale D. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, D^n est combinaison linéaire de D et D^2. Calculer A^n.
II) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$, pour f continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Planche 27 ENSEA

I) Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont 1 et -1 sont valeurs propres est-il diagonalisable ?
II) Calculer les coefficients de Fourier de $f(t) = \exp\big(\exp(it)\big)$.
Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de f ?
Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2\cos(t)}\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}$.

Planche 28 ENSEA, II abordable dès la 1re année

I) Montrer que $\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t\mathrm{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer $\phi(x)$.
Montrer, en intégrant par parties, que ϕ est définie en 0.
Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

II) Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne, trouver une base orthonormale de $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+2z = 0\}$, puis donner la matrice de la projection orthogonale sur H.

Planche 29 ENSEA

I) Ensemble de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{3n-1}$.
Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
Donner la limite de f en $+\infty$.
II) À quelle(s) condition(s) sur a, b, c, $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Planche 30 ENSEA

Soit (K_n) une suite tendant vers $+\infty$.
Trouver un équivalent de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}y}{(1+K_n y)^{3/2}}$.
Encadrer l'intégrale $\displaystyle\int_{n\pi-\pi/2}^{n\pi+\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2\,|\sin(x)|)^{3/2}}$ par deux intégrales du type précédent.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2\,|\sin(x)|)^{3/2}}$ est-elle convergente ?

Planche 31 ENSEA

I) Donner le domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \ln(1+\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$.
Donner les variations de f et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
II) Donner la définition d'un adjoint.
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Soient $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$. Déterminer l'adjoint de u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $u(x) = (a|x)b$.

Planche 32 ENSEA

I) Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\ln(\tan x)\mathrm{d}x$.

II) Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{pmatrix}$.

Montrer que A est injective si et seulement si x n'est pas racine d'un polynôme à préciser. Donner le polynôme caractéristique de A.

Planche 33 ENSEA

I) Convergence de $\sum(-1)^n \displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos x)^n \mathrm{d}x$ et calcul de sa somme.

II) À quelle(s) condition(s) $\begin{pmatrix} 0 & 1/a & 1/a^2 \\ a & 0 & 1/a \\ a^2 & a & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Planche 34 ENSEA

Trouver les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\operatorname{tr} M = 0$ et $M^3 - 2M^2 + M = 0$.

Planche 35 ENSIIE, II abordable dès la 1re année

I) Cours : définition et propriétés du rayon de convergence.
II) Pour A fixée dans $\mathcal{M}_n(K)$, montrer que $f_A(M) = \operatorname{tr}(AM)$ définit une application du dual de $\mathcal{M}_n(K)$.
Montrer que $f(A) = f_A$ est linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$.
Soit $\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{M}_n(K), \exists (M,N) \in \mathcal{M}_n(K), C = MN - NM\}$; montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ des combinaisons linéaires de matrices de C est le plus petit sous-espace engendré par $\mathcal{C}$.
Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont dans $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$.
Soit ϕ une forme linéaire dont le noyau contient $\mathcal{D}$; montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\phi = f_A$.
Montrer que A est scalaire, que $\phi = \lambda\operatorname{tr}$ et que $D = \operatorname{Ker}\operatorname{tr}$.

Planche 36 ENSIIE

I) Cours : matrices équivalentes (définition, caractérisation par le rang).
II) Soit $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a \neq b$. Montrer que la suite de terme général $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+a)}{\ln(n+b)}\right)^{n\ln(n)}$ admet une limite l à déterminer.
Nature de la série $\sum x_n$ où $x_n = u_n - l$.

Planche 37 ENSIIE

I) Cours : si f et g sont définies, continues par morceaux, positives, à valeurs dans $[\alpha, \beta[$ et telle que $f = O(g)$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t$ converge aussi.

II) On munit $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique $B : (e_1, e_2)$. Montrer que, pour $u = xe_1 + ye_2$, $u' = x'e_1 + y'e_2$, $(u|u') = xx' + xy' + x'y + 3yy'$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
Pour $e_1' = e_1$, montrer qu'il existe e_2' tel que $B' : (e_1', e_2')$ soit une base orthonormée pour ce produit scalaire.
Exprimer $f(u) = \dfrac{x^2 + 3xy + 5y^2}{x^2 + 2xy + 3y^2}$ en fonction des coordonnées (x', y') de u dans la base B'.
Montrer qu'il existe une base B'' dans laquelle u a pour coordonnées x'', y'' telles que $f(u) = \dfrac{\lambda x''^2 + \mu y''^2}{x''^2 + y''^2}$ et préciser λ et μ.
Montrer que f est bornée et préciser ses extrema.

