

Exercice 1 [00318] [\[correction\]](#)

Pour $n \geq 2$, on considère le polynôme

$$P_n = X^n - nX + 1$$

- a) Montrer que P_n admet exactement une racine réelle entre 0 et 1, notée x_n .
- b) Déterminer la limite de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- c) Donner un équivalent de (x_n) puis le deuxième terme du développement asymptotique x_n .

Exercice 2 [02942] [\[correction\]](#)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, concave et vérifiant $f(0) = 1$. Etablir

$$\int_0^1 x f(x) dx \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

Exercice 3 [02977] [\[correction\]](#)

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite

$$\left(\frac{\int_0^1 t^n f(t) dt}{\int_0^1 t^n dt} \right)_{n \geq 0}$$

Exercice 4 [02981] [\[correction\]](#)

Déterminer un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$ de

$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^2} \right)^n dt$$

Exercice 5 [03165] [\[correction\]](#)

Soient (a_n) une suite réelle positive, bornée et (u_n) la suite récurrente définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{u_n + a_n + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, la suite (a_n) converge.

Exercice 6 [01333] [\[correction\]](#)

Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4+x^8}$$

Exercice 7 [01334] [\[correction\]](#)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant une limite finie ℓ en $-\infty$ et telle que $\int_0^{+\infty} f$ existe.

Justifier l'existence, puis calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x)) dx$$

Exercice 8 [02965] [\[correction\]](#)

Calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ et } \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$$

Exercice 9 [02968] [\[correction\]](#)

Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, où Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $\deg P \leq \deg Q - 2$.

Exprimer $\int_{\mathbb{R}} P/Q$ à l'aide des coefficients intervenant dans la décomposition en éléments simple de P/Q .

Exercice 10 [02978] [\[correction\]](#)

Soit $f : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable. On pose

$$g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto f(x - 1/x)$$

Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$\int_{-\infty}^0 g(x) dx + \int_0^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

Exercice 11 [03053] [\[correction\]](#)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et f'' sont de carrés intégrables.

a) Montrer que f' est de carré intégrable.

b) Montrer :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2 \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} f''^2 \right)$$

Exercice 12 [01335] [\[correction\]](#)

Etudier la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$$

Exercice 13 [01337] [\[correction\]](#)

Quelle est la nature de la série de terme général

$$\frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}?$$

Exercice 14 [01338] [\[correction\]](#)

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$$

Exercice 15 [02949] [\[correction\]](#)

Etudier la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Exercice 16 [02950] [\[correction\]](#)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$.

On pose

$$v_n = \frac{1}{nu_n} \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) \text{ et } w_n = \frac{1}{n^2 u_n} \left(\sum_{k=1}^n k u_k \right)$$

On suppose que (v_n) tend vers $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

Etudier la convergence de (w_n) .

Exercice 17 [02951] [\[correction\]](#)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

a) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

b) Même question lorsque u_n est définie par la récurrence $u_{n+1} = u_n - u_n^{1+\alpha}$ (avec $\alpha > 0$).

Exercice 18 [02956] [\[correction\]](#)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = u_n / S_n \text{ où } S_n = u_1 + \dots + u_n$$

Déterminer la nature de $\sum v_n$.

Exercice 19 [02957] [\[correction\]](#)

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive, décroissante, de limite nulle.

On suppose que la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^n u_k - nu_n$$

est bornée.

Montrer que la série de terme général u_n converge.

Exercice 20 [02958] [\[correction\]](#)

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que la série de terme général u_n converge.

On note le reste d'ordre n : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Etudier la nature des séries de termes généraux u_n/R_n et u_n/R_{n-1} .

Exercice 21 [02959] [\[correction\]](#)

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive et strictement croissante.

Nature de la série de terme général

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$$

Exercice 22 [02960] [\[correction\]](#)

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in]0, 1]$ et que, pour un certain $\beta > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1}^\beta = \sin u_n^\beta$$

Etudier la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 23 [02961] [correction]

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 > 0$ et pour tout $n > 0$,

$$u_n = \ln(1 + u_{n-1})$$

Etudier la suite (u_n) puis la série de terme général u_n .

Exercice 24 [02962] [correction]

Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

Exercice 25 [02964] [correction]

Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right)$$

Exercice 26 [03045] [correction]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n : x \in]n, +\infty[\rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-k}$$

Soit $a > 0$. Montrer qu'il existe un unique réel, noté x_n tel que $f_n(x_n) = a$.
Déterminer un équivalent de x_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 27 [03047] [correction]

Soit (u_n) une suite complexe telle que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_{pn} - u_n \rightarrow 0$. Peut-on affirmer que la suite (u_n) converge ?

Exercice 28 [03057] [correction]

On note $(z_n)_{n \geq 1}$ la suite de terme général

$$z_n = 2n \exp \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)$$

Etudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{2n-1}{z_n-1} \frac{2n-2}{z_n-2} \cdots \frac{2n-n}{z_n-n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \prod_{k=1}^n \frac{2n-k}{z_n-k} \right|$$

Exercice 29 [03086] [correction]

Etudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} e^{\frac{n}{k}} \right)$$

Exercice 30 [03097] [correction]

On dit que la série de terme général u_n enveloppe le réel A si, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \neq 0 \text{ et } |A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)| \leq |u_{n+1}|$$

On dit qu'elle enveloppe strictement le réel A s'il existe une suite $(\theta_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $]0, 1[$ telle que pour tout entier naturel n :

$$A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = \theta_{n+1} u_{n+1}$$

a) Donner un exemple de série divergente qui enveloppe $A > 0$.

Donner un exemple de série convergente qui enveloppe un réel.

Donner un exemple de série convergente qui n'enveloppe aucun réel.

b) Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe strictement A , alors elle est alternée.

Démontrer que A est alors compris entre deux sommes partielles consécutives.

c) Démontrer que, si la série de terme général u_n est alternée et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$ est du signe de u_{n+1} , alors, elle enveloppe strictement A .

d) Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe A et si la suite de terme général $|u_n|$ est strictement décroissante, alors, la série est alternée et encadre strictement A .

Exercice 31 [03207] [correction]

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$ telles que

$$u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n$$

a) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2.

b) Soient a et b deux éléments de E déterminés par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases}$$

Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) divergent vers $+\infty$.

c) Calculer

$$w_n = a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}$$

d) On pose $c_n = a_n/b_n$ lorsque l'entier n est supérieur ou égal à 1. Démontrer l'existence de

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$$

e) Démontrer l'existence d'un unique réel r tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + rb_n) = 0$$

Exercice 32 [03673] [correction]

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de réels de limite nulle.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ ont même nature et que leurs sommes sont égales en cas de convergence.

Exercice 33 [02969] [correction]

Soit I un intervalle ouvert ; soit pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que (f_n) converge simplement. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

Exercice 34 [02970] [correction]

On note E l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues.

On pose

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)} dt$$

pour toute $f \in E$.

On pose $f_0 = 1$ puis $f_{n+1} = \Phi(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Etudier la suite (f_n) .

b) Soit $f = \lim(f_n)$.

Trouvez une équation différentielle dont f est solution.

Y a-t-il unicité de la solution nulle en 0 ?

Exercice 35 [02971] [correction]

Soit des suites réelles (a_n) et (x_n) avec $a_n > 0$ pour tout n .

On suppose que la série de terme général $a_n(1 + |x_n|)$ converge.

On pose

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n |x - x_n|$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f .

Exercice 36 [02972] [correction]

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = (1 - x/n)^n \text{ si } x \in [0, n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x > n$$

Etudier le mode de convergence de (f_n) .

Exercice 37 [02973] [correction]

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$$

Exercice 38 [02974] [correction]

a) Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x - n)^{-2}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

b) Soit un réel $c > 2$. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x réel,

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = cf(x)$$

Montrer que $f = 0$.

c) Montrer que pour tout x réel non entier,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x - n)^{-2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}$$

Exercice 39 [02982] [correction]

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2} dx$$

Exercice 40 [03159] [correction]

Soit F une application continue décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tendant vers 1 en $-\infty$ et vers 0 en $+\infty$. Soient deux réels h et δ vérifiant $0 < h < \delta$.

a) Déterminer la limite éventuelle de

$$I_n = \int_0^1 F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt$$

b) On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\sqrt{n}\left(\delta \frac{k+1}{n} - h\right)\right)$$

Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 41 [03650] [\[correction\]](#)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable ainsi que sa dérivée.

a) Déterminer pour $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} n \cos t (\sin t)^n f(xt) dt$$

b) Préciser le mode de convergence.

Exercice 42 [00490] [\[correction\]](#)

Soit f une forme linéaire non nulle et continue sur un espace vectoriel normé E .

Montrer que si $x \notin \ker f$ alors

$$d(x, \ker f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

Exercice 43 [00795] [\[correction\]](#)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \text{GL}_n(\mathbb{C}), \|A\| = \|P^{-1}AP\|$$

Exercice 44 [03475] [\[correction\]](#)

Soit (A_k) une suite de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que les A_k sont tous de rang p donné. Montrer que $\text{rg} A \leq p$.

Exercice 45 [02943] [\[correction\]](#)

Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 46 [02944] [\[correction\]](#)

Soit A une partie convexe et partout dense d'un espace euclidien E .

Montrer que $A = E$.

Exercice 47 [03017] [\[correction\]](#)

Montrer que $\{m - \ln n / (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 48 [03020] [\[correction\]](#)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^{++}$ vérifiant

$$\forall (a, b) \in A^2, \sqrt{ab} \in A$$

Montrer que $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est dense dans $]\inf A, \sup A[$.

Exercice 49 [03021] [\[correction\]](#)

Soit E un espace vectoriel normé, F un sous-espace fermé de E et G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Montrer que $F + G$ est fermé

Exercice 50 [03037] [\[correction\]](#)

Caractériser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les matrices dont la classe de similitude est fermée.

Même question avec $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$

Exercice 51 [02975] [\[correction\]](#)

Etant donné une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de carré sommable, on pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n-t}$$

où la variable t est réelle.

a) Préciser le domaine de définition de f .

b) Montrer que f est développable en série entière autour de 0.

c) Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2, 1/2]$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est identiquement nulle.

Exercice 52 [02952] [\[correction\]](#)

a) Soit $a \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re}(a) > 0$. Donner un équivalent de $u_n = a(a+1) \dots (a+n)$.

b) Montrer que la fonction Γ ne s'annule pas sur $\{z \in \mathbb{C}, \text{Re} z > 0\}$.

Exercice 53 [00418] [correction]

α désigne un réel de l'intervalle $]0, \pi[$ et f la fonction 2π périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Etudier la série de Fourier de f ainsi que sa convergence.
- Que vaut la somme de cette série pour $x = 0$, pour $x = \alpha$?
- Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}$$

- Justifier et calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$$

Exercice 54 [03042] [correction]

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(U) \subset U$ où $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

Exercice 55 [03439] [correction]

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodique donnée par

$$f(x) = \frac{ix}{e^{ix} - 1} \text{ sur }]-\pi, 0[\cup]0, \pi[, f(0) = 1 \text{ et } f(\pi) = 0$$

Développer f en série de Fourier.

Exercice 56 [02979] [correction]

On considère l'équation

$$y' = x + y^2$$

Soit y une solution maximale définie sur un intervalle I .

- Montrer que I est majoré. On pose $b = \sup I$.
- Montrer que y est croissante au voisinage de b . Quelle est la limite de y en b ?
- Trouver un équivalent de y au voisinage de b .

Exercice 57 [03069] [correction]

Résoudre l'équation différentielle

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$$

Exercice 58 [03085] [correction]

Résoudre, pour $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} y' & y'' & y \\ y'' & y & y' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 59 [01323] [correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dont la matrice jacobienne est, en tout point, antisymétrique. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = Ax + b$$

Exercice 60 [02908] [correction]

Soit $k \in]0, 1[$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq k$$

On définit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x, y) = (y + f(x), x + f(y))$$

Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Exercice 61 [02976] [correction]

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$.

On suppose que $df(x)$ est orthogonale pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que f est orthogonale.

Exercice 62 [03050] [correction]

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $d\varphi(0)$ soit inversible.

Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 tel que la restriction de φ à V soit injective.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

a) P_n réalise une bijection strictement décroissante de $[0, 1]$ vers $[-n, 1]$.

b) $P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 \leq P_n(x_n) = 0$ donc $x_{n+1} \leq x_n$. La suite (x_n) est décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel $\ell \in [0, 1]$. Si $\ell > 0$ alors $0 = P_n(x_n) \rightarrow -\infty$, c'est absurde. On conclut $\ell = 0$.

c) $\frac{x_n}{nx_n} = \frac{1}{n}x_n^{n-1} \rightarrow 0$ donc $x_n^n = o(nx_n)$ puis sachant $x_n^n - nx_n + 1 = 0$, on obtient $x_n \sim 1/n$.

d) Ecrivons $x_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Puisque $x_n^n = nx_n - 1$, on a $\frac{(1+\varepsilon_n)^n}{n^n} = \varepsilon_n$.

