COLLECTION
INTER
AFRICAINE DE
MATHÉMATIQUES

Terminale SE

MATHÉMATIQUES

GUIDE PÉDAGOGIQUE

EDICEF

Collection
Inter
Africaine de
Mathématiques

sous la direction
de Saliou TOURÉ
Professeur à l'Université
d'Abidjan

MATHÉMATIQUES

Term SE
SCIENCES EXPÉRIMENTALES

GUIDE PÉDAGOGIQUE

EDICEF
58, rue Jean-Bleuzen
92178 Vanves Cedex

L'idée d'harmoniser les programmes de mathématiques entre les pays francophones d'Afriqu de l'océan Indien remonte à l'année 1983 où fut organisé par l'IRMA, à Abidjan, le prem sémi-naire d'harmonisation. Depuis, d'autres séminaires ont suivi : en 1985 à Cotonou, en 198 Conakry et en juin 1992 à Abidjan avec la participation de 20 pays.

PARTICIPATION DES DIFFÉRENTS PAYS

Bénin	Comores	Guinée	Rép. Dém. Congo
Burkina Faso	Congo	Madagascar	Rwanda
Burundi	Cote d'Ivoire	Mali	Sénégal
Cameroun	Djibouti	Mauritanie	Tchad
Centrafrique	Gabon	Niger	Togo

D'autres séminaires de concertation ont réuni les responsables de ces cellules, à Libreville en 1993, à Ndjaména en 1994, à Yaoundé en 1995, à Antananarivo en 1996, à Dakar en 1997, à Niamey en 1998, à Nouakchott en 1999, à Ouagadougou en 2000, à Cotonou en 2001 et à Bangui en 2002.

ISBN 978-2-84-129922-5

SOMMAIRE

1 TABLEAU SYNOPTIQUE DES PROGRAMMES DU SECOND CYCLE SCIENTIFIQUE Option Sciences Expérimentales (SE)

Les programmes du Second Cycle Scientifique ont été établis en juin 1992, lors du quatrième séminaire d'harmonisation des programmes de mathématiques des pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien. Constitués d'un tronc commun en classe de seconde (S) et de deux séries à partir de la classe de première (SM et SE), ils sont ici présentés dans un tableau synoptique afin de faire apparaître :

– la cohérence des différents thèmes à un niveau donné ;

– l'évolution d'un thème d'un niveau à l'autre.

	Secoude S	Première SE	Terminale SE
ENSEMBLE DE NOMBRES	• Nombres réels • Rationnels et irrationnels • Opérations • Ordre - propriétés - partie entière - encadrement et opérations - majorant, minorant, maximum, minimum d'un ensemble • Valeur absolue - définition - propriétés - distance de deux nombres réels - inéquations : $\lvert x-a\rvert < r$, $\lvert x-a\rvert > r$, $\lvert x-a\rvert \leq r$, $\lvert x-a\rvert \geq r$ • Calculs approchés - approximations décimales d'ordre n - encadrement et valeurs approchées - écriture scientifique, ordre de grandeur		• Nombres complexes • Forme algébrique : égalité, opérations, conjugué et module • Affixe d'un point, d'un vecteur ; point image, vecteur image d'un complexe • Forme trigonométrique : - module, argument - produit, quotient - notation exponentielle - formules de Moivre et d'Euler • Racines n-ièmes • Équations du 2^{nd} degré • Utilisation en trigonométrie • Utilisation en géométrie - écriture complexe de transformations - caractérisation complexe de configurations planes

	Seconde S	Première SE	Terminale SE
CALCUL LITTÉRAL	♦ **Polynômes** • Racines • Factorisation • Différentes écritures • Signe ♦ **Fractions rationnelles** • Différentes écritures • Signe		
	♦ **Équations** • Équations se ramenant au 1er degré • Équations du 2nd degré (utilisation de la forme canonique) • Systèmes linéaires d'équations dans $\mathbb{R}^2$ (sans théorie) ; interprétation graphique ♦ **Inéquations** • Inéquations se ramenant au 1er degré • Inéquations du 2nd degré (forme canonique) • Interprétation graphique d'une inéquation ou d'un système linéaire d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$	♦ **Équations** • Équations du 2nd degré - discriminant - somme et produit des solutions • Équations se ramenant au 2nd degré (bicarrées, irrationnelles) • Systèmes linaires d'équations dans $\mathbb{R}^3$ (pivot de Gauss) ♦ **Inéquations** Inéquations du 2nd degré ou s'y ramenant (bicarrées, irrationnelles) ♦ **Problèmes** se ramenant à la résolution d'équations, d'inéquations ou de systèmes (programmation)	♦ **Équations** • Équations faisant intervenir les fonctions ln ou exp • Équations du 2nd degré dans C ♦ **Inéquations** Inéquations faisant intervenir les fonctions ln ou exp
FONCTIONS	♦ **Généralités** • Notion de fonction • Ensemble de définition • Coïncidence de deux fonctions sur un ensemble ♦ **Fonctions numériques** • Représentation graphique • Image directe, image réciproque d'un intervalle (étude graphique) • Maximum, minimum d'une fonction sur un ensemble • Sens de variation	♦ **Généralités** • Restriction • Composition • Injection et surjection ; bijection et réciproque ; composée de bijections ♦ **Fonctions numériques** • Opérations • Fonctions associées et représentations graphiques • Comparaison de fonctions ; fonctions majorées, minorées, bornées • Représentations graphiques de deux bijections réciproques • Parité, périodicité ; éléments de symétrie d'une courbe ; ensemble d'étude d'une fonction	

	Seconde S	Première SE	Terminale SE
ÉTUDE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES		♦ **Limites** • Limite en a • Limite à gauche, à droite en a • Limites de fonctions élémentaires • Opérations • Limite infinie en a • Limite à l'infini • Opérations • Limites à l'infini de fonctions polynôme ou rationnelle ♦ **Continuité en a** • Notion • Critère de continuité	♦ **Limites** • Propriétés de comparaison • Composition • Formes indéterminées ♦ **Continuité sur un intervalle** • Prolongement par continuité • Opérations, composition • Image d'un intervalle, valeurs intermédiaires • Fonction strictement monotone ; *fonctions puissances d'exposant rationnel*
ÉTUDE DE FONCTIONS NUMÉRIQUES		♦ **Dérivation** • Nombre dérivé en a • Interprétation - tangente • Dérivabilité sur un intervalle • Dérivées de fonctions élémentaires • Opérations, composition avec une fonction affine • Signe de la dérivée et sens de variation • Extremum relatif d'une fonction	♦ **Dérivation** • Interprétations - vitesse - approximation locale affine • Dérivabilité à gauche, à droite • Composition ; fonction réciproque • Dérivées successives, notion de point d'inflexion • Dérivées de : u^r ($r \in \mathbb{Q}$), $\ln \circ u$, $\exp \circ u$ et u^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) • Inégalité des accroissements finis
	♦ Étude de fonctions • Fonctions affines par intervalles • Fonctions élémentaires : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto x^3$ • Composées des fonctions précédentes avec une fonction linéaire	♦ **Étude de fonctions** • Fonctions polynômes (degré ≤ 3) • $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ • $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ • Fonction tangente	♦ **Étude de fonctions** • Fonctions polynômes, rationnelles, irrationnelles et trigonométriques • $x \mapsto \ln x$; $x \mapsto e^x$ • $x \mapsto a^x$; $x \mapsto x^\alpha$ • Fonctions $\ln \circ u$, $\exp \circ u$ et u^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) • Croissances comparées de $\ln x$, e^x et x^α
	♦ Compléments • Résolution graphique d'équations et d'inéquations	♦ **Compléments** • Asymptote • Résolution d'équations par dichotomie ou balayage	♦ **Compléments** • Branches infinies

	Seconde S	Première SE	Terminale SE
SUITES NUMÉRIQUES		• Diverses façons de définir et représenter une suite • Suites définies par une formule de récurrence : détermination graphique des termes • Minoration, majoration ; sens de variation • Notion de convergence • Suites arithmétiques et géométriques	• Suites bornées ; suites monotones • Limite, convergence et divergence • Calculs de limites - limite d'une suite définie par $u_n = f(n)$, lorsque f a une limite en $+\infty$ - opérations - propriétés de comparaison - suite monotone • Suite définie par récurrence ; notion de point fixe • Suites arithmétiques et géométriques
INTÉGRATION			♦ **Définitions** • Primitives et intégrale d'une fonction continue sur un intervalle • Interprétation graphique (aire)
			♦ **Propriétés** • Chasles, linéarité positivité • Inégalité de la moyenne, valeur moyenne
			♦ **Techniques de calcul** • Calculs de primitives • Intégration par parties ♦ **Intégration de** • fonctions paires, impaires ou périodiques • « polynômes » trigonométriques • fonctions rationnelles
			♦ **Calcul approché d'intégrale** ♦ **Applications** • Aires et volumes • Fonction définie par une intégrale
			♦ **Équations différentielles** • $y' - ay = 0$ • $y'' + ay' + by = 0$

	Seconde S	Première SE	Terminale SE
ORGANISATION DES DONNÉES	♦ Statistiques • Consolidation des acquis du 1er Cycle • Notation Σ • Séries non regroupées en classes - effectifs et fréquences cumulées - caractéristiques de position (mode, moyenne, médiane) et de dispersion (écart moyen, variance, écart type) • Séries regroupées en classes : - histogramme	♦ Statistiques • Séries simples regroupées en classes : - polygones des effectifs et courbes cumulatives - caractéristiques de position et de dispersion	
			♦ Séries doubles : - nuage de points, point moyen - ajustement linéaire (Mayer, moindres carrés) - droites de régression, covariance et coefficient de corrélation
		♦ Analyse combinatoire • Ensemble - cardinal - parties - produit cartésien • p-uplets, arrangements (A_n^p), permutations ($n!$), combinaisons (C_n^p) • Nombre d'applications, d'injections et de bijections entre deux ensembles finis	♦ Analyse combinatoire • Consolidation des acquis de 1re • Formule du binôme et triangle de Pascal
			♦ Probabilités • Vocabulaire • Propriétés • Équiprobabilité • Probabilité conditionnelle, événements indépendants, probabilités totales
		♦ Dénombrement • Comptage, diagrammes, arbres • Tirages successifs (avec ou sans remise), tirages simultanés • Principes de la somme et du produit	♦ Variable aléatoire • Loi de probabilité • Fonction de répartition • Espérance mathématique, variance et écart-type • Épreuve de Bernoulli • Loi binomiale
ANGLES	• Angles inscrits non orientés • Arcs capables • Quadrilatères inscriptibles • Relations métriques dans un triangle - $\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$ - théorème des sinus ♦ Polygones réguliers		
	♦ Angles orientés • Orientation du plan • Angle orienté de deux vecteurs mesure principale	♦ Angles orientés • Mesures • Somme et différence • Chasles	

	Seconde S	Première SE	Terminale SE
TRIGONOMÉTRIE	• Cercle trigonométrique • Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté	• Définition et propriétés des fonctions circulaires • Formules : addition, duplication, linéarisation ... • Équations trigonométriques	• Utilisation des nombres complexes • Expression de $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ • Linéarisation • Transformation de produit en somme et de somme en produit
CALCULS VECTORIELS DANS LE PLAN	• Vecteurs • Combinaison linéaire • Colinéarité • Mesure algébrique • Bases, repères • Déterminant de deux vecteurs • Caractérisation vectorielle de : - droite ou demi-droite - droites parallèles ou perpendiculaires - centre de gravité d'un triangle • Utilisation des vecteurs Démonstration de propriété	• Barycentre de 2, 3 ou 4 points pondérés • Définition • Propriétés - homogénéité - réduction - barycentres partiels • Construction • Ensemble des barycentres de deux points • Utilisation du barycentre • Problèmes d'alignement et de concours • Ligne de niveau - $M \mapsto MA^2 + MB^2$	
	• Produit scalaire • Définition • Propriétés • Norme d'un vecteur • Expression analytique dans une base orthonormée • Relations métriques dans un triangle : théorèmes d'Al-Kashi et de la médiane	• Utilisation du produit scalaire • Lignes de niveau - $M \mapsto MA^2 - MB^2$ - $M \mapsto \vec{AM}.\vec{AB}$	
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PLANE	• Droites Représentations paramétriques • Cercle Équations cartésiennes	• Cercle Représentation paramétrique • Expression analytique • d'une translation • de symétries orthogonales particulières	

	Seconde S	Première SE	Terminale SE
TRANSFORMATIONS DU PLAN	♦ **Rotations** *[niveau 1 (*)]* • Définition • Propriétés - point invariant - rotation réciproque - décomposition (symétries-droite) - propriété fondamentale - images de figures	♦ **Translations et rotations** *[niveau 2 (*)]* • Composée (deux rotations ou une rotation et une translation) • Décomposition (rotation de centre donné et translation) d'une rotation	
		♦ **Isométries** *[niveaux 1 et 2 (*)]* • Définition • Propriétés - conservations • Déplacements et retournements • Détermination par deux triangles superposables • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété)	
	♦ **Homothéties** *[niveau 1 (*)]* - Définition - Propriétés - point invariant - réciproque - propriété fondamentale - images de figures - conservations - longueurs et aires - Déterminations d'une homothétie - centre, un point et son image - rapport, un point et son image - deux points et leurs images	♦ **Homothéties** *[niveau 2 (*)]* • Composition : homothéties de même centre, homothétie et translation • Décomposition (homothétie de centre donné et translation) • Utilisation (lieu, problème de construction, démonstration de propriété) ♦ **Similitudes** • Définition (par les longueurs) • Images de figures • Détermination - deux triangles semblables	♦ **Similitudes directes** *[niveaux 1 et 2 (*)]* • Écriture complexe • Forme réduite
GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE	♦ **Description de l'espace** • Positions relatives de droites et plans • Parallélisme (étude)	♦ **Description de l'espace** • Orthogonalité - Projections orthogonales	♦ **Orientation de l'espace** • Repère direct • Repère indirect
		♦ **Vecteurs de l'espace** • Définition • Vecteurs colinéaires, coplanaires • Base et repère	♦ **Produit scalaire** • Définition • Propriétés • Expression analytique • Utilisation : équation d'un plan, d'une sphère ♦ **Produit vectoriel** • Définition • Propriétés • Expression analytique • Utilisation :

(*) Niveaux d'étude des transformations

Niveau 1	• Reconnaître une transformation • Construire l'image d'un point, d'une figure usuelle par une transformation définie de diverses façons • Reconnaître deux figures « homologues » par une transformation (« figures clés »)
Niveau 2	• Composer des transformations • Utiliser des transformations (mais pas leurs composées) pour : – trouver un lieu géométrique ; – résoudre un problème de construction ; – démontrer une propriété.

2 COMMENTAIRES GÉNÉRAUX POUR LE SECOND CYCLE Option Scienc s Expérimentales (SE)

2.1. La filière scientifique option SE

■ Importance de la section scientifique

Les programmes du second cycle scientifique ont été élaborés lors du quatrième séminaire d'Harmonisation des Programmes de Mathématiques (HPM) des pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien. Il tiennent compte des progrès de la science, des recherches actuelles en didactique des mathématiques, mais aussi des besoins de nos pays pour assurer leur développement socio-économique.

■ Pourquoi l'option SE ?

Pour satisfaire les besoins toujours croissants en nombre de scientifiques, il a été décidé de créer ou maintenir plusieurs types de formation qui correspondent à la diversité des exigences à l'entrée des institutions d'accueil des bacheliers scientifiques.

Cette filière, qui commence en classe de Première, permet de maintenir dans la section scientifique le maximum d'élèves sortant de classe de Seconde scientifique et inaptes à aborder directement des études abstraites en matière scientifique (option SM), mais qui, en revanche, peuvent, à l'issue d'une formation sérieuse, devenir des scientifiques plus proches du concret, de l'expérimentation et de l'application immédiate.

Les deux filières de la section scientifique.

■ Proposition d'horaire dans la filière SE

Les programmes de la filière SE sont essentiellement basés sur l'algèbre, l'analyse et l'organisation des données. Ce sont les matières essentielles de la formation mathématique nécessaire pour entrer dans la plupart des établissements d'accueil des bacheliers SE.

Cependant, le programme de la filière SE contient suffisamment de géométrie pour satisfaire les exigences de la formation de certains ingénieurs et de certains professeurs de matières scientifiques.

Ces programmes se dérouleront correctement si l'année scolaire comporte au moins 25 semaines. Le tableau ci-dessous donne les horaires habituellement pratiqués.

Classe	2S	1SE	TSE
Horaire hebdomadaire	5 h	5 h	6 h
Total	125 h	125 h	150 h

2.2. Enseignement mathématique en filière SE

Cet enseignement privilégie :

■ L'utilisation d'un langage mathématique simple, précis et adapté, basé sur un vocabulaire mis en place dès le premier cycle.

Ce langage intègre les éléments de logique et fournit la base d'un raisonnement mathématique.

Aux symboles logiques seront préférées des phrases simples et codifiées qui préparent l'utilisation des éléments de logique dans l'enseignement supérieur.

■ L'acquisition et la maîtrise progressive des connaissances de base (après un travail évaluatif indispensable).

• Les élèves de la filière SE ont souvent des lacunes dans les connaissances de base. Aussi, pour y remédier, un plan de rattrapage peut être organisé afin d'aller à l'essentiel sans la reprise totale du cours.

• Les fiches résumés aident à la mémorisation de l'essentiel du cours. L'élève doit apprendre à faire des fiches, à les compléter et à les enrichir tout le long de l'année scolaire.

– En géométrie, les fiches de configurations de base pourront être complétées par des configurations remarquables provenant des solutions de problèmes de géométrie.

– En algèbre-analyse, les fiches résumés des propriétés à mémoriser pourront être plus synthétiques dans des tableaux.

• Une attention particulière doit être portée aux outils mathématiques que sont les définitions et les propriétés. Leur mémorisation exige beaucoup de soin et leur utilisation dans des exercices d'application directe prépare la résolution des problèmes de démonstration.

Dans les manuels de la CIAM, en filière SE, la présentation des définitions et des propriétés aide à leur mémorisation et à leur utilisation.

On fera remarquer à l'élève qu'une définition n'est autre qu'une propriété caractéristique. En tant que telle, elle peut être utilisée aussi bien pour reconnaître un objet mathématique que pour prouver une qualité de cet objet.

■ L'apprentissage de la démonstration, progressif, motivant et adapté au niveau de l'élève.

La démonstration doit être aussi un objet d'étude et son démarrage peut commencer en classe par la mise en place des propriétés du cours. Cependant, il faut éviter de demander à l'élève de prouver des évidences car l'utilité de la démonstration pourrait lui échapper.

Par ailleurs, pour ne pas accuser de retard dans l'exécution du programme et aussi pour ne pas démotiver l'élève avec des démonstrations trop longues, on peut soit admettre des propriétés du cours, soit dégager uniquement le plan de cette démonstration.

■ La résolution de problèmes par des exercices progressifs, variés et d'appropriation facile.

Dans les manuels de la CIAM, on peut distinguer plusieurs types d'exercices :

• *Les exercices d'application directe* permettent à l'élève de mettre en œuvre une définition, une propriété, un algorithme... De tels exercices sont liés à la maîtrise des connaissances de base.

• *Les exercices d'apprentissage* permettent à l'élève de commencer véritablement des démonstrations, ce qui met en jeu sa capacité à analyser l'énoncé d'un problème, à choisir les outils mathématiques qui conviennent, à structurer une démonstration simple et à la rédiger.

• *Les exercices d'approfondissement* demandent que l'élève ait recours à tous ses acquis, même plus anciens, pour organiser la résolution de ce problème.

• *Les exercices de recherche*, qui sont souvent des situations-problèmes ou même des problèmes ouverts. Leur résolution nécessite alors une véritable démarche scientifique :

– faire des essais pour produire une conjecture ;

– tester cette conjecture en faisant des essais dont les résultats peuvent être connus ;

– prouver la validité des conjectures.

■ La pratique courante du schéma, du graphique, de la figure.

• Dans l'acquisition des connaissances, un schéma, un graphique ou une figure peut aider à illustrer une définition ou une propriété. Il devient alors le support visuel de cet outil mathématique. Il conduit à une bonne représentation mentale chez l'élève et favorise la mémorisation des connaissances et l'application des méthodes.

• Dans la résolution des problèmes, un schéma, un graphique ou une figure peut aider à soutenir l'imagination, à fixer les différentes étapes dans la recherche d'une solution, donc à mieux organiser une démonstration.

• Dans la résolution d'une situation-problème ou d'un problème ouvert, un schéma, un graphique ou une figure peut aider à imaginer le résultat, à faire une conjecture, à trouver un contre-exemple.

• Dans la recherche d'un lieu géométrique, une figure décrivant une situation évolutive peut permettre de trouver expérimentalement ce lieu.

• En analyse, la résolution d'un problème à l'aide d'un graphique donne une estimation des résultats. Cette première approximation est souvent satisfaisante pour les sciences expérimentales. En mathématiques, cette résolution graphique ne constitue pas une preuve mais contribue à l'établir.

L'élève de la filière SE doit apprendre à travailler sur des graphiques, à les utiliser, les exploiter. Il doit être capable d'interpréter sur un graphique des propriétés d'une fonction :

– variation,

– position relative,

– recherche des zéros, estimation de ces zéros ou de leurs encadrements.

■ **L'aspect historique, scientifique, culturel.**

Des informations historiques, scientifiques et culturelles contribuent à la formation totale de l'élève. Des informations historiques, scientifiques et culturelles contribuent à la formation totale de l'élève.

• Les informations historiques traitent des thèmes qui ont marqué l'évolution des mathématiq (participation des mathématiciens, évolution des notions, introduction des notations, liaison entre l mathématiques et les autres disciplines). Ces informations ont pour objectifs de donner à l'élève u culture mathématique et de lui permettre de percevoir le caractère universel des mathématiques et la continuelle évolution.

• Les informations scientifiques traitent des créations scientifiques anciennes ainsi que des nouvell technologies. Ces informations ont pour objectifs de donner à l'élève une culture scientifique et de convaincre de l'interférence entre les mathématiques et tous les autres domaines.

• La contextualisation culturelle des contenus, la présentation des notions, les exemples d'applicatio les énoncés des problèmes... puisent souvent dans l'environnement socioculturel des élèves.

Cette contextualisation culturelle des contenus des manuels de la CIAM procure à l'élève une motiva tion, un sentiment de sécurité et la preuve de l'apport des mathématiques dans des œuvres artistiqu ou de leur vie quotidienne.

2.3. Les manuels de la filière SE

■ **Le contenu des manuels**

Afin que l'élève puisse profiter au maximum de son manuel de mathématiques, le découpage de chaqu chapitre correspond souvent à des séquences de cours.

En général, un thème est composé de :

– *l'introduction d'une notion* (l'approche expérimentale est souvent utilisée) ;

– *la présentation des outils mathématiques* correspondants (définitions, propriétés...). Ces outils son présentés sous différents aspects : langage courant, langage mathématique, codifié, schéma, graphiqu ou figure ;

– *des exemples simples*, qui sont en fait de petits exercices résolus et commentés ; dans certains cas ce exemples dégagent des méthodes ;

– *des exercices d'applications directes* à faire en classe, avec le professeur.

L'essentiel d'une partie du cours est souvent résumé dans des fiches ou des tableaux d'utilisation facile Les exercices de fin de chapitre sont classés par objectifs, par thèmes et par difficulté croissante.

■ **L'utilisation du manuel**

	Le professeur	L'élève
Avant la rentrée scolaire	• analyse le programme ; • prend connaissance des instructions pédagogiques officielles ; • étudie la réalisation du programme à l'aide du manuel et du guide pédagogique ; • observe la proposition de progression du cours et établit un planning de l'année scolaire.	• révise les cours de l'année précédente à l'aide de ses fiches révisions ; • résout quelques exercices bien choisis pour contrôler ses acquis ; • entreprend la connaissance de son manuel : sommaire, présentation, index.
Avant chaque chapitre	• fait une préparation écrite du cours à l'aide du manuel et du guide pédagogique ; • fait un découpage du chapitre en séquences de cours (chaque séquence doit avoir une unité) ; • recherche et note les objectifs de chaque séquence de cours.	• essaie de découvrir l'objectif du chapitre en consultant la page d'ouverture du chapitre ; • observe le plan du chapitre ; • lit les informations historiques ou scientifiques.

COMMENTAIRES SPÉCIFIQUES À LA CLASSE DE TERMINALE SE

La classe de terminale SE marque la fin des études secondaires et, à travers l'examen du baccalauréat, ouvre la voie aux études supérieures. Ces deux aspects complémentaires pèsent sur les comportements des élèves et sur les pratiques des enseignants. Ils entraînent des contraintes, des différences d'approche avec lesquelles le professeur devra composer.

Un travail essentiel a été fait en première SE. On a introduit des concepts fondamentaux en mathématiques : continuité, limite, dérivation, suite, dénombrement, barycentre, ... On revient sur ces concepts en terminale pour les enrichir et les utiliser dans des contextes plus étendus. Il conviendra donc, au début de chaque chapitre, de rappeler les prérequis et de renforcer les connaissances acquises en première.

Si les élèves de la filière SE ont souvent une moindre technicité calculatoire, la maîtrise du calcul algébrique élémentaire reste un objectif fondamental de l'enseignement des mathématiques, car c'est cette maîtrise qui, en libérant l'esprit, en donnant confiance, procure l'aisance indispensable à la résolution efficace de problèmes.

L'acquisition d'automatismes calculatoires, la mémorisation indispensable de formules doivent cependant s'appuyer sur une claire compréhension des méthodes et des raisonnements. L'enseignant s'attachera donc à toujours donner du sens aux travaux effectués, celui-ci pouvant facilement disparaître derrière des excès de technicité.

L'enseignement dans la classe de terminale ne saurait se réduire à la préparation de l'examen final. L'objectif de l'enseignement dispensé est la formation des élèves et le développement de toutes les facettes de leur intelligence. De nombreux aspects de cette formation ne peuvent être pris en compte dans l'examen du baccalauréat. Pour autant, il convient de ne pas les négliger.

Dans la pratique, l'examen motive fortement la plupart des élèves en donnant un but visible à leur travail scolaire. Il paraît donc judicieux d'utiliser cette motivation comme un levier pour le travail intellectuel, malgré les aspects inévitablement codifiés que cela comporte. L'art de l'enseignant reste de résoudre les contradictions, de conjuguer le mieux possible l'entraînement à une épreuve très précise et le développement harmonieux des capacités intellectuelles des élèves.

Contrairement à une opinion fort répandue, les mathématiques comportent une dimension expérimentale. Il conviendra de s'y appuyer régulièrement, en particulier pour introduire des notions nouvelles. Cette dimension sera valorisée par l'utilisation des calculatrices, des graphiques, des figures, autant d'éléments qui, de plus, permettent de donner sens aux notions abordées ou de conjecturer une réponse.

La démonstration joue un rôle caractéristique en mathématiques. Il convient de le faire apparaître aux élèves sur des exemples bien choisis, sans que ce souci de démontrer ne supplante celui d'expliquer.

Faire des mathématiques, c'est avant tout résoudre des problèmes. L'enseignant devra donc alimenter régulièrement cette pratique en les entraînant à :

- analyser un problème ;
- se poser des questions pertinentes ;
- conjecturer un résultat ;
- construire une réponse rigoureuse.

À cette occasion, on insistera sur la nécessité, pour être compris, de produire une résolution claire, précise et logiquement articulée, utilisant correctement les liens de langage qui éclairent la logique du discours tenu.

Le professeur doit aussi apprendre aux élèves à apprendre. Comme les années précédentes, il leur donnera donc des conseils pour :

- s'organiser dans leur travail ;
- se servir de leur livre, utiliser intelligemment leur calculatrice ;
- rédiger des fiches résumés et des fiches méthodes ;
- mémoriser les connaissances mathématiques.

	Le professeur	L'élève
Avant chaque cours	• revoit rapidement le déroulement du dernier cours ; • prépare une interrogation (écrite ou orale) de 10 min pour contrôler les acquis de base des élèves ; • finalise sa préparation de cours à l'aide du manuel, du guide pédagogique et des cours précédents ; choisit : -- la présentation des outils, -- les démarches, -- les motivations, -- les activités, -- les fiches résumés, -- les fiches méthodes, -- les exercices à traiter en classe, -- les exercices à faire à la maison ; • repère dans le manuel les points précis d'utilisation pendant le cours ; • à la fin du chapitre, choisit les travaux pratiques à faire en classe.	• apprend le cours précédent sur les fiches résumés et contrôle ses acquis de base (de préférence par écrit) ; • teste sa capacité à résoudre des exercices en traitant des exemples du manuel et des exercices faits en classe ; • fait les exercices donnés par le professeur.
Pendant chaque cours	• fait utiliser le manuel conformément à sa préparation ; • indique ce que les élèves doivent garder comme traces écrites et apprend aux élèves à faire des fiches résumés et des fiches méthodes personnelles à partir de celles du manuel ; • donne les exercices à faire à la maison ; • à la fin de chaque chapitre, prépare avec les élèves les TP qu'ils doivent faire ; • donne les révisions pour le prochain DS ou le prochain DM.	• utilise son manuel selon les indications du professeur ; • participe au travail de classe organisé et dirigé par le professeur.
Après chaque cours	• vérifie si l'objectif de son cours est atteint ; • relève les points à reprendre ou à compléter ultérieurement.	• revoit rapidement le déroulement du cours.
Après chaque chapitre	• donne des révisions pour les prochains DS, DM ou interrogations.	• reprend et complète éventuellement les fiches résumés ou les fiches méthodes ; • révise le chapitre en entier ; • prépare le prochain DS ou DM.

Chapitre	Titre	Volume horaire
Ch. 1	Limites et continuité	14 h
Ch. 2	Dérivée – Primitives	12 h
Ch. 3	Études de fonctions	6 h
Ch. 4	Fonction logarithme népérien	8 h
Ch. 5	Fonction exponentielle népérienne	8 h
Ch. 6	Fonctions exponentielles – Fonctions puissances	4 h
Ch. 7	Calcul intégral	14 h
Ch. 8	Suites numériques	14 h
Ch. 9	Équations différentielles	6 h
Ch. 10	Nombres complexes	16 h
Ch. 11	Nombres complexes et géométrie	10 h
Ch. 12	Géométrie dans l'espace	4 h
Ch. 13	Systèmes linéaires	4 h
Ch. 14	Statistiques	14 h
Ch. 15	Probabilité	6 h
Ch. 16	Probabilités conditionnelles et variable aléatoire	10 h
	Total	150 h

ANALYSE DES CHAPITRES

1. Limites et continuité

(pages 7 à 34 du livre de l'élève)

Ce chapitre vise essentiellement à :
– renforcer les notions de limite et de continuité ;
– compléter les techniques de calcul de limites ;
– introduire la notion de continuité sur un intervalle ;
– utiliser les propriétés des fonctions continues strictement monotones.

En classe de Première, seuls des calculs très simples de limites ont été abordés. Ces calculs sont très souvent basés sur les limites de référence.

• En classe de Terminale, il s'agit d'une mise en place méthodique de calcul de limites.

• La notion de continuité est une notion non indispensable à l'élève du secondaire en ce qui concerne les compétences exigées. En effet, une fonction dérivable étant continue, on pourrait utiliser les propriétés des fonctions continues dans le cadre des fonctions dérivables.

Cependant, au point de vue pédagogique, l'approche graphique ou calculatoire (calculatrice programmable) de la notion de continuité s'avère très formateur pour l'élève.

Aussi, une approche graphique est utilisée ici pour introduire la continuité sur un intervalle.

• Le rappel des fonctions bijectives et l'acquis du calcul de dérivées dans les cas simples, permettront dans ce chapitre d'étudier le cas spécifique et très riche des fonctions continues strictement monotones.

savoirs	savoir-faire
Limite et continuité • Définition Propriété. Prolongement par continuité. • Propriétés – Limite d'une fonction composée. – Passage à la limite dans une inégalité. – Calcul de limite par comparaison.	• Calculer la limite d'une fonction f Soit en utilisant : – une limite de référence ; – la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ; – la limite d'un taux de variation ; – la limite à l'infini d'une fonction polynôme, d'une fonction rationnelle ; – la limite d'une fonction composée ; – la limite par comparaison ; Soit en se ramenant à l'un de ces cas après transformation de l'écriture de $f(x)$ par : – des astuces d'écritures ; – la factorisation des termes prépondérants ; – l'expression conjuguée.
Continuité sur un intervalle • Définition Continuité d'une fonction sur un intervalle. • Propriétés – Image d'un intervalle par une fonction continue. – Image d'un invervalle par une fonction continue et strictement monotone.	• Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue en utilisant : – une représentation graphique ; – un tableau de variation ; – le calcul.

savoirs	savoir-faire
– Existence d'un zéro d'une fonction dans un intervalle donné. **Fonctions continues strictement monotones** • Définition Application bijective • Propriétés – Fonction continue strictement monotone. – Bijection réciproque d'une fonction continue et strictement monotone.	• Calculer une valeur approchée d'un zéro d'une fonction continue (méthode par balayage ou de dichotomie).

EXERCICES DU MANUEL

Exercices d'application directe

♦ Exercice 1.a page 10

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} = 4$; $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x+2} = -5.$

♦ Exercice 1.b page 10

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x^2-4x-4) = -4$

$f(2) = \dfrac{2 \times 2+3}{2-1} = 7$

donc f n'est pas continue en 2.

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x^2-4x-4) = -4$

$f(2) = \dfrac{2-6}{2-1} = -4$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-6}{x-1} = -4$

donc f est continue en 2.

♦ Exercice 1.c page 10

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-1}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-1}$

$= \lim\limits_{x \to 1} (-\sqrt{x}) = -1$

$f(1) = -1$

donc f est continue en 1.

♦ Exercice 1.d page 10

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x+2) = 3$

donc f admet un prolongement par continuité en 1, qui est la fonction g définie par :

$\begin{cases} \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} & g(x) = f(x) \\ g(1) = 3 & \end{cases}$

♦ Exercice 1.e page 13

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x^2+1) = +\infty$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2+1} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+1}+x) = +\infty$.

(2) $\lim \dfrac{x^2-3x+2}{x-10} = 0$.

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-\sqrt{x^2+3}) =$ [illegible]

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x^2} = +\infty$.

♦ Exercice 1.f page 13

(1) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} 3x = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} = 1$.

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^2} = 1$.

(3) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\pi x^2}{x+1} = \dfrac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{X \to \pi/2} \cos X = 0 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to 1} \cos \dfrac{\pi x^2}{x+1} = 0$.

(4) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} 3x = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{1-\cos X}{X} = 0 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{3x} = 0$.

♦ Exercice 1.g page 14

1. Pour tout nombre réel x

on a : $E(x) \le x < E(x)+1$

d'où : $E(x)-1 \le x-1 < E(x)$

(1) $x-1 < E(x) \le x$

$-x \le -E(x) < -x+1$

(2) $\quad x \le 2x - E(x) < x + 1.$

2. L'encadrement (2) permet de calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

En effet,

- On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x = \lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$

d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

- De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

♦ Exercice 1.h page 14 (voir 1.g)

on a : $-1 \le \sin x \le 1$

d'où : $x - 1 \le x + \sin x \le x + 1$

de plus : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

- De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

♦ Exercice 1.i page 14

1. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Pour tout nombre réel positif

on a : $\quad 1 + x^3 > x^3 \ge 0$

$$\sqrt{1+x^4} > x^2 \ge 0$$

$$0 < \frac{1}{(1+x^3)\sqrt{1+x^4}} < \frac{1}{x^5}$$

$$0 \le \frac{2x^3}{(1+x^3)\sqrt{1+x^4}} < \frac{2}{x^2}$$

2. Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

♦ Exercice 1.j page 16

(1) Pour $x > 0$, $\frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} + 2$

d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x} = 3$.

(2) Pour $x < 0$, $\frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x} = -\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} + 2$

d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x} = 1$.

(3) Pour $x < 0$, $\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+1}} = -3$.

(4) Pour $x > 0$, $\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+1}} = 3$.

(5) Pour $x > 1$, $\frac{x+1}{\sqrt{x+3}-2} = \frac{(1+\frac{1}{x})(\sqrt{x+3}+2)}{1-\frac{1}{x}}$

d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x+3}-2} = +\infty$.

(6) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}$

$= (\sin)'(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

(7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}\right) = 1$.

♦ Exercice 2.a page 20

1. $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{5(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$

Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		0		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0		$-$				
$f(x)$	0	↘	$-5/4$	↗	0	↗	$5/4$	↘	$\frac{15}{13}$	↘	1	↘	0

2. $f([0\,;4]) = [0\,;\frac{5}{4}]$; $\quad f([3\,;+\infty[) =]0\,;\frac{15}{13}]$.

♦ Exercice 2.b page 20

$D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = 2(2-x)$

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		2		$7/2$		$+\infty$
$f'(x)$				$+$			0			$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↗	2	↗	3	↘	$3/4$	↘	$-\infty$

$f([0\,;\frac{7}{2}]) = [-1\,;3]$; $\quad f([2\,;+\infty[) =]-\infty\,;3]$;

$f(]-\infty\,;1]) =]-\infty\,;2]$.

♦ Exercice 3.a page 2?

Reconnaître une application bijective

(1) $f : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$

$\qquad x \mapsto \frac{2x-3}{x+1}$

Résolution de l'équation

(E) $\frac{2x-3}{x+1} = b$; $[b \in \mathbb{R}]$

$(2-b)x = b+3$; $[b \in \mathbb{R}]$

- pour $b = 2$, (E) n'a pas de solution donc f n'est pas une bijection.
- pour $b \neq 2$, (E) a une unique solution

$F : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$\qquad x \mapsto f(x)$

F est une bijection.

(2) $g: \quad \mathbb{R} \to [\frac{2}{3} ; +\infty[$

$x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$

Résolution de l'équation

(E) $3x^2 - 2x + 1 = b$; $[b \geq \frac{2}{3}]$

$\Delta = 4(3b - 2)$

- pour $b = \frac{2}{3}$, (E) a une unique solution
- pour $b > \frac{2}{3}$, (E) a deux solutions

donc g n'est pas une bijection.

♦ Exercice 3.b page 25

Considérons l'équation : (E) $\frac{1}{1 + |x|} = b$

$b|x| = 1 - b$

(E) solution unique $\Leftrightarrow b \neq 0$ et $\frac{1-b}{b} \geq 0$

$\Leftrightarrow b \in]0 ; 1]$

on a alors : $x = \frac{1-b}{b}$, d'où : $x \geq 0$.

$A = [0 ; +\infty[\quad ; \quad B =]0 ; 1]$.

♦ Exercice 3.c page 27

(1) $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$; $K = [2 ; +\infty[$

Tableau de variation

x	$-\infty$		$7/6$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗	2	↗	$+\infty$

f est continue et strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.
Elle détermine une bijection :

$F : [2 ; +\infty[\to [2 ; +\infty[$

$x \mapsto f(x)$

(2) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$; $K =]1 ; 5[$

Tableau de variation

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	⋮	$-$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$13/4$	↘	2

f détermine une bijection [voir (1)] :

$F :]1 ; 5[\to]\frac{13}{4} ; +\infty[$

$x \mapsto f(x)$

(3) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$; $K =]2 ; +\infty[$

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	▨	▨	▨	$-$	
$f(x)$	1	↘	0	▨	▨	$+\infty$ ↘	

f détermine une bijection [voir (1)] :

$F :]2 ; +\infty[\to]1 ; +\infty[$

$x \mapsto f(x)$

(4) $f(x) = -4x^3 + 6x + 5$; $K =]1 ; +\infty[$

Tableau de variation

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$		1	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	⋮	$-$
$f(x)$		↘		↗		↘	7	↘

f détermine une bijection [voir (1)] :

$F : [1 ; +\infty[\to]-\infty ; 7[$

$x \mapsto f(x)$

(5) $f(x) = \frac{x-2}{3x^2 - 2x + 8}$; $K = [0 ; 2]$

$D_f = \mathbb{R}$

Tableau de variation

x	$-\infty$		x_2		0		2		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		⋮	$+$	⋮		0	$-$	
$f(x)$		↘		↗	$-1/4$	↗	0	↗		↘	

$x_1 = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3} \approx 4,3$; $x_2 = \frac{6 - 4\sqrt{3}}{3} \approx -0,3$

f détermine une bijection [voir (1)] :

$F : \quad [0 ; 2] \to [-\frac{1}{4} ; 0]$

$x \mapsto f(x)$

♦ Exercice 3.d page 27

(1) $f(x) = 2x^3 - 24x + 3$

Tableau de variation

x	$-\infty$			-2			2			$+\infty$
$f'(x)$		$+$		0		$-$	0		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	0	↗	35	↘	0	-29	↗	0	$+\infty$

f détermine :

- une bijection de $]-\infty ; -2]$ dans $]-\infty ; 35]$
- une bijection de $[-2 ; 2]$ dans $[-29 ; 35]$
- une bijection de $[2 ; +\infty[$ dans $[-29 ; +\infty[$

f admet donc trois zéros.

(2) $g(x) = x^3 + 2x + 2$
Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	
$g(x)$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$

g est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Elle admet donc un unique zéro.

♦ **Exercice 3.e page 30**

(1) $\sqrt[3]{15\,625} = \sqrt[3]{25^3} = 25$.

(2) $\sqrt[6]{0.000064} = \sqrt[6]{(2\times10^{-1})^6} = 0,2$.

(3) $\sqrt[3]{1728\times81} = \sqrt[3]{2^6\times3^7} = 6^2\sqrt[3]{3}$.

(4) $\sqrt[4]{\sqrt{6561}} = \sqrt[4]{\sqrt{3^8}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$.

♦ **Exercice 3.f page 30**

(1) $\dfrac{\sqrt[3]{32}\times\sqrt{675}}{\ } = \dfrac{\sqrt[3]{2^5}}{\sqrt[3]{2^2}}\times\dfrac{\sqrt{5^2\times3^3}}{\sqrt{5\times3^4}}$

$= \sqrt[3]{2^3}\times\sqrt{\dfrac{5}{3}} = 2\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

(2) $\dfrac{12\times14^{-4/5}}{7^{-5/6}\times6^{-2/3}}$
$= 2^2\times3\times7^{-4/5}\times2^{-4/5}\times7^{5/6}\times2^{2/3}\times3^{2/3}$
$= 2^{28/15}\times3^{5/3}\times7^{1/30}$.

♦ **Exercice 3.g page 30**

(1) $5^{0,1} \approx 1,1746189$.
(2) $2^{0,142857} \approx 1,1040894$.
(3) $7^{1/3} \approx 1,19129312$.
(4) $8^{\sqrt{3}} \approx 36,6604458$.
(5) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{0,09} \approx 0,89337517$.
(6) $\dfrac{3^{-1,4}}{2^{6,2}} \approx 0,00292176$.

Exercices d'apprentissage

♦ **Exercice 1 page 32**

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3x^2+5x}{x+2} = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x+1}{x-1} = 1$.

♦ **Exercice 2 page 32**

x	$-2 \qquad -5$	2	3
$\lvert x-3\rvert$	$-x+3$	$-x+3$ $\boxed{0}$	$x-3$
$\lvert x+5\rvert$	$-x-5$ $\boxed{0}$	$x+5$	$x+5$
$f(x)$	$\dfrac{8}{(x-2)(x+2)}$	$\dfrac{-2x-2}{(x-2)(x+2)}$	$\dfrac{-8}{x^2-4}$

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty$.

♦ **Exercice 3 page 32**

$f(x) = \dfrac{2x-\sqrt{x+5}}{(x-1)(x+1)}$

On a : $\lim\limits_{x\to-1}(2x-\sqrt{x+5}) = -4 < 0$
$\lim\limits_{x\to1}(2x-\sqrt{x+5}) = 2-\sqrt{6} < 0$.

On obtient : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$.

♦ **Exercice 4 page 32**

x	$n-1$	n	$n+1$
$E(x)$	$n-1$	$\boxed{n}$	n
$f(x)$	$(n-1)x$		nx

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = 2$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to n\\x<n}} f(x) = n(n-1)$; $\lim\limits_{\substack{x\to n\\x>n}} f(x) = n^2$.

♦ **Exercice 5 page 32**

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} (\dfrac{1}{x}+1)(x^2+1) = +\infty$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{(1-2x)^2}{1-x} = +\infty$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{x^2-4x+1}{x-2} = -\infty$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} \dfrac{1-4x}{x^2-9} = +\infty$.

♦ **Exercice 6 page 32**

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{6x}{x+2} = 2$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \sqrt{3x+1} = 2$

donc $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 2$.

On prolonge f par continuité en 1 avec g.

$$\begin{cases} \text{pour } x \neq 1 \; g(x) = f(x) \\ g(1) = 2 \end{cases}$$

♦ Exercice 7 page 32

(1) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

On peut prolonger f par continuité en 0 par : $f(0) = 1$.

(2) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

On peut prolonger f par continuité en 0 par : $f(0) = 1$.

(3) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

On peut prolonger f par continuité en 0 par : $f(0) = 1$.

(4) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

On ne peut pas prolonger f par continuité en 0.

♦ Exercice 8 page 32 *(voir 7)*

Dans chacun des cas, on peut prolonger f par continuité en 1

(1) par : $f(1) = 2$

(2) par : $f(1) = \frac{1}{2}$

(3) par : $f(1) = 1$

(4) par : $f(1) = -1$.

♦ Exercice 9 page 32

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \left[\frac{1}{x^3}(x^2 - x + 1)\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 0$$

♦ Exercice 10 page 32

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

♦ Exercice 11 page 32

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7x^2}{x^2} = 7$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7x^2}{x^2} = 7$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

♦ Exercice 12 page 32

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

♦ Exercice 13 page 32

1\. (1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2 \times \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[x \times \frac{\sin(x^2)}{x^2}\right] = 0$

(3) $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{\sin x}{x}$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{2}{3} \times \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{3}$.

2\. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{a}{b} \times \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = \frac{a}{b}$.

3\. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \sin X = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} \sin\frac{1}{x} = 0.$

♦ Exercice 14 page 32

Considérons la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

donc : $f'(1) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(1 + x) - f(1)}{x}$

d'où : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x^2}\right] = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$.

♦ Exercice 15 page 32

$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \frac{2\sin^2 x}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2 \times \left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2$.

♦ Exercice 16 page 32

$1 \leq \ell \leq 2$.

♦ Exercice 17 page 32

(1) On a : $x - 2 \leq x + 2\cos x \leq x + 2$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 2\cos x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 2\cos x) = +\infty$

(2) On a : $x^2 - 2 \leq x^2 - 2\cos(x^3) \leq x^2 + 2$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} [x^2 - 2\cos(x^3)] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [x^2 - 2\cos(x^3)] = +\infty$.

♦ Exercice 18 page 32

(1) On a : $-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$

(2) On a : $-x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

(3) pour $x > 0$, $-\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} = 0$

(4) On a : $-|x^3| \leq x^3\cos\frac{1}{x} \leq |x^3|$

donc : $\lim\limits_{x \to 0} x^3\cos\frac{1}{x} = 0.$

♦ Exercice 19 page 32 *(voir 17)*

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty}(x + \sin x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty}(x + \sin x) = -\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x + \cos x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x + \cos x} = 0$

(3) On a : $x - 1 \leq x + \cos x \leq x + 1$

$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x} \leq 1$

d'où : $\frac{1}{3} \leq \lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{1}{2 + \sin x} \leq 1$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x + \cos x}{2 + \sin x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + \cos x}{2 + \sin x} = +\infty$

(4) On a : $\left|\frac{\sin x}{3x + 2}\right| \leq \frac{1}{|3x + 2|}$

donc : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{\sin x}{3x + 2} = 0$

(5) (voir (4)) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{\cos x}{x - 1} = 0.$

♦ Exercice 20 page 33

On a : $2x - 1 \leq 2x + \sin x \leq 2x + 1$

pour $x \geq 2$: $\frac{1}{x - 1} > 0$

d'où : $\frac{2x - 1}{x - 1} \leq \frac{2x + \sin x}{x - 1} \leq \frac{2x + 1}{x - 1}$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x + \sin x}{x - 1} = 2.$

♦ Exercice 21 page 33

On a : $\frac{-|x|}{1 + x^2} \leq \frac{x\cos x}{1 + x^2} \leq \frac{|x|}{1 + x^2}$

donc : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{x\cos x}{1 + x^2} = 0.$

♦ Exercice 22 page 33

pour $x > 0$, $\frac{x - 1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1$

pour $x < 0$, $1 \leq \frac{E(x)}{x} < \frac{x - 1}{x}$

donc : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{E(x)}{x} = 1.$

♦ Exercice 23 page33

(voir 1 g page 14)

♦ Exercice 24 page 33

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
2. On a : $f(x) = |x|\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} + 8x$

pour $x < 0$, $f(x) = x\left[-\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} + 8\right]$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$

♦ Exercice 25 page 33

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
2. On a : $f(x) = |x|\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - 3x$

pour $x > 0$, $f(x) = x\left[\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - 3\right]$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$

♦ Exercice 26 page 33

On obtient : $f(x) = \frac{3}{\sqrt{25x^2 + 3} + 5x}$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

♦ Exercice 27 page 33

(1) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{9 - x} = \frac{-1}{\sqrt{x} + 3}$

d'où : $\lim\limits_{x \to 9} f(x) = -\frac{1}{6}$

(2) $f(x) = \frac{\sqrt{x - 3}}{4 - \sqrt{6x - 2}} = \frac{4 + \sqrt{6x - 2}}{-6\sqrt{x - 3}}$

d'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = -\infty$

(3) $f(x) = \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{x - 2} = \frac{1}{\sqrt{x + 7} + 3}$

d'où : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{6}$

(4) $f(x) = \frac{\sqrt{5 + x^2} - \sqrt{5}}{4x^2} = \frac{1}{4(\sqrt{5 + x^2} - \sqrt{5})}$

d'où : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{8\sqrt{5}}$

(5) $f(x) = \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x + 1)(\sqrt{x + 3} + 2)}$

d'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \frac{1}{8}$

(6) $f(x) = \frac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{2}}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x - 2)(\sqrt{x + 4} + \sqrt{2})}$

d'où : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\frac{1}{8\sqrt{2}}.$

♦ Exercice 28 page 33

2. $f(x) - 1 = \sqrt{3x + 1} - \sqrt{3x} = \frac{1}{\sqrt{3x + 1} + \sqrt{3x}}$

or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{3x + 1} + \sqrt{3x}} = 0$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1.$

◆ **Exercice 29 page 33**

(1) On considère $f : x \mapsto \sqrt{7x-5}$

donc : $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{7x-5}-3}{x-2} = \dfrac{7}{6}$

(2) On considère $f : x \mapsto \sin\pi x$

donc : $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin\pi x - 0}{x-1} = -\pi$

(3) On considère $f : x \mapsto \sin x$

d'où : $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = 0$

(4) On considère $f : x \mapsto \sin x$

d'où : $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}} = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x - 1}{6x - \pi} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

(5) On considère $f : x \mapsto \cos x$

d'où : $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x - 1}{3x - \pi} = \dfrac{2}{3} \times -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(6) On considère $f : x \mapsto \cos x$

d'où : $f'(\pi) = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos x + 1}{x - \pi} = -\sin\pi = 0$.

◆ **Exercice 30 page 33**

(1) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a$

(2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x - a} = -\sin a$.

◆ **Exercice 31 page 33**

2. (1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \times \sqrt{x}\right) = 0$

(5) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x} \times \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$

(6) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x} \times \dfrac{x}{\sin x}\right) = 1$

(7) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x} - \dfrac{\sin x}{x}\right) = 0$

(8) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{1 - \cos X}{X} = 0$.

◆ **Exercice 32 page 33**

(1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2} \times \left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2 = 2$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2} \times \dfrac{x}{\tan x} = 2$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \times \dfrac{x^2}{1 - \cos 2x} = 0$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos 2x} \times \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{2}$

◆ **Exercice 33 page 33**

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (5x^2 + x + 1) = 1$

et $f(0) = 1$ donc f est continue sur R

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (7x^2 - 3x2 + 0) = 9$

et $f(0) = 9$ donc f est continue sur $]-\infty ; 0]$.

◆ **Exercice 34 page 33**

(1) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{8x - 13}{4x + 1} = -1$

pour $f(1) = -1$, f est continue sur R

(2) Pour $x \neq 7$, $f(x) = \dfrac{(x-7)\sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 7}$

et $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = \sqrt{57}$

pour $f(7) = \sqrt{57}$, f est continue sur R.

◆ **Exercice 35 page 34**

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} = \dfrac{1}{5}$

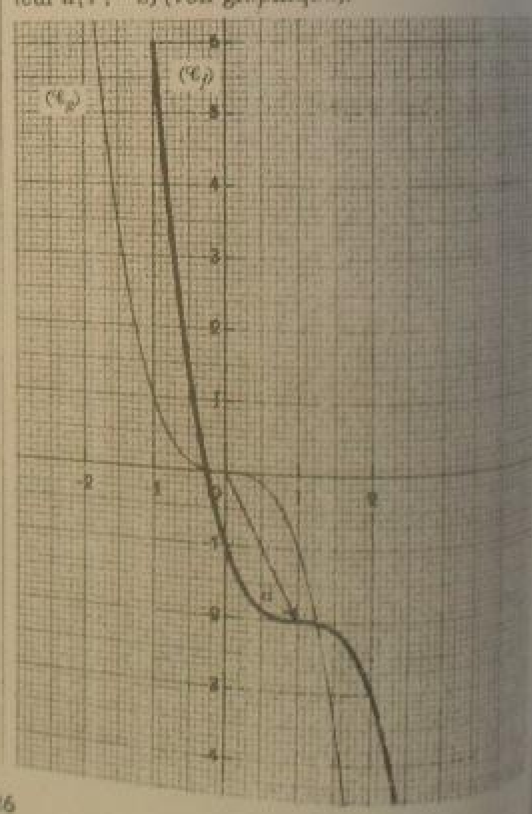
donc pour $f(-1) = 1$ et $f(1) = \dfrac{1}{5}$

f est continue sur $[-1 ; 1]$.

◆ **Exercice 36 page 34**

1. $f(x) = g(x - 1) - 2$

$(\mathscr{C}_f)$ est l'image de $(\mathscr{C}_g)$ par la translation de vecteur $\vec{u}(1 ; -2)$ (voir graphique).



2. La fonction g étant strictement décroissante, puisque $(\mathscr{C}_g) = t_{\vec{u}}(\mathscr{C}_f)$,
f est aussi une fonction strictement décroissante.

3. Graphiquement, on obtient :

$f(]-1\,;2[) =]-3\,;6[$

$f([0\,;+\infty[) =]-\infty\,;-1]$

La fonction f étant continue et strictement décroissante, on obtient par le calcul :

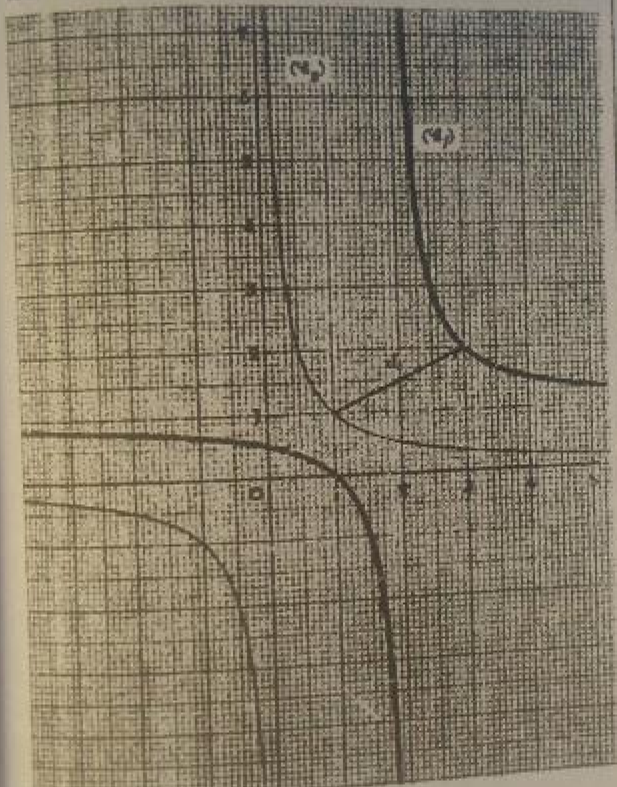
$f(]-1\,;2]) = [f(2)\,;\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x)[$

$f([0\,;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,;f(0)]$.

◆ **Exercice 37 page 34**

1. $f(x) = g(x-2)+1$

$(\mathscr{C}_f)$ est l'image de $(\mathscr{C}_g)$ par la translation de vecteur $\vec{u}(2\,;1)$.



2. Voir le 37.

3. Graphiquement, on obtient :

$f([-2\,;2[) =]-\infty\,;0{,}75]$

$f([3\,;+\infty[=]1\,;2]$

Par le calcul, on obtient :

$f(]-2\,;2]) =]\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} f(x)\,;f(-2)] =]-\infty\,;\frac{3}{4}]$

$f([3\,;+\infty[) =]\lim\limits_{x \underset{>}{\to} \infty} f(x)\,;f(3)] =]1\,;2]$.

◆ **Exercice 38 page 34**

$f(]-4\,;-3[) =]3\,;+\infty[$

$f(]-3\,;0]) = [0\,;+\infty[$

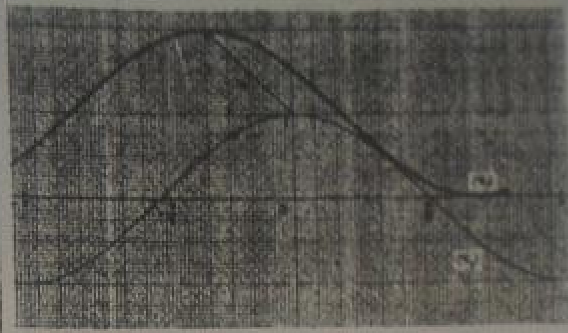
$f(]-3\,;+\infty[) =]-2\,;+\infty[$

$f(]-\infty\,;-4[) =]1\,;3]$.

◆ **Exercice 39 page 34**

1. $f(x) = g(x+\frac{\pi}{3})+1$, d'où : $(\mathscr{C}_f) = t_{\vec{u}}(\mathscr{C}_g)$

avec $\vec{u}(-\frac{\pi}{3}\,;1)$ (voir graphique).



2. Graphiquement, on obtient : $2 < \alpha < 3$.

Par une calculatrice programmable, on obtient : $2{,}09 < \alpha < 2{,}10$.

◆ **Exercice 40 page 34**

1. $f(x) = (x+2)^2 - 47$

$f'(x) = 2(x+2)$

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. f détermine une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[f(0)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$,

c'est à dire sur $[-43\,;+\infty[$.

Or : $0 \in [-43\,;+\infty[$,

donc f admet un unique zéro α sur $\mathbb{R}^+$.

2. On a : $f(4) = -11$; $f(5) = 2$; donc : $4 < \alpha < 5$.

Par une calculatrice programmable, la méthode de balayage donne : $4{,}85 < \alpha < 4{,}86$.

◆ **Exercice 41 page 34**

Les fonctions f, g, h ne sont pas des bijections de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

En effet :

$f(x) = 0$ n'a pas de solution ;

$g(x) = 0$ n'a pas de solution ;

$h(x) = -10$ n'a pas de solution.

◆ **Exercice 42 page 34**

$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x^2 + \sqrt{x^2+1}$

$f'(x) = x\left(2 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\boxed{1}$	$\nearrow$	$+\infty$

f définie une bijection de $]-\infty\,;0]$ dans $[1\,;+\infty[$

f définie une bijection de $[0\,;+\infty[$ dans $[1\,;+\infty[$.

♦ **Exercice 43 page 34**

$A = f(]-\infty\,;0]) = [-2\,;+\infty[$

$B = f([0\,;1]) = [-2\,;3]$

$C = f([1\,;+\infty[) =]-\infty\,;3]$.

♦ **Exercice 44 page 34**

1. $f'(x) = 2(x+1)$

pour $x \in]-1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$

f est donc continue et strictement croissante.

$f(]-1\,;+\infty[) =]-4\,;+\infty[$.

f est donc une bijection.

2. Résolution dans $]-1\,;+\infty[$ de l'équation.

(E) $f(x) = k\,;\,k \in]-4\,;+\infty[$

(E) admet une unique solution $x_0 > -1$:

$x_0 = -1 + \sqrt{4+k}$

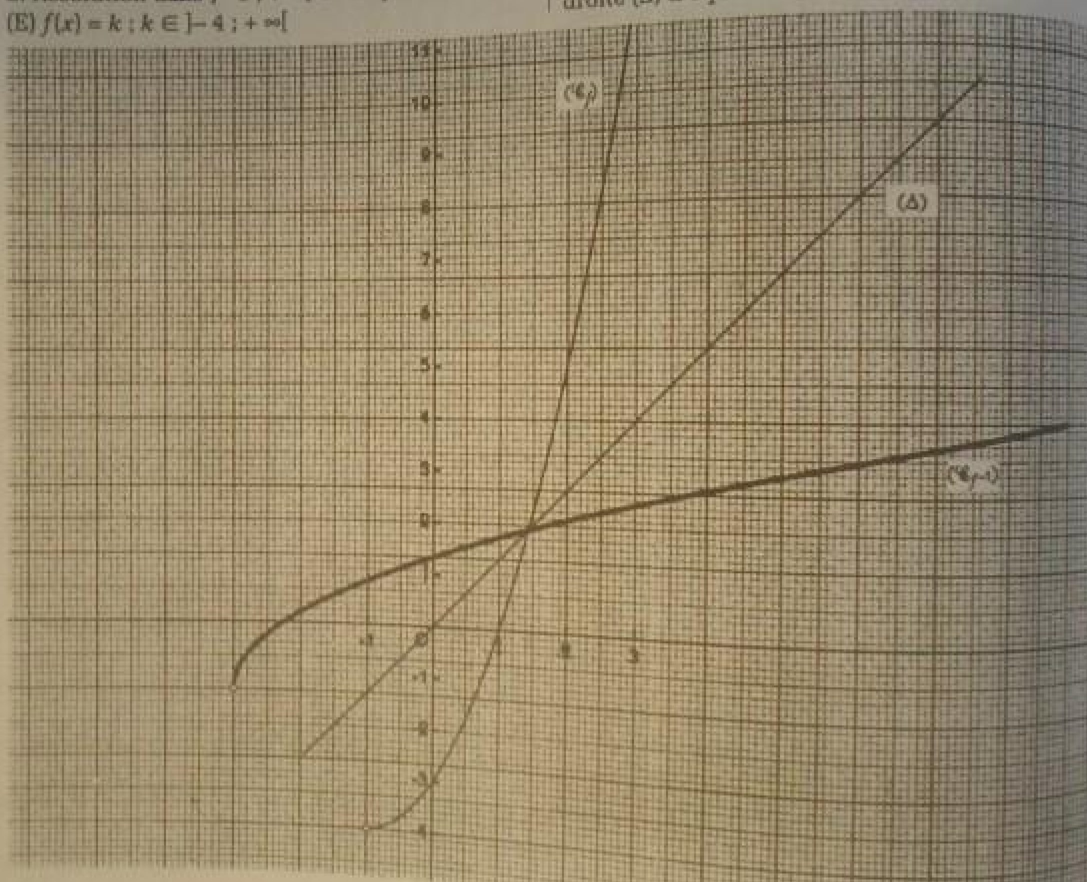
Bijection réciproque :

$$f^{-1} :]-4\,;+\infty[\ \mapsto\ ]-1\,;+\infty[$$
$$x \to -1 + \sqrt{4+x}$$

3. f^{-1} varie dans le même sens que f.

x	-4 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f^{-1}(x)$	$\boxed{-1}$ $\nearrow$ $+\infty$

4. $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ et $(\mathscr{C}_f)$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.



♦ **Exercice 45 page 34**

(1) $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$; (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (3) 0 ; (4) $\frac{1}{16}$; (5) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

2. Dérivée - Primitive

(pages 35 à 58 du livre de l'élève)

Ce chapitre vise essentiellement à :
- introduire la notion de dérivée à gauche / à droite et la notion de dérivation sur un intervalle ;
- compléter les méthodes de détermination de dérivée par la dérivée de fonction composée ;
- compléter les utilisations de la dérivée par la recherche des encadrements ;
- introduire la notion de primitive ;
- initier les élèves à la détermination des primitives à partir des formules de dérivation.

• La notion de dérivée participe à l'interdisciplinarité avec les sciences physiques. Le professeur de mathématiques devra donc être à l'écoute de ses collègues dans la formation de ses élèves. C'est pour cette raison que les auteurs du manuel de l'élève ont fourni des interprétations de la notion de dérivée. L'élève de Terminale pourra alors de construire une culture scientifique, indispensable à une bonne maîtrise des connaissances et de leurs utilisations.

Dans ce cadre, on relèvera :
- les trois interprétations du nombre dérivé (géométrique, cinématique et numérique).
- l'utilisation d'un vocabulaire mieux adapté :

tangente à gauche / à droite
point anguleux
point d'inflexion ...

Dans un tel chapitre consacré en partie à la mise en place des outils d'étude de fonctions, l'introduction de ces outils ne fera pas l'objet d'une évaluation, ainsi que toute activité contribuant à consolider la culture scientifique de l'élève.

Seules les méthodes d'utilisation de ces outils et les techniques de détermination seront des compétences exigibles.

C'est ainsi que la détermination de la dérivée d'une application réciproque est présentée sous forme de méthode et non de propriété, afin de lui enlever son côté rébarbatif.

Le tableau récapitulatif de la page 46 donne à l'élève l'essentiel à mémoriser sur ce thème et à ce niveau.

• Les primitives sont introduites comme " opération inverse " des dérivées. Leur introduction est faite à partir des fonctions élémentaires afin d'assurer une mémorisation plus graduelle, voir tableau récapitulatif de la page 53.