Planche 38 ENSIIE

I) Cours : montrer que si $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
II) Montrer que $y' = \cos(x+y)$ admet une solution vérifiant $y(0) = \dfrac{\pi}{4}\cdot$
Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de cette solution.
II) Étudier la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = \dfrac{\cos(2\theta)}{1-2\cos\theta}\cdot$

Planche 39 ENSIIE

I) Cours : énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.
II) Soit E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$; pour $f \in E$, on définit $T(f)$ par : $T(f)(0) = f(0)$ et pour $x \neq 0$, $T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que $T(f)$ est un endomorphisme injectif de E.
Montrer que T n'a pas de valeur propre nulle et que si f est fonction propre associée à la valeur propre λ de T, $f(0) = \lambda f(0)$.
Montrer que f est dérivable et que $\forall x > 0$, $\lambda f'(x) + (\lambda-1)f(x) = 0$.
Trouver les valeurs propres et les fonctions propres de T.

Planche 40 ENSIIE

I) Cours : définition de la différentiabilité et de la différentielle d'une fonction à plusieurs variables.
II) Montrer que $\phi_k(P) = \displaystyle\int_{-1}^1 t^k P(t)\mathrm{d}t$ est dans le dual de $\mathbb{R}_3[X]$.
Montrer que $B = (\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ est une base de ce dual et trouver une base de $\mathbb{R}_3[X]$ dont c'est la base duale.
Donner les coordonnées de ϕ_4 dans B.
Montrer que, si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^k P(t)\mathrm{d}t = 0$ alors $P = 0$.
Montrer que si f est continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifie $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^k f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors $f = 0$.

Planche 41 ENSIIE

I) Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge. On munit E de la norme infinie.
Montrer que $\phi(f) = g$ telle que $g' = f$ définit un endomorphisme sur E.
Montrer que $\forall f \in E$, $\exists a \in [0,1]$, $\phi(f)(a) = 0$.
Montrer que ϕ est continue, que $|||\, \phi \,||| \leqslant 1$ puis que $|||\, \phi \,||| \leqslant \dfrac{1}{2}\cdot$
II) Cours : dimension de la somme de deux sous-espaces, avec démonstration.

Planche 42 ENSIIE

I) Cours : définition, existence et calcul de la distance d'un élément à un sous-espace.
II) Convergence simple sur $\mathbb{R}$ de (f_n) définie par $f_n(x) = \cos^n \dfrac{x}{\sqrt{n}}\cdot$
Convergence uniforme sur $[-a,a]$ pour $a > 0$, puis sur $\mathbb{R}$.

Planche 43 ENSIIE

I) Cours : définition d'un produit scalaire hermitien d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Énoncé et démonstration du théorème de Pythagore dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel hermitien.
II) Justifier le fait que (E) : $y' = 2xy + 1$ admet une unique solution f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.
Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.
En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)k!(n-k)!}\right)x^{2n+1}$.

Chercher toutes les solutions développables en série entière de (E), puis celles qui vérifient $f(0)=0$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Planche 44 ENSIIE

I) Cours : montrer qu'une suite (u_n) de réels croissante et majorée converge.
II) La matrice A ayant des 1 sur la première ligne, la première colonne, la diagonale et des 0 partout ailleurs est-elle diagonalisable ? Que vaut le rang de $A-I_n$? Montrer que 1 est valeur propre de A, préciser le sous-espace propre associé.
Déterminer les autres valeurs propres de A et leur sous-espace propre associé.
III) Reconnaître la surface (S) de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2+y^2-z^2=1$; un dessin, même sommaire, sera apprécié.
Soit A le point $(1,0,0)$, B le point $(1,1,1)$. Montrer que la droite $D=(AB)$ est contenue dans (S).
Déterminer l'intersection du plan tangent à (S) en A et du plan tangent à (S) en B.