$(1 + \varepsilon_n)^n = \exp(n \ln(1 + \varepsilon_n)) = \exp(n\varepsilon_n + o(n\varepsilon_n))$.

Or $n\varepsilon_n = n \frac{(1+\varepsilon_n)^n}{n^n}$.

Puisque $\varepsilon_n \rightarrow 0$, pour n assez grand, $|1 + \varepsilon_n| \leq 2$ et la relation précédente donne $|n\varepsilon_n| \leq \frac{2^n}{n^{n-1}} \rightarrow 0$.

On en déduit $n\varepsilon_n \rightarrow 0$ puis $(1 + \varepsilon_n)^n \rightarrow 1$ et enfin $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^n}$.

Finalement

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)$$

Exercice 2 : [énoncé]

Par un argument géométrique (trapèze sous la courbe) la concavité donne

$$x \frac{f(0) + f(x)}{2} \leq \int_0^x f(t) dt$$

On en déduit $xf(x) \leq 2 \int_0^x f(t) dt - x$ donc

$$\int_0^1 xf(x) dx \leq 2 \int_{x=0}^1 \left(\int_{t=0}^x f(t) dt \right) dx - \frac{1}{2} \quad (1)$$

Or

$$\int_{x=0}^1 \int_{t=0}^x f(t) dt dx = \int_{t=0}^1 \int_{x=t}^1 f(t) dx dt = \int_{t=0}^1 (1-t)f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 tf(t) dt$$

La relation (1) donne alors

$$3 \int_0^1 xf(x) dx \leq 2 \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2} \quad (2)$$

Enfin

$$2 \left(\int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0$$

donne

$$2 \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 \geq 2 \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2} \quad (3)$$

Les relations (2) et (3) permettent alors de conclure.

Exercice 3 : [énoncé]

On peut écrire

$$\frac{\int_0^1 t^n f(t) dt}{\int_0^1 t^n dt} = \int_0^1 (n+1)t^n f(t) dt$$

Par le changement de variable $u = t^{n+1}$

$$\frac{\int_0^1 t^n f(t) dt}{\int_0^1 t^n dt} = \int_0^1 f(u^{1/(n+1)}) du$$

Par convergence dominée par $\|f\|_\infty$, on obtient

$$\frac{\int_0^1 t^n f(t) dt}{\int_0^1 t^n dt} \rightarrow f(1)$$

Exercice 4 : [énoncé]

On a

$$2^n I_n = \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt$$

où l'on remarque que la fonction $t \mapsto 2t/(1+t^2)$ croît de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.

Introduisons

$$J_n = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2} \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt \underset{t=\tan x/2}{=} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$$

On sait

$$J_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

(via $nJ_n J_{n+1} = \pi/2$ et $J_n \sim J_{n+1}$, cf. intégrales de Wallis)

Montrons $2^n I_n \sim J_n$ en étudiant la différence

$$J_n - 2^n I_n = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2} \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt$$

On a

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2} \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt \leq \int_0^1 \frac{2}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2} \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt$$

et le changement de variable $t = \tan x/2$ donne

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2} \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt \leq \int_0^{\pi/2} \cos x (\sin x)^n dx = \frac{1}{n+1}$$

On peut alors affirmer

$$2^n I_n - J_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

puis

$$2^n I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

et finalement

$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^n \sqrt{2n}}$$

Exercice 5 : [énoncé](#)

Posons

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

On vérifie aisément que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \geq 2$

$$\frac{1}{M+2} \leq u_n \leq 1$$

Supposons la convergence de la suite (u_n) . Sa limite est strictement positive. En résolvant l'équation définissant u_{n+1} en fonction de u_n , on obtient

$$a_n = \frac{1}{u_{n+1}} - u_n - 1$$

On en déduit que la suite (a_n) converge.

Inversement, supposons que la suite (a_n) converge vers une limite ℓ , $\ell \geq 0$.

Considérons la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 1 \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{v_n + \ell + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On vérifie que la suite (v_n) est bien définie et à termes strictement positifs.

L'équation

$$x = \frac{1}{x + \ell + 1}$$

possède une racine $L > 0$ et on a

$$|v_{n+1} - L| \leq \frac{|v_n - L|}{1 + L}$$

ce qui permet d'établir que la suite (v_n) converge vers L . Considérons ensuite la suite (α_n) définie par

$$\alpha_n = u_n - v_n$$

On a

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + (\ell - a_n)}{(u_n + a_n + 1)(v_n + \ell + 1)}$$

et donc

$$|\alpha_{n+1}| \leq k (|\alpha_n| + |a_n - \ell|)$$

avec

$$k = \frac{1}{m+1} \in [0, 1[$$

où $m > 0$ est un minorant de la suite convergente (v_n) .

Par récurrence, on obtient

$$|\alpha_n| \leq k^n |\alpha_0| + \sum_{p=0}^{n-1} k^{n-p} |a_p - \ell|$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque la suite (a_n) converge vers ℓ , il existe p_0 tel que

$$\forall p \geq p_0, |a_p - \ell| \leq \varepsilon$$

et alors

$$\sum_{p=p_0}^{n-1} k^{n-p} |a_p - \ell| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} k^p = \frac{k\varepsilon}{1-k}$$

Pour n assez grand

$$\sum_{p=0}^{p_0-1} k^{n-p} |a_p - \ell| = C^{te} k^n \leq \varepsilon \text{ et } k^n |\alpha_0| \leq \varepsilon$$

et on en déduit

$$|\alpha_n| \leq 2\varepsilon + \frac{k\varepsilon}{1-k}$$

Ainsi $\alpha_n \rightarrow 0$ et par conséquent

$$u_n \rightarrow L$$

Exercice 6 : [énoncé]

A défaut d'une démarche plus simple, voici celle que je propose celle-ci...

On a

$$\frac{1}{1+X^4+X^8} = \frac{1-X^4}{1-X^{12}}$$

Les pôles de cette fraction rationnelle sont les éléments de $U_{12} \setminus U_4$ et ils sont simples.

On peut donc écrire en combinant les parties polaires conjuguées

$$\frac{1}{1+X^4+X^8} = 2\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_1}{X-\omega_1}\right) + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_2}{X-\omega_2}\right) + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_4}{X-\omega_4}\right) + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_5}{X-\omega_5}\right)$$

avec $\omega_k = \exp(2ik\pi/12)$, les $\omega_1, \omega_2, \omega_4$ et ω_5 de parties imaginaires strictement positives.

$$\alpha_k = \frac{1-X^4}{(1-X^{12})'} \Big|_{X=\omega_k} = \frac{1}{12} (\omega_k^5 - \omega_k)$$

Soit $\omega = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. On a

$$\int_{-A}^A \frac{dt}{t-\omega} = \int_{-A}^A \frac{(t-a)+ib}{(t-a)^2+b^2} dt = \left[\frac{1}{2} \ln((t-a)^2+b^2) + i \arctan \frac{t-a}{b} \right]_{-A}^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} i\pi$$

la limite de l'arc tangente étant obtenue sachant $b > 0$.

Soit de plus $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_{-A}^A 2\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha}{t-\omega}\right) dt \right) = 2\operatorname{Re}\left(\lim_{A \rightarrow +\infty} \alpha \int_{-A}^A \frac{dt}{t-\omega} \right) = -2\pi \operatorname{Im} \alpha$$

Puisque la convergence de l'intégrale que nous étudions est assurée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4+x^8} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{dx}{1+x^4+x^8}$$

et on en déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4+x^8} = -2\pi \operatorname{Im}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)$$

ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4+x^8} = \frac{\pi}{6} \operatorname{Im}(\omega^2 - \omega^{10} + \omega^4 - \omega^8)$$

Or

$$\omega^2 - \omega^{10} = 2i \sin \frac{\pi}{3} = i\sqrt{3} \text{ et } \omega^4 - \omega^8 = 2i \sin \frac{2\pi}{3} = i\sqrt{3}$$

et finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4+x^8} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Exercice 7 : [énoncé]

Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge, il en est de même de

$$\int_0^{+\infty} f(a+x) dx \text{ et } \int_0^{+\infty} f(b+x) dx$$

avec

$$\int_0^{+\infty} f(a+x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ et } \int_0^{+\infty} f(b+x) dx = \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

On en déduit la convergence de l'intégrale suivante et sa valeur

$$\int_0^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x)) dx = \int_a^b f(x) dx$$

D'autre part, on a par découpage et pour tout $A \geq 0$

$$\int_{-A}^0 (f(a+x) - f(b+x)) dx = \int_{-A+a}^{-A+b} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

Or

$$(b-a) \min_{[-A+a, -A+b]} f \leq \int_{-A+a}^{-A+b} f(x) dx \leq (b-a) \max_{[-A+a, -A+b]} f$$

avec

$$\min_{[-A+a, -A+b]} f \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \ell \text{ et } \max_{[-A+a, -A+b]} f \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \ell$$

car f converge vers ℓ en $-\infty$.

On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^0 (f(a+x) - f(b+x)) dx = (b-a)\ell - \int_a^b f(x) dx$$

et finalement on obtient la convergence et la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x)) \, dx = (b-a)\ell$$

Exercice 8 : [énoncé]

On procède au changement de variable

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t$$

avec $t \in [0, \pi/2]$.

On obtient

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$$

(avec convergence de l'intégrale) et

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} \, dx = \frac{\pi}{8}$$

Exercice 9 : [énoncé]

La fonction $t \mapsto P(t)/Q(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $|t| \rightarrow +\infty$, $P(t)/Q(t) = O(1/t^2)$ car $\deg(P/Q) \leq -2$.

Par suite l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q}$ converge.

Les pôles de la fraction P/Q sont complexes conjugués non réels et les parties polaires correspondantes sont deux à deux conjuguées. On en déduit que $P/Q = 2\operatorname{Re}(F)$ où F est la fraction rationnelle obtenue en sommant les parties polaires relatives aux pôles de partie imaginaire strictement positive.

Considérons un pôle $a = \alpha + i\beta$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$.

Pour les éléments simples de la forme $\frac{1}{(X-a)^m}$ avec $m > 1$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t-a)^m} = \left[-\frac{1}{m-1} \frac{1}{(t-a)^{m-1}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Pour les éléments simples de la forme $\frac{1}{X-a}$ on a

$$\int_{-A}^A \frac{dt}{t-a} = \int_{-A}^A \frac{t-\alpha+i\beta}{(t-\alpha)^2+\beta^2} = \left[\ln|t-\alpha| + i \arctan\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right) \right]_{-A}^A.$$

Quand $A \rightarrow +\infty$, on obtient $\int_{-A}^A \frac{dt}{t-a} \rightarrow i\pi$.

Puisque $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{P(t)}{Q(t)} \, dt$, on obtient $\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{Q} = 2\operatorname{Re}(\sigma)\pi$ avec σ la somme des coefficients facteurs des éléments simples $\frac{1}{X-a}$ avec a de parties imaginaires strictement positive.

Exercice 10 : [énoncé]

Considérons l'application continue $\varphi : x \mapsto x - 1/x$. Par étude des variations de φ , on peut affirmer que φ réalise une bijection φ_+ de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et une bijection φ_- de $]-\infty, 0[$ vers $\mathbb{R}$.

Après résolution de l'équation $\varphi(x) = y$ d'inconnue x , on obtient

$$\varphi_+^{-1}(y) = \frac{1}{2} \left(y + \sqrt{y^2 + 4} \right) \text{ et } \varphi_-^{-1}(y) = \frac{1}{2} \left(y - \sqrt{y^2 + 4} \right).$$

Formellement, par le changement de variable $y = \varphi_+(x)$ avec φ_+

$$\mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme : } \int_0^{+\infty} g(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+4}} \right) dy.$$

Puisque f est intégrable et que $\left| \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+4}} \right) \right| \leq 1$, la fonction

$$y \mapsto f(y) \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+4}} \right) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$$

Par le changement de variable précédent, on peut alors affirmer que g est intégrable sur $]0, +\infty[$.

L'étude sur $]-\infty, 0[$ est semblable.

Au final, on obtient

$$\int_{-\infty}^0 g(x) \, dx + \int_0^{+\infty} g(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2+4}} \right) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+4}} \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \, dy.$$

Exercice 11 : [énoncé]

a) Par intégration par parties

$$\int_0^x f'(t)^2 \, dt = f'(x)f(x) - f'(0)f(0) - \int_0^x f(t)f''(t) \, dt$$

Puisque f et f'' sont de carrés intégrables, la fonction $f f''$ est intégrable.