Dans ce tableau, les opérations et compositions permettent, après les fonctions élémentaires, d'aborder de manière naturelle les fonctions plus complexes. Ici c'est l'opération utilisée qui doit être mémorisée dans une première étape.

De nombreux exemples fournissent à l'élève des méthodes pratiques de détermination de primitives.

savoirs	savoir-faire
Dérivation • Définitions - Fonction dérivable en a - Nombre dérivé - Dérivabilité à gauche / à droite - Tangente à gauche / à droite • Propriété Tangente verticale • Vocabulaire Fonction dérivable sur un intervalle	• Déterminer la dérivée à gauche / à droite en a d'une fonction Étudier la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles • Interpréter graphiquement la dérivabilité à gauche / à droite en a d'une fonction • Prouver l'existence d'une tangente verticale • Déterminer la dérivée d'une fonction composée

savoirs	savoir-faire
Fonctions dérivées • Définitions Dérivées successives • Propriétés – Dérivée de fonction composée – Nombre dérivé en a de la réciproque d'une fonction dérivable strictement monotone – Inégalités des accroissement finis	• Calculer le nombre dérivé en a de la réciproque d'une fonction dérivable strictement monotone
Primitives • Définitions Primitive d'une fonction sur un intervalle • Propriétés – Existence de primitive sur un intervalle de toute fonction continue – Ensemble de primitives sur un intervalle d'une fonction continue – Unicité de la primitive sur un intervalle d'une fonction continue qui prend une valeur donnée en a – Primitives sur un intervalle de la combinaison linéaire de deux fonctions continues	• Déterminer les primitives d'une fonction en utilisant les primitives de référence • Déterminer la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en a • Déterminer les primitives d'une fonction des types : $\alpha u + \beta v$; $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$ $v' \times (u' \circ v)$ $u' \times u^n$; $n \in \mathbb{Q} \backslash \{-1\}$

EXERCICES DU MANUEL

Exercices d'application directe

◆ Exercice 1.a page 36

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = f'(1)$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 = f'(0)$

◆ Exercice 1.b page 36

(1) $f(x) = 3x^2 + 1$

$f'(x) = 6x$

Pour h voisin de 0, on a :

$f(3 + h) = f(3) + f'(3) \cdot h$

$f(3 + h) = 28 + 18h$

La fonction affine $g : h \mapsto 18h + 28$ permet d'approcher $f(3 + h)$ pour h voisin de 0.

(2) $f(x) = -\dfrac{2}{x + 2}$

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x + 2)^2}$

Pour h voisin de zéro, on a :

$f(1 + h) = f(1) + f'(1) \cdot h$

$f(1 + h) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{9} h$

La fonction affine $g : h \mapsto -\dfrac{2}{9} h + \dfrac{2}{3}$ permet d'approcher $f(1 + h)$ pour h voisin de 0.

◆ Exercice 1.c page 40

(1) $f(x) = x^2 + 3x - |x|$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$x^2 + 4x$	0	$x^2 + 2x$

$f_1 : x \mapsto x^2 + 4x$; $f_1'(x) = 2x + 4$

$f_2 : x \mapsto x^2 + 2x$; $f_2'(x) = 2x + 2$

$f_g'(0) = f_1'(0) = 4$

$f_d'(0) = f_2'(0) = 2$

f n'est pas dérivable en 0.

(2)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	x^2	1	$\dfrac{3x^2 + 1}{4}$

$f_1 : x \mapsto x^2$; $f_1'(x) = 2x$

$f_2 : x \mapsto 3x^2 + \dfrac{1}{4}$; $f_2'(x) = \dfrac{3}{2} x$

$f_g'(1) = f_1'(1) = 2$

$f_d'(1) = f_2'(1) = \dfrac{3}{2}$

f n'est pas dérivable en 1.

◆ Exercice 1.d page 40

(1) f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$

(2) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

(3) f est dérivable sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$

(4) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(5) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(6) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

◆ Exercice 2.a page 41

(1) pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}\,;\; f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$

(2) pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$f(x) = x-2\,;\; f'(x) = 1\,;\; f''(x) = 0$

(3) $f'(x) = 4\cos 4x\,;\; f''(x) = -4^2\sin 4x$

(4) $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{x}\,;\; f''(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{2x}}$

◆ Exercice 2.b page 43

(1) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(2) $f'(x) = 4(8x-1)(4x^2-x-1)^3$

(3) $f'(x) = 15x^2 - \dfrac{x}{\sqrt{-x^2+2}}$

(4) $f'(x) = -4\sin x\cos^3 x$

(5) $f'(x) = \dfrac{2x}{\cos^2(x^2-4)}$

(6) $f'(x) = 4\cos x\sin x + 2x$

(7) $f'(x) = 8(1-2x)\sin(1-2x)^2$

(8) $f'(x) = -5\cos(1-5x)$

(9) $f'(x) = 4\cos x\sin x$

(10) $f'(x) = 2 \times \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$

(11) $f'(x) = 9x^2\sin(4-x^3)\cos^2(4-x^3)$

◆ Exercice 2.c page 45

$f'(x) = \dfrac{7}{(x+3)^2}$

Tableau de variation

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2

• f est une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

• Calcul de $(f^{-1})'(1)$

on a : $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 4$

d'où : $f^{-1}(1) = 4\,;\; f'(4) = \dfrac{1}{7}$

donc : $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(1)]} = 7$

◆ Exercice 2.d page 45

• Le tableau de variation f montre que f est une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1\,;1]$.

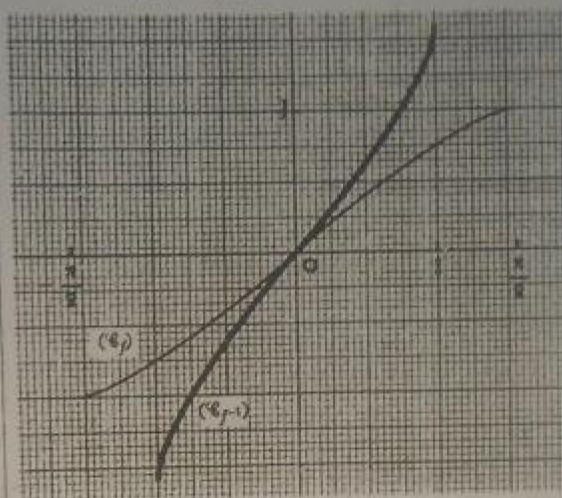
• Calcul de $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right)$

on a : $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{f'\left[(f^{-1})\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]}$

$f(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} = (f^{-1})\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

donc : $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.



◆ Exercice 2.e page 48

$f'(x) = -\sin x$

pour $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $-1 \leq f'(x) \leq 0$

En appliquant l'inégalité des accroissement finis à f sur $[0\,;x]$, on obtient :

$$-1 \times (x-0) \leq f(x) - f(0) \leq 0 \times (x-0)$$

$$1 - x \leq \cos x \leq 1.$$

◆ Exercice 2.f page 48

$f'(x) = \cos x$

pour $x \in [0\,;+\infty[$, $-1 \leq f'(x) \leq 1$

d'où : $-x \leq \sin x \leq x$.

(Voir exercice 2.f)

◆ Exercice 2.g page 48

$f'(x) = 1 + \tan^2 x$

Pour $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $1 + \tan^2 x \geq 1$

d'où : $|\tan x - \tan 0| \geq 1 \times |x - 0|$

$\tan x \geq x$.

◆ Exercice 3.a page 50

Il suffit de vérifier dans chacun des cas que :

$F'(x) = f(x)$.

◆ Exercice 3.b page 50

(1) Les primitives sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 5x^4 + 6$ sont les fonctions :

$F : x \mapsto x^3 + 6x + c \,;\, c \in \mathbb{R}$.
Puisque $F(1) = 0$, on obtient $c = -7$,
donc $F : x \mapsto x^3 + 6x - 7$.

(2) $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \,;\, x_0 = 1 \,;\, y_0 = 1$.
$F(x) = x\sqrt{x}$.

(3) $f(x) = x + 5 \,;\, x_0 = -2 \,;\, y_0 = 2$.
$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 10$.

(4) $f(x) = \sin x \,;\, x_0 = \frac{\pi}{2} \,;\, y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
$F(x) = -\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

♦ Exercice 3.c page 54

(1) $f(x) = x^4 - 2x^3$
$F : x \mapsto \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$.

(2) $f(x) = \frac{5}{x^2}$
$F : x \mapsto -\frac{5}{x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$.

(3) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
$F : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$

(4) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$
$F : x \mapsto -\frac{1}{x} - 4\sqrt{x}$ est une primitive de f sur

(5) $f(x) = (x + 2)^3$
$F : x \mapsto \frac{1}{4}(x + 2)^4$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

(6) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$
$F : x \mapsto \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

♦ Exercice 3.d page 54

(1) $F : x \mapsto \frac{x^3}{9} - \frac{2}{x - 3} - \frac{5}{3}$.

(2) $F : x \mapsto -\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{x} + \frac{11}{2}$.

(3) $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2x^2} + 4$.

Exercices d'apprentissage

♦ Exercice 1 page 56

1. Prolongement par continuité en 0

$$\begin{cases} \text{pour } x \in]0\,;+\infty[,\ g(x) = f(x) \\ g(0) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

2. On a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -\frac{25}{8}$$

g est donc dérivable en 0 et $g'(0) = -\frac{25}{8}$.

♦ Exercice 2 page 56

a) f_a est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

b) pour $x \neq 0$, $f'_a(x) = \frac{x^3 - x - 2a}{x^3}$.

c) $f'_a(-1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

♦ Exercice 3 page 56

(1) $f(x) = |x^2 - 1|$

$$f'_g(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(-1 - x) = -2$$

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = = \lim_{x \to 1}(1 + x) = 2$$

f n'est pas dérivable en 1.

(2) $f(x) = \frac{x - 2}{2 - |x|} \,;\, x_0 = 0$

$f'_g(0) = 1 \,;\, f'_d(0) = 0$
f n'est pas dérivable en 0.

(3) $$\begin{cases} \text{pour } x \in [0\,;1],\ f(x) = 5x^2 - 3 \\ \text{pour } x \in [1\,;3],\ f(x) = 3x - 1 \end{cases}$$

$f'_g(1) = 10 \,;\, f'_d(1) = 3$
f n'est pas dérivable en 1.

♦ Exercice 4 page 56

(1) $f(x) = \sqrt{1 - x} \,;\, x_0 = 1$
$D_f =]-\infty\,;1]$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$$

donc f n'est pas dérivable en 1, mais $(\mathscr{C})$ admet une tangente verticale au point $M_0(1\,;0)$.

(2) $$\begin{cases} \text{pour } x \in [0\,;+\infty[,\ f(x) = \sqrt{x} \\ \text{pour } x \in]-\infty\,;0],\ f(x) = -\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

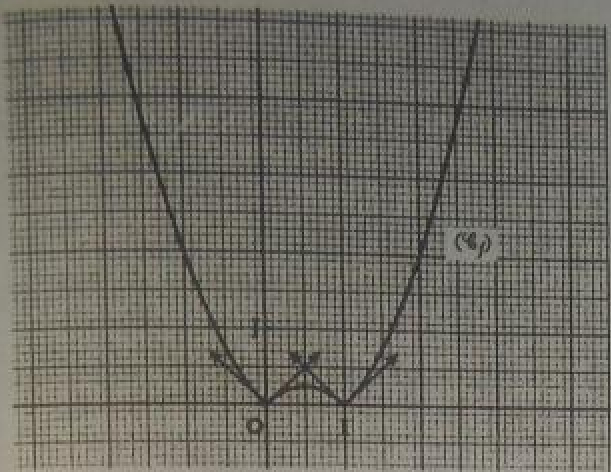
donc f n'est pas dérivable en 0, mais $(\mathscr{C})$ admet une tangente verticale au point 0.

♦ Exercice 5 page 56

x	$-\infty$ 0	0 1	1 $+\infty$
$f(x)$	$x(x-1)$	$-x(x-1)$	$x(x-1)$
$f'(x)$	$2x - 1$	$-2x + 1$	$2x - 1$

• f est est dérivable sur $]-\infty\,;0[$, sur $]0\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.
• f est non dérivable en 0 car $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$

• f est non dérivable en 1 car $f'_g(1) = -1$ et $f'_d(0) = 1$ (voir graphique).



♦ **Exercice 6 page 56**

• f est dérivable sur $]-1\,;1[$

$f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$

• En -1, f n'est pas dérivable car :

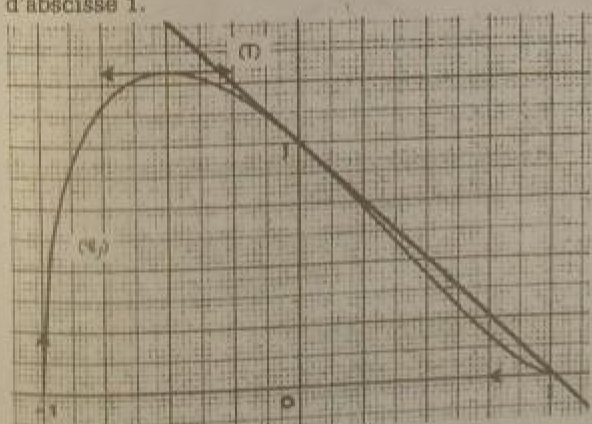
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = +\infty$

$(\mathscr{C}_g)$ admet une tangente verticale au point d'abscisse -1.

• En 1, f est dérivable car : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = 0$

$f'_g(1) = 0$

$(\mathscr{C}_g)$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.



♦ **Exercice 7 page 56**

(1) $f'(x) = \dfrac{14x^2 - 4x + 79}{(7x-1)^2}$

(2) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$

(3) $f'(x) = \dfrac{-9}{(3x-8)^4}$

(4) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

♦ **Exercice 8 page 56**

(1) $f'(x) = \cos x - \sin x$

(2) $f'(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$

(3) $f'(x) = \dfrac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}$

(4) $f'(x) = -\dfrac{2\cos x}{\sin^4 x}$.

♦ **Exercice 9 page 56**

(1) $f'(x) = \dfrac{-2\cos x}{(\sin x - 1)^2}$

(2) $f'(x) = \dfrac{2(1+\tan^2 x)}{(1-\tan x)^2}$.

♦ **Exercice 10 page 56**

(1) $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$

$f'''(x) = \dfrac{-6}{(x+1)^4}$

(2) $f'(x) = 10x^4 - 12x^2$

$f''(x) = 40x^3 - 24x$

$f'''(x) = 120x^2$

(3) $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{6}{(x+1)^3}$

$f'''(x) = \dfrac{-18}{(x+1)^3}$

(4) $f'(x) = \dfrac{11}{(3x-1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{-66}{(3x-1)^3}$

$f'''(x) = \dfrac{594}{(3x-1)^4}$.

♦ **Exercice 11 page 56**

(1) $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$

(2) $f'(x) = -\sin x$; $f''(x) = -\cos x$

(3) $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$; $f''(x) = \dfrac{3}{4}\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

(4) $f'(x) = -2\sin 2x$; $f''(x) = -4\cos 2x$.

♦ **Exercice 12 page 56**

(1) $f'(x) = (2x-1)\cos(x - x^2)$

(2) $f'(x) = -(2x+3)\sin(x^2+3x)$

(3) $f'(x) = 3\cos(3x - \frac{\pi}{4})$

(4) $f'(x) = -6\sin(3x + \frac{\pi}{4})\cos(3x + \frac{\pi}{4})$

(5) $f'(x) = \dfrac{6x^3}{\sqrt{3x^4+7}}$

(6) $f'(x) = \dfrac{-(2x+1)}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

(7) $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

(8) $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x\sqrt{x}(1+x^2)}$

(9) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

(10) $f'(x) = \dfrac{-\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}$.

◆ Exercice 13 page 57

• Tableau de variation de f

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1

f est une bijection de $]0\,;\frac{\pi}{2}]$ dans $[1\,;+\infty[$.

• Calcul de $(f^{-1})'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$$(f^{-1})'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right]} = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})} = -\frac{3}{2}.$$

◆ Exercice 14 page 57

• Tableau de variation de f

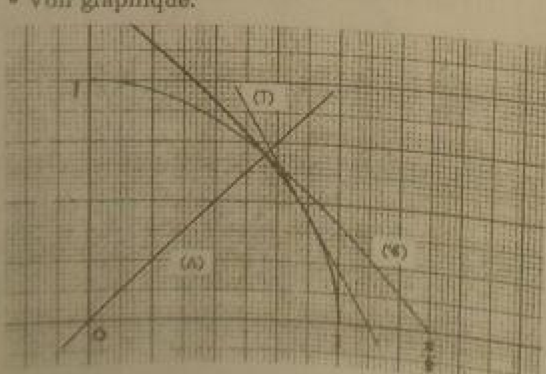
x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

f est une bijection de $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ dans $[0\,;1]$.

• Calcul de $(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]} = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{6})} = -2.$$

• Voir graphique.



◆ Exercice 15 page 57

(1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; $f'(x) = 3(x^2-1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(3) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2+9}$; $f'(x) = \dfrac{36x}{(x^2+9)^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

(4) $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$; $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

◆ Exercice 16 page 57

pour $x \in \,]0\,;\frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = \cos x$; $0 \leq \cos x \leq 1$.

Inégalité des accroissements finis appliquée à f sur $[0\,;x]$ donne pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:

$$0(x-0) \leq f(x) - f(0) \leq 1(x-0)$$
$$0 \leq \sin x \leq x$$

◆ Exercice 17 page 57

(1) $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + 3x + c$

(2) $F(x) = \dfrac{1}{8}(2x-1)^4 + c$

(3) $F(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - 3x + c$

(4) $F(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^3}{3} - x + c$

(5) $F(x) = \dfrac{1}{6}(2x+1)^{15} + c$.

◆ Exercice 18 page 57

(1) $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{x} - 2x + c$

(2) $F(x) = -\dfrac{1}{x-1} + c$ (3) $F(x) = x^2 + 3x - \dfrac{4}{x} + c$

(4) $F(x) = -\dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{x} + c$ (5) $F(x) = -\dfrac{1}{2(2x+1)} + c$.

♦ **Exercice 19 page 57**

(1) $F(x) = -2\sqrt{x} + c$ (2) $F(x) = 2\sqrt{x-1} + c$

(3) $F(x) = \sqrt{x} + c$ (4) $F(x) = 2\sqrt{2x+1} + c$.

♦ **Exercice 20 page 57**

(1) $F(x) = -\dfrac{1}{4}\cos^4 x + c$ (2) $F(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\cos x}} + c$

(3) $F(x) = \dfrac{1}{4}\sin^4 x + c$ (4) $F(x) = -\dfrac{1}{6}\cos^3 2x + c$.

♦ **Exercice 21 page 57**

(1) $F(x) = \dfrac{1}{5}(x-1)^5 - \dfrac{1}{5}$ (2) $F(x) = \dfrac{1}{2(1-x)^2} - \dfrac{1}{2}$.

♦ **Exercice 22 page 57**

(1) $F(x) = -\dfrac{\cos x}{x} + \cos 1 + 1$

(2) $F(x) = -\dfrac{\sin x}{x} + \sin 1 + 1$.

♦ **Exercice 23 page 57**

1. $f(0) = 2$ et $f'(0) = 3$, d'où : $a = 3$, $b = 2$.
2. pour $x < -\dfrac{1}{3}$ $(\mathscr{C})$ au-dessus de (T)

   pour $x > -\dfrac{1}{3}$ $(\mathscr{C})$ en-dessous de (T)

3.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	$\boxed{0}$	$-$	
$f(x)$	1	↘		↗		↘	1

$f'(x) = \dfrac{-3x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)^2}$

zéros de f' : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{10}}{3}$; $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{10}}{3}$

$f(x_1) = \dfrac{3-\sqrt{10}}{2}$; $f(x_2) = \dfrac{3+\sqrt{10}}{2}$.

♦ **Exercice 24 page 57**

1. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x$

On obtient : $f'(x) = 0$.

2. $f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$, d'où : $f'(x) = 0$.

♦ **Exercice 25 page 58**

1. $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 2\sin^3 x\cos^3 x$

$f'(x) = 6\sin x\cos x(\sin x - \cos x)(\sin^3 x + \cos^3 x)$.

2. $f(x) = (\sin^3 x + \cos^3 x)^2$

$f'(x) = 6(\sin^3 x + \cos^3 x)(\cos x\sin^2 x - \sin x\cos^2 x)$

$= 6\sin x\cos x(\sin x - \cos x)(\sin^3 x + \cos^3 x)$.

♦ **Exercice 26 page 58**

(1) $f(1) = 0$; f est continue sur R.

f est dérivable sur $]-\infty ; 1[$, sur $]1 ; +\infty[$.

On considère les fonctions :

$f_1 : x \mapsto \dfrac{x-1}{x-2}$; $f_2 : x \mapsto m(x^2-1)$

$f'_g(1) = f'_1(1) = -1$; $f'_d(1) = f'_2(1) = 2m$

f dérivable sur R $\Leftrightarrow f'(1) = f'_d(1) \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

(2) $f(0) = m$; f est continue sur R.

f est dérivable sur $]-\infty ; 0[$, sur $]0 ; +\infty[$.

$f'_g(0) = m - 1$; $f'_d(0) = 1$

f dérivable sur R $\Leftrightarrow m = 2$.

♦ **Exercice 27 page 58**

f dérivable est paire sur 0 si et seulement si partout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$,

d'où : $-f'(-x) = f'(x)$, ce qui signifie que f' impaire.

Exemple : $f(x) = \cos x$.

♦ **Exercice 28 page 58**

(1) $f(x) = x - \sin x$; $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

donc pour $x \in [0 ; +\infty[$, $f(x) \geq 0$.

(2) $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + \cos x$; $g'(x) = x - \sin x \geq 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

donc pour $x \in [0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

♦ **Exercice 29 page 58**

1. $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x = \sin(x + \dfrac{\pi}{2})$

$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2 \times \dfrac{\pi}{2})$

$f^{(3)}(x) = -\cos x = \sin(x + 3 \times \dfrac{\pi}{2})$

$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin(x + 4 \times \dfrac{\pi}{2})$

Supposons que pour un nombre entier k,

$f^{(k)}(x) = \sin(x + k \times \dfrac{\pi}{2})$

d'où : $f^{(k+1)}(x) = \cos(x + k \times \dfrac{\pi}{2})$

$= \sin[x + (k+1) \times \dfrac{\pi}{2}]$

donc pour tout nombre entier n,

$f^{(n)}(x) = \sin(x + n \times \dfrac{\pi}{2})$.

2. $g(x) = \cos x$

On démontre de la même manière qu'en 1 :

pour tout nombre entier naturel n,

$g^{(n)}(x) = \cos(x + n \times \dfrac{\pi}{2})$.

◆ **Exercice 30 page 58**

$f(x) = \sin 2x$

$f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$

$f''(x) = 2\cos 2x = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2})$

$f^{(3)}(x) = -4\sin 2x = 4\sin(2x + 2 \times \frac{\pi}{2})$

On démontre par récurrence que *(voir exercice précédent)* :

pour tout nombre entier naturel n,

$f^{(n)}(x) = 2^{n-1}\sin(2x + \frac{n-1}{2}\pi)$.

◆ **Exercice 31 page 58**

1. $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ $\qquad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$

$f^{(3)}(x) = \frac{-2 \times 3}{(x+1)^4}$

On démontre par récurrence que pour tout nombre entier naturel n,

$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{(x+1)^{n+1}}$.

2. $g(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

On obtient :

$g(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}$ $\qquad g(x) = 2f(x) + 3f'(x)$

Pour tout nombre entier naturel n,

$g^{(n)}(x) = 2f^{(n)}(x) + 3f^{(n+1)}(x)$.

◆ **Exercice 32 page 58**

1. (T) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = 2x + 1$

L'équation $f'(x) = 2$ admet deux solutions : 0 et 2. Donc il existe un autre point M(2 ; 9) de $(\mathscr{C}_g)$ où la tangente est parallèle à (T).

2. $f'(x) = 0$ admet deux solutions, d'où existence de deux tangentes à $(\mathscr{C}_g)$ de cœfficient directeur 0.

$f'(x) = 3$ n'a pas de solution.

3. (D) $y = -\frac{11}{4}x + \frac{1}{4}$

$f'(x) = -\frac{11}{4} \Leftrightarrow [x = -1 \text{ ou } x = 3]$.

◆ **Exercice 33 page 58**

$f(x) = \frac{4}{(x-2)^2} - 1$

Sur $]-\infty\,;2[$ ou $]2\,;+\infty[$, f admet des primitives F ;

$F(x) = -\frac{4}{x-2} - x + c\,; c \in \mathbb{R}$.

◆ **Exercice 34 page 58**

1. $f(x) = 3 + \frac{2}{(x-1)^2}$

2. Sur $]1\,;+\infty[$, primitives de la forme :

$F(x) = 3x - \frac{2}{x-1} + c\,; c \in \mathbb{R}$.

3. $F(3) = 8 \Leftrightarrow c = 0$.

◆ **Exercice 35 page 58**

1. f est dérivable à droite en 3,

donc f est dérivable sur $[3\,;+\infty[$;

$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x-3}$

2. $F(x) = \frac{2}{3}(x-3)\sqrt{x-3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

◆ **Exercice36 page 58**

1. $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$.

2. $F(x) = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + c$.

◆ **Exercice 37 page 58**

1. $(1-\cos^2 x)^2 = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$

2. $f(x) = \sin^5 x = \sin x(1-\cos^2 x)^2$

$= \sin x - 2\sin x\cos^2 x + \sin x\cos^4 x$

$F(x) = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$.

3. $g(x) = \cos 5x = \cos x - 2\cos x\sin^2 x + \cos x\sin^4 x$

$G(x) = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c$.

◆ **Exercice 38 page 58**

$f(x) = 15\cos x + 6\cos 2x + \cos 3x$

1. $f'(x) = -15\sin x - 12\sin 2x - 3\sin 3x$.

2. $\sin 3x = \sin(x + 2x)$

$= \sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x$

$= \sin x(2\cos^2 x - 1) + 2\cos x\sin x\cos x$

$= \sin x(4\cos^2 x - 1)$

$f'(x) = -12\sin x(1 + \cos x)^2$.

3. $f(x) = 4(1+\cos x)^3 + c\,; c \in \mathbb{R}$.

La question 1. donne $f(0) = 22$;

la question 2. donne $c = -10$.

◆ **Exercice 39 page 58**

$f(x) = \sin 3x$; $g(x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$

1. $\sin 3x = \sin 2x\cos x + \sin x(1 - 2\sin^2 x)$

$= 2\sin x\cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x$.

$= 3\sin x - 4\sin^3 x$.

2. $f'(x) = 3\cos 3x$

$g'(x) = 3\cos x - 12\cos x\sin^2 x$

or : $f' = g'$, d'où : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

◆ **Exercice 40 page 58**

$f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$

1. Sur $]-\infty\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$,

$f'(x) = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}$.

2. On vérifie que :

$(1-x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) = 1 - x^n$.

3. $1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n-1)x^{n-2} = f'(x)$.

3. Études de fonctions

(pages 59 à 80 du livre de l'élève)

Ce chapitre vise essentiellement à :
– achever la mise en place des outils d'étude de fonctions (démarrée aux chapitres 1 et 2) ;
– compléter l'étude des fonctions de la classe de Première par des fonctions comportant des radicaux ou des fonctions trigonométriques.

• Les fonctions et leur représentation graphique sont utilisées dans de nombreux domaines, mathématiques, physiques, économiques, ... Il convient donc que les élèves de terminale ES soient à même de pouvoir, dans des cas simples, étudier une fonction, d'en tracer rigoureusement la courbe représentative.
• L'aspect graphique ne doit pas être négligé, l'entraînement à l'interprétation raisonnée d'un graphique faisant partie de la formation à la lecture et au traitement de l'information.
• En classe de première et dans les chapitres précédents, les élèves ont acquis les outils essentiels à l'étude des fonctions.
• L'objet de ce chapitre est donc, après quelques compléments sur les propriétés géométriques des courbes représentatives de fonctions, de traiter de nombreux exemples d'études de fonctions. On prendra soin de parcourir la totalité de l'éventail des fonctions avec lesquelles les élèves doivent avoir été mis en contact.

savoirs	savoir-faire
Propriétés géométriques d'une représentation graphique • Éléments de symétrie d'une courbe représentative d'une fonction. • Représentation graphique d'une fonction périodique. • Branches infinies : asymptotes parallèles aux axes, asymptotes obliques, branches paraboliques.	• Déterminer les éléments de symétrie de la courbe représentative d'une fonction. • Construire la courbe représentative d'une fonction périodique. • Étudier les branches infinies de la représentation graphique d'une fonction périodique. Démontrer qu'une droite donnée est asymptote à la courbe représentative d'une fonction.
Exemple d'étude de fonctions • Fonctions polynômes. • Fonctions rationnelles. • Fonctions irrationnelles. • Fonctions trigonométriques.	• Étudier et représenter avec précision une fonction : – polynôme ; – rationnelle ; – irrationnelle ; – trigonométrique.

Exercices d'application directe

♦ **Exercice 1.a page 62**

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{\frac{2}{3}\}$

$\left(\frac{2}{3}-x\right) \in D_f \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}+x\right) \in D_f$.

On vérifie que :

$f\left(\frac{2}{3}-x\right)+f\left(\frac{2}{3}+x\right) = 2\times\frac{5}{3}$.

Donc, $A\left(\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$ est centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

◆ **Exercice 1.b page 62**

$D_f = \mathbb{R}$

On obtient : $f(3-x) = f(3+x) = x^2 - 4$.

Donc, la droite (D)$[x = 3]$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

◆ **Exercice 1.c page 62**

$D_f = \mathbb{R}$

On a : $f(x+3\pi) = \cos\left(\frac{2}{3}(x+3\pi) + \frac{\pi}{2}\right)$

$= \cos\left[\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi\right] = f(x)$.

Donc, f est périodique de période 3π.

◆ **Exercice 1.d page 65**

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$

Donc, la droite (D) $[y = 4]$ est une asymptote horizontale pour $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

◆ **Exercice 1.e page 65**

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

• On a : $f(x) - (2x-2) = \dfrac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x-2)] = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (2x-2)] = 0$

Donc, la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$.

• On a : $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -\infty} f(x) = -\infty$

Donc, la droite (Π) d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $(\mathscr{C}_f)$.

Exercices d'apprentissage

◆ **Exercice 1 page 79**

$D_f = \mathbb{R}$

$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \dfrac{\cos x}{2 + \sin^2 x}$

La droite (D) d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

◆ **Exercice 2 page 79**

$D_f = \mathbb{R}$

$f\left(\frac{15\pi}{12} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 2x$

$f\left(\frac{15\pi}{12} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\ 2\ 2x\right) = -\sin 2x$

d'où : $f\left(\frac{15\pi}{12} - x\right) + f\left(\frac{15\pi}{12} + x\right) = 2 \times 0$

Donc, $A\left(\frac{15\pi}{12} ; 0\right)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

◆ **Exercice 3 page 79**

(1) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$f(x + 2\pi) = f(x)$; $\quad T = 2\pi$

(2) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$

$f(x + 6\pi) = \sin\left(\frac{x + 6\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\left[\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi\right]$

$= f(x)$; $\quad T = 6\pi$

(3) $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

$f(x + \pi) = \sin\left(2(x + \pi) + \frac{\pi}{6}\right)$

$= f(x)$; $\quad T = \pi$

(4) $f(x) = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

$f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left[3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{4}\right]$

$= \tan\left[\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \pi\right]$

$= f(x)$; $\quad T = \frac{\pi}{3}$

◆ **Exercice 4 page 79**

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) - (3x - 2) = -\dfrac{1}{x^2 + 1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (3x - 2)] = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (3x - 2)] = 0$

La droite (D) d'équation $3x - 2$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$.

(2) $D_f =]-\infty ; -3 - 2\sqrt{2}] \cup [-3 + 2\sqrt{2} ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) - (x + 3) = \dfrac{-8}{\sqrt{x^2 + 6x + 1} + (x + 3)}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 3)] = 0$

La droite (Δ) d'équation $y = x + 3$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.

♦ Exercice 5 page 79

(1) $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{2}{3}$

$(\mathscr{C}_f)$ admet la droite d'équation $y = \dfrac{2}{3}$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

(2) $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$

La droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$.

(3) $D_f =]-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty[$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9}{x + \sqrt{x^2 - 9}} = 0$

La droite (OI) est une asymptote horizontale en $+\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[-1 - \sqrt{1 - \dfrac{9}{x^2}}\right] = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-2x)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{9}{x - \sqrt{x^2 - 9}} = 0$

La droite d'équation $y = -2x$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.

(4) $D_f = \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$

La droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_g)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

♦ Exercice 6 page 79

$f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - x - 1}{x - 1}$

$f(x) - (2x^2 + x) = -\dfrac{1}{x - 1}$

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - (2x^2 + x)] = 0$

La parabole $(\mathscr{P})$ est une courbe asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

♦ Exercice 7 page 79

1. *a)* Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

b) Le tableau de variation montre que :

• sur $]-\infty\,; 1]$, $P(x) < 0$

• P réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ dans $[-2\,;+\infty[$.

On a : $f(1{,}6) \approx -0{,}488 < 0$

$f(1{,}7) \approx 0{,}156 > 0$

donc P admet un unique zéro α dans $]1{,}6\,; 1{,}7[$.

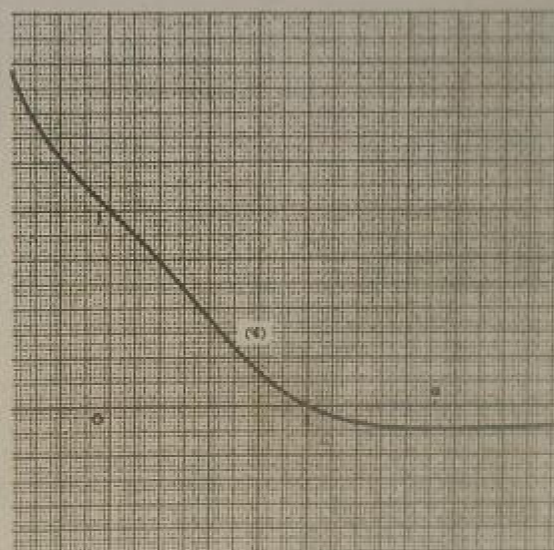
2. $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x^3}$; $D_f =]-1\,;+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{P(x)}{(1 + x^3)^2}$

d'où le tableau de variation :

x	-1		$1{,}6$ α $1{,}7$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$\alpha \approx 1{,}65$; $f(\alpha) \approx -0{,}118$



♦ Exercice 8 page 79

1. On vérifie que : $f(x) = x - 6 + \dfrac{4}{x - 1}$

2. $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$

Tableau de variation

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

3. • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-6)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0$

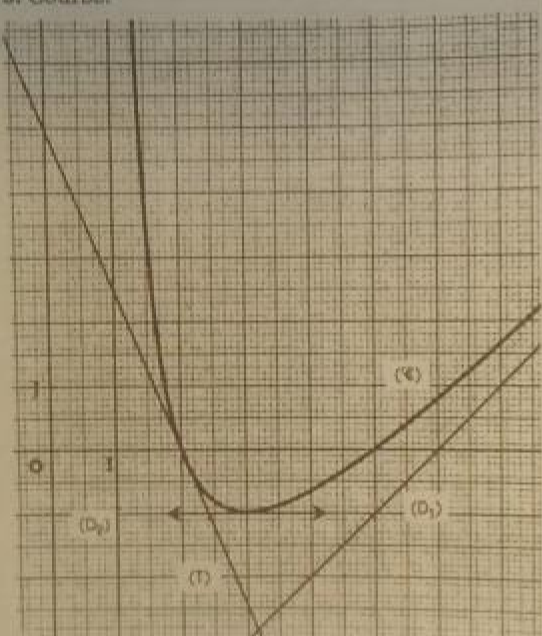
Donc $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote la droite (D_1) d'équation $y = x - 6$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$

Donc $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote la droite (D_2) d'équation $x = 1$.

4. Équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2 : $y = -3x + 6$.

5. Courbe.



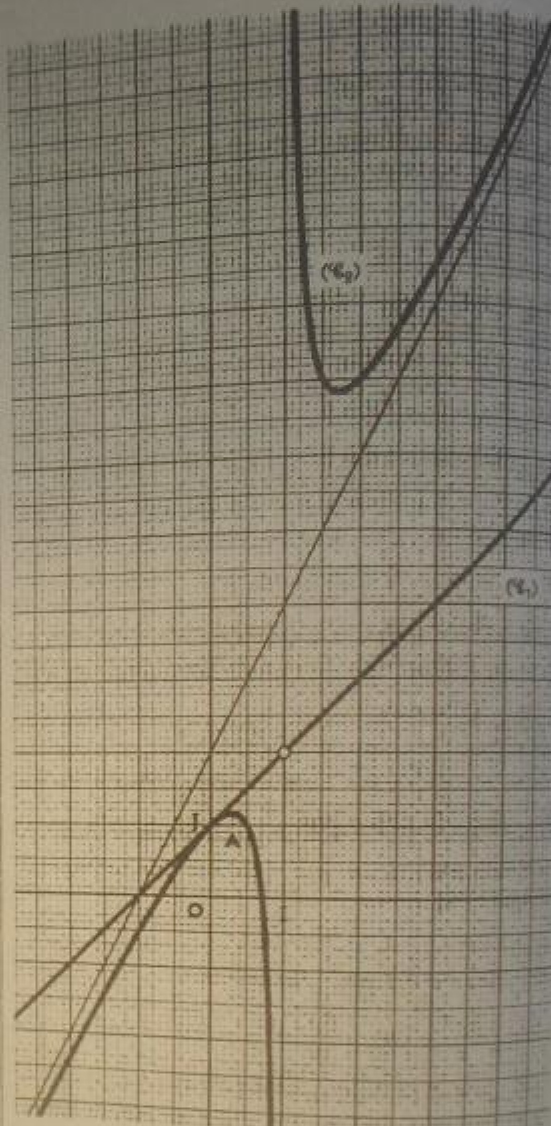
♦ **Exercice 9 page 79**

$f_m(x) = \dfrac{1 - mx^2}{1 - x}$; $m \in \mathbb{R}$; $D_{f_m} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• On a : $f_m(0) = 1$, donc le point $A(0 ; 1)$ appartient à toutes les courbes $(\mathscr{C}_m)$.

• $(\mathscr{C}_1) : f_1(x) = 1 + x$

$(\mathscr{C}_2) : f_2(x) = \dfrac{1 - 2x^2}{1 - x}$



• $f'_m = \dfrac{mx^2 - 2mx + 1}{(1-x)^2}$

Étude du signe de $P_m(x)$ défini par :
$P_m(x) = mx^2 - 2mx + 1$
Pour $m \neq 0$, $\Delta_m = 4m(m-1)$

$m < 0$

x	$-\infty$		α		1		β		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f_m(x)$		↘		↗	‖	↗		↘	

$0 < m < 1$

x	$-\infty$		β		1		α		$+\infty$
$f'_m(x)$			$+$		‖		$+$		
$f_m(x)$			↗		‖		↗		

$m > 1$

x	$-\infty$		β		1		α		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

$\alpha = \dfrac{m + \sqrt{m(m-1)}}{m}$; $\beta = \dfrac{m - \sqrt{m(m-1)}}{m}$

♦ Exercice 10 page 79

• Sur $]-\infty\,;0]$, f coïncide avec f_1 :

$f_1 : \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x+3}{-x+2}$

$f'_1(x) = \dfrac{5}{(-x+2)^2}$; $f'_1(0) = \dfrac{5}{4}$

Par conséquent,

f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$

et pour $x \in\,]-\infty\,;0[$, $f'(x) = f'_1(x)$

f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = f'_1(0)$.

• Sur $[0\,;+\infty[$, f coïncide avec f_2 :

$f_2 : \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x+3}{x+2}$

$f'_2(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$; $f'_2(0) = \dfrac{-1}{4}$

On obtient comme précédemment,

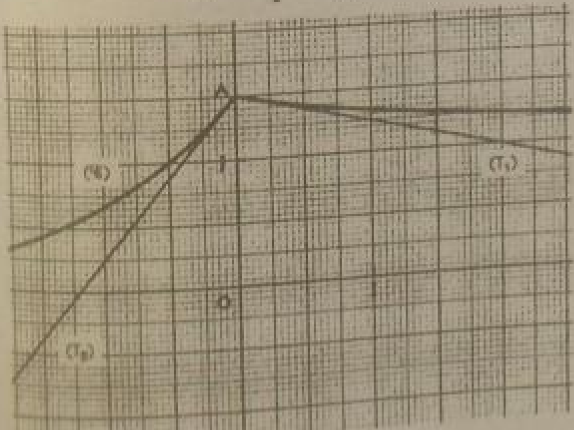
pour $x \in\,]0\,;+\infty[$, $f'(x) = f'_2(x)$ et $f'_d(0) = f'_2(0)$.

• (T_1), la tangente à gauche à $(\mathscr{C})$ en A, a pour équation :

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}.$$

et (T_2), la tangente à droite à $(\mathscr{C})$ en A, a pour équation :

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}.$$



♦ Exercice 11 page 79 ***(voir exercice 10)***

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\}$

1. pour $x \in\,]-\infty\,;\frac{1}{2}[\, \cup\,]\frac{1}{2}\,;1]$, $f(x) = \dfrac{-3x+4}{-2x+1}$

pour $x \in\,]1\,;\frac{3}{2}[\, \cup\,]\frac{3}{2}\,;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x-3}$

Étude du sens de variation de f

pour $x \in\,]-\infty\,;\frac{1}{2}[\, \cup\,]\frac{1}{2}\,;1]$, $f'(x) = \dfrac{5}{(-2x+1)^2}$

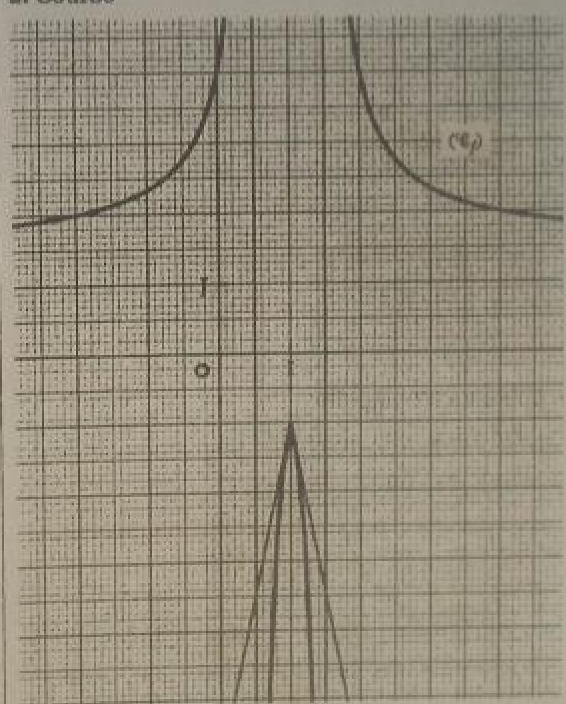
pour $x \in\,]-\infty\,;\frac{1}{2}[\, \cup\,]\frac{1}{2}\,;1]$, $f'(x) = \dfrac{-5}{(2x-3)^2}$

et $f'_g(1) = 5$; $f'_d(0) = -5$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		$1/2$		1		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	$5 \mid -5$	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$3/2$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\boxed{-1}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$3/2$

2. Courbe



3. $g(x) = f(x+1) = \dfrac{3|x|+1}{2|x|-1}$

g est une fonction paire. Donc, $(\mathscr{C}_g)$ admet comme axe de symétrie la droite d'équation : $x = 1$.

4. Résolution graphique de : $f(x) = m$.

♦ Exercice 12 page 80 ***(voir exercice 10)***

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

1. $x \in\,]-\infty\,;2[\, \cup\,]3\,;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x-3}{x-2} + 1$

$x \in\,]2\,;3]$, $f(x) = 1 - \dfrac{x-3}{x-2}$

pour $x \in\,]-\infty\,;2[\, \cup\,]3\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

pour $x \in]2\,;3]$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$

et $f'_g(3) = -1$; $f'_d(3) = 1$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	−	|	+	
$f(x)$	2 ↗		$+\infty$ || $+\infty$	↘	$\boxed{-1}$	↗	2

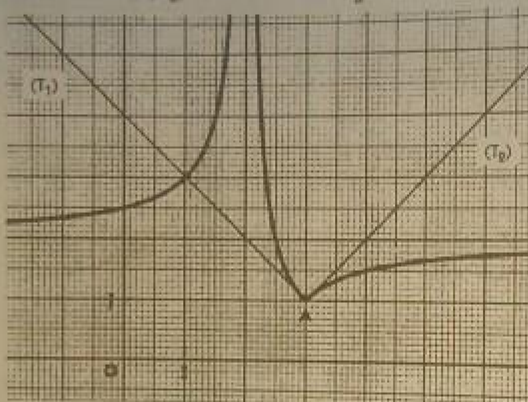
2. (T_1), tangente à gauche à $(\mathscr{C}_g)$ en A : $y = -x + 4$

(T_2), tangente à gauche à $(\mathscr{C}_g)$ en A : $y = x - 2$.

Sur $]-\infty\,;1[$, (T_1) au-dessus de $(\mathscr{C}_g)$.

Sur $]1\,;2[\cup]2\,;3[$, $(\mathscr{C}_g)$ au-dessus de (T_1).

Sur $]3\,;+\infty[$, (T_2) au-dessus de $(\mathscr{C}_g)$.

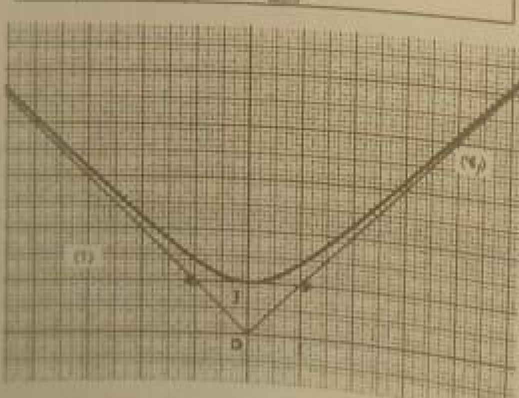


♦ Exercice 13 page 80

(1) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$; $D_f = \mathbb{R}$

pour $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

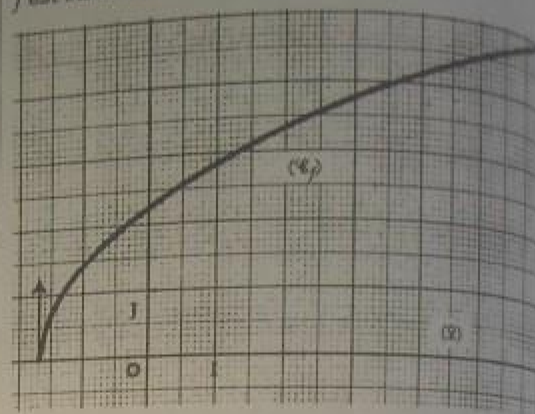
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	$\boxed{0}$	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\boxed{1}$	↗	$+\infty$



(2) $f(x) = \sqrt{3x+5}$; $D_f = [-\dfrac{5}{3}\,;+\infty[$

pour $x \in]-\dfrac{5}{3}\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+5}}$

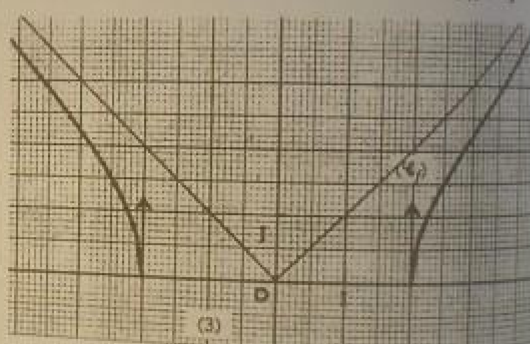
f est strictement croissante dur D_f.



(3) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$; $D_f =]-\infty\,;-2] \cup [2\,;+\infty[$

f est dérivable sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]2\,;+\infty[$.

Pour $x \in]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

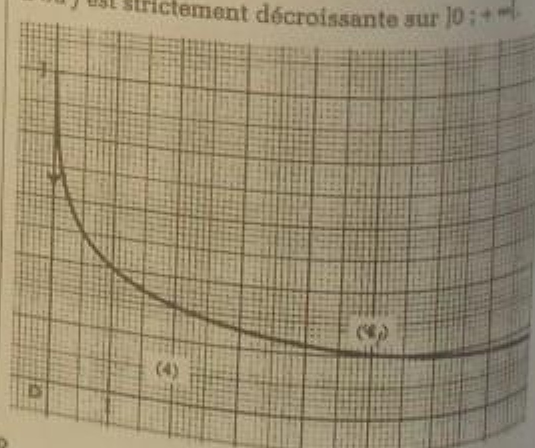


(4) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$; $D_f = [0\,;+\infty[$

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour $x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x(x+1)}} < 0$

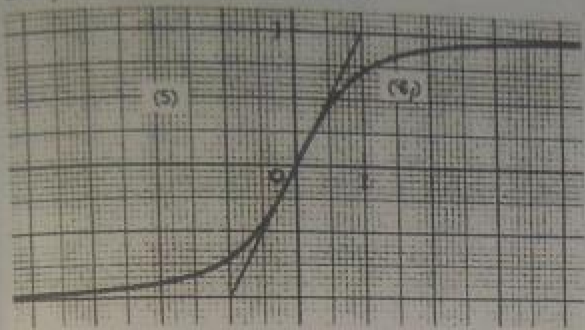
d'où f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.



(5) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)}} > 0$

d'où f est strictement croissante.



♦ Exercice 14 page 80

$f(x) = \sqrt{x(x+1)}$; $D_f =]-\infty\,;-1] \cup [0\,;+\infty[$

1. f est dérivable sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]0\,;+\infty[$

et $f'(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x(x+1)}}$

• Dérivabilité en -1

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x+1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{\sqrt{x(x+1)}}{-[\sqrt{-(x+1)}]^2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} -\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-(x+1)}} = -\infty$$

($\mathscr{C}_f$) admet une tangente verticale en A(-1 ; 0).

• Dérivabilité en 0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = +\infty$$

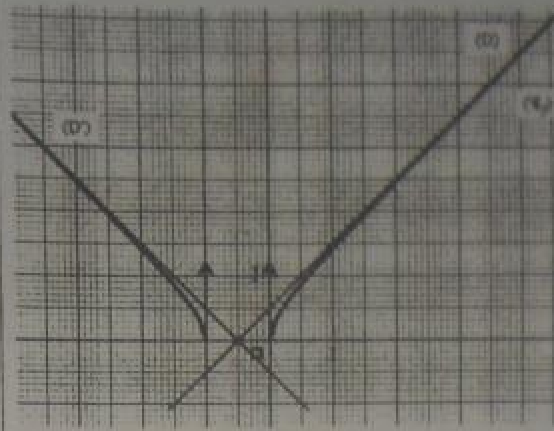
($\mathscr{C}_f$) admet une tangente verticale en O.

2. $f(x) - (x + \frac{1}{2}) = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x(x+1)} + (x+\frac{1}{2})}$

$f(x) - (-x - \frac{1}{2}) = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x(x+1)} - (x+\frac{1}{2})}$

On vérifie alors que :
(D) est asymptote à ($\mathscr{C}_f$) en $+\infty$;
(D') est asymptote à ($\mathscr{C}_f$) en $-\infty$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		//////		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	//////	0	↗	$+\infty$



♦ Exercice 15 page 80

$D_g =]0\,;1[\cup]1\,;2]$

1. g est dérivable sur $]0\,;1[$ et sur $]1\,;2[$

a) $g'(x) = \dfrac{-1-\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2x-x^2}\,(x-1)^2}$

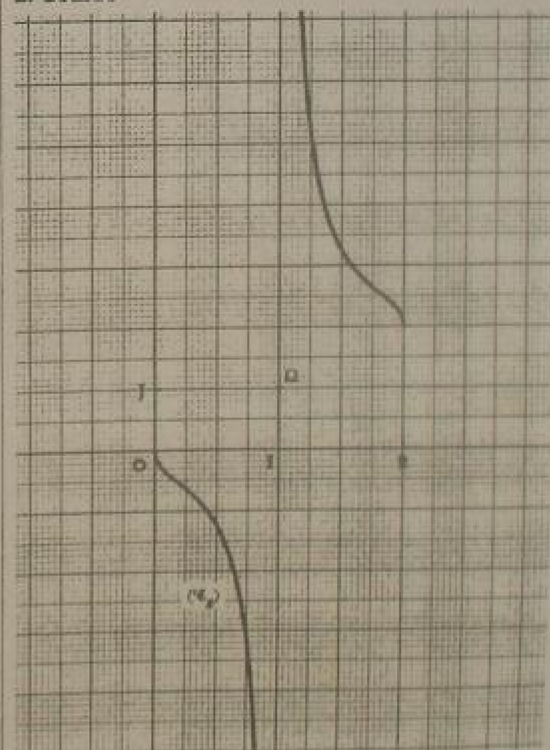
b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(h+2)-g(2)}{h} = -\infty$

($\mathscr{C}_g$) admet une tangente verticale en 2.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = +\infty$

($\mathscr{C}_g$) admet une asymptote d'équation $x = 1$.

2. Courbe



3. $g(1-x)+g(1+x)$

$$=\frac{1-x+\sqrt{1-x^2}}{-x}+\frac{1+x+\sqrt{1-x^2}}{x^2}=2\times 1$$

donc $\Omega(1\,;1)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$.

◆ Exercice 16 page 80

$f(x)=(1-\sqrt{x})^2$; $D_f=[1\,;+\infty[$

sur $[1\,;+\infty[$, $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})$, $f'(1)=0$.

f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

Par conséquent, f détermine une bijection de $[1\,;+\infty[$ dans $f([1\,;+\infty[)$, donc dans $[0\,;+\infty[$ (car $f(1)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$).

2. (E) $(1-\sqrt{x})^2=b$; $b\in\mathbb{R}^+$

pour $x\in[1\,;+\infty[$ on obtient :

(E) $-1+\sqrt{x}=\sqrt{b}$

$\sqrt{x}=\sqrt{b}+1$

$x=(1+\sqrt{b})^2$

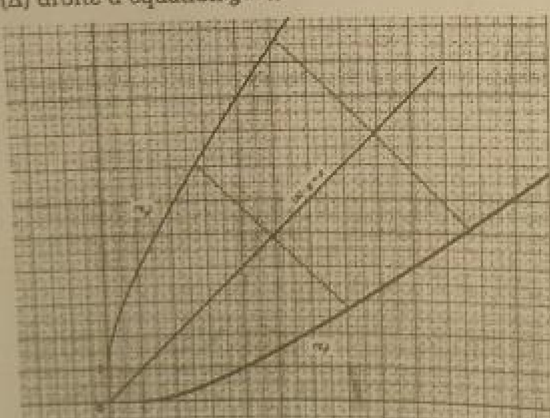
L'application réciproque g de la bijection déterminée par f est définie par

$g:[0\,;+\infty[\ \to [1\,;+\infty[$

$x\mapsto(1+\sqrt{x})^2$

3. Courbe $(\mathscr{C}_g)$. $(\mathscr{C}_g)=S_{(\Delta)}(\mathscr{C}_f)$.

(Δ) droite d'équation $y=x$



◆ Exercice 17 page 80

1. $f(x)=x+\sqrt{|x^2-1|}$

a) pour $x\in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$

$f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$

pour $x\in[-1\,;1]$, $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$

$(\mathscr{C}_f)$ admet des tangentes verticales aux points $A(-1\,;-1)$ et $B(1\,;1)$.

b) pour $x\in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$,

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

pour $x\in]-1\,;1[$, $f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\boxed{-1}$	↗	$\sqrt{2}$	↘	$\boxed{1}$	↗	$+\infty$

c) On vérifie que $(\mathscr{C}_f)$ a pour asymptote :

– la droite d'équation $y=2x$, en $+\infty$;

– la droite (OI), en $-\infty$.

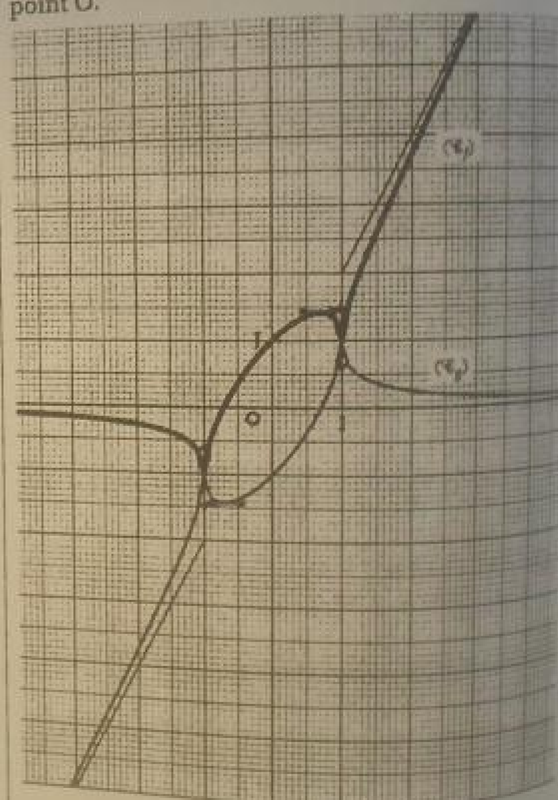
2. $g(x)=x-\sqrt{|x^2-1|}$

a) $M(x\,;f(x))$; $N(-x\,;g(-x))$

Milieu de [MN] a pour coordonnées

$$\left(\frac{x+(-x)}{2}\,;\frac{f(x)+g(-x)}{2}\right)=(0\,;0)$$

donc $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont symétriques par rapport au point O.



◆ Exercice 18 page 80

1. $D_f=\mathbb{R}^*$; f est impaire.

Ensemble d'étude : $]0\,;+\infty[$

2. *a)* $\lim\limits_{x\underset{<}{\to}1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\underset{<}{\to}1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1+x}{x\sqrt{1-x^2}}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\underset{>}{\to}1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\underset{>}{\to}1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1+x}{x\sqrt{1-x^2}}\right)=-\infty$

f n'est pas dérivable à gauche et à droite en 1.

$(\mathscr{C}_f)$ a une tangente verticale en $A(1\,;\frac{1}{2})$.

• $x \in]0 ; 1[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} > 0$

• $x \in]1 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

Posons : $\sqrt{x^2-1} = u$; $u > 0$

on a : $x^2 = u^2 + 1$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{u} + \dfrac{u}{u^2+1} = \dfrac{(u-1)(u^2+u+2)}{2u(u^2+1)}$

f' a le même signe que $u - 1$.

Puisque $x > 0$, on a :

• $u - 1 < 0$ pour $\quad 0 < u < 1$

$0 < x^2 - 1 < 1$

$1 < x < \sqrt{2}$

• $u - 1 > 0$ pour $\quad u > 1$

$x^2 - 1 > 1$

$x > \sqrt{2}$

x	0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	‖	−	$\boxed{0}$	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\boxed{1/\sqrt{2}}$	↘	$\boxed{0}$	↗	$+\infty$

3. *a)* pour $x \in [1 ; +\infty[$

$f(x) = \dfrac{x}{2} - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{x}{2} - 1 + \left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}\right)$

avec : $1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} = \varphi(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

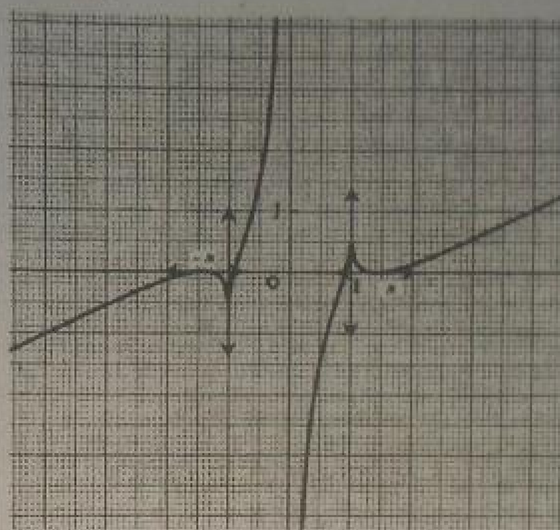
b) Asymptotes.

(D) : $y = \dfrac{x}{2} - 1$

(D') : $y = \dfrac{x}{2} + 1$ (symétrie par rapport à O)

(OI)

4. Courbe



♦ **Exercice 19 page 80**

(1) $f(x) = \sin 2x$

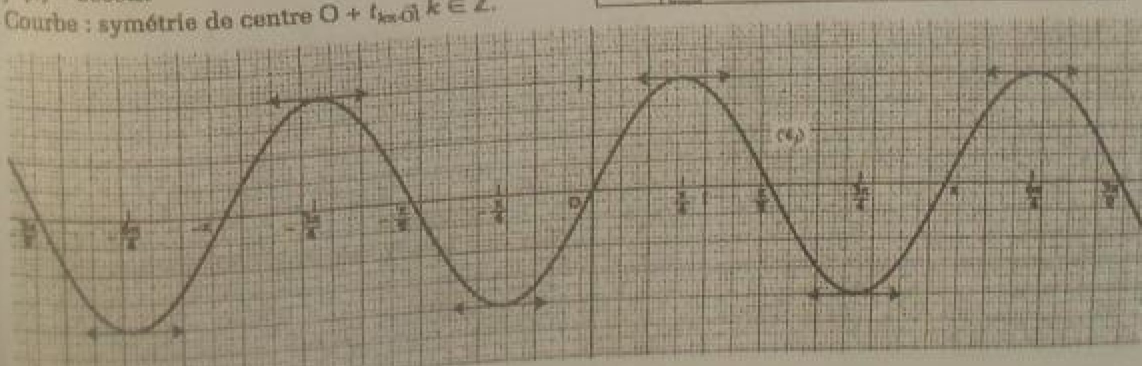
f est impaire, périodique de période π

Ensemble d'étude : $[0 ; \dfrac{\pi}{2}]$

$f'(x) = 2\cos 2x$

Courbe : symétrie de centre O + $t_{k\pi\vec{OI}}$ $k \in \mathbb{Z}$.

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$f'(x)$		+	$\boxed{0}$	−	
$f(x)$	$\boxed{0}$	↗	$\boxed{1}$	↘	$\boxed{0}$



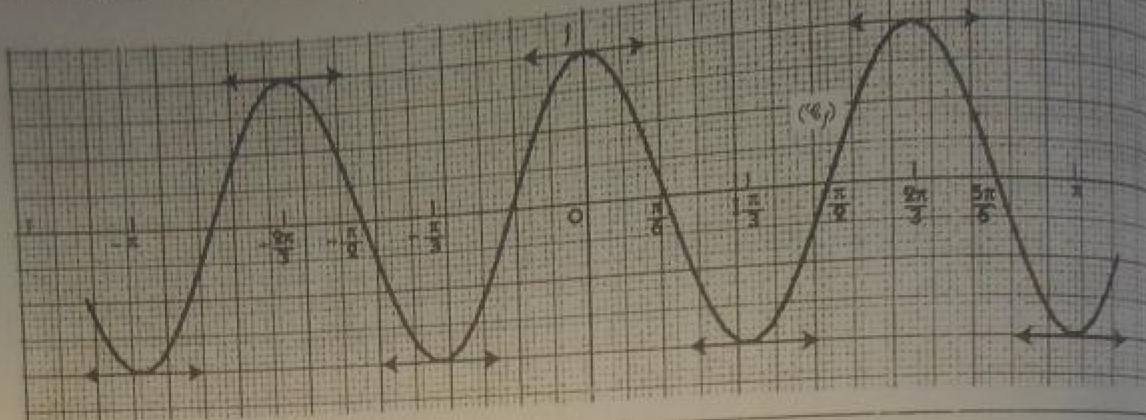
(2) $f(x) = \cos 3x$

f est paire, périodique de période $\frac{2\pi}{3}$

$f'(x) = -3\sin 3x$

Courbe : symétrie d'axe (OJ) + $t_{\frac{2\pi}{3}k\vec{OI}}$ $k \in \mathbb{Z}$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$	$\boxed{0}$	$-$	$\boxed{0}$
$f(x)$	$\boxed{1}$	$\searrow$	$\boxed{-1}$



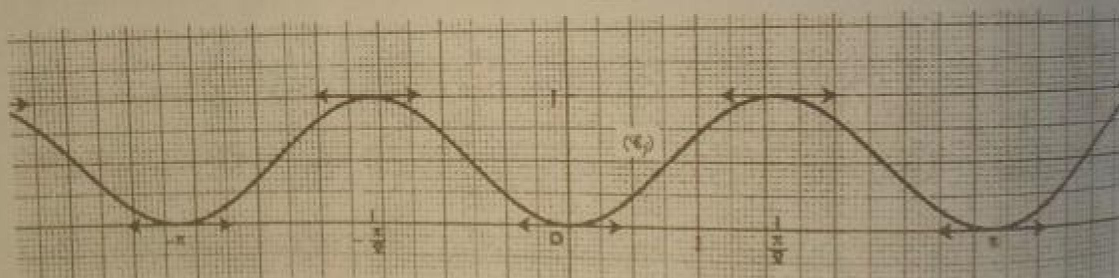
(3) $f(x) = \sin^2 x$

f est paire, périodique de période 2π

$f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$

Courbe : symétrie d'axe (OJ) + $t_{k\pi\vec{OI}}$ $k \in \mathbb{Z}$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$\boxed{0}$	$+$	$\boxed{0}$
$f(x)$	$\boxed{0}$	$\nearrow$	$\boxed{1}$



♦ **Exercice 20 page 80**

$f(x) = \sin(2x + 1)$

2. a) $\mathbb{R} \xrightarrow{u} \mathbb{R} \xrightarrow{\sin} \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x + 1 \mapsto f(x)$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{f}$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$	$\frac{\pi-1}{2}$	$+\infty$
$u(x)$	$-\infty$	$\boxed{0}$	$\boxed{\pi/2}$	$\boxed{\pi}$	$+\infty$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	$\boxed{1}$	$+$	$\boxed{0}$	$-$	$\boxed{-1}$
$\sin x$	$\boxed{0}$	$\nearrow$	$\boxed{1}$	$\searrow$	$\boxed{0}$

b) $K = u^{-1}([0 ; \pi]) = [u^{-1}(0) ; u^{-1}(\pi)]$

car u^{-1} varie dans le même sens que u.

