ENS – option MP

Planche 1 Lyon

Soit q continue strictement positive définie sur $[0,1]$; que dire, pour $a \in \mathbb{R}$, de la dimension de l'espace vectoriel E_a des solutions de l'équation différentielle avec conditions aux limites :
$y''(t) + aq(t)y(t) = 0$, $y(0) = y(1) = 0$? En choisissant q et a, donner des exemples de toutes les valeurs possibles.

Montrer que $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 q(t)f(t)g(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ pour lequel les E_a sont deux à deux orthogonaux.

Montrer qu'un segment de $\mathbb{R}$ ne contient qu'un nombre fini de a tels que $E_a \neq \{0\}$.

Planche 2 Lyon, II abordable dès la 1re année

i) Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$; on veut montrer le théorème de Rolle pour la dérivée d'ordre n :

pour $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$, $\exists c \in\,]a,b[$, tel que $f^{(n)}(c) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$ où $c_i = (-1)^{n+i} n! \displaystyle\prod_{k\neq i} \frac{1}{|\,x_k - x_i\,|}$.

Étudier le cas $n = 1$, puis le cas général.

II) On note $x_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j\neq i}\frac{1}{x_i - x_j}\right) = 2^{n-1}$.

Planche 3 Ulm-Lyon-Cachan

Un nombre fini de droites du plan le découpe en différentes régions. Est-il possible de colorier ces régions avec deux couleurs, de façon à ce que deux régions ayant un bord en commun n'aient jamais la même couleur ?

Planche 4 Ulm-Lyon-Cachan, abordable dès la 1re année

Montrer que, si P est un polynôme de degré n, à coefficients réels et scindé sur $\mathbb{R}$, $(n-1)P'^2 \geqslant nPP''$ (on pourra commencer par montrer que $P'^2 \geqslant PP''$).

Planche 5 Lyon, II abordable dès la 1re année

I) On note B la boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ de centre O et rayon 1 ; pour tout chemin ϕ, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, à valeurs dans B, on définit l'énergie $E(\phi) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x'^2 + y'^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}\,\mathrm{d}t$ où x et y sont les coordonnées de $\phi(t)$.

Pour $z_0 \in B$, on considère la famille des chemins vérifiant $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = z_0$; quels chemins de cette famille minimisent E ?

II) Montrer que, si les suites (a_n) et (b_n) vérifient $(a_n + b_n)$ tend vers 0 et $(\mathrm{e}^{a_n} + \mathrm{e}^{b_n})$ tend vers 2, alors elles convergent.

Même question avec (a_n), (b_n) et (c_n) telles que $(a_n + b_n + c_n)$ tende vers 0 et $(\mathrm{e}^{a_n} + \mathrm{e}^{b_n} + \mathrm{e}^{c_n})$ tende vers 3 (on pourra montrer qu'elles ne divergent pas, puis qu'elles n'admettent qu'une seule valeur d'adhérence).

Planche 6 Cachan

Soit f continue sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(x_1,\ldots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$; montrer qu'il existe un unique polynôme P_n^f, de degré au plus égal à n, tel que $\forall i \in [0,n]$, $P_n^f(x_i) = f(x_i)$ (on pourra introduire les polynômes de Lagrange L_i).

On note $\lambda_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |\,L_i(x)\,|$ et $\Lambda_n = \|\,\lambda_n\,\|_\infty$;

montrer que $\Lambda_n = \max\left\{\dfrac{\|\,P_n^f\,\|_\infty}{\|\,f\,\|_\infty},\ f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})\right\}$ (on pourra montrer qu'il existe y tel que $\Lambda_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |\,L_i(y)\,|$).

Montrer que $\forall x \in [a,b]$, $\lambda_n(x) \geqslant 1$ (on pourra montrer que, pour une fonction f bien choisie, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} |\,L_i(x)\,| = 1$).

Planche 7 Ulm-Lyon-Cachan, II abordable dès la 1re année

I) Pour p premier, combien y a t-il de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$? Si $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, montrer que x est un carré si et seulement si $x^{(p-1)/2} = 0$.

II) Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels, u et v linéaires de E dans F et F dans G respectivement, telles que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$: montrer qu'il existe w linéaire de F dans G telle que $w \circ u = v$.

Planche 8 Ulm

On désigne par Γ la partie de $\mathbb{C}^2$ définie par l'équation $z_1^2 + z_2^2 = 1$. Déterminer les fonctions continues f de Γ dans $\mathbb{C}$ pour lesquelles il existe deux applications polynomiales P et Q dans $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ telles que $Q|_\Gamma \neq 0$ et que $f(z_1, z_2) = \dfrac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)}$ chaque fois que $(z_1, z_2) \in \Gamma$ et $Q(z_1, z_2) \neq 0$.

Planche 9 Ulm-Lyon-Cachan

On munit l'espace vectoriel complexe $E = \mathrm{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ des fonctions continues complexes 2π-périodiques, du produit scalaire hermitien usuel $< f, g >= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t$.

Établir que l'endomorphisme φ de E, qui à f associe $\varphi(f)$ défini par $\varphi(f)(x) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t$, pour $a > 0$ fixé, est autoadjoint, et déterminer la norme subordonnée à la norme dérivant du produit hermitien *supra*. Déterminer les éléments propres de φ.