Puisque f'^2 est positive, l'intégrale partielle

$$\int_0^x f'(t)^2 \, dt$$

converge ou tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Dans les deux cas

$$f'(x)f(x) = f'(0)f(0) + \int_0^x f'(t)^2 \, dt + \int_0^x f(t)f''(t) \, dt$$

admet une limite quand $x \rightarrow +\infty$.

Or

$$\int_0^x f'(t)f(t) \, dt = \frac{1}{2} (f(x)^2 - f(0)^2)$$

donc si $f'(x)f(x)$ ne tend pas vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$, l'intégrale précédente diverge et donc

$$\frac{1}{2}f(x)^2 \rightarrow +\infty$$

ce qui est incompatible avec l'intégrabilité de f^2 sur $\mathbb{R}$.

Ainsi

$$f'(x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et on en déduit que f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt = f'(0)f(0) - \int_0^{+\infty} f(t)f''(t) dt$$

L'étude sur $\mathbb{R}^-$ est identique avec

$$\int_{-\infty}^0 f'(t)^2 dt = -f'(0)f(0) + \int_{-\infty}^0 f(t)f''(t) dt$$

b) Par ce qui précède

$$\int_{\mathbb{R}} f'^2 = - \int_{\mathbb{R}} f f''$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2 \right) \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} f''^2 \right)$$

Exercice 12 : [énoncé]

Puisque $u_n \rightarrow 0$, il revient au même d'étudier la nature de la série de terme général

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$$

Or

$$v_n = \frac{\sin(\ln 2n)}{2n(2n+1)} + \frac{\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln 2n)}{2n+1}$$

D'une part

$$\frac{\sin(\ln 2n)}{2n(2n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et d'autre part en vertu du théorème des accroissements finis, il existe c compris entre $\ln 2n$ et $\ln(2n+1)$ tel que

$$\frac{\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln 2n)}{2n+1} = \frac{\cos(c)(\ln(2n+1) - \ln 2n)}{2n+1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que $v_n = O(1/n^2)$ et donc la série de terme général v_n est absolument convergente donc convergente.

Exercice 13 : [énoncé]

Montrons que la série étudiée est divergente. Notons S_n la somme partielle de rang n de cette série. Nous allons construire deux suites (a_n) et (b_n) de limite $+\infty$ telles que $S_{b_n} - S_{a_n}$ ne tend pas vers zéro ce qui assure la divergence de la série étudiée.

Soit $n \geq 1$ fixé. Les indices k vérifiant

$$2n\pi - \frac{\pi}{4} \leq \sqrt{k} \leq 2n\pi + \frac{\pi}{4}$$

sont tels que

$$\operatorname{Re}(e^{i\sqrt{k}}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Posons alors

$$a_n = E((2n\pi - \pi/4)^2) \text{ et } b_n = E((2n\pi + \pi/4)^2)$$

On a

$$S_{b_n} - S_{a_n} = \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \frac{e^{i\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$$

et donc par construction

$$\operatorname{Re}(S_{b_n} - S_{a_n}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Puisque la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est décroissante, on a la comparaison intégrale

$$\operatorname{Re}(S_{b_n} - S_{a_n}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{2} (\sqrt{b_n+1} - \sqrt{a_n+1})$$

Or

$$\sqrt{b_n+1} - \sqrt{a_n+1} = \frac{b_n - a_n}{\sqrt{b_n+1} + \sqrt{a_n+1}} \sim \frac{2n\pi^2}{4n\pi} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

donc $S_{b_n} - S_{a_n}$ ne tend pas vers 0 et l'on peut conclure que la série étudiée diverge.

Exercice 14 : [énoncé]

Introduisons la série entière de somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+1)(4n+3)}$$

On vérifie aisément que son rayon de convergence est égale à 1 et que sa somme est définie et continue sur $[-1, 1]$ par convergence normale.

Sur $] -1, 1[$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+2}}{4n+1}$$

Pour $x \neq 0$

$$\left[\frac{1}{x} S'(x) \right]' = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}$$

On en déduit que sur $] -1, 1[$

$$S'(x) = x \int_0^x \frac{dt}{1-t^4}$$

puis

$$S(x) = \int_0^x t \int_0^t \frac{du}{1-u^4}$$

Par intégration par parties

$$S(x) = \left[\frac{1}{2}(t^2-1) \int_0^t \frac{du}{1-u^4} \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{1-t^4} dt$$

et ainsi

$$S(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) \int_0^x \frac{dt}{1-t^4} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

Quand $x \rightarrow 1^-$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^4} = O(\ln(1-x)) = o(x-1)$$

donc

$$S(x) \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{8}$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = S(1) = \frac{\pi}{8}$$

Exercice 15 : [énoncé](#)

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^n u_k(n)$$

avec $u_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-k}$.

On peut alors présumer

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \frac{1}{1-1/e} = \frac{e}{e-1}$$

Il ne reste plus qu'à l'établir...

Puisque $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$, on a

$$\left(1 - \frac{k}{n} \right)^n = \exp(n \ln(1 - k/n)) \leq e^{-k}$$

et donc on a déjà

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^n \leq \frac{1}{1-1/e}$$

De plus, pour $N \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \geq N$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^n \geq \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-k}$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-k} \geq \frac{e}{e-1} - \varepsilon$$

et pour ce N fixé, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N'$,

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^n \geq \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{n} \right)^n \geq \sum_{k=0}^{N-1} e^{-k} - \varepsilon$$

On a alors pour tout $n \geq N'$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^n \geq \frac{e}{e-1} - 2\varepsilon$$

On peut donc conclure

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^n \rightarrow \frac{e}{e-1}$$

Exercice 16 : [énoncé]

Posons $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. On observe que

$$\sum_{k=1}^n k u_n = (n+1)S_n - \sum_{k=1}^n S_k$$

Par suite

$$w_n = \frac{n+1}{n} v_n - \frac{1}{n^2 u_n} \sum_{k=1}^n S_k \quad (*)$$

Puisque $\frac{S_n}{n u_n} \rightarrow a$, on a $S_n \sim a n u_n$.

La série de terme général S_n est une série à termes positifs divergente donc

$$\sum_{k=1}^n S_k \sim a \sum_{k=1}^n k u_k$$

Par suite

$$\frac{1}{n^2 u_n} \sum_{k=1}^n S_k \sim a w_n$$

La relation (*) dévient alors

$$w_n = \frac{n+1}{n} v_n - a w_n + o(w_n)$$

et en on en déduit que

$$w_n \sim \frac{1}{a+1} v_n \rightarrow \frac{a}{a+1}$$

Exercice 17 : [énoncé]

Dans le cas où $u_0 = 0$, la suite est nulle. On suppose désormais ce cas exclu.

a) La suite (u_n) est à termes dans $]0, 1]$ car l'application $x \mapsto x - x^2$ laisse stable cet intervalle.

La suite (u_n) est décroissante et minorée donc convergente. Sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell - \ell^2$ et donc $\ell = 0$.

Finalement (u_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_n^2 - u_n^3} \rightarrow 1$$

Par le théorème de Cesaro,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \rightarrow 1$$

et donc $\frac{1}{n u_n} \rightarrow 1$.

On en déduit que $u_n \sim \frac{1}{n}$ et donc $\sum u_n$ diverge.

b) Comme ci-dessus, on obtient que (u_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.

$$\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} = \frac{u_n^\alpha - u_{n+1}^\alpha}{(u_n u_{n+1})^\alpha} \sim \frac{\alpha u_n^\alpha}{u_{n+1}^\alpha} \rightarrow \alpha$$

Par le théorème de Cesaro, $\frac{1}{n u_n^\alpha} \rightarrow \alpha$ et donc

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}$$

avec $\lambda > 0$.

Si $\alpha \in]0, 1[$, $\sum u_n$ converge et si $\alpha \geq 1$, $\sum u_n$ diverge.

Exercice 18 : [énoncé]

Si $\sum u_n$ converge alors en notant S sa somme (strictement positive), $v_n \sim u_n/S$ et donc $\sum v_n$ converge.

Supposons désormais que $\sum u_n$ diverge et montrons qu'il en est de même de $\sum v_n$.

Par la décroissante de $t \mapsto 1/t$, on a

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t} \leq \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} \leq \frac{u_n}{S_{n-1}}$$

En sommant ces inégalités

$$\int_{S_1}^{S_n} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^n \frac{u_k}{S_{k-1}}$$

Or

$$\int_{S_1}^{S_n} \frac{dt}{t} = \ln S_n - \ln S_1 \rightarrow +\infty$$

car $S_n \rightarrow +\infty$ donc par comparaison $\sum \frac{u_n}{S_{n-1}}$ diverge.

Puisque

$$\frac{u_n}{S_{n-1}} = \frac{u_n}{S_n - u_n} = v_n \frac{1}{1 - v_n}$$

Si $v_n \not\rightarrow 0$ alors $\sum v_n$ diverge.

Si $v_n \rightarrow 0$ alors $v_n \sim \frac{u_n}{S_{n-1}}$ et à nouveau $\sum v_n$ diverge.

Finalement $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Exercice 19 : [énoncé]

Posons $v_n = \sum_{k=1}^n u_k - nu_n$. On a

$$v_{n+1} - v_n = n(u_n - u_{n+1}) \geq 0$$

La suite (v_n) est croissante et majorée donc convergente. Posons ℓ sa limite.
On a

$$u_n - u_{n+1} = \frac{1}{n}(v_{n+1} - v_n)$$

donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k} (v_{k+1} - v_k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k)$$

ce qui donne

$$u_n \leq \frac{1}{n}(\ell - v_n)$$

On en déduit $0 \leq nu_n \leq \ell - v_n$ et donc $nu_n \rightarrow 0$ puis $\sum_{k=1}^n u_k \rightarrow \ell$.

Finalement $\sum u_n$ converge.

Exercice 20 : [énoncé]

$u_n = R_{n-1} - R_n$ et la décroissance de $t \rightarrow 1/t$, $\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t} \leq \frac{R_{n-1} - R_n}{R_n} = \frac{u_n}{R_n}$.
 $\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t} = \ln R_{n-1} - \ln R_n$ donc la série à termes positifs $\sum \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t}$ diverge car $\ln R_n \rightarrow -\infty$ puisque $R_n \rightarrow 0$.

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n/R_n$ diverge.

$$\frac{u_n}{R_n} = \frac{u_n}{R_{n-1} - u_n} = \frac{u_n}{R_{n-1}} \frac{1}{1 - u_n/R_{n-1}}.$$

Si $u_n/R_{n-1} \not\rightarrow 0$ alors $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge.

Si $u_n/R_{n-1} \rightarrow 0$ alors $\frac{u_n}{R_{n-1}} \sim \frac{u_n}{R_n}$ et donc $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge encore.

Dans tous les cas, $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge.

Exercice 21 : [énoncé]

Posons

$$v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$$

Si (u_n) converge alors, en posant ℓ sa limite,

$$v_n \sim \frac{1}{\ell}(u_{n+1} - u_n)$$

et puisque la série à termes positifs $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge, il en est de même de $\sum v_n$.

Si (u_n) diverge alors $u_n \rightarrow +\infty$.

Par la décroissance de $t \rightarrow 1/t$,

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} \geq \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{dt}{t} = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$$

Puisque $\ln(u_n) \rightarrow +\infty$, la série à terme positif $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ diverge et donc $\sum v_n$ aussi.

Finalement, la nature de la série $\sum v_n$ est celle de la suite (u_n) .

Exercice 22 : [énoncé]

Posons $v_n = u_n^\beta$. La suite (v_n) vérifie $v_n \in]0, 1]$ et $v_{n+1} = \sin(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Puisque la fonction sinus laisse stable l'intervalle $]0, 1]$, on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in]0, 1]$.

De plus, pour $x \geq 0$, $\sin x \leq x$ donc la suite (v_n) est décroissante.

Puisque décroissante et minorée, (v_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\sin \ell = \ell$ ce qui donne $\ell = 0$.

Finalement (v_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.

On a

$$\frac{1}{v_{n+1}^2} - \frac{1}{v_n^2} = \frac{(v_n - v_{n+1})(v_{n+1} + v_n)}{v_n^2 v_{n+1}^2} \sim \frac{\frac{1}{6}v_n^3 \times 2v_n}{v_n^4} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Par le théorème de Cesaro,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{k+1}^2} - \frac{1}{v_k^2} \right) \rightarrow \frac{1}{3}$$

et donc $\frac{1}{nv_n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$. On en déduit $v_n \sim \frac{\sqrt{3}}{n^{1/2}}$ puis

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{1/2\beta}}$$

avec $\lambda > 0$.

Pour $\beta \in]0, 2[$, $\sum v_n$ converge et pour $\beta \geq 2$, $\sum v_n$ diverge.

Exercice 23 : [énoncé]

La suite (u_n) est à terme strictement positifs car $u_0 > 0$ et la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ laisse stable l'intervalle $]0, +\infty[$.