$u^{-1}(0) = x \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$u^{-1}(\pi) = 0 \Leftrightarrow u(x) = \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi - 1}{2}$

d'où : $K = [-\frac{1}{2} ; \frac{\pi - 1}{2}]$

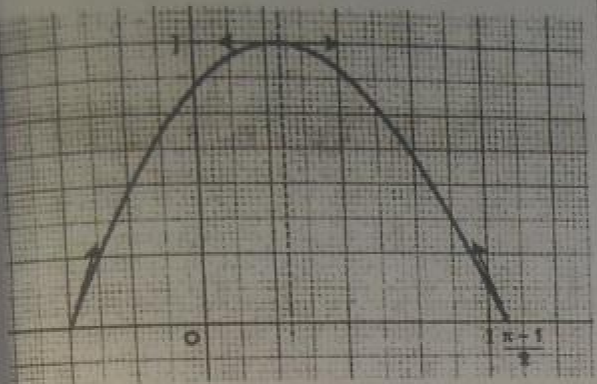
c) $u^{-1}(\frac{\pi}{2}) = x \Leftrightarrow u(x) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

x	$\frac{-1}{2}$		$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$		$\frac{\pi-1}{2}$
$f(x)$	$\boxed{0}$	$\nearrow$	$\boxed{1}$	$\searrow$	$\boxed{0}$

4. Construction des tangentes à $(\mathscr{C}_f)$ aux points d'abscisses :

$$-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\pi-1}{2}$$

On a : $f'(-\frac{1}{2}) = 2\ ;\ f'(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}) = 0\ ;\ f'(\frac{\pi-1}{2}) = -2$



♦ **Exercice 21 page 80**

1. $f(x) = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 1$

a) $f(x) = 1 - 8\sin^2 x(1 - \sin^2 x) + 2\sin 2x$

$= 1 - 2\sin^2 2x + 2\sin 2x$

$= \cos 4x + 2\sin 2x.$

b) Vérifier que :

$f(x+\pi) = f(x)$

car : $\sin(x+\pi) = -\sin x$

$\cos(x+\pi) = -\cos x$

f est donc périodique de période π.

2. $f'(x) = -4\sin 4x + 4\cos 2x$

$= -8\sin 2x\cos 2x + 4\cos 2x$

$= 4\cos 2x(1 - 2\sin 2x)$

(E) $4\cos 2x(1 - 2\sin 2x) = 0$ sur $\mathbb{R}$

(E) $\Leftrightarrow$ $\cos 2x = 0$ ou $2\sin 2x = 1$

$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ | $2x = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi$ ou $2x = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Dans $[0\ ;\ \pi]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{12}\ ;\ \frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\ ;\ \frac{5\pi}{12}\}$

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{4\pi}{12}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$	4	+	0	−	0	+	0	−	0	+	4
$f(x)$	1	↗	3/2	↘	1	↗	3/2	↘	−3	↗	1

4. Fonction logarithme népérien

(pages 81 à 104 du livre de l'élève)

Ce chapitre vise essentiellement à :
– définir et étudier une nouvelle fonction élémentaire, la fonction logarithme népérien (ln) ;
– mettre en place de nouvelles primitives de référence, celles des fonctions du type $\frac{u'}{u}$.

Commentaires

La fonction logarithme népérien est nouvelle en terminale. Elle vient donc compléter et enrichir l'ensemble des fonctions étudiées à ce niveau.
Cette fonction intervient dans de nombreux domaines et il convient que les élèves en connaissent les propriétés et la représentation graphique.
La calculatrice permet d'introduire le logarithme népérien sans se heurter à des obstacles théoriques. Elle renforce les possibilités d'étude de cette fonction aussi bien pour conjecturer des résultats que pour effectuer des calculs.
Sa définition comme primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ permet d'obtenir très rapidement les propriétés algébriques.
L'aspect bijectif de la fonction logarithme népérien permet de définir e, base de ce logarithme.
La croissance lente de la fonction ln pourra être étayée par des calculs numériques, ce résultat étant réinvesti lors de l'étude des croissances comparées des fonctions logarithmes, puissances et exponentielles.
Le logarithme décimal, s'il ne fait pas l'objet d'une étude approfondie, doit néanmoins être abordé, celui-ci intervenant dans de nombreuses notions (par exemple le Ph en chimie). Cette connaissance sera réinvestie en statistiques avec l'utilisation de papier semi-logarithmique ou logarithmique.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Fonction logarithme népérien • Définition. Propriétés. – Propriétés algébriques. – Résolutions d'équations, d'inéquations. • Étude de la fonction ln – Dérivée et sens de variation. – Limites de référence. – Représentation graphique. – Nombre e. – Primitives.	• Résoudre des équations et des inéquations faisant intervenir la fonction logarithme népérien. • Utiliser les limites de la fonction logarithme népérien pour déterminer les limites d'une fonction.
Logarithme décimal : définition	• Utiliser le logarithme décimal dans le calcul numérique.
Fonctions composées comportant ln • Dérivée de fonctions du type $\ln \circ u$ et $\ln \circ \lvert u \rvert$. • Primitives de fonctions du type $\frac{u'}{u}$.	• Étudier la composée d'une fonction avec la fonction logarithme népérien. • Déterminer les primitives d'une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$.

Exercices d'application directe

♦ Exercice 1.a page 84

(1) $f(x) = \ln(3x+4)$; $D_f = \left]-\dfrac{4}{3} ; +\infty\right[$

(2) $f(x) = \ln|1-x|$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(3) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{5x-1}\right)$; $D_f = \left]-\infty ; -2\right[\cup \left]\dfrac{1}{5} ; +\infty\right[$

(4) $f(x) = \ln(x^2-4)$; $D_f =]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$

(5) $f(x) = \ln(x^2+x-2)$; $D_f =]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$

(6) $f(x) = \ln(1-x) + \ln(2x+1)$; $D_f = \left]-\dfrac{1}{2} ; 1\right[$

(7) $f(x) = \ln(x-1) + \ln(2x+1)$; $D_f =]1 ; +\infty[$

(8) $f(x) = \ln\left|\dfrac{2x-1}{3x+1}\right|$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{2}\right\}$

♦ Exercice 1.b page 86

$1,791 \leq \ln 6 \leq 1,793$
$2,889 \leq \ln 18 \leq 2,892$
$3,177 \leq \ln 24 \leq 3,181$
$3,294 \leq \ln 27 \leq 3,297$
$2,772 \leq \ln 16 \leq 2,776$
$0,404 \leq \ln 1,5 \leq 0,406$
$-0,290 \leq \ln 0,75 \leq -0,287$

♦ Exercice 1.c page 86

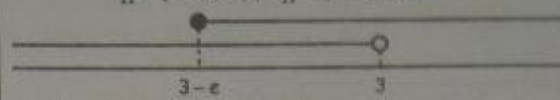
$D_f =]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$; $D_g =]1 ; +\infty[$;
$D_h =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.
On a : $D_f \neq D_g$; $D_f \neq D_h$;
donc : $f \neq g$; $f \neq h$.
Le plus grand ensemble sur lequel :
- f et g coïncident est : $]1 ; +\infty[$;
- f et h coïncident est : $]-\infty ; 2[\cup]1 ; +\infty[$.

♦ Exercice 1.d page 86

$D_f = D_g =]-2 ; 1[$;
$D_h =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.
- On vérifie que : $f = g$.
- $D_f \neq D_h$ donc $f \neq g$; cependant f et g coïncident sur $]-2 ; 1[$.

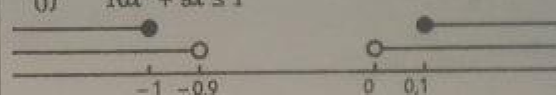
♦ Exercice 1.e page 88

- (E) $\ln(2x-1) = \ln(3x+1)$
  $V_E = \left]\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$; $S_E = \varnothing$
- (F) $\ln(-5x+1) = 1$
  $V_F = \left]-\infty ; \dfrac{1}{5}\right[$; $S_F = \left\{\dfrac{1-e}{5}\right\}$
- (G) $\ln\left(\dfrac{x+2}{-x+1}\right) = 0$
  $V_G =]-2 ; 1[$; $S_G = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$
- (H) $\ln(-x+3) \leq 1$
  $V_H =]-\infty ; 3[$; $S_H = [3-e ; 3[$



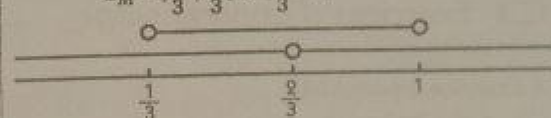
- (I) $\ln(x-1) < \ln(3-x)$
  $V_I =]1 ; 3[$; $S_I =]1 ; 2[$
- (J) $\ln[x(10x+9)] \geq 0$
  $V_J =]-\infty ; -0,9[\cup]0 ; +\infty[$

(J) $10x^2 + 9x \leq 1$



$S_J =]-\infty ; -1] \cup [0,1 ; +\infty[$

- (K) $2\ln(x+1) = \ln(5x+1)$
  $V_K = \left]-\dfrac{1}{5} ; +\infty\right[$; $S_K = \{0 ; 3\}$
- (L) $\ln(1-x) - \ln(2x+3) \geq \ln(-x)$
  $V_L = \left]-\dfrac{3}{2} ; 0\right[$; $S_L = \left]-\dfrac{3}{2} ; 0\right[$
- (M) $\ln|3x-2| < 0$
  $V_M = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$
  $-1 < 3x - 2 < 1$
  $S_M = \left]\dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2}{3} ; 1\right[$



♦ Exercice 2.a page 91

- $f(x) = \ln(-3x+1)$; $D_f = \left]-\infty ; \dfrac{1}{3}\right[$

f est dérivable sur D_f ; $f'(x) = \dfrac{3}{3x-1}$

- $g(x) = \ln|5x^2 - 3x - 2|$; $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{2}{5} ; 1\right\}$

g est dérivable sur $\left]-\infty ; -\dfrac{2}{5}\right[$; $\left]-\dfrac{2}{5} ; 1\right[$; $]1 ; +\infty[$

$g'(x) = \dfrac{10x-3}{5x^2-3x-2}$

- $h(x) = \ln\left(\dfrac{2x-7}{3x+4}\right)$

$D_h = \left]-\infty ; -\dfrac{4}{3}\right[\cup \left]\dfrac{7}{2} ; +\infty\right[$

h est dérivable sur $\left]-\infty ; -\dfrac{4}{3}\right[$ et sur $\left]\dfrac{7}{2} ; +\infty\right[$

$h'(x) = \dfrac{29}{(3x+4)(2x-7)}$

- $f(x) = \ln(5x^2 + 3x - 1)$

$\alpha = \dfrac{-3-\sqrt{29}}{10}$; $\beta = \dfrac{-3+\sqrt{29}}{10}$

f est dérivable sur $]-\infty\,;\alpha[$ et sur $]\beta\,;+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{10x+3}{5x^2+3x-1}$

- $f(x) = \ln(\sqrt{2x-1} + 7x)$

f est dérivable sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1+7\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}\,(\sqrt{2x-1}+7x)}$

- $k(x) = \ln\left|\dfrac{7x}{8-9x}\right|$; $D_k = \mathbb{R}\setminus\{0\,;\frac{8}{9}\}$

k est dérivable sur $]-\infty\,;0[$, sur $]0\,;\frac{8}{9}[$ et sur $]\frac{8}{9}\,;+\infty[$

$k'(x) = \dfrac{56}{7x(8-9x)}$

♦ **Exercice 2.b page 92**

(1) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$; $K =]0\,;+\infty[$
$F(x) = \ln x + c$ $(c \in \mathbb{R})$

(2) $f(x) = \dfrac{5}{3-x}$; $K =]3\,;+\infty[$
$F(x) = -5\ln(x-3) + c$ $(c \in \mathbb{R})$

(3) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$; $K =]0\,;\pi[$
$F(x) = \ln(\sin x) + c$ $(c \in \mathbb{R})$

♦ **Exercice 2.c page 94**

- $f(x) = \ln(x^2 + 11x + 2)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+11x+2) = +\infty$

$\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

- $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln x} = \dfrac{x}{\ln x} + \dfrac{1}{\ln x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x} = 0$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- $f(x) = (x^2+1)\ln x$

$\lim\limits_{x\to0}(x^2+1) = 1$; $\lim\limits_{x\to0}\ln x = -\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to0}(x^2+1)\ln x = -\infty$

- $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-\ln x}$; $D_f =]0\,;+\infty[$

$f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{x}{\ln x}-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x} = +\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercices d'apprentissage

♦ **Exercice 1 page 102**

(1) $f(x) = \ln(2-3x)$; $D_f =]-\infty\,;\frac{2}{3}[$
(2) $f(x) = \ln|2-3x|$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\frac{2}{3}\}$
(3) $f(x) = \ln[(x+5)^2]$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-5\}$
(4) $f(x) = \ln\sqrt{x+5}$; $D_f =]-5\,;+\infty[$
(5) $f(x) = \ln(2-3x) + \ln(5x-2)$; $D_f =]\frac{3}{2}\,;+\infty[$
(6) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x-3}{5x-2}\right)$; $D_f =]-\infty\,;\frac{2}{5}[\,\cup\,]\frac{3}{2}\,;+\infty[$
(7) $f(x) = \ln\left|\dfrac{2x-3}{5x-2}\right|$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\frac{2}{5}\,;\frac{3}{2}\}$

♦ **Exercice 2 page 102**

(1) $\ln(0{,}07) = -2{,}6593$
(2) $\ln(6{,}928) = 1{,}9356$
(3) $\ln(1{,}04) = 0{,}0392$
(4) $\frac{1}{2}\ln(0{,}432) = -0{,}4197$

♦ **Exercice 3 page 102**

(1) $\ln(e^2) = 2$
(2) $\ln\left(\dfrac{1}{e^3}\right) = -3$
(3) $\ln(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2}$
(4) $\ln\left(\dfrac{e^4}{\sqrt{e}}\right) = \dfrac{7}{2}$
(5) $\ln(e^2\sqrt{e}) = \dfrac{5}{2}$
(6) $\ln(\sqrt{e})^3 = \dfrac{3}{2}$

♦ **Exercice 4 page 102**

(1) $\ln 32 = \ln(2^5) = 5\ln 2$
(2) $\ln(\frac{1}{4}) = -2\ln 2$
(3) $2\ln(\frac{2}{3}) = 2(\ln 2 - \ln 3)$
(4) $\ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$
(5) $\ln(3\sqrt{2}) = \ln 3 + \frac{1}{2}\ln 2$
(6) $2\ln\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \ln 2 - \ln 3$
(7) $\ln 36 - 2\ln 12 = \ln(2^2\times3^2) - 2\ln(2^2\times3) = -2\ln$
(8) $\ln 27 + 2\ln 8 - 3\ln 108 = -6\ln 3$

♦ **Exercice 5 page 102**

(1) $3\ln 2 - \ln 7 + \ln 4 = \ln\left(\frac{32}{7}\right)$

(2) $\ln 5 - 3\ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{5}{54}\right)$

(3) $\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 9 - 2\ln 5 = \ln\left(\frac{12}{25}\right)$

(4) $\ln(0{,}1) + \ln 10 - \ln(0{,}001) = \ln(1000)$

(5) $\ln(1+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{2}-1) = \ln 1 = 0$

(6) $\ln\frac{5+\sqrt{3}}{2} + \ln\frac{2}{5+\sqrt{3}} = \ln 1 = 0$

♦ **Exercice 6 page 102**

(1) $\ln(1-\sqrt{2})^{10} + \ln(1+\sqrt{2})^{10} = \ln 1 = 0$

(2) $\ln\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}-1}{2} = -\ln 2$

♦ **Exercice 7 page 102**

(1) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$; $D_f = \mathbb{R}$

$$f(-x) = \ln\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{(x+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \ln\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})} = -f(x)$$

donc f est impaire.

(2) $f(x) = \ln\frac{a-x}{a+x}$; $a \in \mathbb{R}$

• pour $a > 0$; $D_f =]-a\,;a[$

$-a < x < a \Leftrightarrow -a < -x < a$

• pour $a < 0$; $D_f =]a\,;-a[$

$a < x < -a \Leftrightarrow a < -x < -a$

• $f(-x) = \ln\frac{a+x}{a-x} = -f(x)$

donc f est impaire.

♦ **Exercice 8 page 102**

(1) $\ln(5-2x) = 0$; $V =]-\infty\,;\frac{5}{2}[$; $S = \{2\}$

(2) $\ln(x-3) = \ln(2+x)$; $V =]3\,;+\infty[$; $S = \varnothing$

(3) $\ln(x^2-4) = \ln(1-4x)$; $V =]-\infty\,;-2[$; $S = \{-5\}$

(4) $\ln(x^2-2x+2) = 1$; $V = \mathbb{R}$;
$S = \{1-\sqrt{e-1}\,;1+\sqrt{e-1}\}$

(5) $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(2+x)$;
$V =]1\,;+\infty[$; $S = \{\frac{1+\sqrt{13}}{2}\}$

(6) $\ln(5x+2) - \ln(x+2) = \ln(x-2)$;
$V =]2\,;+\infty[$; $S = \{6\}$

♦ **Exercice 9 page 102**

(1) $\ln(2x-3) = 2\ln(x+1) - \ln(x-1)$;
$V =]\frac{3}{2}\,;+\infty[$; $S = \{\frac{7+\sqrt{41}}{2}\}$

(2) $3\ln(x+1) = 1$; $V =]-1\,;+\infty[$; $S = \{\sqrt[3]{e}-1\}$

(3) $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$;
$V =]\frac{3}{2}\,;6[$; $S = \{3\}$

(4) $\ln\left|\frac{1}{2}+x\right| = \ln|x|$; $V = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\,;0\}$; $S = \{-\frac{1}{4}\}$

(5) $\ln|x-1| + \ln|2x+1| = 0$;
$V = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\,;1\}$; S ; $\{\frac{1-\sqrt{17}}{2}\,;\frac{1+\sqrt{17}}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\}$

♦ **Exercice 10 page 102**

(1) $\ln(\ln x) > 0$; $V =]1\,;+\infty[$; $S =]e\,;+\infty[$

(2) $\ln x < 3\ln 2$; $V = \mathbb{R}_+^*$; $S =]0\,;8[$

(3) $\ln(x^2-x+1) \geq \ln(2-x)$;
$V =]-\infty\,;2[$; $S =]-\infty\,;-1] \cup [1\,;2[$

(4) $(1-\ln x)(3+\ln x) \geq 0$; $V =]0\,;+\infty[$; $S = [e^{-3}\,;e]$

(5) $\ln(x^2) \leq 1$; $V = \mathbb{R}^*$; $S = [-\sqrt{e}\,;0[\cup]0\,;\sqrt{e}]$

(6) $\ln(x^2-9) \leq 0$; $V =]-\infty\,;-3[\cup]3\,;+\infty[$;
$S = [-\sqrt{10}\,;-3[\cup]3\,;\sqrt{10}]$

♦ **Exercice 11 page 102**

(1) $\begin{cases} x - y = 2 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$
$V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$; $S = \{(-1+\sqrt{3}\,;1+\sqrt{3})\}$

(2) $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 1 \\ 5\ln x + 3\ln y = 4 \end{cases}$
$V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$; $S = \{(\frac{1}{e}\,;e^3)\}$

(3) $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$
$V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$; $S = \{(e^3\,;e^{-5})\,;(e^{-5}\,;e^3)\}$

(4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x^2 \times y^2 = 100 \end{cases}$
$V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$; $S = \{(5\,;2)\,;(2\,;5)\}$

♦ **Exercice 12 page 102**

(1) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$
$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

(2) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$; $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(3) $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$;

• $f(x) = (1-\ln x) \times \frac{1}{x}$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

• $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(4) $f(x) = x(1-\ln x)$;

• $f(x) = (x - x\ln x)$; $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

• $f(x) = x(1-\ln x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

♦ **Exercice 13 page 102**

(1) $f(x) = \ln(2+x)$; $D_f =]-2\,;+\infty[$
$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(2) $f(x) = \ln(1-x)$; $D_f =]-\infty\,;1[$
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

(3) $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 4)$; $D_f =]-\infty ; -4[\cup]1 ; +\infty[$
$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(4) $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$; $D_f =]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

◆ **Exercice 14 page 102**

(1) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)$; $D_f =]-\infty ; -2[\cup]5 ; +\infty[$
$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(2) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2-x}\right)$; $D_f =]1 ; 2[$
$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = +\infty$

(3) $f(x) = (x-2)\ln(x-2)$; $D_f =]2 ; +\infty[$
$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

◆ **Exercice 15 page 102**

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - \ln|x|) = \lim\limits_{x \to -\infty} [x - \ln(-x)] = -\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{3x+2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{3x+2} \times \dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5x + 3 - 4\ln x)$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(5 + \dfrac{3}{x} - 4\dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$

(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x + 3}{\ln x + 1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \dfrac{3}{\ln x}}{1 + \dfrac{1}{\ln x}} = 1$

(7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = -\infty$

(8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right) = +\infty$

◆ **Exercice 16 page 103**

(1) $\lim\limits_{x \to 0} (x^3 \ln x) = \lim\limits_{x \to 0} [x^2 \times (x\ln x)] = 0$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{x}\ln x) = \lim\limits_{x \to 0} [2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}] = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}(1 + x\ln x)\right) = +\infty$

◆ **Exercice 17 page 103**

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{x} \times \dfrac{\ln(x+1)}{x}\right) = 0$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(2-x)}{x-1} = -1$

(3) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e} = \ln'(e) = \dfrac{1}{e}$

(4) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{x\ln x - e}{x - e} = \lim\limits_{x \to e} \dfrac{x\ln x - e\ln e}{x - e} = f'(e) = 2$
avec : $f(x) = x\ln x$; $f'(x) = \ln x + 1$

◆ **Exercice 18 page 103**

$f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$; $D_f =]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{4(\sqrt{x}\ln x)^2} = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x(\ln x)^2} = +\infty$

◆ **Exercice 19 page 103**

(1) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$; $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$
$f'(x) = \dfrac{2}{x-1}$

(2) $f(x) = \ln|1 - 3x|$; $D_f =]-\infty ; \dfrac{1}{3}[\cup]\dfrac{1}{3} ; +\infty[$
$f'(x) = \dfrac{-3}{1-3x}$

(3) $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$; $D_f =]0 ; +\infty[$
$f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\ln x(2 - \ln x)$

(4) $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$; $D_f =]0 ; e[\cup]e ; +\infty[$
$f'(x) = \dfrac{-2}{x(\ln x - 1)^2}$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}} + 3x$; $D_f =]1 ; +\infty[$
$f'(x) = \dfrac{-1}{2x\ln x\sqrt{\ln x}} + 3$

(6) $f(x) = \ln\sqrt{x} - 5x$; $D_f =]0 ; +\infty[$
$f'(x) = \dfrac{1}{2x} - 5$

◆ **Exercice 20 page 103**

1\. $f(x) = (x+1)[2\ln(x+1) + 3]$; $D_f =]1 ; +\infty[$
$f'(x) = 2\ln(x+1) + 5$

2\. $(x+1)f'(x) - f(x) = 2(x+1)$

◆ **Exercice 21 page 103**

$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{, si } x \leq 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$

• $\lim\limits_{x \to 0} f(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} \times x = 0$
f est continue en 0

• $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$
f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

◆ **Exercice 22 page 103**

$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{, si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x} & \text{, si } x \geq 1 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$
$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(1 + \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$

d'où $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$

donc f est continue en 1.

- $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

d'où $f'_g(1) = 2$.

$\lim_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(1 + \frac{\ln x}{x}) - 1}{x - 1}$

$= \lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} \times \dfrac{1}{x} = 1$

d'où $f'_d(1) = 1$.

donc f n'est pas dérivable en 1.

♦ Exercice 23 page 103

(1) $f(x) = \dfrac{3}{2 - x}$; $K =]2 ; +\infty[$

$F(x) = -3\ln(x - 2) + c$ $[c \in \mathbb{R}]$

(2) $f(x) = \dfrac{-4x - 2}{x^2 + x + 1}$; $K = \mathbb{R}$

$F(x) = -2\ln(x^2 + x + 1) + c$ $[c \in \mathbb{R}]$

(3) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; $K =]0 ; +\infty[$

$F(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + c$ $[c \in \mathbb{R}]$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$; $K =]1 ; +\infty[$

$F(x) = \ln(\ln x) + c$ $[c \in \mathbb{R}]$

♦ Exercice 24 page 103

$f(x) = x\ln x$; $D_f =]0 ; +\infty[$

$f'(x) = 1 + \ln x$; $\ln x = f'(x) - 1$

(une primitive de $\ln)(x) = x\ln x - x$.

♦ Exercice 25 page 103

$f(x) = \dfrac{2x - 5}{(x - 2)(1 - x)} = \dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{3}{1 - x}$

sur $]2 ; +\infty[$, $x - 2 > 0$; $x - 1 > 0$

(une primitive de $\ln)(x) = \ln(x - 2) - 3\ln(x - 1)$.

♦ Exercice 26 page 103

$f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 2}{3x - 1}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{3}\}$

$f(x) = x + 1 - \dfrac{1}{3x - 1}$

Sur $]-\infty ; \frac{1}{3}[$, $1 - 3x > 0$.

Sur $]\frac{1}{3} ; +\infty[$, $3x - 1 > 0$.

Une primitive de f sur $]-\infty ; \frac{1}{3}[$ est :

$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{3}\ln(1 - 3x)$.

Une primitive de f sur $]\frac{1}{3} ; +\infty[$ est :

$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{3}\ln(3x - 1)$.

♦ Exercice 27 page 103

$f(x) = \dfrac{3x + 1}{(2x + 1)^2}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$

1. $f(x) = \dfrac{\frac{3}{2}}{2x + 1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{(2x + 1)^2}$

2. Sur $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$, $2x + 1 > 0$

Les primitives de f sur $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$ sont :

$x \mapsto \frac{3}{4}\ln(2x + 1) + \dfrac{1}{4(2x + 1)} + c$ $[c \in \mathbb{R}]$.

3. $F(x) = \frac{3}{4}\ln(2x + 1) + \dfrac{1}{4(2x + 1)} + \dfrac{3}{4}$.

♦ Exercice 28 page 103

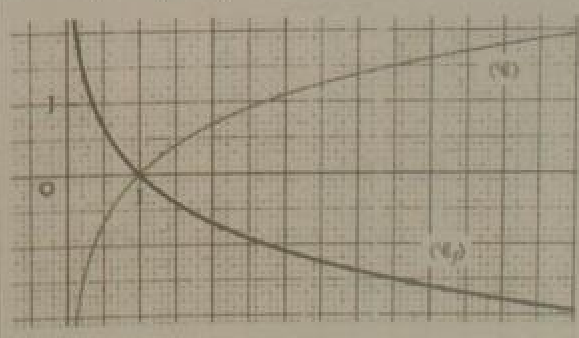
(1) $f(x) = \ln(\frac{1}{x})$

$$\mathbb{R}_+^* \xrightarrow[\text{str. décroiss.}]{\text{inv}} \mathbb{R}_+^* \xrightarrow[\text{str. croiss.}]{\ln} \mathbb{R} \qquad (\text{composée } f)$$

donc f est strictement décroissante.

- $f(x) = -\ln x$

donc $(\mathscr{C}_f) = S_{(OI)}(\mathscr{C}_{\ln})$.



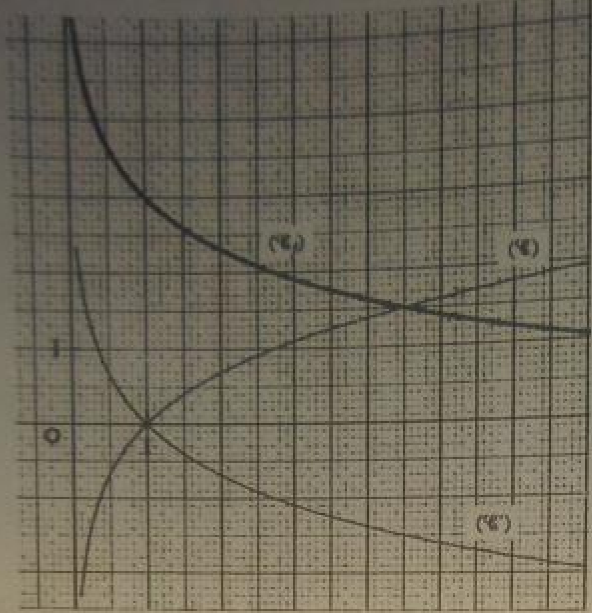
(2) $f(x) = 3 - \ln x = \ln(\frac{e^3}{x})$

$$\mathbb{R}_+^* \xrightarrow[\text{str. décroiss.}]{e^3\cdot\text{inv}} \mathbb{R}_+^* \xrightarrow[\text{str. crois.}]{\ln} \mathbb{R} \qquad (\text{composée } f)$$

donc f est strictement décroissante.

- $f(x) = 3 - \ln x$

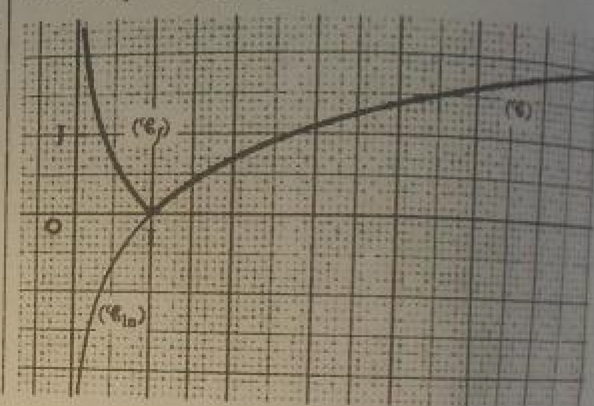
donc $(\mathscr{C}_f) = t_{3\vec{OJ}} \circ S_{(OI)}(\mathscr{C}_{\ln})$.



(3) $f(x) = |\ln x|$

$$\overset{f}{\overrightarrow{\hspace{8em}}}$$
$$\bullet\ \mathbb{R}_+^* \xrightarrow[\text{str. croiss.}]{\ln} \mathbb{R} \xrightarrow{\text{abs.}} \mathbb{R}_+$$

Sur $]0\,;1]$, $f(x) = -\ln x$;
sur $]1\,;+\infty[$, $f(x) = \ln x$;
d'où f est strictement décroissante sur $]0\,;1]$,
f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.
La représentation graphique de la restriction de ln :
– à $]0\,;1]$ est notée $(\mathscr{C}_0)$;
– à $[1\,;+\infty[$ est notée $(\mathscr{C})$;
d'où : $(\mathscr{C}_f) = [S_{(O\vec{\imath})}(\mathscr{C}_0)] \cup (\mathscr{C})$.



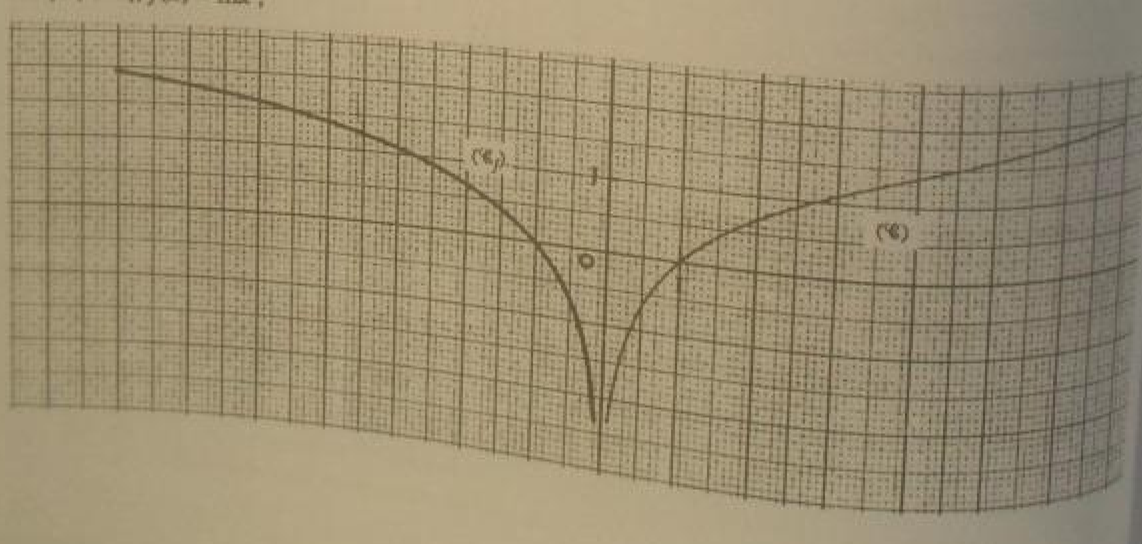
(4) $f(x) = \ln|x|$

$$\overset{f}{\overrightarrow{\hspace{8em}}}$$
$$\bullet\ \mathbb{R}^* \xrightarrow{\text{abs.}} \mathbb{R}_+^* \xrightarrow[\text{str. croiss.}]{\ln} \mathbb{R}$$

Sur $]-\infty\,;0[$, $f(x) = -\ln(-x)$;
sur $]0\,;+\infty[$, $f(x) = \ln x$;

donc f est décroissante sur $]-\infty\,;0[$,
f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

• $(\mathscr{C}_f) = (\mathscr{C}_{\ln}) \cup [S_{(O\vec{\jmath})}(\mathscr{C}_{\ln})]$.



(5) $f(x) = \ln(x+3)$

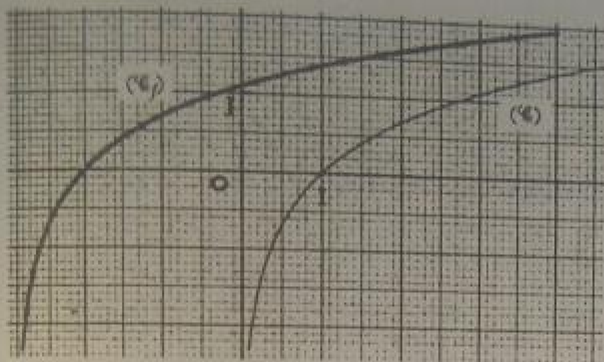
On pose $g : x \mapsto x + 3$

$$\overset{f}{\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}}$$

• $]-3\,;+\infty[\ \xrightarrow[\text{str. croiss.}]{g}\ \mathbb{R}_+^*\ \xrightarrow[\text{str. croiss.}]{\ln}\ \mathbb{R}$

donc f est strictement croissante sur $]-3\,;+\infty[$.

• $(\mathscr{C}_f) = t_{-3\vec{i}}\,((\mathscr{C}_{\ln}))$.



(6) $f(x) = \ln(x-1) + 2 = \ln[e^2(x-1)]$

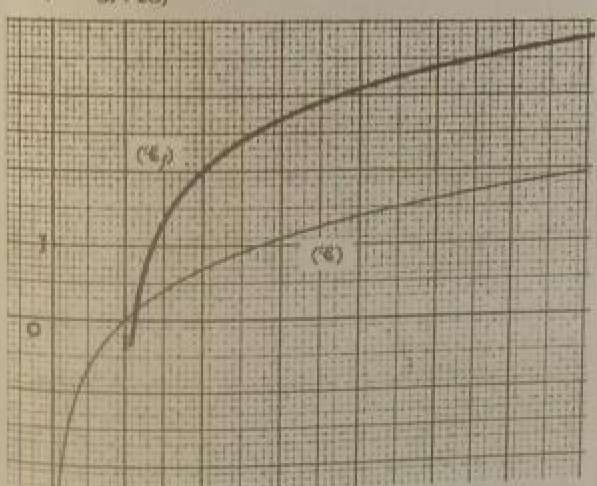
On pose $g : x \mapsto e^2(x-1)$

$$\overset{f}{\xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}}$$

• $]1\,;+\infty[\ \xrightarrow[\text{str. croiss.}]{g}\ \mathbb{R}_+^*\ \xrightarrow[\text{str. croiss.}]{\ln}\ \mathbb{R}$

donc f est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$.

• $(\mathscr{C}_f) = t_{\vec{i}+2\vec{j}}\,((\mathscr{C}_{\ln}))$.

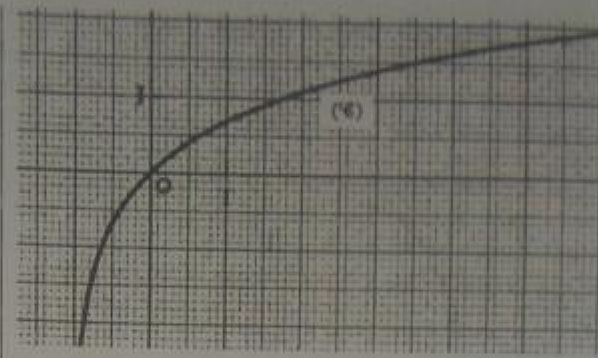


♦ **Exercice 29 page 103**

(1) $f(x) = \ln(2x+1)$; $D_f =]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$

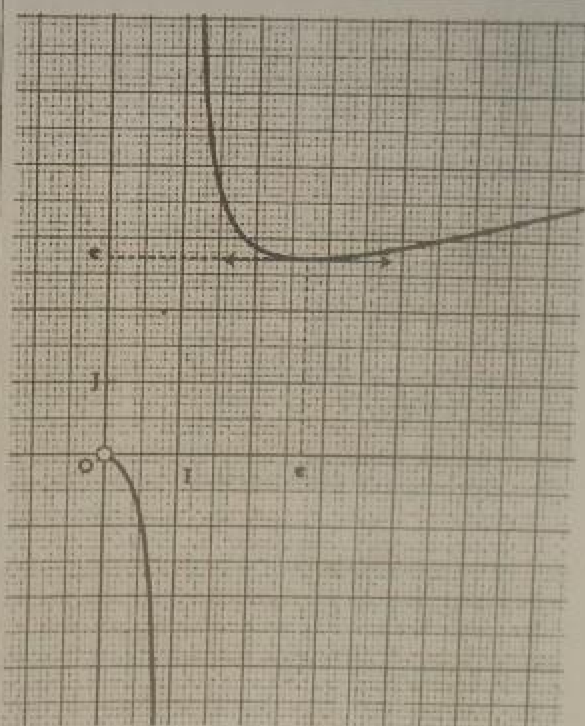
x	$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



(2) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$; $D_f =]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{-1+\ln x}{(\ln x)^2}$

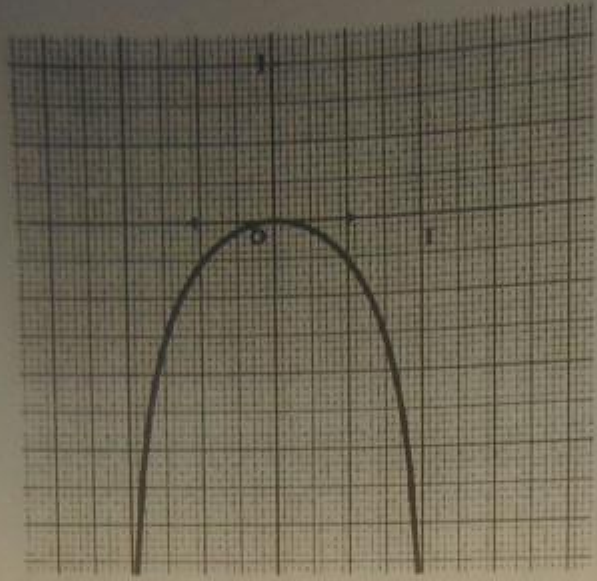
x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	$\boxed{e}$	↗	$+\infty$



(3) $f(x) = \ln(1-x^2)$; $D_f =]-1\,;1[$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2}$

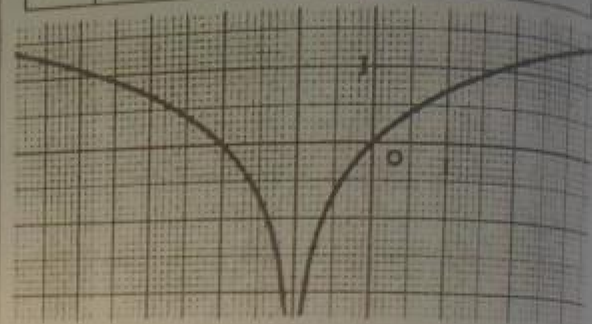
x	-1		0		1
$f'(x)$	‖	$+$	$\boxed{0}$	$-$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\boxed{0}$	↘	$-\infty$ ‖



(5) $f(x) = \ln|x+1|$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

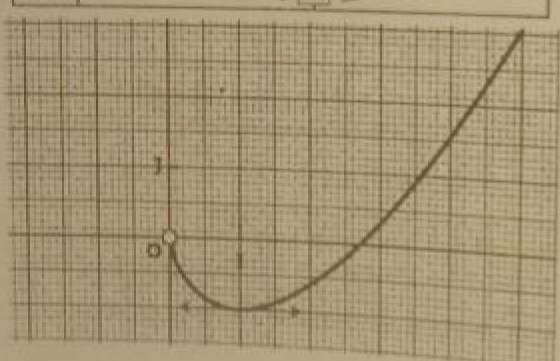
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$



(4) $f(x) = x\ln x - x$; $D_f =]0\,;+\infty[$

$f'(x) = \ln x$

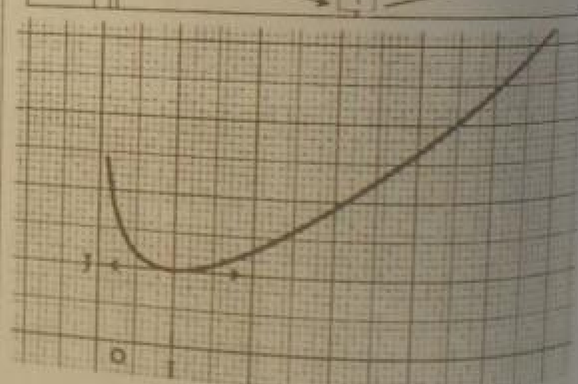
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\boxed{-1}$	↗	$+\infty$



(6) $f(x) = x - \ln x$; $D_f =]0\,;+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	$\boxed{1}$	↗	$+\infty$



◆ **Exercice 30 page 104**

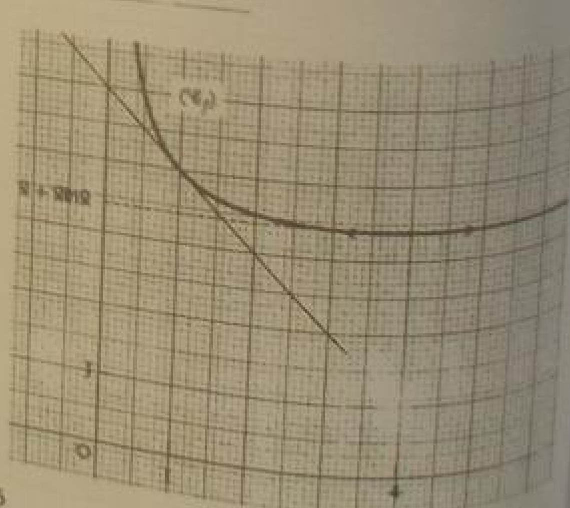
$f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} + \ln x$; $D_f =]0\,;+\infty[$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(4 + 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x})$

$f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}(-2 + \sqrt{x})$

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	$\boxed{2+\ln 4}$	↗	$+\infty$

La tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point $A[1\,;f(1)]$ a pour équation : $y = -x + 5$.



♦ Exercice 31 page 104

$f(x) = \frac{1}{3}\ln\frac{2+x}{2-x}$

1. *a)* $f(-x) = \frac{1}{3}\ln\frac{2-x}{2+x} = \frac{1}{3}\ln\frac{1}{\frac{2+x}{2-x}}$

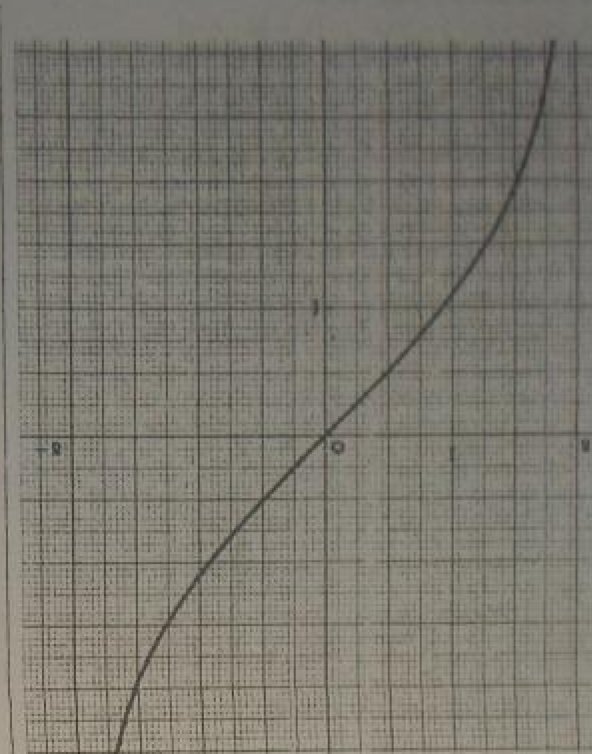
$= -\frac{1}{3}\ln\frac{2+x}{2-x} = -f(x).$

f est donc impaire.

b) $f'(x) = \frac{4}{3(2+x)(2-x)}$

x	-2		2
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c) Courbe $(\mathscr{C}_f)$, voir ci-contre.



2. *a)* D'après **1.**, la fonction f détermine une bijection de $]-2\,;2[$ dans $\mathbb{R}$.

L'équation (E) : $f(x) = \frac{1}{3}$ admet une unique solution dans $]-2\,;2[$.

b) (E) $\ln\frac{2+x}{2-x} = 1$; $x = \frac{2(e-1)}{e+1}$.

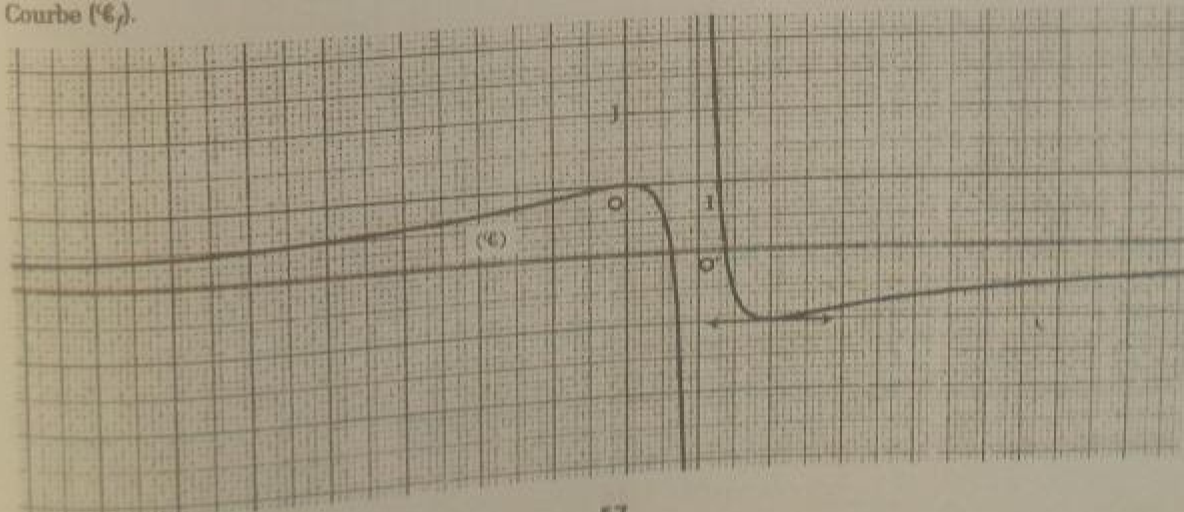
♦ Exercice 32 page 104

$f(x) = \frac{x + \ln|1-x|}{1-x}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

1. $f'(x) = \frac{\ln|1-x|}{(1-x)^2}$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\boxed{0}$	$-$	‖	$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\boxed{0}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\boxed{-2}$	$\nearrow$	-1

Courbe $(\mathscr{C}_f)$.



2. Posons $O'(1\,;-1)$.

$g(x) = f(x+1) + 1 = \frac{1 + \ln|x|}{-x}$

On vérifie que g est une fonction impaire.

En conséquence, $(\mathscr{C})$ admet pour centre de symétrie le point $O'(1\,;-1)$.

♦ **Exercice 33 page 104**

1. $g(x) = x + 1 - \ln x$; $D_g =]0\,;+\infty[$

$g'(x) = \dfrac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$g(x)$ est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$.

2. $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\ln x$; $D_f =]0\,;+\infty[$

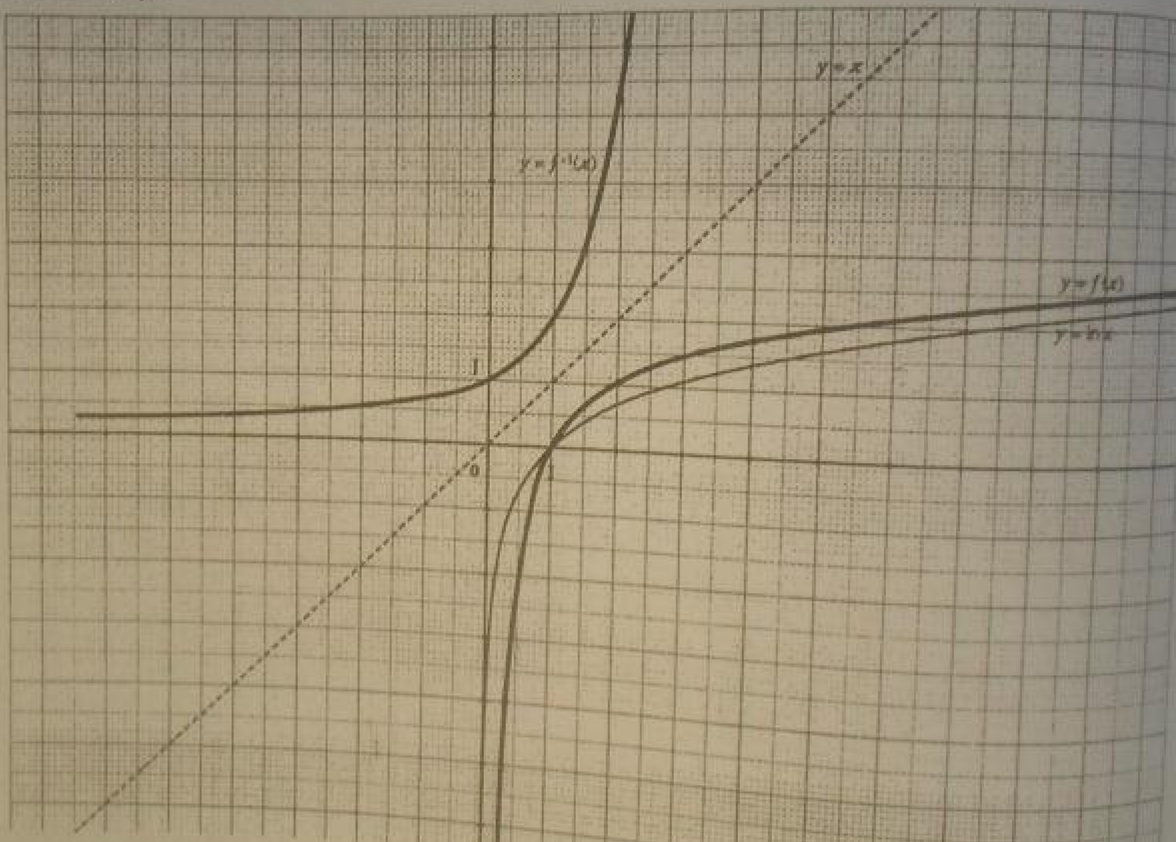
$f'(x) = \dfrac{1}{x^2}(x + 1 - \ln x) = \dfrac{1}{x^2} \times g(x)$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$+\infty$

3. On en déduit que f détermine une bijection de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, car elle est dérivable et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

4. $f(x) - \ln x = \dfrac{\ln x}{x}$ est du signe de $\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

5. Courbe $(\mathscr{C}_f)$.



♦ **Exercice 34 page 104**

1. $g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6$; $D_g =]0\,;+\infty[$

$g'(x) = \dfrac{3(x\sqrt{x} - 1)}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

On en déduit que : pour $x \in]0\,;+\infty[$, $g(x) \geq 8 > 0$.

2. $f(x) = \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$; $D_f =]0\,;+\infty[$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} \times g(x) > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$+\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} 6\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0.$

Donc la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à ($\mathscr{C}$) en $+\infty$.
Le signe de $[f(x) - (x - 1)]$ est celui de $\ln x$.

3. a) $h(x) = 6\sqrt{x}\ln x$; $D_h =]0 ; +\infty[$

$h'(x) = \dfrac{6}{\sqrt{x}} + \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = h'(x) - \dfrac{6}{\sqrt{x}} + x - 1$

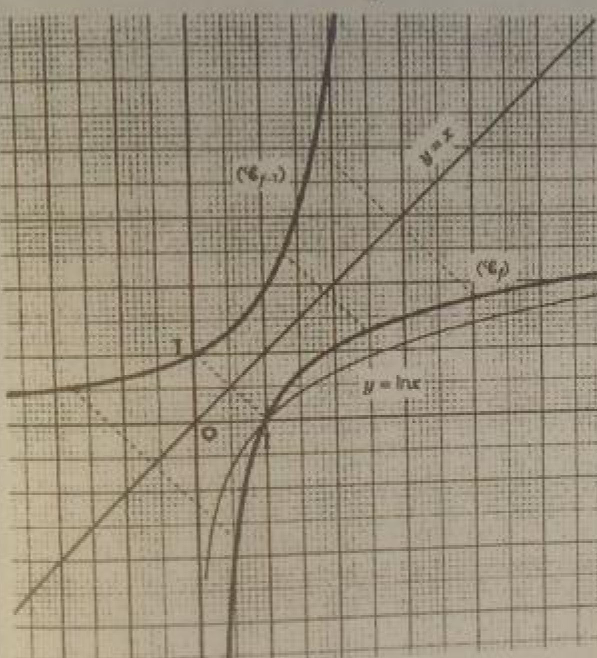
Les primitives de f sur $]0 ; +\infty[$ sont :

$x \mapsto 6\sqrt{x}\ln x - 12\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}x^2 - x + c$ $[c \in \mathbb{R}]$.

La primitive F sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en 1 est :

$F(x) = 6\sqrt{x}\ln x - 12\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}x^2 - x + c$

avec $F(1) = 0$, c'est-à-dire : $c = \dfrac{25}{2}$.



♦ **Exercice 35 page 104**

$f(x) = \dfrac{x-1}{x}\ln x$; $D_f =]0 ; +\infty[$

1. a) $g(x) = x - 1 + \ln x$; $D_g =]0 ; +\infty[$

$g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

b) c) $g(1) = 0$;
$x \in]0 ; 1[$, $g(x) < 0$
$x \in]1 ; +\infty[$, $g(x) > 0$

2. a) $f'(x) = \dfrac{\ln x + x - 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$
b) Voir 1.
c) d)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

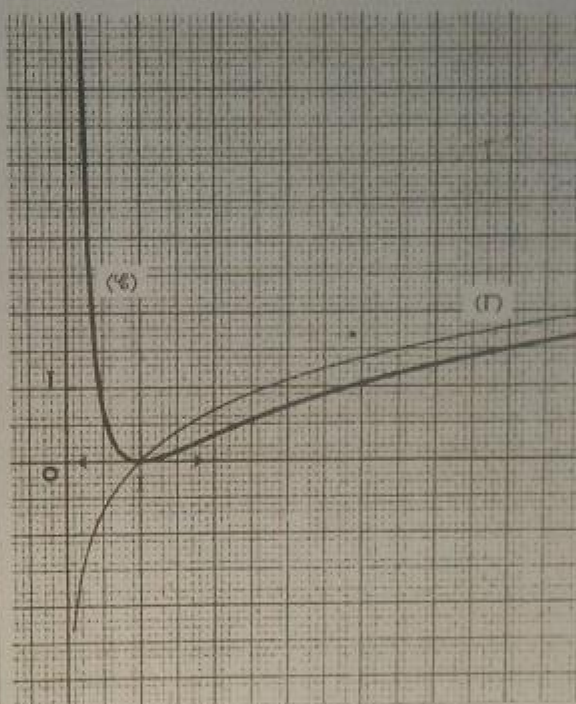
3. ($\mathscr{C}$) : $y = f(x)$; (Γ) : $y = \ln x$

a) pour $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) - \ln x = -\dfrac{\ln x}{x}$, ($\mathscr{C}$) est au-dessus de ($\Gamma$) sur $]0 ; 1]$, au-dessous de (Γ) sur $[1 ; +\infty[$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \ln x] = 0$

(Γ) est donc asymptote à ($\mathscr{C}$) en $+\infty$.

c) Courbes.



♦ **Exercice 36 page 104**

A. $g(x) = x^2 - \ln x$

1. $g'(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x}$

x	0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	α	↗	$+\infty$

$\alpha = f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0{,}85$.

2. pour $x \in]0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

B. $f(x) = x + \dfrac{1 + \ln x}{x}$; $D_f =]0 ; +\infty[$

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} [x + \dfrac{1}{x}(1 + \ln x)] = -\infty$

La droite (OJ) est asymptote à ($\mathscr{C}$).

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} [\dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}] = 0$

• La droite (D) d'équation $y = x$ est donc une asymptote à $(\mathscr{C})$.

• $f(x) - x = \dfrac{1 + \ln x}{x}$ (même signe que $1 + \ln x$)

Donc, $(\mathscr{C})$ est en-dessous de (D) sur $]0 ; \frac{1}{e}[$;

$(\mathscr{C})$ est au-dessus de (D) sur $]\frac{1}{e} ; +\infty[$;

$(\mathscr{C})$ coupe (D) au point $A(\frac{1}{e} ; \frac{1}{e})$.

3. $f'(x) = \dfrac{x^2 - \ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2} > 0$

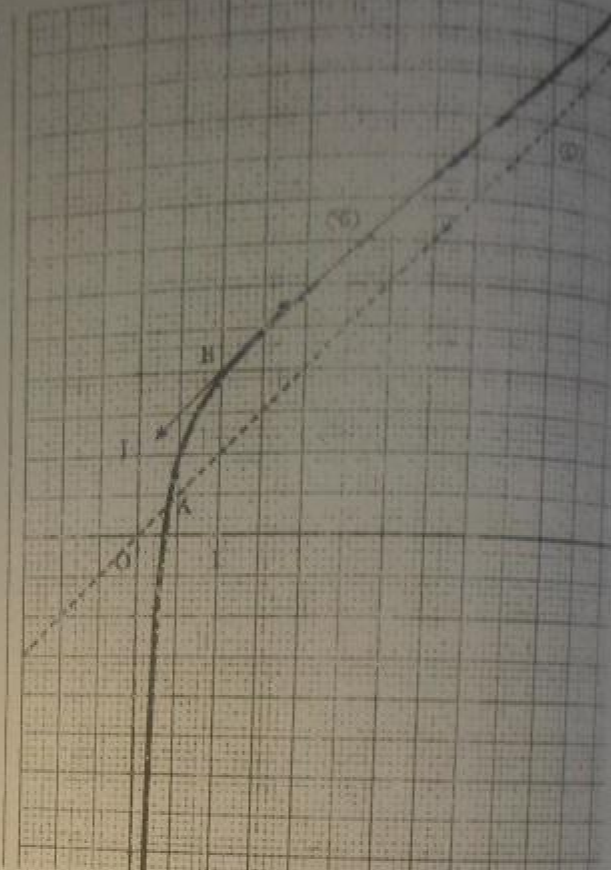
4. $f(0,3) \approx -0,38$ $\quad$ $f(1) = 2$

$f(\frac{1}{e}) = 0,37$ $\quad$ $f(7) = 7,42$

5. point B de $(\mathscr{C})$ où (T) // (D).

$f'(x_B) = 1$, d'où : $B(1 ; 2)$.

6. Courbe.



5. Fonction exponentielle népérienne

(pages 105 à 122 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :

- définir et étudier la fonction réciproque de la fonction ln, la fonction exponentielle népérienne (exp) ;
- mettre en place de nouvelles primitives de révérence, celles des fonctions du type $u'\exp(u)$.

Commentaires

La fonction exponentielle népérienne complète l'ensemble des fonctions étudiées par les élèves en terminale et son étude va servir de fondement à l'étude des fonctions exponentielles en général.

Ces fonctions ont un vaste champ d'application et on les retrouve aussi bien en biologie qu'en sciences physiques, notamment pour résoudre des équations différentielles.

Ici aussi, l'utilisation de la calculatrice peut permettre de conjecturer les propriétés de la fonction exponentielle.

Celle-ci est définie comme la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. Ses propriétés se déduisent naturellement de celles de la fonction ln.

La notation $\exp(x) = e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$ est admise et justifiée comme généralisation de $\exp(r) = e^r$ où $r \in \mathbb{Q}$.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Définition, propriétés algébriques – Définition. – Notation e^x. – Propriétés algébriques. – Résolutions d'équations, d'inéquations.	• Résoudre des équations et des inéquations faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne.
Étude de la fonction exponentielle népérienne – Dérivée. – Sens de variation. – Limites. – Représentation graphique. – Limites de référence.	• Retrouver, à l'aide de sa représentation graphique, les propriétés analytiques de la fonction exponentielle. • Utiliser les limites de la fonction exponentielle népérienne pour déterminer les limites d'une fonction.
Fonctions composées comportant la fonction exp – Dérivée de fonctions du type $\exp \circ u$. – Primitives de fonctions du type $u'e^u$.	• Étudier la composée d'une fonction avec la fonction exponentielle népérienne. • Déterminer les primitives d'une fonction de la forme $u'e^u$.