Planche 10 Ulm-Lyon-Cachan

On donne, dans un espace vectoriel euclidien E, un projecteur orthogonal p et un endomorphisme positif u. Établir que $p \circ u$ est diagonalisable (on pourra montrer que $p \circ u$ induit sur son image un endomorphisme diagonalisable, que $\mathrm{Im}\, p \circ u = \mathrm{Im}\, p \circ u \circ p$, que l'image et le noyau de $p \circ u$ sont supplémentaires).

Planche 11 Lyon

Soit un espace vectoriel normé réel E, de dimension finie n, et un compact K tel que 0 soit intérieur à K. Si un endomorphisme f satisfait $f(K) \subset K$, donner une majoration de $|\det(f)|$ et de $|\mathrm{tr}(f)|$.

Planche 12 Ulm-Lyon-Cachan

Soit deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$; montrer qu'il existe un polynôme R non nul dans $\mathbb{R}[X,Y]$ tel que $R(P,Q) = 0$. Donner des estimations du degré de R en fonction de ceux de P et Q.

Planche 13 Cachan

On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme infinie.

À $f \in E$ on associe Tf défini par $Tf(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

Montrer que T est un endomorphisme continu.

Quelle en est la norme subordonnée ?

Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, montrer que $\lambda\,\mathrm{Id} - T$ admet un inverse continu et que $\left\|\,(\lambda\,\mathrm{Id} - T)^{-1}\,\right\| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{1/|\lambda|}}{|\lambda|}$.

Planche 14 Ulm-Lyon-Cachan, II abordable dès la 1re année

I) Soient $a < b$ deux réels, et K une fonction continue sur le triangle défini par les inéquations $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$. Si f est continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on définit Kf sur $[a, b]$ par $Kf(t) = \int_a^t K(s,t)f(s)\mathrm{d}s$.

Établir que Kf est continue sur $[a, b]$ et majorer $\| K^n f \|_\infty$ pour $n \geqslant 1$. Que dire de la série de fonctions $(K^n f)$?

Montrer que $u = \sum_{n=0}^{+\infty} K^n f$ est la seule solution de l'équation fonctionnelle $v - Kv = f$ d'inconnue v.

II) Montrer que, si n divise $a^n - b^n$, il divise $\dfrac{a^n - b^n}{a-b}\cdot$

Planche 15 Ulm-Lyon-Cachan

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; on dira que $A\mathcal{R}B$ si et seulement si $tA + (1-t)B$ est inversible pour tout complexe t.
Montrer que $A\mathcal{R}B \Longrightarrow \det A = \det B$.
Donner une CNS sur A pour que $A\mathcal{R}\,\mathrm{Id}$.
Si $\det A = \det B$, tous deux non nuls, construire une suite finie $A_0 = A, \ldots, A_p = B$ telle que $A_k\mathcal{R}A_{k+1}$ pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$ (on pourra commencer par $n = 2$).

Planche 16 Cachan

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$, bornée et à dérivée bornée, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, ainsi qu'un réel x_0. On considère, pour $a \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle $E_a : x' = f \circ x + a, \quad x(0) = x_0$.
Montrer que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}_+$ entier.

Si g est une application continue positive définie sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $\forall t \geqslant 0,\ g(t) \leqslant A + L\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$, établir que $\forall t \geqslant 0,\ g(t) \leqslant A\mathrm{e}^{Lt}$.
On munit $\mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R})$ de la norme uniforme. Établir que h, qui à $a \in \mathbb{R}$, associe la solution maximale φ_a de E_a sur $[0, T]$, est continue en 0. Étudier le cas où $T = +\infty$.

Planche 17 Ulm-Lyon-Cachan

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que :
$\|\exp(A) - \exp(B)\| \leqslant \|A - B\| \exp(\max\{\|A\|, \|B\|\})$, où la norme «triple» découle de la norme euclidienne classique.

Planche 18 Ulm-Lyon-Cachan

I) On munit $\mathbb{R}^d$ du produit scalaire usuel ; montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ vérifie $f^* \circ f \circ f^*$ si et seulement si c'est une isométrie partielle (i.e. une isométrie sur $\mathrm{Ker}\, f^\perp$).
II) Soit f de $\mathbb{R}^d$ dans lui même, g de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant :
$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \| x - f(x) \| \leqslant g(x) - g\big(f(x)\big)$; montrer que f admet un point fixe.

Planche 19 Ulm-Lyon-Cachan, info, incomplet

On dit qu'un langage L est clos par concaténation si :
$\forall (u, v) \in L^2$, $uv \in L$ et $\epsilon \in L$.
On dit alors que $x \in L$ est un générateur si :
$x \neq \epsilon$ et $(\exists (u, v) \in L^2,\ uv = x) \Rightarrow (u = \epsilon \text{ ou } v = \epsilon)$, et on note $G(L)$ l'ensemble des générateurs.
Montrer que si L est un langage clos par concaténation, $L = G(L)^*$.
Donner un exemple de langage L rationnel et clos par concaténation tel que $G(L)$ soit infini.
Un langage L est libre s'il existe un alphabet Σ', non nécessairement fini, tel qu'il existe un isomorphisme pour la concaténation ϕ de Σ'^* sur L.
Montrer que L est libre si et seulement si
$\forall (u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m)$ générateurs de L,
$(u_1 \ldots u_n = v_1 \ldots v_m) \Rightarrow (n = m \text{ et } \forall i \in [1, m],\ u_i = v_i)$.
Montrer que L est libre si et seulement si :
$\forall w \in \Sigma'^*,\ \exists (u, v) \in L^2,\ uw, wv \in L \Rightarrow w \in L$.