Puisque pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$, la suite (u_n) est décroissante.

Puisque décroissante et minorée, la suite (u_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\ln(1 + \ell) = \ell$ ce qui donne $\ell = 0$.

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{\frac{1}{2} u_n^2}{u_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Par le théorème de Cesaro,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{nu_n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

On en déduit $u_n \sim \frac{2}{n}$ et donc la série de terme général u_n diverge.

Exercice 24 : [énoncé]

Pour $\frac{k(k-1)}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2}$, on pose $u_n = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Ceci définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de sorte que ses premiers termes sont :

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots$$

Les termes sommés tendent vers 0 et les sommes partielles oscillent entre 0 et 1.

Exercice 25 : [énoncé]

$$\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} = \frac{1}{4n} - \frac{3}{4n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série étudiée est absolument convergente.

On a

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right) = \sum_{k=1}^{4N+4} \frac{1}{k} - 4 \sum_{n=0}^N \frac{1}{4n+2}$$

Or

$$4 \sum_{n=0}^N \frac{1}{4n+2} = 2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{2n+1} = 2 \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k}$$

Par le développement

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

on parvient à

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right) = \ln(4N+4) + \gamma - 2 \ln(2N+1) - 2\gamma + \ln N + \gamma + o(1)$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right) = 0$$

(ce qui change du $\ln 2$ traditionnel... ;-)

Exercice 26 : [énoncé]

La fonction f_n est continue, strictement décroissante et de limites $+\infty$ et 0 en n et $+\infty$. On en déduit que f_n réalise une bijection de $]n, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$. Ainsi, pour tout $a > 0$, il existe un unique $x_n > n$ vérifiant $f_n(x_n) = a$.

On a

$$f_n(n+1+y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1+y-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+y} \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t+y} = \int_0^n \frac{dt}{t+y} = \ln\left(1 + \frac{n}{y}\right)$$

Pour $y = \frac{n}{e^a - 1}$,

$$f(n+1+y) \leq \ln(1 + (e^a - 1)) = a$$

et par suite

$$x_n \leq n+1 + \frac{n}{e^a - 1}$$

Aussi

$$f(n+y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{y+k} \geq \int_0^n \frac{dt}{t+y} = \ln\left(1 + \frac{n}{y}\right)$$

Pour $y = \frac{n}{e^a - 1}$, $f(n+y) \geq a$ et par suite

$$x_n \geq n + \frac{n}{e^a - 1}$$

On en déduit

$$x_n \sim n + \frac{n}{e^a - 1} = \frac{e^a n}{e^a - 1}$$

Exercice 27 : [\[énoncé\]](#)

Non, en effet considérons

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{np} - u_n = \sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k \ln k}$

On en déduit

$$0 \leq u_{np} - u_n \leq \frac{np - (n+1) + 1}{n \ln n} = \frac{p-1}{\ln n} \rightarrow 0$$

alors que

$$u_n \geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t} = \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_2^{n+1} \rightarrow +\infty$$

Exercice 28 : [\[énoncé\]](#)

Posons

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left| \frac{2n-k}{z_n-k} \right|$$

On a

$$\ln P_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \frac{|z_n - k|^2}{|2n - k|^2}$$

Puisque

$$|z_n - k|^2 = (2n)^2 - 4nk \cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + k^2 = (2n - k)^2 + 8nk \sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)$$

on obtient

$$\ln P_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{8nk}{(2n-k)^2} \sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right) \right)$$

Sachant $\sin^2 u = u^2 + O(u^4)$, on peut écrire

$$\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right) = \frac{t^2}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi

$$\ln P_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2} O\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

Sachant $\ln(1+x) \leq x$, on a

$$-2 \ln(P_n) \leq \sum_{k=1}^n \left[\frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2} O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

Posons S_n le second membre de cette comparaison. D'une part

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{k}{(2n-k)^2} O\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2} O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$$

D'autre part

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k}{(2n-k)^2} = \sum_{\ell=n}^{2n-1} \frac{2(2n-\ell)}{\ell^2} = 4n \sum_{\ell=n}^{2n-1} \frac{1}{\ell^2} - 2 \sum_{\ell=n}^{2n-1} \frac{1}{\ell}$$

avec

$$\sum_{\ell=n}^{+\infty} \frac{1}{\ell^2} \sim \frac{1}{n} \text{ et } \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Après calculs asymptotiques, on obtient

$$S_n \rightarrow (2 - 2 \ln 2)t^2$$

Sachant $\ln(1+x) \geq x - \frac{1}{2}x^2$, on a

$$-2 \ln P_n \geq S_n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2} O\left(\frac{1}{n}\right) \right]^2$$

Puisque $0 \leq \frac{k}{(2n-k)^2} \leq \frac{1}{n}$,

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2} O\left(\frac{1}{n}\right) \right]^2 = \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$$

Finalement $-2 \ln P_n$ est encadré par deux quantités de limite $(2 - 2 \ln 2)t^2$. On en déduit

$$P_n \rightarrow \exp((\ln 2 - 1)t^2)$$

Exercice 29 : [\[énoncé\]](#)

On remarque

$$n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} e^{\frac{n}{k}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{1/x}$.

La fonction φ est décroissante en tant que produit de deux fonctions décroissantes positives. Par suite

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \varphi(t) dt \leq \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} \varphi(t) dt$$

En sommant et en exploitant l'intégrabilité de φ au voisinage de $+\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{1/t} dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(n-1)/n}^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{1/t} dt$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{1/t} dt = \left[-e^{1/t}\right]_1^{+\infty} = e - 1 \text{ et } \int_{(n-1)/n}^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{1/t} dt = \left[-e^{1/t}\right]_{(n-1)/n}^{+\infty} \rightarrow e - 1$$

Par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} e^{\frac{n}{k}}\right) = e - 1$$

Exercice 30 : [énoncé]

a) Pour $u_n = (-1)^n$, la série de terme général u_n est divergente et puisque ces sommes partielles valent 0 ou 1, elle enveloppe tout réel de l'intervalle $[0, 1]$.
 Pour $u_n = (-1)^n/(n+1)$, la série de terme général u_n satisfait le critère spécial des séries alternées et donc elle converge et la valeur absolue de son reste est inférieure à son premier terme. Cette série enveloppe donc sa somme, à savoir $\ln 2$.
 Pour $u_n = 1/2^n$, la série de terme général u_n converge. Puisque $u_n \rightarrow 0$, le seul réel qu'elle peut envelopper est sa somme, or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

n'est pas inférieur à u_{n+1} . Cette série convergente n'enveloppe aucun réel.

b) Posons pour la suite de notre étude

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

On a

$$\theta_{n+2} u_{n+2} = A - S_{n+1} = A - S_n - u_{n+1} = (\theta_{n+1} - 1) u_{n+1}$$

Puisque $\theta_{n+2} > 0$ et $\theta_{n+1} - 1 < 0$, on peut affirmer que u_{n+2} et u_{n+1} sont de signes opposés.

Puisque $A - S_n = \theta_{n+1} u_{n+1}$ est du signe de u_{n+1} , les réels $A - S_n$ et $A - S_{n+1}$ sont de signes opposés et donc A est encadré par S_n et S_{n+1} .

c) Puisque $A - S_n$ est du signe de u_{n+1} , on peut écrire $A - S_n = \theta_{n+1} u_{n+1}$ avec $\theta_{n+1} \in \mathbb{R}^+$.

Puisque $A - S_{n+1} = (\theta_{n+1} - 1) u_{n+1}$ est du signe de u_{n+2} et puisque u_{n+1} et u_{n+2} sont de signes opposés, on a $\theta_{n+1} - 1 \leq 0$ et donc $\theta_{n+1} \in [0, 1]$.

On ne peut rien dire de plus, sauf à savoir que $A - S_n$ est non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet pour $u_n = (-1)^n$ et $A = 1$, la série de terme général u_n est alternée et pour n pair : $A - S_n = 1 - 1 = 0$ est du signe de u_{n+1} .

pour n impair : $A - S_n = 1 - 0 = 1$ est du signe de u_{n+1} .

Si en revanche, on suppose $A - S_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, obtenir $\theta_{n+1} \in]0, 1[$ est désormais immédiat.

d) Par l'absurde, supposons $u_{n+1}, u_{n+2} > 0$.

On a $A - S_n \leq u_{n+1}$ donc $A - S_{n+1} \leq 0$ puis $A - S_{n+2} \leq -u_{n+2}$ et donc $|A - S_{n+2}| \geq |u_{n+2}|$. Or $|A - S_{n+2}| \leq |u_{n+3}|$ et $|u_{n+3}| < |u_{n+2}|$, c'est absurde et donc u_{n+1} et u_{n+2} ne sont pas tous deux strictement positifs. Un raisonnement symétrique établit qu'ils ne sont pas non plus tous deux strictement négatifs et donc la série de terme général u_n est alternée à partir du rang 1 (on ne peut rien affirmer pour le rang 0).

Puisque $A - S_{n+1} = A - S_n - u_{n+1}$, on a

$$-|u_{n+1}| - u_{n+1} \leq A - S_{n+1} \leq |u_{n+1}| - u_{n+1}.$$

Si $u_{n+1} > 0$ alors $A - S_{n+1} \leq 0$ et donc du signe de u_{n+2} .

Si $u_{n+1} < 0$ alors $A - S_{n+1} \geq 0$ et donc à nouveau du signe de u_{n+2} .

Enfin $A - S_{n+1}$ n'est pas nul, car sinon

$$A - S_{n+3} = A - S_{n+1} - (u_{n+2} + u_{n+3}) = -(u_{n+2} + u_{n+3}) \text{ est de signe strict opposé à } u_{n+2} \text{ et n'est donc pas du signe de } u_{n+4}.$$

On peut alors exploiter le résultat du c) et affirmer que la série de terme général u_n encadre strictement A .

Exercice 31 : [énoncé]

a) Il est immédiat de vérifier que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles. L'application

$\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1)$ étant un isomorphisme (car un élément de E est déterminé de façon unique par la donnée de ses deux premiers termes), on peut affirmer que l'espace E est de dimension 2.

b) Il est immédiat de vérifier que les suites (a_n) et (b_n) sont formés d'entiers naturels, qu'elles sont croissantes à partir du rang 1 et qu'elles sont à termes strictement positifs à partir du rang 2.

Ainsi

$$\forall n \geq 2, a_n, b_n \geq 1$$

et donc

$$a_{n+2} \geq n+1 \text{ et } b_{n+2} \geq n+1$$

Ainsi les deux suites (a_n) et (b_n) tendent vers $+\infty$ en croissant (seulement à partir du rang 1 pour la première)

c) On a

$$w_{n+1} = ((n+1)a_{n+1} + a_n)b_{n+1} - a_{n+1}((n+1)b_{n+1} + b_n)$$

Après simplification, on obtient

$$w_{n+1} = -w_n$$

et donc

$$w_n = (-1)^n w_0 = (-1)^{n+1}$$

d) On a

$$c_{n+1} - c_n = \frac{w_n}{b_n b_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{b_n b_{n+1}}$$

Puisque la suite de terme général $b_n b_{n+1}$ croît vers $+\infty$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées et affirmer que la série numérique $\sum (c_{n+1} - c_n)$ converge. Par conséquent la suite (c_n) converge.

e) On a

$$\ell - c_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (c_{k+1} - c_k)$$

Par le critère spécial des séries alternées, on peut borner ce reste par la valeur absolue de son premier terme

$$|\ell - c_n| \leq \frac{1}{b_n b_{n+1}}$$

On peut ainsi écrire

$$c_n = \ell + O\left(\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right)$$

On a alors

$$a_n + r b_n = b_n (c_n + r) = b_n (\ell + r) + O\left(\frac{1}{b_{n+1}}\right)$$

Sachant $b_n \rightarrow +\infty$, on peut affirmer

$$a_n + r b_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow r = -\ell$$

Exercice 32 : [énoncé]

Posons $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = \sum_{k=1}^n u_k - n u_{n+1}$$

Si la série $\sum u_n$ converge alors puisque

$$\sum_{k=1}^n v_k \leq \sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

la série $\sum v_n$ converge car à termes positifs et aux sommes partielles majorées. Inversement, supposons la convergence de $\sum v_n$.

Puisque la suite (u_n) est de limite nulle, on peut écrire

$$0 \leq u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{v_k}{k} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

et donc $(n+1)u_{n+1} \rightarrow 0$. La relation

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n v_k + (n+1)u_{n+1} - u_{n+1}$$

donne alors la convergence de $\sum u_n$ ainsi que l'égalité des sommes des séries.

Exercice 33 : [énoncé]

Notons f la limite simple de la suite (f_n) . Cette fonction f est évidemment convexe.

Par l'absurde, supposons la convergence non uniforme sur un segment $[a, b]$ inclus dans I .

Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une suite (x_n) d'éléments de $[a, b]$ tels que

$$|f_n(x_n) - f(x)| \geq 2\varepsilon \text{ pour tout naturel } n.$$

Par compacité, on peut extraire de (x_n) une suite convergente et, quitte à supprimer certaines des fonctions f_n , on peut supposer que (x_n) converge. Posons x_∞ sa limite.

Soit $\alpha > 0$ tel que $[a - \alpha, b + \alpha] \subset I$ (ce qui est possible car l'intervalle I est ouvert).

Pour tout fonction convexe φ , la croissance des pentes donne :

$$\forall x \neq y \in [a, b], \frac{\varphi(a) - \varphi(a - \alpha)}{\alpha} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \leq \frac{\varphi(b + \alpha) - \varphi(b)}{\alpha} \quad (\star).$$

Par convergence simple, $f_n(x_\infty) \rightarrow f(x_\infty)$.

Pour n assez grand, $|f_n(x_\infty) - f(x_\infty)| \leq \varepsilon$ donc

$$|f_n(x_n) - f_n(x_\infty) + f(x_\infty) - f(x_n)| \geq \varepsilon$$

$$\text{puis } \left| \frac{f_n(x_n) - f_n(x_\infty)}{x_n - x_\infty} + \frac{f(x_\infty) - f(x_n)}{x_\infty - x_n} \right| \geq \frac{\varepsilon}{x_\infty - x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Or la suite $\left(\frac{f(x_\infty) - f(x_n)}{x_\infty - x_n} \right)$ est bornée en vertu de $(\star)$ et la suite $\left(\frac{f_n(x_n) - f_n(x_\infty)}{x_n - x_\infty} \right)$ aussi puis $\frac{f_n(a) - f_n(a-\alpha)}{\alpha} \leq \frac{f_n(x_n) - f_n(x_\infty)}{x_n - x_\infty} \leq \frac{f_n(b+\alpha) - f_n(b)}{\alpha}$ et les termes encadrant convergent.

On obtient ainsi une absurdité.

Exercice 34 : [énoncé]

a) On vérifie sans peine que la suite (f_n) est bien définie.

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}, \dots$$

Si $f(x) = \alpha x^\beta$ alors

$$\Phi(f)(x) = \sqrt{\alpha} \int_0^x t^{\beta/2} dt = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\beta+2} x^{\beta/2+1}$$

Ainsi $f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$ avec

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{\beta_n + 2} \text{ et } \beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2} + 1$$

On a

$$\beta_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \rightarrow 2$$

et, pour $n \geq 1$,

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

On a

$$\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_{n+1}}}{4 - \frac{1}{2^n}} - \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

Or $2^n \geq 2^{n-1}$ donne

$$\frac{2}{4 - \frac{1}{2^n}} \leq \frac{2}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

donc

$$\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} \leq \frac{2}{4 - \frac{1}{2^{n-1}}} (\sqrt{\alpha_{n+1}} - \sqrt{\alpha_n})$$

Puisque $\alpha_1 = \alpha_0$, on obtient alors par récurrence que la suite (α_n) est décroissante.

Etant aussi minorée par 0, elle converge et en passant la relation de récurrence à la limite, on obtient

$$\alpha_n \rightarrow 1/4$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f : x \mapsto \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

De plus

$$f_n(x) - f(x) = \alpha_n (x^{\beta_n} - x^2) + \left(\alpha_n - \frac{1}{4}\right) x^2$$

Puisque $\beta_n \leq 2$, on a pour tout $x \in [0, 1]$ et en exploitant $e^u \leq 1 + u$

$$0 \leq x^{\beta_n} - x^2 = x^2 (e^{(\beta_n - 2) \ln x} - 1) \leq (\beta_n - 2) x^2 \ln x$$

Puisque la fonction $x \mapsto x \ln x$ est minorée par $-1/e$ sur $[0, 1]$,

$$0 \leq x^{\beta_n} - x^2 = \frac{2 - \beta_n}{e} x \leq 2 - \beta_n$$

et ainsi

$$|f_n(x) - f(x)| = \alpha_n (2 - \beta_n) + \left(\alpha_n - \frac{1}{4}\right)$$

et ce majorant uniforme tend vers 0.

Il y a donc convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers f .

b) La relation

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)} dt$$

donne à la limite

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)} dt$$

d'où l'on tire f dérivable et $f'(x) = \sqrt{f(x)}$.

Pour l'équation différentielle $y' = \sqrt{y}$, il n'y a pas unicité de la solution nulle en 0, car outre la fonction nulle, la fonction $y : x \mapsto \left(\frac{x}{2}\right)^2$ est justement solution.

Exercice 35 : [énoncé]

Puisque $a_n > 0$ et $\sum a_n(1 + |x_n|)$ converge, les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n x_n$ sont absolument convergentes.

Posons $f_n(x) = a_n |x - x_n|$.

Comme $|a_n |x - x_n|| \leq |a_n| |x| + |a_n x_n|$, la série des fonctions f_n converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions f_n sont continues et sur $[-M, M]$, $\|f_n\|_\infty \leq M a_n + a_n |x_n|$.

Par convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que la somme f est continue.

Soit $[\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \notin [\alpha, \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ et $f'_n(x) = \varepsilon a_n$ avec $|\varepsilon| = 1$.

Par convergence normale de la série des dérivées sur $[\alpha, \beta]$, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle ouvert $]a, b[$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin]a, b[$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $x_n = a$.

En considérant $A = \{n \in \mathbb{N} / x_n = a\}$, on peut écrire par absolue convergence

$$f(x) = \sum_{n \in A} a_n |x - a| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A} a_n |x - x_n| = \alpha |x - a| + g(x)$$

avec $\alpha > 0$.

Puisque la série $\sum a_n$ converge, pour N assez grand, $\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_n \leq \frac{\alpha}{2}$.

On peut alors écrire

$$f(x) = \alpha |x - a| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \geq N+1} a_n |x - x_n| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \leq N} a_n |x - x_n|$$

La fonction $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \leq N} a_n |x - x_n|$ est dérivable au voisinage de a .

Cependant, la fonction

$$\varphi : x \mapsto \alpha |x - a| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A, n \geq N+1} a_n |x - x_n|$$

n'est quand à elle pas dérivable en a .

En effet, pour $h > 0$,

$$\frac{1}{h} (\varphi(a+h) - \varphi(a)) \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2}$$

alors que pour $h < 0$,

$$\frac{1}{h} (\varphi(a+h) - \varphi(a)) \leq -\alpha + \frac{\alpha}{2} = -\frac{\alpha}{2}$$

Ainsi, les éventuels nombres dérivés à droite et à gauche ne peuvent pas coïncider.

Exercice 36 : [énoncé]

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Pour n assez grand

$$f_n(x) = (1 - x/n)^n = \exp(n \ln(1 - x/n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x}$$

La suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto e^{-x}$ avec $f_n \leq f$.

Etudions $\delta_n = f - f_n \geq 0$.

Pour $x \in]n, +\infty[$, $\delta_n(x) = e^{-x} \leq e^{-n}$.

Pour $x \in [0, n]$, $\delta_n(x) = e^{-x} - (1 - x/n)^n$ et $\delta'_n(x) = -e^{-x} + (1 - x/n)^{n-1}$.

Posons

$$\varphi_n(x) = (n-1) \ln(1 - x/n) + x$$

On a

$$\varphi'_n(x) = \frac{n-1}{n} \frac{1}{x/n - 1} + 1 = \frac{x-1}{x-n}$$

est du signe de $1 - x$.

Par étude des variations de φ_n , on obtient l'existence de $x_n \in [0, n[$ tel que

$\varphi_n(x) \geq 0$ pour $x \leq x_n$ et $\varphi_n(x) \leq 0$ pour $x \geq x_n$. On en déduit que pour $x \leq x_n$, $\delta'_n(x) \geq 0$ et pour $x \geq x_n$, $\delta'_n(x) \leq 0$. Ainsi

$$\|\delta_n\|_{\infty; [0, n]} = \delta_n(x_n) = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \frac{x_n}{n} e^{-x_n}$$

Puisque la fonction $x \mapsto x e^{-x}$ est bornée par un certain M sur $\mathbb{R}^+$, on obtient

$$\|\delta_n\|_{\infty; [0, n]} \leq \frac{M}{n}$$

Finalement

$$\|\delta_n\|_{\infty; [0, +\infty[} \leq \max\left(\frac{M}{n}, e^{-n}\right) \rightarrow 0$$

On peut donc affirmer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f .

Exercice 37 : [énoncé]

Les fonctions constantes sont solutions et les solutions forment un sous-espace vectoriel.

Soit f une solution. Quitte à ajouter une fonction constante, on peut supposer $f(0) = 0$.

On a

$$f(x) = \frac{f(x)}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$$

donc

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^{n+1})}{2^n}$$

Posons $h(x) = \sup_{[0,x]} |f|$.

Pour $x > 0$, on a $x^{n+1} \in [0, x^2]$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} h(x^2) = h(x^2)$$

Ainsi $h(x) \leq h(x^2)$ puis en itérant $0 \leq h(x) \leq h(x^{2^n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or pour $x \in [0, 1]$, $x^{2^n} \rightarrow 0$ et $\lim_{0^+} h = 0$ (car $f(0) = 0$) donc $h(x) = 0$ sur $[0, 1]$.

Finalement f est nulle sur $[0, 1]$ puis en 1 par continuité.

Exercice 38 : [énoncé]

a) La série de fonctions considérée converge uniformément sur tout segment inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Sa somme est donc continue et de plus 1-périodique.

b) Soit $\alpha \geq 1$. Pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $x/2$ et $(x+1)/2$ appartiennent à $[-\alpha, \alpha]$.

Posons $M_\alpha = \|f\|_{\infty, [-\alpha, \alpha]}$. La relation

$$f(x) = \frac{1}{c} \left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]$$

donne $|f(x)| \leq \frac{2}{c} M_\alpha$ pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$. On en déduit $M_\alpha \leq \frac{2}{c} M_\alpha$ puis $M_\alpha = 0$ puisque $c > 2$.

Ainsi f est nulle sur $[-\alpha, \alpha]$ et puisque ceci vaut pour tout $\alpha \geq 1$, f est la fonction nulle.

c) Posons $h : x \mapsto \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

La fonction $g = f - h$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, 1-périodique et continue.

On peut écrire $f(x) = \frac{1}{x^2} + \tilde{f}(x)$ avec

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2} \right)$$

Par convergence uniforme sur $[-1/2, 1/2]$, la fonction $\tilde{f}$ est continue en 0.

On peut aussi écrire $h(x) = \frac{1}{x^2} + \tilde{h}(x)$ avec $\tilde{h}$ continue en 0.

La fonction $g = f - h$ se prolonge donc par continuité en 0.

Par périodicité, g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on remarque que

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4f(x)$$

et

$$h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4h(x)$$

On en déduit

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4g(x)$$

pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ mais aussi pour $x \in \mathbb{Z}$ par continuité.

En vertu de b), on peut affirmer $g = 0$ et donc $f = h$.

Exercice 39 : [énoncé]

Posons $f_n(x) = \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2}$ si $x \in [0, n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in]n, +\infty[$.

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$f_n(x) = \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - x^2/2n^2 + o(1/n^2)\right)\right) \rightarrow e^{-x^2/2}$$

Ainsi $f_n \xrightarrow[0, +\infty[]{CS} f$ avec $f : x \mapsto e^{-x^2/2}$.

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.

Soit $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = 1 - t^2/4 - \cos t$. Par étude des variations,

$$\forall x \in [0, 1], \psi(x) \geq 0$$

On en déduit que, pour $x \in [0, n]$,

$$\ln\left(\cos \frac{x}{n}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{x^2}{4n^2}\right) \leq -\frac{x^2}{4n^2}$$

puis

$$f_n(x) \leq e^{-x^2/4}$$

Cette inégalité vaut aussi pour $x \in]n, +\infty[$ et puisque la fonction $x \mapsto e^{-x^2/4}$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 40 : [énoncé]

a) Appliquons le théorème de convergence dominée.

Posons $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = F(\sqrt{n}(\delta t - h))$$

Pour $t \in [0, h/\delta[$, on a $f_n(t) \rightarrow 1$.

Pour $t \in]h/\delta, 1]$, on a $f_n(t) \rightarrow 0$.

Enfin, pour $t = h/\delta$, $f_n(t) = F(0) \rightarrow F(0)$.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, h/\delta[\\ F(0) & \text{si } t = h/\delta \\ 0 & \text{si } t \in]h/\delta, 1] \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues et la limite simple f est continue par morceaux.

Enfin

$$\forall t \in [0, 1], |f_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable.

