Concours Commun Mines-Ponts – option PC

Planche 1 II abordable dès la 1re année

I) Trouver $u(t)$ pour que le plan tangent à la surface engendrée par les droites $D_t : \begin{cases} x = tz + u(t) \\ y = u(t)z + \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$, le long de D_t, reste constant.

II) Résoudre $xy'' + 2y' - xy = 0$.

Planche 2 II abordable dès la 1re année

I) Trouver l'intervalle de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$, puis montrer que $f(x) \sim \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$ ·

II) Soit A un point donné d'un cercle (C) de centre O et rayon R. Trouver le lieu des points P, projection orthogonale de A sur la tangente à (C) en M lorsque M parcourt (C).

Planche 3 II abordable dès la 1re année

I) Résoudre $y'' + y' + y = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ ·

II) On note H l'hyperplan noyau de la forme linéaire ϕ non nulle, dans E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. L est la matrice de ϕ, A celle de f. Montrer que :

H est stable par f si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\phi \circ f = \lambda\phi$;
H est stable par f si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, ${}^tA{}^tL = \lambda{}^tL$.

Déterminer les plans stables par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Planche 4 II abordable dès la 1re année

I) Ensemble de définition de $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{iz\cos\theta}\mathrm{d}\theta$. Est-elle développable en série entière ? Si oui donner ce développement.

II) À quelle condition, nécessaire et suffisante, sur $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, $(u, v) \neq (0, 0)$, la droite D d'équation $ux + vy + wz = 0$ est-elle tangente à la courbe H d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$? Qu'est H ?

Planche 5

I) Soient n réels $0 < a_1 < \ldots < a_n$; montrer que λ est valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1$.

A est-elle diagonalisable ?

II) Nature de la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 x^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} x^k\right)^{-1} \mathrm{d}x$.

Définir le rayon de convergence d'une série entière.

Planche 6

I) À quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$, la série de terme général f_n définie par $f_n(x) = nx^a\mathrm{e}^{-nx^2}$, converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+^*$? Calculer un équivalent en 0 de la somme de cette série.

II) Cours : conditions de diagonalisabilité d'une matrice ; dérivabilité d'une série de fonctions.

III) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^4 + A^3 + 2A^2 + A + I_n = 0$, n est pair et $\operatorname{tr} A \in \mathbb{Z}$.

Planche 7 I abordable dès la 1re année

I) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f' \neq 0$; calculer $\displaystyle\int_a^b f + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}$ faire une interprétation géométrique.

II) À quelle condition A, carrée d'ordre n, n'ayant que des a sur la diagonale et des b partout ailleurs est-elle inversible ?
Lorsqu'elle l'est, calculer son inverse.

Planche 8 II abordable dès la 1re année

I) Existence et continuité de $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$.
Montrer qu'elle est de classe C^∞.
II) Étudier les ensembles $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2 - 3xy - 4y^2 = 0\}$ et $\Gamma' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2 - 3xy - 4y^2 = 1\}$.

Planche 9

Existence et calcul de $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{x^2 + a^2}$, où a est un réel quelconque et de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{(x^2+1)}$.

Planche 10

I) Montrer que f_A défini par $f_A(M) = tr(A)M + tr(M)A$ où A est une matrice fixée, est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quel est son noyau ? f_A est-il diagonalisable ? Donner ses éléments propres.
II) Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{1/5} + (-1)^n}$.

Planche 11

I) Soit E préhilbertien réel. Montrer qu'il existe n vecteurs de E, $e_1, \ldots, e_n$ tous non nuls, tels que $\forall x \in E$, $\|\, x \,\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\,(e_k|x)\,|^2$ si et seulement si E est de dimension finie au plus égale à n.
II) Résoudre $2tx'' - x' + t^2 x = 0$ en posant $u = t\sqrt{|\,t\,|}$.

Planche 12 II abordable dès la 1re année

I) En fonction de $\theta \in \mathbb{R}$, donner l'ensemble de définition de:
$h_\theta(x) = \ln(1 + x^2 - 2x\cos\theta)$.
Donner un développement en série entière de h_θ, fonction de x.
Calculer $I_\theta = \displaystyle\int_0^1 h_\theta(x)\mathrm{d}x$ et $J(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} h_\theta(x)\mathrm{d}\theta$. Calculer $J(1)$.
II) Avec le moins de calculs possible, caractériser les courbes planes d'équation $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$ et $2x^2 - 3xy - 2y^2 = 1$.

Planche 13 I abordable dès la 1re année

I) Montrer que :
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall h \in \mathbb{R}$, $P(h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(X)(h - X)^k$.
Soit $\phi(P) = \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} P(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.
Montrer que $\phi(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^u P(x+u)\mathrm{d}u$.
Montrer que ϕ est un endomorphisme.
Effectuer le changement de variable $h = x + u$ dans la 1re égalité démontrée. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^u P(x+u)\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P^{2k}(x)$.
II) Représenter l'ensemble de définition de :
$f(x,y) = \displaystyle\int_0^1 (\ln t)^{x^2-4}(1-t)^{2y^2-1}\mathrm{d}t$.

