PROBLEME 1

PARTIE A

Soit la fonction $g$ définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 - (x^4 + x^2 + 2)e^{-\frac{x^2}{2}}$

1)a) Calculer les limites de $g$ en $-\infty$ $et$ $en + \infty$

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ puis étudier son signe

2)a) Dresser le tableau de variation de $g$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha \in ]-3; -2[$ et $\beta \in ]2; 3[$

c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$

PARTIE B

On considère la fonction $f$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{x^2} - 1 \\ f(0) = -\frac{1}{2} \; et \; f'(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par $(C)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ . Unité graphique : 2cm

1)a) Déterminer l'ensemble de définition $Df$ de la fonction $f$

b) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition

2) Etudier la continuité de $f$ en $0$

3)a) Montrer que : $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

b) En déduire le tableau de variation de $f$

4) Construire la courbe $(C)$

PARTIE C

Soit $\lambda$ un strictement supérieur à 1

On pose : $I(\lambda) = \int_1^{\lambda} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ et $K(\lambda) = \int_1^{\lambda} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2} dx$

1) A l'aide d'intégration par partie portant sur $K(\lambda)$, montrer que : $I(\lambda) + K(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{\lambda^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{e}}$

2)a) En déduire l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en $cm^2$ du domaine délimité par la courbe $(C)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ $et$ $x = \lambda$

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \mathcal{A}(\lambda)$ . Donner une interprétation du résultat obtenu

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

# PROBLEME 2

## PARTIE A

**On considère la fonction $g$ définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 2 - 2lnx$**

**1) Etudier les variations de $g$**

**2)a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$**

**b) Vérifier que $1,2 < \alpha < 1,3$**

**c) En déduire suivant les valeurs de $x$, le signe de $g(x)$**

## PARTIE B

**Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2 - x + \frac{2ln(x)}{x}$**

**On désigne par $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Unité graphique 2cm**

**1)a) Calculer la limite de $f$ en zéro puis donner une interprétation graphique**

**b) Calculer la limite de $f$ en $+\infty$**

**c) Montrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $(C)$ en $+\infty$**

**d) Etudier la position relative de $(C)$ par rapport à $(\Delta)$**

**2)a) Montrer que pour tout $x > 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$**

**b) En déduire le sens de variation de $f$ puis dresser son tableau de variation**

**3)a) Montrer que $f(\alpha) = 2 - 2\alpha + \frac{2}{\alpha}$**

**b) Montrer que $f(\alpha)$ est positif**

**c) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions positives**

**4)a) Calculer les coordonnées du point $A$ de $(C)$ où la tangente est parallèle à $(\Delta)$**

**b) Donner une équation de cette tangente $(T)$**

**5) Tracer $(\Delta)$ , $(T)$ $et$ $(C)$**

**6) Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe $(C)$ , la droite $(\Delta)$ et les droite d'équation $x = \alpha$ $et$ $x = e$.**

**a) $Calculer$ $\mathcal{A}(\alpha)$**

**b) En déduire que $\mathcal{A}(\alpha) = (-\alpha^4 + 4\alpha^2)cm^2$**

## PARTIE C

**Soit $\varphi$ la restriction de $f$ à l'intervalle $[\alpha;+\infty[$**

**1)a) Montrer que $\varphi$ définie une bijection de $[\alpha;+\infty[$ sur un intervalle à préciser**

**b) Préciser l'ensemble de dérivabilité de $\varphi^{-1}$**

c) Donner le sens de variation de $\varphi^{-1}$ puis dresser son tableau de variation

2) Tracer la courbe $(C')$ de $\varphi^{-1}$ dans le même repère que $(C)$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

## PROBLEME 3

### PARTIE A

Soit la fonction $g_k$ définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $g_k(x) = -kln(-x) - kx - 2k$ où k est un paramètre réel diffèrent de zéro

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de $g_k$

b) Déterminer suivant les valeurs de $k$ les limites de $g_k$ aux bornes de son ensemble de définition

2)a) Calculer la dérivée $g'_k$ de la fonction $g_k$ . Discuter suivant les valeurs $de$ $k$ le signe de $g'_k$

b) Dresser le tableau de variation de $g_k$ suivant les valeurs de $k$

3) a)Démontrer que $\forall$ $k \neq 0$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet deux solutions uniques $\alpha$ $et$ $\beta$ $(\alpha < \beta)$

b) Discuter suivant les valeurs de $k$ le signe de $g_k(x)$

### PARTIE B

Soit les fonctions $f_k$ définies de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = \frac{-kxln(-x)+k}{x+1}$ et $(C_k)$ leurs courbes représentatives dans le plan muni d'un repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ . Unité graphique : 1cm

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f_k$

b) Déterminer suivant les valeurs de $k$ les limites de $f_k$ aux bornes de son ensemble de définition

c) Montrer que : $f_k(\alpha) = k(\alpha + 1)$ $et$ $f_k(\beta) = k(\beta + 1)$

2)a) Montrer $que$ $\forall x \in D_{f_k}$ ,$f'_k(x) = \frac{g_k(x)}{(x+1)^2}$

b) En déduire le tableau de variation de $f_k$ suivant les valeurs de $k$

c) Montrer que les courbes $(C_k)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe $(OI)$

3) On pose $k = 1$

a) Vérifier que $-3,2 < \alpha < -3,1$ $et$ $que$ $-1 < \beta < 0$

b) Dresser le tableau de variation de $f_1$ , puis construire la courbe $(C_1)$ dans un repère orthonormé

### PARTIE C

Soit la suite $U_n$ définie par : $U_n = \int_{\alpha}^{-e} \frac{xln(-x)}{(x+1)^n} dx$ $\forall$ $n \in$ $\mathbb{N}$ et $\mathcal{A}(\alpha) = \int_{\alpha}^{-e} f_1(x)dx$

1) Exprimer $(n-2)U_n - nU_{n+1}$ en fonction de $\alpha$ $et$ $n$

2) En déduire les valeurs de $U_0$ , $U_1 + U_2$ , $U_3$ $et$ $U_4$ en fonction de $\alpha$

3)a) Vérifier que : $\mathcal{A}(\alpha) = -U_1 + ln\left|\frac{1-e}{1+\alpha}\right|$

b) En déduire que : $\mathcal{A}(\alpha) = U_2 - \frac{\alpha^3+3\alpha^2-1}{\alpha+1}$

4)a) Démontrer que : $\frac{(\alpha^2+2\alpha)(\alpha+e)}{(1-e)^2} - \frac{\alpha^3+3\alpha^2-1}{\alpha+1} \leq \mathcal{A}(\alpha) \leq \frac{e(\alpha+e)}{(\alpha+1)^2} - \frac{\alpha^3+3\alpha^2-1}{\alpha+1}$

b) En déduire un encadrement de l'aire du domaine délimité par la courbe$(C_1)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ $et$ $x = -e$

Prof : $Mr$ ABASS-BAWA Taofik

## PROBLEME 4

### Partie A

On considère la fonction $g_k$ de la variable réelle $x$ définie par : $g_k(x) = kx^2 - 2kln(x)$, k étant un paramètre réel non nul.

1) Déterminer l'ensemble de définition $E_k$ de $g_k$

2) Calculer les limites de $g_k$ aux bornes de $E_k$ pour $k > 0$ $et$ $pour$ $k < 0$

3) Calculer la dérivée $g'_k$ de $g_k$

4)a) Etablir le tableau de variation de $g_k$ pour chaque cas

b) En déduire le signe de $g_k(x)$pour $k > 0$ $et$ $pour$ $k < 0$

### Partie B

Soit la fonction numérique $f_k$ de variable réelle $x$ définie par : $f_k(x) = kx + \frac{2k}{x} + \frac{2kln(x)}{x}$ , k étant un paramètre réel non nul. On désigne par $(C_k)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repéré orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $D_k$ de la fonction $f_k$

2) Calculer les limites de $f_k$ aux bornes de $D_k$

3)a) Montrer que la droite $(\Delta_k)$ d'équation $y = kx$ est asymptote à la courbe $(C_k)$ en $+\infty$

b) Etudier la position relative de $(C_k)$ par rapport à $(\Delta_k)$ pour k $> 0$ $et$ $pour$ $k < 0$

4)a) Montrer que $f'_k(x) = \frac{g_k(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de $f_k$ pour $k > 0$ $et$ $pour$ $k < 0$

5)a) On pose $k = 1$. Dresser le tableau de variation de $f_1$

b) Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]0,3\,;0,4[$

6) Construire la courbe $(C_1)$ et la droite $(\Delta_1)$

Partie C

1) Justifier que $f$ $admet\ une\ bijection\ réciproque\ f^{-1}$

2) Soit $\lambda$ un réel de l'intervalle $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$. On désigne par $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en $cm^2$ de la portion du plan délimitée par la courbe $(C_1)$ , $la\ courbe$ $\left(C_{f^{-1}}\right)$ et les droites d'équations $x=\frac{1}{e}$ et $x=\lambda$

a) Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$

b) En déduire la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque $\lambda$ $tend\ vers +\infty$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

## PROBLEME 5

Pour tout nombre réel $k$, on considère la fonction $f_k$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x)=\frac{kx\ln|x|-1}{x}$ et on désigne par $(C_k)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Unité graphique $2cm$

Partie A

1)a) Déterminer l'ensemble de définition $E$ de la fonction $f_k$

b) Etudier suivant le signe de $k$ les limites de $f_k$ aux borne de $E$

c) Quelle est la nature de la courbe $(C_0)$ ?