Par convergence dominée,

$$I_n \rightarrow \int_0^1 f(t) dt = \int_0^{h/\delta} 1 dt = \frac{h}{\delta}$$

b) Par la décroissance de F , on peut écrire

$$\frac{1}{n} \int_{(k+1)/n}^{(k+2)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt \leq F\left(\sqrt{n}\left(\delta \frac{k+1}{n} - h\right)\right) \leq \frac{1}{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt \text{ et par comparaison}$$

En sommant ces inégalités

$$\frac{1}{n} \int_{1/n}^{(n+1)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt \leq S_n \leq \frac{1}{n} I_n$$

et

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt = \int_0^1 F(\sqrt{n}(\delta(t + 1/n) - h)) dt$$

Par convergence dominée, on obtient de façon analogue à ce qui précède, la limite de ce terme et on conclut

$$S_n \sim \frac{h}{\delta\sqrt{n}}$$

Exercice 41 : [énoncé]

a) Pour $x > 0$, posons

$$u_n(x) = \int_0^{+\infty} n \cos t (\sin t)^n f(xt) dt$$

L'intégrabilité de f assure que $u_n(x)$ est bien définie.

Puisque f' est intégrable, la fonction f converge en $+\infty$ et, puisque f est aussi intégrable, f tend vers 0 en $+\infty$. Par intégration par parties, on obtient alors

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1} \int_0^{+\infty} (\sin t)^{n+1} x f'(xt) dt$$

Posons $g_n(x) = |\sin t|^{n+1} x f'(xt) dt$.

Chaque fonction g_n est continue par morceaux.

La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers une fonction continue par morceaux, nulle en chaque $x \neq \pi/2 + k\pi$.

La fonction limite simple est continue par morceaux.

Enfin on a la domination

$$|g_n(x)| \leq x f'(xt) = \varphi(t)$$

avec la fonction φ intégrable.

Par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} g_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

b) On vient déjà d'obtenir une convergence simple de la suite de fonctions (u_n) vers la fonction nulle. Montrons qu'en fait il s'agit d'une convergence uniforme.

Par changement de variable

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1} \int_0^{+\infty} (\sin(u/x))^{n+1} f'(u) du$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction f' est intégrable, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\int_A^{+\infty} |f'(u)| du \leq \varepsilon$$

et alors

$$|u_n(x)| \leq M \int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du + \varepsilon \text{ avec } M = \max_{u \in [0, A]} |f'(u)|$$

Pour $x \geq 4A/\pi$, on a

$$\forall u \in [0, A], 0 \leq \frac{u}{x} \leq \frac{A}{x} \leq \frac{\pi}{4}$$

et donc

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du \leq \frac{A}{\sqrt{2}^{n+1}}$$

Pour $x \leq 4A/\pi$, on a par changement de variable

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du = x \int_0^{A/x} |\sin t|^{n+1} dt$$

Pour k entier tel que $k\pi < A/x \leq (k+1)\pi$.

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du = x \int_0^{(k+1)\pi} |\sin t|^{n+1} dt = x(k+1) \int_0^\pi (\sin t)^{n+1} dt$$

Or $x(k+1)\pi \leq A + x\pi \leq 5A$ donc

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du \leq 5A \int_0^\pi (\sin t)^{n+1} dt$$

Finalement, pour tout $x > 0$,

$$|u_n(x)| \leq 5AM \int_0^\pi (\sin t)^{n+1} dt + \frac{AM}{\sqrt{2}^{n+1}} + \varepsilon$$

et donc pour n assez grand, on a pour tout $x > 0$.

$$|u_n(x)| \leq 2\varepsilon$$

Exercice 42 : [énoncé]

Pour tout $y \in \ker f$, $|f(x)| = |f(x) - f(y)| \leq \|f\| \|x - y\|$ donc

$$|f(x)| \leq \|f\| d(x, \ker f).$$

Pour $z \in E$, on peut écrire $z = \lambda x + y$ avec $y \in H$ et $\lambda = f(z)/f(x)$.

Si $\lambda \neq 0$ alors $z = \lambda(x + y/\lambda)$ donc $\|z\| \geq |\lambda| d(x, H)$ puis

$$|f(z)| = |\lambda| |f(x)| \leq \frac{|f(x)|}{d(x, H)} \|z\|$$

Cette inégalité vaut encore quand $\lambda = 0$ et cela permet d'affirmer $\|f\| \leq \frac{|f(x)|}{d(x, H)}$ puis l'inégalité complémentaire de la précédente.

Exercice 43 : [énoncé]

Cas $n = 2$

Par l'absurde supposons qu'une telle norme existe.

$$\text{Posons } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont semblables (via $P = \text{diag}(1/2, 1)$) donc $\|A\| = \|B\|$. Or $B = 2A$ donc $\|B\| = 2\|A\|$ puis $\|A\| = 0$.

C'est absurde car $A \neq O_2$.

Cas général : semblable.

Exercice 44 : [énoncé]

Posons $r = \text{rg} A$.

La matrice A possède est déterminant extrait non nul de taille r .

Le déterminant extrait correspondant des matrices A_k est alors non nul à partir d'un certain rang et donc

$$p = \text{rg}(A_k) \geq r = \text{rg} A$$

Exercice 45 : [énoncé]

Commençons par montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice A est trigonalisable, on peut donc écrire $A = PTP^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$. Posons alors pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_p = P(T + D_p)P^{-1}$ avec $D_p = \text{diag}(1/p, 2/p, \dots, n/p)$.

Par opérations, $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$ et pour p assez grand les coefficients diagonaux de

la matrice triangulaire $T + D_p$ sont deux à deux distincts, ce qui assure

$A_p \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Ainsi $A \in \overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})}$ et donc $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrons maintenant que l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est formée des matrices possédant exactement n valeurs propres distinctes.

Soit $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Cas $|\text{Sp} A| < n$.

On peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D = \text{diag}(\lambda, \lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

$$\text{Posons alors } D_p = D + \begin{pmatrix} 0 & 1/p & & \\ 0 & 0 & & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_p = PD_pP^{-1}.$$

La matrice D_p n'est pas diagonalisable car $\dim E_\lambda(D_p) < m_\lambda(D_p)$ donc A_p non plus et puisque $A_p \rightarrow A$, on peut affirmer que la matrice A n'est pas intérieure à $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Cas $|\text{Sp} A| = n$.

Supposons par l'absurde que A n'est pas intérieur à $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Il existe donc une suite (A_p) de matrices non diagonalisables convergeant vers A . Puisque les matrices A_p ne sont pas diagonalisables, leurs valeurs propres ne peuvent être deux à deux distinctes. Notons λ_p une valeur propre au moins double de A_p . Puisque $A_p \rightarrow A$, par continuité du déterminant $\chi_{A_p} \rightarrow \chi_A$. Les coefficients du polynôme caractéristique χ_{A_p} sont donc bornés ce qui permet d'affirmer que les racines de χ_{A_p} le sont aussi (car si ξ est racine de $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$, on a $|\xi| \leq \max(1, |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|)$). La suite complexe (λ_p) étant bornée, on peut en extraire une suite convergente $(\lambda_{\varphi(p)})$ de limite λ . On a alors $A_p - \lambda_{\varphi(p)}I_n \rightarrow A - \lambda I_n$. Or les valeurs propres de A étant simples, on a $\dim \ker(A - \lambda I_n) \leq 1$ et donc $\text{rg}(A - \lambda I_n) \geq n - 1$. La matrice $A - \lambda I_n$ possède donc un déterminant extrait non nul d'ordre $n - 1$. Par continuité du déterminant, on peut affirmer que pour p assez grand $\text{rg}(A_{\varphi(p)} - \lambda_{\varphi(p)}I_n) \geq n - 1$ et donc $\dim \ker(A_{\varphi(p)} - \lambda_{\varphi(p)}I_n) \leq 1$ ce qui contredit la multiplicité de la valeur propre $\lambda_{\varphi(p)}$. C'est absurde et on conclut que la matrice A est intérieure à $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 46 : [énoncé]

Par l'absurde supposons $A \neq E$.

Il existe un élément $a \in E$ tel que $a \notin A$. Par translation du problème, on peut supposer $a = 0$.

Posons $n = \dim E$.

Si $\text{Vect}(A)$ est de dimension strictement inférieure à n alors A est inclus dans un hyperplan de E et son adhérence aussi. C'est absurde car cela contredit la densité de A .

Si $\text{Vect}(A)$ est de dimension n , on peut alors considérer $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée d'éléments de A .

Puisque $0 \notin A$, pour tout $x \in A$, on remarque : $\forall \lambda \in \mathbb{R}^-, -\lambda x \notin A$ (car sinon, par convexité, $0 \in A$).

Par convexité de A : $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \Rightarrow \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in A$ et donc : $\forall \lambda \in \mathbb{R}^-, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \Rightarrow \lambda(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \notin A$. Ainsi $\forall \mu_1, \dots, \mu_n \leq 0, \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n \notin A$.

Or la partie $\{\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n / \mu_i < 0\}$ est un ouvert non vide de A et donc aucun de ses éléments n'est adhérent à A . Cela contredit la densité de A .

Exercice 47 : [énoncé]

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/n_0 \leq \varepsilon$.

Pour $a \geq \ln n_0$ et $n = E(e^a) \geq n_0$, on a $\ln n \leq a \leq \ln(n+1)$.

On en déduit

$$|a - \ln n| \leq \ln(n+1) - \ln n = \ln(1 + 1/n) \leq 1/n \leq 1/n_0 \leq \varepsilon$$

Puisque $m - x \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$, pour m assez grand, on a $a = m - x \geq \ln n_0$ et donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $|a - \ln n| \leq \varepsilon$ i.e.

$$|m - \ln n - x| \leq \varepsilon$$

Par suite $\{m - \ln n / (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 48 : [énoncé]

Considérons l'ensemble $B = \ln A = \{\ln a / a \in A\}$.

Pour tout $x, y \in B$, $\frac{x+y}{2} = \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln \sqrt{ab} \in B$.

En raisonnant par récurrence, on montre que pour tout $x, y \in B$, on a la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, 2^n\}, \frac{kx + (2^n - k)y}{2^n} \in B$$

Soit $x \in]\inf A, \sup A[$. Il existe $a, b \in A$ tels que $a < x < b$.

On a alors $\ln a < \ln x < \ln b$ avec $\ln a, \ln b \in B$.

On peut écrire $\ln x = \lambda \ln a + (1 - \lambda) \ln b$ avec $\lambda \in]0, 1[$.

Posons alors k_n la partie entière de $\lambda 2^n$ et $x_n = \exp\left(\frac{k_n}{2^n} \ln a + \left(1 - \frac{k_n}{2^n}\right) \ln b\right)$

Il est immédiat que $x_n \rightarrow x$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$.

Si, dans cette suite, il existe une infinité d'irrationnels, alors x est limite d'une suite d'éléments de $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Sinon, à partir d'un certain rang, les termes de la suite x_n sont tous rationnels.

Le rapport x_{n+1}/x_n est alors aussi rationnel; mais

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k_{n+1}+1}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n}} \text{ avec } \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n} = 0 \text{ ou } \frac{1}{2^{n+1}}$$

S'il existe une infinité de n tels que $\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{k_n}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$ alors il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^n}} \in \mathbb{Q}$$

et puisque l'élévation au carré d'un rationnel est un rationnel, le nombre a/b est lui-même rationnel. Or les racines carrées itérées d'un rationnel différent de 1 sont irrationnelles à partir d'un certain rang.

Il y a absurdité et donc à partir d'un certain rang $k_{n+1} = 2k_n$.

Considérons la suite (x'_n) définie par

$$x'_n = \exp\left(\frac{k'_n}{2^n} \ln a + \left(1 - \frac{k'_n}{2^n}\right) \ln b\right) \text{ avec } k'_n = k_n + 1$$

On obtient une suite d'éléments de A , convergeant vers x et qui, en vertu du raisonnement précédent, est formée d'irrationnels à partir d'un certain rang.

Exercice 49 : [énoncé]

Pour obtenir ce résultat, il suffit de savoir montrer $F + \text{Vect}(u)$ fermé pour tout $u \notin F$.

Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de $F + \text{Vect}(u)$ de limite x .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $x_n = y_n + \lambda_n u$ avec $y_n \in F$ et $\lambda_n \in \mathbb{K}$.

Montrons en raisonnant par l'absurde que la suite (λ_n) est bornée.

Si la suite (λ_n) n'est pas bornée, quitte à considérer une suite extraite, on peut supposer $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$.

Posons alors $z_n = \frac{1}{\lambda_n} x_n = \frac{1}{\lambda_n} y_n + u$.

Puisque $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ et $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$, on a $\|z_n\| \rightarrow 0$ et donc $\frac{1}{\lambda_n} y_n \rightarrow -u$.

Or la suite de terme général $\frac{1}{\lambda_n} y_n$ est une suite d'éléments de l'espace fermé F , donc $-u \in F$ ce qui exclu.