Planche 45 ENSIIE

I) Cours : définitions de la somme directe de deux espaces vectoriels, de deux espaces supplémentaires.
Montrer que deux sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes d'un endomorphisme sont en somme directe.
II) Existence et calcul de $I_{p,q}=\displaystyle\int_0^1 t^p(\ln(t))^q\mathrm{d}t$ où p et q sont deux entiers naturels.
Soit E l'ensemble des applications f continues de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et telles que $t^2(f(t))^2$ est intégrable sur $]0,1]$.
Montrer que E est un espace vectoriel et qu'on définit un produit scalaire sur E en posant $(f|g)=\displaystyle\int_0^1 t^2f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

Montrer que l'application $F(a,b)=\displaystyle\int_0^1 t^2(\ln(t)-at-b)^2\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}^2$; montrer que F admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer celui-ci.

Planche 46 ENSIIE

I) Cours : définition d'un endomorphisme diagonalisable ; donner trois conditions pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.
II) Justifier que $S(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.
Donner $S(0)$ et $S(1)$. Trouver $k>0$ tel que S soit k-lipschitzienne.
Montrer que S est dérivable et calculer $S'(x)$.
Justifier que S est $\mathcal{C}^\infty$ et donner ses dérivées successives.
Tracer la courbe de S et donner un équivalent en $+\infty$ de $S(x)-\ln x$.

Planche 47 Télécom SudParis

I) Pour $m\neq 0$, trouver un changement de variable permettant de transformer $(1+x^2)^2y''+(1+x^2)2xy'+my=0$ en équation à coefficients constants et la résoudre.
II) Soit A une matrice constituée de matrices A_{ij}, $1\leqslant i\leqslant s$, $1\leqslant j\leqslant n$. Montrer que $\operatorname{rg}A\leqslant\displaystyle\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{rg}(A_{ij})$ (on pourra étudier d'abord le cas $i=1$).

Planche 48 Télécom SudParis, abordable dès la 1^re^ année

I) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on désigne par N le nombre de ses diviseurs et par P leur produit. Trouver une relation entre n, N et P.
II) Étudier la suite de terme général $u_n=(2+\sqrt{3})^n-E\big((2+\sqrt{3})^n\big)$.

Planche 49 Télécom SudParis, I abordable dès la 1^re^ année

I) Trouver $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall X\in\mathbb{C}^n$, ${}^tXAX=\operatorname{tr}A$.
II) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t$.

Planche 50 Télécom SudParis

I) Développer $\ln\left(1+\dfrac{x}{1+x^2}\right)$ en série entière.

II) Montrer que le commutant d'une matrice A réelle, carrée d'ordre n, et dont les valeurs propres sont simples, est l'espace engendré par $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$.

Planche 51 Télécom SudParis, I abordable dès la 1^{re} année

I) Soit p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien tels que $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$. Que dire de $p+q$?

II) Intégrabilité de $x \longmapsto x^{\alpha}\ln(x+\mathrm{e}^{\beta x})$ sur $\mathbb{R}_+$.

Planche 52 Télécom SudParis

I) Que peut-on dire d'une matrice A symétrique réelle positive ? Montrer que les valeurs propres de A sont positives ou nulles.
Définir $O_n(\mathbb{R})$; montrer que, si $U \in O_n(\mathbb{R})$, $|\operatorname{tr}(AU)| \leqslant \operatorname{tr} A$.
Dans quel cas a-t-on égalité ?

II) Étudier les convergences simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$ si $x \in [0,n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$.

Planche 53 Télécom SudParis, II abordable dès la 1^{re} année

I) On note χ_A le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer que $\chi_A(B)$ est inversible si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre commune.

II) Représenter $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x+y \leqslant 4,\ xy \geqslant 1,\ x \geqslant 0\}$.
À l'aide du changement de variable $x = u-v$, $y = u+v$, calculer $\displaystyle\iint_{\Delta} (x^2-y^2)\cos(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Planche 54 Télécom SudParis, II abordable dès la 1^{re} année

I) Montrer que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $A \neq I_2$ et $A^2 \neq I_2$ et $\exists n \geqslant 3,\ A^n = I_2$, est semblable à $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

II) Résoudre $(x^2-1)y' - xy = 2x(x^2-1)$.

Planche 55 Télécom SudParis I abordable dès la 1^{re} année

I) Étudier la convergence de la suite réelle définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$; donner un équivalent de u_n en $+\infty$ (on pourra poser $v_n = \dfrac{1}{u_n}$).