Exercices d'application directe

◆ Exercice 1.a page 107

(1) $\ln\sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

(2) $\frac{1}{2}\ln e^{8,6} = \ln e^{\frac{1}{2}\times 8,6} = \frac{1}{2}\times 8,6 = 4,3$

(3) $e^{\frac{1}{2}\ln 6} = e^{\ln\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

(4) $e^{-\ln 5} = e^{\ln\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$

(5) $e^{\ln 3 - \ln 7} = e^{\ln\frac{3}{7}} = \frac{3}{7}$

(6) $e^{1-\ln 5} = e^{\ln\frac{e}{5}} = \frac{e}{5}$

(7) $\ln\sqrt{e^5} = \ln e^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$

(8) $\ln e^{x^2} = x^2$

(9) $e^{\ln x} - \ln e^x = x - x = 0 \,;\, x > 0$

(10) $e^{\ln(x-1)}\, e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{x-1}{x}} = \frac{x-1}{x} \,;\, x > 1$

◆ Exercice 1.b page 109

(1) $e^{3x-2} = 5 \,;\, V_{(1)} = \mathbb{R}$

$3x - 2 = \ln 5 \,;\, S_{(1)} = \{\frac{\ln 5 + 2}{3}\}$

(2) $e^{2x+1} = 3 \,;\, V_{(2)} = \mathbb{R}$

$S_{(2)} = \{\frac{\ln 3 - 1}{2}\}$

(3) $2e^{2x+2} - 7e^{x+1} + 3 = 0 \,;\, V_{(3)} = \mathbb{R}$

$\begin{cases} X = e^{x+1} \\ 2X^2 - 7X + 3 = 0 \,;\, X > 0 \end{cases}$

On obtient : $X = 3$ ou $X = \frac{1}{2}$

$S_{(3)} = \{-1 - \ln 2 \,;\, -1 + \ln 3\}$

(4) $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 = 0 \,;\, V_{(4)} =]0 \,;\, +\infty[$

$\begin{cases} X = \ln x \\ X^2 - 3X + 4 = 0 \,;\, X \in \mathbb{R} \end{cases}$

On obtient : $X = 4$ ou $X = -1$

$S_{(4)} = \{\frac{1}{e} \,;\, e^4\}$

◆ Exercice 1.c page 109

(1) $e^{7x+8} > 2 \,;\, V_{(1)} = \mathbb{R}$

$e^{7x+8} > e^{\ln 2} \,;\, x > \frac{-8 + \ln 2}{7}$

$S_{(1)} =]\frac{-8 + \ln 2}{7} \,;\, +\infty[$

(2) $e^{8x-1} < -8 \,;\, V_{(2)} = \mathbb{R}$

$S_{(2)} = \varnothing$

(3) $e^{5x+7} > -2 \,;\, V_{(3)} = \mathbb{R}$

$S_{(3)} = \mathbb{R}$

(4) $(\ln x)^3 - \ln x \leq 0 \,;\, V_{(4)} =]0 \,;\, +\infty[$

$(\ln x)(\ln x - 1)(\ln x + 1) \leq 0$

x		1/e		1		e	+∞
$\ln x$	−		−	0	+		+
$\ln x - 1$	−		−		−	0	+
$\ln x + 1$	−	0	+		+		+
produit	−	0	+	0	−	0	+

$S_{(4)} =]0 \,;\, \frac{1}{e}] \cup [1 \,;\, e[$

◆ Exercice 2.a page 113

1. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \,;\, D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

2. $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 3} \,;\, D_f = \mathbb{R}\setminus\{\ln 3\}$

$f'(x) = \frac{-4e^x}{(e^x - 3)^2}$

◆ Exercice 2.b page 113

(1) $f(x) = e^{5x}$ $\quad;\, F(x) = \frac{1}{5}e^{5x}$

(2) $f(x) = (x+1)e^{x^2+2x-1}$ $\quad;\, F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+2x-1}$

(3) $f(x) = e^{3x+4}$ $\quad;\quad F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+4}$

◆ Exercice 2.c page 113

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[x(\frac{e^x}{x} - 1)] = +\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{7x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{e^x}{x}\times\frac{x}{7x-3}] = +\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x - x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}} = 1$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(9x - 3)e^x = +\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{5x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\times\frac{x}{5x-2} = +\infty$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^{2x} - 1}{5e^x + 4} = +\infty$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-5x+3} = 0$

Exercices d'apprentissage

♦ Exercice 1 page 120

(1) $e^{3\ln 5} = e^{\ln 5^3} = 5^3$

(2) $e^{\ln 2 + \ln 5} = e^{\ln(2\times 5)} = 2 \times 5$

(3) $\ln(e^{3x}) = 3x$

(4) $\ln(3e^{6x}) = \ln 3 + 6x$

(5) $\dfrac{e^{x-1}}{e^2} \times \ln e^3 \times e^{\ln e^3} = \dfrac{e^{x-1}}{e^2} \times 3 \times e^3 = 3e^x$

(6) $2\ln(\ln e) = 2\ln 1 = 0$

(7) $e^{-\ln 2} = e^{\ln\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

♦ Exercice 2 page 120

(1) $e^{x + \ln x} = xe^x \; ; x > 0$

(2) $e^{\ln(x-1)}\, e^{-\ln x} = 1 - \dfrac{1}{x} \; ; x > 1$

(3) $\dfrac{e^{\ln x}}{\ln(e^x)} = 1$

(4) $\dfrac{e^{\ln x}}{\ln(e^{x^2})} = \dfrac{1}{x} \; ; x > 0$

♦ Exercice 3 page 120

(1) $e^{3x+1} = 7 \; ; V_{(1)} = \mathbb{R}$

$3x + 1 = \ln 7 \; ; S = \{\dfrac{\ln 7 - 1}{3}\}$

(2) $e^{x-3} = 1 \; ; V_{(2)} = \mathbb{R}$

$x - 3 = 0 \; ; S = \{3\}$

(3) $e^{2x-1} = 6 \; ; S = \{\dfrac{1 + \ln 6}{2}\}$

(4) $e^{-x-4} - 6 = 0 \; ; S = \{-4 - \ln 6\}$

(5) $e^{x+3} + 2 = 1 \; ; S = \varnothing$

(7) $e^{x+3} + \dfrac{3}{2} = 2 \; ; S = \{-\ln 2 - 3\}$

♦ Exercice 4 page 120

(1) $3e^{4x} + 5e^{2x} - 2 = 0 \; ; V_{(1)} = \mathbb{R}$

posons : $X = e^{2x} \; ; X > 0$

résolvons : $3X^2 + 5X - 2 = 0$

$X = -2$ *ou* $X = \dfrac{1}{3}$

d'où : $S_{(1)} = \{-\dfrac{\ln 3}{2}\}$

(2) $e^{3x+1} + \sqrt{e^{3x+1}} - 6 = 0 \; ; V_{(2)} = \mathbb{R}$

posons : $e^{\frac{3x+1}{2}} = X,\ X > 0$

résolvons : $X^2 + X - 6 = 0$

$X = 2$ *ou* $X = -3$

d'où : $S_{(2)} = \{\dfrac{2\ln 2 - 1}{3}\}$

(3) $(\ln x)^3 + 4(\ln x)^2 - \ln x - 4 = 0 \; ; V_{(3)} =]0 \; ; +\infty[$

posons : $X = \ln x \; ; X \in \mathbb{R}$

résolvons : $X^3 + 4X^2 - X - 4 = 0$

$(X - 1)(X + 4)(X + 1) = 0$

d'où : $S_{(3)} = \{\dfrac{1}{e^4} \; ; \dfrac{1}{e} \; ; e\}$

♦ Exercice 5 page 120

(1) $\ln x = -2 \; ; V_{(1)} =]0 \; ; +\infty[\; ; S = \{\dfrac{1}{e^2}\}$

(2) $\ln x = \dfrac{1}{4} \; ; V_{(2)} =]0 \; ; +\infty[\; ; S = \{e^{1/4}\}$

(3) $\ln(x^2) = 16 \; ; V_{(3)} = \mathbb{R}^* \; ; x^2 = e^{16} \; ; S = \{-e^8 \; ; e^8\}$

(4) $(\ln x)^2 = 16 \; ; V_{(4)} =]0 \; ; +\infty[\; ; S = \{e^{-4} \; ; e^4\}$

♦ Exercice 6 page 120

1. $X^2 - 3X + 2 = 0 \; ; S = \{1 \; ; 2\}$
2. $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0 \; ; V = \mathbb{R}_+^*$

$\ln x = 1$ *ou* $\ln x = 2$

$S = \{e \; ; e^2\}$

♦ Exercice 7 page 120

$(\ln x)^2 - \ln x = 2$

$S = \{\dfrac{1}{e} \; ; e^2\}$

♦ Exercice 8 page 120

(1) $e^{-3x-2} > 3 \; ; S =]-\infty \; ;$ [illegible]

(2) $e^{x-6} > 1 \; ; S =]6 \; ; +\infty[$

(3) $e^{-2x+3} \geq 6 \; ; S =]-\infty \; ; \dfrac{3 - \ln 6}{2}]$

(4) $e^{\frac{1}{2}x+4} - 8 \geq 0 \; ; S =]-\infty \; ; 4 - \ln 8]$

(5) $e^{\frac{1}{2}x+2} < 8 \; ; S =]-\infty \; ; \ln 8 - 2[$

(6) $e^{x-3} + \dfrac{3}{2} \leq 2 \; ; S =]-\infty \; ; 3 - \ln 2]$

♦ Exercice 9 page 120

1. $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$
2. $(\ln x)^2 + \ln x - 6 \leq 0 \; ; S = [\dfrac{1}{e^3} \; ; e^2]$

♦ Exercice 10 page 120

(1) $2e^{2x} + 5e^x - 3 \leq 0 \; ; S =]-\infty \; ; -\ln 2]$

(2) $e^{2x} - 5e^x - 6 \geq 0 \; ; S = [\ln 6 \; ; +\infty[$

(3) $e^{2x} + 8e^x + 15 \leq 0 \; ; S = \varnothing$

(4) $e^{2x} - 4e^x + 3 > 0 \; ;$

on pose : $X = e^x \; ; X > 0$

$(X - 1)(X - 3) > 0 \; ; X > 0$

d'où : $X \in]0 \; ; 1[\cup]3 \; ; +\infty[$

$x \in]-\infty \; ; 0[\cup]\ln 3 \; ; +\infty[$

♦ Exercice 11 page 120

$P(x) = -x^3 + 7x - 6$

1. $P(1) = 0 \; ; P(2) = 0$

d'où : $P(x) = -(x - 1)(x - 2)(x + 3)$

2. $e^{3x} - 7e^x + 6 < 0$

on pose : $X = e^x,\ X > 0$

d'où : $X \in]0 \; ; 1[\cup]2 \; ; +\infty[$

$x \in]-\infty \; ; 0[\cup]\ln 2 \; ; +\infty[$

♦ Exercice 12 page 120

$P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

1. $P(x) = 2(x + 1)(x - 2)(x + \frac{1}{2})$

$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty \; ; -1] \cup [-\frac{1}{2} \; ; 2]$

2. (1) $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5\ln x - 2 \leq 0$;
$S =]0 ; \frac{1}{e}] \cup [\frac{1}{\sqrt{e}} ; e^2]$

(2) $2\ln x + \ln(2x-1) \leq \ln(5x+2)$; $S =]\frac{1}{2} ; 2]$

♦ Exercice 13 page 120

(1) $\begin{cases} e^x + e^y = 12 \\ 3e^x - 2e^y = 11 \end{cases}$; $S = \{(\ln 7 ; \ln 5)\}$

(2) $\begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases}$; $S = \{(\ln 2 ; \ln 5) ; (\ln 5 ; \ln 2)\}$

(3) $\begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases}$; $S = \{(\ln 5 ; \ln 6)\}$

(4) $\begin{cases} \ln(y+6) - \ln x = 3\ln x \\ e^{6x} e^y = e^{-6} \end{cases}$; $S = \emptyset$

♦ Exercice 14 page 120

(1) $\begin{cases} e^{x+y} = 3 \\ e^{x-y} = 2 \end{cases}$; $S = \{(\frac{\ln 6}{2} ; \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2})\}$

(2) $\begin{cases} 2e^x + 3e^y = 13 \\ e^x + e^y = 5 \end{cases}$; $S = \{(\ln 2 ; \ln 3)\}$

♦ Exercice 15 page 120

(1) $f(x) = e^{2x}\ln x$; $K =]0 ; +\infty[$
$f'(x) = e^{2x}(2\ln x + \frac{1}{x})$

(2) $f(x) = (x^3 + 4)e^{-x}$; $K = \mathbb{R}$
$f'(x) = e^{-x}(-x^3 + 3x^2 - 4)$

(3) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $K = \mathbb{R}$
$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(4) $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$; $K = \mathbb{R}$
$f'(x) = \frac{3e^x}{(e^x + 1)^2}$

(5) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $K = \mathbb{R}$
$f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

(6) $f(x) = e^{x^3}$; $K = \mathbb{R}$
$f'(x) = 3x^2 e^{x^3}$

(7) $f(x) = \frac{1}{x} - e^{\frac{1}{x}}$; $K =]0 ; +\infty[$
$f'(x) = \frac{1}{x^2}(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

♦ Exercice 16 page 120

(1) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; $D_f = \mathbb{R}^*$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

(2) $f(x) = e^{\frac{1}{2x+1}}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$
$f'(x) = \frac{-2}{(2x+1)^2} e^{\frac{1}{2x+1}}$

(3) $f(x) = e^{\ln x}$; $D_f =]0 ; +\infty[$
$f(x) = x$; $f'(x) = 1$

(4) $f(x) = (3x+2)e^x$; $D_f = \mathbb{R}$
$f'(x) = e^x(3x+5)$

(5) $f(x) = \frac{x}{1 - e^x}$; $D_f = \mathbb{R}^*$
$f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{(1 - e^x)^2}$

(6) $f(x) = (2x^2 - 6x + 7)e^x$; $D_f = \mathbb{R}$
$f'(x) = e^x(2x^2 - 2x + 1)$

♦ Exercice 17 page 120

$f(x) = P(x)e^x$; $K = \mathbb{R}$
$f'(x) = [aP(x) + P'(x)]e^{ax}$

(1) $f(x) = (2x+3)e^x$
$f'(x) = (2x+5)e^x$

(2) $f(x) = (x^2 - 3)e^{-5x}$
$f'(x) = (-5x^2 + 2x + 15)e^{-5x}$

♦ Exercice 18 page 120

(1) $f(x) = e^{-x+3}$
$F(x) = -e^{-x+3} + c \; [c \in \mathbb{R}]$

(2) $f(x) = e^{2x}$
$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + c \; [c \in \mathbb{R}]$

(3) $f(x) = (-2x+3)e^{-x^2+3x-1}$
$F(x) = e^{-x^2+3x-1} + c \; [c \in \mathbb{R}]$

(4) $f(x) = 3xe^{x^2-1}$
$F(x) = \frac{3}{2}e^{x^2-1} + c \; [c \in \mathbb{R}]$

(5) $f(x) = \frac{e^x}{3e^x + 2}$
$F(x) = \frac{1}{3}\ln(3e^x + 2) + c \; [c \in \mathbb{R}]$

♦ Exercice 19 page 121

$f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$; $D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1}$
$F(x) = x - \ln(e^x + 1) + c \; [c \in \mathbb{R}]$

♦ Exercice 20 page 122

$f(x) = \frac{1}{(e^x + 2)^2}$; $D_f = \mathbb{R}$

1. a) $\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{4} - \frac{x}{4(x+2)} - \frac{x}{2(x+2)^2}$

b) $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{e^x}{4(e^x+2)} - \frac{e^x}{2(e^x+2)^2}$

2. $F(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\ln(e^x + 2) + \frac{1}{2(e^x + 2)} + c \; [c \in \mathbb{R}]$

♦ **Exercice 21 page 121**

$F(x) = (ax + b)e^{-x}$

$F'(x) = (-ax - b + a)\,e^{-x}$

$f(x) = (2x + 1)e^{-x}$

$f = F' \Leftrightarrow a = -2$ et $b = -3$

♦ **Exercice 22 page 121**

$f(x) = (x^2 - 4)e^{2x}$

1. $F(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{2x}$; $D_f = D_F = \mathbb{R}$

$F' = f \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = -\frac{1}{2}$; $\gamma = -\frac{7}{4}$

2. $F(0) = 0 \Leftrightarrow F(x) = (\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{7}{4})e^{2x} + \frac{7}{4}$

♦ **Exercice 23 page 121**

(1) $\lim\limits_{x \to 0^>} e^x \ln x = -\infty$ (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x\, e^x = +\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to 0^<} e^{\frac{1}{x}} = 0$ (4) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^{x+1}} = \frac{1}{e}$

(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{2x} - e^x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x(e^x - 1) = +\infty$

(7) $\frac{e^{2x-1}}{e^x - 1} = e^{2x-1} \times \frac{1}{e^x - 1}$

$\lim\limits_{x \to 0} e^{2x-1} = \frac{1}{e}$;

$\lim\limits_{x \to 0^<} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^>} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$

(8) $\frac{e^{2x-1}}{e^x - 1} = \frac{e^{-1} \times (e^x)^2}{e^x - 1}$

on pose : $X = e^x$; $X > 0$

donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-1} \times \frac{(e^x)^2}{e^x - 1} = +\infty$

♦ **Exercice 24 page 121**

(1) $f(x) = e^{-x}$; $K = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(2) $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$; $K =]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^>} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(3) $f(x) = xe^{-x}$; $K = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [-(-xe^{-x})] = 0$

(4) $f(x) = x + 1 - e^x$; $K = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}) = -\infty$

(5) $f(x) = e^{-x^2}$; $K = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$

♦ **Exercice 25 page 121**

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} [e^x \times \frac{1}{2 + e^x}] = 0$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{2X - 1} = \frac{1}{2}$

d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2e^x - 1} = \frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} [e^{2x} \times \frac{e^x - 1}{x}] = 1$

(4) $\lim\limits_{x \to 1^>} (x + 2)e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$

♦ **Exercice 26 page 121**

(1) $f(x) = \frac{e^x}{x + 1}$; $K =]-1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -1^>} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [\frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x + 1}] = +\infty$

(2) $f(x) = \ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$; $K =]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0$

$\lim\limits_{X \to 0} \ln X = -\infty$

d'où : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

♦ **Exercice 27 page 121**

(1) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} (1 - 3x) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty \end{array}\right\}$ d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

(2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} (5x + 2) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0 \end{array}\right\}$ d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \times e^{5x} = 0$

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} [e \times \left(\frac{e^x}{x}\right)^2] = +\infty$

(5) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - e^{3x}) \times \frac{1}{e^{x+2}} = -\infty$

(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-5} \times e^x \times \frac{e^x}{x}) = +\infty$

(7) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2xe^x + 3e^x) = 0$

(8) $\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x + \frac{1}{x}e^x) = 0$

♦ **Exercice 28 page 121**

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = (\exp)'(1) = e$

(2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1 \end{array}\right\}$ d'où : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \times e^{x-1} = +\infty$

(4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^x - e^2}{x - 2} = (\exp)'(2) = e^2$

(5) $\lim\limits_{x \to 0} [\dfrac{e^x - 1}{x} \times \sqrt{x}] = 0$

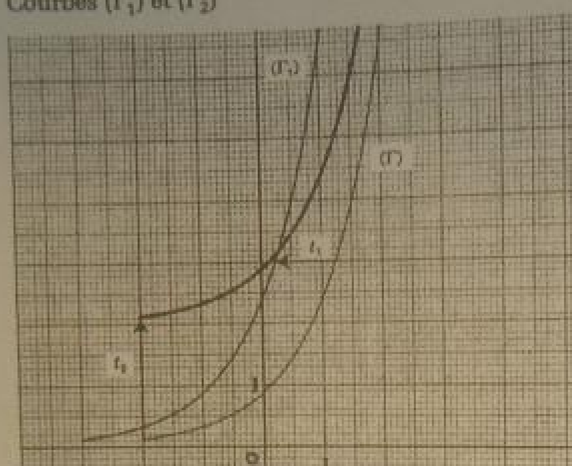
(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} [\dfrac{e^x}{x}(e^x - 1)] = +\infty$

◆ **Exercice 29 page 121**

$f(x) = e^{x+1}$; $g(x) = 2 + e^x$

- $f(x) = \exp(x + 1)$, d'où : $(\Gamma_1) = t_{-\vec{i}}(\Gamma)$
- $g(x) = \exp(x) + 2$, d'où : $(\Gamma_2) = t_{2\vec{j}}(\Gamma)$

Courbes (Γ_1) et (Γ_2)

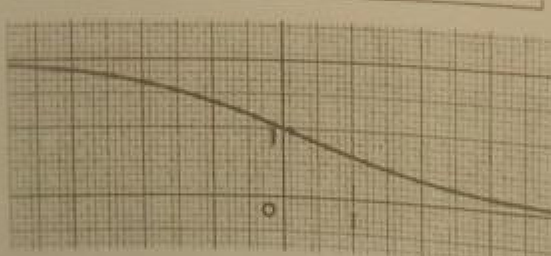


◆ **Exercice 30 page 121**

(1) $f(x) = \dfrac{2}{e^x + 1}$; $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{-2e^x}{(e^x + 1)^2}$

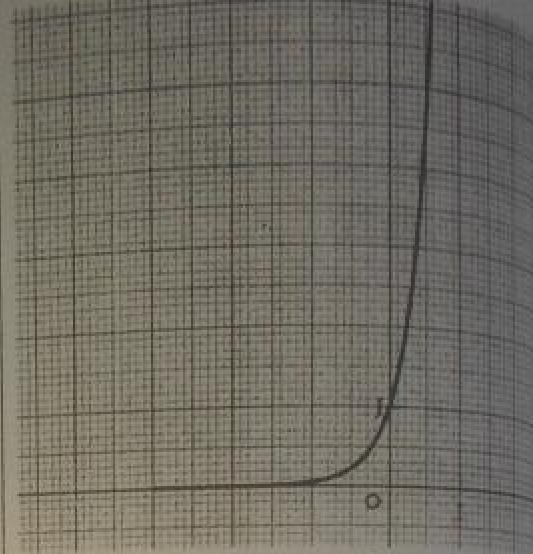
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$2 \searrow 0$



(2) $g(x) = e^{3x}$; $D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = 3e^{3x}$

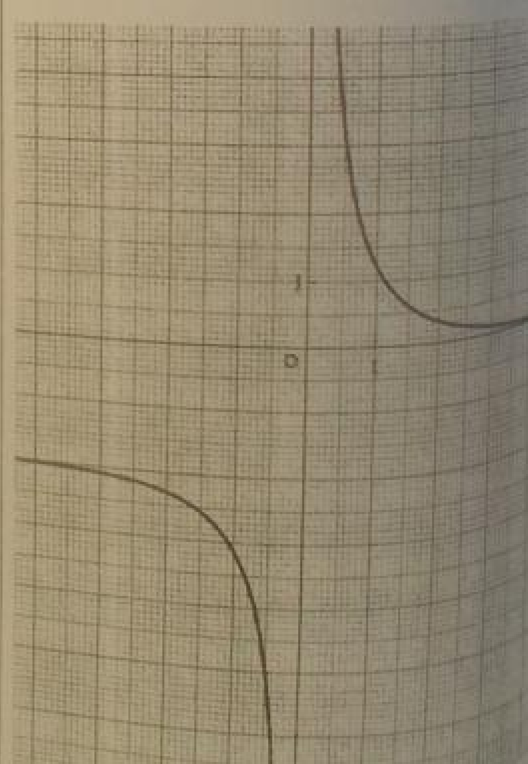
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$0 \nearrow +\infty$



(3) $h(x) = \dfrac{2}{e^x - 1}$; $D_h = \mathbb{R}^*$

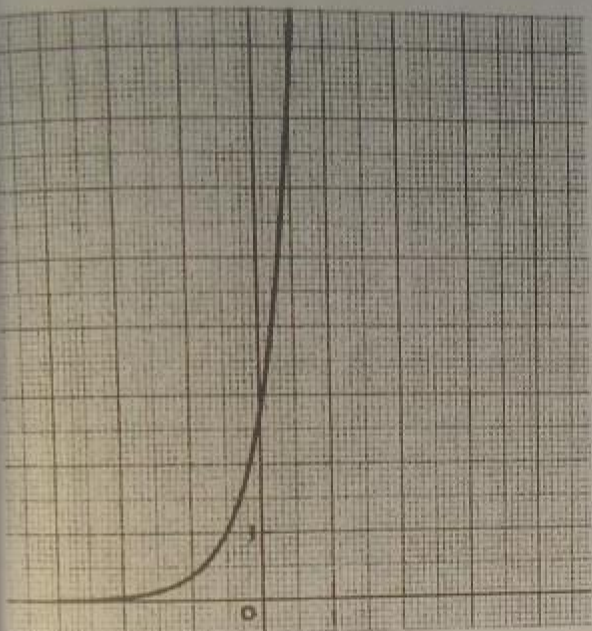
$h'(x) = \dfrac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$

x	$-\infty$ $\qquad$ 0	0 $\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$	$-$
$h(x)$	$-2 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 1$



(4) $k(x) = e^{2x+1}$; $D_k = \mathbb{R}$
$k'(x) = 2e^{2x+1}$

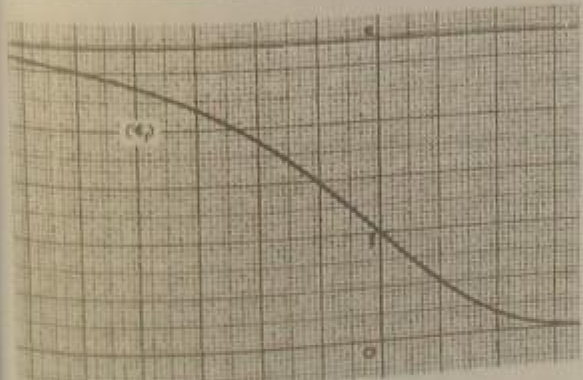
x	$-\infty$		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	
$k(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



♦ **Exercice 31 page 121**

1. $f(x) = \exp(1 - e^x)$; $D_f = \mathbb{R}$
$f'(x) = -e^x \times \exp(1 - e^x)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	e	$\searrow$	0

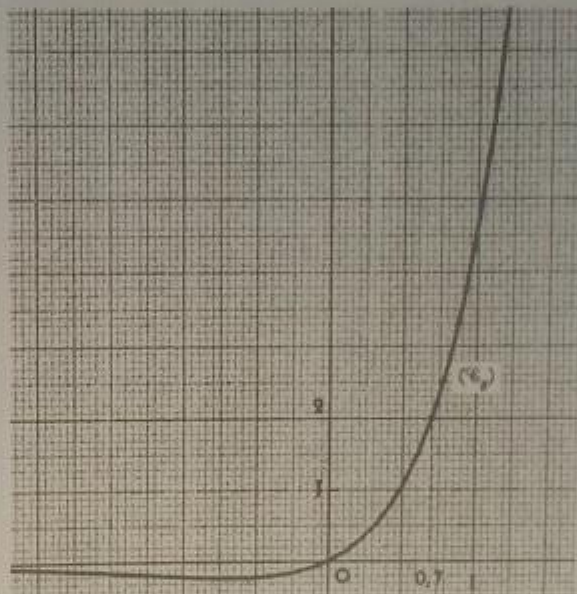


2. (E) $-e^{2x} + e^x + 2 = 0$
$e^{2x} - e^x = 2$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = e^{2x} - e^x$; $D_g = \mathbb{R}$
d'où : (E) $g(x) = 2$
$g'(x) = e^x(2e^x - 1)$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$\boxed{-1/4}$	$\nearrow$	$+\infty$

- **Lecture graphique de la solution de (E)**
- **Résolution algébrique de (E)**



On pose : $X = e^x$; $X > 0$
On résoud : $-X^2 + X + 2 = 0$
On obtient : $X = 2$; $x = \ln 2$

3. $-e2^x + e^x + m = 0$
$g(x) = m$

♦ **Exercice 32 page 121**

$f(x) = e^{x-2}$; $g(x) = e^{-x+2}$

1. $f'(x) = e^{x-2}$; $g'(x) = -e^{-x+2}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

2. Unique point commun A de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 2$
A(2 ; 1)

3. (T_1) tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en A : $y = x - 1$
(T_2) tangente à $(\mathscr{C}_g)$ en A : $y = -x + 3$

4. $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ sont symétriques par rapport à la droite (D) d'équation : $x = 2$.

En effet, $M(x\,;\,y)$ et $M'(x'\,;\,y')$ étant des points du plan, M et M' sont symétriques par rapport à (D) équivaut à :

$$\frac{x + x'}{2} = 2 \quad \text{et} \quad y = y'$$

$M \in (\mathscr{C}_f) \Rightarrow y = f(x)$

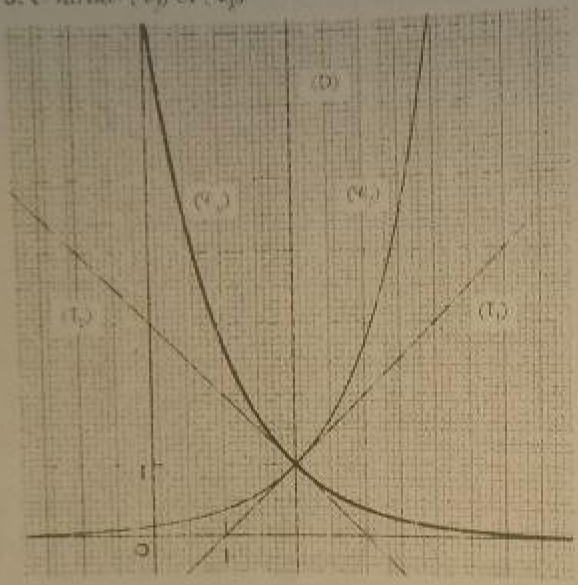
$\Rightarrow y' = f(-x' + 4)$

$\Rightarrow y' = e^{-x'+2}$

$\Rightarrow y' = g(x')$

$\Rightarrow M' \in (\mathscr{C}_g)$

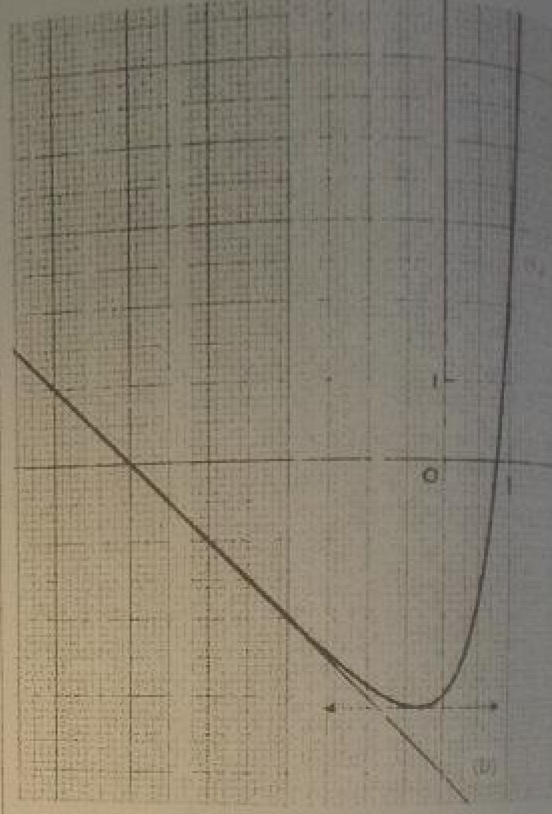
5. Courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$



4. (D) : $y = -x - 4$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-x - 4)] = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$

(D) est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$



♦ **Exercice 33 page 121**

$f(x) = e^{2x} - x - 4$

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2. $f(x) = e^x\left(e^x - \frac{x}{e^x} - \frac{4}{e^x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

or : $\frac{f(x)}{x}$ est le coefficient directeur de la sécante (AM) de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ où $M(x\,;\,f(x))$

d'où : $(\mathscr{C}_f)$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction, celle de (OJ).

3. $f'(x) = 2e^{2x} - 1$

x	$-\infty$		$-1/2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\boxed{0}$	↗	$+\infty$

$\alpha = -3{,}15$

♦ **Exercice 34 page 121**

$f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$

1. $\lim\limits_{x \to \ln 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \ln 2^+} f(x) = +\infty$

(D) : $x = \ln 2$

La droite (D) est une asymptote verticale à $(\mathscr{C}_f)$

2. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$; (D_1) : $y = x$

La droite (D_1) est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$

3. $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 2}$

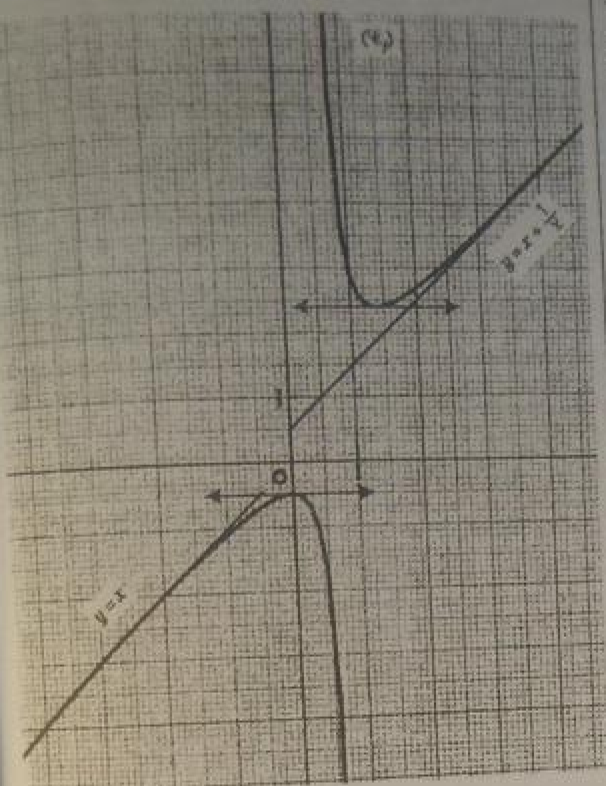
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(e^x - 2)^2} = \frac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{(e^x - 2)^2}$

4.

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\boxed{0}$	$-$	‖	$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\boxed{-0{,}5}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\boxed{2\ln 2 + \frac{1}{4}}$	↗	$+\infty$

5. Courbe $(\mathscr{C}_f)$



• Étude graphique

• Étude algébrique

$f(x) = x + m$

$e^x = \dfrac{4m}{2m-1}$; (D_m) $y = x + m$

Pour $m \in]-\infty\,;0[\cup]\dfrac{1}{2}\,;+\infty[$

$(\mathscr{C}_f)$ et (D_m) ont un unique point commun, le point d'abscisse :

$$\ln\left(\frac{4m}{2m-1}\right)$$

Pour $m \in [0\,;\dfrac{1}{2}]$, $(\mathscr{C}_f)$ et (D_m) n'ont aucun point commun.

◆ **Exercice 35 page 122**

$f(x) = e^{2x} - 2e^x$

1. $f'(x) = 2e^x(e^x - 1)$

Variations de f

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2. $(T) : y = -\dfrac{1}{2}(x + \ln 2) - \dfrac{3}{4}$

3. $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{2}(x + \ln 2) + \dfrac{3}{4}$

$g'(x) = f'(x) + \dfrac{1}{2}$

$g''(x) = f''(x) = 2e^x(2e^x - 1)$

Variations de g'

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Variations de g

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

4. Positions relatives de $(\mathscr{C}_f)$ et (T)

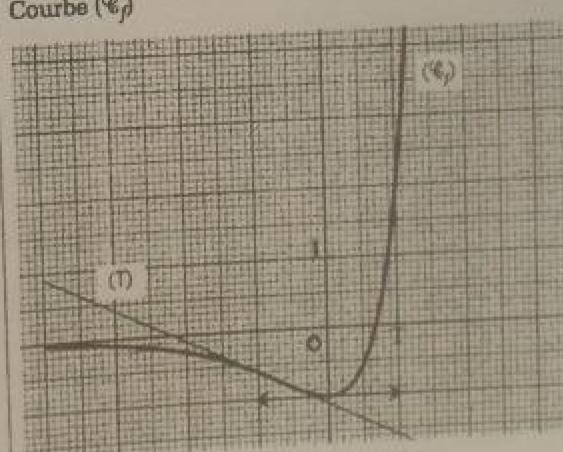
On a : $f(x) - [-\dfrac{1}{2}(x + \ln 2) - \dfrac{3}{4}] = g(x)$

donc, en se référant aux variations de g :

- pour $x \in]-\infty\,;-\ln 2[$
  $(\mathscr{C}_f)$ est en dessous de (T)
- pour $x \in]-\ln 2\,;+\infty[$
  $(\mathscr{C}_f)$ est au dessus de (T)

$(\mathscr{C}_f)$ et (T) se coupent au point d'abscisse $-\ln 2$

Courbe $(\mathscr{C}_f)$



◆ **Exercice 36 page 122**

1. $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$

$g'(x) = 2(e^{2x} - 1)$

Variation de g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

2. a) $f(x) = (x+1)e^{-2x} + x + 1$

$f'(x) = e^{-2x} g(x)$

Variation de f

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	$\boxed{0}$	+	
$f(x)$		↗	$\boxed{2}$	↗	

b) (D) : $y = x + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$

(D) est donc une asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

c) Positions relatives de $(\mathscr{C}_f)$ et (D)

$f(x) - (x+1) = (x+1)e^{-2x}$

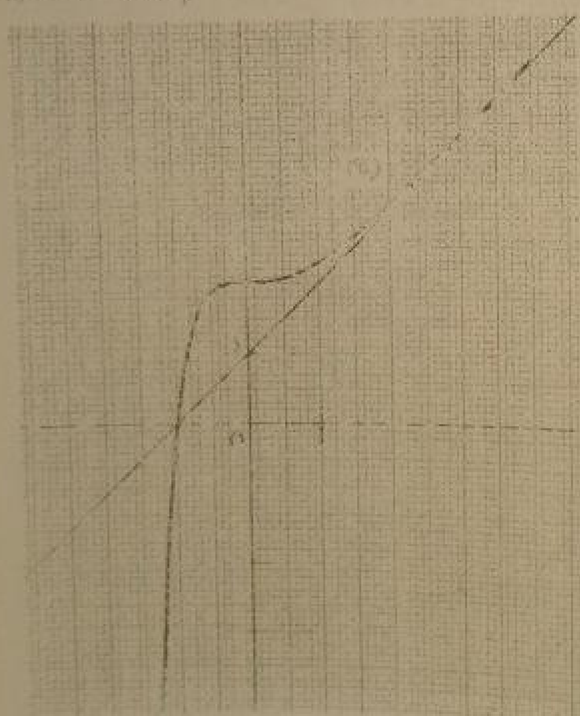
3. a) f est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f(0) = 2$

donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

c) Courbe de $(\mathscr{C}_f)$



◆ **Exercice 37 page 122**

$f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$

1. $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(e^x + 2)}{(e^x + 1)^2}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

2. $g(x) = e^x - 1$; $(\mathscr{C}_g) = (\Gamma)$

a) $f(x) - g(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$

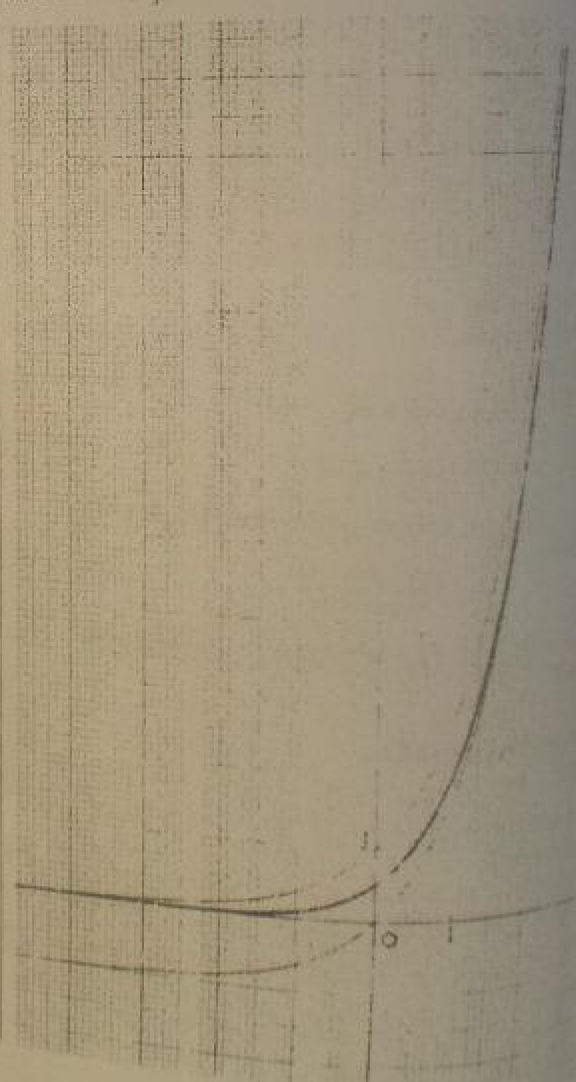
$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$

(Γ) est donc asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$

b) $f(x) - g(x) > 0$

donc $(\mathscr{C}_f)$ est au dessus de (Γ)

3. Courbe $(\mathscr{C}_f)$ et (Γ)



6. Fonctions exponentielles Fonctions puissances

(pages 81 à 104 du livre de l'élève)

[illegible]

Ce chapitre vise essentiellement à :
- définir et étudier sur des exemples les fonctions exponentielles de base a ;
- définir et étudier des fonctions puissances ;
- comparer les croissances des fonctions logarithme néperien, exponentielle et puissances.

COMMENTAIRES

Ce chapitre clôt l'introduction de nouvelles fonctions en classe terminale.
L'étude des fonctions exponentielles de base a et des fonctions puissances découle directement de l'étude de la fonction exponentielle népérienne. Il ne faudra donc pas hésiter à rappeler régulièrement les propriétés de cette fonction.
Il conviendra aussi de bien montrer que les résultats obtenus concernant les fonctions exponentielles et puissances proviennent directement de leur définition à partir de la fonction exponentielle népérienne.
L'étude générale des fonctions $\exp_a$ n'est pas à traiter de manière théorique mais devra être abordée à travers des exemples portant sur les différents cas $(0 < a < 1, a > 1)$.
De même, il n'y a pas lieu de faire une étude exhaustive des fonctions $x \mapsto x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, mais des exemples variés permettront de voir les différents cas. A noter que ces fonctions sont définies sur $]0\ ;+\infty[$ mais que pour certaines valeurs de α ($\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^-$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, etc) elles peuvent être prolongées sur un ensemble contenant $]0\ ;+\infty[$ ($\mathbb{R}, \mathbb{R}^*$, $[0\ ;+\infty[$).
Il conviendra, à l'occasion de l'étude des fonctions puissances, de faire le lien avec les notations $\sqrt[q]{x}$ et $x^{p/q}$.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Définition de a^{α} $(a > 0, \alpha \in \mathbb{R})$ **Fonctions exponentielles de base a $(a \in \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\})$** • Définition. Propriétés. • Variations et représentation graphique. **Fonctions puissances d'exposant non nul** • Définition. Propriétés. • Variations et représentation graphique. **Dérivées** • Dérivées de fonctions du type a^u $(a \in \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\})$. • Dérivées de fonctions du type u^{α} $(\alpha \in \mathbb{R})$. **Primitives** • Primitives de fonctions du type $u'a^u$ $(a \in \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\})$. • Primitives de fonctions du type $u'u^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ **Croissance comparée** • Croissance comparée des fonctions logarithme népérien, exponentielle népérienne et puissances.	• Retrouver, à l'aide de leur représentation graphique, les propriétés analytiques des fonctions exponentielles de base a. • Étudier et représenter une fonction puissance. • Retrouver les limites et les dérivées des fonctions exponentielles et puissances à partir de leur définition. • Utiliser les dérivées des fonctions exponentielles et des fonctions puissances pour déterminer la dérivée d'une fonction composée comportant de telles fonctions. • Utiliser les primitives des fonctions exponentielles et des fonctions puissances pour déterminer les primitives d'une fonction composée comportant de telles fonctions. • Utiliser les théorèmes de croissance comparée pour déterminer la limite d'une fonction.

Exercices d'application directe

♦ Exercice 2.a page 126

(1) $2^{3x}=5$
$\ln(2^{3x})=\ln 5$
$x=\frac{\ln 5}{3\ln 2}$

(2) $3^x=3^{1-6x}$
$x=\frac{1}{7}$

(3) $5^x\le 25^{3x}$
$x\ge 0$

(4) $7^x<2$
$x<\frac{\ln 2}{\ln 7}$

(5) $\left(\frac{2}{5}\right)^5\ge 2^{x-1}$
$x\le 6-\frac{5\ln 5}{\ln 2}$

(6) $2^{x+1}>5^x$
$x<-\frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}$

(7) $3^{2x}+3^x-6=0$
On pose : $X=3^x$; $X>0$
$X^2+X-6X=0\Leftrightarrow X=-3$ ou $X=2$
d'où $x=\frac{\ln 2}{\ln 3}$

(8) $3^{2x}+3^x-6<0$
$x<\frac{\ln 2}{\ln 3}$

(9) $3^x+1-6\times 3^{-x}=0$
$3^{2x}+3^x-6=0$
$x=\frac{\ln 2}{\ln 3}$

♦ Exercice 3.a page 130

$f(x)=(1-x)^{\pi}$

- Ensemble de définition D

$x\in D\Leftrightarrow 1-x>0$;
$D=]-\infty\,;1[$.

- f est dérivable et strictement positive sur D.

$f'(x)=-\pi(1-x)^{\pi-1}$

- Une primitive sur D de f est :

$x\mapsto -\frac{1}{\pi+1}(1-x)^{\pi+1}$

♦ Exercice 3.b page 130

(1) $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$
$f'(x)=\frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$

(2) $f(x)=\sqrt[3]{\cos x}$
$f'(x)=-\frac{1}{3}\frac{\sin x}{(\sqrt[3]{\cos x})^2}$

(3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}$
$f'(x)=\frac{-x}{2(x^2+1)\sqrt[4]{x^2+1}}$

(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^5}=x^{5/3}$
$f'(x)=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

♦ Exercice 4.a page 133

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^5}{3^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(\ln 3)^5}\times\frac{(x\ln 3)^5}{e^{x\ln 3}}$
$=0$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-4}\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^4}$
$=0$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(7^x-x^{99})=\lim\limits_{x\to+\infty}7^x\left(1-\frac{x^{99}}{7^x}\right)$
$=+\infty$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x^{99})=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(1-\frac{x^{99}}{e^x}\right)$
$=+\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ce^x}{3^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}c\,e^{(1-\ln 3)x}$
$=0$

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ce^x}{3^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}c\,e^{(1-\ln 3)x}$
$=-\infty$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}x(\ln x)^2=\lim\limits_{x\to 0}(x^{\frac{1}{2}}\ln x)(x^{\frac{1}{2}}\ln x)$
$=0$

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-\frac{3}{2}}(\ln x)^2=\ldots$

Exercices d'apprentissage

◆ Exercice 1 page 139

(1) $a^3 \times a^{-2} = a$

(2) $a^{\frac{1}{2}} \times a^5 = a^{\frac{11}{2}}$

(3) $a^{0,7} \times a^{4,9} = a^{5,6}$

(4) $a^{-22}\sqrt{a} = a^{-\frac{43}{2}}$

(5) $(a^{-9})^{0,5} = a^{-4,5}$

(6) $(a^{2,3})^{\frac{1}{4}} = a^{0,575}$

(7) $\dfrac{a^{2,01}}{a^{6,1}} = \dfrac{1}{a^{4,09}} = a^{-4,09}$

(8) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^2} = \dfrac{1}{a^{\frac{5}{3}}} = a^{-5/3}$

◆ Exercice 2 page 139

(1) $8^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{6}{5}}$

(2) $3^{0,7} \times 3^{-4,6} \times 3^{1,2} = 3^{-2,7}$

(3) $\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{16^4} = 2^{-\frac{29}{2}}$

(4) $\dfrac{9^{-1,7}}{3^{4,8}} = 3^{-8,2}$

◆ Exercice 3 page 139

(1) $2^{3,8} \approx 13,929$

(2) $5^{\frac{1}{3}} = 1,71$

(3) $7^{-0,9} \approx 0,174$

(4) $(1,03)^{\frac{3}{4}} = 1,022$

(5) $2\,709^{1,3} \approx 29\,016,946$

(6) $6\,992^{-\frac{2}{3}} \approx 0,003$

◆ Exercice 4 page 139

(1) $3x = 1$; $x = 0$

(2) $2^{x+1} = 8$; $x = 2$

(3) $2^x = 3^{x+1}$; $x = \dfrac{\ln 3}{\ln\frac{2}{3}}$

(4) $3^{2x} = 2^{3x}$; $x = 0$

(5) $3 + \dfrac{2}{3^{-x}} = 9^x$; $x = 1$

(6) $(x+3)^x = 1$; $x = 0$ ou $x = -2$

◆ Exercice 5 page 139

(1) $2 \times 10^{2x} + 3 \times 10^x - 5 = 0$
On pose : $X = 10^x$; $X > 0$
$2X^2 + 3X - 5 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = -\dfrac{5}{2}$
d'où $x = 0$.

(2) $3 \times 10^{2x} + 7 \times 10^x - 6 = 0$
$x = \dfrac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 10}$

◆ Exercice 6 page 139

(1) $4^{3+x} \geq 3^{5x}$
$x \leq \dfrac{3\ln 4}{5\ln 3 - \ln 4}$

(2) $10^{6x} - 10^{3x} < 2$
$x < \dfrac{\ln 2}{3\ln 10}$

(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$
$x \geq 1$

(4) $7^x < 7^{-x+1}$
$x \leq \dfrac{1}{2}$

◆ Exercice 7 page 139

(1) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 2\sqrt{2} \end{cases}$; $S = \left\{\left(\dfrac{\ln(4+\sqrt{2})}{\ln 2} ; \dfrac{\ln(4-\sqrt{2})}{\ln 2}\right)\right\}$

(2) $\begin{cases} 2^x \times 2^{2y} = 64 \\ \ln x + 2\ln y = \ln 4 \end{cases}$; $S = \{(4 ; 1) ; (4 - 2\sqrt{3} ; 1 + \sqrt{3})\}$

◆ Exercice 8 page 139

(1) $f(x) = 2^x$;
$f'(x) = (\ln 2) \times 2^x$

(2) $f(x) = 3^x \ln x$;
$f'(x) = (\ln 3) \times 3^x \ln x + \dfrac{3^x}{x}$

(3) $f(x) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x + \left(\dfrac{3}{5}\right)^x + \left(\dfrac{4}{5}\right)^x - 1$;
$f'(x) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x \ln\left(\dfrac{2}{5}\right) + \left(\dfrac{3}{5}\right)^x \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) + \left(\dfrac{4}{5}\right)^x \ln\left(\dfrac{4}{5}\right)$

◆ Exercice 9 page 139

(1) $f(x) = 5^x + 2x$
$F(x) = \dfrac{5^x}{\ln 5} + x^2 + C$; $C \in \mathbb{R}$

(2) $f(x) = (\sqrt{5})^x$
$F(x) = \dfrac{(\sqrt{5})^x}{\ln\sqrt{5}} + C$; $C \in \mathbb{R}$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{3^x}$
$F(x) = \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)} \times \dfrac{1}{3^x} + C$; $C \in \mathbb{R}$

(4) $f(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$
$F(x) = \dfrac{1}{\ln 4 - \ln 9} \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^x + C$; $C \in \mathbb{R}$

◆ Exercice 10 page 139

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{5^x} = 0$

(2) $\lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{5^x} = -\infty$

(3) $\lim_{x \to +\infty} x3^x = +\infty$

(4) $\lim_{x \to -\infty} x3^x = 0$

(5) $\lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 5\right] = -5$

(6) $\lim_{x \to -\infty} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 5\right] = +\infty$

(7) $\lim_{x \to +\infty} x4^{-x} = 0$

(8) $\lim_{x \to -\infty} x4^{-x} = -\infty$

◆ Exercice 11 page 139

(1) $f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$

$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

(4) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sin x}$

$f'(x) = \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{(1 + \sin x)^2}}$

(5) $f(x) = \sqrt[4]{1 + x^2}$

$f'(x) = \frac{x}{4\sqrt[4]{(1 + x^2)^3}}$

◆ Exercice 12 page 139

(1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(2) $f(x) = x^e\sqrt{x} = x^{e+\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{(1 + 2e)x^e}{2\sqrt{x}}$

(3) $f(x) = \frac{x^{0,5}}{\sqrt[4]{x^3}} = x^{-\frac{1}{4}}$

$f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt[4]{x^5}}$

(4) $f(x) = \frac{x^{-\ln 3}}{x^{1-e}} = x^{e-\ln 3-1}$

$f'(x) = (e - \ln 3 - 1)x^{e-\ln 3-2}$

◆ Exercice 13 page 139

(1) $f(x) = \frac{1}{x^4}$

$F(x) = -\frac{1}{3x^3} + C$;

(2) $f(x) = 3\sqrt{x}$

$F(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$;

(3) $f(x) = x\sqrt{x}$

$F(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$;

(4) $f(x) = x(1 + x^2)^{\sqrt{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2} + 2}(1 + x^2)^{\sqrt{2}+1} + C$;

(5) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$F(x) = \frac{-2}{\sqrt{x}} + C$;

◆ Exercice 14 page 139

(1) $\lim_{x \to +\infty} x^\pi \sqrt[3]{x} = +\infty$

(2) $\lim_{x \to 0} x^\pi \sqrt[3]{x} = 0$

(3) $\lim_{x \to +\infty} (1 + x^3)^{-\frac{1}{4}} = 0$

(4) $\lim_{x \underset{<}{\to} 1} (1 - x)^{\sqrt{2}} = 0$

◆ Exercice 15 page 140

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$

(2) $\lim_{x \to +\infty} (e^x - x^2) = \lim_{x \to +\infty} e^x\left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right) = +\infty$

(3) $\lim_{x \to +\infty} (\ln x - x^2) = \lim_{x \to +\infty} (-x^2)\left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = -\infty$

(4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x} = +\infty$

(5) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{\ln x} = +\infty$

(6) $\lim_{x \to +\infty} (x + 1)^2 e^x = +\infty$

(7) $\lim_{x \to +\infty} x(\ln x)^3 = +\infty$

(8) $\lim_{x \to +\infty} x^3 e^x = +\infty$

(9) $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x) = +\infty$

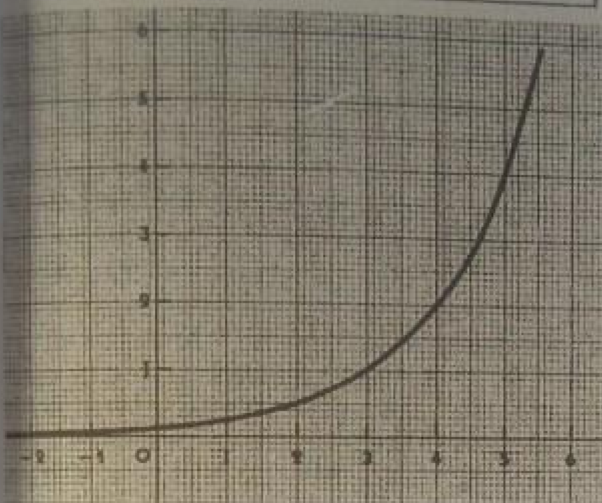
(10) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3 + 1} = +\infty$

♦ Exercice 16 page 140

(1) $f(x) = 2^{x-3}$; $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = (\ln 2)2^{x-3}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



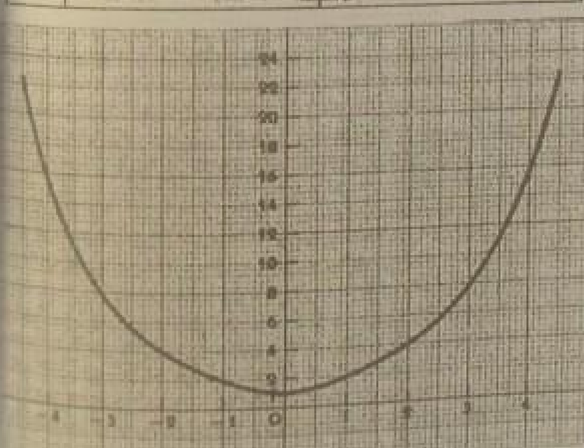
(2) $f(x) = 2^{|x|}$; $D_f = \mathbb{R}$

f est une fonction paire.

Intervalle d'étude : $[0\,;+\infty[$

$f'(x) = (\ln 2)2^{x}$

x	$-\infty$	0		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	
$f(x)$		$\boxed{1}$	$\nearrow$	$+\infty$



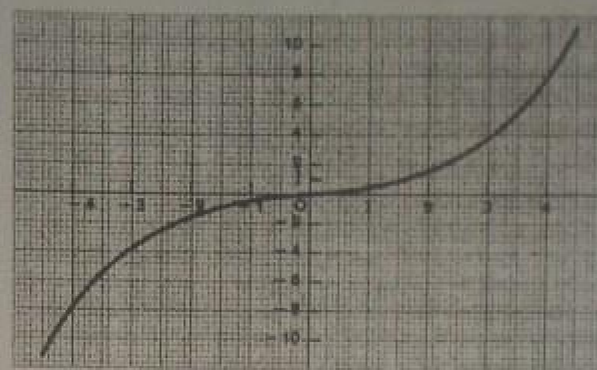
(3) $f(x) = \dfrac{2^{x} - 2^{-x}}{2}$; $D_f = \mathbb{R}$

f est une fonction impaire.

Intervalle d'étude : $[0\,;+\infty[$

$f'(x) = \left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)(2^{x} + 2^{-x})$

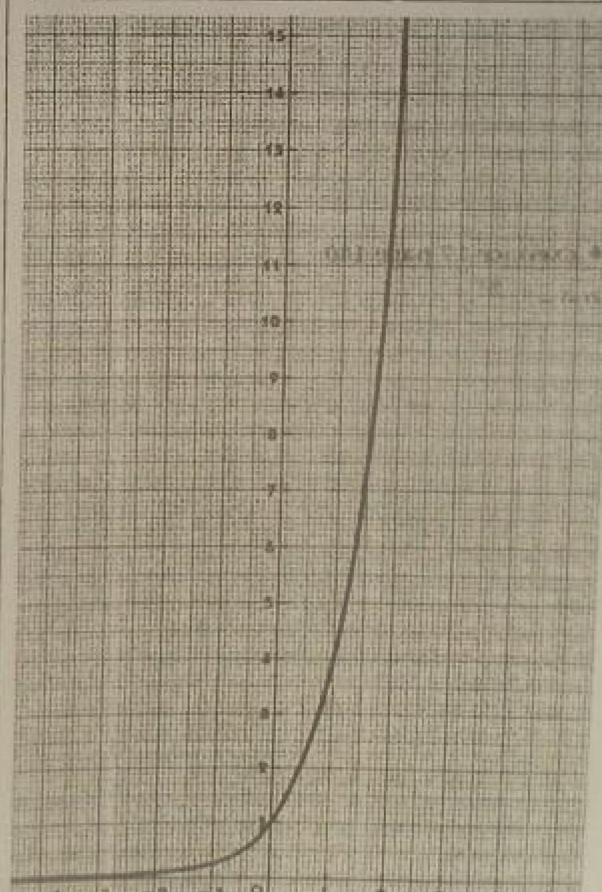
x	$-\infty$	0		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	
$f(x)$		$\boxed{0}$	$\nearrow$	$+\infty$



(4) $f(x) = 4^{x}$; $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = (\ln 4)4^{x}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



♦ Exercice 17 page 140

$f(x) = \dfrac{5^x}{5^{2x} - 1}$

1. $x \in D_f \Leftrightarrow 5^{2x} - 1 \neq 0$ $\quad D_f = \mathbb{R}^*$

$2x\ln 5 \neq 0$

2. $f(-x) = \dfrac{5^{-x}}{5^{-2x} - 1} = \dfrac{1}{5^x} \times \dfrac{5^{2x}}{1 - 5^{2x}}$

$= \dfrac{-5^x}{5^{2x} - 1} = -f(x)$

f est une fonction impaire.
Intervalle d'étude : $]0\,;+\infty[$.

3. $f'(-x) = \dfrac{-5^x(5^{2x}+1)\ln 5}{(5^{2x}-1)^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		‖	
$f(x)$	↘	‖	↘

4. *a)* $f(x) = \dfrac{2}{3}$; $\qquad \dfrac{5x}{5^{2x} - 1} = \dfrac{2}{3}$

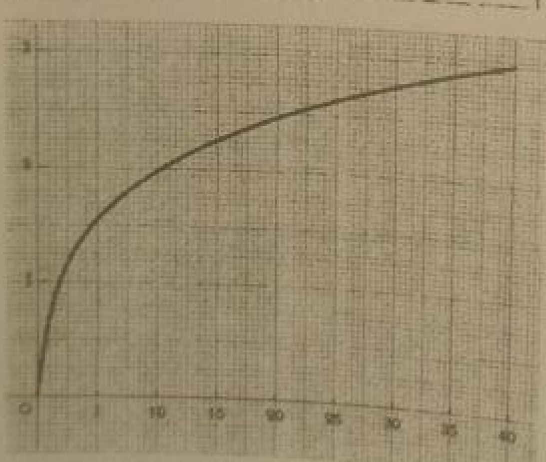
$-2 \times 5^{2x} + 3 \times 5^x + 2 = 0$; d'où $x = \dfrac{\ln 2}{\ln 5}$

b) $f(x) = -\dfrac{2}{3}$; f étant impaire on obtient $x = -\dfrac{\ln 2}{\ln 5}$

♦ Exercice 18 page 140

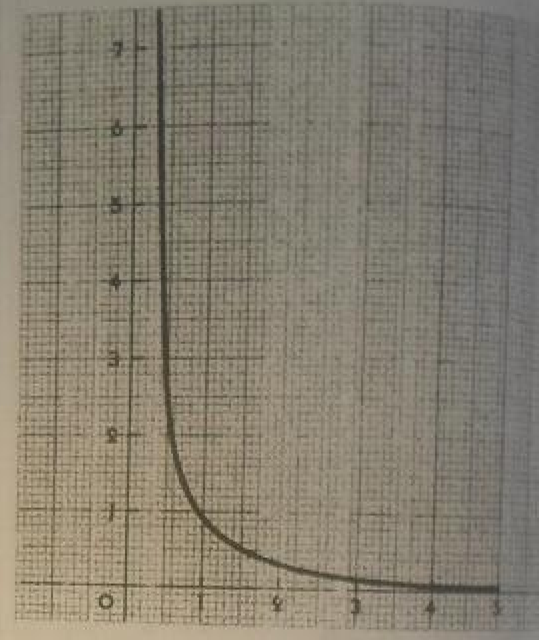
(1) $f(x) = x^{0,3}$; $D_f = \mathbb{R}_+$; $f'(x) = 0,3\,x^{-0,7}$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$



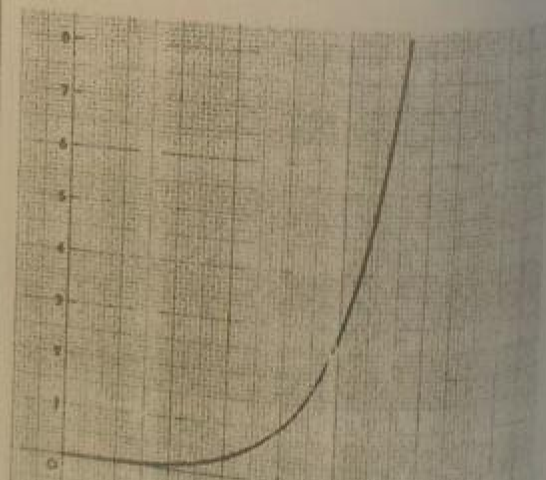
(2) $f(x) = x^{-1,7}$; $D_f = \mathbb{R}_+^*$; $f'(x) = -1,7\,x^{-2,7}$

x	0		
$f'(x)$	‖		
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	



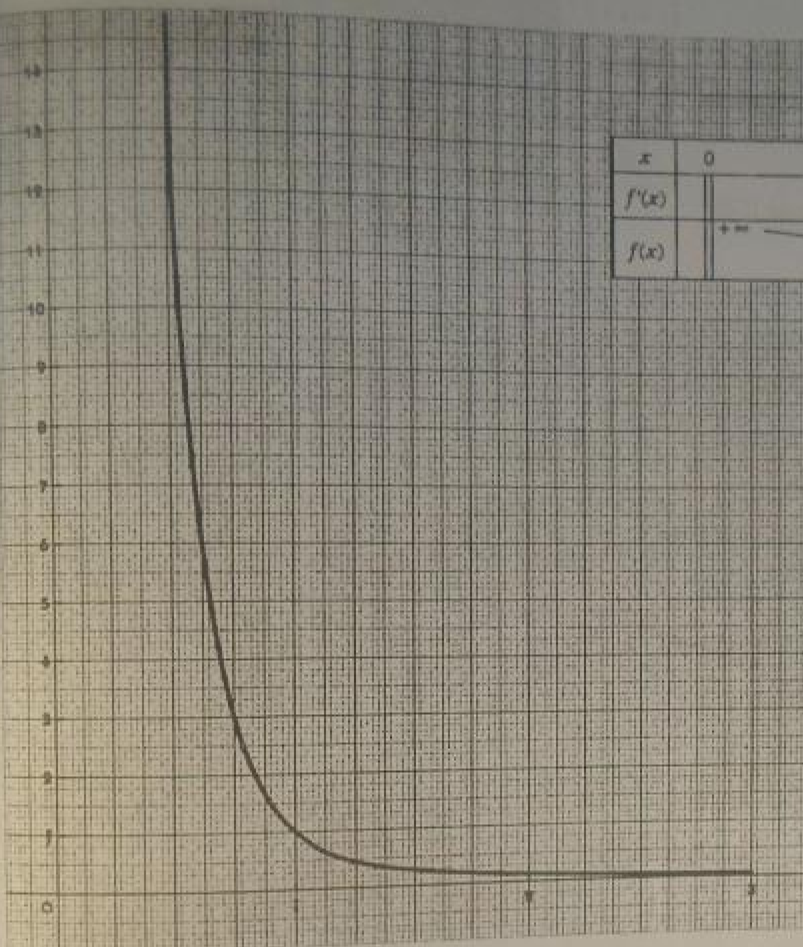
(3) $f(x) = x^{5,2}$; $D_f = \mathbb{R}_+$
$f'(x) = 5,2\,x^{4,2}$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$



(4) $f(x) = x^{-3,9}$; $D_f = \mathbb{R}_+^*$

$f'(x) = -3,9\,x^{-4,9}$



x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	−
$f(x)$	‖ $+\infty$	0

♦ **Exercice 19 page 140**

$f(x) = x \times 3^{-x} = \dfrac{x}{e^{x\ln 3}}$;

1. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x\ln 3}$

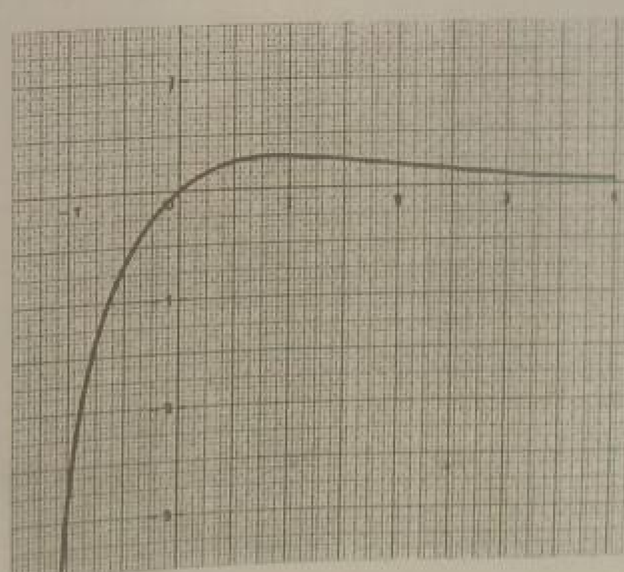
$= -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\ln 3}{e^{x\ln 3}} = 0$

d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2. $f'(x) = 3^{-x}(1 - x\ln 3)$

x	$-\infty$		1/ln3		$+\infty$
$f'(x)$		+	$\boxed{0}$	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\boxed{1/e\ln 3}$	↘	0



♦ Exercice 20 page 140

a) $f(x) = |x|^x$; $D_f = \mathbb{R}^*$

$f(x) = e^{x\ln|x|}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

$(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

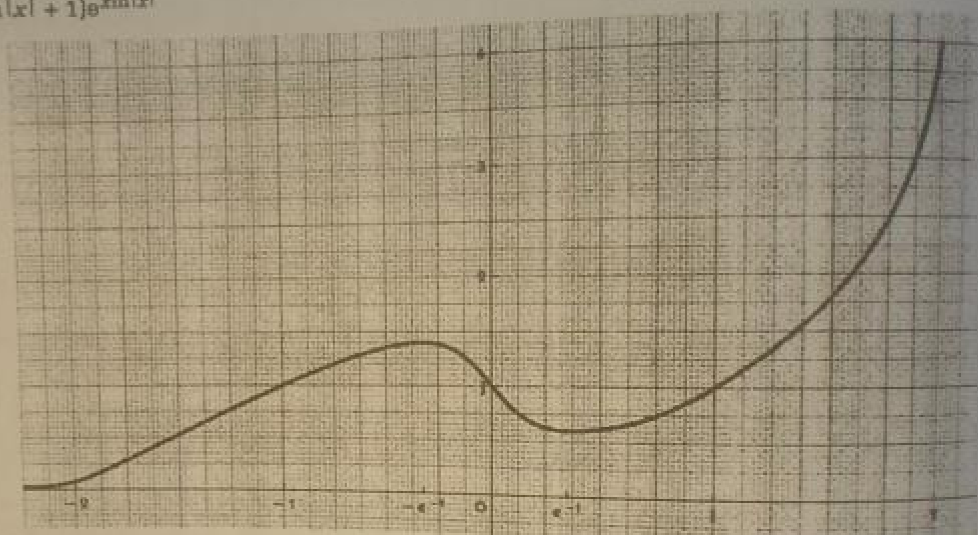
$(\mathscr{C}_f)$ admet pour asymptote la droite (OI)

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 1$
- $f'(x) = (\ln|x| + 1)e^{x\ln|x|}$

x	$-\infty$		$-e^{-1}$		0		e^{-1}		$+\infty$
$\ln x + 1$					‖	$-$	0	$+$	
$\ln(-x)+1$		$+$	0	$-$	‖				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	α	$\searrow$	1 ‖ 1	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

$\alpha = (e^{-1})^{-e^{-1}}$; $\beta = (e^{-1})^{e^{-1}}$

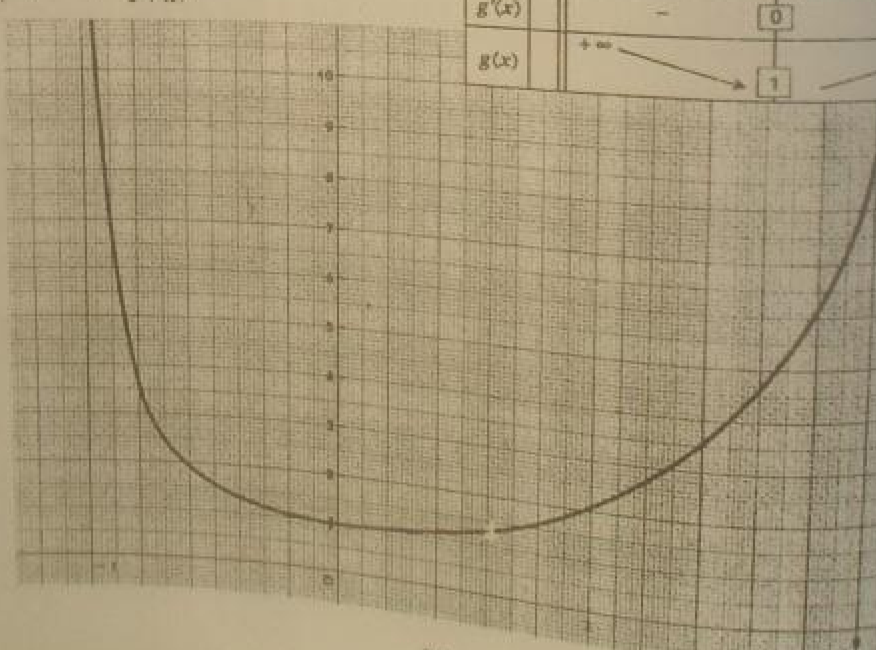
$= e^{e^{-1}}$



b) $g(x) = (1+x)^x$; $g(x) = e^{x\ln(1+x)}$; $D_g =]-1\,;+\infty[$

$g'(x) = \left(\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}\right)e^{x\ln(1+x)}$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

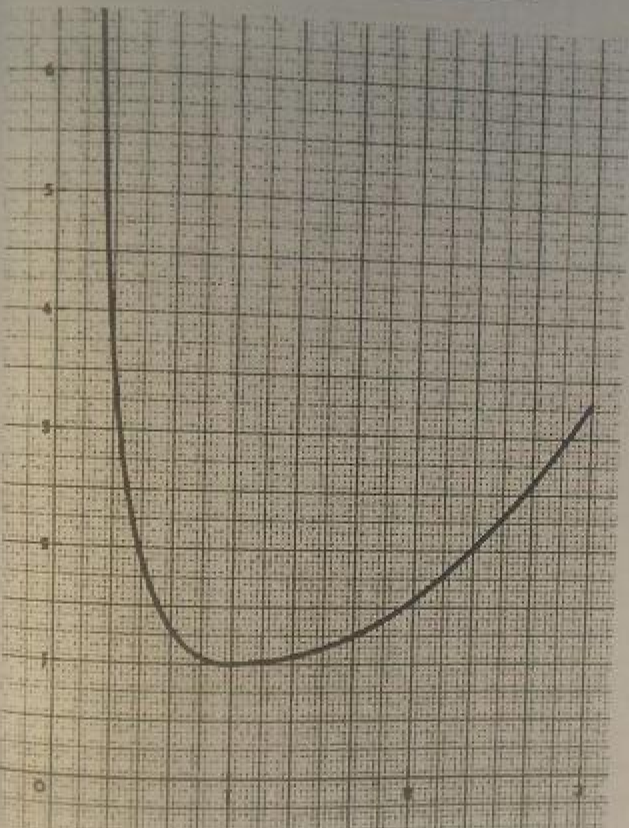


c) $h(x) = x^{\ln x}$; $D_h =]0\,;+\infty[$

$h(x) = e^{(\ln x)^2}$

$$h'(x) = \frac{2\ln x}{x} \times e^{(\ln x)^2}$$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$h(x)$	||	$+\infty$ ↘	$\boxed{1}$	↗ $+\infty$	



♦ **Exercice 21 page 140**

$f(x) = a^x$; $a > 0$

$g(x) = b\sqrt{x}$; $b > 0$

1. $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ ont une tangente commune si et seulement si : $f'(x) = g'(x)$ et $f(x) = g(x)$

c'est-à-dire : $\begin{cases} (\ln a)a^x = \dfrac{b}{2\sqrt{x}} & (1) \\ a^x = b\sqrt{x} & (2) \end{cases}$ $\quad (1) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2\ln a}$ $\quad (2) \Leftrightarrow b^2 = 2e\ln a$ $\quad (3) \Leftrightarrow b = \sqrt{2e\ln a}$

2. A_{ab} le point de contact de $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$, E, l'ensemble de (a, b) vérifiant (3)

$f(x) = g(x) \Rightarrow a^{2x} = b^2x$

On obtient A_{ab} a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2\ln a}\,; e^{1/2}\right)$; $a \in \mathbb{R}_+^*$

3. Tangente commune à $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ passe par le point $A\left(0\,; \dfrac{e^{1/2}}{2}\right)$

♦ Exercice 22 page 140

1^re^ partie

$(E_1)\quad x^{10} = (1,1)^x \,;\, x \in [0\,;+\infty[$

1. Variation de f et g :

- $f(x) = x^{10}$
  $f'(x) = 10x^9$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \,;\, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

$(\mathscr{C}_g)$ admet une branche parabolique de direction (OJ)

- $g(x) = (1,1)^x$
  $= e^{x\ln 1,1}$
  $g'(x) = \ln 1,1 \times e^{x\ln 1,1}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\boxed{0}$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$

2.