Ainsi la suite (λ_n) est bornée et on peut en extraire une suite convergente $(\lambda_{\varphi(n)})$ de limite $\lambda \in \mathbb{K}$.

Par opérations, la suite $(y_{\varphi(n)})$ est alors convergente.

En notant y sa limite, on a $y \in F$ car l'espace F est fermé.

En passant la relation $x_n = y_n + \lambda_n u$ à la limite on obtient

$x = y + \lambda u \in F + \text{Vect}(u)$.

Ainsi l'espace $F + \text{Vect}(u)$ est fermé.

Exercice 50 : [énoncé]

Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

Soit (A_p) une suite convergente de matrices semblables à A .

Notons A_∞ la limite de (A_p) .

Si P est un polynôme annulateur de A , P est annulateur des A_p et donc P annule A_∞ . Puisque A est supposée diagonalisable, il existe un polynôme scindé simple annulant A et donc A_∞ et par suite A_∞ est diagonalisable.

De plus $\chi_A = \chi_{A_p}$ donc à la limite $\chi_A = \chi_{A_\infty}$.

On en déduit que A et A_∞ ont les mêmes valeurs propres et que celles-ci ont mêmes multiplicités. On en conclut que A et A_∞ sont semblables.

Ainsi la classe de similitude de A est fermée.

Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable.

A titre d'exemple, considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Pour $P_p = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$P_p^{-1} A P_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \lambda I_2$$

qui n'est pas semblable à A .

De façon plus générale, si la matrice A n'est pas diagonalisable, il existe une valeur propre λ pour laquelle

$$\ker(A - \lambda I_2)^2 \neq \ker(A - \lambda I_2)$$

Pour $X_2 \in \ker(A - \lambda I_2)^2 \setminus \ker(A - \lambda I_2)$ et $X_1 = (A - \lambda I_2)X_2$, la famille (X_1, X_2) vérifie $AX_1 = \lambda X_1$ et $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$. En complétant la famille libre (X_1, X_2) en une base, on obtient que la matrice A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & (\star) \\ 0 & \lambda & (\star) \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

Pour $P_p = \text{diag}(p, 1, \dots, 1)$, on obtient

$$P_p^{-1} T P_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p & (\star/p) \\ 0 & \lambda & (\star) \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 & (0) \\ 0 & \lambda & (\star) \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} = A_\infty$$

Or cette matrice n'est pas semblable à T ni à A car $\text{rg}(A_\infty - \lambda I_n) \neq \text{rg}(T - \lambda I_n)$. Ainsi, il existe une suite de matrices semblables à A qui converge vers une matrice qui n'est pas semblable à A , la classe de similitude de A n'est pas fermée.

Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ alors toute limite A_∞ d'une suite de la classe de similitude de A est semblable à A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = A_\infty$. On a alors $AP = PA_\infty$. En introduisant les parties réelles et imaginaires de P , on peut écrire $P = Q + iR$ avec $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'identité $AP = PA_\infty$ avec A et A_∞ réelles entraîne $AQ = QA_\infty$ et $AR = RA_\infty$. Puisque la fonction polynôme $t \mapsto \det(Q + tR)$ n'est pas nulle (car non nulle en i), il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $P' = Q + tR \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et pour cette matrice $AP' = P'A_\infty$. Ainsi les matrices A et A_∞ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Il existe une valeur propre complexe λ pour laquelle $\ker(A - \lambda I_2)^2 \neq \ker(A - \lambda I_2)$. Pour $X_2 \in \ker(A - \lambda I_2)^2 \setminus \ker(A - \lambda I_2)$ et $X_1 = (A - \lambda I_2)X_2$, la famille (X_1, X_2) vérifie $AX_1 = \lambda X_1$ et $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, il suffit de reprendre la démonstration qui précède.

Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on peut écrire $\lambda = a + ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$.

Posons $X_3 = \bar{X}_1$ et $X_4 = \bar{X}_2$.

La famille (X_1, X_2, X_3, X_4) est libre car $\lambda \neq \bar{\lambda}$.

Introduisons ensuite $Y_1 = \text{Re}(X_1)$, $Y_2 = \text{Re}(X_2)$, $Y_3 = \text{Im}(X_1)$ et $Y_4 = \text{Im}(X_2)$.

Puisque $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(Y_1, \dots, Y_4) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(X_1, \dots, X_4)$, la famille $(Y_1, \dots, Y_4)$ est libre et peut donc être complétée en une base.

On vérifie par le calcul $AY_1 = aY_1 - bY_3$, $AY_2 = aY_2 - bY_4 + Y_1AY_3 = aY_3 + bY_1$ et $AY_4 = bY_2 + aY_4 + Y_3$.

et on obtient que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice

$$\begin{pmatrix} T & \star \\ O & B \end{pmatrix} \text{ avec}$$

$$T = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 1 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Pour $P_p = \text{diag}(p, 1, p, 1, \dots, 1)$, on obtient

$$P_p^{-1}TP_p \rightarrow \begin{pmatrix} T_\infty & \star' \\ O & B \end{pmatrix} = A_\infty$$

avec

$$T_\infty = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Or dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice A_∞ est semblable est à $\text{diag}(\lambda, \lambda, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}, B)$ qui n'est pas semblable à A pour des raisons de dimensions analogues à ce qui a déjà été vu. Les matrices réelles A et A_∞ ne sont pas semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ni a fortiori dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On en déduit que la classe de similitude de A n'est pas fermée

Exercice 51 : [énoncé]

a) Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{a_n}{n-t} \right| \leq \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{(n-t)^2} \right)$$

donc $\sum \frac{a_n}{n-t}$ est absolument convergente. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$.

b) Pour $|t| < 1$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \frac{1}{1-t/n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a_n t^m}{n^{m+1}}$$

Puisque $\sum_{m \geq 0} \frac{|a_n t^m|}{n^{m+1}}$ converge pour tout $n \geq 1$ et puisque

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|a_n t^m|}{n^{m+1}} = \sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n - |t|}$$

converge, on a par le théorème de Fubini,

$$f(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{m+1}} \right) t^m$$

La fonction f est donc développable en série entière sur $] -1, 1[$.

c) Si $f(t) = 0$ sur $[-1/2, 1/2]$ alors le développement en série entière de f sur $] -1, 1[$ est nul et on en déduit que f est nulle sur $] -1, 1[$.

Or

$$f(t) = \frac{a_1}{1-t} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$$

avec $t \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$ définie et continue au voisinage de 1. On en déduit que $a_1 = 0$.

On peut alors reprendre l'étude du b) et, sachant $a_1 = 0$, on peut affirmer que f est développable en série entière sur $] -2, 2[$. Or ce dernier développement étant nul, on obtient comme ci-dessus $a_2 = 0$ etc. Au final, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est nulle.

Exercice 52 : [énoncé]

a) $a = \alpha + i\beta$ avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

$a + n = |a + n| e^{i\theta_n}$ avec $|a + n| = \sqrt{(\alpha + n)^2 + \beta^2} = n + \alpha + O\left(\frac{1}{n}\right)$ et

$\theta_n = \arctan \frac{\beta}{\alpha + n} = \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$$u_n = a \exp \left(\sum_{k=1}^n \ln |a + k| + i\theta_k \right) =$$

$$a \exp \left(\sum_{k=1}^n \ln k + \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\alpha}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) + i \sum_{k=1}^n \frac{\beta}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right).$$

Ainsi $u_n = an! \exp(\alpha \ln n + i\beta \ln n + \chi + o(1))$ et donc $u_n \sim A(a)n!n^\alpha$ avec $n^\alpha = \exp(a \ln n)$ et $A(a) \in \mathbb{C}^*$.

b) Notons $H = \{z \in \mathbb{C}, \text{Re} z > 0\}$. Pour $z \in H$, on a $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.

Par convergence dominée, on montre que $\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

Par changement de variable, $\int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = n^z \int_0^1 u^{z-1} (1-u)^n du$ puis par intégrations par parties successives $\int_0^1 t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$.

On en déduit que pour $z = a$, $\Gamma(z) = \frac{1}{A(a)}$.

On en déduit en particulier que $\Gamma(z) \neq 0$ mais aussi que $a(a+1)\dots(a+n) \sim \frac{n^\alpha n!}{\Gamma(a)}$.

Exercice 53 : [énoncé]

a) La fonction f est paire donc $b_n = 0$ et $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt$.

On obtient $a_0 = \frac{2\alpha}{\pi}$ et $a_n = \frac{2\sin(n\alpha)}{n\pi}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
La série de Fourier est alors

$$\frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\alpha) \cos(nt)}{n}$$

En vertu du théorème de Dirichlet, celle-ci converge en tout point vers la régularisée de f car la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Puisque la régularisée de f n'est pas continue, cette convergence ne peut pas être uniforme.

b) La régularisée de f prend respectivement les valeurs 1 et 1/2 en 0 et α .
c) Par la formule de Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$$

On en déduit après calculs

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}$$

d) La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car continue, prolongeable par continuité en 0 et dominée par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$.
En découpant l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\alpha \frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} dt$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\alpha} + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\alpha \left[\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right] dt$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{2\sin t}{t^3} (t \cos t - \sin t)$$

Puisque φ' est continue et puisque

$$t^{3/2}\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0 \text{ et } t^{3/2}\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall t \in]0, +\infty[, |\varphi'(t)| \leq \frac{M}{t^{3/2}}$$

et en particulier

$$\forall t \in [n\alpha, (n+1)\alpha], |\varphi'(t)| \leq \frac{M}{(n\alpha)^{3/2}}$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a alors

$$\left| \int_0^\alpha \left[\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right] dt \right| \leq \int_0^\alpha t \frac{M}{(n\alpha)^{3/2}} dt = \frac{\sqrt{\alpha}}{n^{3/2}} M$$

puis

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\alpha \left[\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right] dt \right| \leq M\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} = C\sqrt{\alpha}$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi - \alpha}{2} + O(\sqrt{\alpha})$$

et quand $\alpha \rightarrow 0^+$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 54 : [énoncé]

Soit P un polynôme solution.

Le polynôme P est non nul, on peut introduire son degré n et l'écrire

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ avec } a_n \neq 0$$

Puisque $|P(e^{it})| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $P(e^{it})\overline{P(e^{it})} = 1$.

Mais

$$P(e^{it})\overline{P(e^{it})} = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n a_k \bar{a}_\ell e^{i(k-\ell)t}$$

et en développant on obtient

$$a_n \bar{a}_0 e^{int} + (a_n \bar{a}_1 + a_{n-1} \bar{a}_0) e^{i(n-1)t} + (a_n \bar{a}_2 + a_{n-1} \bar{a}_1 + a_{n-2} \bar{a}_0) e^{i(n-2)t} + \dots + (a_n \bar{a}_n + \dots + a_0 \bar{a}_0) = 1$$

On en déduit $a_n \bar{a}_0 = 0$, $a_n \bar{a}_1 + a_{n-1} \bar{a}_0 = 0, \dots$,

$a_n \bar{a}_{n-1} + a_{n-1} \bar{a}_{n-2} + \dots + a_1 \bar{a}_0 = 0$ et $(a_n \bar{a}_n + \dots + a_0 \bar{a}_0) = 1$

Puisque $a_n \neq 0$, on obtient successivement $a_0 = 0$, $a_1 = 0, \dots$, $a_{n-1} = 0$ et

$$|a_n|^2 = 1$$

Ainsi $P(X) = aX^n$ avec $|a| = 1$.

Inversement, un tel polynôme est solution.

Exercice 55 : [\[énoncé\]](#)

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et régularisée donc développable en série de Fourier.

Puisque sur $(e^{ix} - 1)f(x) = ix$, on a sur $]-\pi, \pi[$

$$(e^{ix} - 1)f'(x) + ie^{ix}f(x) = i$$

donc

$$c_{n-1}(f') - c_n(f') + ic_{n-1}(f) = i\delta_{0,n}$$

Par intégration par parties (avec ici $f(\pi^-) \neq f(-\pi^+)$)

$$c_n(f') = i \frac{(-1)^{n+1}}{2} + inc_n(f)$$

ce qui donne

$$(-1)^n + n(c_{n-1}(f) - c_n(f)) = \delta_{0,n}$$

Pour $n > 0$, on obtient

$$c_n(f) = c_{n-1}(f) + \frac{(-1)^n}{n} = c_0(f) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$$

Or $c_n(f) \rightarrow 0$ donc $c_0(f) = \ln 2$ puis, pour $n \geq 0$,

$$c_n(f) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

De façon analogue, pour $n > 0$

$$c_{-n}(f) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Exercice 56 : [\[énoncé\]](#)

a) Si I n'est pas majoré alors pour $x \geq 1$, $y' \geq 1 + y^2$ puis

$$\frac{y'(x)}{1 + y^2(x)} \geq 1$$

En intégrant,

$$\arctan(y(x)) - \arctan(y(1)) \geq x - 1$$

ce qui est absurde car la fonction $\arctan$ est bornée.

b) Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$, on a

$$y(x) = y(a) + \int_a^x y'(t) dt = y(a) + \frac{x^2 - a^2}{2} + \int_a^x y^2(t) dt$$

Si l'intégrale $\int_{[a,b[} y^2(t) dt$ converge, on peut prolonger par continuité y en b en une solution de E ce qui contredit la maximalité de y .