2) Démontrer que toutes les courbes $(C_k)$ passent par deux points fixes dont on donnera les coordonnées

3)a) Montrer que les courbes $(C_k)$ $et$ $(C_{-k})$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine du repère

b) Etudier suivant le signe de $k$ , la position relative de $(C_k)$ $et$ $(C_{-k})$

4) On suppose que $k$ est non nul.

a) Etudier le sens de variation de $f_k$ puis dresser son tableau de variation suivant les valeurs de $k$

b) Etudier le signe de : $k(1-\ln|k|)$ puis déduire suivant les valeurs de $k$ le nombre de solutions de l'équation $f_k(x)=0$

c)Montrer que si $\alpha$ est solution de l'équation $f_k(x)=0$ alors celle de l'équation$f_{-k}(x)=0$ est$-\alpha$

Partie B

On pose $k=e$ $et$ $k=-e$ . Ainsi $f_e(x)=\frac{ex\ln|x|-1}{x}$ $et$ $f_{-e}(x)=-\frac{ex\ln|x|+1}{x}$

1) Dresser le tableau de variation de $f_e$ $et$ $de$ $f_{-e}$

2) Vérifier que l'équation $f_e(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]1;2[$

3)a) Etudier les branches infinies des courbes $(C_e)$ $et$ $(C_{-e})$

b) Tracer $(C_{-e})$ , $(C_0)$ $et$ $(C_e)$ dans le même repère

**Partie C**

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ , on pose : $I_n = \frac{1}{n-1}\int_e^{e^n} f_e(t)dt \;\; et \;\; J_n = \frac{1}{n-1}\int_{-e}^{-e^n} f_{-e}(t)dt$

1) Montrer que $I_n = J_n$

2)a) A l'aide d'une intégration par partie, calculer $I_n$

b) En déduire l'aire $\mathcal{A}_1$ de la portion du plan délimité par la courbe $(C_e)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e \;\; et \; x = e^2$ et l'aire $\mathcal{A}_2$ de la portion du plan délimite par la courbe $(C_{-e})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -e \; et \; x = -e^2$

3) On pose $t_n = I_n + 1$ pour tout entier naturel $n \geq 2$

a) Montrer que $(t_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Calculer $S = t_2 + t_3 + t_4 + \cdots\cdots + t_n \;\; et \; S' = I_2 + I_3 + I_4 + \cdots\cdots + I_n$ en fonction de $n$

$Prof: Mr \;\; ABASS - BAWA \; Taofik$

**PROBLEME 6**

**PARTIE A**

On considère la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = 2 - (x-1)^2 e^{-x}$

1) Calculer les limites de $\varphi$ en -∞ et en +∞

2)a) Calculer la dérivée $\varphi'(x)$ puis étudier son signe

b) Dresser son tableau de variation

3)a) Montrer l'équation $\varphi(x)$=0 admet une unique solution $\alpha$

b) Vérifier que $-0,3 < \alpha < -0,2$

**PARTIE B**

Soit $f$ la fonction définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(x^2+1\right)e^{-x} + 2x - 2$

On note $(C)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ .Unité graphique : 2cm

1) Déterminer les limites de $f$ en -∞ $et \; en + \infty$

2)a) Démontrer que $f$ est une primitive de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$

b) Etudier le sens de variation de $f$ et dresser son tableau de variation

c) Démontrer que la droite $(D)$ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $(C)$ en +∞

3) Démontrer que $(C)$ admet en -∞ une branche parabolique dont on précisera la direction

4)a) Démontrer que $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{4\alpha}{(\alpha-1)^2}$

b) Montrer que $f(\alpha)$ est négatif

c) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\beta_1 \in ]-0,8; -0,7[$ et $\beta_2 \in ]0,6; 0,7[$

6) Construire $(C)$ et $(D)$

7) Soit $\lambda$ un réel strictement positif et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en $cm^2$ de la partie du plan délimité par $(C)$ , la droite $(D)$ et les droites d'équations $x = \lambda\ et\ x = 0$

a) A l'aide d'une intégration par partie , calculer $\mathcal{A}(\lambda)$

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$

PARTIE C

Soit $h$ la restriction de $f$ à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$

1) Démontrer que $h$ est une bijection sur un intervalle $J$ à préciser

2) Soit $h^{-1}$ la bijection réciproque de $h$

a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de $h^{-1}$, puis dresser son tableau de variation

b) Construire la courbe $(C')$ de $h^{-1}$ dans le même repère que $(C)$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

PROBLEME 7

PARTIE A

On considère la fonction $g_k$ de variable réelle $x$ définie par : $g_k(x) = \frac{1}{x} + k + \frac{ln(kx)}{x}$ où k est un paramètre réel non nul.

1) Déterminer, suivant les valeurs de $k$, l'ensemble de définition $E_k$ de $g_k$

2) Calculer les limites de $g_k$ aux bornes de $E_k$ pour $k > 0$ et pour $k < 0$

3) Calculer la dérivée $g'_k$ de $g_k$

4) Etablir le tableau de variation de $g_k$ pour $k > 0$ et pour $k < 0$

5)a) Démontrer que pour $k > 0$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha_k$ dans l'intervalle $\left]0; \frac{1}{k}\right[$

b) Démontrer que pour $k < 0$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet une unique solution $\beta_k\ dans\ l'intervalle \left]\frac{1}{k}; 0\right[$

c) En déduire le signe de $g_k(x)$ pour $k > 0$ et pour $k < 0$

PARTIE B

Soit la fonction numérique $f_k$ de la variable réelle $x$, définie par :
$f_k(x) = \frac{1}{2}[ln(kx)]^2 + ln(kx) + kx - 1$ où k est un paramètre réel non nul. On désigne par $(C_k)$ la représentation graphique de $f_k$ dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : 2cm

1) Déterminer, suivant les valeurs de $k$, l'ensemble de définition $D_k$ de la fonction $f_k$

2) Calculer les limites de $f_k$ aux bornes de $D_k$ pour $k > 0$ et pour $k < 0$

3)a) Démontrer que : $\forall x \in D_k$ , $f'_k(x) = g_k(x)$
b) En déduire le sens de variation de $f_k$ *et dresser son tableau de variation* dans chaque cas

4) Démontrer que les courbes $(C_k)$ *et* $(C_{-k})$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées

5) Justifier que pour $k > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_k(x)}{x} = 0$ et pour $k < 0$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f_k(x)}{x} = 0$ . Donner un Interprétation des résultats obtenue

6)a) On pose $k = 1$, dresser le tableau de variation de $f_1$

b) Construire les courbes $(C_1)$ *et* $(C_{-1})$ dans le même repère

PARTIE C

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose : $\lambda_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{e}{n}} f_n(x)dx$

1)a) En intégrant par partie, calculer $\lambda_n$

b) En déduire l'aire $\mathcal{A}_1$ du domaine délimité par $(C_1)$ et les droites d'équation $x = 1$ *et* $x = e$

et l'aire $\mathcal{A}_2$ du domaine délimité par $(C_{-1})$ et les droites d'équations $x = -1$ *et* $x = -e$

2) *Pour tout* entier naturel $n$ non nul, on pose : $\beta_n = \frac{1}{\lambda_n}$

a) Démontrer que $\beta_n$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme
b) Calculer en fonction de $n$ : $S_n = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{\lambda_n}$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

## PROBLEME 8

### PARTIE A

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)e^{-\frac{x}{2}}$

1) Calculer les limites de $g$ en $-\infty$ *et* $+\infty$

2)a) Calculer la dérivée $g'(x)$ de $g$ puis étudier son signe

b) Dresser le tableau de variation de $g$

3)a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha_1$ *et* $\alpha_2$

b) Vérifier que $-1,6 < \alpha_1 < -1,5$ et $3,3 < \beta_2 < 3,4$

c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$

### PARTIE B

Soit la fonction $f$ de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + (x+4)e^{-\frac{x}{2}}$

On désigne par $(C)$ la représentation graphique de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique 1cm

1) Calculer les limites de $f$ en $-\infty$ $et$ $en + \infty$

2)a) Montrer que $f$ est une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}$

b) En déduire le sens de variation et le tableau de variation de $f$

3)a) Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à $(C)$ en $+\infty$

b) Etudier la position relative de $(C)$ par rapport à $(\mathcal{D})$

c) Montrer que la courbe $(C)$ admet en $-\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction

4)a) Montrer que $f(\alpha_1) = \frac{1}{2}\alpha_1 + 2 + \frac{2}{\alpha_1+2}$

b) En déduire un encadrement de $f(\alpha_1)$ et $f(\alpha_2)$ à $10^{-2}$ prés

5) Construire la courbe $(C)$ $et$ $la$ $droite$ $(\mathcal{D})$

***PARTIE*** C

Soit $\lambda$ un réel de l'intervalle $]-4; +\infty[$ et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en $cm^2$ de la partie du plan délimité par la courbe $(C)$ , la droite $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x = -4$ $et$ $x = \lambda$

1) A l'aide d'intégration par partie, calculer $\mathcal{A}(\lambda)$

2) Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

## PROBLEME 9

### Partie A

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_1)$: $2y' + y = 0$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

2) On considère l'équation différentielle $(E_2)$: $4y' + 2y = 1 - 2e^{-\frac{x}{2}}$

a) Déterminer deux réels $m$ $et$ $p$ tels que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = m + pxe^{-\frac{x}{2}}$ soit une solution de $(E_2)$

b) Soit $g$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$b_1$) Montrer que $g$ est solution de $(E_2)$ si et seulement si $g - f$ est solution de $(E_1)$

$b_2$) Déduire les solutions de l'équation $(E_2)$

3) Déterminer la solution $g_0$ de $(E_2)$ dont la courbe représentative dans plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admet au point d'abscisse $x_0 = 0$, une tangente parallèle à l'axe des abscisses

**Partie B**

Soit la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -\frac{1}{2}(x+2)e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}$

On désigne par $(C)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Unité graphique : $1cm$.

1)a) Déterminer les limites de $h$ en $-\infty$ *et en* $+\infty$

b) En déduire que la courbe $(C)$ admet une asymptote horizontale $(\Delta)$ dont on donnera l'équation

c) Etudier la position relative de $(C)$ par rapport à $(\Delta)$

2) Calculer la fonction dérivée $h'(x)$ *de* la fonction $h$

3)a) Etudier le sens de variation de la fonction $h$ puis dresser son tableau de variation

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions $\beta_1 \in ]-2; -1[$ *et* $\beta_2 \in ]3; 4[$

4) Montrer que la courbe $(C)$ admet en $-\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction

5) Construire la courbe $(C)$ et $(\Delta)$

6) Déterminer les réels $a$ *et* $b$ tels que la fonction $H: x \longmapsto (ax+b)e^{-\frac{x}{2}}$ soit une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}(x+2)e^{-\frac{x}{2}}$

7) Soit $\alpha \in ]-2; +\infty[$ *et* $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire en $cm^2$ de la portion délimité par la courbe $(C)$, *l'axe* des abscisses, l'asymptote horizontale $(\Delta)$ et les droites d'équations $x = -2$ *et* $x = \alpha$

a) Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$

b) En déduire la valeur de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque $\alpha$ tend vers $+\infty$

**Partie C**

On considère la suite $(U_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par : $U_n = \int_{n+2}^{n+3} h(t)dt$

1) Calculer $U_2$ *et* $U_3$

2)a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2, U_{n-2} = \int_{n+2}^{n+3} h(t-2)dt$

b) En déduire *que* $\forall n \geq 2, U_{n-2} - eU_n = 2\left(e^{-\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n+1}{2}}\right) + \frac{1}{2}(1-e) \quad (1)$

c) En déduire les valeurs de $U_0$ *et* $U_1$

3)a) Calculer $U_{n+1} + U_{n+2}$ en fonction de $n$

**b) En utilisant l'égalité$(1)$, calculer $S = U_2 + U_3 + U_4 + \cdots\cdots + U_n$ puis $\lim_{n\to\infty} S$**

**4)a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2, h(n+2) \leq U_n \leq h(n+3)$**

**b) En déduire le sens de variation de $U_n$**

**c) La suite $(U_n)$ est-elle convergente ?**

**d) Si une suite est convergente, peut-on conclure sur la convergence de la somme de ses termes ?**

**Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik**

## **PROBLEME** 10

### **PARTIE A**

**Soit la fonction $g_k$ de la variable réelle $x$ définie par : $g_k(x) = (kx - 1)e^{kx} - k$**

**Où $k$ est un paramètre réel non nul.**

**1) Calculer les limites de $g_k$ en $-\infty$ $et$ $en +\infty$ pour $k > 0$ $et$ $pour$ $k < 0$**

**2) Calculer la dérivée $g'_k$ de $g_k$**

**3) Etablir le tableau de variation de $g_k$ pour $k > 0$ $et$ $pour$ $k < 0$**

**4)a) Montrer que pour $k \leq -1$, $g_k(x) \geq 0$**

**b) Montrer que pour$-1 < k < 0$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet exactement deux solutions de signe contraire $\alpha_k$ $et$ $\beta_k$. $(\alpha_k < \beta_k)$**

**c) Montrer que pour$k > 0$, l'équation $g_k(x) = 0$ admet une solution unique positive $\lambda_k$**

**d) En déduire de tout ce qui précède, le signe de $g_k(x)$ suivant les valeurs de $k$**

### **PARTIE B**

**Soit la fonction numérique $f_k$ de la variable réelle $x$ définie par : $f_k(x) = 1 - kx + \left(x - \frac{2}{k}\right)e^{kx}$**

**Où $k$ est un paramètre réel non nul. On désigne par $(C_k)$ la représentation graphique de $f_k$ dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : 1cm**

**1) Calculer les limites de $f_k$ en $-\infty$ $et$ $en +\infty$ pour $k > 0$ $et$ $pour$ $k < 0$**

**2)a) Montrer que la droite $(\mathcal{D}_k)$ d'équation $y = -kx + 1$ est asymptote à $(C_k)$ en $-\infty$ pour $k > 0$ et en $+\infty$ pour $k < 0$**

**b) Etudier la position relative de $(C_k)$ par rapport à $(\mathcal{D}_k)$**

**c) Montrer que la courbe $(C_k)$ admet une branche parabolique $en -\infty$ pour $k < 0$ et en $+\infty$ pour $k > 0$ dont on précisera la direction**

**3)a) Montrer que $f_k$ est une primitive de $g_k$ sur $\mathbb{R}$**

b) En déduire suivant les valeurs de $k$, le tableau de variation de $f_k$

4) On pose $k = 1$ ainsi $g_1(x) = (x-1)e^x - 1$ et $f_1(x) = 1 - x + (x-2)e^x$

a) Dresser le tableau de variation de $f_1$

b) Vérifier que $1,2 < \lambda_1 < 1,3$

c) Montrer que $f_1(\lambda_1) = 2 - \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1 - 1}$

d) En déduire que $f_1(\lambda_1)$ est négatif

e) Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\gamma_1 \in ]-0,6;-0,5[$ et $\gamma_2 \in ]2,1;2,2[$

5) Construire $(\mathcal{D}_1)$ et $(C_1)$

6) Soit $\lambda$ un réel de l'intervalle $]-\infty;2[$ et $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimité par $(C_1)$, la droite $(\mathcal{D}_1)$ et les droites d'équations $x = \lambda$ $et$ $x = 2$

a) A l'aide d'intégration par partie, calculer $\mathcal{A}(\lambda)$

b) Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque $\lambda$ tend vers $-\infty$

**PARTIE C**

Soit $h$ la restriction de $f_1$ à l'intervalle $]-\infty;\lambda_1]$

1) Démontrer que $h$ est une bijection sur intervalle $K$ à préciser

2) Soit $h^{-1}$ la bijection réciproque de $h$

a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de $h^{-1}$, puis donner son sens de variation

b) Construire la courbe $(C)$ de $h^{-1}$ dans le même repère que $(C_1)$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

## PROBLEME 11

**PARTIE A**

On considère la fonction $\varphi_k$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $\varphi_k(x) = -1 + k^2x^2 - 2lnx$ où $k$ est un paramètre réel non nul.

1) Calculer les limites de $\varphi_k$ en zéro et en $+\infty$

2)a) Calculer la dérivée $\varphi'_k$ de $\varphi_k$, puis étudier son signe pour $k < 0$ $et\ pour$ $k > 0$
b) Etablir le tableau de variation de $\varphi_k$ pour chaque cas

3)a) Montrer que $pour$ $k \in ]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$, $\varphi_k(x) \geq 0$

b) Montrer que pour $-1 < k < 0$, l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha_1$ $et$ $\alpha_2$ . $(\alpha_1 < \alpha_2)$

c) Montrer que pour $0 < k < 1$, l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\beta_1$ $et$ $\beta_2$ . $(\beta_1 < \beta_2)$

4) En déduire de tout ce qui précède le signe de $\varphi_k(x)$

PARTIE B

Soit la fonction numérique $f_k$ de la variable réelle $x$ définie par : $f_k(x) = -1 + kx + \frac{3+2lnx}{kx}$ où $k$ est un paramètre réel non nul.