3. $d(x) = (1,1)^x - x^{10}$
$d(1) = 0,1 > 0$
$d(1,1) \simeq -1,48 < 0$

d est une fonction continue sur $[1\,;1,1]$
donc il existe au moins un nombre réel α tel que $\alpha \in [1\,;1,1]$ et $d(\alpha) = 0$
donc α est une solution de (E_1) qui appartient à l'intervalle $[1\,;1,1]$.

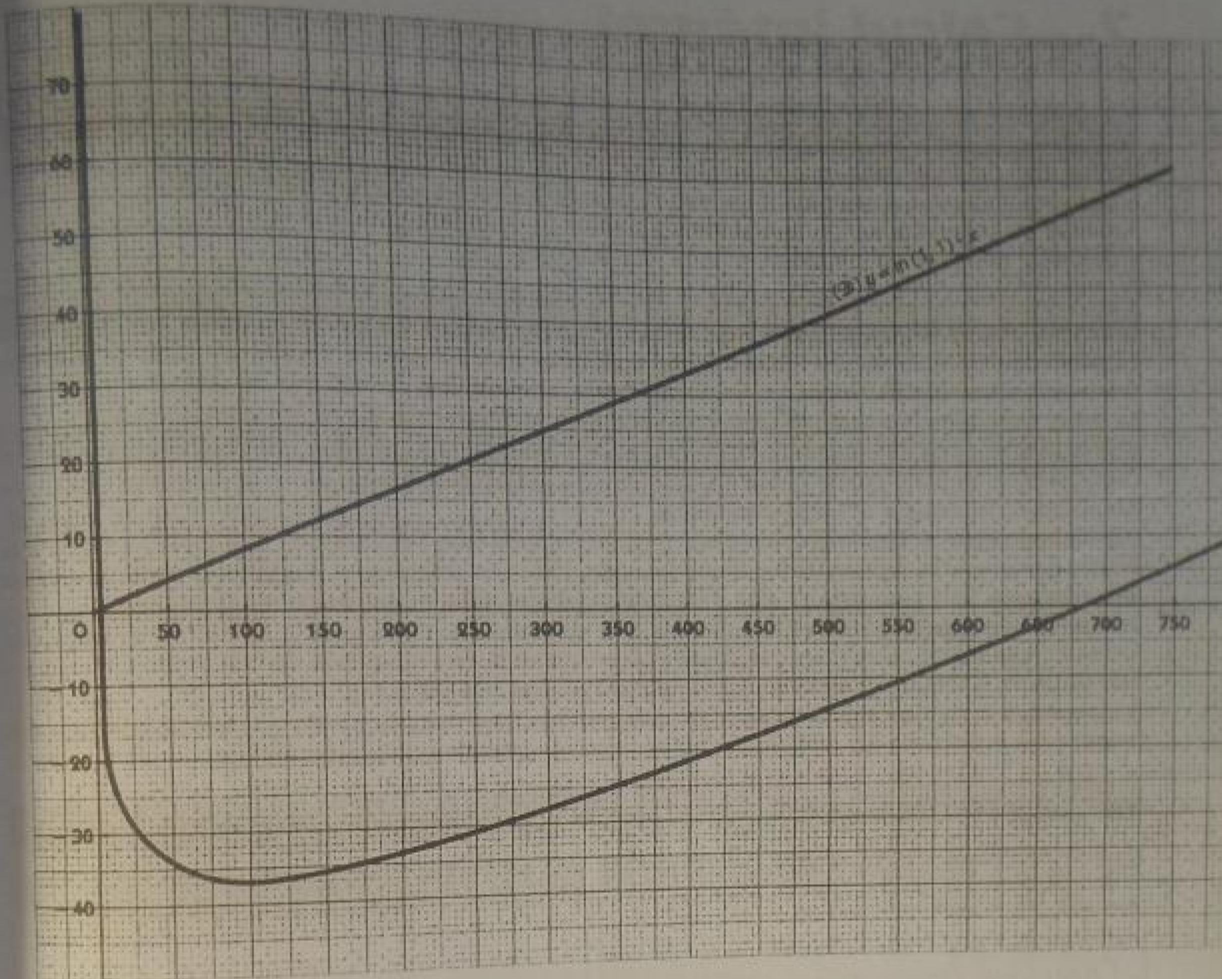
2^e^ partie

1. $(E_2)\quad x\ln 1,1 - 10\ln x = 0\,;$
$\ln(1,1)^x = \ln x^{10}$

donc $(E_2) \Leftrightarrow (E_1)$

2. $\varphi(x) = x\ln(1,1) - 10\ln x\,;\quad D_\varphi =]0\,;+\infty[$
$\varphi'(x) = \ln(1,1) - \dfrac{10}{x}$

x	0		$10/\ln(1,1)$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	$\boxed{-36,53}$	↗	$+\infty$



3. φ est continue et croissante sur $\left[\frac{10}{\ln 1,1} ; +\infty\right[$ et $[685 ; 686] \subset \left[\frac{10}{\ln 1,1} ; +\infty\right[$

on vérifie que : $\varphi(685) < 0$ et $\varphi(686) > 0$

donc (E^2) admet une solution unique β tel que $\beta \in [685 ; 686]$

4. On a $\varphi(685,08) = -0,00025 < 0$; $\varphi(685,09) = 0,00054 > 0$

donc : $685,08 < \beta < 685,09$

d'où : $\beta \simeq 685,085$

7. Calcul intégral

(pages 141 à 164 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
- introduire la notion d'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné;
- étudier les propriétés de l'intégrale;
- présenter quelques techniques de calcul d'une intégrale

Commentaires

La notion de calcul intégral est nouvelle en terminale. Elle est définie à partir de celle de primitive. Aussi le professeur veillera à ce que cette dernière notion soit bien acquise par les élèves.

Le calcul intégral est un outil qui permettra à son tour de déterminer des primitives de fonctions.

Il permettra en outre de calculer des aires de surfaces planes ou d'en donner une valeur approchée.

Cet outil sera réinvesti dans d'autres disciplines, en particulier en physique où il permettra de calculer des volumes, le moment d'inertie d'un solide, ...

Dès l'introduction de la notion d'intégrale, il conviendra de faire le lien avec l'aire de la partie du plan limitée par la courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et des droites parallèles à l'axe des ordonnées. Cela permettra en effet d'illustrer graphiquement les propriétés de l'intégrale.

Lors de l'intégration d'une fonction rationnelle, il est nécessaire de donner la démarche de calcul aux élèves en leur faisant calculer les coefficients nécessaires à la décomposition de la fonction.

Lors du calcul d'une aire, l'unité attendue devra en général être précisée.

On pourra calculer, sur des exemples, la valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles mais la méthode des rectangles n'est pas une compétence exigible des élèves.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Intégrale d'une fonction continue • Définition. – $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de la fonction continue f. – La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a. • Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue positive. • Propriétés : – linéarité ; – relation de Chasles ; – positivité ; – si $f \leq g$ sur $[a\ ;b]$ alors $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$; – inégalité de la moyenne.	• Calculer des intégrales simples en utilisant l'interprétation graphique. • Utiliser les propriétés de linéarité pour calculer une somme d'intégrale. • Utiliser la relation de Chasles pour simplifier un calcul d'intégrale. • Connaissant un encadrement d'une fonction, encadrer une intégrale de cette fonction.
Techniques de calcul d'une intégrale • Techniques de base : – utilisation des primitives usuelles ; – intégration par parties ; – intégration de fonctions paires, impaires, périodiques. • Intégration de fonctions particulières : – intégrale d'une fonction rationnelle ; – intégrale d'une fonction trigonométrique.	• Calculer une intégrale en utilisant : – les primitives des fonctions usuelles ; – une intégration par parties. • Calculer l'intégrale : – d'une fonction rationnelle ; – d'une fonction trigonométrique.

savoirs	savoir-faire
Calculs de grandeurs • Calculs d'aires. • Calculs de volumes. • Calcul approché d'une intégrale.	• Calculer l'aire d'une partie du plan limitée par : – la courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$; – les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices d'application directe

Exercice 1.a page 144

(1) $\int_1^2 \frac{t}{2}\,dt = \frac{3}{4}$

(2) $\int_1^2 \frac{t^3}{4}\,dt = \frac{15}{16}$

(3) $\int_1^2 -\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2}$

(4) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} -\sin x\,dx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $\int_{\pi/4}^{\pi} \cos x\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(6) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} (1 + \tan^2 x)\,dx = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

(7) $\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{2} - 1$

(8) $\int_0^1 e^x dx = e - 1$

Exercice 1.b page 144

(1) Vraie car $(\ln x + 2)' = \frac{1}{x}$

(2) Fausse car $(\sin 4x)' \neq \sin^2 x \cos 3x$

Exercice 1.c page 144

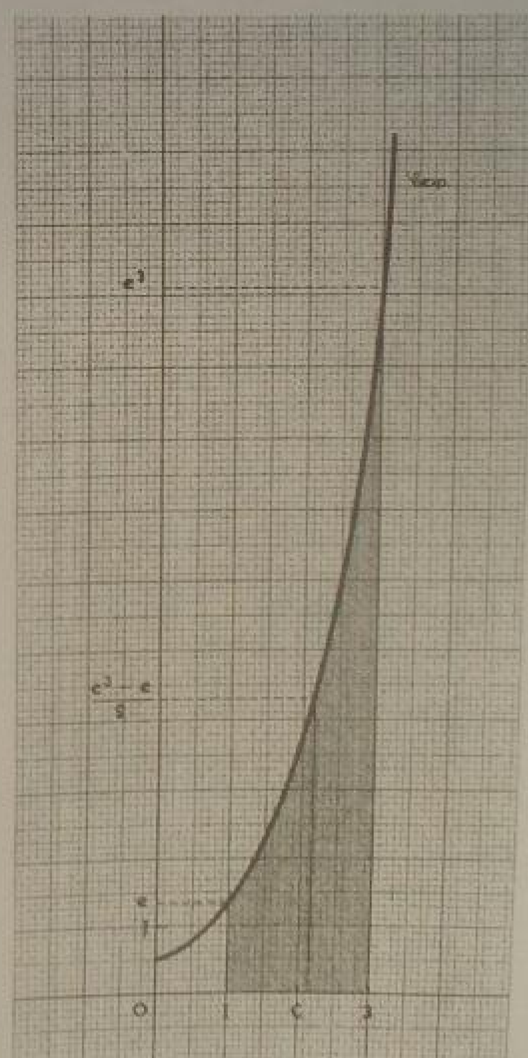
• On peut calculer l'intégrale sur $[-2 ; 2]$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{1 + x^2}$ car f est continu sur $\mathbb{R}$.

• Non, car $D_g = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

• Non, car $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Exercice 1.d page 148

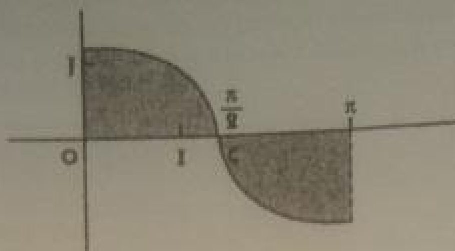
Valeur moyenne sur $[1 ; 3]$ de la fonction exponentielle : $\frac{1}{3-1}\int_1^3 e^x dx = \frac{1}{2}(e^3 - e)$.



◆ **Exercice 1.e page 148**

Valeur moyenne sur $[0 ; \pi]$ de la fonction cos :

$$\frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \cos x \, dx = 0$$



◆ **Exercice 1.f page 148**

$A(x) = -8x^3 + 26x^2 - 3x - 9$

a) $A(3) = 0$

$$A(x) = -8(x-3)\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

sur $[1 ; 3]$ $\quad A(x) \geq 0$

b) $f(x) = 26x^2 - 3x$; $g(x) = 8x^3 + 9$

$I = \int_1^3 f(x)\, dx$; $J = \int_1^3 g(x)\, dx$

D'après la linéarité de l'intégrale :

$I - J = \int_1^3 A(x)\, dx \geq 0$

◆ **Exercice 2.a page 151**

$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$; $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 - 1}$

$f(x) = x + \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{2}{x+2}$

$g(x) = 2 + \dfrac{9/2}{x-1} - \dfrac{3/2}{x+1}$

$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0$

$\int_0^{1/2} g(x)\, dx = 1 - 3\ln 2 - \dfrac{3}{2}\ln 3$

◆ **Exercice 2.b page 151**

(1) $\int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x}\, dx = e^2 - 1$

(2) $\int_1^2 (1-2x)(x^2-x)^{7/2}\, dx = -\dfrac{32}{9}\sqrt{2}$

(3) $\int_1^3 \dfrac{(-2x+5)\, dx}{(-x^2+5x+3)^5} = \dfrac{1/4}{7^4} - \dfrac{1/4}{9^4}$

(4) $\int_{e^2}^{e^8} \dfrac{\sqrt{\ln x - 1}}{x} = \dfrac{2}{3}(7\sqrt{7} - 8)$

(5) $\int_{\pi/2}^{\pi/3} \dfrac{\cos x}{\sin x}\, dx = \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(6) $\int_0^{\pi/3} \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\sqrt{3}}{64}$

(7) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^6 x\, dx = \dfrac{1}{7}$

(8) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^7 x\, dx = \dfrac{1}{8}$

◆ **Exercice 2.c page 152**

$f(x) = x^4 \sin x$

$g(x) = (1 + x^2)\tan x$

• f est impaire sur $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$

d'où : $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\, dx = 0$

• g est impaire sur $\left[-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4}\right]$

d'où : $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} g(x)\, dx = 0$

◆ **Exercice 2.d page 152**

$f(x) = \ln(\cos x)$

$\left[-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4}\right]$ est symétrique par rapport à 0

$f(-x) = \ln(\cos(-x)) = f(x)$;

f est une fonction paire

$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\, dx = 2\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos^2 x)$

◆ **Exercice 2.e page 153**

(1) $\int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx = 1$

on a posé : $\begin{cases} u'(x) = \sin x \\ v(x) = x \end{cases}$

(2) $\int_0^1 x\sqrt{x+1}\, dx = \dfrac{4\sqrt{2} + 4}{15}$

on a posé : $\{u'(x) = \sqrt{x+1}$

(3) $\int_1^2 x \ln x\, dx = 2\ln 2 - \dfrac{3}{4}$

on a posé : $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln x \end{cases}$

(4) $\int_1^2 \ln t\, dt = 2\ln 2 - 1$

on a posé : $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln t \end{cases}$

◆ **Exercice 2.f page 153**

(1) $\int_0^2 x^2 e^x\, dx = 2(e^2 - 1)$

on a posé : $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x^2 \end{cases}$

(2) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\, dx = \dfrac{4}{3}\int_0^1 x(1-x)^{3/2}\, dx$

on a posé : $\begin{cases} u'(x) = \sqrt{1-x} \\ v(x) = x^2 \end{cases}$

$\int_0^1 x(1-x)^{3/2}\, dx = \dfrac{4}{35}$

on a posé : $\begin{cases} w'(x) = (1-x)^{3/2} \\ t(x) = x \end{cases}$

♦ **Exercice 3.a page 155**

$f(x) = x - x\ln(-x)$

• $D_f =]-\infty\,; 0[\ ;\ f'(x) = -\ln(-x)$

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	0

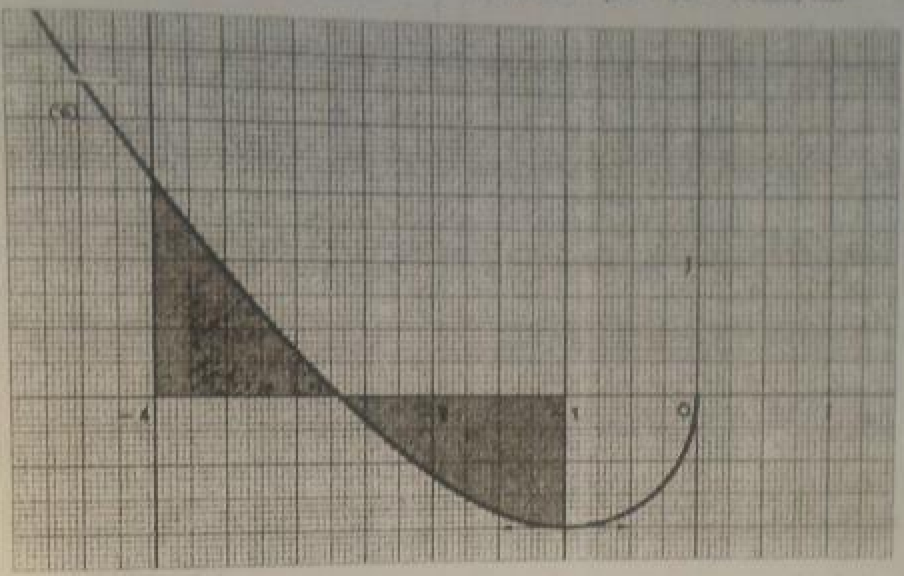
• $\mathscr{A}$: aire de la partie tramée

$$\mathscr{A} = 4\ \text{cm}^2 \times \int_{-4}^{-1} |f(x)|\, dx$$

$$\int_{-4}^{-1} |f(x)|\, dx = \int_{-4}^{-e} (x - x\ln(-x))\, dx + \int_{-e}^{-1} (x - x\ln(-x))\, dx$$

on pose : $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = 1 - \ln(-x) \end{cases}$

d'où : $\mathscr{A} = (51 + 2e^2 - 64\ln 2)\ \text{cm}^2$



♦ **Exercice 3.b page 155**

$(\mathscr{D})\ \ y = x - 2\,;$

$(\mathscr{C})\ \ y = -x^2 - 4x - 2$

posons : $f(x) = x - 2$

$\qquad\quad g(x) = -x^2 - 4x - 2$

• Points d'intersection de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$:

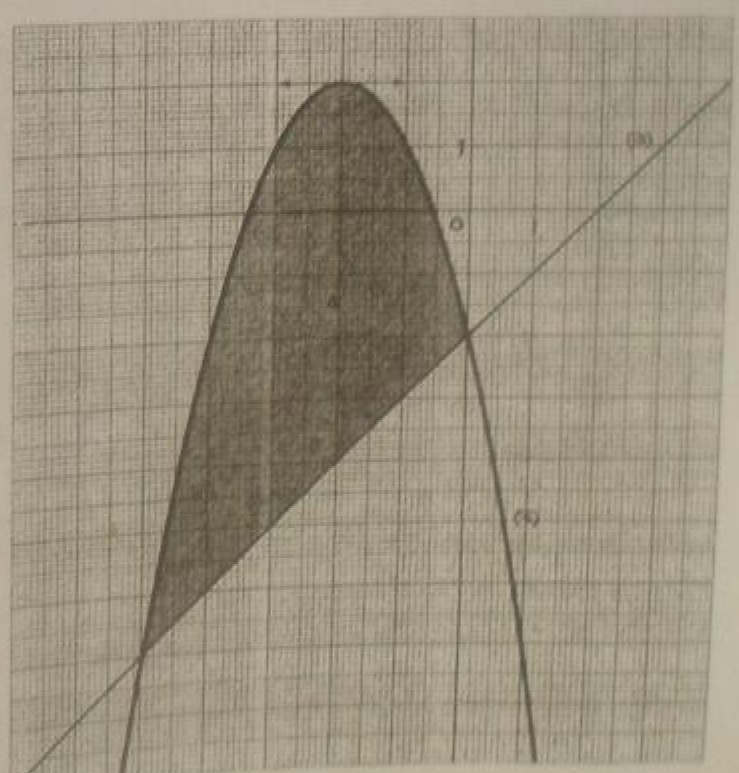
$$f(x) = g(x)$$

on obtient : $A(-5\,; -7)$ et $B(0\,; -2)$

• $\mathscr{A}$: aire de la partie Δ

$$\mathscr{A} = u_A \times \int_{-5}^{0} (g(x) - f(x))\, dx$$

$$= u_A \times \frac{125}{6}$$



Exercices d'apprentissage

♦ Exercice 1 page 161

(1) $\int_0^3 (-x^2+4x+1)\,dx = 12$

(2) $\int_1^e \frac{dx}{x} = 1$

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$

(4) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3} = \frac{3}{8}$

(5) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x\,dx = \ln\sqrt{3}$

(6) $\int_0^{\ln 3} e^x\,dx = 2$

♦ Exercice 2 page 161

$f(x) = x + |1 - e^{-x}|$

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 [x-(1-e^{-x})]\,dx + \int_0^1 [x+(1-e^{-x})]\,dx$$
$$= \frac{e^2+1}{e} - 2$$

♦ Exercice 3 page 161

$I = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos^4 x\,dx$;

$J = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x \sin^4 x\,dx.$

• $I + J = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos^2 x\,(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} (\sin 2x)^4\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/4} (1-\cos 4x)\,dx$$
$$= \frac{\pi}{32}$$

• $I - J = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos^2 x\,(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} (\sin 2x)^2 \cos 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{24}$$

• On en déduit :

$I = \frac{\pi}{64} + \frac{1}{48}$; $J = \frac{\pi}{64} - \frac{1}{48}$.

♦ Exercice 4 page 161

$I = \int_0^{\pi/4} (x+1)\cos^2 x\,dx$;

$J = \int_0^{\pi/4} (x+1)\sin^2 x\,dx.$

• $I - J = \int (x+1)\,dx = \frac{\pi^2}{..} + \frac{\pi}{..}$

• $I + J = \int_0^{\pi/4} (x+1)\,dx = \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4}$

• $I - J = \int_0^{\pi/4} (x+1)\cos 2x\,dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

on a posé : $\begin{cases} u'(x) = \cos 2x \\ v(x) = x+1 \end{cases}$

• On obtient :

$I = \frac{\pi^2}{64} + \frac{3\pi}{16} + \frac{1}{8}$; $J = \frac{\pi^2}{64} + \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$.

♦ Exercice 5 page 161

$f : \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right] \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$

1. Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, $\cos x \neq 0$ et f est dérivable.

$f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$

2. $I = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = 1$

3. $J = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$

$\int_0^{\pi/4} f'(x)\,dx = 3J - 2I = 2$ d'où : $J = \frac{4}{3}$

♦ Exercice 6 page 161

Pour $x \in [0\,;1]$ $\quad 0 \le x^4 \le 1$

$1 \le 1 + x^4 \le 2$

$\frac{x^n}{2} \le \frac{x^n}{1+x^4} \le x^n$

d'où : $\int_0^1 \frac{x^n}{2}\,dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^4}\,dx \le \int_0^1 x^n\,dx$

$$\frac{1}{2(n+1)} \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^4}\,dx \le \frac{1}{n+1}$$

♦ Exercice 7 page 161

Pour $t \ge 0$, $\quad -t^2 \le 0 \le t$

$1 - t^2 \le 1 \le 1 + t$

$\frac{1-t^2}{1+t} \le \frac{1}{1+t} \le \frac{1+t}{1+t}$

d'où : $\int_0^x (1-t)\,dt \le \int_0^x \frac{dt}{1+t} \le \int_0^x dt$

$$x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$$

♦ Exercice 8 page 161

(1) $f(x) = e^{-x}$; $K = [\ln 2\,;\ln 3]$

$$\frac{1}{\ln 3 - \ln 2}\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx = \frac{1}{6\ln\frac{3}{2}}$$

(2) $f(x) = x^3 + x - 3$; $K = [1\,;3]$

$$\frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\,dx = 9$$

(3) $f(x)=\dfrac{\sin \pi x}{2}$; $K=\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-0}\int_0^{1/2} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}$$

(4) $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$; $K=[0\,;3]$

$$\frac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)\,dx=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{e^3+1}{2}\right)$$

♦ **Exercice 9 page 161**

(1) $f(x)=x^2$; $K=[1\,;2]$

$$\frac{1}{2-1}\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{7}{3}$$

(2) $f(x)=2\sin 2x$; $K=\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx=\frac{4}{\pi}$$

(3) $f(x)=\tan x$; $K=\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$

$$\frac{1}{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}}\int_{-\pi/4}^{\pi/3} f(x)\,dx=\frac{6}{7\pi}\ln 2$$

♦ **Exercice 10 page 161**

• Pour $t\geq 0$,

$$-t^2\leq 0\leq t^3$$
$$1-t^2\leq 1\leq 1-t^2+t^2+t^3$$
$$1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2$$

d'où : $\displaystyle\int_0^x(1-t)\,dt\leq\int_0^x\frac{dt}{1+t}\leq\int_0^x(1-t+t^2)\,dt$

$$x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

♦ **Exercice 11 page 161**

1. Pour $t\geq 0$, $\displaystyle\int_0^t 1\,dx\leq\int_0^t e^x\,dx$

$$t\leq e^t-1$$

2. On sait que pour $t\geq 0$, $1\leq e^t$.

• On a : pour $t\geq 0$, $1+\dfrac{t}{1!}\leq e^t$

• Supposons que : pour un entier k,

$$1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^k}{k!}\leq e^t$$

d'où : $\displaystyle\int_0^x\left(1+\frac{t}{1!}+\ldots+\frac{t^k}{k!}\right)dt\leq\int_0^x e^t\,dt$

$$x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\leq e^x-1$$

• Ainsi : pour $t\geq 0$, $1+\dfrac{x}{1}+\ldots+\dfrac{t^n}{n!}<e^t$

(avec $n\in\mathbb{N}$)

♦ **Exercice 12 page 161**

On a : pour $x\in[0\,;1]$, $0\leq e^x\leq e$

• Pour $t\in[0\,;1]$, on a :

$$\int_0^t 0\,dx\leq\int_0^t e^x\,dx\leq\int_0^t e\,dx$$

d'où : $1\leq e^t\leq 1+e\times t$

• Pour $u\in[0\,;1]$, on a :

$$\int_0^u 1\,dt\leq\int_0^u e^t\,dt\leq\int_0^u(1+e\times t)\,dt$$

d'où : $u+1\leq e^u\leq 1+u+e\dfrac{u^2}{2}$

♦ **Exercice 13 page 161**

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$

(2) $\displaystyle\int_2^4\frac{(1+x)\,dx}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}(\ln 27-\ln 11)$

(3) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$

(4) $\displaystyle\int_1^3 x^3\sqrt{x}\,dx=18\sqrt{3}-\frac{2}{9}$

(5) $\displaystyle\int_0^2 e^{-3x}\,dx=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{e^6}\right)$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\sin x\,dx=\frac{1}{2}$

(7) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{3x+1}\,dx=\frac{1}{3}\times\frac{e^6-1}{e^2}$

(8) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x+1}}=2(\sqrt{2}-1)$

♦ **Exercice 14 page 162**

(1) $\displaystyle\int_1^3\left(x^2+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{19}{3}+4\sqrt{3}-\frac{10\sqrt{2}}{3}$

(2) $\displaystyle\int_0^3\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{1+x}+\frac{2}{2x+2}\right)dx=\frac{9}{4}+3\ln 4$

♦ **Exercice 15 page 162**

(1) $\displaystyle\int_0^\pi\cos 2x\,dx=0$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi\sin 2x\,dx=0$

♦ **Exercice 16 page 162**

(1) $\displaystyle\int_0^1(2x-5)(x^2-5x+1)\,dx=4$

(2) $\displaystyle\int_{-3}^0\frac{(x+3)\,dx}{(x^2+6x-1)^3}=-\frac{99}{400}$

(3) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx=2\ln 2-\ln 3$

(4) $\displaystyle\int_2^5\left(2x-1-\frac{1}{(x+2)^2}\right)dx=\frac{501}{28}$

(5) $\displaystyle\int_3^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = 2(\sqrt{3}-1)$

(6) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{3}-2\sqrt{2}$

(7) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = 0$

(8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{1+e^x} = \ln(1+e)-\ln 2$

(9) $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{1} \left(\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln^2 x}{x}\right) dx = -\frac{1}{6}$

♦ Exercice 17 page 162

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\sin 2x\,dx = 2$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{0} \cos x\,dx = \frac{1}{2}$

(3) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} u\,e^{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}(e^4-e^3)$

(4) $\displaystyle\int_0^2 u\sqrt{2u^2+1}\,du = \frac{13}{3}$

(5) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2\,dt}{\sqrt{4t+1}} = 2$

(6) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{u^2}e^{\frac{1}{u}}\,du = e-\sqrt{e}$

(7) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \ln 7-\ln 3$

(8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)\,dx}{2x^2+4x+5} = \frac{1}{4}\ln\frac{11}{5}$

(9) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin x}} = 2-\sqrt{2}$

(10) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin x\,e^{2\cos x}\,dx = \frac{1}{2}(e-1)$

♦ Exercice 18 page 162

$f : \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right] \mapsto \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$

(1) $f'(x) = \dfrac{1/2}{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}$

(2) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dt}{\cos t\sin t} = \left[\ln|\tan t|\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln 3$

♦ Exercice 19 page 162

$f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{2x+3} = \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}-\dfrac{5/4}{2x+3}$

$\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{8}(4-5\ln 3)$

♦ Exercice 20 page 162

$f(x) = (1+x)^n\,;\ (n\in\mathbb{N})$

1. $\displaystyle\int_1^0 f(x)\,dx = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$

2. $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \int_0^1 x^k\,;\ (n\in\mathbb{N})$

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \int_0^1 x^k\,dx$

$\displaystyle = 1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n$

3. Les égalités (1) et (2) donnent :

$1+\dfrac{1}{2}C_n^1+\ldots+\dfrac{1}{n+1}C_n^n = \dfrac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$

♦ Exercice 21 page 162

$\sin^4 x = \dfrac{1}{8}\cos 4x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{3}{8}$

$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx = \frac{3}{8}\pi$

♦ Exercice 22 page 162

• $f(x) = \sin^2 x\cos^4 x$

$= \dfrac{1}{32}(-\cos 6x-2\cos 4x+\cos 2x+2)$

$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi}{8}$

• $g(x) = \cos^2 x\sin^4 x$

$= \dfrac{1}{32}(\cos 6x-2\cos 4x-\cos 2x+2)$

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx = \frac{\pi}{32}$

♦ Exercice 23 page 162

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \sin^2 5x\,dx = \int_0^{\pi/6} \frac{1-\cos 10x}{2}\,dx$

$= \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{40}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^4 x\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 4x-4\cos 2x+3}{8}\,dx$

$= \dfrac{3\pi}{32}-\dfrac{1}{4}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{\pi}{64}+\frac{1}{48}$

(4) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \sin^2 2x\cos^2 3x\,dx = \frac{\pi}{8}$

♦ Exercice 24 page 162

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx = \frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx = \frac{8}{15}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3\cos^2 x\,dx = \frac{4}{15}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x\,dx = \frac{1}{3}$

(5) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\sin^2\cos x\,dx = -\frac{2}{3}$

(1)

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^4 x\cos x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{40}$

♦ Exercice 25 page 162

1. $\cos x \cos 2x \cos 3x$

$$= \frac{1}{4}(\cos 6x + \cos 4x + \cos 2x + 1)$$

2. $f(x) = \cos x \sin^2 x \cos 3x$

$$= \cos x \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) \cos 3x$$

$$= \frac{1}{8}(-\cos 6x + \cos 4x + \cos 2x - 1)$$

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{16}$$

$g(x) = \cos^2 x \cos 3x$

$$= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\cos 3x$$

$$= \frac{1}{4}(\cos x + \cos 5x) + \frac{1}{2}\cos 3x$$

$$\mathrm{J} = \int_0^{\pi/2} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{15}$$

♦ Exercice 26 page 162

(1) $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} (x - \sin x)\,\mathrm{d}x = 0$

car $x \mapsto x - \sin x$ est impaire.

(2) $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} (x^2 - \cos x)\,\mathrm{d}x$

$$= 2\int_0^{2\pi} (x^2 - \cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{16\pi^3}{3}$$

car $x \mapsto x^2 - \cos x$ est paire.

(3) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = 2$$

car cos est paire et sin est impaire.

(4) $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \tan x\,\mathrm{d}x = 0$

car tan est impaire.

(5) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{5x^5 + 3x^3\sqrt{3}}{x^4 + x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = 0$

car $x \mapsto \dfrac{5x^5 + 3x^2\sqrt{3}}{x^4 + x^2 + 1}$ est impaire.

♦ Exercice 27 page 162

(1) $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \ln(4x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{4}\ln 7 - \frac{3\ln 3}{4} - 1$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = \ln(4x-1) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$

(4) $\displaystyle\int_3^5 \ln\frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_3^5 \ln(x-1)\,\mathrm{d}x - \int_3^5 \ln x\,\mathrm{d}x$

• $\displaystyle\int_3^5 \ln(x-1)\,\mathrm{d}x = 6\ln 2 + 2$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = \ln(x-1) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

• $\displaystyle\int_3^5 \ln x\,\mathrm{d}x = 5\ln 5 - 3\ln 3 - 2$

on a posé : $\begin{cases} w(x) = \ln x \\ t'(x) = 1 \end{cases}$

♦ Exercice 28 page 162

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{1} x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^{-2}$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1+x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}}$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = x + 1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x+1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \frac{5}{\mathrm{e}}$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = 2x + 1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

(4) $\displaystyle\int_0^2 (2x+4)\,\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x = 2\left(3\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = 2x + 4 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{x-1} \end{cases}$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x+2)\,\mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^3$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = x + 2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{x+1} \end{cases}$

♦ Exercice 29 page 162

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = -2$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \cos x \end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} (2x^2 - 1)\cos 3x\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{3}(2x^2 - 1)\sin 3x - \frac{4}{3}\int_0^{\pi} x\sin 3x\,\mathrm{d}x = -\frac{4\pi}{9}$$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = 2x^2 - 1 \\ v'(x) = \cos 3x \end{cases}$

$$\int_0^{\pi} x\sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}$$

on a posé : $\begin{cases} w(x) = x \\ t'(x) = \sin 3x \end{cases}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$

$$= [-x^2\cos x]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x = \pi - 2$$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \sin x \end{cases}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} x^2 \sin^2 \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} x^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} x^2 \cos 2x\,\mathrm{d}x$$

• $\displaystyle\int_0^{\pi/3} x^2 \cos 2x\,\mathrm{d}x$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \sin 2x\,\mathrm{d}x\right]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} x \sin 2x\,\mathrm{d}x$$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \cos 2x \end{cases}$

• $\displaystyle\int_0^{\pi/3} x \sin 2x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/3}$

on a posé : $\begin{cases} w(x) = x \\ t'(x) = \sin 2x \end{cases}$

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - 2$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$

♦ Exercice 30 page 163

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{15}$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sqrt{1-x} \end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^2(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \frac{4}{3}\int_0^1 x(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 x(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5} \times \frac{2}{7}$$

on a posé : $\begin{cases} w(x) = x \\ t'(x) = (1-x)^{3/2} \end{cases}$

♦ Exercice 31 page 163

1. $\displaystyle\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$

2. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 2$

♦ Exercice 32 page 163

1. $\displaystyle\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$

$$= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

2. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} (2x+1)\cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x$

$$= \left[-\frac{1}{3}\cos^3 x(2x+1)\right]_{-\pi/2}^{\pi} + \frac{2}{3}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{9}$$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = 2x + 1 \\ v'(x) = \cos^2 x \sin x \end{cases}$

♦ Exercice 33 page 163

$\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^2 x\,\mathrm{d}x\ ;\ J = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

1. $\displaystyle I + J = \frac{\pi^3}{24}$

2. $\displaystyle I - J = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x\,\mathrm{d}x$

$$= -\int_0^{\pi/2} x \sin 2x\,\mathrm{d}x$$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \cos 2x \end{cases}$

$$\int_0^{\pi/2} x \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}$$

on a posé : $\begin{cases} w(x) = x \\ t'(x) = \sin 2x \end{cases}$

3. $\displaystyle I = \frac{\pi^3 - 6\pi}{48}\ ;\ J = \frac{\pi^3 + 6\pi}{48}$

♦ Exercice 34 page 163

(1) $\displaystyle I = \int_0^{\pi/4} e^{2x} \cos x\,\mathrm{d}x$

$$= \left[e^{2x}\sin x\right]_0^{\pi/4} - 2\int_0^{\pi/4} e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$$

on a posé : $\begin{cases} u(x) = e^{2x} \\ v'(x) = \cos x \end{cases}$

• $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$

$$= \left[-e^{2x}\cos x\right]_0^{\pi/4} + 2\int_0^{\pi/4} e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

(2) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} x^2 \sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{9} - \frac{2}{27}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (2x+1)\sin x\,\mathrm{d}x = 3$

(4) $\displaystyle\int_1^2 x\ln^2 x\,\mathrm{d}x = 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + \frac{3}{4}$

(5) $\displaystyle\int_1^2 \ln^2 x\,\mathrm{d}x = 2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2$

♦ Exercice 35 page 163

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x^2 + 2x + 3)\,e^x\,\mathrm{d}x = 7e^2 - 4e^{-1}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{x/2}\,\mathrm{d}x = 10e^{1/2} - 16$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^2 + 1)\,e^x\,\mathrm{d}x = 2e - \frac{11}{e^2}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{3x}\cos 3x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}(1 + e^{3\pi/2})$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{3x}\sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(1 - e^{3\pi/2})$

Exercice 36 page 163

Pour $x \in]-1\,;+\infty[$, $f(x) = \int_1^x \frac{5t}{1+t}\,dt$

1. $f(1) = \int_1^1 \frac{5t}{1+t}\,dt = 0$

2. $f'(x) = \frac{5x}{1+x}$

Exercice 37 page 163

$f(x) = \int_0^x (e^t + 3e^{-t})\,dt$

1. $f(0) = 0\,;\ f'(x) = e^x + 3e^{-x}$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
f est donc une fonction dérivable strictement croissante ; c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\boxed{0}$	↗

Par conséquent, f admet un unique zéro qui est 0.

Exercice 38 page 163

$f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$

1. $f(0) = 0\,;\ f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
f est donc une fonction dérivable strictement croissante ; c'est une bijection.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\boxed{0}$	↗

3. $f(x) = [\ln(1+e^t)]_0^x$

$$= \ln[e^x(1+e^{-x})] - \ln 2$$
$$= x + \ln(1+e^{-x})] - \ln 2$$

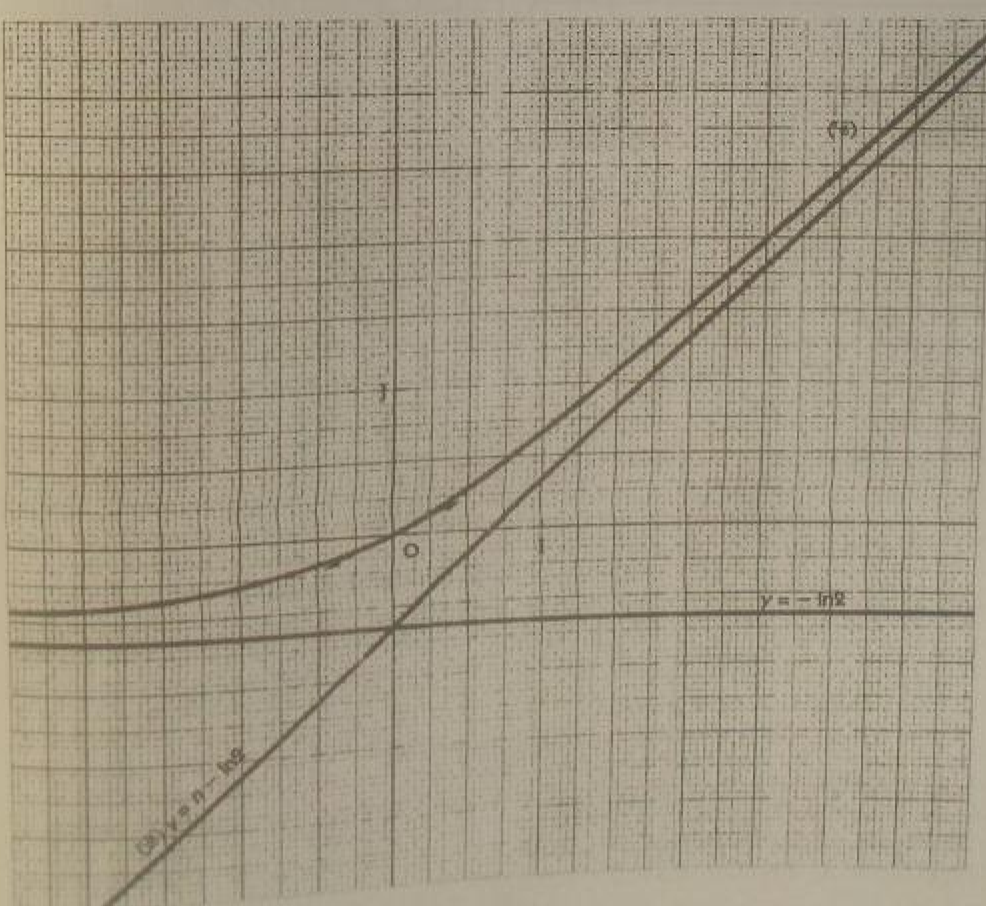
$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - \ln 2)] = 0$

Donc la droite $(\mathcal{D})$ d'équation :

$$y = x - \ln 2$$

est une asymptote à la représentation $(\mathcal{C})$ de f.

4. Courbe $\mathcal{C}$.



♦ Exercice 39 page 163

$f(x) = \dfrac{3x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4x + 4}$

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2. $f(x) = 3x + 7 + \dfrac{18}{x-2} + \dfrac{7}{(x-2)^2}$

3. • Une primitive F de f sur $[-1\,;1]$

$F(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + 7x + 18\ln(2-x) - \dfrac{7}{(x-2)}$

car pour $x \in [1\,;1]$, $|x-2| = 2-x$

• $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{56}{3} - 18\ln3$

♦ Exercice 40 page 163

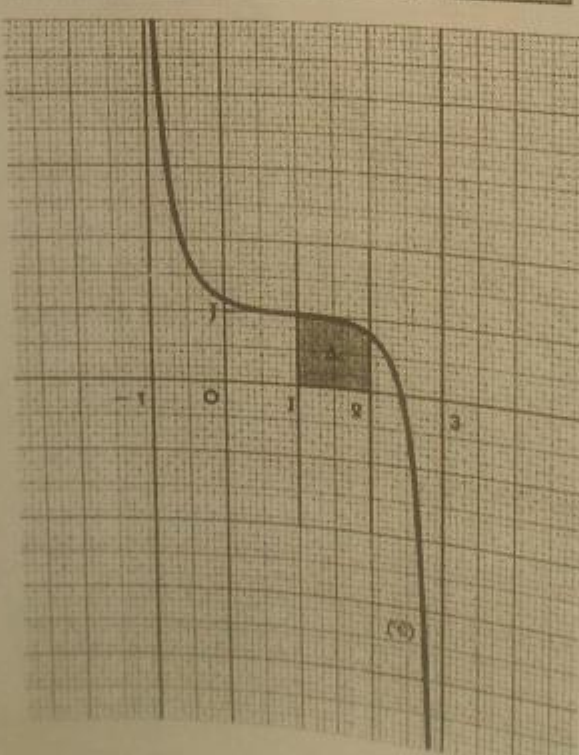
$f(x) = x + \ln\dfrac{3-x}{1+x}$

1. $x \in D_f \Leftrightarrow 1 + x \neq 0$ et $\dfrac{3-x}{1+x} > 0$

$D_f =]-1\,;3[$

$f'(x) = \dfrac{-(x-1)^2}{(1+x)(3-x)}$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$				
$f(x)$		$+\infty \searrow -\infty$		



2. $\begin{cases} \displaystyle\int_{1}^{2} \ln(x+1)\,dx = 3\ln3 - 2\ln2 - 1 \\ \displaystyle\int_{1}^{2} \ln(-x+3)\,dx = 2\ln2 - 1 \end{cases}$

4. $\mathscr{A}$: aire de la partie Δ

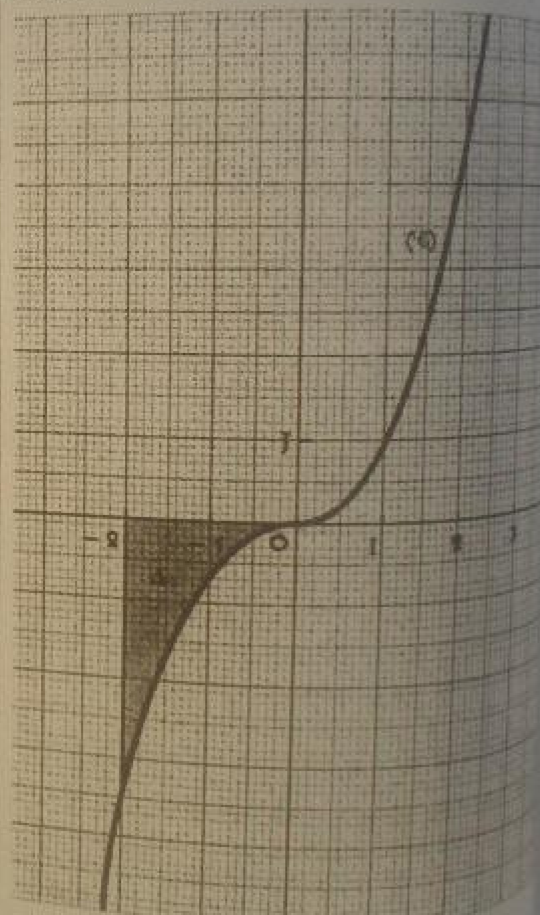
$\mathscr{A} = u \cdot a \times \displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,dx$

$= \left(\dfrac{3}{2} - 3\ln3 + 4\ln2\right) u \cdot a$

♦ Exercice 41 page 163

$f(x) = x\,|x|$

1. f est une fonction impaire.
Sur $[0\,;+\infty[$, $f(x) = x^2$.



2. $\mathscr{A}$: aire de la partie Δ

$\mathscr{A} = u \cdot a \times \displaystyle\int_{-2}^{0} -f(x)\,dx$

$= u \cdot a \times \displaystyle\int_{-2}^{0} -(-x^2)\,dx$

$= \dfrac{8}{3}\,u \cdot a$

Exercice 42 page 164

$f(x) = x + 1 + \dfrac{4}{(x-2)^2}$

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f'(x) = \frac{(x-4)(x^2-2x+4)}{(x-2)^3}$$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	6	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$

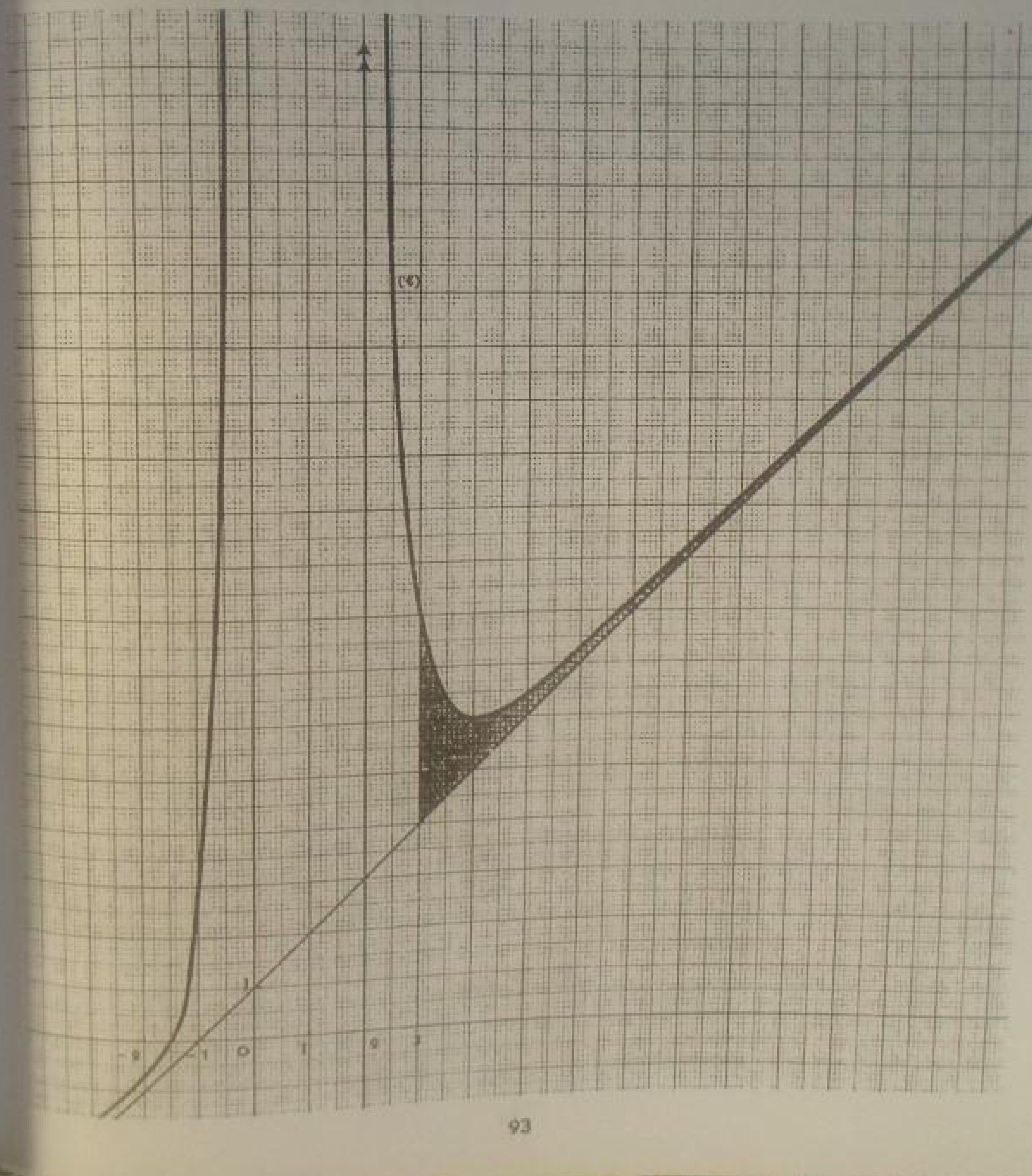
asymptote verticale à $(\mathscr{C})$: $x = 2$

asymptote oblique à $(\mathscr{C})$: $y = x + 1$

2. $\mathscr{A}$: aire de la partie Δ

$$\mathscr{A} = u \cdot a \times \int_3^{15} [f(x) - (x+1)]\,dx$$

$$= \frac{48}{13}\, u \cdot a$$



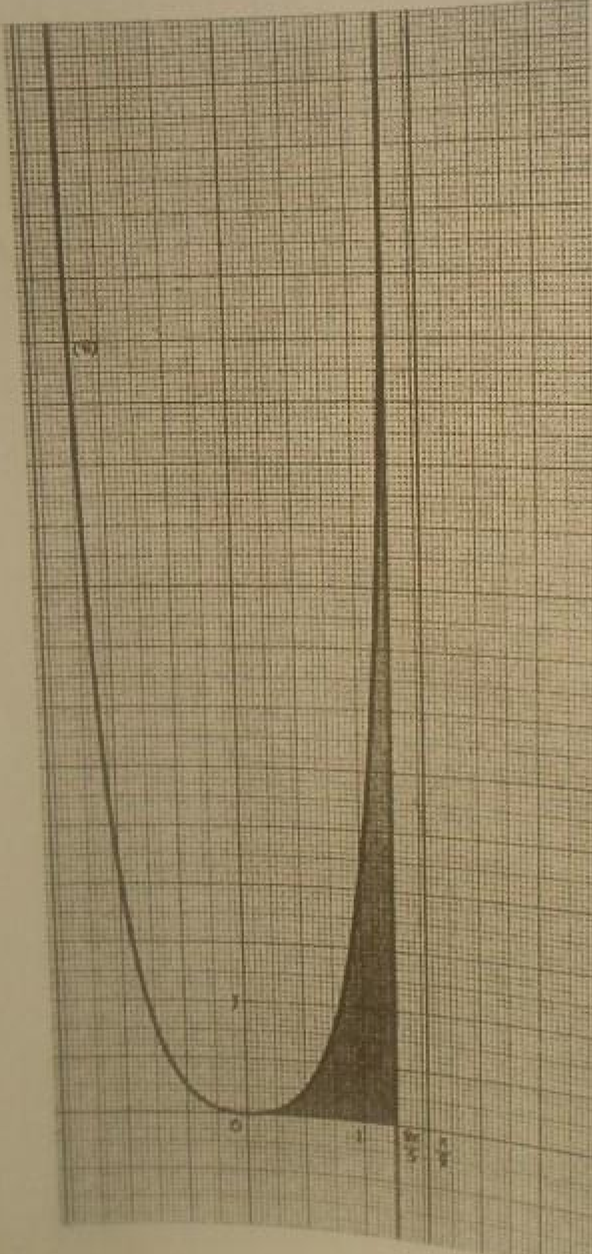
♦ Exercice 43 page 164

$f(x) = \tan^2 x$

1. $D_f = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x) = 2\,\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\boxed{0}$	$\nearrow$	$+\infty$



2. $\mathscr{A}$: aire de la partie Δ

$$\mathscr{A} = u \cdot a \times \int_0^{2\pi/5} \tan^2 x \,\mathrm{d}x$$
$$= \left(\tan\frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) u \cdot a$$

♦ Exercice 44 page 164

$f(x) = x - e^{3x}$

1. $f'(x) = 1 - 3e^{3x}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}\ln 3$		
$f'(x)$		$+$	$\boxed{0}$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\boxed{\alpha}$	$\searrow$	

$\alpha = -\frac{1}{3}\ln 3 - \frac{1}{3}$

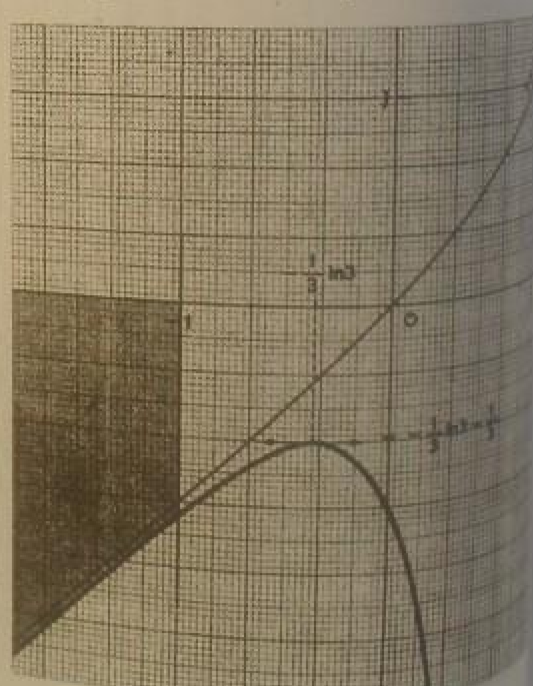
$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$

asymptote oblique à $(\mathscr{C})$: $y = x$

2. Courbe $(\mathscr{C})$.

3. $\mathscr{A}$: aire de la partie Δ

$$\mathscr{A} = 9\text{ cm}^2 \times \int_{-4}^{-1} -f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{135}{2} + 3(e^{-3} - e^{-12})\right]\text{cm}^2$$



◆ **Exercice 45 page 164**

$f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$; f est une fonction paire

$f'(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	$\boxed{0}$	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\boxed{1}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

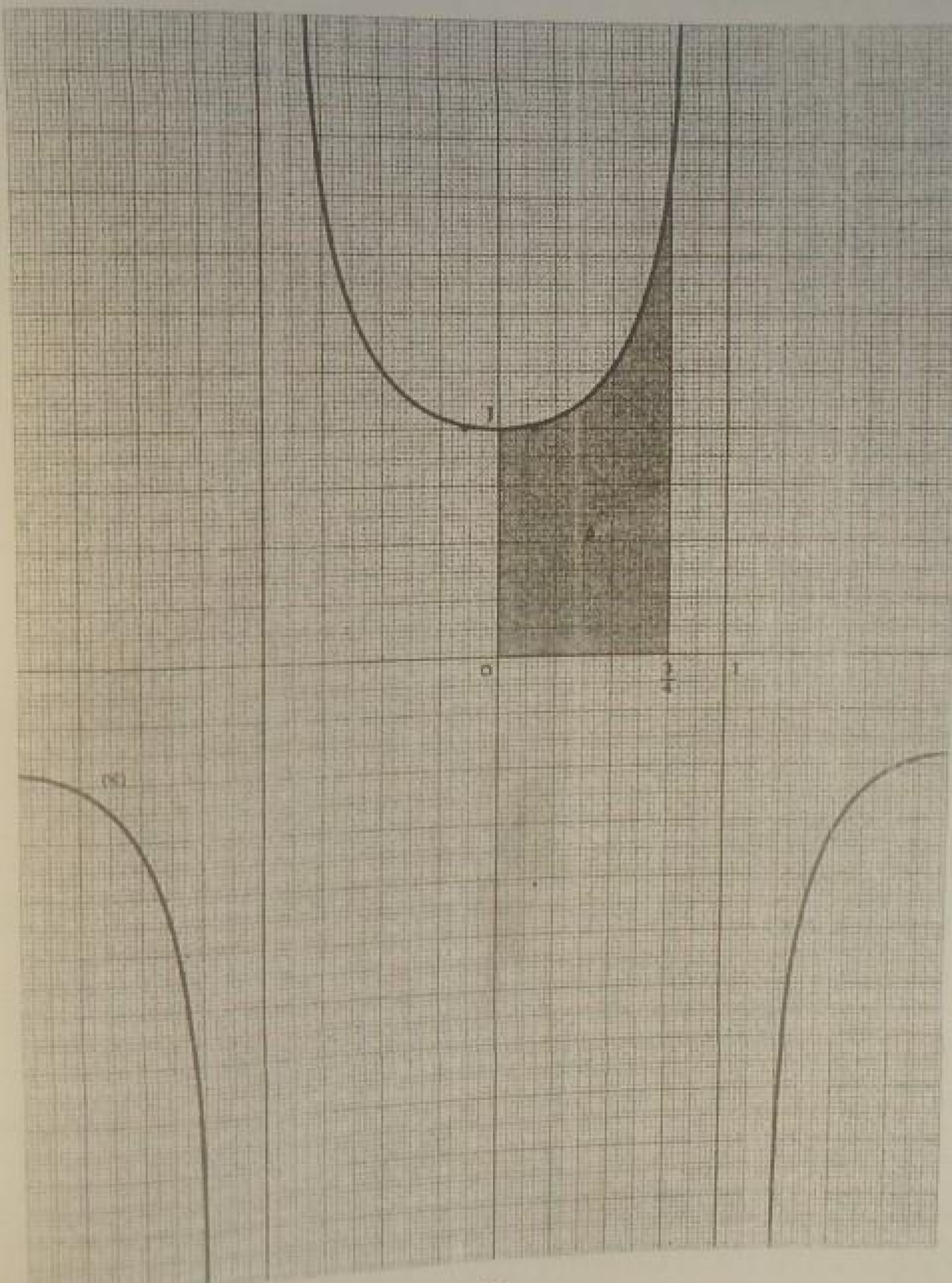
asymptote horizontale à $(\mathscr{C})$: $y = 0$

2. Courbe $(\mathscr{C})$.

3. $f(x) = \dfrac{1/2}{1-x} + \dfrac{1/2}{1+x}$

4. $\mathscr{A}$: aire de la partie A

$$\mathscr{A} = 16 \text{ cm}^2 \times \int_0^{3/4} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 8\ln 7 \text{ cm}^2$$



♦ **Exercice 46 page 164**

$A = \int_5^{50} \frac{dx}{1+x^6}$; $B = \int_5^{50} \frac{dx}{x^6}$; $C = \int_5^{50} \frac{dx}{x^{12}}$

1. On a :

$$1 + x^6 \geq x^6$$

$$0 < \frac{1}{1+x^6} \leq \frac{1}{x^6}$$

$$\int_5^{50} \frac{dx}{1+x^6} \leq \int_5^{50} \frac{dx}{x^6}$$

$$A \leq B$$

2. On a : $\frac{1}{x^6} - \frac{1}{1+x^6} = \frac{1}{x^6 + x^{12}}$

d'où : $\frac{1}{x^6} - \frac{1}{1+x^6} \leq \frac{1}{x^{12}}$

On obtient : $B - A \leq C$

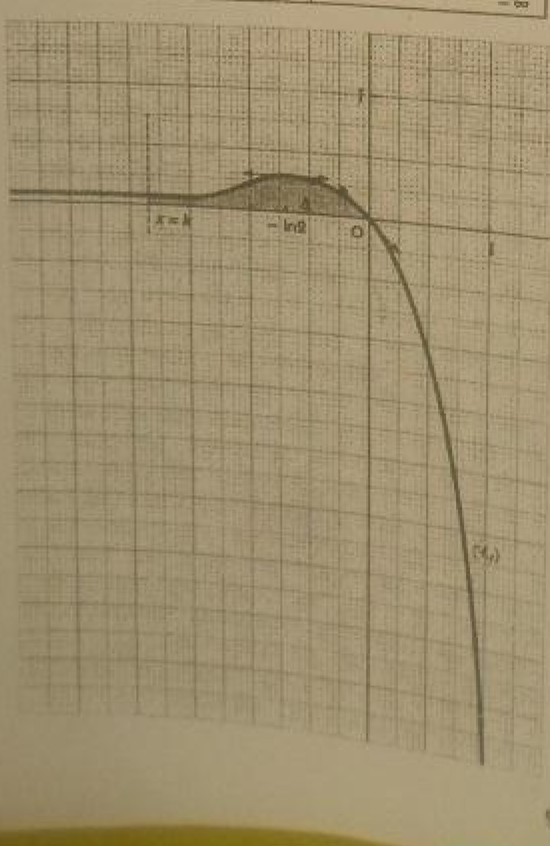
3. $6{,}3997 \times 10^{-5} < A \leq 6{,}3999 \times 10^{-5}$

♦ **Exercice 47 page 164**

$f(x) = e^x(1 - e^x)$

1. $f'(x) = e^x(1 - 2e^x)$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$			$\boxed{0}$		
$f(x)$	0	↗	$\boxed{1/4}$	↘	$-\infty$



2. $\mathscr{A}(k)$: aire de la partie Δ

$$\mathscr{A}(k) = u \cdot a \times \int_k^0 f(x)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2}e^{2k}\right) u \cdot a$$

3. $\mathscr{A}(-3) \approx 0{,}451$

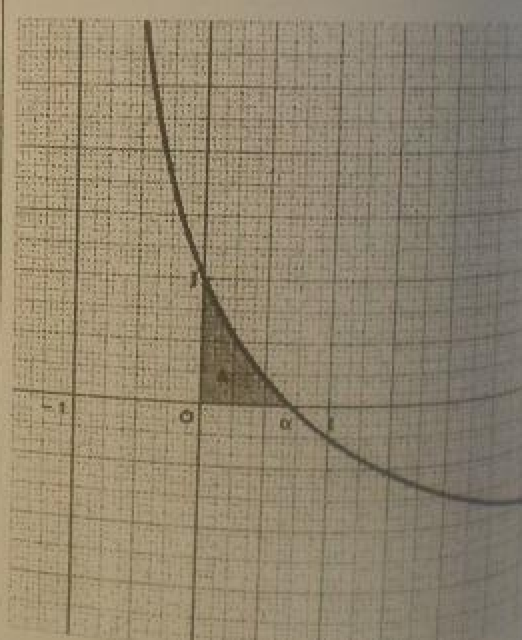
4. $\lim\limits_{k \to -\infty} \mathscr{A}(k) = \frac{1}{2}$

♦ **Exercice 48 page 164**

$f(x) = \frac{1}{1+x} - \ln(1+x)$

1. $f'(x) = -\frac{x+2}{(1+x)^2}$

x	-1			$+\infty$
$f'(x)$	‖		$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\boxed{0}$	↘ $-\infty$



2. D'après le tableau de variation, f est une bi
de $]-1 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Donc f admet un unique zéro α.