II) Soit $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R})$; montrer que $b_{ij} = \dfrac{\partial \ln|\det A|}{\partial a_{ij}}$ est le terme général de ${}^tA^{-1}$.

Planche 56 Télécom SudParis

I) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(x) + P'(x) + \ldots + P^{(n)}(x) \geqslant 0$.

II) Étudier la série de terme général $\sin\left((2+\sqrt{3})^n\pi\right)$ (on pourra calculer $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$).

Planche 57 Telecom SudParis

I) Soient $(X,Y) \in \mathcal{M}_n(K)^2$; calculer $\det(I_n + X\,{}^tY)$.

II) Soient I un intervalle contenant 0 et f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, s'annulant en 0. Montrer que g, définie sur I par $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ si $t \neq 0$, et $g(0) = f'(0)$, vérifie $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t$.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et calculer $g^{(k)}(0)$.

Planche 58 Navale

I) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)^2}$.

II) Calculer $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{-x\,\ln xy}{1-x^2y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

Planche 59 Navale

Quelles sont les matrices réelles carrées M égales à leur comatrice ? Quelles sont les matrices orthogonales réelles diagonalisables ?

Planche 60 Navale

Étudier la convergence de la suite de fonctions f_n définies sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f_n(x) = \cos^n x \sin x$.

Étudier la convergence de (nf_n) et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} nf_n(x)\mathrm{d}x$.

Planche 61 Navale II abordable dès la 1^{re} année

I) Montrer que $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |\,f(x)\,|\,\mathrm{d}x$ est une norme sur l'espace E des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ définit une suite (f_n) de Cauchy pour N_1. Est-elle convergente ?

II) Soient u et v deux endomorphismes d'un K-espace vectoriel E de dimension n, x_0 un vecteur non nul de E et ϕ une forme liméaire non nulle sur E, tels que $(u \circ v - v \circ u)(x) = \phi(x)x_0$.

Quel est le rang de $u \circ v - v \circ u$?

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(u^k \circ v - v \circ u^k)(x) = \displaystyle\sum_{i+j=k-1} \phi\big(\big(u^i(x)\big)u^j(x_0)\big)$.

En déduire que $\forall j \in [0,n]$, $u^j(x_0) \in Vect\big(u^i(x_0)\big)$.

Planche 62 Navale

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie, vérifiant $u^3 = \mathrm{Id}$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et x_0 fixé dans E, résoudre dans E l'équation $x + au(x) = x_0$.

Planche 63 Air

I) Déterminer la matrice jacobienne en (x,y) de $f(x,y) = (x+y, xy)$.

Montrer que $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \,|\,y\,| < |\,x\,|\}$ est un ouvert et que la restriction de f à U est injective.

Déterminer $V = f(U)$ et montrer que la restriction de f à U est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de U sur V.

II) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, de même orientation que la base canonique, dans laquelle $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ soit diagonale.

Planche 64 Air

I) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^3 = 0$, $A + I_n$ est inversible et calculer cet inverse en fonction de A et I_n.

II) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.

Calculer $f''(x)$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Planche 65 Air

I) Montrer que u défini par $u(P)(X) = P(X+a)$ où $a \in \mathbb{R}$, est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Écrire sa matrice M_a dans une base judicieusement choisie, montrer qu'elle est inversible et donner son inverse.

II) Montrer que la suite de terme général $\ln\big(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\big)$ est convergente. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\big)$.

Planche 66 ICNA

Montrer que (E) : $x^2y" + 2xy' + (2 - x^2)y - 1 = 0$ possède une unique solution développable en série entière, préciser ses premiers coefficients (a_0 et a_1), donner l'expression de a_n.

Terminer la résolution de (E) (on cherchera un nombre p tel que $u(x) = x^p y(x)$ soit solution).

Planche 67 ICNA

I) Montrer que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, vérifie $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
Montrer que A est inversible si et seulement si $|\det A| = 1$

II) Montrer que e^{-t^2} est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.
Calculer $f' + g'$, $g(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. En déduire $\int_{\mathbb{R}_*^+} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Planche 68 ICNA

I) Déterminer les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

II) On pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\exp(\frac{1}{t})}{\sqrt{1+t^2}\ln(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f(x)$.

Planche 69 Mines d'Albi, I abordable dès la 1re année

I) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et $f : [x_0, x_0+2h] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $\exists t \in [0,1]$, $f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0) = h^2 f''(x_0+2th)$.