On désigne par $(C_k)$ la représentation graphique de $f_k$ dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 1cm

1) Déterminer l'ensemble de définition $D_k$ de la fonction $f_k$

2) Calculer aux bornes de $D_k$ les limites de $f_k$ pour $k < 0$ $et\ pour$ $k > 0$

3)a) Montrer que $\forall x \in ]0; +\infty[$ , $f'_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{kx^2}$

b) En déduire le signe de $f'_k$ suivant les valeurs de $k$

c) Dresser le tableau de variation $f_k$ pour chaque cas

4)a) Montrer que la droite $(\mathcal{D}_k)$ d'équation $y = kx - 1$ est asymptote à $(C_k)$ en $+\infty$

b) Etudier la position relative de $(C_k)$ par rapport à $(\mathcal{D}_k)$ pour $k < 0$ $et\ pour$ $k > 0$

5) On pose $k = \frac{1}{2}$

a) Donner les expressions de $\varphi_{\frac{1}{2}}(x)$ et $f_{\frac{1}{2}}(x)$

b) Dresser le tableau de variation de $f_{\frac{1}{2}}$

c) Vérifier que $0,6 < \beta_1 < 0,7$ et $3,8 < \beta_2 < 3,9$

6) Construire la courbe $\left(C_{\frac{1}{2}}\right)$ et ses asymptotes

7) Soit $\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2)$ l'aire en $cm^2$ de la partie du plan délimité par la courbe $\left(C_{\frac{1}{2}}\right)$, la droite $\left(\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}\right)$ et les droites d'équations $x = \beta_1$ $et$ $x = \beta_2$

a) Calculer $\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2)$

b) En déduire que $\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{32}(\beta_2^2 - \beta_1^2)(\beta_2^2 + \beta_1^2 + 16)cm^2$

PARTIE C

Soit $h$ la restriction de $f_{\frac{1}{2}}$ à l'intervalle $[\beta_2; +\infty[$

1) Montrer que $h$ est une bijection de $[\beta_2; +\infty[$ sur un intervalle $J$ à préciser

2) Soit $h^{-1}$ la bijection réciproque de $h$

a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de $h^{-1}$ puis dresser son tableau de variation

b) Construire la construire la courbe $(C)$ de $h^{-1}$ dans le même repère que $\left(C_{\frac{1}{2}}\right)$

Prof: $Mr\ ABASS - BAWA$ Taofik

## PROBLEME 12

Pour tout entier naturel $n$ , on considère la fonction $f_n$ définie par : $f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$

On désigne par $(C_n)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Unité graphique : 2cm

**PARTIE A**

Dans cette partie, on s'intéresse seulement aux fonctions $f_0$ $et$ $f_1$ correspondant respectivement à $n = 0 = et\, n = 1$

On considère d'abord la fonction $f_0$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

1)a) Déterminer les limites de $f_0$ aux bornes de son ensemble de définition

b) En déduire les asymptotes de $(C_0)$

2) Montrer que le point $K\left(0;\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $(C_0)$

3) Dresser le tableau de variation de $f_0$

4)a) Justifier que, pour étudier la position relative de la tangente $(T)$ par rapport à la courbe $(C_0)$, il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de la fonction $g$ $définie\ par$: $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$

b) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ puis déduire les signes de $g'(x)$, $g''(x)$ et $g(x)$

c) En déduire la position relative de la tangente $(T)$ par rapport à la courbe $(C_0)$

5) Tracer $(C_0)$ $et$ $(T)$

6)a) Démontrer que les courbes $(C_0)$ et $(C_1)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation$y = \frac{1}{2}$

b) Tracer la courbe $(C_1)$ dans le même repère que $(C_0)$

**PARTIE B**

Dans cette partie, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2

1)a) Calculer la limite de $f_n$ en $-\infty$ $et\ en + \infty$

b) Donner une interprétation graphique des résultats

2)a) Montrer que pour tout nombre réel $x$ , $f'_n(x) = \frac{1-n-ne^x}{e^{(n-1)x}(1+e^x)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de $f_n$

3) Etudier la position relative des courbes $(C_n)$ $et$ $(C_{n+1})$

4) Démontrer que toutes les courbes $(C_n)$ passent par un point fixe dont on précisera les coordonnées

5) Tracer $(C_2)$ dans le même repère que $(C_1)$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

## PROBLEME 13

### PARTIE A

On considère la fonction $f_k$ définie par : $\begin{cases} f_k(x) = 1 + x + kxln(|x|) \ si \ \ x \neq 0 \\ f_k(0) = 1 \end{cases}$ où $k$ est un paramètre réel.

On désigne par $(C_k)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $E_k$ de la fonction $f_k$

2) Quelle est la nature de $(C_0)$ ?

3) Etudier la continuité de $f_k$ en 0

4) Etudier la dérivabilité de $f_k$ en 0, puis donner une interprétation graphique du résultat

5) Montrer que le point $A(0; 1)$ est un centre de symétrie de la courbe $(C_k)$

### PARTIE B

Dans cette partie, on suppose que $k$ est non nul.

1) Calculer les limites de $f_k$ aux bornes de $E_k$ pour $k > 0 \ et \ pour \ k < 0$

2)a) Montrer que pour tout $x \neq 0, f'_k(x) = 1 + k + kln(|x|)$

b) En déduire le sens de variation de $f_k$ pour $k > 0 \ et \ pour \ k < 0$

c) Dresser le tableau de variation de $f_k$ pour chaque cas

3) Etudier les branches infinies de la courbe $(C_k)$ suivant les valeurs de $k$

4) Montrer que toutes les courbes $(C_k)$ passent par trois points fixes dont on donnera les coordonnées

5) On pose $k = -1$ , ainsi $f_{-1}(x) = 1 + x - xln(|x|)$

a) Dresser le tableau de variation de $f_{-1}$

b) Montrer que l'équation $f_{-1}(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[3; 4]$

c) Construire la courbe $(C_{-1})$

6) Soit la fonction $\varphi$ définie sur $I = [3; 4]$ par : $\varphi(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$

a) Etudier le sens de variation de $\varphi$ sur $[3; 4]$

b) En déduire que, pour tout $x \in I, \varphi(x) \in I$

c) Montrer que $\forall x \in I, |\varphi'(x)| \leq \frac{4}{9}$

7) Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ est équivalente à l'équation $f_{-1}(x) = 0$

**PARTIE C**

Pour tout entier naturel $n$, on définit la suite $(U_n)$ par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \varphi(U_n) \end{cases}$

1) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $U_n \in [3; 4]$

2)a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|U_n - \alpha|$

b) En déduire que pour tout entier naturel $n$ , $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

c) Déterminer la valeur $n_0$ $de$ $n$ pour laquelle $U_{n_0}$ est une valeur approchée de $\alpha$ à $4.10^{-2}$ près

d) Déterminer cette valeur approchée de $\alpha$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

## PROBLEME 14

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on définit sur $[0; +\infty[$ la fonction numérique $f_n$ par :

$\begin{cases} f_n(x) = x(lnx)^n \ \ si\ x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$ et $(C_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(unité\ graphique: 1cm)$

**PARTIE A**

1)a) Calculer la limite de $f_n$ en $+\infty$

b) Calculer la limite en $+\infty$ $de$ $\frac{f_n(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique

2) Montrer que toutes les courbes $(C_n)$ passent par trois points fixes dont on donnera les coordonnées

3)a) Montrer que $\forall\ x > 0$ , $f'_n(x) = (lnx)^{n-1}(lnx + n)$

b) Donner le signe de $f'_n(x)$ puis le sens de variation de $f_n$ suivant la parité de n

c) En déduire le tableau de variation de $f_n$ suivant la parité de n

4) Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $[0 ; +\infty[$ la fonction $g_n$ par :

$g_n(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$

a) Etudier le signe de $g_n(x)$ et en déduire la position relative des courbes $(C_n)$ et $(C_{n+1})$

b) Tracer les courbes $(C_1)$ $et$ $(C_2)$ dans un même repère

**PARTIE B**

**On pose :** $\mathcal{A}(n) = \int_1^e f_n(x)dx$ **et** $U_n = \int_1^e f_n(x)dx - \frac{1}{2}e^2$

**1) Donner une interprétation de** $\mathcal{A}(n), \mathcal{A}(1)$ *et* $\mathcal{A}(2)$

**2)a) Calculer** $U_0$

**b) Montrer que** $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_n = -\frac{n}{2}U_{n-1}$

**C) En déduire les valeurs de** $U_1, U_2, U_3$ **et** $U_4$

**3)a)Démontrer que** $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = n!\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

**b) En déduire l'expression de** $\mathcal{A}(n)$ **et les valeurs de** $\mathcal{A}(1)$ *et* $\mathcal{A}(2)$ **en**

**Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik**

## PROBLEME 15

**On considère la fonction** $f$ **définie par :** $f(x) = ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) + x - 1$

**PARTIE A**

**Soit la fonction** $g$ *définie* **sur** $]1; +\infty[$ **par :** $g(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + 1$

**1) Etudier les variations de g**
$(Dg, \textit{les limites aux bornes de } Dg, \textit{dérivée}, \textit{sens de variation et tableau de variation})$

**2) Calculer** $g(\sqrt{2})$**puis en déduire le signe de** $g(x)$ **sur** $]1; +\infty[$ **suivant les valeurs de** $x$