3. $f(0{,}7) \approx 0{,}057$
$f(0{,}8) \approx -0{,}032$
d'où : $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$

4. $\mathscr{A}$: aire de la partie Δ

$$\mathscr{A} = u \cdot a \times \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$$

On obtient :

$$\mathscr{A} = [\alpha - \ln(1+\alpha)]\, u \cdot a$$

or : $f(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha} - \ln(1+\alpha) = 0$

d'où : $\mathscr{A} = \frac{\alpha^2}{1+\alpha}\, u \cdot a$

♦ Exercice 49 page 164

$f(x) = e^{-x} \cos x$

1. $f'(x) = e^{-x} (\cos x + \sin x)$

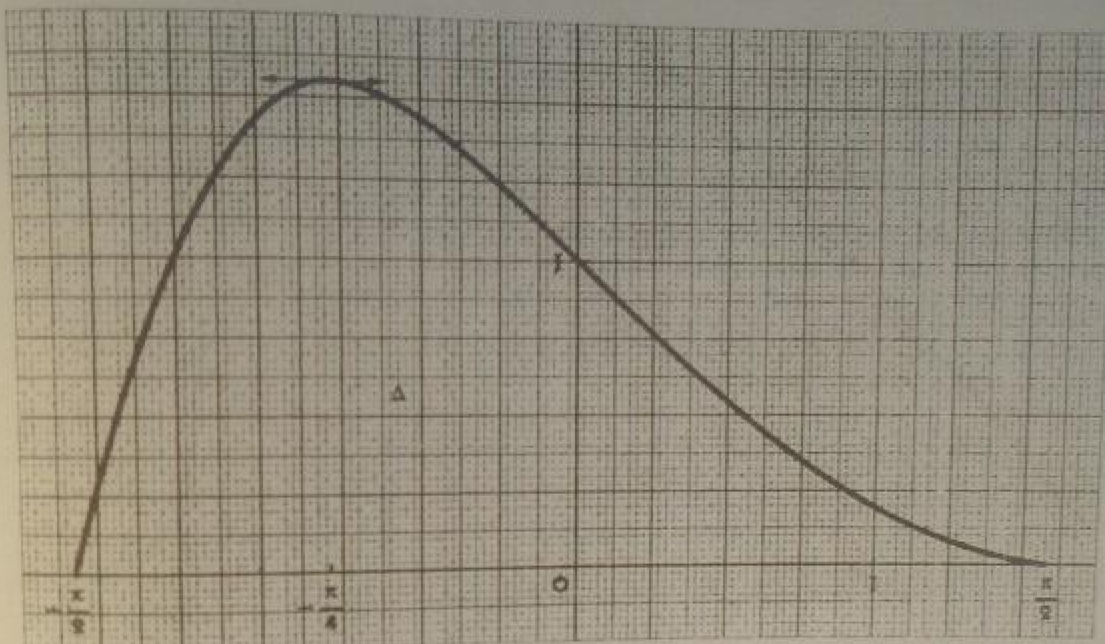
x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$			$\boxed{0}$		
$f(x)$	0	↗	$\boxed{\alpha}$	↘	0

$\alpha = \dfrac{e^{\pi/4}\sqrt{2}}{2}$

2. $F(x) = \dfrac{1}{2} (\sin x - \cos x)\, e^{-x}$

3. $\mathcal{A}$: aire de la partie Δ

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} (e^{-\pi/2} + e^{\pi/2})$ u·a



♦ Exercice 50 page 164

$F(x) = \int_0^x 10^t \, dt$

1. On a : $10^t = e^{t\ln 10}$

d'où : $F(x) = \dfrac{e^{x\ln 10} - 1}{\ln 10}$

2. Équation : $F(x) = 6$

$e^{x\ln 10} = 1 + 6\ln 10$

$x = \dfrac{\ln(1 + 6\ln 10)}{\ln 10}$

♦ Exercice 51 page 164

$g(x) = 1 - e^{2x} - 2x\, e^{2x}$

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2x\, e^{2x} = \lim\limits_{X \to -\infty} X e^{X} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$

2. $g'(x) = -4\, e^{2x}(1 + x)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	$\boxed{0}$	-			
$g(x)$	1	↗	$\boxed{\gamma}$	↘	$\boxed{0}$	↘	$-\infty$

$\gamma = 1 + e^{-2}$; $g(0) = 0$

On en déduit que

pour $x < 0$, $g(x) > 0$

$x > 0$ $g(x) < 0$

3. • $\int_0^x 2t e^{2t} \, dt = -\dfrac{1}{2} e^{2x} + x\, e^{2x}$

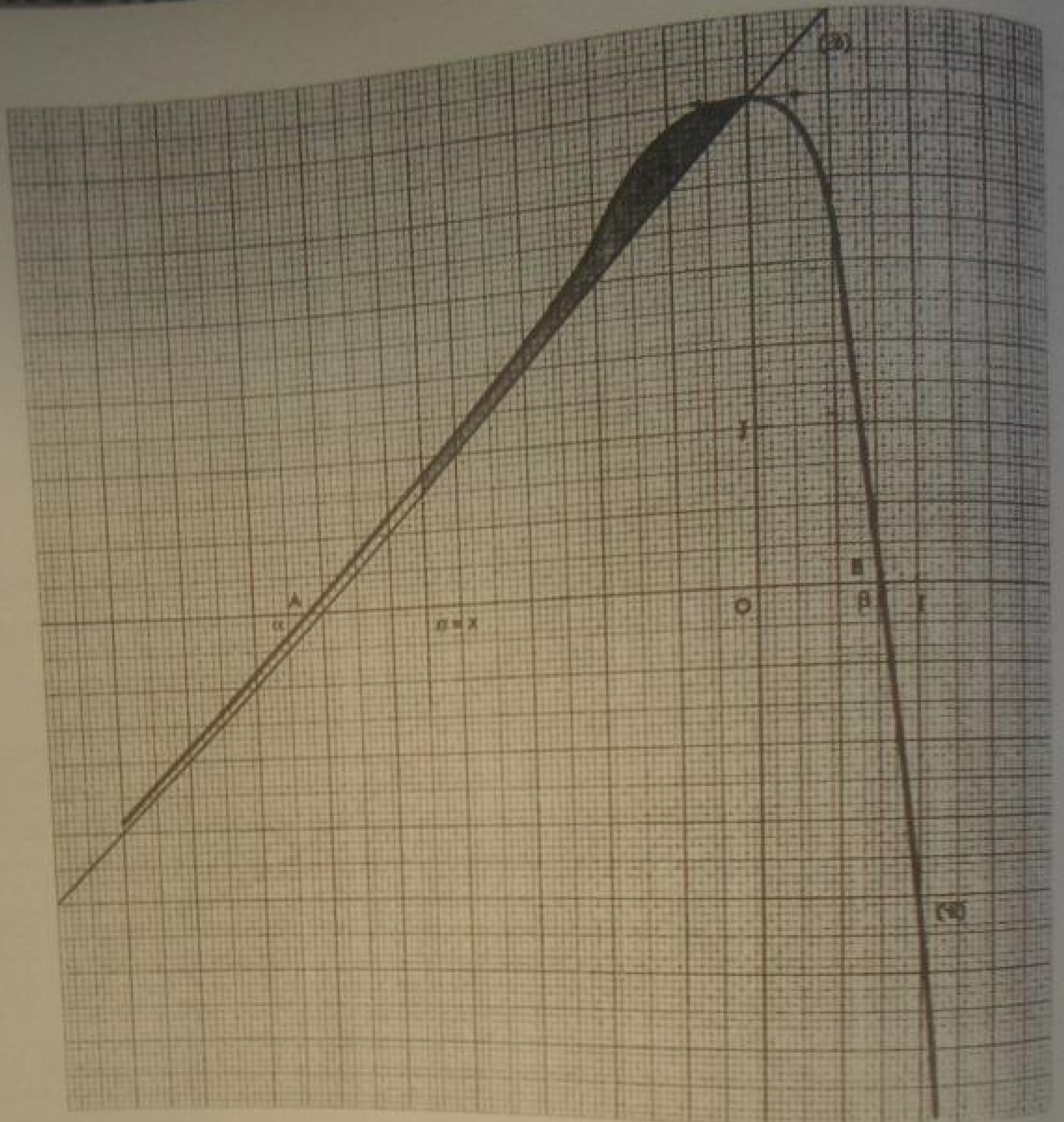
on a posé : $\begin{cases} u'(t) = 2\, e^{2t} \\ v(x) = t \end{cases}$

• Les primitives G de g sont définies par :

$G(x) = x - x\, e^{2x} + k$

Celle qui prend la valeur 3 en 0 est définie par :

$G(x) = x - x\, e^{2x} + 3$



4. $f(x) = x + 3 - x\,e^{2x}$

• En tenant compte du 3., on obtient :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\boxed{0}$	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$\boxed{3}$	$\searrow -\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x + 3)] = 0$

La droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x + 3$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ en $-\infty$.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f(x) - (x + 3)$	$(\mathscr{D})$ en dessous de $(\mathscr{C}_f)$	$(\mathscr{D})$ au-dessus de $(\mathscr{C}_f)$

• D'après le tableau de variations, f définit une bijection de $]-\infty\,;0[$ dans $]-\infty\,;3[$ et une bijection de $]0\,;+\infty[$ dans $]-\infty\,;3[$.

La fonction f admet exactement deux zéros α et β tels que : $\alpha < 0 < \beta$.

α est l'abscisse de A et β celle de B.

• On a : $f(0) = 3$; $f(1) = 4 - e^2 < 0$ d'où : $0 < \beta < 1$.

Par balayage, on obtient :

$$0{,}7 < \beta < 0{,}8.$$

5. $\mathscr{A}(\alpha)$: aire de la partie Δ

$$\mathscr{A}(\alpha) = 4\ \text{cm}^2 \times \int_\alpha^0 [f(x) - x + 3]\,dx$$
$$= (1 - e^{2x} + 2\alpha e^{2\alpha})\ \text{cm}^2$$

6. $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \mathscr{A}(\alpha) = 1$

8. Suites numériques

(pages 165 à 190 du livre de l'élève)

Ce chapitre vise essentiellement à :

- introduire la notion de convergence d'une suite numérique ;
- présenter les propriétés utilisées pour prouver la convergence ou la divergence d'une suite et de calculer sa limite ;
- étudier les suites arithmétiques et géométriques ;
- présenter des exemples mathématiques de situations concrètes.

Les suites numériques ont déjà été abordées en première SE. En terminale, il s'agit de poursuivre, en s'appuyant sur nombre d'exercices et d'activités, la familiarisation des élèves avec les suites et d'aborder les problèmes de convergence et de divergence.

Comme dans l'étude de la notion de limites pour les fonctions réelles, on s'appuiera sur une approche intuitive de la notion de convergence en multipliant les exemples, en utilisant la calculatrice et les représentations graphiques. On réinvestira à cette occasion tous les résultats obtenus concernant les limites de fonctions.

La notion de suite bornée est introduite pour fournir un outil complémentaire permettant de démontrer la convergence d'une suite. Il conviendra donc de ne pas multiplier les exercices techniques sur cette notion.

La notion de continuité d'une fonction sera réutilisée dans l'étude de la convergence des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Dans ce chapitre, les occasions d'utiliser le raisonnement par récurrence sont nombreuses. On apprendra donc aux élèves à manier avec rigueur ce type de raisonnement dans de multiples exercices en suggérant, si nécessaire, son utilisation.

On s'attachera surtout à la résolution de problèmes concrets se ramenant principalement à l'étude des suites arithmétiques et géométriques.

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Étude globale d'une suite numérique • Suites bornées. • Suites (strictement) monotones. • Suites arithmétiques, suites géométriques.	• Conjecturer, à l'aide d'une représentation graphique si une suite est majorée, minorée, bornée. • Démontrer qu'une suite est majorée, minorée, bornée. • Conjecturer le sens de variation d'une suite : – à l'aide d'une calculatrice ; – à l'aide d'une représentation graphique. • Déterminer le sens de variation d'une suite.
Convergence d'une suite numérique • Notion de limite d'une suite : – suite convergente ; – suite divergente. • Calculs de limites : – limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient de suites ; – propriétés de comparaison. • Limite d'une suite monotone Théorème de convergence monotone : toute suite croissante majorée est convergente, toute suite décroissante minorée est divergente. • Convergence d'une suite définie par récurrence	• Conjecturer la limite d'une suite : – à l'aide d'une calculatrice ; – à l'aide d'une représentation graphique. • Calculer la limite d'une suite du type $u_n = f(n)$. • Calculer la limite d'une suite en utilisant les limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient de suites. • Calculer la limite d'une suite en utilisant les propriétés de comparaison. • Étudier la convergence d'une suite à l'aide du théorème de convergence monotone. • Étudier la convergence d'une suite définie par récurrence et déterminer sa limite quand elle existe.

Exercices d'application directe

♦ Exercice 1.a page 167

$(v)\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n - 2 \end{cases}$

- $v_1 = 0$; $v_2 = -2$; $v_3 = -6$; $v_4 = -14$.
- La suite v semble décroissante.
- Contrôle de la conjecture :

On a : $v_1 < v_0$

Supposons que pour un nombre entier naturel k, $v_{k+1} < v_k$.

$$v_{k+2} - v_{k+1} = 2(v_{k+1} - v_k)$$

d'où : $v_{k+2} < v_{k+1}$

donc pour tout n de $\mathbb{N}$ $v_{n+1} < v_n$.

♦ Exercice 1.b page 169

(1) $u_n = \dfrac{2n-3}{5n-2}$

Tableau de variation de la fonction

$f : [0 ; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{2x-3}{5x-2}$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$

La suite u est donc minorée par $-\dfrac{1}{3}$ et majorée par $\dfrac{3}{2}$.

(2) $u_n = \ln(n+1) - \ln n$

Tableau de variation de la fonction

$f :]0 ; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln(x+1) - \ln x$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		−	
$f(x)$	$+\infty$	$\boxed{\ln 2}$	0

La suite u est donc minorée par 0 et majorée par ln 2.

(3) $u_n = \sqrt{n^2+2} - n$

Tableau de variation de la fonction

$f : [0 ; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x^2+2} - x$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	−	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	0

La suite u est donc minorée par 0 et majorée par $\sqrt{2}$.

(4) $u_n = \dfrac{2n + \cos n}{n^2}$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$\dfrac{2n-1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2n+1}{n^2}$

la fonction $x \mapsto \dfrac{2x-1}{x^2}$ décroît de 1 à 0

la fonction $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2}$ décroît de 3 à 0

donc pout tout x de $[1 ; +\infty]$ $0 \leqslant f(x) \leqslant 3$

La suite u_n est donc minorée par 0 et majorée par 3

♦ Exercice 1.c page 169

- $(u)\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$
- On a $u_0 < 3$.
- Supposons que pour un nombre entier naturel k $u_k < 3$.

On obtient : $\dfrac{9}{6-u_k} < 3$

d'où : $u_k < 3$

donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n < 3$.

- Sens de variation de u pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6-u_n} - u_n$$
$$= \frac{(u_n-3)^2}{6-u_n} \geqslant 0.$$

Donc la suite u est croissante.

♦ Exercice 2.a page 176

Les suites u, v, w sont convergentes ; calcul de leur limite.

- $(u)\begin{cases} u_0 = -0{,}5 \\ u_{n+1} = u_n(1+u_n) \end{cases}$

La limite ℓ de la suite u est solution de l'équation

donc : $\quad x = x(1+x)$

$\ell = 0$

- $(w)\begin{cases} w_0 = 12 \\ w_{n+1} = 0{,}25(1+w_n) \end{cases}$

La limite ℓ de la suite w est solution de l'équation :

$$x = 0{,}25\,(1 + x)$$

donc : $\ell = \dfrac{1}{3}$

• $(v)\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \end{cases}$

La limite ℓ de la suite v est solution de l'équation :

$$x = \sqrt{2 + x}$$

donc : $\ell = 2.$

♦ **Exercice 2.b page 176**

• $(u)\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + u_n \end{cases}$

– Sens de variation de la suite u. (On peut vérifier par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.)

On a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} < 0$ donc la suite u est strictement croissante.

– Démontrons que la suite u n'admet pas un maximum.

Supposons qu'il existe un nombre réel A tel que : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant A$

d'où : $u_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{A} + A > A$

contradiction

– La suite u est strictement croissante et n'admet pas de borne supérieure ; elle diverge donc vers $+\infty$.

♦ **Exercice 3.a page 179**

$(u)\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 2} \end{cases}$

(v) ; $v_n = \dfrac{1}{u_n}$

• On obtient :

$(v)\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

• On a : $v_n = 1 + \dfrac{n}{2}$

d'où : $u_n = \dfrac{2}{2 + n}$

• $v_0 + \ldots + v_n = (n + 1)\,\dfrac{v_0 + v_n}{2}$

$= \dfrac{(n + 1)(4 + n)}{4}$

• $\lim u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{2 + n} = 0$

donc u converge vers 0.

♦ **Exercice 3.b page 179**

(1) $u_n = 40 - 6n$

(2) $u_n = -2 + n$

(3) $u_n = 4 + 3n$

(4) $u_n = -5 - 3n$

♦ **Exercice 3.c page 182**

$(u)\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{2u_n + 5} \end{cases}$

• $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1}$

On obtient : $v_{n+1} = \dfrac{3}{4}\,v_n$

• $v_n = v_0\,q^n = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

$u_n = \dfrac{1 - v_n}{v_n - 2} = -1 - \dfrac{1}{\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 2}$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$

d'où $\lim u_n = -\dfrac{1}{2}.$

♦ **Exercice 3.d page 182**

(1) $v_n = \dfrac{3}{2^n}$ (2) $v_n = -3.5^n$

(3) $v_n = \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ (4) $v_n = \dfrac{(-3)^n}{7}$

Exercices d'apprentissage

♦ **Exercice 1 page 139**

(1) $u_n = \dfrac{2n - 1}{2n - 2}$; $n \geqslant 1$

$f(x) = \dfrac{2x - 1}{2x - 2}$; $f'(x) = \dfrac{-1}{(3x - 2)^2}$

f est décroissante sur $]1\ ;+\infty[$ donc u est décroissante.

(2) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} - 1$; $n \geqslant 1$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2(n + 1)} - 1 \leqslant 0$

donc u est décroissante.

(3) $u_n = \dfrac{5}{(-2)^n}$; $n \geqslant 0$

donc u est une suite alternée.

(4) $u_n = \dfrac{2^{2n}}{3^{n+2}}$; $n \geqslant 0$

$u_n > 0$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{4}{3} > 1$

donc u est croissante.

[illegible] $n \geq 0$

[illegible]

donc u est décroissante.

◆ Exercice 2 page 187

$\left\{\begin{array}{l} u_0 = [illegible] \\ u_n = \frac{[illegible]}{3} u_{n-1} - 4 \,;\ n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right.$

a) u_0 [illegible] 6

Supposons que pour k de $\mathbb{N}^*$, $u_k \geq -6$

on obtient : $u_{k+1} \geq -6$

donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $u_n \geq -6$

u est une suite minorée par -6.

b) $u_{n+1} - u_n = [illegible]\ \frac{2}{3} u_n - 4 \,;\ n > 0$

or : $u_n \geq -6$

d'où : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

donc u est décroissante.

◆ Exercice 3 page 187

$\left\{\begin{array}{l} u_0 = [illegible] \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35} \,;\ n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$

a) $u_0 \leq 7$

Supposons que pour k de $\mathbb{N}$, $u_k \leq 7$

on obtient $u_{k+1} \leq 7$

donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leq 7$

u est une suite majorée par 7.

b) • On vérifie par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n [illegible] 0.

• Démontrons que u est croissante

$u_{n+1}^2 - u_n^2 = -u_n^2 + 2u_n + 35$

$= -(u_n + 5)(u_n - 7)$.

Or, pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 7$

donc : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

◆ Exercice 4 page 187

$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \,;\ n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$

• On a : $\frac{3}{2} \leq u_0 \leq 2$

• Supposons que pour k de $\mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \leq u_k \leq 2$

d'où [illegible]

[illegible] < 2

◆ Exercice 5 page 187

[illegible] $u_n = \sin\left(\frac{[illegible]}{5}\right) + \cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right) \,;\ n \geq 0$

[illegible]

u est périodique de période [illegible].

(2) u_n est la n^e décimale de $\frac{22}{7}$; $n \geq 1$

$\frac{22}{7} = 3,\underline{142857}$

u est périodique, de période 6.

(3) $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \,;\ u_1 = 25 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \,;\ n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$

On a : $u_2 = 23$; $u_3 = -2$; $u_4 = -25$; [illegible]

$u_6 = 2$; $u_7 = 25$; ...

Il semble que u soit périodique, de période [illegible]

Prouvons-le.

On a : $u_{n+6} = u_{n+5} - u_{n+4}$

$= u_{n+4} - u_{n+3} - u_{n+4}$

$= -u_{n+3}$

$= -u_{n+2} + u_{n+1}$

$= -u_{n+1} + u_n + u_{n+1}$

d'où : $u_{n+6} = u_n$.

(4) $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{1 - u_n} \,;\ n \geq 0 \end{array}\right.$

On a : $u_1 = -1$; $u_2 = \frac{1}{2}$; $u_3 = 2$.

Il semble que u soit périodique, de période 3

Prouvons-le.

On a : $u_{n+2} = \frac{1}{1 - u_{n+1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - u_n}}$

$= \frac{1 - u_n}{-u_n}$

$u_{n+3} = \frac{1}{1 + \frac{1 - u_n}{u_n}} = u_n$

d'où $u_{n+3} = u_n$

◆ Exercice 6 page 187

$v_n = \frac{\ln 1}{1^2} + \frac{\ln 2}{2^2} + \ldots + \frac{\ln n}{n^2}$; $n \geq 1$

1. $f : [1 \,;\, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln x - \sqrt{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(2\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 1\right) = -\infty$

$f'(x) = \frac{2\sqrt{x} - x}{2x\sqrt{x}}$

x	1	4
$f'(x)$	−	0
$f(x)$	-1	$\to 2\ln 2 - 2$

On en déduit que :

pour $k \in \mathbb{N}^*$ $\ln k \leq \sqrt{k}$

$\frac{\ln k}{k^2} \leq \frac{1}{k\sqrt{k}}$ (1)

2. On a : $\dfrac{1}{\sqrt{k-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{k}} = \dfrac{1}{k\sqrt{k} + k\sqrt{k-1} - \sqrt{k}}$

$k\sqrt{k-1} - \sqrt{k} \leq k\sqrt{k-1} \leq k\sqrt{k}$

$k\sqrt{k} + k\sqrt{k-1} - \sqrt{k} \leq 2k\sqrt{k}$

donc : $\dfrac{1}{k\sqrt{k} + k\sqrt{k-1} - \sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{2k\sqrt{k}}$

$$\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{2k\sqrt{k}} \quad (2)$$

3. On déduit de (1) et de (2) :

$$v_n \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} ; \quad n \geq 1$$

4. $\lim v_n \leq 2$

v est une suite croissante, majorée par 2, donc convergente.

♦ Exercice 7 page 187

$\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_{n+1} = \dfrac{-7u_n - 8}{2u_n + 1} ; \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

2. $f(x) = \dfrac{-7x-8}{2x-1}$; $f'(x) = \dfrac{9}{(2x-1)^2}$

On vérifie que u est croissante et majorée par -2 donc u est convergente.

Sa limite est solution de l'équation :

$\dfrac{-7x-8}{2x+1} = x$

$x = -2$

Donc $\lim u_n = -2$.

♦ Exercice 8 page 187

$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n} ; \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

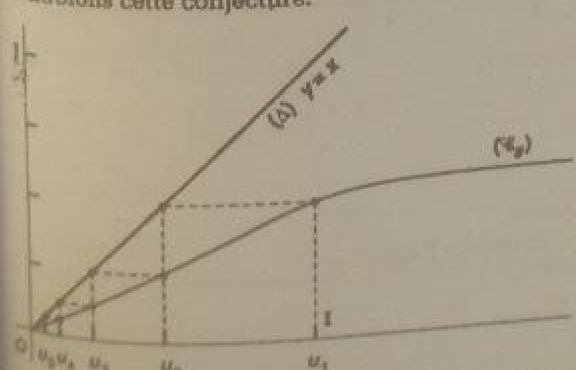
1. Étude graphique de la suite u.

On considère la fonction

$g : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$; $g'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

D'après le graphique, la suite u semble décroissante et minorée par 0.

Contrôlons cette conjecture.



Étude de la convergence

$g(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{x}{1+x} = x$

$x = 0$

donc u converge vers 0.

Étude du sens de variation de u

• Démontrer par récurrence que pour tout n, $u_n \geq 0$.

• On a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{u_n^2}{1+u_n} < 0$

donc la suite u est décroissante.

2. $u_2 = \dfrac{1}{2}$; $u_3 = \dfrac{1}{3}$; $u_4 = \dfrac{1}{4}$; $u_5 = \dfrac{1}{5}$; $u_6 = \dfrac{1}{6}$.

Conjecture : $u_n = \dfrac{1}{n}$

3. Démontrer par récurrence que pour tout n, $u_n = \dfrac{1}{n}$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

♦ Exercices 9 et 10 page 187

• u étant croissante, si u diverge alors elle n'est pas majorée.

Donc, pour tout N, il existe n, entier naturel tel que $u_n > N$.

• u étant décroissante, si v diverge alors elle n'est pas minorée.

Donc, pour tout N', il existe n, entier naturel, tel que $u_n < N'$.

♦ Exercice 11 page 188

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}, \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. Voir manuel élève page 176.

2. On vérifie par une démonstration par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3. Croissance de u.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0$

4. Divergence de u.

On considère l'équation

$$g(x) = 0$$
$$x + \frac{1}{x} = 0$$
$$\frac{1}{x} = 0$$

puisque x est positive, cette équation n'admet pas de solution ; donc u est divergente.

♦ Exercice 12 page 188

(1) $u_n = 2n - \sqrt{4n^2 + 1}$

on a : $u_n = \dfrac{-1}{2n + \sqrt{4n^2+1}}$

d'où $\lim u_n = 0$

(2) $u_n = \ln n + \sin n\ ;\ n \geqslant 1$

on a : $-1 + \ln n \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln n$

on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$

d'où : $\lim u_n = +\infty$

(3) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\ ;\ n \geqslant 1$

$= 2n \ln\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)\ ;\ n \geqslant 1$

$$\lim u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}}$$

$$= \lim_{X \to 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$$

(4) $u_n = \dfrac{e^{4n+4}}{4n}\ ;\ n \geqslant 1$

$= e^4 \times \dfrac{e^{4n}}{4n}\ ;\ n \geqslant 1$

$$\lim u_n = e^4 \times \lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$$

(5) $u_n = \dfrac{n^3}{e^{n^2} - 1}\ ;\ n \geqslant 4$

$$= \frac{e^{3 \ln n}}{e^{n^2} - 1} = \frac{1}{e^{n^2 - 3\ln n} - \frac{1}{n^3}}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 - 3 \ln n) = +\infty\ ;\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$

d'où $\lim u_n = 0$

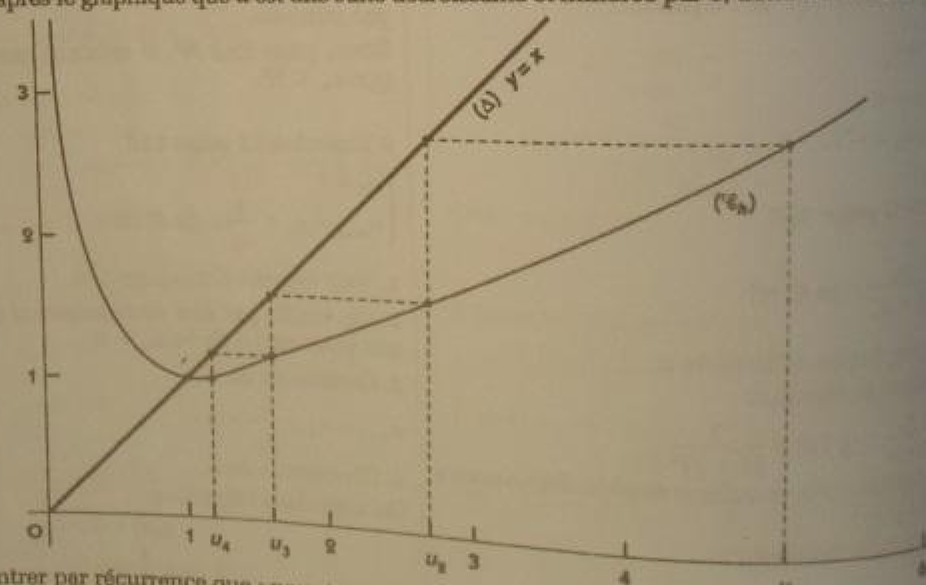
♦ Exercice 13 page 188

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n^2}{2u_n}\ ;\ [n \in \mathbb{N}] \end{cases}$$

1. Étude graphique de la suite u.

On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1 + x^2}{2x}\ ;\ h'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2}$

On voit, d'après le graphique que u est une suite décroissante et minorée par 1, donc u semble converger.



2. Démontrer par récurrence que : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 1$.

3. Démontrer que u est décroissante

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{2u_n} < 0$$

donc u est décroissante.

4. u est décroissante et minorée donc elle est convergente.

f étant continue sur $[1\ ;+\infty[$, la limite ℓ de u est la solution de l'équation :

$$g(x) = x$$

$$\frac{1 + x^2}{2x} = x$$

d'où $\ell = 1$.

◆ **Exercice 14 page 188 (voir 13)**

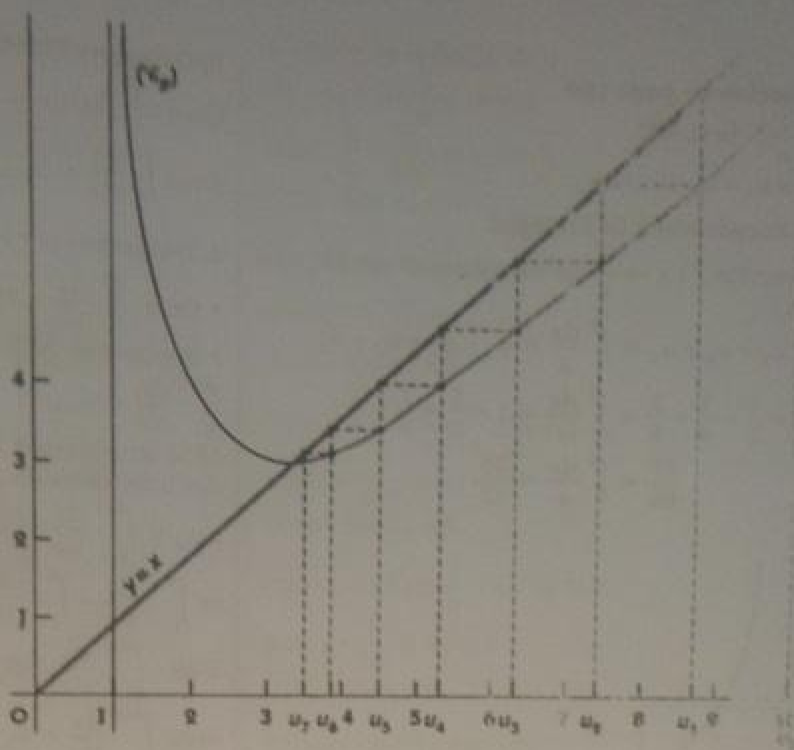
$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - 3u_n + 6}{u_n - 1}\ ; \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Étude graphique

$f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$;

$f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$

d'après le graphique, u semble décroissante, minorée par 3 et convergente vers 3.



2. Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 3$.

3. Démontrer que u est décroissante.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(3 - u_n)}{u_n - 1} \leq 0$

(car $u_n - 1 \geq 2$)

donc u est décroissante.

4. Par conséquent u est convergente

posons $\ell = \lim u$

f étant continue sur $]1\ ; +\infty[$ ℓ est la solution de l'équation

$$f(x) = x$$
$$\frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = x$$
$$x = 3$$

donc $\lim u = 3$.

◆ **Exercice 15 page 188 (voir 13)**

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 3}\ ; \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Étude graphique

$f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 3}$; $f'(x) = \dfrac{5}{(x+3)^2}$

D'après le graphique, u semble majorée et convergente.

2. On démontre par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

3. Sens de variation de u.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{5(u_n - u_{n-1})}{(u_n + 3)(u_{n-1} + 3)}$

$\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} = \dfrac{5}{(u_n + 3)(u_{n-1} + 3)} > 0$

on a : $u_1 - u_0 > 0$

ainsi on en déduit que :

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

u est croissante.

4. Justifier par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n < 2$.

5. Convergence de u.

On déduit de l'étude précédente que la suite u est convergente.

Posons $\ell = \lim u$

f est continue

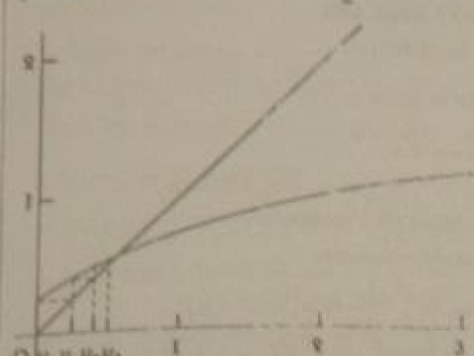
ℓ est la solution de l'équation

$$f(x) = x$$

(E) $\dfrac{2x + 1}{x + 3} = x$

(E) $\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ ou $\ell = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$

puisque $\ell > 0$, on a : $\ell = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$



♦ Exercice 16 page 188

$u_n = \frac{1}{n}$, $[n \in \mathbb{N}^*]$

$S_{1,p} = u_1 + u_2 + \dots + u_p$

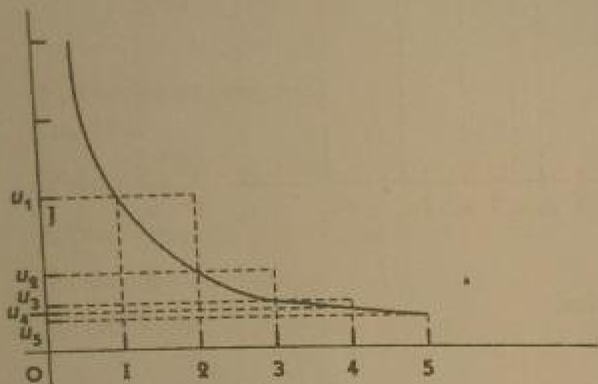
1. *a)* Encadrement de l'intégral

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc :

$$u_2 + u_3 + u_4 + u_5 \leqslant \int_1^5 \frac{dx}{x} \leqslant u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \leqslant \int_1^5 \frac{dx}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{77}{60} \leqslant \int_1^5 \frac{dx}{x} \leqslant \frac{25}{12}$$



Comparons l'intégrale et $S_{1,4}$

$S_{1,4} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$

donc $\int_1^5 \frac{dx}{x} < S_{1,4}$

2. Démontrer par récurrence que $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < S_{1,n}$

Remarquer que :

$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2 < S_{1,1} = 1$

3. Remarquer que $\int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$

Calcul de $\ln S_{1,n}$

on a : $\lim \ln(n+1) = +\infty$

d'où : $\lim S_{1,n} = +\infty$

donc : $\lim \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$

♦ Exercice 17 page 188

$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $[n \in \mathbb{N}^*]$

1. Limite de la suite u

$\lim u = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $S_{1,p} = u_1 + u_2 + \dots + u_p$

a) Encadrement de l'intégrale

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante

$$u_2 + \dots + u_5 \leqslant \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x}} \leqslant u_1 + \dots + u_4$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} \leqslant \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x}} \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$$

b) Comparer l'intégrale à $S_{1,4}$

On a : $\int_1^5 f(x)\,dx < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} = S_{1,4}$

donc $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x}} < S_{1,4}$

3. Démontrer par récurrence que $\int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} < S_{1,n}$

- On a : $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{2} - 1) < S_{1,1} = 1$.
- Supposons qu'il existe k de $\mathbb{N}$ tel que :

$\int_1^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} < S_{1,k}$

on a en utilisant la méthode des rectangles sur des intervalles d'amplitude 1 :

$u_{k+2} < \int_{k+1}^{k+2} \frac{dx}{\sqrt{x}} < u_{k+1}$

or $\int_1^{k+2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_{k+1}^{k+2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

d'où : $\int_1^{k+2} \frac{dx}{\sqrt{x}} < S_{1,k} + u_{k+1}$

donc $\int_1^{k+2} \frac{dx}{\sqrt{x}} < S_{1,k+1}$

pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} < S_{1,n}$

4. $v_n = \int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; $[n \in \mathbb{N}^*]$

a) Expression de v_n en fonction de u_n

$$v_n = 2(\sqrt{n+1} - 1) = 2\left(\frac{1}{u_{n+1}} - 1\right)$$

b) Limite de la suite v

$\lim v = 2 \lim \left(\frac{1}{u_{n+1}} - 1\right) = +\infty$

c) Limite de la suite $(S_{1,n})$

On a : $v_n = \int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} < S_{1,n}$ et $\lim v_n = +\infty$

donc : $\lim S_{1,n} = +\infty$

♦ Exercice 18 page 188

(1) $u_n = \frac{3^n + n^3}{5^n + 7}$; $n \geqslant 0$

$$u_n = \frac{1 + \frac{n^3}{3^n}}{1 + \frac{7}{5^n}} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

or $\lim \frac{n^3}{3^n} = 0$; $\lim \frac{7}{5^n} = 0$; $\lim \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$

donc : $\lim u_n = 0$

(2) $u_n = \frac{5^n + 4n}{3^n + 2} = \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{1 + \frac{4n}{5^n}}{1 + \frac{2}{3^n}}$

$\lim u_n = +\infty$

(3) $u_n = \frac{(\ln n)^{10}}{n^{0.1}}$; $n \geqslant 1$

$\lim u_n = \lim \left(\frac{\ln n}{n^{0.01}}\right)^{10} = 0$

(4) $u_n = \dfrac{5^n + (\ln)^{50}}{7^{3n} + n^{1000}}$; $n \geqslant 1$

$$\lim u_n = \lim \frac{1 + \left(\dfrac{\ln n}{5^{n/50}}\right)^{50}}{1 + \dfrac{n^{1000}}{7^{3n}}} \times \left(\frac{5}{7^3}\right)^n = 0$$

(5) $u_n = \dfrac{10^{2n} + (2n)^{10}}{6^{6n} + (2n)^{1000}}$

$$\lim u_n = \lim \frac{7 + \dfrac{(2n)^{10}}{10^{2n}}}{1 + \dfrac{(2n)^{1000}}{6^{6n}}} \times \left(\frac{10^2}{6^6}\right)^n = 0$$

(6) $u_n = \dfrac{3n^{1/3}}{n^{7/3}} \dfrac{+ 3^n}{+ 5^n}$

$$\lim u_n = \lim \frac{1 + \dfrac{3n^{1/3}}{3^n}}{1 + \dfrac{n^{7/3}}{5^n}} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$$

(7) $u_n = 2^n - n \ln n$; $n \geqslant 1$

$\lim u_n = \lim 2^n \left(1 - \dfrac{n^2}{2^n} \times \dfrac{\ln n}{n}\right) = +\infty$

♦ Exercice 19 page 189

1. Sur $]0 ; +\infty[$ f et g sont définies par

$f(x) = \sin x - x$; $g(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$

Fonction f sur $]0 ; +\infty[$

$f'(x) = \cos x - 1 \leqslant 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	0	↘

donc sur $]0 ; +\infty[$ $f(x) \leqslant 0$

$\sin x \leqslant x$ (1)

Fonction g sur $]0 ; +\infty[$

$g'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$

$g''(x) = -(\sin x - x) = -f(x)$

d'où $g''(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$

g' est croissante sur $]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0} g'(x) = 0$

$g'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$
$g(x)$	0	↗

donc sur $]0 ; +\infty[$ $g(x) \geqslant 0$

$\sin \geqslant x - \dfrac{x^3}{6}$ (2)

d'où : $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$

2. Étude de la limite de u

(1) $u_n = \sin \dfrac{1}{n}$; $n \geqslant 1$

d'où : $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{6n^3} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$

donc : $\lim u_n = 0$

(2) $u_n = n \sin \dfrac{1}{n}$; $n \geqslant 1$

d'où : $1 - \dfrac{1}{6n^2} \leqslant u_n \leqslant 1$

donc : $\lim u_n = 1$

(3) $u_n = \sin \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}$; $n \geqslant 1$

d'où : $-\dfrac{1}{6n^3} \leqslant u_n \leqslant 0$

donc : $\lim u_n = 0$

(4) $u_n = n^2 \sin \dfrac{1}{n} - n$; $n \geqslant 1$

d'où : $-\dfrac{1}{6n} \leqslant u_n \leqslant 0$

donc $\lim u_n = 0$

♦ Exercice 20 page 189

$u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; $(n \in \mathbb{N}^*)$

1. Justifier que pour tout k de $\mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\sqrt{k+1} \geqslant \sqrt{k}$

$$\sqrt{k+1} + \sqrt{k} \geqslant 2\sqrt{k}$$

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

2. En déduire : $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n$

$\sqrt{2} - \sqrt{1} \leqslant \dfrac{1}{2}$

$\sqrt{3} - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

...

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

$\sqrt{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$2(\sqrt{n+1} - 1) \leqslant u_n$

3. Étude de $\lim u_n$

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n+1} - 1) = +\infty$

donc $\lim u_n = +\infty$

♦ Exercice 21 page 189

$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; $n \in \mathbb{N}^*$

1. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$n^2 + 1 \leqslant n^2 + k \leqslant n^2 + n$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Or pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \quad u_n \quad \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$

d'où $\lim u_n = 1$

♦ Exercice 22 page 189

u suite arithmétique de raison r

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$, $[n \geqslant 1]$

1. $u_0 = 2$; $r = 6$; $n = 30$
$u_{n-1} = 176$; $S_n = 2\,670$

2. $n = 0$; $u_{n-1} = 62$; $r = 5$
$u_0 = -33$; $S_n = 290$

3. $u_0 = 7$; $n = 95$; $u_{n-1} = -181$
$r = -2$; $S_n = -8\,265$

4. $r = \sqrt{3}$; $n = 10$; $S_n = 10\sqrt{2} + 45\sqrt{3}$
$u_0 = \sqrt{2}$; $u_{n-1} = \sqrt{2} + 9\sqrt{3}$

5. $n = 28$; $u_{n-1} = \dfrac{19}{2}$; $S_n = 140$
$u_0 = \dfrac{1}{2}$; $r = \dfrac{1}{3}$

6. $u_0 = -3$; $u_{n-1} = 69$; $S_n = 330$
$n = 10$; $r = 8$

7. $u_0 = 35$; $r = 13$; $S_n = 1\,100$
$n = 11$; $u_{n-1} = 165$

8. $u_{n-1} = 53$; $r = -2$; $S_n = -585$
$n = 39$; $u_0 = 23$ ou $n = 15$; $u_0 = -25$

♦ Exercice 23 page 189

1. $u \begin{cases} u_0 = \dfrac{5}{4} \\ u_{n-1} = \dfrac{1}{3} u_n - n - \dfrac{4}{3} ; \quad [n \geqslant 1] \end{cases}$

v $[v_n = u_n + na + b$; $[(a, b) \in \mathbb{R}^2]$

Déterminer a et b

$$\begin{aligned} v_{n-1} &= u_{n-1} + (n-1)a + b \\ &= \frac{1}{3} u_n - n - \frac{4}{3} + (n-1)a + b \\ &= \frac{1}{3}(v_n - 3n + 2an - 4 - 3a + 2b) \end{aligned}$$

$v_n = 3v_{n-1} + (3 - 2a)n + 4 - 3a + 2b$

v est une suite géométrique si et seulement si, pour tout n,

$$(3 - 2a)n + 4 - 3a + 2b = 0$$

c'est-à-dire : $\begin{cases} 3 - 2a = 0 \\ 4 - 3a + 2b = 0 \end{cases}$

d'où : $a = \dfrac{3}{2}$; $b = \dfrac{17}{4}$

v_n et u_n en fonction de n.

$v_0 = u_0 + b = \dfrac{11}{2}$

v est une suite géométrique de raison 3, de premier terme $\dfrac{11}{2}$.

Donc : $v_n = \dfrac{11}{2} \times 3^n$

on a : $u_n = v_n - na - b$

donc : $u_n = \dfrac{11}{2} 3^n - \dfrac{3}{2} n - \dfrac{17}{4}$

2. $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$; $[n \in \mathbb{N}]$
$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$; $[n \in \mathbb{N}]$

On obtient :

$S_n = \dfrac{11}{4}(3^{n+1} - 1)$

$T_n = \dfrac{11}{4}(3^{n+1} - 1) - (n+1)\left(\dfrac{3}{4} n + \dfrac{17}{4}\right)$

♦ Exercice 24 page 189

$u_1 = 12$; $u_{n-1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$; $[n \in \mathbb{N}^*]$

$v_1 = 1$; $v_{n-1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$; $[n \in \mathbb{N}^*]$

1. On pose $w_n = v_n - u_n$; $[n \in \mathbb{N}^*]$

$w_{n-1} = v_{n-1} - u_{n-1} = \dfrac{1}{12}(v_n - u_n)$

d'où : $w_n = 12 w_{n-1}$; $[n \in \mathbb{N}^*]$
$\quad w_1 = -11$

w est une suite géométrique de raison 12 et de premier terme -11.

D'où : $w_n = -11 \times 12^{n-1}$; $[n \in \mathbb{N}^*]$

2. Sens de variation des suites u et v

• $u_n = v_n - w_n = \dfrac{3}{2} u_{n-1} - \dfrac{1}{2} u_n + 11 \times 12^{n-1}$

$u_n - u_{n-1} = \dfrac{22}{3} \times 12^{n-1} > 0$

donc u est croissante.

• $v_n = u_n + w_n = 4v_{n-1} - 3v_n - 11 \times 12^{n-1}$

$v_n - v_{n-1} = -\dfrac{11}{4} \times 12^{n-1} < 0$

donc v est décroissante.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$v_n - u_n = w_n \leqslant 0$

Donc $u_n \geqslant v_n$

$u_1 = 12 > v_1 = 1$

Donc $u_n \geqslant u_1 > v_1 \geqslant v_n$

4. $t_n = 3u_n + 8v_n$

$t_{n+1} = t_n$

La suite t est constante

♦ **Exercice 25 page 189**

1. $v \begin{cases} v_1 = 6 \\ 5v_{n+1} = v_n + 16\ ; \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

a) **Démontrer que v est minorée par 4**

On a : $v_1 = 6 \geqslant 4$

$$v_{k+1} = \frac{1}{5}(v_k + 16)$$

Supposons $v_k \geqslant 4$

d'où : $v_{k+1} \geqslant 4$

donc, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n \geqslant 4$

b) **Démontrer que v est décroissante**

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{5}v_n + \frac{16}{5} - v_n = \frac{4}{5}(4 - v_n)$$

$$\leqslant 0 \text{ car } v_n \geqslant 4$$

v est une suite décroissante.

2. $w_n = v_n - \alpha\ ; \quad (n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R})$

a) **Déterminer α pour que w soit une suite géométrique**

$$w_{n+1} = \frac{1}{5}(w_n + 16 - 4\alpha)$$

w est une suite géométrique si et seulement si :

$16 - 4\alpha = 0$

d'où $\alpha = 4\ ; \quad w_1 = 2$

donc, w est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme 2.

b) On pose $\alpha = 4$

$w_n = 2\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$v_n = 2\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 4$

$S_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n = \frac{5}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$

$T_n = S_n + 4n$

♦ **Exercice 26 page 190**

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{2u_n + 5}\ ; \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

2e méthode

On pose : $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1}\ ; \quad (n \in \mathbb{N})$

1. On démontre que v est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $\frac{3}{2}$.

Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

2. On obtient : $u_n = \dfrac{v_n - 1}{2 - v_n}$

$$u_n = \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{2 - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$\lim u_n = -\frac{1}{2}$

u converge vers $-\frac{1}{2}$.

♦ **Exercice 27 page 190**

$u_n = e^{2n+1}\ ; \quad (n \in \mathbb{N})$

1. $u_{n+1} = e^{2n+3} = e^2 \times u_n$

$u_0 = e$

u est une suite géométrique de raison e^2 et de premier terme e.

2. $S_{0,n} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

a) $S_{0,n} = \dfrac{e^{2n+3} - e}{e^2 - 1}$

b) $\lim (e^{2n+3} - e) = +\infty\ ; \dfrac{1}{e^2 - 1} > 0$

donc $\lim S_{0,n} = +\infty$

c) Supposons $S_{0,n} \geqslant 10^6$

d'où : $e^{2n+3} \geqslant 10^6(e^2 - 1) + e$

$$2n+3 \geqslant \ln[10^6(e^2 - 1) + e]$$

$$n \geqslant 6{,}33$$

donc la valeur minimale de n est 7.

3. $v_n = \ln(u_n)\ ; \quad (n \in \mathbb{N})$

a) $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

on a : $u_n = e^{2n+1}$

d'où $v_n = \ln(e^{2n+1}) = 2n + 1$

$v_{n+1} = v_n + 2\ ; \quad v_0 = 1$

donc $S = (n+1)^2$

b) $P = u_0\, u_1\, u_2 \ldots u_n\ ; \quad (n \in \mathbb{N})$

d'où : $\ln(P) = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

$$= (n+1)^2$$

$$P = e^{(n+1)^2}$$

♦ **Exercice 28 page 190**

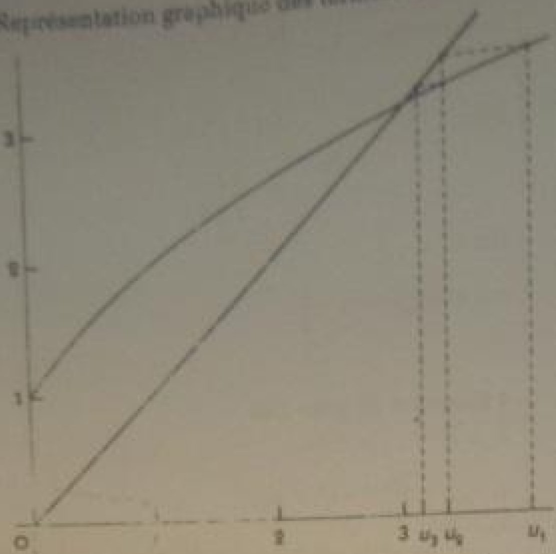
$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3}\ ; \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

g est la fonction de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \frac{5x + 3}{x + 3}$$

$$g'(x) = \frac{12}{(x+3)^2} > 0$$

Représentation graphique des termes de u.



Conjecture graphique : la suite u est décroissante et minorée par 3, donc u converge vers 3.

2. $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$; $(n \in \mathbb{N}^*)$

a) On a : $u_1 = 5 \neq -1$

Supposons $u_n \neq -1$

$6u_n \neq -6$

$5u_n \neq -6 - u_n$

$5u_n + 3 \neq -u_n - 3$

$\frac{5u_n + 3}{u_n + 3} \neq -1$

Par suite, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \neq -1$.

b) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{3} v_n$

$v_1 = \frac{1}{5}$

v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\frac{1}{5}$.

c) $v_n = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$u_n = \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3}{1 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

d) $\lim u_n = 3$

♦ **Exercice 29 page 190**

$$\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{n+2}{2\sqrt{2}} \ ; \ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. $u_1 = \frac{4 + 9\sqrt{2}}{12}$; $u_2 = \frac{4 + 33\sqrt{2}}{24}$

2. $v_n = u_n\sqrt{2} - n$; $(n \in \mathbb{N})$

On a : $v_{n+1} = \left(\frac{1}{2} u_n + \frac{n+2}{2\sqrt{2}}\right)\sqrt{2} - n - 1$

d'où : $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$; $v_0 = u_0\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

donc v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$,

premier terme $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

3. $v_n = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$; $(n \in \mathbb{N})$

$u_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{2}}{2} n$; $(n \in \mathbb{N})$

$\lim u_n = +\infty$

4. $S_{0,n} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{2}}{2} k$$

$$= \frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + \frac{\sqrt{2}}{4} n(n+1)$$

$\lim S_{0,n} = +\infty$

♦ **Exercice 30 page 190**

(I) est la suite définie par :

$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$; $(n \in \mathbb{N})$

1. On pose : $u_1 = e^{-x}$; $v_1' = \sin x$

on a : $u_1' = -e^{-x}$; $v_1 = -\cos x$

d'où : $I_n = [-e^{-x} \cos x]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \cos x$

De même on obtient

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \cos x \, dx = [e^{-x} \sin x]_{n\pi}^{(n+1)\pi} + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x$$

d'où : $I_n = [-e^{-x} (\cos x + \sin x)]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - I_n$

or : $\cos n\pi = (-1)^n$; $\cos (n+1)\pi = -(-1)^n$

donc : $I_n = \frac{1}{2} (-e^{-\pi})^n (e^{-\pi} + 1)$

2. $I_{n+1} = -e^{-\pi} I_n$; $I_0 = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}$

(I) est la suite géométrique de raison $-e^{-\pi}$,

premier terme $\frac{e^{-\pi} + 1}{2}$.

3. $S_{0,n} = I_0 + I_1 + \ldots + I_n$

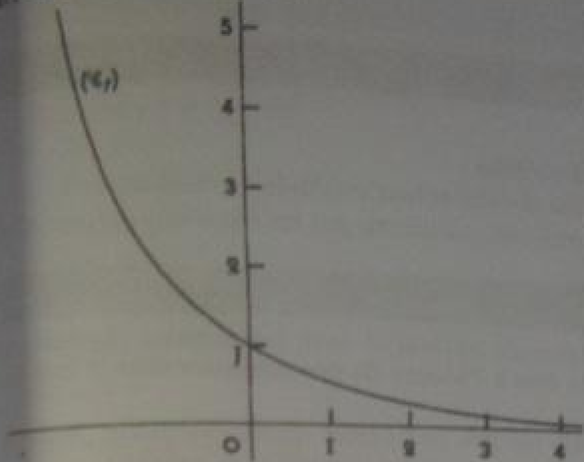
$$S_{0,n} = \frac{e^{-\pi} + 1}{2} \times \frac{1 - (-e^{-\pi})^{n+1}}{1 - (-e^{-\pi})}$$

$$= \frac{1}{2} [1 - (-e^{-\pi})^{n+1}]$$

$\lim S_{0,n} = \frac{1}{2}$

Exercice 31 page 190

1. Fonction f définie par $f(x) = e^{-x}$



2. $u_n = \int_{n-1}^{n} 2^{-x}\,dx$; $[n \in \mathbb{N}^*]$

on a : $u_n = \dfrac{2^{-n}}{\ln 2}$

on obtient : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n$; $u_1 = \dfrac{1}{\ln 4}$

donc u est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $\dfrac{1}{\ln 4}$.

$\lim u_n = \lim \dfrac{1}{\ln 2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

3. $S_{1,n} = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

a) $S_{1,n} = \dfrac{1}{2 \ln 2} \times \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{\ln 2}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$

b) $S_{1,n} = \int_0^n 2^{-x}\,dx = \dfrac{1}{\ln 2}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$

4. $\lim S_{1,n} = \dfrac{1}{\ln 2}$

$\lim S_{1,n}$ est l'aire délimitée par la courbe ($\mathscr{C}_f$) les droites d'équations : $x = 0$ et $y = 0$.

9. Équations différentielles

(pages 191 à 204 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :
- introduire succintement la notion d'équation différentielle ;
- présenter des cas simples d'équations différentielles et donner leur méthode de résolution ;
- présenter quelques exemples de modélisation de problèmes concrets par les équations différentielles

Commentaires

La notion d'équations différentielle participe à l'inter-disciplinarité avec les sciences physiques ; encore, le professeur de mathématiques devra donc être à l'écoute de ses collègues dans la formation de ses élèves.

L'introduction de la notion d'équation différentielle ne fera pas l'objet d'une évaluation. Seules les méthodes de résolution dans les cas simples et spécifiques seront des compétences exigibles.

L'apprentissage devra nécessairement déboucher sur la modélisation de quelques problèmes concrets simples, par des équations différentielles.

Savoir et savoir-faire

savoir	savoir-faire
Généralités • Notion d'équations différentielles.	• Reconnaître une équation différentielle. • Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
• Équations de types : $y' = f(x)$ et $y'' = f(x)$.	• Résoudre des équations différentielles de type $y' = f(x)$ et $y'' = f(x)$. • Démonter le sens de variation d'une suite.
Équations du type : $f' + af = 0$ • Résolution : – solution générale : $x \mapsto ke^{-ax}$; – solution vérifiant une condition initiale.	• Résoudre une équation différentielle du type $f' + af = 0$. • Déterminer la solution d'une équation différentielle vérifiant une condition initiale.
Équations du type : $f'' + af' + bf = 0$ • Résolution : – équation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$; – solution générale suivant le signe du discriminant de l'équation caractéristique ; – solution vérifiant une condition initiale.	• Résoudre une équation différentielle du type $f'' + af' + bf = 0$. • Déterminer la solution d'une équation différentielle vérifiant une condition initiale.

Exercices d'application directe

♦ **Exercice 1.a page 194**

(1) $f(x) = k\,e^{-2x}$
(2) $f(x) = k\,e^{3x}$
(3) $f(x) = k\,e^{\frac{3}{2}x}$
(4) $f(x) = k\,e^{x\ln 2}$
(5) $f(x) = k\,e^{-\frac{3}{4}x}$
(6) $f(x) = k\,e^{\frac{1}{6}x}$
avec : $k \in \mathbb{R}$

♦ **Exercice 1.b page 194**

(1) $f(x) = e^{3x}$
(2) $f(x) = 2e^{3(1-x)}$
(3) $f(x) = e^{\frac{3}{4}(1+x)}$

♦ **Exercice 1.c page 198**

(1) $f(x) = A\,e^{-\frac{8}{3}x} + B\,e^{\frac{8}{3}x}$
(2) $f(x) = A\,e^{x} + Be^{-5x}$
(3) $f(x) = A\,e^{-\frac{1}{2}x} + B\,e^{3x}$
(4) $f(x) = (Ax + B)e^{2x}$
(5) $f(x) = (Ax + B)e^{3x}$
(6) $f(x) = (Ax + B)e^{-\frac{1}{2}x}$
(7) $f(x) = \left(A\cos\frac{1}{3}x + B\sin\frac{1}{3}x\right)e^{\frac{1}{3}x}$
(8) $f(x) = \left(A\cos\frac{\sqrt{23}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{23}}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x}$
avec : $A \in \mathbb{R}$; $B \in \mathbb{R}$

♦ **Exercice 1.d page 198**

(1) $f(x) = \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x$
(2) $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{8}\cos\frac{8}{3}x - \frac{1}{8}\sin\frac{8}{3}x$
(3) $f(x) = (\cos x + \sin x)e^{-2x}$
(4) $f(x) = 5e^{\frac{1}{2}}(x-1)e^{-\frac{1}{2}x}$

Exercices d'apprentissage

♦ **Exercice 1 page 203**

(1) $f(x) = k\,e^{-3x}$
(2) $f(x) = k\,e^{\frac{3}{2}x}$
(3) $f(x) = k\,e^{-2x}$
(4) $f(x) = k\,e^{4x}$
(5) $f(x) = k\,e^{-\sqrt{2}x}$
(6) $f(x) = k\,e^{-\frac{1}{2}x}$
avec : $k \in \mathbb{R}$

♦ **Exercice 2 page 203**

(1) $f(x) = e^{3(1-x)}$
(2) $f(x) = 2\,e^{-6-3x}$
(3) $f(x) = -2\,e^{-6+2x}$
(4) $f(x) = 2\,e^{8-2x}$
(5) $f(x) = e^{-\frac{1}{5}x-1}$
(6) $f(x) = -e^{\frac{2}{5}(-1+x)}$

♦ **Exercice 3 page 203**

(1) $f(x) = A\,e^{-x} + Be^{2x}$
(2) $f(x) = A\,e^{\frac{-3-\sqrt{21}}{6}x} + B\,e^{\frac{-3+\sqrt{21}}{6}x}$
(3) $f(x) = A\,e^{x} + Be^{-x}$
(4) $f(x) = A\,e^{2(1-\sqrt{2})x} + B\,e^{2(1+\sqrt{2})x}$
(5) $f(x) = (Ax + B)e^{3x}$
(6) $f(x) = A\cos\sqrt{\frac{3}{2}}x + B\sin\sqrt{\frac{3}{2}}x$
avec : $A \in \mathbb{R}$; $B \in \mathbb{R}$

♦ **Exercice 4 page 203**

(1) $f(x) = -e^{-2x} + 2\,e^{\frac{1}{2}x}$
(2) $f(x) = -(x+1)\,e^{-x}$
(3) $f(x) = (\cos 2x + \sin 2x)e^{x}$
(4) $f(x) = \left(\cos\frac{2\sqrt{2}}{3}x - \frac{\sqrt{2}}{4}\sin\frac{2\sqrt{2}}{3}x\right)e^{\frac{1}{3}x}$
(5) $f(x) = \left(\cos\frac{2\sqrt{5}}{3}x - \frac{2\sqrt{5}}{5}\sin\frac{2\sqrt{5}}{3}x\right)e^{\frac{1}{3}x}$

♦ **Exercice 5 page 203**

(1) $f(x) = \left(2\cos\frac{\pi}{5} - 5\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{5}\right)\cos\frac{1}{5}x + \left(5\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{5} + 2\sin\frac{\pi}{5}\right)\sin\frac{1}{5}x$
(2) $f(x) = -2\cos x + 3\sin x$

♦ **Exercice 6 page 203**

(E) $2g'(x) + g(x) = 0$
On a : $g'(-2) = \frac{3}{5}$
On obtient : $g(x) = -\frac{6}{5}e^{-1} \times e^{-\frac{1}{2}x}$

♦ **Exercice 7 page 203**

On a : $f'(x) + \frac{1}{3}f(x) = 0$

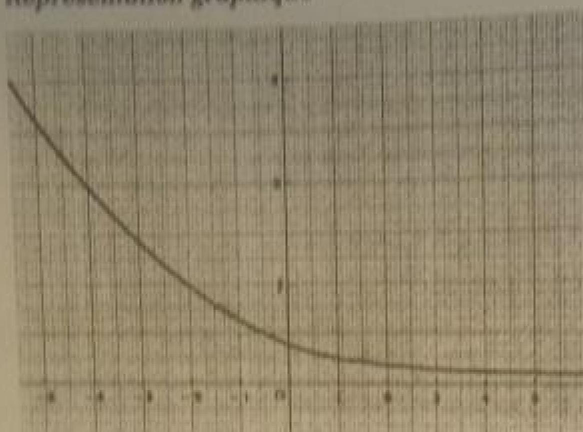
$f(-2) = 1$

On obtient : $f(x) = e^{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{1}{3}x}$

Étude de f. $f'(x) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}}e^{-\frac{1}{3}x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Représentation graphique



♦ **Exercice 8 page 203**

• $f(x) = 3\,e^{-\frac{3}{2}x}$

Équation différentielle du 1[er] ordre, dont f est solution est de la forme : $f' + af = 0$; $a \in \mathbb{R}^*$

on obtient : $f' + \frac{3}{2}f = 0$

• (E) $f' + (\ln 2)f = 0$

Solution de (E) qui prend la valeur 4 en 1.