II) Discuter suivant t l'existence de $f(t) = \int_0^1 x^{t-1}\tan(x)\mathrm{d}x$.

Planche 70 Mines d'Albi, etc

I) Rayon de convergence et calcul de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{\varphi(k)}}{\varphi(k)!}$ où $\varphi(k) = E(\sqrt{k})$.

II) Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(A^k) = 0$.

III) Equivalent en 0^+ de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{1+u}\,\mathrm{d}u$.

Planche 71 Mines d'Albi, II abordable dès la 1^{re} année

I) Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
Nature de la série $\sum u_n^2$? Nature de la série $\sum u_n$?

II) Soit $P \in K[X]$ de degré n.
Montrer que $\big(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n)\big)$ est une base de $K_n[X]$.

III) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $f(M) = \mathrm{tr}(M)A - \mathrm{tr}(A)M$ est-il diagonalisable ?

Planche 72 Mines d'Albi, etc

I) Montrer que f, de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et vérifiant :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}f(x,y) \in SO_2(\mathbb{R})$, est une rotation.

II) Convergence simpe et uniforme de $\left(\frac{\mathrm{Arc}\tan(nx)}{n^2+1}\right)$.

III) Cours : théorème de continuité pour une intégrale à un paramètre.

Planche 73 Mines d'Albi, etc

I) Existence et limite de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arc}\tan(n+x)}{\sqrt{x}(n+x)}\,\mathrm{d}x$.

Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(n+x)}\,\mathrm{d}x$ et donner un équivalent simple de I_n.

II) Résoudre $A^tAA = I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Planche 74 Mines d'Albi, etc

I) Soient f et g deux endomorphismes d'un espace E de dimension finie n, vérifiant $f + g = Id$ et $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \leqslant n$; montrer que f et g sont deux projecteurs associés.
Généraliser au cas de p endomorphismes avec $p \leqslant n$.

II) Pour quelles valeurs de n $A_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arc}\tan\frac{x}{n}}{x^{3/2}(1+x)}\,\mathrm{d}x$ existe-t-elle ? Donner les limites en $+\infty$ de A_n et nA_n.

Planche 75 Mines d'Albi, etc

Étudier $f(x,y)=\operatorname{Arc}\tan x+\operatorname{Arc}\tan y-\operatorname{Arc}\tan\dfrac{x+y}{1-xy}\cdot$

Planche 76 Mines d'Albi, etc

Étudier, selon α, la série de terme général $\dfrac{1}{\ln n+(-1)^n n^\alpha}\cdot$

Planche 77 Mines d'Albi, etc abordable dès la 1^{re} année

I) Calculer les puissances de $\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/6\\ 2 & 1 & 1/3\\ 6 & 3 & 1\end{pmatrix}$. Généralisation ?

II) Cours : montrer que f, continue de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, admet un point fixe.

Planche 78 Mines d'Albi, etc

I) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 t^n\sin(\pi t)\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{n\geqslant 0}t^n\sin(\pi t)\mathrm{d}t$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 t^n\sin(\pi t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\,dx$.

II) Soient $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, telles que $A+B=AB$.
1 est-il valeur propre de B ?
Montrer que $B-I_n$ est inversible et calculer son inverse.
Montrer que $AB=BA$.

Planche 79 Mines d'Albi, abordable dès la 1^{re} année

I) Étudier la courbe d'équations $\begin{cases}x=\dfrac{3t^2}{t^3+1}\\ y=\dfrac{4t^3}{t^3+1}\end{cases}$.

II) Matrice dans la base canonique de la rotation d'axe dirigé par $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}\cdot$

Planche 80 Mines d'Albi, II abordable dès la 1^{re} année

I) Soient $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ vérifiant $AB-BA=B$.
Calculer AB^p-B^pA puis montrer que B est nilpotente.

II) Étudier la suite de terme général $n\sin\dfrac{1}{n}\cdot$

Planche 81 ISUP

I) Étude de la série de terme général $u_n(x)=x^\alpha\mathrm{e}^{-nx}$ sur $[0,+\infty[$: convergences simple et uniforme, calcul pour $\alpha=1$.

II) Noyau et image de f définit sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x)=u\wedge(x\wedge u)$ où u est un vecteur fixé. f est-il diagonalisable ?