**PARTIE B**

**1)**$a)$ *Montrer que* $Df = [1; +\infty[$ *puis calculer* $f(1)$

**b) Calculer la limite de** $f$ *en* $+\infty$ $\left(\textit{On pourra poser } X = x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$

**2)a) Etudier la dérivabilité de** $f$ *en* $1$

**b) Donner une interprétation analytique et géométrique du résultat obtenu**

**3)a) Démontrer que :** $\forall x \in ]1; +\infty[, f'(x) = g(x)$

**b) En déduire de tout ce qui précède le tableau de variation de** $f$

**c)** *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une unique solution* $\beta \in \left[\frac{13}{5}; \frac{27}{10}\right]$

**4) Etudier la branche infinie de** $f$ *en* $+\infty$

**5) Construire la courbe** $(C_f)$ **et la droite** $(\Delta)$ *d'équation* $y = x$

**6) Soit la fonction** $\varphi$ **définie sur** $I = \left[\frac{13}{5}; \frac{27}{10}\right]$ **par :** $\varphi(x) = \frac{e^{(x-1)} + e^{-(x-1)}}{2}$

**a) Etudier les variations de** $\varphi$ **sur** $I$

b) En déduire que pour tout $x \in I$ , $\varphi(x) \in I$

c) Démontrer que pour $tout$ $x \in I$ , $|\varphi'(x)| \leq \frac{27}{10}$

d) Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ est équivalente à l'équation $f(x) = 0$

<u>PARTIE</u> C

Pour tout entier naturel $n$ , on définit la suite $(W_n)$ par : $\begin{cases} W_0 = \frac{13}{5} \\ W_{n+1} = \varphi(W_n) \end{cases}$

1)a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, W_n \in \left[\frac{13}{5}; \frac{27}{10}\right]$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |W_{n+1} - \beta| \leq \frac{27}{10}|W_n - \beta|$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |W_n - \beta| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{27}{10}\right)^n$

2)a) Déterminer la valeur $n_0$ de $n$ pour laquelle $W_{n_0}$ est une valeur approchée de $\beta$ à $3.10^{-1}$ près

b) Calculer $W_{n_0}$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

## <u>PROBLEME</u> 16

<u>PARTIE</u> A

Soit $g$ la fonction définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right[$ par $g(x) = -4x + \sqrt{1 - 4x^2}$ et $h$ la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par $h(x) = 4x + \sqrt{4x^2 - 1}$

1)a) Résoudre l'équation : $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[, g(x) = 0$

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\left[0; \frac{1}{2}\right[$

2) Justifier que : $\forall x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, h(x) > 0$

<u>PARTIE</u> B

Soit $f$ la fonction définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}\sqrt{|1 - 4x^2|}$

On désigne par $(\Gamma)$ $sa\ courbe$ représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de $D$ de la fonction $f$

b) Etudier la parité de $f$ puis déduire un ensemble d'étude $E$ de la fonction $f$

2) On pose $E = [0; +\infty[$

a) Exprimer $f(x)$ sans symbole de valeur absolue sur l'intervalle $E$

b) Déterminer les limites de $f$ aux bornes de $E$

c) Etudier la dérivabilité de $f$ en $\frac{1}{2}$ puis donner une interprétation géométrique du résultat

3)a) Démontrer que : $f'(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{2\sqrt{1-4x^2}} \; si \; x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[ \\ \frac{h(x)}{2\sqrt{4x^2-1}} \; si \; x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[ \end{cases}$

b) En déduire le sens de variation de $f$ sur $E$

c) Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$

4)a) Démontrer que la droite $(\Delta_1)$ d'équation $y = \frac{3}{2}x$ est asymptote abdique à $(\Gamma)$ en $+\infty$

b) En déduire l'équation de l'asymptote oblique $(\Delta_2)$ à $(\Gamma)$ en $-\infty$

5) Construire la courbe $(\Gamma)$ et ses asymptotes

**PARTIE C**

Soit $\varphi$ la restriction de $f$ à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

1) Montrer que $\varphi$ est une bijection de $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ sur un intervalle $K$ à préciser

2) Déterminer l'expression explicite de sa bijection réciproque $\varphi^{-1}$

3)a) Donner les caractéristiques de $\varphi^{-1}$ puis dresser son tableau de variation

b) Construire la courbe $(\Gamma')$ de $\varphi^{-1}$ dans le même repère que $(\Gamma)$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

## PROBLEME 17

**PARTIE A**

Soit la fonction $g$ définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + 2 + ln(-x)$

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g$

b) Déterminer les limites$g$ aux bornes de son ensemble de définition

2)a) Calculer la dérivée de $g$ puis étudier son signe

b) Dresser le tableau de variation de $g$

3)a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha$ $et$ $\beta (\alpha < \beta)$

b) Vérifier que : $-3,2 < \alpha < -3,1$ $et$ $-0,2 < \beta < -0,1$

c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$

**PARTIE B**

Soit la fonction $f$ définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{xln(-x)}{x+1}$

On désigne par $(C)$ sa courbe représentative dans plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$

b) Calculer les limite de $f$ aux bornes de son ensemble de définition

c) Montrer que : $f(\alpha) = -1 - \alpha \; et \; f(\beta) = -1 - \beta$

2)a) Démonter que : $\forall x \in Df,\; f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) En déduire le signe de $f'$ puis dresser le tableau de variation de $f$

c) Montrer que $(C)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe $(0I)$

3) Tracer la courbe $(C)$

**Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik**

## PROBLEME 18

### PARTIE A

On considère la fonction $g$ définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 2 - 2ln|x|$

1) Etudier les variations de $g$

2)a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha \; et \; \beta (\beta < \alpha)$

b) Vérifier que $1,2 < \alpha < 1,3$ et que $\beta = -\alpha$

c) En déduire suivant les valeurs de $x$, le signe de $g(x)$

### PARTIE B

Soit $f$ la fonction définie $de$ $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - x + \frac{2ln|x|}{x}$

On désigne par $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique 2cm

1)a) Calculer la limite de $f$ en zéro puis donner une interprétation graphique

b) Calculer la limite de $f$ en $+\infty$ et en -∞

c) Montrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $(C)$

d) Etudier la position relative de $(C)$ par rapport à $(\Delta)$

2) Etudier la dérivabilité de $f$ en $0$

3)a) Montrer que pour tout $x \neq 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire le sens de variation de $f$ puis dresser son tableau de variation

4)a) Montrer que $f(\alpha) = 2 - 2\alpha + \frac{2}{\alpha}$ et $f(\beta) = -f(\alpha) + 4$

b) Montrer que $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont positifs

c) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions positives

5)a) Calculer les coordonnées du point $A$ de $(C)$ où la tangente est parallèle à $(\Delta)$

b) Donner une équation de cette tangente $(T)$

6) Tracer $(\Delta)$ , $(T)$ $et$ $(C)$

7) Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe $(C)$ , la droite $(\Delta)$ et les droite d'équation $x = \alpha$ $et$ $x = e$.

a) $Calculer$ $\mathcal{A}(\alpha)$

b) En déduire que $\mathcal{A}(\alpha) = \left(-\alpha^4 + 4\alpha^2\right)cm^2$

PARTIE C

Soit $\varphi$ la restriction de $f$ à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$

1)a) Montrer que $\varphi$ définie une bijection de $[\alpha; +\infty[$ sur un intervalle à préciser

b) Préciser l'ensemble de dérivabilité de $\varphi^{-1}$

c) Donner le sens de variation de $\varphi^{-1}$ puis dresser son tableau de variation

2) Tracer la courbe $(C')$ de $\varphi^{-1}$ dans le même repère que $(C)$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

## PROBLEME 19

PARTIE A

Soient $g$ $et$ $h$ deux fonctions à variable réelle $x$ définie par :
$g(x) = 2x + \sqrt{4x^2 - 1}$ et $h(x) = -2x + \sqrt{1 - 4x^2}$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $g(x) \leq 0$

b) $h(x) \geq 0$

2) En déduire le signe de $g(x)$ $et$ $le$ $signe$ $de$ $h(x)$ sur leur ensemble de définition respectif

PARTIE B

Soit la fonction $f$ à variable réelle $x$ définie par : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{|4x^2 - 1|}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de $f$ puis exprimer $f(x)$ sans symbole de valeur absolue

2) Etudier la dérivabilité de $f$ en $-\frac{1}{2}$ $et$ $\frac{1}{2}$. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu

3)a) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition

b) En déduire que $(Cf)$ admet une asymptote horizontale en -∞ dont on précisera l'équation

c) Montrer que la courbe $\left(C_f\right)$ admet une asymptote oblique $(D)$ en +∞ dont on donnera l'équation

4)a) Montrer que : $f'(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{\sqrt{4x^2-1}} & si\ x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[ \\ \frac{h(x)}{\sqrt{1-4x^2}} & si\ x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[ \end{cases}$

b) En déduire de la partie A-2) le tableau de variation de $f$

5) Tracer la courbe $(C_f)$ et ses asymptotes dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