On a : $f(x) = k\,e^{-(\ln 2)x}$; $f(1) = 4$

d'où : $f(x) = 8e^{-(\ln 2)x}$

♦ **Exercice 9 page 203**

$f(x) = e^{-\frac{1}{3}}e^{\frac{1}{3}x}$

♦ **Exercice 10 page 203**

(E) $f'' + 2f' = 0$

1. On pose $g = f'$

g est solution de : $g' + 2g = 0$

2. Solution de : $g' + 2g = 0$

$g(x) = k\,e^{-2x}$; $(k \in \mathbb{R})$

d'où $f'(x) = k\,e^{-2x}$

$f(x) = -\frac{1}{2}k\,e^{-2x} + k'$, $(k \in \mathbb{R}, k' \in \mathbb{R})$

♦ **Exercice 11 page 203**

(E) $f'' + 2f' + f = 0$

On pose : $h(x) = e^{x}\,k(x)$

1. k solution de (E) $\Leftrightarrow k'' + 2k' + k = 0$

or : $k(x) = h(x)\,e^{-x}$

$k'(x) = (h'(x) - h(x))e^{-x}$

$k''(x) = (h''(x) - 2h'(x) + h(x))e^{-x}$

$k''(x) + 2k'(x) + k(x) = h''(x)e^{-x}$

$k''(x) + 2k'(x) + k(x) = 0 \Leftrightarrow h''(x) = 0$

k solution de (E) $\Leftrightarrow h''(x) = 0$

2. $h'' = 0$

Les solutions de cette équation différentielle sont définies par : $h(x) = Ax + B$

3. Les solutions de (E) sont : $f(x) = (Ax + B)e^{-x}$

♦ **Exercice 12 page 203**

$f'' - f' + \frac{1}{4}\ f = 0$

$f(0) = 4$; $f'(2) = 0$

On obtient :

$f(x) = (-x + 4)e^{\frac{1}{2}x}$

♦ **Exercice 13 page 203**

(E) $9f'' + f = 0$

$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx = 0$; $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 3$

On obtient la forme :

$f(x) = A\cos\frac{1}{3}x + B\sin\frac{1}{3}$

avec : $\begin{cases} \frac{3}{2}A + \left(3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)B = 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}A + \frac{3}{2}B = 3 \end{cases}$

d'où : $f(x) = -\cos\frac{1}{3}x + (2 + \sqrt{3})\sin\frac{1}{3}x$

♦ **Exercice 14 page 203**

$f'' - f = 0$ (E)

$f(-x) = f(x)$; $f(0) = 1$

On obtient la forme :

$f(x) = A\,e^{-x} + B\,e^{x}$

avec : $A + B = 1$ et $A = B$

d'où : $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}$

♦ **Exercice 15 page 203**

1. (E) $16f'' + f = 0$

$f(x) = A\cos\frac{1}{4}x + B\sin\frac{1}{4}x$

2. Solution vérifiant :

$f(0) = 1$; $f(2\pi) = -\sqrt{3}$

d'où $f(x) = \cos\frac{1}{4}x - \sqrt{3}\sin\frac{1}{4}x$.

3. On obtient :

$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$

♦ **Exercice 16 page 203**

$u(x) > 0$; $\frac{u'(x)}{u(x)} = -2$; $u(0) = 10$

d'où : $u'(x) + 2u(x) = 0$

$u(x) = 10\,e^{-2x}$

♦ **Exercice 17 page 203**

1. (E) $f'' - 2f' + 5f = 0$

Les solutions de (E) sont des fonctions définies par : $f(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)\,e^{x}$; $[A \in \mathbb{R}\ ;\ B \in \mathbb{R}]$

La solution de (E) vérifiant :

$f(0) = 0\ ;\ f'(0) = 1$

est définie par : $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x\, e^{x}$

2. On pose : $F(x) = -\frac{1}{5}\left(f'(x) - 2f(x)\right)$

$F'(x) = -\frac{1}{5}\left[f''(x) - 2f'(x)\right] = -\frac{1}{5}\left[-5\,f(x)\right] = f(x)$

F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

♦ **Exercice 18 page 204**

1. (E) $f'' - f' + \frac{1}{4}f = 0$

Les solutions de (E) sont des fonctions définies par :

$f(x) = (Ax + B)e^{\frac{x}{2}}$; $[A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}]$

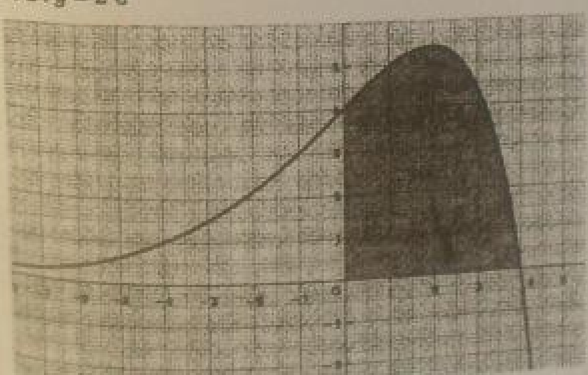
2. Pour $f(0) = 4$ et $f'(2) = 0$

on a : $f(x) = (-x + 4)\,e^{\frac{x}{2}}$.

3. *Étude de f.*

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	0 ↗	2e	↘ $-\infty$

Équation de la tangente de ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse de 2 : $y = 2$ e



4. Aire de (Δ) $\mathscr{A}$

$\mathscr{A} = \int_0^4 f(x)\,dx = 4\,e^2 - 12$

♦ **Exercice 19 page 204**

(E) $f''(x) - 4f'(x) + 3\,f(x) = 6x^2 + 5x$

1. $g(x) = ax^2 + bx + c$

g est solution de (E) si et seulement si

$3ax^2 + (3b - 8a)x + 2a - 4b + 3c = 6x^2 + 5x$

d'où : $g(x) = 2x^2 + 7x + 8$

2. On pose $F = f - g$

Supposons f solution de (E), alors :

$(F + g)''(x) - 4\,(F + g)'(x) + 3(F + g)(x) = 6x^2 + 5x$

d'où $F''(x) - 4F'(x) + 3F + g''(x) - 4g'(x) + 3g(x)$
$= 6x^2 + 5x$

donc : $F'' - 4F' + F = 0$ (E')

Réciproquement, on vérifie que si F est solution de (E'), alors f définie par : $f = F + g$ est solution de (E).

♦ **Exercice 20 page 204**

(E) $y'' + 2y' + 5y = 0$

1. On vérifie que f_1 et f_2 sont des solutions de (E), avec $f_1(x) = e^{-x}\cos x$; $f_2(x) = e^{-x}\sin 2x$

2. La solution f de (E) vérifiant :

$f(0) = 1\ ;\ f'(0) = -3$

est définie par :

$f(x) = (\cos 2x - \sin 2x)e^{-x}$

♦ **Exercice 21 page 204**

On a : $P'(t) = \frac{1{,}5}{100}P(t)$

$P(0) = P(0)\overline{M}$

d'où : $P(t) = 3{,}5\,\overline{M}\,e^{0{,}015t}$

♦ **Exercice 22 page 204**

On a : $f'(t) = -\frac{2}{100}f(t)$

$f(15) = 12$

d'où : $f(t) = 12\,e^{0{,}3}\,e^{-0{,}02t}$

♦ **Exercice 23 page 204**

A – 1. (E) $f'(t) + kf(t) = 0$

on a : $f(t) = c\,e^{-kt}$; $[c \in \mathbb{R}]$

2. Solution particulière f_1

$f_1(0) = 2\ ;\ f_1(t) = 2\,e^{-kt}$

B – Application

1. $g(t) = 2e^{-kt}$

$g'(t) = -2k\,e^{-kt} < 0$

g est strictement décroissante.

2. (Δ) : la tangente à ($\mathscr{C}_g$) au point M (0 ; 2) a pour équation :

$y = -2kx + 2$

A(T ; 0) : le point d'intersection de (Δ) et l'axe des temps.

$T = \frac{1}{k}$; $[k \in \mathbb{R}_+^*]$

3. On pose $g_1 = g(t_1)$

on a : $k = \frac{1}{t_1}\ln\frac{2}{g_1}$.

10. Nombres complexes

(pages 205 à 228 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à :

– présenter, sous différentes écritures, de nouveaux nombres : les nombres complexes ;

– mettre en place un vocabulaire spécifique et une technique de calcul de ces nombres ;

– exposer un exemple classique de calcul : la résolution d'équations.

Commentaires

La notion de nombres complexes est nouvelle pour les élèves. La construction de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes n'est pas au programme mais on pourra en faire, en introduction, une présentation historique permettant de mettre la mathématique et ses problématiques dans une perspective historique. Ce nouvel ensemble de nombres qui prolonge $\mathbb{R}$ offre un riche domaine d'activités numériques. Il permet, en particulier, de développer le champ de la résolution des équations.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Forme algébrique d'un nombre complexe • Partie réelle. • Partie imaginaire. • Module et conjugué d'un nombre complexe.	• Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe. • Déterminer le module et le conjugué d'un nombre complexe.
Opérations dans $\mathbb{C}$ • Somme, produit et quotient de deux nombres complexes. • Puissance entière d'un nombre complexe. • Formule du binôme.	• Calculer la somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes donnés sous forme algébrique. • Calculer la puissance entière d'un nombre complexe. • Calculer $(z + z')^n$ $(n \in \mathbb{N})$.
Représentation géométrique d'un nombre complexe • Affixe d'un point, d'un vecteur. • Point image, vecteur image d'un nombre complexe.	• Représenter graphiquement un nombre complexe. • Déterminer l'affixe d'un point, d'un vecteur.
Forme trigonométrique, forme exponentielle d'un nombre complexe • Argument d'un nombre complexe non nul. • Forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. • Forme exponentielle $z = re^{i\theta}$. • Module et argument du produit, du quotient de deux nombres complexes, de la puissance entière d'un nombre complexe.	• Déterminer un argument d'un nombre complexe non nul. • Calculer le produit, le quotient de deux nombres complexes donnés sous forme trigonométrique, sous forme exponentielle. • Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement. • Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et inversement.
Nombres complexes et trigonométrie • Formule de Moivre. • Formules d'Euler.	• Utiliser les formules de Moivre et d'Euler pour : – retrouver des formules de trigonométrie ; – linéariser des puissances de $\cos x$ et $\sin x$.
Équations dans $\mathbb{C}$ • Racines carrées d'un nombre complexe non nul. • Racines n^{es} de l'unité ; interprétation géométrique.	• Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique, sous forme trigonométrique

savoirs	savoir-faire
• Racines n^{es} d'un nombre complexe non nul. • Équations du second degré dans $\mathbb{C}$.	• Déterminer sous forme trigonométrique les racines n^{es} d'un nombre complexe non nul et les représenter graphiquement. • Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré ou une équation s'y ramenant.

Exercices d'application directe

♦ Exercice 1.a page 210

$(2+i)(1-i)-(3-2i)^2+(5-i)(5+i)=24+11i$

$3i(2+8i)-7(5-2i)+(7-3i)(1+5i)=-37+52i$

♦ Exercice 1.b page 210

$\dfrac{1}{3+2i}=\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}i$

$\dfrac{1}{2-i\sqrt{3}}=\dfrac{2}{7}+\dfrac{i\sqrt{3}}{7}$

$\dfrac{5+7i}{1+i}=6+i$

$\dfrac{4-3i}{i}=-3-4i$

♦ Exercice 1.c page 210

Calculons :

$(z+z')^2=z^2+2zz'+z'^2$

$(z-z')^2=z^2-2zz'+z'^2$

$(1-i)^2=-2i$

$(1+i)^7=8-8i$

Factorisons :

$z^2-z'^2=(z-z')(z+z')$

$$\begin{aligned}z^3-z'^3&=(z-z')(z^2+zz'+z'^2)\\&=(z-z')\left(z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}z'\right)\left(z+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z'\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^3+1&=(z+1)(z^2-z+1)\\&=(z+1)\left(z-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^3-1&=(z-1)(z^2+z+1)\\&=(z-1)\left(z+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

♦ Exercice 1.d page 210

$(5+i)^3=110+74i$

$(2+i)^4=-7+24i$

$(-3+2i)^3=9+46i$

$(1+i)^6=-8i$

$(1+2i)^5=41-38i$

$(1-2i)^6=117-44i$

♦ Exercice 1.e page 212

$\overline{2+4i}=2-4i$

$\overline{1-5i}=1+5i$

$\overline{2i(4-i)}=2-8i$

$\overline{(3+i)(-5i+3)}=14+12i$

$\dfrac{\overline{1}}{2+i}=\dfrac{1}{2-i}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}i$

$\left(\overline{\dfrac{3-i}{6i-2}}\right)=-\dfrac{3}{10}+\dfrac{4}{10}i$

$\left(\overline{\dfrac{-5i}{i}}\right)=-5$

$\left(\overline{\dfrac{2+i}{8-i}}\right)=\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}i$

♦ Exercice 1.f page 212

$\dfrac{1}{-5i}=\dfrac{i}{5}$

$\dfrac{2}{3i}=-\dfrac{2}{3}i$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}+5i}=\dfrac{\sqrt{2}}{27}-\dfrac{5}{27}i$

$\dfrac{3-i}{4+3i}=\dfrac{9}{25}-\dfrac{13}{25}i$

$\dfrac{1}{4-2i}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}i$

$\dfrac{2+5i}{9-4i}=-\dfrac{2}{97}+\dfrac{53}{97}i$

♦ Exercice 1.g page 212

$|2+4i|=2\sqrt{5}$

$|1-5i|=\sqrt{26}$

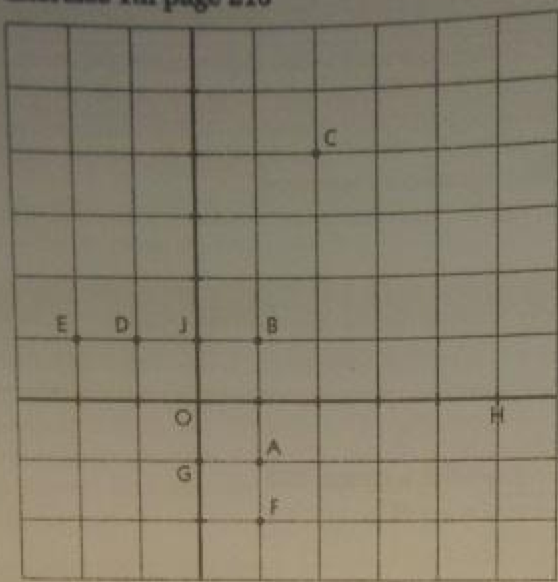
$|-7+i|=5\sqrt{2}$

$|-1-3i|=\sqrt{10}$

$|-6i|=6$

$|-8|=8$

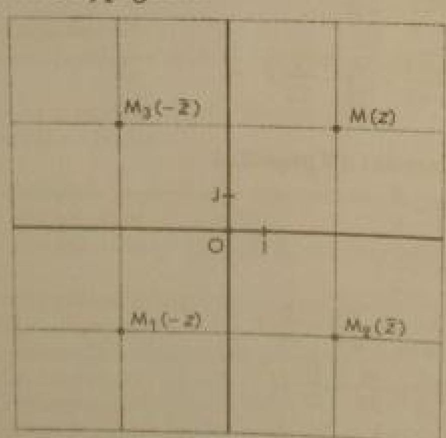
♦ **Exercice 1.h page 213**



♦ **Exercice 1.i page 213**

(1) E = [OI)
(2) E = [OI') ; I' = (− 1)
(3) E = (OJ)
(4) E = droite d'équation $y = x$

♦ **Exercice 1.j page 213**



♦ **Exercice 2.a page 214**

$\mathrm{ARG}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+$

$\mathrm{ARG}(z) = \pi \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_-$

$\mathrm{ARG}(z) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}_+$

$\mathrm{ARG}(z) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}_-$

♦ **Exercice 2.b page 214**

- $\mathrm{ARG}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+$
  $\mathrm{ARG}(\bar{z}) = 0$; $\Leftrightarrow \mathrm{ARG}(-z) = \pi$
- $\mathrm{ARG}(z) = \pi \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_-$
  $\mathrm{ARG}(\bar{z}) = \pi$; $\Leftrightarrow \mathrm{ARG}(-z) = 0$
- $\mathrm{ARG}(z) = \theta\ (\theta \neq 0\ ;\ \theta \neq \pi)$
  $\mathrm{ARG}(-z) = \pi + \theta$
  $\mathrm{ARG}(\bar{z}) = -\theta$
  $\mathrm{ARG}(-\bar{z}) = \pi - \theta$

♦ **Exercice 2.c page 217**

(1) $1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}) = (\sqrt{2} + \sqrt{6})\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(2) $\dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 - i} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(3) $-2(1 + i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\frac{-3\pi}{4}\right]$

(4) $(1 - i)e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$

♦ **Exercice 2.d page 217**

$z_1 = 5$; $|z_1| = 5$; $\mathrm{ARG}(z_1) = 0$

$$z_1 = 5\, e^{0i}$$

$z_2 = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$;

$$|z_2| = 1 \ ;\ \mathrm{ARG}(z_2) = -\frac{\pi}{3}$$

$$z_2 = e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

$z_3 = -\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$;

$$|z_3| = 1 \ ;\ \mathrm{ARG}(z_3) = \frac{4\pi}{5}$$

$$z_3 = e^{\frac{4}{5}\pi i}$$

$z_4 = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -z_2$;

$$|z_4| = 1 \ ;\ \mathrm{ARG}(z_4) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_4 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$z_5 = -2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$$|z_5| = 2 \ ;\ \mathrm{ARG}(z_5) = -\frac{\pi}{6}$$

$$z_5 = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

♦ **Exercice 2.e page 218**

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

$$\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$$

Primitives

$f(x) = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

$F(x) = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C$

$g(x) = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$

$G(x) = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C$

♦ **Exercice 2.f page 218**

$$\sin^2 3\theta \cos^2 \theta = -\frac{1}{8}\cos 8\theta - \frac{1}{4}\cos 6\theta$$
$$-\frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4}$$

$f(x) = \sin^2 3x \cos^2 x$

$$F(x) = -\frac{1}{64}\sin 8x - \frac{1}{24}\sin 6x$$
$$-\frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}x$$

♦ **Exercice 2.g page 218**

$z^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$

$\frac{1}{z^n} = e^{-in\theta} = \cos n\theta - i \sin n\theta$

$$\text{donc :} \begin{cases} \cos n\theta = \dfrac{1}{2}\left(z^n + \dfrac{1}{z^n}\right) \\ \sin n\theta = \dfrac{1}{2i}\left(z^n - \dfrac{1}{z^n}\right) \end{cases}$$

Linéarisation

$$\sin^5 \theta = \frac{1}{16}\sin 5\theta - \frac{5}{16}\sin 3\theta + \frac{5}{8}\sin \theta$$

$$\cos^5 \theta = \frac{1}{16}\cos 5\theta + \frac{5}{16}\cos 3\theta + \frac{5}{8}\cos \theta$$

♦ **Exercice 3.a page 221**

Résolution de (1) $z^4 = 1$

On pose : $z = \cos\theta + i \sin\theta$

d'où (1) $\cos 4\theta + i \sin 4\theta = \cos 0 + i \sin 0$

donc : $\theta = k \cdot \frac{2\pi}{4}$; $(k \in \mathbb{Z})$

$S = \{1 ; i ; -1 ; -i\}$.

♦ **Exercice 3.b page 221**

Résolution de (1) $z^2 = \frac{1}{z}$; $(z \neq 0)$

pour $z \neq 0$ (1) $\Leftrightarrow z^3 = 1$ (2)

(2) $\cos 3\theta + i \sin 3\theta = \cos 0 + i \sin 0$

donc : $\theta = k \cdot \frac{2\pi}{3}$; $(k \in \mathbb{Z})$

$$S = \left\{1 ; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

♦ **Exercice 3.c page 221**

Détermination des racines carrées

(1) $$z^2 = 1 + i$$

$$r^2 \cos 2\theta + i \sin 2\theta = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

donc : $r = \sqrt[4]{2}$; $\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{k2\pi}{2}$; $(k \in \mathbb{Z})$

$S = \{\sqrt[4]{2}\, e^{i\pi/8} ; \sqrt[4]{2}\, e^{-7\pi/8}\}$.

(2)
$$z^2 = -4i$$
$$\rho^2 e^{i2\theta} = 4e^{-i\pi/2}$$
$$z_0 = 2e^{-i\pi/4} = \sqrt{2}(1 - i)$$
$$z_1 = 2e^{3i\pi/4} = \sqrt{2}(-1 + i)$$

(3)
$$z^2 = 1 - i\sqrt{3}$$
$$\rho^2 e^{i2\theta} = 2e^{-i\pi/3}$$
$$z_0 = \sqrt{2}e^{-i\pi/6} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$$
$$z_1 = \sqrt{2}e^{5i\pi/6} = \frac{1}{2}(-\sqrt{6} + i\sqrt{2})$$

(4)
$$z^2 = 7 + 24i$$
$$(x + iy)^2 = 7 + 24i$$
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ 2xy = 24 \end{cases}$$

$z_0 = 4 + 3i$; $z_1 = -4 - 3i$

♦ **Exercice 3.d page 222**

(1) $z^2 - 5z + 9 = 0$; $\Delta = -11$

$z_1 = \dfrac{5 - i\sqrt{11}}{2}$; $z_2 = \dfrac{5 + i\sqrt{11}}{2}$

(2) $z^2 - z - 2 = 0$; $\Delta = 9$

$z_1 = -1$; $z_2 = 2$

(3) $z^2 - 6z + 9 = 0$

$(z - 3)^2 = 0$

$z_1 = z_2 = 3$

(4) $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$

$\Delta = -5 - 12i$

- Racines carrées δ_1 et δ_2 de Δ

$$(x + iy)^2 = -5 - 12i$$
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ 2xy = -12 \end{cases}$$

$\delta_1 = 2 - 3i$; $\delta_2 = -2 + 3i$

- Solutions de (1)

$z_0 = -1 + i$; $z_1 = 1 - 2i$

♦ **Exercice 3.e page 222**

- $(1 - i)^2 = -2i$
- Factorisation de $z^2 + 2i$

$z^2 + 2i = z^2 - (1 - i)^2$
$= (z - 1 + i)(z + 1 - i)$

- Résolution de (1) $z_2 + 2i = 0$

$z_1 = 1 - i$; $z_2 = -1 + i$

Exercices d'apprentissage

♦ **Exercice 1 page 225**

(1) $(2 - i)(3 + i) = 7 - i$

(2) $(4 + 3i)(2 - 5i) = 23 - 14i$

(3) $3i(5 - 2i) = 6 + 15i$

(4) $(2 + i)^2 = 3 + 4i$

♦ **Exercice 2 page 225**

(1) $z + z' = -1 - i$

(2) $z - z' = 5 - 9i$

(3) $4z - 3z' = 17 - 32i$

(4) $zz' = 14 + 23i$

♦ Exercice 3 page 225

$z_1 = (2 + i\sqrt{3})(1 + i) \quad = 2 - \sqrt{3} + i(2 + \sqrt{3})$

$z_2 = (2 - 5i)^2 \quad = -21 - 20i$

$z_3 = \left(\frac{1}{2} - 3i\right)^2 \quad = -\frac{35}{4} - 3i$

$z_4 = (3 + 4i)(3 - 4i) \quad = 25$

$z_5 = (1 - i)(5 + 8i)(1 - i) = 16 - 10i$

$z_6 = (4 + 3i)^3 \quad = -44 + 117i$

$z_7 = \left(\frac{1}{2} - i\right)(12 + i) \quad = 7 - \frac{23}{2}i$

$z_8 = \left(\frac{5}{3}i - 7\right)(1 - 2i) \quad = -\frac{11}{3} + \frac{47}{3}i$

♦ Exercice 4 page 225

$z_1 = \frac{5 - i}{3 + 2i} = 1 - i$

$z_2 = \frac{5 + i}{3 - 2i} = 1 + i$

$z_1 + z_2 = 2 \; ; \; z_1 - z_2 = -2i$

♦ Exercice 5 page 225

(1) $|1 - 3i| = \sqrt{10}$

(2) $|3 + 4i| = 5$

(3) $|1 - 7i| = 5\sqrt{2}$

(4) $|5 + 3i| = \sqrt{34}$

(5) $|1 - 5i| = \sqrt{26}$

(6) $|3 - 4i| = 5$

(7) $|-1 + i\sqrt{2}| = \sqrt{3}$

♦ Exercice 6 page 225

(1) $|z - 2| = |z + i| \; ; \; z = x + iy$

$|x - 2 + iy| = |x + i(1 + y)|$

$(x - 2)^2 + y^2 = x^2 + (1 + y)^2$

Droite $(\mathscr{D}_1) : y = -2x + \frac{3}{2}$

(2) $|iz + 3| = |z + 4 + i| \; ; \; z = x + iy$

Droite $(\mathscr{D}_2) : y = -x - 1$

(3) $\left|\bar{z} + \frac{1}{3}i\right| = 3$

$\left|z - \frac{1}{3}i\right| = 3$

Cercle $(\mathscr{C}_3)$ de centre $\Omega_3\left(0 \; ; \frac{1}{3}\right)$ et de rayon 3

(4) $|1 + iz| = 2$

$|i - z| \; = 2$

$|z - i| \; = 2$

Cercle $(\mathscr{C}_4)$ de centre $J(0 \; ; 1)$ et de rayon 2

♦ Exercice 7 page 225

(1) $z = (\sqrt{2} + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i\sqrt{5})(2 + i\sqrt{5})$

$\bar{z} = -5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5} - \sqrt{30}$

$\quad = -i(3\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{30})$

$|z| = 2\sqrt{70}$

(2) $z = \frac{1 + i}{1 - i} = i \; ; \; \bar{z} = -i \; ; \; |z| = 1$

(3) $z = \frac{3 - 2i}{2 - 3i} \; ; \; \bar{z} = \frac{12 - 5i}{13} \; ; \; |z| = 1$

(4) $z = \frac{(2 - 3i)(3 + 4i)}{(6 + 4i)(15 - 8i)} \; ; \; \bar{z} = \frac{42}{289} + \frac{13i}{578} \; ; \; |z| = \frac{5}{34}$

♦ Exercice 8 page 225

$z_1 = 1 - i \; ; \; \frac{1}{z_1} = \frac{1}{2}(1 + i)$

$z_2 = \sqrt{3} + 2i \; ; \; \frac{1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}i$

$z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; \frac{1}{z_3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_4 = 2 - 7i \; ; \; \frac{1}{z_4} = \frac{2}{53} + \frac{7}{53}i$

♦ Exercice 9 page 225

$z_1 = \frac{1 + i}{1 - i} = i$

$z_2 = \frac{2 + 3i}{5 + 3i}(2 - 3i) = \frac{65}{34} - \frac{39}{34}i$

♦ Exercice 10 page 225

(1) $z_1 - z_2^2 = -22 - 13i$

(2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{7}{26} - \frac{17}{26}i$

(3) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{7}{13} + \frac{17}{13}i$

(4) $\frac{z_1 - 1}{z_2 - 4i} = \frac{7}{17} - \frac{6}{17}i$

♦ Exercice 11 page 225

$z_1 = \frac{8i - 1}{2 - 3i} = -2 + i$

$z_2 = 2i - \frac{5}{i} = 7i$

$z_3 = \left(\frac{1 + i}{2 - i}\right) = -\frac{8}{25} + \frac{6i}{25}$

$z_4 = \frac{4 - i}{2 + 3i} - \frac{i}{3 + i} = \frac{37}{130} - \frac{179}{130}i$

♦ Exercice 12 page 225

$z_B = z_A \, e^{i\theta}$

(1) $z_A = 3 + 2i \; : \; \theta = \frac{5\pi}{6}$

$z_B = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right) + i\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)$

(2) $z_A = 5 \; ; \; \theta = -\frac{\pi}{3}$

$z_B = \frac{5}{2} - i\frac{5\sqrt{3}}{2}$

(3) $z_A = 4i - 5 \; ; \; \theta = \frac{\pi}{3}$

$z_B = -2\sqrt{3} - \frac{5}{2} + i\left(2 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

(4) $z_A = 1 - i \; ; \; \theta = -\frac{\pi}{2}$

$z_B = -1 - i$

♦ Exercice 13 page 225

ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$

$\Leftrightarrow z_D = 1$

♦ Exercice 14 page 225

1. $z_A = 1-3i$; $z_B = 4+5i$; $z_C = -3+2i$

$z_{\overrightarrow{AB}} = 3+8i$; $z_{\overrightarrow{AC}} = -4+5i$; $z_{\overrightarrow{BC}} = -7-3i$

2. $z_D = 3+18i$; $z_E = \frac{5}{3}+4i$

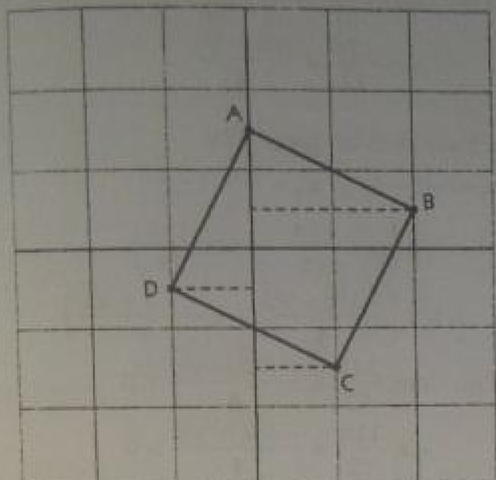
3. $3\,\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$

$3\,\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$

A, D et E sont alignés.

♦ Exercice 15 page 225

1.



2. • $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} = 2-i$

donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

• $|z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_{\overrightarrow{AD}}| = \sqrt{5}$

donc AB = AD = DC = CB

• $z_{\overrightarrow{AD}} = -1-2i$; $z_{\overrightarrow{AB}} = 2-i$

$\overrightarrow{AD}(-1\,;-2)$; $\overrightarrow{AB}(2\,;-1)$

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$ $\quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

ABCD est un carré

♦ Exercice 16 page 225

On pose : $z = x+iy$

(1) $z - \frac{9}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y\left(1+\frac{9}{x^2+y^2}\right) = 0$

$y = 0$

Droite (OI)

(2) $\frac{z+4}{z-i}+2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \quad xy-(x+4)(y-1) = 0$

Droite d'équation : $y = \frac{1}{4}x+1$

(3) $\frac{z+2}{z-5}-3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$

Droite (OI)

(4) $z+\bar{z}-1 = |z|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 0$

Point I (1 ; 0)

(5) $z+\bar{z} = |z|^2-1$

$2x = x^2+y^2-1$

$(x-1)^2+y^2 = 2$

Cercle ($\mathscr{C}$) de centre I (1 ; 0) et de rayon $\sqrt{2}$.

(6) $|z|^2+z+\bar{z} = 8$

$x^2+y^2+2x = 8$

$(x+1)^2+y^2 = 9$

Cercle ($\mathscr{C}$) de centre Ω (– 1 ; 0) et de rayon 3.

(7) Les points d'abcisses i, z, iz sont alignés si et seulement si

$\frac{z-i}{iz-i} \in \mathbb{R}$

$x^2-x+y^2-y = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Cercle ($\mathscr{C}$) de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(8) $|z-2| = |4-3i|$

$|z-2| = 5$

Cercle ($\mathscr{C}$) de centre Ω (2 ; 0) et de rayon 5.

(9) $\left|\frac{z-3}{z-5i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

L'ensemble des points M du plan tels que $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$, est le cercle de centre G et de rayon $2\sqrt{17}$ où G est le barycentre de (A ; 1) et $\left(B\,;-\frac{1}{2}\right)$.

♦ Exercice 17 page 226

$z_1 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\quad \operatorname{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{4}$

$z_2 = i$; $\quad \operatorname{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{2}$

$z_3 = \sqrt{6}-i\sqrt{2} = \sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$; $\quad \operatorname{Arg}(z_3) = -\frac{\pi}{6}$

$z_4 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad \operatorname{Arg}(z_4) = \frac{\pi}{3}$

$z_5 = (2-2i)(1-i) = 4\times(-i)$; $\quad \operatorname{Arg}(z_5) = -\frac{\pi}{2}$

$z_6 = i(\sqrt{6}-i\sqrt{2}) = \sqrt{8}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\quad \operatorname{Arg}(z_6) = \frac{\pi}{3}$

♦ Exercice 18 page 226

$z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2i} = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad \operatorname{Arg}(z_1) = -\frac{\pi}{3}$

$z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}$;

$\operatorname{Arg}(-1+i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$; $\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$

d'où $\operatorname{Arg}(z_2) = \frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$

$z_3 = (-1-i)^4 = (1+i)^4$; $\quad \operatorname{Arg}(z_3) = 4\times\frac{\pi}{4} = \pi$

$z_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^4$; $\quad \operatorname{Arg}\sqrt{2} = 0$; $\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$

$\operatorname{Arg}(z_4) = 4\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\pi$

♦ Exercice 19 page 226

1. $|X| = 2\sin\alpha$

2. $X = 2\sin\alpha\,(\cos\alpha - i\sin\alpha)$

d'où : $\operatorname{Arg}(X) = -\alpha$; $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

♦ Exercice 20 page 226

(1) $z_1 = -4 + 4i\ ;\ |z_1| = 4\sqrt{2}$

$$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z_1 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

(2) $z_2 = 1 - i\sqrt{3}\ ;$

$$z_2 = 2\cos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

(3) $z_3 = -3 + i\sqrt{3}\ ;$

$$z_3 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

(4) $z_4 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);$

(5) $z_5 = (1 - i)(\sqrt{3} + i)$

$$z_5 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

(6) $z_7 = (\sqrt{3} + i)^3$

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_7 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

♦ Exercice 21 page 226

$$Z = (1 + i)(1 - i\sqrt{3})$$
$$= 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$$

(1) $z_1 = Z$

$|z_1| = |1 + i| \times |1 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{2}$

$\mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(1 + i) + \mathrm{Arg}(1 - \sqrt{3}) = -\frac{\pi}{12}$

(2) $z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i} = \frac{1}{2}\bar{Z}$

$|z_2| = \sqrt{2}\ ;\ \mathrm{Arg}(z_2) = -\frac{\pi}{12}$

♦ Exercice 22 page 226

$$z = 1 + i\sqrt{3}$$

$$|z| = 2 : \mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

d'où $z^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2^{10}\left(-\frac{1}{2} - i\sqrt{3}\right) = -2^9 - i2^9\sqrt{3}$$

$$= -512 - 512\, i\sqrt{3}$$

♦ Exercice 23 page 226

$z_1 = \sqrt{6} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\ ;\ |z_1| = \sqrt{2}\ ;\ \mathrm{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{6}$

$z_2 = 1 - i\ ;\ |z_2| = \sqrt{2}\ ;\ \mathrm{Arg}(z_2) = -\frac{\pi}{4}$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i$$

$$= \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$$

d'où $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\ ;\ \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

♦ Exercice 24 page 226

1. $a = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)\ ;\ |a| = 2\ ;\ \mathrm{Arg}(a)$ …

$b = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\ ;\ |b| = 2\ ;\ \mathrm{Arg}(b)$ …

$c = a^2 b$

2. $c = 16\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

$$= 16\left(\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$$

d'où : $\cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$$\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

♦ Exercice 25 page 226

$z_1 = -1 - i\ ;\ z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{21}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + i\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)$$

d'où : $\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} < 0$

$$\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} > 0$$

♦ Exercice 26 page 226

$z_1 = 5 - 5i = 5\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}$

$z_2 = 2 + 2i\sqrt{3} = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_3 = (\sqrt{3} + i)(-1 + 1\sqrt{3}) = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$

$z_4 = (-1 - i)i = 1 - i = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}$

♦ Exercice 27. page 226

$Z = \sqrt{3} + i = 2\, e^{\frac{\pi}{6}i}$

d'où $Z^{1996} = 2^{1996}\, e^{\frac{1996\pi}{6}i}$

$$= 2^{1996}\, e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$= 2^{1996}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

♦ Exercice 28 page 226

$z_1 = -\sqrt{2}\ ;\ z_2 = 1 + i\ ;\ z_3 = 1 - i$

1. $z_2 = e^{i\theta} z_1 = \sqrt{2}\, e^{i(\theta+\pi)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\theta = -\frac{3\pi}{4}$

2. $z_2 - z_1 = z_1(e^{i\theta} - 1)$

$z_3 - z_1 = \overline{z_2} - z_1 = (e^{-i\theta} - 1)z_1$

$$X = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{-i\theta} - 1} = \frac{e^{i\theta} - 1}{\overline{e^{i\theta} - 1}}$$

d'où $|X| = 1$

$X = -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

d'où $\mathrm{Arg}(X) = \frac{\pi}{4}$

♦ Exercice 29 page 226

1. $f(x) = \sin^2(2x) - \sin^2(3x)$
$f(x) = -\sin x \sin 5x$

2. $f(x) = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2(2x + \pi)$
$= \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right).\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

3. $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 4x$
$= \cos 5x.\cos 3x$

4. $f(x) = 1 - \cos 3x + 2\sin\frac{3x}{2}$
$= 2.\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} + 1\right)$

5. $f(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$
posons $g(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$
d'où : $f(x) + ig(x) = e^{ix} + e^{i2x} + e^{i3x} + e^{i4x}$

$$= e^{ix} \times \frac{1 - e^{i4x}}{1 - e^{ix}}$$

$$= e^{i\frac{5x}{2}} \times \frac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{2}}$$

donc $f(x) = \dfrac{\sin 2x \times \cos\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

6. $f(x) = \sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x$
$= 4\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{5x}{2}.\cos x$

♦ Exercice 30 page 226

(1) $\cos^4 x = \frac{1}{2^4}(e^{ix} + e^{-ix})^4$
$= \frac{1}{2^3}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$

(2) $\sin^5 x = \frac{1}{(2i)^5}(e^{ix} + e^{-ix})^5$
$= \frac{1}{2^4}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$

(3) $\cos^3 2x = \frac{1}{4}(\cos 6x + 3\cos 2x)$

(4) $\sin^3\frac{x}{2} = \frac{1}{4}\left(3\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right)$

(5) $\cos^2 x + \sin^3 x = \frac{1}{4}(2\cos 2x + 3\sin x - \sin 3x + 2)$

(6) $\cos^3 x \sin^3 x = \frac{1}{2^5}(3\sin 2x - \sin 6x)$

♦ Exercice 31 page 226

$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$
$+ i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$

or $(\cos x + i\sin x)^3 = e^{i3x}$
$= \cos 3x + i\sin 3x$

d'où $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$

♦ Exercice 32 page 226

(1) $\cos 4x + i\sin 4x = (\cos x + i\sin x)^4$
d'où : $\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x$

(2) $\cos 7x + i\sin 7x = (\cos x + i\sin x)^7$
d'où : $\sin 7x = 7\cos^6 x\sin x - 35\cos^4 x\sin^3 x$
$+ 21\cos^2 x\sin^5 x - \sin^7 x$

(3) d'après (1)
$\sin 4x = 4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x$

(4) $\cos 6x = \cos^6 x - 15\cos^4 x\sin^2 x$
$+ 15\cos^2 x\sin^4 x - \sin^6 x$

♦ Exercice 33 page 226

$z^2 = \frac{1}{z}$

$z^3 = 1$

$z = 1$ $\boxed{\text{ou}}$ $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{\text{ou}}$ $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

♦ Exercice 34 page 226

- $(1+i)^8 = 16$; $(1+i)^8 \in \mathbb{R}$
- Résolution d'équations dans C.

(1) $2iz - 3 = z + i$
$z = \frac{-1 - 7i}{5}$

(2) $3z(z + i) = -iz$
$z = 0$ $\boxed{\text{ou}}$ $z = -\frac{4i}{3}$

(3) $3z - 5 + 2iz = 2i - 3z + 4iz$
$z = \frac{13 + 11i}{20}$

$-i(1 + 5i)z + (z - 1)(i - 2) - 2 = 3z - i$
$0z = 0$

donc : $S_C = \mathbb{C}$

♦ Exercice 35 page 226

(1) $-z^2 + 4z - 53 = 0$
$\Delta = -196 = (14i)^2$
$z_1 = \frac{-4 - 14i}{-2} = 2 + 7i$
$z_2 = \frac{-4 + 14i}{-2} = 2 - 7i$

(2) $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$
$\Delta = 3 - 2\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^2$
$z_1 = \sqrt{2}$; $z_2 = 1$

♦ Exercice 36 page 226

(1) $2\bar{z} = i - 4$
$\bar{z} = -2 + \frac{i}{2}$; $z = -2 - \frac{i}{2}$

(2) $\bar{z} - 2i = 2 - 3i$
$\bar{z} = 2 - i$; $z = 2 + i$

(3) $-2z + i\bar{z} = 3$
on pose : $z = x + iy$,
d'où : $\bar{z} = x - iy$
soit à résoudre l'équation
$(-2x + y) + i(x - 2y) = 3$
$z = -2 - i$

(4) $(3z + i)(\bar{z} - 1 + 2i) = 0$
$z = -\frac{i}{3}$ $\boxed{\text{ou}}$ $z = 1 + 2i$

♦ Exercice 37 page 227

$$a \in [0\,;\pi]$$

1. Résolution de (E)

(E) $z^2 - 2z\sin^2 a + \sin^2 a = 0$

$$z_1 = \frac{2\sin^2 a - i\sin 2a}{2}$$

$$z_2 = \frac{2\sin^2 a + i\sin 2a}{2}$$

2. Module et argument de z_1 et z_2

$|z_1| = |z_2| = \sqrt{\sin^4 a + \sin^2 a\cos^2 a}$
$= \sin a \quad \text{car } a \in [0\,;\pi]$

- $z_1 = \sin a\,(\sin a - i\cos a)$

$= \sin a\left[\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

$\mathrm{Arg}(z_1) = a - \frac{\pi}{2}$

- $z_2 = \sin a\,(\sin a + i\cos a)$

$= \sin a\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right]$

$\mathrm{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{2} - a$

♦ Exercice 38 page 227

1. (E) $z_2 + z + 1 = 0$

$\Delta = (i\sqrt{3})^2$

$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \;;\; z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \;;\; j^2 = -j - 1$

3. $j^2 = \bar{j} = \frac{1}{j} \;;\; j^3 = 1$

♦ Exercice 39 page 227

$$a \in [-\pi\,;\pi]$$

1. Résolution de

$z^2 - 4z\sin a + 4 = 0$

$\Delta = (4i\cos a)^2$

$z_1 = 2\sin a + 2i\cos a$

$z_2 = 2\sin a - 2i\cos a$

Module et argument des solutions

$|z_1| = |z_2| = 2$

$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right]$

$z_2 = 2\left[\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

$\mathrm{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{2} - a \;;\; \mathrm{Arg}(z_2) = a - \frac{\pi}{2}$

2. Calculer :

$$S = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e^{i\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}} + \frac{1}{e^{-i\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}}\right]$$

$$S = \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \sin a$$

$$S' = z_1^4 + z_2^4 = 2^4\left(e^{i4a} + e^{-i4a}\right)$$
$$= 2^5\cos 4a$$

♦ Exercice 40 page 227

(E) $z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = 0$

1. • Montrons que (E) admet une solution réel a. $a \in \mathbb{R}$

(E) $a^3 - 22a - 36 + i(9a^2 + 12a - 12) = 0$

d'où : $\begin{cases} a^3 - 22a - 36 = 0 & (E_1) \\ 9a^2 = 12a - 12 = 0 & (E_2) \end{cases}$

Les solutions de (E_2) sont : $-2\,;\,\frac{2}{3}$.

Mais seule -2 est solution de (E_1).

Donc (E) admet une solution réelle : -2.

• Montrons que (E) admet une solution imaginaire : $ib\,;\,b \in \mathbb{R}$

d'où : $\begin{cases} -12b - 36 = 0 & (E'_1) \\ -b^3 - 9b2 - 22b - 12 = 0 & (E'_2) \end{cases}$

(E'_1) admet -3 comme solution et -3 est aussi solution de (E'_2). Donc (E) admet une solution imaginaire pure : $-3i$.

2. Résolution de (E)

(E) admet une 3ᵉ solution : x

$\underbrace{(E)\ (z + 2)(z + 3i)(z - x)}= 0$

$z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11) - 3(4i + 12) = 0$

par identification : $x = 2 - 6i$

♦ Exercice 41 page 227

$z = -8\sqrt{3} + 8i$

$u = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

1. $z = 16\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

notons z_1 et z_2 les racines carrées

$z_1 = 4\left[\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right]$

$z_2 = 4\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$

2. $u^2 = -8\sqrt{3} + 8i = z$

d'où : $u^2 = z_1^2 = z_2^2$

or $\mathrm{Im}(z_1) > 0 \;;\; \mathrm{Im}(z_2) < 0$

d'où : $z_1 = u = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
$z_2 = -u = (\sqrt{2} - \sqrt{6}) + i(-\sqrt{6} - \sqrt{2})$

donc : $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

♦ Exercice 42 page 227

$$-\left(\frac{z - 3i}{z + 2}\right)^2 + 6\left(\frac{z - 3i}{z + 2}\right) - 13 = 0$$

Posons : $Z = \frac{z - 3i}{z + 2} \;;\; z \neq -2$

d'où : $-Z^2 + 6Z - 13 = 0$

$Z_1 = 3 + 2i \;;\; Z_2 = 3 - 2i$

• $Z = Z_1 = 3 + 2i$

on obtient : $z = -\frac{13}{4} - \frac{5}{4}i$

• $Z = Z_2 = 3 - 2i$

on obtient : $z = -\dfrac{7}{4} - \dfrac{5}{4}i$

♦ Exercice 43 page 227

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 - 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 2 = 0$$

Posons : $Z = \dfrac{(z-1)}{(z+1)}$

D'où : $Z^3 - 2Z^2 - Z + 2 = 0$

$Z = 1$ $\boxed{\text{ou}}$ $Z = -1$ $\boxed{\text{ou}}$ $Z = 2$

• $\dfrac{(z-1)}{(z+1)} = 1$ pas de solution

• $\dfrac{(z-1)}{(z+1)} = -1$ donne $z = 0$

• $\dfrac{(z-1)}{(z+1)} = 2$ donne $z = -3$

♦ Exercice 44 page 227

(E) $z^4 - \sqrt{2}\,z^3 - 4\sqrt{2}\,z = 16$

1. Déterminons a et b tels que :

$z^4 - \sqrt{2}z^2 - 4\sqrt{2}z = (z^4 + 4)(z^2 + az + b)$

par identification, on obtient :

$a = -\sqrt{2}$; $b = -4$

2. (E) $(z^2 + 4)(z^2 - \sqrt{2}z - 4) = 0$

$S_{(E)} = \{-2i\,;\,2i\,;\,-\sqrt{2}\,;\,2\sqrt{2}\}$

♦ Exercice 45 page 227

• (1) $\begin{cases} 2z_1 - z_2 = i & (E_1) \\ -2z_1 + 3iz_2 = 17 & (E_2) \end{cases}$

on obtient :

$S_{(1)} = \left\{-\dfrac{7}{5} - \dfrac{26}{5}i\,;\,-\dfrac{7}{10} - \dfrac{21}{10}i\right\}$

• (2) $\begin{cases} iz_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}z_2 = -1 & (E_1) \\ 2z_1 + z_2 = 2\sqrt{3} & (E_2) \end{cases}$

on obtient :

$S_{(2)} = \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\,;\,\sqrt{3} + i\right\}$

♦ Exercice 46 page 227

• (1) $\begin{cases} z_1 z_2 = 17 & (E_1) \\ z_1 + z_2 = 2 & (E_2) \end{cases}$

z_1 et z_2 sont solution de :

(E) $z^2 - 2z + 17 = 0$

$\boxed{\text{ou}}$
- $z_1 = 1 + 4i$; $z_2 = 1 - 4i$
- $z_1 = 1 - 4i$; $z_2 = 1 + 4i$

• (2) $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1 z_2 = \dfrac{37}{4} \end{cases}$

$\boxed{\text{ou}}$
- $z_1 = \dfrac{1}{2} + 3i$; $z_2 = \dfrac{1}{2} - 3i$
- $z_1 = \dfrac{1}{2} - 3i$; $z_2 = \dfrac{1}{2} + 3i$

• (3) $\begin{cases} 2z_1 z_2 = 3 \\ \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\,;\, z_1 \neq 0\,;\, z_2 \neq 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} z_1 z_2 = \dfrac{3}{2} \\ z_1 + z_2 = \sqrt{2}\,; \quad z_1 \neq 0\,;\, z_2 \neq 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{ou}}$
- $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i$; $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i$
- $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i$; $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i$

Problèmes

♦ Exercice 47 page 227

1. $S = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 = \dfrac{1 - q^5}{1 - q}$

2. a) $Z = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \dfrac{1 - z^5}{1 - z}$ $\quad z \neq 1$

b) $z = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$

On obtient : $X = -1$; $Y = 0$

♦ Exercice 48 page 227

• $S = \underbrace{1 + i + i^2 + \ldots + i^{1999}}_{2\,000 \text{ termes}} = \dfrac{1 - i^{2000}}{1 - i}$

or $i^{2000} = (i^4)^{500} = 1$

donc $S = 0$

• $S = 1 - i + i^2 + \ldots + (-i)^{1999} = \dfrac{1 - (-i)^{2000}}{1 - i}$

or $(-i)^{2000} = (-1)^{2000} \times (i)^{2000} = 1$

donc $S' = 0$

♦ Exercice 49 page 227

$z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$

1. Module et Arg de z^2

$|z^2| = 8$; $\text{Arg}(z^2) = \dfrac{\pi}{6}$

Module et Arg de z

$|z| = 2\sqrt{2}$; $\text{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{12}$

$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

$\;\;= 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\,\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$

2. D'où : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

3. Résolution dans $\mathbb{R}$ de (E)

(E) $(\sqrt{3} + 1)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x = \sqrt{2}$

on obtient :

$S_{(E)} = \{-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\,;\,\dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi\,;\,(k \in \mathbb{Z})\}$

♦ Exercice 50 page 227

• $z = \dfrac{1 + i}{\sqrt{3} + i} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{4} + \dfrac{\sqrt{3} - 1}{4}i$

$$\bullet\ z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)$$

d'où : $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

◆ Exercice 51 page 227

1. $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$; $z_C = 2 - 2i\sqrt{3}$

Équation du cercle $\mathscr{C}(0\,;4)$

$(\mathscr{C})\ x^2 + y^2 = 4^2$

on vérifie que :

$B \in (\mathscr{C})$; $C \in (\mathscr{C})$

2. $z_A = \frac{z_C - z_B}{2} = -2i\sqrt{3}$

◆ Exercice 52 page 228

• (1) $z = (1 + i\sqrt{3})^{10}$

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z = z_1^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

$$= 2^{10}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$\mathscr{R}e(z) = -2^9$; $\mathscr{I}m(z) = -2^9\sqrt{3}$

• (2) $(1-i)^{12}(\sqrt{3} - 3i)$

on obtient :

$\mathscr{R}(z) = -2^6\sqrt{3}$; $\mathscr{I}m(z) = 3 \times 2^6$

• (3) $z = \left(\frac{3-2i}{-2-3i}\right)^{12}$

on obtient :

$\mathscr{R}(z) = 1$; $\mathscr{I}m(z) = 0$

• (4) $z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{20}$

$$z_1 = \sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{20}$$

$|z| = (\sqrt{2})^{20} = 2^{10}$

$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{-5\pi}{12}$

$\mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3}$

on obtient :

$\mathscr{R}e(z) = 2^9$; $\mathscr{I}m(z) = -2^9\sqrt{3}$

◆ Exercice 53 page 228

1. (E) $z^2 - 2\bar{z} = 0$

posons : $z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

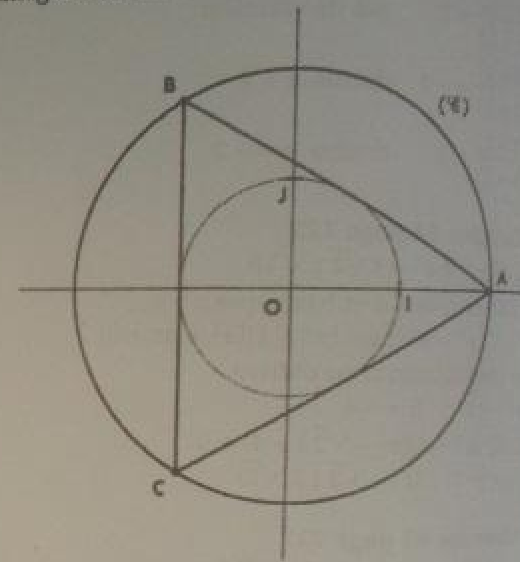
Soit à résoudre le système :

$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x = 0 \\ xy + y = 0 \end{cases}$

on obtient :

$S_{(E)} = \{0\,;2\,;-1+i\sqrt{3}\,;-1-i\sqrt{3}\}$

2. O ; A(2) ; B$(-1+i\sqrt{3})$; C$(-1-i\sqrt{3})$ sont les images des solutions de (E).



$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

A, B, C sont sur le cercle $\mathscr{C}(0\,;2)$

◆ Exercice 54 page 228

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(1+i)$$

1. $|a - 1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Suite (z) définie par :

$z_0 = 1$; $z_n = a^n$, $(n \in \mathbb{Z})$

$z_1 = a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$z_2 = a^2 = \frac{1}{2}i$

$z_3 = a^3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

$z_4 = a^4 = -\frac{1}{4}$

$z_5 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}i$

$z_6 = -\frac{1}{8}i$

$z_7 = \frac{1}{16} - \frac{1}{16}i$

3. Suite (u) définie par :

$u_n = |z_n - z_{n-1}|$

$u_n = |a^n - a^{n-1}| = |a^{n-1}(a-1)|$

$= |a^{n-1}| \times |a-1|$

$u_{n+1} = |a^n| \times |a-1| = |a| \times |a^{n-1}| \times |a-1|$

$= |a| \times u_n = \frac{\sqrt{2}}{2} u_n$

$u_1 = |a-1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

donc (u) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $S_n = u_1 + u_1 + \dots + u_n$

$S_n = (\sqrt{2}+1)\left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]$

♦ Exercice 55 page 228

1. $(1+i)^2 = 2i$

Résolution de l'équation

$z^2 = 2i$

$z^2 = (1+i)^2$

$S = \{1+i\,;-1-i\}$

2. Suites géométriques (u) telles que :

$u_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $u_4 = -\sqrt{3} + i$

(u) a pour raison $1+i$ ou $-1-i$

On obtient :

$|u_{19}| = 2^8\sqrt{2}$; $\text{Arg}(u_{19}) = \frac{7\pi}{12}$

$u_{19} = 2^7(1-\sqrt{3}) + 2^7(1+\sqrt{3})\,i$

♦ Exercice 56 page 228

1. $\sin^2 3\theta.\cos^2\theta = -\frac{1}{8}\cos 8\theta - \frac{1}{4}\cos 6\theta - \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4}$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\theta.\cos^2\theta.\,d\theta = \frac{9\sqrt{3}}{128} + \frac{\pi}{12}$

♦ Exercice 57 page 228

1. a) Résolution de l'équation

$z^2 - 2z + 4 = 0$

$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

b) $|z_1| = 2$; $\text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{3}$

$|z_2| = 2$; $\text{Arg}(z_2) = -\frac{\pi}{3}$

$z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$z_2 = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2. a) $z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $z_B = 1 - i\sqrt{3}$

$z_{A'} = -2 + 2i\sqrt{3}$; $z_{B'} = -2 - 2i\sqrt{3}$

b) $AA' = |z_{A'} - z_A| = 2\sqrt{3}$

$BB' = |z_{B'} - z_B| = 2\sqrt{3}$

$\frac{z_A - z_B}{z_{A'} - z_{B'}} = \frac{1}{2}$

$\text{Arg}\left(\frac{z_A - z_B}{z_{A'} - z_{B'}}\right) = 0$

Mes $(\widehat{\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{BA}}) = 0$

d'où (B'A') // (BA)

AA'BB' est un trapèze isocèle.

c) On démontre que :

le triangle AA'B' est rectangle en A

le triangle BB'A' est rectangle en B.

♦ Exercice 58 page 228

1. $P(z) = z^3 + (-9 + 4\sqrt{3})\,z^2 + (43 - 24\sqrt{3})\,z - 75 + 36\sqrt{3}$

a) $P(3) = 0$

b) $P(z) = (z-3)(z^2 + \alpha z + \beta)$

On obtient par identification

$P(z)\ (z-3)[z^2 + (-6 + 4\sqrt{3})\,z + 25 - 12\sqrt{3}]$

c) Résolution de : $P(z) = 0$

On obtient :

$S = \{3\,;3 - 2\sqrt{3} - 2i\,;3 - 2\sqrt{3} + 2i\}$

2. $z_u = 3 - 2\sqrt{3} + 2i$; $z_v = 3 - 2\sqrt{3} - 2i$; $z_w = 3$

a) $Z = \frac{z_v - z_w}{z_u - z_w} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

$|Z| = 1$; $\text{Arg}(Z) = \frac{\pi}{3}$

WV = UW ; Mes $(\widehat{\overrightarrow{WU}, \overrightarrow{WV}}) = \frac{\pi}{3}$

b) On a : WV = UW ; Mes $(\widehat{\overrightarrow{WU}, \overrightarrow{WV}}) = \frac{\pi}{3}$

donc UVW est un triangle équilatéral direct.

♦ Exercice 59 page 228

$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$

1. On pose : $z = x + iy$; $\bar{z} = x - iy$

on obtient : $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$

$P(i) = 0$

Donc $P(\bar{i}) = P(-i) = 0$

2. $P(z) = (z-i)(z+i)(z^2 + \alpha z + \beta)$; $\alpha \in \mathbb{R}$; $\beta \in \mathbb{R}$

$P(z) = (z^2+1)(z^2 - 4z + 8)$

Résolution de : $P(z) = 0$

$z_1 = i$; $z_2 = -i$; $z_3 = 2 - 2i$; $z_4 = 2 + 2i$

$S = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 4$

$P = z_1.z_2.z_3.z_4 = 8$

♦ Exercice 60 page 228

$A(z)$; $A'\left(\frac{1}{z}\right)$; $A''(z-1)$

on pose $z = x + iy$

on a : $OA = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$OA' = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$OA'' = |z - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

donc : $OA = OA' \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$

$OA = OA'' \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$$OA = OA' = OA'' \Leftrightarrow \boxed{\text{ou}} \begin{cases} z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

♦ **Exercice 61 page 228**

$Z = \dfrac{z-2}{2z-1}$; $z \neq \dfrac{1}{2}$

1. *a)* $Z = X + iY$

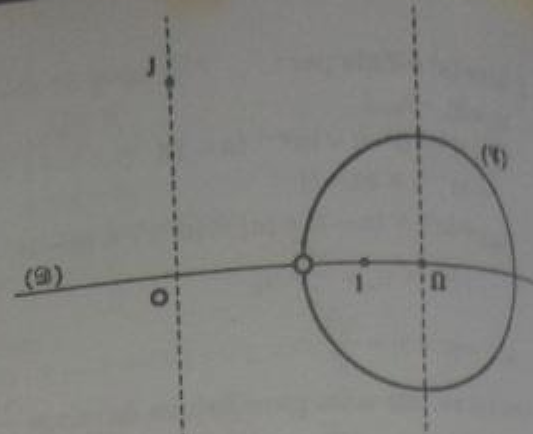
on obtient :

$$X = \frac{2x^2 + 2y^2 - 5x + 2}{(2x-1)^2 + 4y^2}$$

$$Y = \frac{3y}{(2x-1)^2 + 4y^2}$$

b) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{16}$$



$(\mathcal{D})$: ensemble des points $M(z)$ tels que $Z \in \mathbb{R}$

$(\mathcal{C})$: ensemble des points $M(z)$ tels que $Z \in i\mathbb{R}$

2. *a)* $|z| = 1 \Leftrightarrow |z - 2| = |2z - 1|$

b) $|z| = 1$; $\theta = \operatorname{Arg}(z)$; $\varphi = \operatorname{Arg}(Z)$

$z = \cos\theta + i\sin\theta$

$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$; car $|Z| = 1$

On obtient :

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{4 - 5\cos\varphi}{5 - 4\cos\varphi} \\ \sin\varphi = \dfrac{3\sin\theta}{5 - 4\cos\theta} \end{cases}$$

11. Nombres complexes et géométrie

(pages 229 à 240 du livre de l'élève)

Ce chapitre vise essentiellement à :
– utiliser les nombres complexes pour étudier des configurations du plan ;
– utiliser les nombres complexes pour étudier des transformations du plan.

Dans ce chapitre, il s'agit de faire ressortir l'intérêt des relations entre les propriétés des nombres complexes et celles des configurations et des transformations géométriques.
À travers des exercices variés, on pourra faire prendre conscience aux élèves que l'ensemble des nombres complexes est un outil performant pour la résolution de nombreux problèmes de géométrie.
Concernant les transformations du plan, il ne s'agit pas de faire ou refaire une étude exhaustive de ces transformations, mais bien plus, d'utiliser les écritures complexes associées pour résoudre rapidement des problèmes.
Pour les similitudes directes, on se limitera à leur définition et à leur écriture complexe associée.

savoirs	savoir-faire
Nombres complexes et configurations du plan	
• mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + k\,2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$	• Déterminer la mesure de l'angle de deux vecteurs, connaissant les affixes des vecteurs.
• Égalité de vecteurs.	
• Égalité de distances.	• Calculer la distance de deux points connaissant leurs affixes.
• Alignement de trois points.	• Démontrer que des points sont alignés.
• Orthogonalité de deux droites.	
Nombres complexes et transformations du plan	
• Transformation du plan et écriture complexe associée.	• Déterminer l'écriture complexe d'une transformation du plan.
• Transformations de base : – translation ; – rotation de centre O ; – homothétie de centre O.	• Déterminer une transformation et ses caractéristique à partir de son écriture complexe.
• Transformations usuelles : – composée de transformations ; – rotation de centre quelconque ; – homothétie de centre quelconque.	
• Similitudes directes du plan.	

