BACCALAURÉAT
SESSION 2023

Durée : 4 h
Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.

EXERCICE 1 (2 points)

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque proposition du tableau ci-dessous suivi de **Vrai** si la proposition est vraie ou de **Faux** si la proposition est fausse.

N°	Propositions
1.	Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, si (P) est le plan d'équation cartésienne : $2x+3y+4z-8=0$, alors un vecteur normal à (P) est : $\vec{n}(1;\frac{3}{2};2)$.
2.	Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'ellipse d'équation réduite : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$, de demi distance focale $\sqrt{7}$ a pour foyers F et F' tels que : $F(\sqrt{7};\ 0)$ et $F'(-\sqrt{7};0)$.
3.	Une corrélation linéaire entre deux caractères X et Y d'une série statistique double est forte lorsque le coefficient de corrélation linéaire r est tel que : $r<0{,}87$.
4.	Soient A et B deux points distincts du plan. La composée $r_{(A\,;\frac{\pi}{3})} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des lignes A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la ligne qui donne l'affirmation vraie.

N°	Enoncés	Informations	
1.	La suite $(u)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $u_n=\left(\frac{-2}{3}\right)^n$ a pour limite …	A	$+\infty$.
		B	$-\infty$.
		C	0.
		D	$-\frac{2}{3}$.
2.	PQRS est un carré de centre O tel que le triplet (P, Q, R) soit de sens direct. I et J sont les milieux respectifs des segments [QR] et [RS]. La composée $r_{(O\,;\frac{\pi}{2})} \circ S_{(QR)}$ est la symétrie glissée d'axe (IJ) et de vecteur…	A	$\overrightarrow{QS}$.
		B	$\overrightarrow{OQ}$.
		C	$\overrightarrow{SQ}$.
		D	$\overrightarrow{QO}$.

3	On admet que : $\forall x \in [0 ; 1], \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. La fonction F définie sur $[0 ; 1]$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$ est telle que …	A	$x - 1 \leq F(x) \leq \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.
		B	$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \leq F(x) \leq x - 1$. .
		C	$1 - x \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$.
		D	$\frac{1}{2} - \frac{x}{2} \leq F(x) \leq 1 - x$.
4	Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A, B et C d'affixes respectives : 2 ; $2 + 2i$ et $2i$. La similitude directe de centre A qui transforme B en C a pour angle et pour rapport …	A	$\frac{\pi}{4}$ et $\sqrt{2}$.
		B	$\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
		C	$-\frac{\pi}{4}$ et $\sqrt{2}$.
		D	$-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 3 **(3 points)**

Des scientifiques participent à un séminaire sur le thème : « Le réchauffement climatique et ses conséquences sur les économies des pays ».
Une enquête organisée par un organisme international a révélé que 75 % des scientifiques croient au réchauffement climatique et parmi ceux-ci, il y a des écologistes.
Selon cette enquête :
• la probabilité qu'un scientifique qui croit au réchauffement climatique soit un écologiste est 0,6 ;
• la probabilité qu'un scientifique qui ne croit pas au réchauffement climatique ne soit pas un écologiste est 0,08.
On choisit un scientifique au hasard ayant participé au séminaire.
On désigne par :
R l'évènement : « Le scientifique interrogé croit au réchauffement climatique » ;
E l'évènement : « Le scientifique interrogé est un écologiste ».

1. *a*) Traduis cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   b) Donne les probabilités suivantes : $P(R)$; $P_{\bar{R}}(\bar{E})$; $P_R(E)$.
2. *a*) Calcule : $P_R(\bar{E})$.
   b) Justifie que : $P(\bar{R} \cap E) = 0{,}23$.
3. *a*) Justifie que la probabilité qu'un scientifique interrogé soit un écologiste est 0,68.
   b) Un scientifique interrogé est un écologiste.
   Calcule la probabilité qu'il ne croit pas au réchauffement climatique.
   (*Tu donneras l'arrondi d'ordre 2 du résultat*).

EXERCICE 4 **(4 points)**

Soit m un nombre réel et f_m la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $f_m(x) = x + \ln(1 - me^{-x})$.
On note D_m l'ensemble de définition de f_m et on désigne par (C_m) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On désigne par (D) la droite d'équation : $y = x$.

1. Justifie que :
   a) Si $m \leq 0$, alors $D_m = \mathbb{R}$.
   b) Si $m > 0$, alors $D_m =]\ln(m) ; +\infty[$.
2. On suppose que f_m est dérivable sur D_m pour tout nombre réel m.

a) Justifie que pour tout x de D_m, $f_m'(x) = \frac{e^x}{e^x - m}$

b) Justifie que pour $m \leq 0$, f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Justifie que pour $m > 0$, f_m est strictement croissante sur $]\ln(m) ; +\infty[$.

3. *a*) Démontre que pour tout nombre réel m, f_m est une bijection sur D_m.
   b) Etablis que pour tout nombre réel m et pour tout nombre réel x élément de $f_m(D_m)$, on a : $f_m^{-1}(x) = f_{-m}(x)$.
   c) Déduis de la question précédente, une méthode de construction de (C_{-m}) dans le même repère que (C_m).
4. On suppose que m et p sont des nombres réels strictement positifs.
   a) Justifie que (C_p) est l'image de (C_1) par la translation T de vecteur $\vec{u}(\ln p\,;\ln p)$.
   b) Détermine la translation T' qui transforme (C_p) en (C_m).

EXERCICE 5 **(4 points)**

On considère l'équation (E) : $4x - y = 2$ où les inconnues x et y appartiennent à $\mathbb{Z}$.

1. *a*) Démontre que si le couple (x_0, y_0) est une solution de (E), alors y_0 est pair.
   b) Détermine les valeurs possibles de PGCD(x_0, y_0).

2. *a*) Vérifie que le couple (1 ; 2) est une solution de (E).
   b) Résous l'équation (E).

3. Détermine l'ensemble des couples (x, y) solutions de (E) tels que x et y sont premiers entre eux.

4. $\overline{ac2}^3$ et $\overline{baa}^4$ sont deux écritures du même entier naturel p respectivement en base 3 et en base 4.
   a) Justifie que $3c + 2$ est multiple de 4.
   b) Déduis-en que c est égal à 2.
   c) Détermine les valeurs de a et de b. (*Tu pourras utiliser 2.b*).
   d) Ecris p dans le système décimal.

EXERCICE 6 **(5 points)**

Une étudiante en histoire ancienne veut rédiger son mémoire de Master 2. Au cours de ses recherches, elle décide de déterminer l'âge d'un fragment d'os découvert par des archéologues.
L'information dont elle dispose est que le fragment découvert à une teneur en carbone 14 égale à 70% de celle d'un fragment d'os actuel de même masse pris comme témoin.
Au cours de sa formation, elle a appris que :
- Si t est l'âge en années de l'os découvert, alors la quantité restante de carbone 14 dans le fragment d'os est $P(t)$ où P est une fonction de t.
- La dérivée P' de la fonction P est égale au produit de P par l'opposé de la constante radioactive de carbone 14, notée λ ($\lambda = 1{,}2444 \times 10^{-4}$).
- La quantité P_0 de carbone 14 d'un organisme vivant commence à diminuer à partir de la mort de cet organisme à l'instant t égal à zéro.

N'ayant pas suffisamment de connaissance pour exploiter ces données, elle te sollicite.
À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de l'étudiante.