**PARTIE C**

Soit $\lambda$ un réel de l'intervalle $\left[\frac{5}{8}; +\infty\right[$

On pose : $K = \int_{\frac{5}{8}}^{\lambda} \sqrt{4x^2-1}\, dx$ et $I = \int_{\frac{5}{8}}^{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}$

1) Montrer que fonction $\Psi$ définie sur $\left[\frac{5}{8}; +\infty\right[$ par : $\Psi(x) = \frac{1}{2} ln\left(2x + \sqrt{4x^2-1}\right)$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}$

2) En déduire les valeurs exactes de $I$ et $K$

3)a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine délimité par la courbe $(C_f)$, la droite $(D)$ et les droites d'équations $x = \frac{5}{8}$ et $x = \lambda$

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

## PROBLEME 20

**PARTIE A**

On considère la fonction $\varphi$ définie sur $]0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = -1 + \frac{1}{4}x^2 - 2lnx$

1) Calculer les limites de $\varphi$ en zéro et en $+\infty$

2)a) Calculer la dérivée $\varphi'$ de $\varphi$, puis étudier son signe
b) Etablir le tableau de variation de $\varphi_k$ pour chaque cas

3)a) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\beta_1$ et $\beta_2 (\beta_1 < \beta_2)$

b) Vérifier que $0,6 < \beta_1 < 0,7$ et $3,8 < \beta_2 < 3,9$

c) En déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de $x$

**PARTIE B**

Soit la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = -1 + \frac{x}{2} + \frac{6+4lnx}{x}$

On désigne par $(C)$ la représentation graphique de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 1cm

1) Déterminer l'ensemble de définition $D$ de la fonction $f$

2) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition

3)a) Montrer que $\forall x \in ]0;+\infty[$, $f'(x) = 2\frac{\varphi(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation $f$

4)a) Montrer que la droite $(D)$ d'équation $y = \frac{1}{2}x - 1$ est asymptote à $(C)$ en $+\infty$

b) Etudier la position relative de $(C)$ par rapport à $(D)$

6) Construire la courbe $(C)$ et ses asymptotes

7) Soit $\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2)$ l'aire en $cm^2$ de la partie du plan délimité par la courbe $(C)$, la droite $(D)$ et les droites d'équations $x = \beta_1$ $et$ $x = \beta_2$

a) Calculer $\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2)$

b) En déduire que $\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{32}(\beta_2^2 - \beta_1^2)(\beta_2^2 + \beta_1^2 + 16)cm^2$

PARTIE C

Soit $h$ la restriction de $f$ à l'intervalle $[\beta_2; +\infty[$

1) Montrer que $h$ est une bijection de $[\beta_2; +\infty[$ sur un intervalle $J$ à préciser

2) Soit $h^{-1}$ la bijection réciproque de $h$

a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de $h^{-1}$ puis dresser son tableau de variation

b) Construire la construire la courbe $(C')$ de $h^{-1}$ dans le même repère que $(C)$

Prof: $Mr\ ABASS - BAWA$ Taofik

## PROBLEME 21

PARTIE A

On considère la fonction $g$ définie par : $g(x) = -1 + x^2 - 2ln|x|$

1)a) Déterminer l'ensemble de définition $D$ $de\ la\ fonction\ g$

2)a) Calculer la dérivée $g'$ de $g$ puis étudier son signe

b) Etablir le tableau de variation de $g$

c) En déduire le signe de $g(x)$

PARTIE B

Soit la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = -1 + x + \frac{3+2ln|x|}{x}$

On désigne par $(C)$ la représentation graphique de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique 1cm

1) Déterminer l'ensemble de définition $E$ de la fonction $f$

2) Calculer les limites de $f$ aux bornes de $E$

3)a) Montrer que pour tout $x \neq 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de $f$

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha \; et \; \beta (\alpha < \beta)$

d) Vérifier que $-0,2 < \alpha < -0,1 \; et \; 0,2 < \beta < 0,3$

4)a) Montrer que la droite $(D)$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(C)$

b) Etudier la position relative de $(C)$ par rapport à $(D)$

5) Construire la courbe $(C)$ et ses asymptotes

<u>PARTIE</u> C

Soit $h$ la restriction de $f$ à $l'intervalle$ $]-\infty; 0[$

1) Montrer que $h$ est une bijection de $]-\infty; 0[$ sur $\mathbb{R}$

2) Soit $h^{-1}$ la bijection réciproque de $h$

a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de $h^{-1}$ puis dresser son tableau de variation

b) Construire la courbe $(C\,')$ de $h^{-1}$ dans le même repère que $(C)$

3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en $cm^2$ de la portion du plan délimitée par la courbe $(C')$, l'axe des abscisse , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -5$

Démontrer que $\mathcal{A} = \left(\frac{1}{4}\alpha^4 - \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{3}{4}\alpha^2 - \alpha + \frac{5}{4}\right) cm^2$

Prof: $Mr \; ABASS - BAWA$ Taofik

<u>PROBLEME</u> 22

<u>PARTIE</u> A

On considère la fonction $g$ de variable réelle $x$ définie par : $g(x) = \frac{1}{x} - 1 + \frac{ln(-x)}{x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition $D$ de $g$

2) Calculer les limites de $g$ aux bornes de $D$

3) Calculer la dérivée g' de g

4) Etablir le tableau de variation de g

5)a) b) Démontrer que , l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \; dans$ $]-0,3; -0,2[$

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$

<u>PARTIE</u>

Soit la fonction $f \; définie \; par :$ $f(x) = \frac{1}{2}[ln(-x)]^2 + ln(-x) - x - 1$

On désigne par $(C)$ la représentation graphique de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\iota}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : 2cm

1) Déterminer l'ensemble de définition $E$ de la fonction $f$

2) Calculer les limites de $f$ aux bornes de $E$

3)a) Démontrer que : $\forall x \in E, f'(x) = g(x)$
b)En déduire le sens de variation de $f$ $et\ dresser\ son\ tableau\ de\ variation$

4) $Calculer$ $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Donner une Interprétation du résultat obtenu

5)a) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha - 3)(\alpha + 1)$

b) Donner un encadrement de $f(\alpha)$

c) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\beta_1\ et\ \beta_2$ $(\beta_1 < \beta_2)$

d) Vérifier que $\beta_1 = -1\ et\ \beta_2 \in \left]-\frac{1}{2}; 0\right[$

6) Construire la courbe $(C)$

<u>PARTIE</u> C

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose : $\beta_n = -2\int_{-e^n}^{-1} f(x)dx$

1) A l'aide d'une intégration par partie, calculer $\beta_n$

2) On pose : $\lambda_n = \beta_n - n^2e^n$

a) Calculer $\lambda_1$ , $\lambda_2\ et\ \lambda_3$

b) La suite $(\lambda_n)$ est –est arithmétique ?géométrique ?

3) On pose : $S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n$

a) Exprimer $S$ en fonction de $n$

b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} S$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

## <u>PROBLEME</u> 23

<u>PARTIE</u> A

On considère la fonction $g_n$ d'une variable réelle $x$, définie par : $g_n(x) = \frac{nln|x|-1}{x}$, où $n$ est un entier naturel supérieur ou égale à 2.

1) Déterminer l'ensemble de définition $D_n$ de la fonction $g_n$

2) Calculer les limites de $g_n$ aux bornes de son ensemble de définition

3)a) Calculer la fonction dérivée $g'_n$ de la fonction $g_n$

b) Donner le sens de variation de $g_n$ puis dresser son tableau de variation

4)a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet exactement deux $solutions\ \alpha\ et\ \beta(\beta < \alpha)$

b) Vérifier que $\alpha \in \left]1; e^{1+\frac{1}{n}}\right[$ et que $\beta = -\alpha$

c) En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de $x$

**PARTIE B**

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit la fonction $f_n$ d'une variable réelle $x$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n ln|x| - \frac{2}{n}x^n\ si\ x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(C_n)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1) Déterminer l'ensemble de définition $E_n$ de la fonction $f_n$

2) Calculer les limites de $f_n$ aux bornes de son ensemble de définition

3)a) Etudier la continuité de $f_n$ en zéro

b) Etudier la dérivabilité de $f_n$ en zéro

4)a) Montrer que $\forall x \in E_n$ , $f'_n(x) = x^n g_n(x)$

b) En déduire le tableau de variation de $f_n$ pour $n$ paire et pour $n$ impaire

5) On pose : $n = 2$

a) Dresser le tableau de variation de $f_2$

b) Etudier les branches infinies de $f_2$

c) Construire la courbe $(C_2)$

**PARTIE C**

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit la suite $(\beta_n)$ par : $\beta_n = \int_{-e^{\frac{1}{n+1}}}^{e^{\frac{1}{n+1}}} f_n(x)dx$