Sinon, l'intégrale $\int_{[a,b[} y^2(t) dt$ diverge et puisque c'est l'intégrale d'une fonction positive,

$$\int_a^x y^2(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow b^-} +\infty$$

On en déduit que y tend vers $+\infty$ en b^- et en particulier $y'(x) = x + y^2(x)$ est positif au voisinage de b .

Cela résout le problème dans un ordre différent de celui qui était soumis. L'auteur de l'énoncé avait-il une démarche plus simple en tête ?

c) En intégrant

$$\frac{y'}{y^2} = 1 + \frac{x}{y^2}$$

on obtient

$$\int_x^b \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = b - x + \int_x^b \frac{t}{y^2(t)} dt$$

avec convergence des intégrales engagées.

Or

$$\int_x^b \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = \frac{1}{y(x)}$$

et

$$\left| \int_x^b \frac{t dt}{y^2(t)} \right| \leq \frac{1}{y^2(x)} \frac{1}{2} (b^2 - x^2) = o\left(\frac{1}{y(x)}\right)$$

donc

$$\frac{1}{y(x)} \sim b - x$$

puis

$$y(x) \sim \frac{1}{b - x}$$

Exercice 57 : [\[énoncé\]](#)

On peut remarquer que la quantité $xy' - y$ est le numérateur de la dérivée de y/x .

Sur $I \subset \mathbb{R}^{+*}$, l'équation différentielle étudiée est équivalente à l'équation

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Posons $z(x) = y(x)/x$ et on est amené à résoudre

$$z' = \frac{1}{x} \sqrt{1 + z^2}$$

Cette équation à variables séparables équivaut à

$$\frac{z'}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{1}{x}$$

Une fonction z en est solution sur $I \subset \mathbb{R}^{+*}$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\operatorname{argsh}(z(x)) = \ln x + \lambda$$

et nous obtenons pour solution générale

$$z(x) = \operatorname{sh}(\ln x + \lambda)$$

puis

$$y(x) = x \operatorname{sh}(\ln x + \lambda) = \frac{e^{2\lambda} x^2 - 1}{2e^\lambda}$$

qui a un sens sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sur $I \subset \mathbb{R}^{-*}$, une étude semblable conduit à la solution générale

$$y(x) = x \operatorname{sh}(-\ln |x| + \mu) = \frac{x^2 - e^{2\mu}}{2e^\mu}$$

qui a un sens sur $\mathbb{R}^{-*}$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.

Il reste à déterminer les éventuelles solutions sur $\mathbb{R}$.

Sachant que quand $x \rightarrow 0$,

$$\frac{e^{2\lambda} x^2 - 1}{2e^\lambda} = -\frac{1}{2} e^{-\lambda} + o(x) \text{ et } \frac{x^2 - e^{2\mu}}{2e^\mu} = -\frac{1}{2} e^\mu + o(x)$$

on peut raccorder par continuité une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ définie à partir de λ et une solution sur $\mathbb{R}^{-*}$ définie à partir de μ sous la condition $\mu = -\lambda$ et la fonction obtenue est alors dérivable en 0 et solution de l'équation différentielle étudiée. Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation étudiée sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{e^{2\lambda} x^2 - 1}{2e^\lambda}$$

Exercice 58 : [énoncé](#)

Par la règle de Sarrus

$$\begin{vmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3)$$

En factorisant

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c) [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

Soit y une solution de l'équation différentielle étudiée sur un intervalle I .

Par ce qui précède on a

$$y'' + y' + y = 0 \text{ ou } y'' = y' = y$$

l'alternative étant à comprendre valeurs par valeurs.

Montrons que cette alternative vaut en fait sur l'intervalle.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$(y'' + y' + y)(t_1) = 0 \text{ et } (y'' + y' + y)(t_2) \neq 0$$

Pour fixer les idées, supposons $t_1 < t_2$ et considérons

$$t_0 = \sup \{t \leq t_2 / (y'' + y' + y)(t) = 0\}$$

Par continuité on a

$$(y'' + y' + y)(t_0) = 0$$

et par construction, pour tout $t \in]t_0, t_2]$

$$(y'' + y' + y)(t) \neq 0$$

et donc

$$y''(t) = y'(t) = y(t)$$

La résolution sur l'intervalle $]t_0, t_2]$ de l'équation $y' = y$ donne

$$y(t) = \lambda e^t \text{ avec } \lambda \neq 0$$

et par passage à la limite quand $t \rightarrow t_0$ on obtient

$$(y'' + y' + y)(t_0) = 3\lambda e^{t_0} \neq 0$$

C'est absurde.

On en déduit que y est solution sur I de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ ou de l'équation $y'' = y' = y$

Après résolution, on en déduit

$$y(t) = e^{-t/2} \left[\lambda \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + \mu \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right] \text{ ou } y(t) = \lambda e^t$$

La réciproque est immédiate en remontant le calcul.

Exercice 59 : [énoncé]

Notons $f_1, \dots, f_n$ les fonctions composantes de f et $D_1, \dots, D_n$ les opérateurs de dérivées partielles.

L'antisymétrie de la matrice jacobienne de f donne

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, D_i(f_j) = -D_j(f_i)$$

Exploitions cette propriété pour établir que les dérivées partielles de f sont constantes

Soient $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$. Par antisymétrie

$$D_k(D_j f_i) = -D_k(D_i f_j)$$

Par le théorème de Schwarz, puis par antisymétrie

$$D_k(D_j f_i) = -D_i(D_k f_j) = D_i(D_j f_k)$$

A nouveau par le théorème de Schwarz et par antisymétrie

$$D_k(D_j f_i) = D_j(D_i f_k) = -D_j(D_k f_i)$$

Enfin, en vertu du théorème de Schwarz, on obtient

$$D_k(D_j f_i) = 0$$

Ainsi toutes les dérivées partielles de $D_j f_i$ sont nulles et donc $D_j f_i$ est constante.

En posant $a_{i,j}$ la valeur de cette constante, on obtient

$$\text{Jac}(f) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ antisymétrique}$$

Enfin en intégrant, on obtient

$$f(x) = Ax + b \text{ avec } b = f(0)$$

Exercice 60 : [énoncé]

φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} y + f(x) = a \\ x + f(y) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + f(b - f(y)) = a \\ x = b - f(y) \end{cases}$$

Considérons

$$\varphi_b : y \mapsto y + f(b - f(y))$$

φ est continue dérivable et $\varphi'_b(y) = 1 - f'(y)f'(b - f(y))$ donc $\varphi'_b(y) > 0$ car $|f'(y)f'(b - f(y))| \leq k^2 < 1$. Par conséquent φ est strictement croissante. De plus f étant k lipschitzienne : $|f(t) - f(0)| \leq k|t|$ donc $|f(t)| \leq k|t| + |f(0)|$ puis $|f(b - f(y))| \leq k|b - f(y)| + |f(0)| \leq k^2|y| + \ell$ par suite

$$\varphi_b(y) \geq (1 - k^2)y - \ell \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty \text{ et } \varphi_b(y) \leq (1 - k^2)y + \ell \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} -\infty$$

donc φ_b réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Par conséquent :

$$\varphi(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varphi_b^{-1}(a) \\ x = b - \varphi_b^{-1}(a) \end{cases}$$

Finalement, l'application φ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$. De plus

$$\text{Jac}\varphi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} f'(x) & 1 \\ 1 & f'(y) \end{pmatrix}$$

et $\det(\text{Jac}\varphi_{(x,y)}) = f'(x)f'(y) - 1 \neq 0$ car $|f'(x)f'(y)| \leq k^2 < 1$ donc φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

Exercice 61 : [énoncé]

Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\varphi(t) = f(a + t(b - a))$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est donnée par

$$\varphi'(t) = df(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$$

Puisque $f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0)$, on a

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(a + t(b - a)) \cdot (b - a) dt$$

et donc

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \int_0^1 \|df(a + t(b-a)) \cdot (b-a)\| dt \leq \|b-a\|$$

Pour poursuivre supposons que l'on sache la fonction f bijective.

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ et puisque son jacobien ne s'annule pas (car le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ± 1), on peut, par le théorème d'inversion globale, affirmer que f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ et que

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, df(f^{-1}(y)) = [df(x)]^{-1} \text{ avec } x = f^{-1}(y)$$

Puisqu'en tout point, la différentielle de f est orthogonale, il en est de même de la différentielle de f^{-1} .

L'étude précédente appliquée à f^{-1} donne alors

$$\forall c, d \in \mathbb{R}^n, \|f^{-1}(d) - f^{-1}(c)\| \leq \|d - c\|$$

Cette propriété et la précédente donne

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^n, \|f(b) - f(a)\| = \|b - a\|$$

Sachant $f(0) = 0$, on obtient

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \|f(a)\| = \|a\|$$

et alors la relation

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = \|f(b)\|^2 - 2(f(a) | f(b)) + \|f(a)\|^2$$

permet d'établir

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^n, (f(a) | f(b)) = (a | b)$$

Soient $a, b, h \in \mathbb{R}^n$. Pour $t \neq 0$,

$$\left(\frac{1}{t} (f(a + t.h) - f(a)) | f(b) \right) = (h | b)$$

et donc à la limite quand $t \rightarrow 0$

$$(df(a).h | f(b)) = (h | b)$$

Par la surjectivité de f , on en déduit

$$\forall a, a', c, h \in \mathbb{R}^n, (df(a).h | c) = (df(a').h | c)$$

et donc

$$\forall a, a' \in \mathbb{R}^n, df(a) = df(a')$$

La différentielle de f est donc constante. Notons ℓ l'endomorphisme orthogonal égal à cette constante.

En reprenant des calculs semblables à ceux initiaux

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, f(a) = f(0) + \int_0^1 df(0 + t.a).a dt = \int_0^1 \ell(a) dt = \ell(a)$$

Il ne reste plus qu'à démontrer le résultat sans supposer la fonction f bijective... ce que je ne sais pas simplement argumenter!

On peut cependant, on peut exploiter le théorème d'inversion locale et les idées suivantes :

L'application f réalise un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 vers un ouvert V contenant aussi 0.

Ce qui est embêtant pour poursuivre, c'est qu'on ne sait pas si cet ouvert V est convexe... Cependant, il existe une boule ouverte $B(0, R)$ incluse dans V et quitte à restreindre l'ouvert U , on peut désormais supposer que f réalise un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme d'un ouvert U contenant 0 vers l'ouvert $B(0, R)$. On a alors comme dans l'étude qui précède

$$\forall a, b \in U, \|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\|$$

et

$$\forall c, d \in B(0, R), \|f^{-1}(d) - f^{-1}(c)\| \leq \|d - c\|$$

ce qui assure

$$\forall a, b \in U, \|f(b) - f(a)\| = \|b - a\|$$

On en déduit

$$\forall a, b \in U, (f(a) | f(b)) = (a | b)$$

Sachant que les $f(b)$ parcourent un ouvert de $\mathbb{R}^n$ centré en 0, on peut comme au dessus conclure que la différentielle de f est constante sur l'ouvert U .

Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on reprend l'étude avec l'application $g : x \mapsto f(x_0 + x) - f(x_0)$ et on obtient que la différentielle de f est localement constante puis constante car continue. On peut alors enfin conclure.

Exercice 62 : [énoncé]

Cas $d\varphi(0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$:

Considérons l'application $\psi : x \mapsto \varphi(x) - x$.

ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $d\psi(0) = \tilde{0}$, il existe donc une boule B centrée en 0 telle que

$$\forall x \in B, \|d\psi(x)\| \leq \frac{1}{2}$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a alors

$$\forall x, y \in B, \|\psi(y) - \psi(x)\| \leq \frac{1}{2} \|y - x\|$$

Pour $x, y \in B$, si $\varphi(x) = \varphi(y)$ alors $\psi(y) - \psi(x) = y - x$ et la relation précédente donne

$$\|y - x\| \leq \frac{1}{2} \|y - x\|$$

d'où l'on tire $y = x$.

Cas général :

Considérons l'application $\theta = (d\varphi)^{-1}(0) \circ \varphi$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition.

Pour celle-ci

$$d\theta(0) = (d\varphi^{-1})(0) \circ d\varphi(0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$$

Par l'étude précédente, il existe V voisinage de 0 tel que la restriction de θ au départ de V soit injective et alors, par un argument de composition, la restriction de φ au départ de ce même voisinage V est aussi injective.