1) Sans aucun calcul, justifier que si $n$ est impaire, alors $\beta_n = 0$

2)a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $\beta_n = -\frac{2e}{n(n+1)}[1 + (-1)^n]$

b) Calculer $\beta_2$ , $\beta_3$ , $\beta_4$ $et$ $\beta_5$

3) On pose : $\lambda_n = \beta_{2n}$ et $P_n = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \times \ldots \times \lambda_n$

a) Calculer $\lambda_1$ , $\lambda_2$, $\lambda_3$ $et$ $\lambda_4$

b) Exprimer $P_n$ en fonction de $n$

c) Calculer la limite de $P_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

## PROBLEME 24

### PARTIE A

**1) Résoudre l'équation différentielle $(E_1): y' + y = 0$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$**

**2) On considère l'équation différentielle $(E_2): y' + y = e^{x-1}$**

**a) Déterminer un nombre réel $m$ tel que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = me^{x-1}$ soit une solution de $(E_2)$**

**b) Soit $g$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$**

**$b_1$) Montrer que $g$ est solution de $(E_2)$ si et seulement si $g - f$ est solution de $(E_1)$**

**$b_2$) Déduire les solutions de l'équation $(E_2)$**

**3) Déterminer la solution $g_0$ de $(E_2)$ dont la courbe représentative dans plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admet au point d'abscisse $x_0 = 1$, une tangente parallèle à l'axe des abscisses**

### PARTIE B

**Soit la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{e^{(x-1)} + e^{-(x-1)}}{2}$**

**On désigne par $(C)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : $2cm$.**

**1)a) Déterminer les limites de $h$ en $-\infty$ $et$ $en + \infty$**

**b) Etudier les branches infinies de la fonction $h$ en $-\infty$ $et$ $en + \infty$**

**2) Calculer la fonction dérivée $h'(x)$ $de$ la fonction $h$**

**3) Etudier le sens de variation de la fonction $h$ puis dresser son tableau de variation**

**4) Construire la courbe $(C)$**

### PARTIE C

**Soit $\varphi$ la restriction de $h$ à l'intervalle $[1; +\infty[$**

**1)a) Montrer que $\varphi$ définie une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle à préciser**

**b) Préciser l'ensemble de dérivabilité de $\varphi^{-1}$**

**c) Donner le sens de variation de $\varphi^{-1}$ puis dresser son tableau de variation**

**2) Tracer la courbe $(C')$ de $\varphi^{-1}$ dans le même repère que $(C)$**

**3) Calculer en $cm^2$, $l'aire\ \mathcal{A}$ de la portion du plan délimitée par la courbe $(C')$, l'axe des abscisse et les droites** d'équations $x = \frac{e^4 + e^{-4}}{2}$ $et$ $x = 1$

4) Déterminer l'expression explicite de $\varphi^{-1}$

5) Soit l'intégrale $K = \int_{1}^{\frac{e^4+e^{-4}}{2}} ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) dx$

a) A l'aide d'une intégration par partie, calculer $K$

b) Retrouver la valeur de l'aire $\mathcal{A}$ de la question 3)

Prof : Mr ABASS-BAWATao

**PROBLEME 25**

**PARTIE A**

Soit la fonction $\varphi(x) = 1 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi$

b) Déterminer les limites de $\varphi$ aux bornes de son ensemble de définition

2)a) Calculer la dérivée $\varphi'$de la fonction $\varphi$

b) Dresser le tableau de variation de $\varphi$

3)a) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]0,7; 0,8[$

b) En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$

4)a) Déterminer une fonction $\Psi$ telle que pour tout $x \neq 0, \varphi(-x) + \Psi(x) = 2$

b) Vérifier que pour tout $x \neq 0$ , $\Psi'(x) = \varphi(-x)$ puis dresser le tableau de variation de $\Psi$

c) En déduire le signe de $\Psi(x)$ sur l'intervalle $]-\infty; 0[$

**PARTIE B**

Soit la fonction $f$ définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 + |x|e^{\frac{1}{|x|}}$

1)a)Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$

b) Exprimer $f$ sans symbole de valeur absolue

2) Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son l'ensemble de définition

3)a) Montrer que $f'(x) = \begin{cases} \varphi(x) \ si \ x \in ]0; +\infty[ \\ \Psi(x) \ si \ x \in ]-\infty; 0[ \end{cases}$

b) En déduire le tableau de variation de $f$

4)a) Montrer que la droite $(\Delta)$ :$y = 2x$ est une branche parabolique à la courbe $\left(C_f\right)$ en $+\infty$

b) Montrer que la courbe $\left(C_f\right)$ admet en $-\infty$ une branche parabolique dont on donnera la direction

5) Construire la courbe $\left(C_f\right)$ et $(\Delta)$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

## PROBLEME 26

Soit $f$ la fonction définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}} \ si \ x > 0 \\ xln(-x) \ \ si \ x < 0 \\ 0 \ si \ x = 0 \end{cases}$

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$

b) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition

2)a) Etudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en $0$

b) Donner une interprétation de des résultats obtenus

3)a) Calculer la dérivée $f'$ de la fonction $f$ puis étudier son signe

b) Dresser le tableau de variation de $f$

4)a) Montrer que la courbe $(C_f)$ admet une branche parabolique en $-\infty$ et en $+\infty$ dont on précisera les directions

b) Construire la courbe $(C_f)$

## PROBLEME 27

### PARTIE A

Soit la fonction $g$ définie par : $g(x) = x + 1 + ln(|x|)$

1) Etudier les variations de $g$ puis dresser le tableau de variation de $g$

2)a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$

b) Vérifier que $0,2 < \alpha < 0,3$

c) En déduire le signe de $g(x)$

3) Soit $h$ la fonction définie par : $h(x) = xln(|x|) + \frac{1-x^2}{2}$

a) Calculer les limites de $h$ aux bornes de son ensemble de définition

b) Montrer $que$ $\forall x \in Dh, h'(x) = g(-x)$ puis dresser le tableau de variation de $h$

c) En déduire le signe de $h(x)$

### PARTIE B

Soit la fonction $f$ définie par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{xln(|x|)}{x+1} \ si \ x \neq 0 \end{cases}$ et $(C)$ sa courbe représentative.

1)a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en $0$

2)a) Calculer la limite de $f$ en $-\infty$ $et$ $en + \infty$

b) Calculer la limite de $f$ en $-1$($On \ pourra \ \ poser \ X = -x - 1$)

3) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$

4)a) Montrer que pour $x$ diffèrent de $0$ $et -1$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de $f$

<u>PARTIE</u> C

Pour tout $x$ different de 0 et -1, on pose : $\varphi(x) = f(x) - ln(|x|)$

1)a) Etudier le signe de $\varphi(x)$ puis calculer la limite de $\varphi$ en $-\infty$ $et$ $en$ $+\infty$

b) On note $(\Gamma)$ la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto ln(|x|)$. Donner une interprétation graphique des résultats obtenus à la question 1)a)

2) a) Déterminer l'équation de la tangente $(T)$ à $(C)$ au point d'abscisse $x_0 = 0$

b) Etudier la position relative de $(C)$ par rapport à $(T)$ $(On\ utilisera\ la\ question\ A3c)$)

3) Construire $(\Gamma), (T)$ $et$ $(C)$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

<u>PROBLEME</u> 28

<u>PARTIE</u> A

On considère l'équation différentielle $(E)$: $y'' + 2y' + y = e^{-x}\cos(x)$

1-a-Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0)$: $y'' + 2y' + y = 0$

b-Déterminer la constante réel $k$ telle que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\varphi(x) = ke^{-x}\cos(x)$ soit une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$

2-Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

a-Montrer que $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si $f - \varphi$ est solution de $(E_0)$

b- En déduire les solutions de l'équation différentielle $(E)$

3-Déterminer la solution $f_0$ de l'équation $(E)$ tels que $f'(0) = 0$ $et$ $f(0) = 1$.

<u>PARTIE</u> B

Soit les fonctions $f$ $et$ $\psi$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (x + 2 - \cos x)e^{-x}$ $et$ $\psi(x) = \cos(x) + \sin(x) - x - 1$

1- a-Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, -x - 3 \leq \psi(x) \leq -x + 1$

b- En déduire les limites de $\psi$ en $-\infty$ $et$ $en$ $+\infty$

2-a-Etudier les variations de $\psi$ puis dresser son tableau de variation

b- Montrer que l'équation $\psi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]-3; -2[$

c-En déduire le signe de $\psi(x)$ suivant les valeurs de $x$

3-a- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1)e^{-x} \leq f(x) \leq (x + 3)e^{-x}$

**b- En déduire les limites de $f$ en $-\infty$ *et en* $+\infty$**

**4-a-Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \psi(x)e^{-x}$**

**b- En déduire le tableau de variation de $f$**

**5-Construire la courbe $(C_f)$**

**6-Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par la courbe $(C_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\pi$ *et* $x = 0$**

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

PROBLEME 29

**PARTIE A**

**Soit l'équation différentielle $(E)$: $\frac{1}{4}y'' - \frac{1}{n}y' + \frac{1}{n^2}y = \frac{x}{n^2}$ où $n$ est un entier relatif non nul.**

**1-Déterminer deux réels $a$ *et* $b$ tels que la fonction $g(x) = ax + b$ soit solution de l'équation $(E)$**

**2-Résoudre l'équation $(E_0)$: $\frac{1}{4}y'' - \frac{1}{n}y' + \frac{1}{n^2}y = 0$ où $n$ est un entier relatif non nul.**

**3-Montrer qu'une fonction $\varphi$ est solution de $(E)$ si et seulement si $\varphi - g$ est solution de $(E_0)$**

**4-En déduire toutes les solutions de l'équation $(E)$**

**5-Déterminer la solution $\varphi_0$ de $(E)$ tels que $\varphi(0) = n$ *et* $\varphi'(0) = 0$**

**PARTIE B**

**On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f_n$ par : $f_n(x) = x + n - xe^{\frac{2x}{n}}$ où $n$ est un entier relatif non nul.**

**On note $(C_n)$ la courbe représentant $f_n$ dans un repère orthogonal du plan.**

**1-a-Déterminer l'ensemble de définition $D_n$ de la fonction $f_n$**

**b-Déterminer les limites de $f_n$ en $-\infty$ *et* $+\infty$ pour $n < 0$ *et pour* $n > 0$**

**2-a-Calculer la fonction dérivée $f'_n$**

**b- Etudier les variations de $f'_n$ pour $n < 0$ *et pour* $n > 0$**

**c-Calculer $f'_n(0)$ puis déduire le signe de $f'_n(x)$ pour $n < 0$ *et pour* $n > 0$**

**3-Dresser le tableau de variation de $f_n$ pour $n < 0$ *et pour* $n > 0$**

**4- a-Pour tout entier relatif non nul $n$, calculé $f_n(-x) + f_{-n}(x)$**

**b- Que peut-on déduire des courbes $(C_n)$ et $(C_{-n})$?**

**5-Soit la fonction $h$ définie sur $[-2; -1]$ par : $h(x) = -x + 4\frac{e^x}{e^{2x}-1}$**

**a-Etudier les variations de la fonction $h$**

**b- En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[-2; -1]$**

**c-Montrer que l'équation $h(x) = 0$ est équivalente à l'équation $f_2(x) = f_{-2}(x)$**

d- En déduire les abscisses des points d'intersections de $(C_2)$ $et$ $(C_{-2})$

6-a-Etudier les branches infinies des courbes $(C_2)$ $et$ $(C_{-2})$

b-Tracer les courbes $(C_2)$ $et$ $(C_{-2})$ dans un même repère

b-Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la portion délimitée par les courbes$(C_2)$, $(C_{-2})$ et les droites d'équations $x = \alpha$ $et$ $x = -\alpha$

**Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik**

**PROBLEME 30**

Dans ce problème, $n$ est un entier naturel non nul et on considère la famille des fonctions $f_n$ définies sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = x^n ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

On note $(C_n)$ la courbe représentant $f_n$ dans un repère orthogonal du plan. Unité graphique 2cm.

**PARTIE A**

On pose $n = 1$

1-a-Etudier la continuité et la dérivabilité de $f_1$ en 0 puis interpréter le résultat

b-Calculer la limite de $f_1$ en $+\infty$ puis interpréter le résultat

2-a-Justifier que $f_1$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis calculer $f'_1(x)$

b-Calculer $f''_1(x)$ puis étudier les variations de $f'_1$

c-En déduire le signe de $f'_1$ puis dresser le tableau de variation de $f_1$

3-Tracer la courbe $(C_1)$, son asymptote et la tangente au point d'abscisse 0

**PARTIE B**

Dans cette partie $n$ est un entier naturel supérieur ou égale à 2$(n \geq 2)$

1-a-Etudier la continuité et la dérivabilité de $f_n$ en 0 puis interpréter le résultat

b- Calculer la limite de $f_n$ en $+\infty$

2-Démontrer que : $\forall x \in ]0; +\infty[, f'_n(x) = x^{n-1} g_n(x)$ où $g_n(x) = nln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

3-a-Etudier les variations de $g_n$ sur $]0; +\infty[$ puis déduire le signe de $g_n(x)$

b-Dresser le tableau de variation de $f_n$

4-Etudier la position relative de $(C_n)$ $et$ $(C_{n+1})$ pour $n \geq 2$

5-a-Démontrer que réel $x$ positif, on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

b- En déduire l'encadrement de $x^2 ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

c-Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^2 ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$ puis interpréter le résultat

d-Etudier la position relative de $(C_2)$ par rapport à la droite $(D)$: $y = x - \frac{1}{2}$

6-a-Démontrer que réel $x$ positif, on a : $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\leq ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

b- En déduire l'encadrement de $x^3 ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

c-Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\left[x^3 ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)\right]$ puis interpréter le résultat

d-Etudier la position relative de $(C_3)$ par rapport à la parable $(P)$: $y=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$

7-Constuire dans le même repère les courbes $(C_2)$ $et$ $(C_3)$ainsi que la parabole $(P)$ et la droite $(D)$

PARTIE C

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite $U_n=\int_n^{n+1} f_2(x)dx$

1-a-A l'aide d'une intégration par partie, calculé $U_1$

b- En déduire l'aire de la portion délimité par la courbe $(C_2)$, l'axe des abscisses et les droite d'équations $x=1$ $et$ $x=2$

3-a-Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $f_2(n)\leq U_n\leq f_2(n+1)$

b- En déduire le sens de variation de la suite $U_n$

c-La suite $U_n$ est-elle convergente ?

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

PROBLEME 31

Soit la fonction $f_m$ définie par : $f_m(x)=ln(x^2+m)$ où m est un paramètre réel.

On note $(C_m)$ la courbe représentant $f_m$ dans un repère orthogonal du plan

PARTIE A

1-a-Déterminer suivant les valeurs de $m$, l'ensemble de définition $E_m$ de la fonction $f_m$

b-Etudier la parité de la fonction $f_m$

2-Calculer la dérivée $f'_m$ de la fonction $f_m$ puis étudier son signe suivant les valeurs de $m$

3-Dresser le tableau de variation de $f_m$ suivant les valeurs de $m$

4-a-Montrer que pour tout $x$ positif, $f_m(x)=2ln(x)+ln\left(1+\frac{m}{x^2}\right)$

b- En déduire que la fonction $g(x)=2ln(x)$ est une courbe asymptote à la courbe $\left(C_{f_m}\right)$

5-a-Dresser le tableau de variation des fonctions $f_{-1}, f_0$ $et$ $f_1$

b-Construire les courbes $(C_g)$, $(C_{-1})$ , $(C_0)$ $et$ $(C_1)$

PARTIE B

On prend $m=\frac{3}{4}$

Soit la fonction $h$ définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x)=x-f_{\frac{3}{4}}(x)$

1-a-Etudier les variations de $g$

b-Calculer $g(0)$ $et$ $g\left(\frac{3}{2}\right)$ puis déduire le signe de $g(x)$ et la position de la courbe $\left(C_{\frac{3}{4}}\right)$ par rapport à la droite $(D)$ d'équation $y = x$

2-a-Démontrer que $f_{\frac{3}{4}}$ est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera

b-Déterminer l'expression de sa bijection réciproque

3-Tracer sur le même graphique la courbe $\left(C_{\frac{3}{4}}\right)$ et celle de sa réciproque sur $[0; +\infty[$

Prof : Mr ABASS-BAWA Taofik

**PROBLEME 32**

**PARTIE A**

Soit la fonction $g$ définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$

1-Etudier les variations de $g$ puis déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$

2- Résoudre l'inéquation : $x \in \mathbb{R},\ \ x + \sqrt{x^2 - 1} \leq 0$

**PARTIE B**

Soit $f$ la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}\ si\ x < 0 \\ f(x) = xe^{-\frac{1}{x}} - x + 1\ si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1-a-Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$

b- Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition

2-a-Exprimer $f$ sans symbole de valeur absolue

b- Etudier la dérivabilité de $f$ en $-1$ $et$ $en$ $0$ puis interpréter les résultats

3-Calculer la fonction dérivée $f'$ de la fonction $f$ puis déduire le sens de variation de $f$

4-Dresser le tableau de variation de $f$ puis construire la courbe $(C_f)$

**PARTIE C**

Soit la fonction $\varphi$ définie sur $]0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = f(x) - x$

1-a- Montrer que : $-1 < f'(x) < 0$ $et\ que$ $-2 < \varphi'(x) < -1$

b-Dresser le tableau de variation de $\varphi$

2-Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right]$

3-On définit pour tout entier naturel $n$, la suite $U_n$ par : $U_0 = \frac{1}{2}$ $et$ $U_{n+1} = f(U_n)$

a-Montrer que : $\forall\ x \in I, f(x) \in I$

b- En déduire que pour tout entier naturel $n, U_n \in I$

4-a-Montrer que : $\forall\ x\ \in I, |f'(x)| \leq \frac{3}{5}$ (On utilisera les variations de $g$)

b- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{5}|U_n - \alpha|$

c-Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

d- En déduire la limite de la suite $U_n$

e-Déterminer une valeur approchée de cette limite à $10^{-2}$ près

Prof Mr ABASS-BAWA Taofik