Exercices d'application directe

♦ Exercice 1.a page 231

$A(1+i)$; $B(-1+i\sqrt{3})$

$M(z_M)$ avec $z_M = x + iy$

A, B, M sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z_M - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{z_M - z_A}{z_B - z_A} = \frac{x - 1 + (y-1)i}{-2 + (\sqrt{3}-1)i}$$

$$= \frac{[(x-1) + (y-1)i][-2 + (1-\sqrt{3})i]}{4 + (\sqrt{3}-1)^2}$$

$$\frac{z_M - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow 2(1-y) + (1-\sqrt{3})(x-1) = 0$$

L'ensemble des points M est la droite d'équation

$(1-\sqrt{3})x - 2y + 1 + \sqrt{3} = 0$

♦ Exercice 1.b page 231

• $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 1 + i(y-2)}{3(1+i)} \in i\mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow x + y = 3 \qquad (1)$$

• $AC = AB \Leftrightarrow |z_C - z_A| = |z_B - z_A|$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 18 \qquad (2)$$

(1) et (2) donnent deux positions possibles pour le point C

$z_C = 4 - i$ ou $z_C = -2 + 5i$

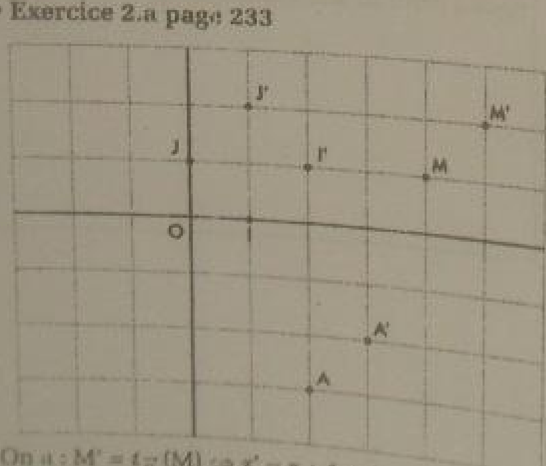
♦ Exercice 1.c page 231

$A(-\sqrt{3}+i)$; $B(-\sqrt{3}-i)$; $C(2i)$

On a : $|-\sqrt{3}+i| = |-\sqrt{3}-i| = |2i| = 2$

A, B, C sont donc sur le cercle $\mathscr{C}_{O;2}$.

♦ Exercice 2.a page 233



On a : $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow z' = z + 1 + i$

d'où : $I'(2+i)$; $J'(1+2i)$; $A'(3-2i)$

♦ Exercice 2.b page 233

$M' = r_{(O\,;\,\frac{\pi}{3})}(M) \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$

$$z' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z$$

d'où $I'\left(\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\right)$; $J'\left(\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)\right)$;

$A'\left(\frac{1}{2}(-3+\sqrt{3}-i(1+3\sqrt{3}))\right)$

♦ Exercice 2.c page 236

$f(z) = e^{i\frac{4\pi}{3}} z$

F est la rotation de centre O, d'angle orienté $\frac{4\pi}{3}$

♦ Exercice 2.d page 236

$$\begin{cases} f(z) = e^{\frac{\pi}{6}i} z + b \\ f(2-2i) = 2 - 2i \end{cases}$$

d'où : $b = 1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 3)$.

♦ Exercice 2.e page 238

$S_{(\Omega;3;-\frac{\pi}{6})}$; $\Omega(2-3i)$

$$\begin{cases} f(z) = 3e^{-\frac{\pi}{6}i} z + b \\ f(2-3i) = 2 - 3i \end{cases}$$

d'où : $b = \dfrac{13}{2} - 3\sqrt{3} + i\left(\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right)$

♦ Exercice 2.f page 238

$z' - (2-2i) = e^{i\frac{\pi}{6}}[z - (2-2i)]$

$$z' = \frac{\sqrt{3}+i}{2} z + 1 - \sqrt{3} + (-3+\sqrt{3})i$$

$$x' + iy' = \frac{\sqrt{3}+i}{2}(x+iy) + 1 - \sqrt{3} + (-3+\sqrt{3})i$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{y}{2} + 1 - \sqrt{3} \\ y' = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y - 3 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Exercices d'apprentissage

Exercice 1 page 240

(1) $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg \dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$

$$= \arg \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

(2) $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\sqrt{3} - i}{2}$

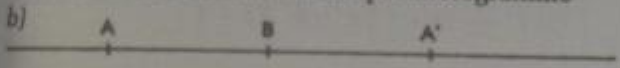
$$= -\frac{\pi}{6} + k2\pi$$

Exercice 2 page 240

1. *a)* $z_B - z_A = 5 + 2i$; $z_C - z_D = 5 + 2i$

donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; ABCD est un parallélogramme

b)



$z_{A'} = z_B + z_{\overrightarrow{AB}} = 2z_B - z_A = 9 - i$

c) $\overrightarrow{DA''} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$

$z_{A''} - z_D = (z_B - z_D) + (z_C - z_D)$

$z_{A''} = z_B - z_D + z_C = 9 - i$

donc A'' = A'

2. A''BDC est un parallélogramme

Exercice 3 page 240

(1) Translation de vecteur $\vec{u}(2i + 1)$.

(2) Rotation de centre O, d'angle orienté $-\widehat{\dfrac{\pi}{3}}$.

(3) Symétrie de centre O.

(4) Translation de vecteur $-3\vec{i}$.

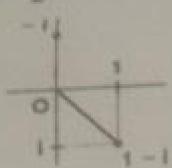
(5) $z' = iz = e^{i\frac{\pi}{2}}z$

Rotation de centre O, d'angle orienté $\widehat{\dfrac{\pi}{2}}$.

(6) $z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}z$

Rotation de centre O,

d'angle orienté $-\widehat{\dfrac{\pi}{4}}$.



Exercice 4 page 240

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1 - 2i$

f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;

elle a pour écriture complexe :

$$z' = z - 1 - 2i$$

Exercice 5 page 240

$$z' = z + 2 - 3i$$

f est la translation de vecteur $\vec{u}(2 - 3i)$

Expression analytique de f

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

Image de (D) : $y = 2x - 1$

(D') : $y' + 3 = 2(x' - 2) - 1$

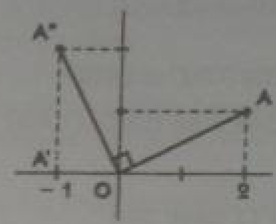
(D') : $y' = 2x' - 8$

Exercice 6 page 240

$t_{\vec{u}}(A) = A'$; $r_{(O\,;\,\frac{\pi}{2})}(A) = A''$

$z_{A'} = (2 + i) + (-3 - i) = -1$

$z_{A''} = e^{i\frac{\pi}{2}}(2 + i) = i(2 + i) = -1 + 2i$



Exercice 7 page 240

2. $z_{M'} = z_M + 1 + i$; $z_{A'} = 2$; $z_{I'} = 2 + i$; $z_{J'} = 1 + 2i$

$\overrightarrow{I'A'} = -i$; $\overrightarrow{J'M'} = z - i$

3. $\text{mes}(\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{IM}) = \arg \dfrac{z - 1}{-i}$

$\text{mes}(\overrightarrow{I'A'} ; \overrightarrow{I'M'}) = \arg \dfrac{z - 1}{-i}$

$\text{mes}(\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{IM}) = \text{mes}(\overrightarrow{I'A'} ; \overrightarrow{I'M'})$

Exercice 8 page 240

2. $z_{M'} = 2z_M$; $z_{A'} = 2(1 + i)$; $z_{I'} = 2$; $z_{J'} = 2i$

$z_{\overrightarrow{I'A'}} = 2i$; $z_{\overrightarrow{I'M'}} = 2z_M - 2i$

3. $\text{mes}(\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{IM}) = \arg \dfrac{z - 1}{i}$

$\text{mes}(\overrightarrow{I'A'} ; \overrightarrow{I'M'}) = \arg \dfrac{z - 1}{i}$

$\text{mes}(\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{IM}) = \text{mes}(\overrightarrow{I'A'} ; \overrightarrow{I'M'})$

Exercice 9 page 240

2. $z' = e^{\frac{2\pi i}{3}}z = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}z$

$z_{I'} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$; $z_{J'} = \dfrac{-\sqrt{3} - i}{2}$;

$z_{A'} = \dfrac{1 + 3\sqrt{3} + (3 - \sqrt{3})i}{2}$

3. $\text{mes}(\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{IM}) = \text{mes}(\overrightarrow{I'A'} ; \overrightarrow{I'M'})$

$$= \arg \frac{z - 1}{-2 - 3i}$$

♦ Exercice 10 page 240

$z_A = 6 + 2i$; $z_B = 2 + 4i$

1. Nature de OAB

$OB^2 = 20$; $z_{\overrightarrow{BA}} = 4 - 2i$

$BA^2 = 20$; d'où $OB = BA$

$\text{mes}(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = \arg \dfrac{z_A - z_B}{z_O - z_B} = \dfrac{\pi}{2}$

Le triangle OAB est rectangle isocèle

2. $z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{2}} z_B = -4 + 2i$

$z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{2}} z_A = 2 - 6i$

3. M milieu de [A'B']

$z_M = \dfrac{z_{A'} + z_{B'}}{2} = -1 - 2i$

4. Position de (OM) et (AB)

$\dfrac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{BA}}} = \dfrac{i}{2} \in i\mathbb{R}$ d'où $(OM) \perp (AB)$

♦ Exercice 11 page 240

1. $M(z) : z = x + iy$

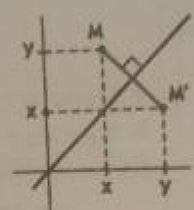
$M(z') : z' = y + ix$

$z' = i(\bar{z})$

2. A milieu de [MM']

$z_A = 1 + i$; $2z_A = z + z'$;

$z' = -z + 2(1 + i)$



♦ Exercice 12 page 240

$z' = az$;

$a = \dfrac{1 + i}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$;

$F = S(0 ; \dfrac{\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{\pi}{4})$; $F(\Delta) = (OJ)$

♦ Exercice 13 page 240

(1) $z' = z + 3i$; $F = t_{\vec{u}(3i)}$

(2) $z' = z - 3i$; $F = t_{\vec{u}(-3i)}$

(3) $z' = 21z$; $F = H_{(0\,;\,21)}$

(4) $z' = 2z + 3i$; $F = H_{(\Omega\,;\,2)}$; $z_\Omega = -3i$

(5) $z' = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} z$; $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} z$; $F = r_{(0\,;\,-\frac{\pi}{3})}$

(6) $z' = iz + 5$; $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z + 5$; $F = r_{(\Omega\,;\,\frac{\pi}{2})}$

Détermination de z_Ω

$z_\Omega = iz_\Omega + 5$; $z_\Omega = \dfrac{5(1 + i)}{2}$

(7) $z' = -iz + 1$; $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}} z + 1$;

$F = r_{(\Omega\,;\,-\frac{\pi}{2})}$

$z_\Omega = -iz_\Omega + 1$; $z_\Omega = \dfrac{1 - i}{2}$

(8) $z' = -2iz + 3i$; $z' = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} z + 3i$;

$F = S_{(\Omega\,;\,2\,;\,-\frac{\pi}{2})}$

$z_\Omega = 2iz_\Omega + 3i$; $z_\Omega = \dfrac{6 + 3i}{5}$

12. Géométrie dans l'espace

(pages 241 à 258 du livre de l'élève)

Ce chapitre vise essentiellement à :
– étendre la notion de produit scalaire à l'espace ;
– introduire la notion de produit vectoriel ;
– utiliser ces deux produits dans l'étude des configurations de l'espace, tout en faisant une incursion dans la géométrie analytique.

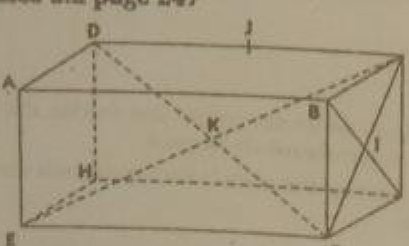
On traitera rapidement les chapitres sur les vecteurs de l'espace et sur le produit scalaire dans l'espace, ces concepts n'étant qu'une extension de notions déjà étudiées dans le plan.
Concernant les barycentres dans l'espace, on se limitera le plus souvent à quatre points non coplanaires.
Au cours de leur scolarité, les élèves ont étudié des objets simples du plan et de l'espace (droites, plans, cercles, sphères, triangles) à l'aide de méthodes diverses. En terminale, l'objectif est de prolonger cette étude en équilibrant les points de vue algébrique et géométrique.
Un point essentiel est la capacité à traduire en langage algébrique les problèmes géométriques et, inversement, d'interpréter géométriquement les calculs algébriques.
Les élèves traiteront de situations où il s'agit, à partir de points, droites, plans... donnés dans un repère par leurs coordonnées ou leurs équations, d'en déterminer d'autres caractérisées par des conditions géométriques. Pour ce faire, on se placera toujours dans un repère orthonormal.
On insistera sur le fait qu'un exercice de géométrie analytique ne consiste pas à enchaîner sans commentaire des calculs formels, mais au contraire d'expliquer clairement ce que l'on est en train de calculer.
Les travaux pratiques en fin de chapitre ont pour objet de regrouper des ensembles munis d'opérations étudiés tout au long de la scolarité des élèves dans des structures algébriques. Aucune connaissance ne sera exigée dans ce domaine.

savoirs	savoir-faire
Extension à l'espace de la notion de vecteurs • Vecteurs de l'espace, norme, vecteurs colinéaires. • Opérations sur les vecteurs de l'espace : – définitions ; – propriétés. • Barycentre de n points non coplanaires. • Caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace. • Caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace.	• Reconnaître deux vecteurs colinéaires de l'espace. • Utiliser les propriétés des vecteurs de l'espace pour effectuer des calculs vectoriels. • Démontrer que 3 vecteurs sont coplanaires. • Démontrer que 4 points sont coplanaires.
Bases et repères • Bases et repères de l'espace, repères orthonormés. • Coordonnées d'un vecteur dans une base donnée. • Coordonnées d'un point dans un repère donné. • Orientation de l'espace, orientation d'un plan de l'espace.	• Représenter des points, des droites, des plans dans un repère donné de l'espace. • Effectuer des calculs vectoriels dans une base donnée.
Produit scalaire • Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace : – définitions ; – propriétés.	• Calculer le produit scalaire de deux vecteurs : – à l'aide de l'expression trigonométrique ; – à l'aide de l'expression vectorielle ; – à l'aide de l'expression analytique.

Savoirs	Savoir-faire
• Différentes expressions du produit scalaire : – expression trigonométrique ; – expression vectorielle ; – expression analytique. • Expression de la norme d'un vecteur de l'espace. • Caractérisation des vecteurs orthogonaux. • Droites parallèles, droites orthogonales dans l'espace. • Plans perpendiculaires, plans parallèles.	• Calculer la norme d'un vecteur. • Reconnaître des vecteurs orthogonaux. • Démontrer que des vecteurs sont orthogonaux. • Démontrer que des droites sont parallèles, orthogonales. • Démontrer que des plans sont parallèles, perpendiculaires.
Équations cartésiennes • Vecteur normal à un plan. • Plan défini par un vecteur normal et un point. • Équations cartésiennes d'un plan. • Équations cartésiennes d'une sphère.	• Déterminer un vecteur normal à un plan. • Déterminer une équation cartésienne d'un plan défini par : – un vecteur normal et un point ; – trois point.
Produit vectoriel • Définition. • Propriétés. • Cas des vecteurs colinéaires. • Expression analytique du produit vectoriel. • Aire d'un parallélogramme, d'un triangle.	• Calculer le produit vectoriel de deux vecteurs : – à partir de la définition ; – en utilisant l'expression analytique • En utilisant le produit vectoriel : – vérifier que deux vecteurs sont colinéaires ; – déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs non nuls ; – calculer l'aire d'un parallélogramme, d'un triangle.

Exercices d'application directe

♦ Exercice 2.a page 247



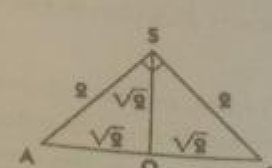
$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DC} = -36$

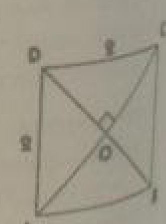
$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{FC} = \frac{25}{2}$

$(FC^2 = CG^2 + GF^2 = 25)$

$\overrightarrow{KE}\cdot\overrightarrow{KF} = -\frac{11}{4}$

♦ Exercice 2.b page 247





$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos\frac{\pi}{3} = 2$

(SAB) est équilatéral)

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC} = 0$; $(SA) \perp (SC)$

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC} = SA \times AC \times \cos\frac{\pi}{4}$

$= 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$

♦ **Exercice 2.c page 250**

1. $\vec{u}(2\,;-1\,;1)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{Q}$.
2. $\vec{v}(a\,;b\,;c)$ tel que $\vec{v} \perp \mathscr{P}$

donc : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\,;\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$2a-b+c=0\,;-a+b=0$

$\vec{v}(a\,;a\,;-a)$

on peut prendre $\vec{v}(1\,;1\,;-1)$

$\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{v}$ et passe par le point A.

D'où son équation :

$$x+y-z-1=0$$

♦ **Exercice 2.d page 250**

$\vec{u}$ vecteur normal de $\mathscr{P}$

$\vec{v}$ vecteur normal de $\mathscr{Q}$.

(1) $\vec{u}(2\,;3\,;1)\,;\ \vec{v}(1\,;1\,;1)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=6$

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants non perpendiculaires

(2) $\vec{v}=3\vec{u}\,;\ \mathscr{P}\,/\!\!/\,\mathscr{Q}$ et $\mathscr{P}=\mathscr{Q}$

(3) $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants non perpendiculaires

(4) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\,;\ \mathscr{P}\perp\mathscr{Q}$

Exercices d'apprentissage

♦ **Exercice 1 page 257**

$\vec{u}=\frac{5}{2}\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}$

$\vec{v}=-\frac{5}{3}\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$

On voit que : $-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}$

On vérifie que : $\vec{v}=-\frac{2}{3}\vec{u}$

♦ **Exercice 2 page 257**

(1) On ne peut pas avoir : $\frac{a}{1}=\frac{5}{2}=\frac{0}{3}$

(2) $\frac{2+a}{1}=\frac{2a+1}{5}=\frac{a}{3}$ donne $a=-3$

(3) $\frac{a}{1}=\frac{10}{5}=\frac{15}{3}$ donne $a=5$

♦ **Exercice 3 page 257**

(1) On ne peut pas avoir : $\frac{\lambda}{1}=\frac{1}{-2}=\frac{0}{5}$.

(2) $\frac{4+\lambda}{5}=\frac{\lambda}{1}=\frac{2\lambda+1}{3}$ donne $\lambda=1$.

(3) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

(4) On ne peut pas avoir : $\frac{\lambda}{8}=\frac{1}{2}=\frac{4}{\lambda}$.

♦ **Exercice 4 page 257**

(1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires pour :

$\mu=6$ et $\lambda=\frac{5}{2}$.

(2) $\vec{u}(\lambda\,;2\,;\mu)\,;\ \vec{v}(-1\,;3\,;2)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires pour :

$\mu=\frac{4}{3}$ et $\lambda=\frac{-2}{3}$.

♦ **Exercice 5 page 257**

(1) $a=-3$ et $b=-\frac{2}{3}$.

(2) $a=-2$ et $b=1$.

♦ **Exercice 6 page 257**

$\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

(1) $\begin{cases}-x+y=-1\\-x-y=0\\x+y=a\end{cases}$ d'où : $a=0$

(2) $\begin{cases}x+y=2\\-x+y=1+a\\x-y=-3\end{cases}$ d'où : $a=2$

♦ **Exercice 7 page 257**

1. $\overrightarrow{AB}(1\,;0\,;1)\,;\ \overrightarrow{AC}(3\,;0\,;2)\,;\ \overrightarrow{BC}(2\,;0\,;1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5\,;\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-3\,;$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=8$

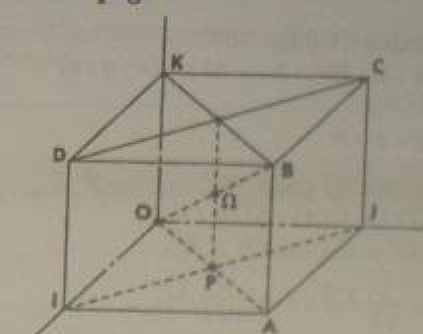
2. $AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=5$

$BA\times BC\times\cos(\widehat{CBA})=-3$

$CA\times CB\times\cos(\widehat{ACB})=8$

$AB=\sqrt{2}\,;\ AC=\sqrt{13}\,;\ BC=\sqrt{5}$

♦ **Exercice 8 page 257**



1. $A(1\,;1\,;0)\,;\ B(1\,;1\,;1)\,;\ C(0\,;1\,;1)\,;\ D(1\,;0\,;1)$
2. $\Omega(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2})$
3. $\overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{\Omega B}=\frac{1}{4}$

$\Omega A\times\Omega B\times\cos(\widehat{A\Omega B})=\frac{1}{4}$

$\Omega A=\Omega B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

♦ **Exercice 9 page 257**

(1) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=4\vec{u}\cdot\vec{v}$

(2) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$

(3) $\|\vec{u}\|^2-6\vec{u}\cdot\vec{v}+9\|\vec{v}\|^2=\|\vec{u}-3\vec{v}\|^2$

(4) $\|\vec{u}+2\vec{v}\|^2-\|\vec{v}\|^2=(\vec{u}+3\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

◆ **Exercice 10 page 257**

(1) $\vec{n}\,(2\,;1\,;-4)$

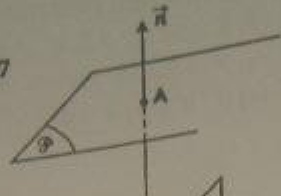
(2) $\vec{n}\,(3\,;-5\,;2)$

(3) $\vec{n}\,(1\,;1\,;0)$

(4) $\vec{n}\,(1\,;0\,;1)$

(5) $\vec{n}\,(1\,;0\,;0)$

◆ **Exercice 11 page 257**



(1) $-x+y+z=0$

(2) $x-2=0$

(3) $y-z+1=0$

◆ **Exercice 12 page 257**

$\overrightarrow{AB}$ vecteur normal à $\mathcal{P}$

$\overrightarrow{AB}(-1\,;-1\,;4)$

$\mathcal{P} : -x-y+4z+a=0$

M : milieu de [AB] ; $M(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\,;1)$

d'où $\mathcal{P} : -x-y+4z-2=0$

◆ **Exercice 13 page 257**

(1) $\vec{u}(1\,;5\,;3)\,;\vec{v}(0\,;4\,;-1)$

$\vec{u}\wedge\vec{v}(-17\,;1\,;4)$.

(2) $\vec{u}(7\,;9\,;0)\,;\vec{v}(-1\,;2\,;-4)$

$\vec{u}\wedge\vec{v}(-36\,;28\,;23)$.

(3) $\vec{u}(-2\,;-2\,;-1)\,;\vec{v}(3\,;5\,;7)$

$\vec{u}\wedge\vec{v}(-9\,;11\,;-4)$.

(4) $\vec{u}(5\,;0\,;1)\,;\vec{v}(-2\,;8\,;0)$

$\vec{u}\wedge\vec{v}(-8\,;-2\,;40)$.

◆ **Exercice 14 page 257**

$A(1\,;2\,;3)\,;\vec{u}(1\,;2\,;-1)\,;M(x\,;y\,;z)$

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=2$

$x+2y-z=4$

◆ **Exercice 15 page 257**

1. $\overrightarrow{AB}(1\,;-1\,;1)\,;\overrightarrow{AC}(3\,;3\,;0)$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ d'où $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

2. $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{AB}\,;\vec{v}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}$

3. $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$: base orthonormée directe.
$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\frac{1}{3\sqrt{6}}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$
or : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-3\,;3\,;6)$ d'où $\vec{w}(\frac{-1}{\sqrt{6}}\,;\frac{1}{\sqrt{6}}\,;\frac{2}{\sqrt{6}})$

◆ **Exercice 16 page 258**

$\vec{u}(0\,;3\,;2)\,;\vec{v}(5\,;0\,;2)$

1. $\frac{0}{5}\neq\frac{2}{2}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires

2. $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{n}(6\,;10\,;-15)$

◆ **Exercice 17 page 258**

1. $A(1\,;-1\,;2)\,;B(2\,;0\,;-1)\,;C(0\,;2\,;1)$
$\overrightarrow{AB}(1\,;1\,;-3)\,;\overrightarrow{AC}(-1\,;3\,;-1)$
$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(8\,;4\,;4)$ donc $\vec{n}(2\,;1\,;1)$

2. Aire (ABC) $=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=\frac{1}{2}\sqrt{64+16+16}$
$=2\sqrt{6}$

◆ **Exercice 18 page 258**

$A(1\,;2\,;1)\,;B(2\,;3\,;2)\,;C(2\,;0\,;2)$.

1. $\overrightarrow{AB}\,(1\,;1\,;1)\,;\overrightarrow{AC}(1\,;-2\,;1)$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

2. $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{3}$ donc $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{6}$ donc $\vec{v}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\,;-\frac{2}{\sqrt{6}}\,;\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

3. $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ donc $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{w}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,;0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\vec{w}\,;\ D\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\,;2\,;1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

◆ **Exercice 19 page 258**

1. $A(2\,;-1\,;1)\,;B(1\,;0\,;-2)\,;C(3\,;4\,;1)$
$\overrightarrow{AB}\,(-1\,;1\,;-3)\,;\overrightarrow{AC}(1\,;5\,;0)$
$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(15\,;-3\,;-6)$ donc $\vec{n}(5\,;-1\,;-2)$

2. Aire (ABC) $=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=\frac{1}{2}\sqrt{270}$

◆ **Exercice 20 page 258**

1. $P(1\,;2\,;-1)\,;Q(3\,;-1\,;4)\,;R(2\,;6\,;2)\,;S(a\,;b\,;c)$

2. PQRS est un parallélogramme $\Leftrightarrow\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PS}$
$a=0\,;b=9\,;c=-3$ d'où $S(0\,;9\,;-3)$

3. Aire (PQRS) $=\|\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{PR}\|$
$=\sqrt{29^2+1+11^2}$

◆ **Exercice 21 page 258**

1. $A(1\,;1\,;2)\,;B(2\,;1\,;3)\,;C(0\,;2\,;1)\,;D(a\,;b\,;c)$

2. ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$
$a=-1\,;b=2\,;c=0$ d'où $D(-1\,;2\,;0)$

3. Aire (ABC) $=\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|=\sqrt{2}$

◆ **Exercice 22 page 258**

$\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\,;\vec{v}=\vec{j}+\vec{k}$

Donc : $\vec{u}(1\,;1\,;1)\,;\vec{v}(0\,;1\,;1)$

$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$: $\vec{w}(0\,;1\,;1)$ et $\|\vec{w}\|=\sqrt{2}$

$\vec{n}(0\,;\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}})$

◆ **Exercice 23 page 258**

$\vec{u}(4\,;8\,;1)\,;\vec{v}(2\,;1\,;-2)\,;\vec{w}(3\,;-4\,;12)$

1. $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}=14\,\vec{w}$

2. $\vec{u}\wedge\vec{v}\,(-17\,;10\,;-12)$
$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}\,(72\,;168\,;38)$

3. $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})\,(-58\,;48\,;-152)$

◆ **Exercice 24 page 258**

$\vec{n}\,(1\,;-3\,;2)$

1. $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ pour $\vec{u}(2\,;0\,;-1)$
$\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ pour $\vec{v}(3\,;1\,;0)$

2. $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{n})$ est une base de $\mathcal{W}$
$\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{n}$
$\vec{w}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow c=0$

13. Systèmes linéaires

(pages 259 à 268 du livre de l'élève)

Ce chapitre vise essentiellement à :
– résoudre des systèmes d'équations linéaires par la méthode de Gauss ;
– donner une interprétation géométrique d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

La méthode de pivot dite de Gauss est une méthode pour transformer un système linéaire en un autre système équivalent mais triangulaire et donc plus facile à résoudre.
On soulignera la nécessité d'effectuer les transformations du système avec méthode en n'utilisant que les opérations autorisées.
On fera, à l'occasion de nombreux exercices, le lien entre les systèmes linéaires à deux inconnues et la position relative de droites dans le plan ou les systèmes linéaires à trois inconnues et la position relative de plans dans l'espace.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Principe de la méthode de Gauss • Opérations élémentaires sur les lignes d'un système d'équations linéaires : – échange de deux lignes ; – multiplication d'une ligne par un nombre non nul ; – combinaison d'une ligne avec une autre ligne. • Principe de la méthode.	• Transformer un système linéaire en un système équivalent. • Transformer un système linéaire en un système triangulaire équivalent par la méthode de Gauss. • Résoudre un système linéaire.
Interprétation géométrique d'un système linéaire • Position relative de deux droites dans le plan. • Position relative de trois plans dans l'espace.	• Donner une interprétation géométrique d'un système linéaire.

Exercices du manuel

Exercices d'application directe

♦ Exercice 1.a page 261
Si $(x ; y ; z) = (1 ; 1 ; 1)$,
$x + y - z \neq 4$
et $x + 3z \neq 2$
Donc $(1 ; 1 ; 1)$ n'est pas solution du système.

♦ Exercice 1.b page 261
(1) (Σ) et (Σ') ne sont pas équivalents.
(2) (Σ) et (Σ') ne sont pas équivalents.
(3) (Σ) et (Σ') sont équivalents.
(4) (Σ) et (Σ') sont équivalents.

Exercices d'apprentissage

♦ Exercice 1 page 268
(1) L'ensemble des solutions est l'ensemble des triplets $\left(1 - \frac{4\lambda}{5} ; -\frac{\lambda}{5} ; \lambda\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, représenté par une droite de vecteur directeur $\vec{u}\left(-\frac{4}{5} ; -\frac{1}{5} ; 1\right)$ passant par $A(1 ; 0 ; 0)$.

(2) Le système n'a pas de solution, les équations étant celles de deux plans parallèles.
(3) L'ensemble des solutions est l'ensemble des triplets $\left(\lambda ; 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda ; \sqrt{3}\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, représenté par une droite de vecteur directeur $\vec{u}\left(1 ; -\frac{\sqrt{3}}{2} ; 0\right)$ passant par $A(0 ; 3 ; 3\sqrt{3})$.

♦ Exercice 2 page 268

(1) Le système admet une solution unique $\left(\frac{16}{3} ; -\frac{11}{3} ; 5\right)$, représentée par le point d'intersection de trois plans.

(2) Le système n'a pas de solution, la première et la troisième équations étant celles de deux plans strictement parallèles.

(3) L'ensemble des solutions est l'ensemble des triplets $(5 + 5\lambda ; -2 - 2\lambda ; \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Les trois plans sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $\vec{u}(5 ; -2 ; 1)$ passant par le point $A(5 ; -2 ; 0)$.

(4) Le système n'a pas de solution, la première et la troisième équations étant celles de deux plans strictement parallèles.

(5) Le système n'a pas de solution, le troisième plan étant parallèle à l'intersection des deux premiers.

(6) $S = \{(x, y, x - 2y - 1), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Les trois équations sont celles d'un même plan.

♦ Exercice 3 page 268

(1)On pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$.

$X = \frac{1}{2}$ et $Y = 1$. Donc $x = \sqrt{e}$ et $y = e$.

(2) $S = \{(e^{-1/5} ; e^{-8/5})\}$

♦ Exercice 4 page 268

(1) $m = \frac{8}{7}$

(2) Le système n'a pas de solution quelque soit m.

♦ Exercice 5 page 268

(1) $\begin{cases} mx + y + z = 3 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$ équivalent à

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ (1 - m)y + (m - 1)z = 0 \\ (m - 1)(m + 2)z = m - 3 \end{cases}$$

Donc le système a une solution unique si $m \neq -2$ et $m \neq 1$.

Si $m = -2$ ou $m = 1$, le système n'a pas de solution.

(2) Le système a une solution unique si $m \neq 3$ et aucune solution si $m = 3$.

♦ Exercice 6 page 268

Soit x le nombre de rhinocéros, y le nombre d'antilopes et z le nombre de serpents.

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x + 2y = 14 \\ 4x + 4y = 32 \end{cases}$$

$x = 2 ; y = 6 ; z = 5$

♦ Exercice 7 page 257

$x - y + z = 4 ; 2x + y - 2z = 1$

a) On obtient : $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

D'où $(x ; y ; z) = (3 ; 3 ; 4)$.

b) On obtient : $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$

D'où $(x ; y ; z) = (2,5 ; 1 ; 2,5)$.

c) Par exemple $(x ; y ; z) = (3 ; 3 ; 4)$.

♦ Exercice 8 page 268

Si $\frac{x+1}{(x-2)^2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2}$

$ax + b - 2a = x + 1$ pour tout $x \neq 2$.

D'où $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 1 \end{cases}$

La solution est : $a = 1$ et $b = 3$.

♦ Exercice 9 page 268

Si $\frac{1}{(1+x)^2} = a + \frac{bx}{1+x} + \frac{cx}{(1+x)^2}$ sur $\mathbb{R} - \{-1\}$

$(a + b)x^2 + (2a + b + c)x + a = 1$

soit $\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b + c = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

La solution est $a = 1$, $b = -1$ et $c = -1$.

♦ Exercice 10 page 268

Si $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$P(1) = -1 : \quad a + b + c + d = -1$

$P(2) = -1 : \quad 8a + 4b + 2c + d = -1$

$P(3) = 8 \quad : 27a + 9b + 3c + d = 8$

$P'(1) = -1 : \ 3a + 2b + c = -1$.

La résolution du système donne :

$$a = \frac{7}{4} ; b = -6 ; c = \frac{23}{4} ; d = -\frac{5}{2}.$$

♦ Exercice 11 page 268

Si $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$,

$f'(x) = \frac{ax^2 - 2ax - b - c}{(x-1)^2}$.

Donc $f'(3) = \frac{1}{2}$ implique : $3a - b - c = 2$.

Si la courbe représentative de f admet une asymptote d'équation $y = x + 1$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(a-1)x^2 + bx + c + 1}{x - 1} = 0$

implique : $a - 1 = 0$ et $b = 0$.

D'où : $a = 1 ; b = 0 ; c = 1$.

♦ Exercice 12 page 268

1. Le cercle est circonscrit au triangle ABC si les points A, B et C sont sur le cercle, donc si leurs coordonnées vérifient l'équation du cercle.
On obtient le système :

$$\begin{cases} -a + b + c = -5 \\ 2a + 4b + c = -20 \\ 4a + 2b + c = -20 \end{cases}$$

qui a pour solution : $a = -3 ; b = -3 ; c = -2$.

2. Le cercle a pour équation :

$x^2 + y^2 - 3x - 3y - 2 = 0$

soit : $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$.

Le centre du cercle a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$

14. Statistique

(pages 269 à 292 du livre de l'élève)

Objectifs

Ce chapitre vise essentiellement à la poursuite de l'initiation à la statistique par la mise en place des séries statistiques doubles :
– nuage de points.
– ajustement et corrélation linéaire.

Commentaires

Dans tout ce chapitre, on s'appuiera sur de nombreux exemples concrets qui permettront de montrer l'utilité de développer des compétences statistiques.
On étudiera d'abord les séries statistiques doubles et les tableaux à double entrée en veillant à la bonne compréhension des éléments qui les composent.
On étudiera ensuite la corrélation existant entre deux variables puis l'ajustement linéaire et ses applications (extrapolation, interpolation, ...). L'interprétation des résultats devra faire l'objet d'une activité avec les élèves.
On proposera aussi des exemples où la représentation directe en $(x\ ;\ y)$ n'est pas possible et où il convient par exemple de représenter $(x\ ;\ \ln y)$ ou $(\ln x\ ;\ y)$ et on fera le lien avec des repères semi-logarithmiques.
On proposera des exemples où une transformation des données conduit à proposer un ajustement affine sur les données transformées.
L'utilisation de la calculatrice, en particulier de ses fonctions statistiques, permettra d'éviter de fastidieux calculs ; mais il conviendra de vérifier que les élèves connaissent et comprennent les calculs qu'ils effectuent.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Séries statistiques doubles : • Séries doubles discrètes. • Séries doubles avec regroupement en classes. • Séries marginales. • Tableaux statistiques à double entrée.	• Utiliser un tableau à double entrée représentant une série statistique double pour reconstituer les séries marginales.
Représentation graphique d'une série statistique double • Nuage de points. • Point moyen.	• Représenter une série statistique double par un nuage de points. • Retrouver une série statistique double à partir d'un nuage de points. • Déterminer le point moyen d'un nuage de points.
Ajustement linéaire • Méthode de Mayer. • Covariance. • Méthode des moindres carrés. • Droites de régression. • Coefficient de corrélation linéaire.	• Déterminer la droite de Mayer d'un nuage de points. • Calculer la covariance d'une série statistique double. • Déterminer l'équation d'une droite d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés. • Calculer le coefficient de corrélation linéaire. • Interpréter la valeur du coefficient de corrélation.

Exercices d'application directe

♦ Exercice 1.a page 273

1. a) $M_X = \{3\,000 ; 4\,500 ; 6\,000 ; 9\,000\}$.

b) $M_Y = \{1\,800 ; 2\,250 ; 3\,600 ; 4\,050 ; 4\,500\}$.

2. a)

x_i	3 000	4 500	6 000	9 000
n_i	1	2	1	2

b)

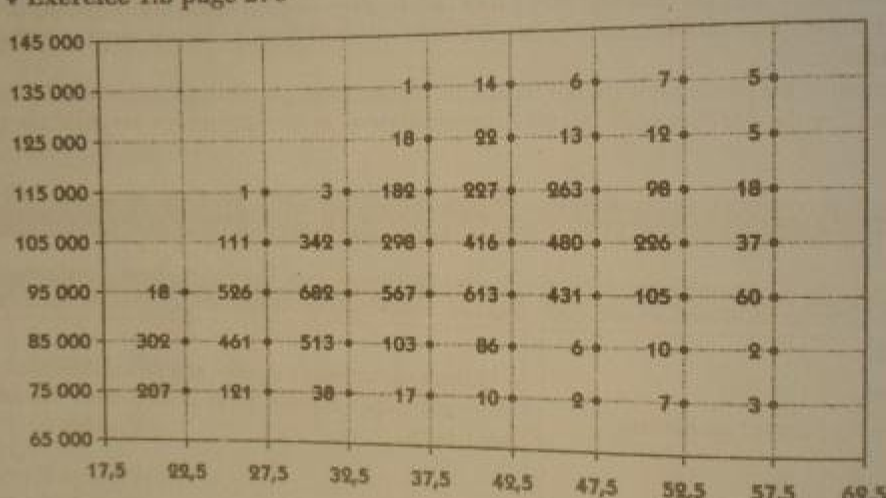
y_i	1 800	2 250	3 600	4 050	4 500
n_i	2	1	1	1	1

3.

M_Y \ M_X	3 000	4 500	6 000	9 000
1 800	1	1		
2 250		1		
3 600			1	
4 050				1
4 500				1
	1	2	1	2

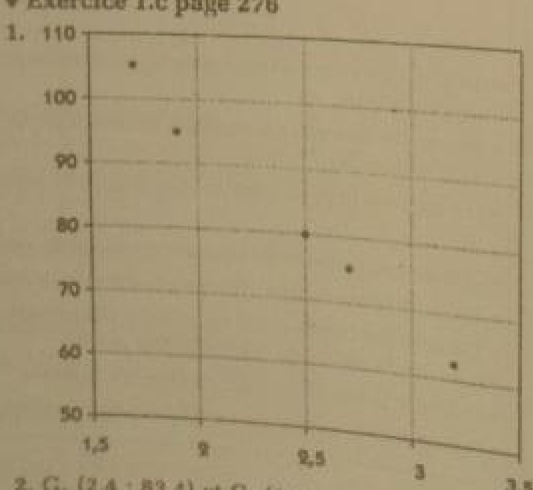
5. $\overline{X} = 6\,000$; $\overline{Y} = 2\,700$.

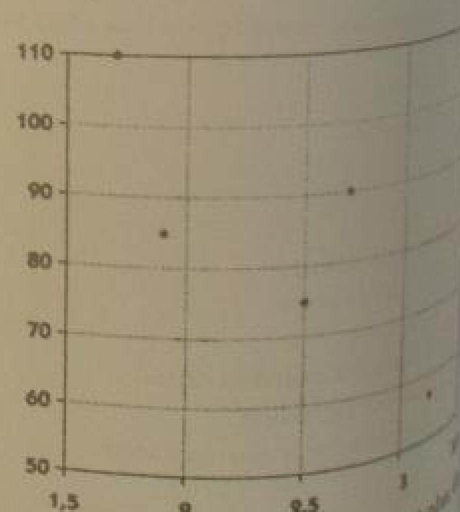
♦ Exercice 1.b page 276



♦ Exercice 1.c page 276

1.

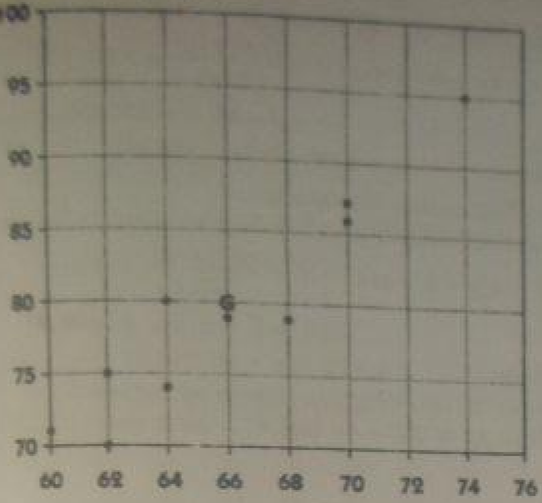




2. G_1 (2,4 ; 83,4) et G_2 (2,4 ; 83,4) : les deux points sont confondus, mais la seconde série est plus dispersée que la première.

♦ Exercice 2.a page 278

1.



2. G a pour coordonnées (66 ; 79,6).

♦ Exercice 2.b page 283

x_i	y_i	$(x_i-\bar{x})$	$(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})^2$
7,5	10	2,94	4,66	13,7004	8,6436
4,5	4	−0,06	−1,34	0,0804	0,0036
4,2	4,5	−0,36	−0,84	0,3024	0,1296
3,5	3,9	−1,06	−1,44	1,5264	1,1236
3,1	4,3	−1,46	−1,04	1,5184	2,1316
4,56	5,34			17,128	12,032

Alors $a = \dfrac{17{,}128}{12{,}032} \approx 1{,}4235$;

$b = 5{,}34 - 1{,}4235 \times 4{,}56 \approx -1{,}1513$.

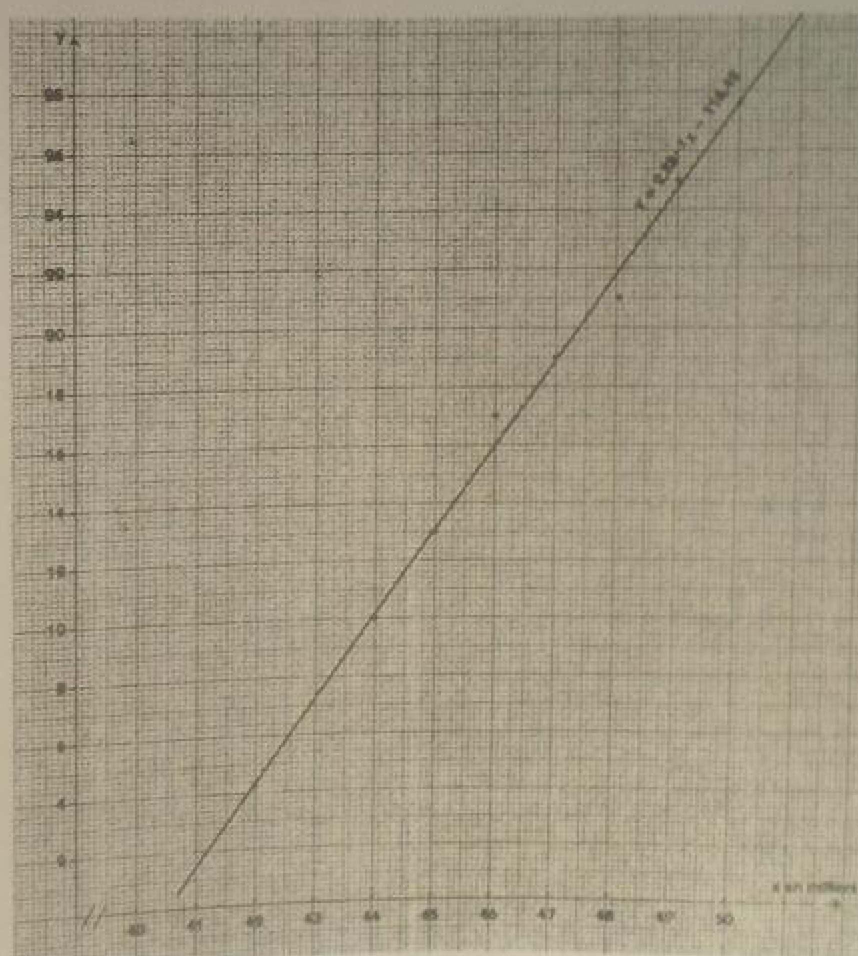
L'équation de la droite de régression est :

$y = 1{,}4235\,x - 1{,}1513$.

Exercices d'entrainement et problèmes

♦ Exercice 1 page 289

1. Graphique ci-contre.



2. Équation de la droite de regression de y en x

Tableau récapitulatif

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	44 000	10	$1{,}936\cdot10^9$	100	440 000
	45 000	13	$2{,}025\cdot10^9$	280	585 000
	46 000	17	$2{,}116\cdot10^9$	289	782 000
	47 000	19	$2{,}209\cdot10^9$	361	893 000
	48 000	21	$2{,}301\cdot10^9$	441	1 008 000
	49 000	25	$2{,}401\cdot10^9$	625	1 225 000
Σ	279 000	105	$1{,}2991\cdot10^{10}$	1 985	4 933 000

On obtient :

$\bar{x} = \frac{1}{N}\Sigma n_i x_i = 46\,500$; $\bar{y} = \frac{1}{N}\Sigma n_i y_i = 17{,}5$

$V(x) = \frac{1}{N}\Sigma n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = 2\,916\,666{,}66$

$V(y) = \frac{1}{N}\Sigma n_i y_i^2 - \bar{y}^2 = 24{,}583$

$\mathrm{cov}(x\,;y) = \frac{1}{N}\Sigma n_i x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = 8\,416{,}667$

La droite de regression de y en x est de la forme :

$y = ax + b$; avec $\left| \begin{array}{l} a = \dfrac{\mathrm{cov}(x\,;y)}{V(x)} = 2{,}88\cdot10^{-3} \\ b = \bar{y} - a\bar{x} = -116{,}68 \end{array} \right.$

donc : $y = 2{,}88\cdot10^{-3}x - 116{,}68$

3. Estimation du salaire

La droite de regression de x en y est de la forme :

$x = a'y + b'$; avec $\left| \begin{array}{l} a' = \dfrac{\mathrm{cov}(x\,;y)}{V(y)} = 342{,}37 \\ b' = \bar{x} - a'\bar{y} = 40\,508{,}47 \end{array} \right.$

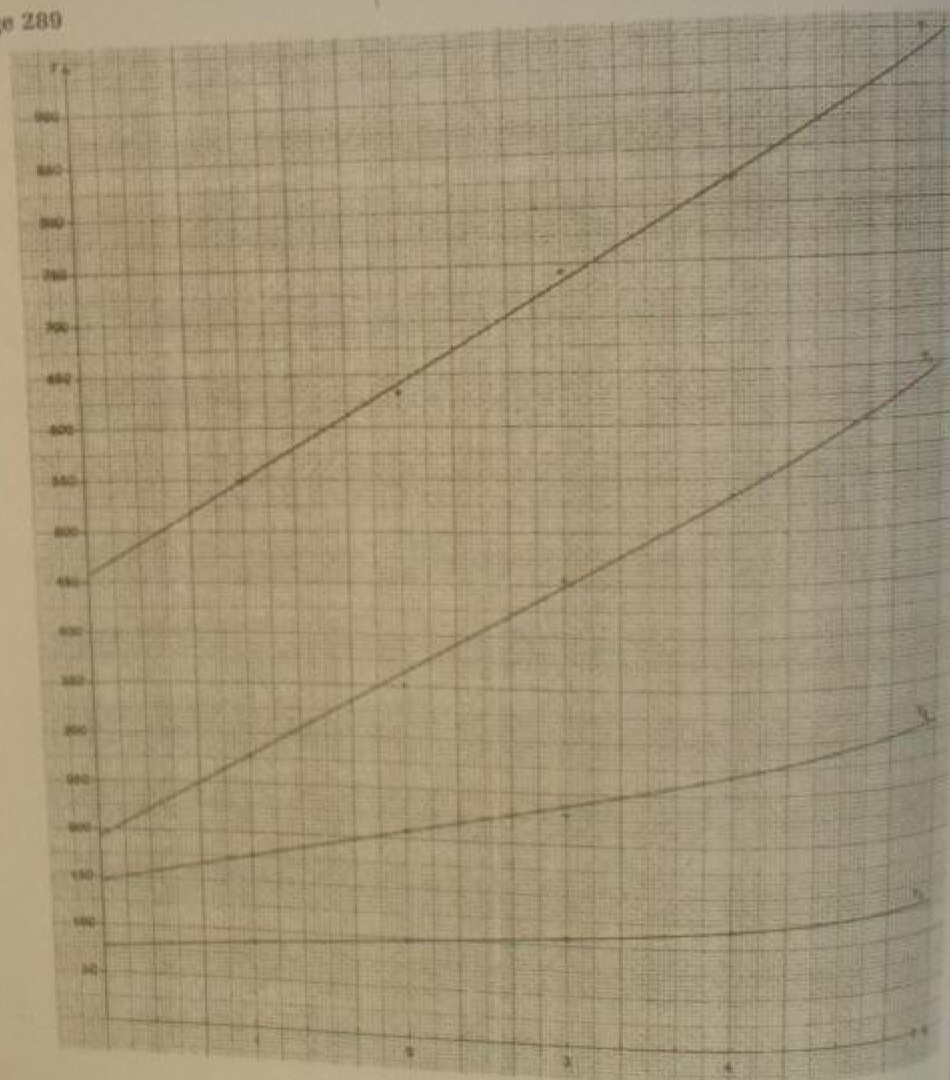
donc : $x = 342{,}37y + 40\,508{,}47$

Pour 30 candidats le salaire est estimé à :

$(342{,}37 \times 30) + 40\,508{,}47$ c'est à dire : 50 780

♦ Exercice 2. page 289

1. Graphique ci-contre.



2. Équation de la droite y_1

x_i	1	2
y_i	280	325

$\bar{x}_1 = 1{,}5$; $\bar{y}_1 = 302{,}5$

x_i	3	1
y_i	405	485

$\bar{x}_2 = 3{,}5$; $\bar{y}_2 = 445$

$y_1 = m_1x + P_1$; avec $\left| \begin{array}{l} m_1 = \dfrac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} = 71{,}25 \\ P_1 = \bar{y}_2 - m_1\bar{x}_2 = 195{,}625 \end{array} \right.$

donc : $y_1 = 71{,}25x + 195{,}625$

- Équation de la droite y_2

x_i	1	2
y_i	180	210

$\bar{x}_1 = 3{,}5$; $\bar{y}_1 = 195$

x_i	3	1
y_i	230	270

$\bar{x}_2 = 3{,}5$; $\bar{y}_2 = 250$

$y_2 = m_2x + P_2$; avec $m_2 = 27{,}5$; $P_2 = 153{,}75$
donc : $y_2 = 27{,}5x + 153{,}75$

- Équation de la droite y_3 : $y_3 = 10x + 80$
- Équation de la droite T : $T = 108{,}75x + 429{,}375$

3. $m = 108{,}75$; $P = 429{,}375$
on a : $m = m_1 + m_2 + m_3$; $P = P_1 + P_2 + P_3$

4. Valeurs probables de y_1, y_2, y_3 ; T sur 1990
$y_1 = 979{,}375$; $y_2 = 456{,}25$
$y_3 = 190$; $T = 1\,625{,}625$
Remarque : Par la méthode des moindres carrés, on obtient pour équation :
$y_1 : y = 69{,}5x + 200$
$y_2 : y = 29x + 150$
$y_3 : y = 10{,}4x + 79$
$T : y = 108{,}9x + 429$

♦ Exercice 3. page 289

1. Graphique ci-dessous.

- Coordonées de G_1 et G_2

x_i	3	27	51	70
y_i	12,1	20,2	27,5	37,6

$x_1 = \bar{x} = 37{,}75$
$y_1 = \bar{y} = 24{,}35$

donc : $G_1(37{,}75 ; 24{,}35)$

x_i	97	116	156	184
y_i	47,3	50,7	66,6	76,5

$x_2 = \bar{x} = 138{,}25$
$y_2 = \bar{y} = 60{,}28$

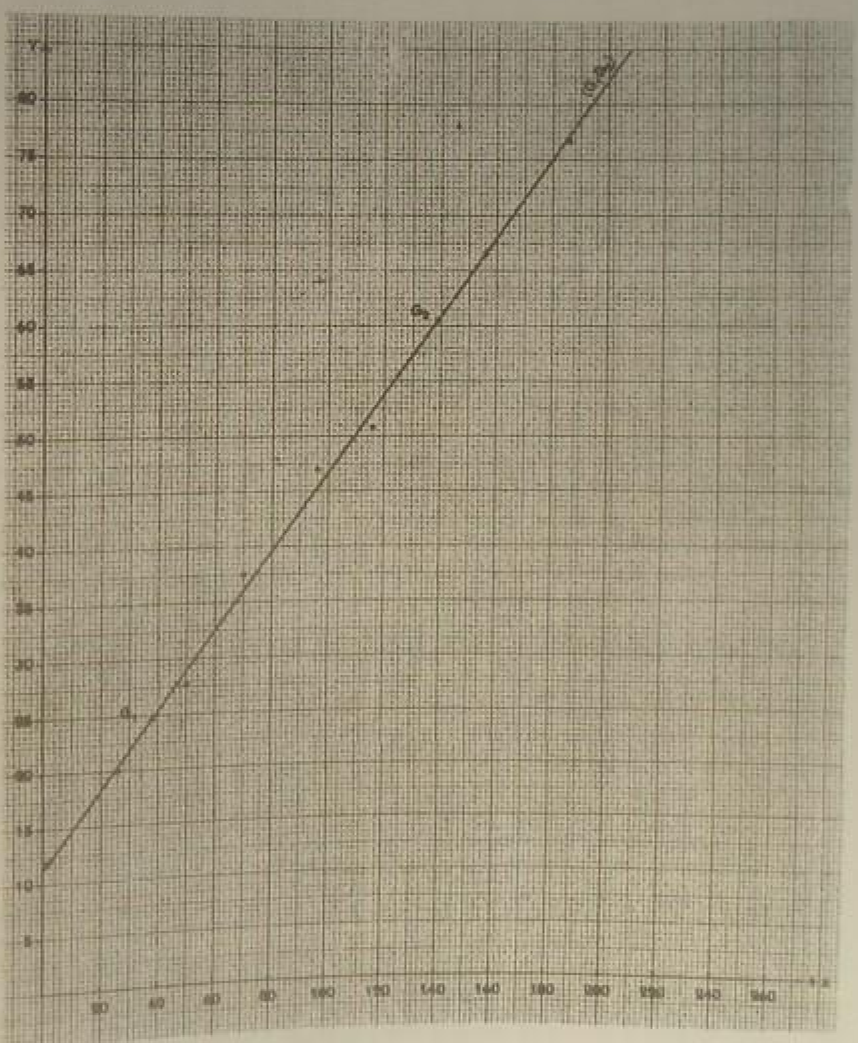
donc : $G_2(138{,}25 ; 60{,}28)$

- Équation de la droite $(G_1 G_2)$

$y = 0{,}36x + 10{,}76$

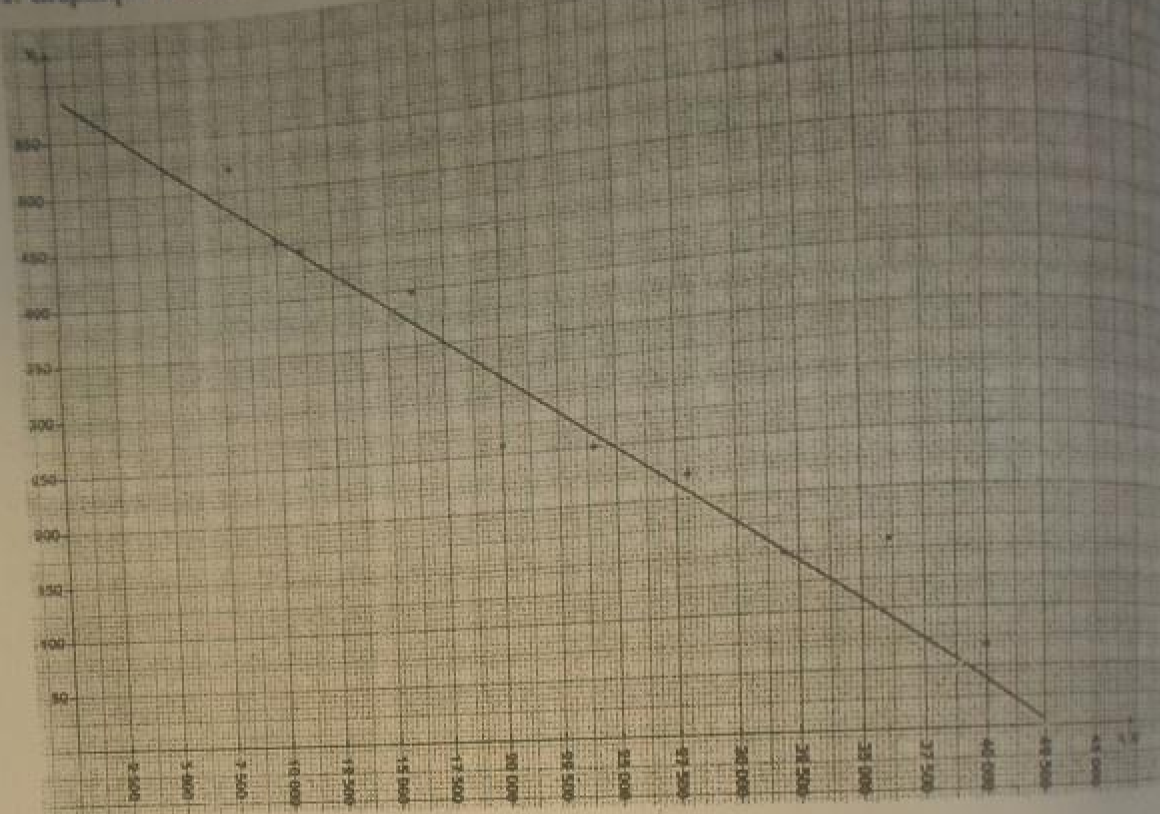
- Tracé de la droite $(G_1 G_2)$

2. $a = 0{,}01$;
$b = 3$;
$R = 3{,}4$
Pour une température de 40 °C, la résistance électrique vaut 3,4 Ω.



◆ **Exercice 4, page 289**

1. Graphique ci-dessous.



- Équation d'une droite d'ajustement (Δ_1) du nuage.

* Sous-nuage 1

x_i	y_i
40 000	70
36 000	80
32 000	150
28 000	220
24 000	250

* Sous-nuage 2

x_i	y_i
24 000	250
20 000	260
16 000	400
12 000	440
10 000	450

On obtient : $G_1(x_1\,;y_1) = G_1(\overline{x}_1\,;\overline{y}_1) = G_1(3{,}2\cdot 10^4\,;154)$

$G_2(x_2\,;y_2) = G_2(\overline{x}_2\,;\overline{y}_2) = G_2(1{,}32\cdot 10^4\,;414)$

d'où : (Δ_1) $\quad y = -0{,}0138x + 596{,}6$

2. Coefficient de corrélation linéaire (moindres carrés)

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
	40 000	70	$16\cdot 10^8$	4 900	2 800 000
	36 000	80	$12{,}96\cdot 10^8$	6 400	2 880 000
	32 000	150	$10{,}24\cdot 10^8$	22 500	4 800 000
	28 000	220	$7{,}84\cdot 10^8$	48 400	6 160 000
	24 000	250	$5{,}76\cdot 10^8$	62 500	6 000 000
	20 000	260	$4\cdot 10^8$	67 600	5 200 000
	16 000	400	$2{,}56\cdot 10^8$	160 000	6 400 000
	12 000	440	$1{,}44\cdot 10^8$	193 600	5 280 000
	10 000	450	$1\cdot 10^8$	202 500	4 500 000
	8 000	520	$0{,}64\cdot 10^8$	270 400	4 160 000
Σ	226 000	2 840	$62{,}44\cdot 10^8$	1 038 800	48 180 000

On obtient :

$\overline{x} = 22\,600\,;\quad \overline{y} = 284\,;$

$V(x) = \left(\frac{1}{N}\Sigma\, n_i x_i^2\right) - \overline{x}^2 = 113\,640\,000$

$V(y) = \left(\frac{1}{N}\Sigma\, n_i y_i^2\right) - \overline{y}^2 = 23\,224$

$\text{cov}(x\,;y) = \frac{1}{N}\Sigma\, x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y} = -1\,600\,400$

Donc $|r| = \frac{|\text{cov}(x\,;y)|}{\sqrt{V(x)\cdot V(y)}} = 0{,}986$

3. Équation de la droite de regression de y en x

on a : $y = ax + b\,;$

avec : $a = \frac{\text{cov}(x;y)}{V(x)} = -0{,}0141\,;$

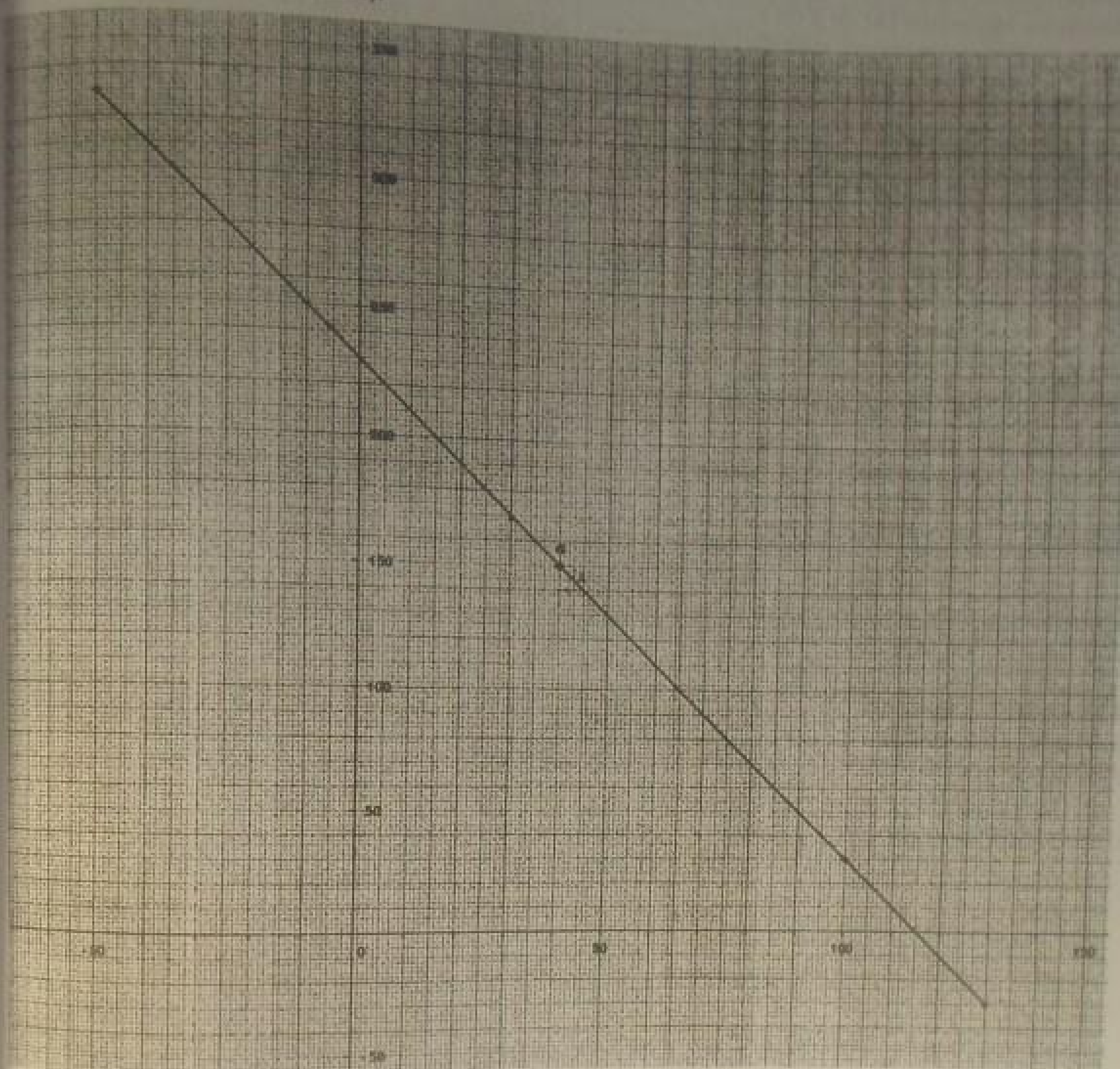
$b = \overline{y} - a\overline{x} = 602{,}3$

d'où : (Δ_2) $\quad y = -0{,}0141x + 602{,}3.$

Exercice 5. page 289

1. a) Graphique ci-contre.

b) G a pour coordonnées (40 ; 150).



2. a)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
− 50	330	2 500	108 900	− 16 500
− 10	250	100	62 500	− 2 500
30	170	900	28 900	5 100
100	30	10 000	900	3 000
130	− 30	16 900	900	− 3 900
Σ 200	750	30 400	202 100	− 14 800

$\bar{x} = 40$; $\bar{y} = 150$

$V(x) = \left(\frac{1}{N}\Sigma n_i x_i^2\right) - \bar{x}^2 = 4\,480$

$V(y) = \left(\frac{1}{N}\Sigma n_i y_i^2\right) - \bar{y}^2 = 17\,920$

$\text{cov}(x\,;y) = \frac{1}{N}\Sigma x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y} = -8\,960$

Donc $|r| = \frac{\text{cov}(x\,;y)}{\sqrt{V(x)\,V(y)}} = -1$.

b) L'ajustement linéaire est parfait.

3. a) Équation de la droite de regression de y en x

On a : $y = ax + b$

avec $a = \frac{\text{cov}(x;y)}{V(x)} = -2$ et $b = \bar{y} - a\bar{x} = 230$.

D'où (Δ_1) : $y = -2x + 230$.

b) Équation de la droite de regression de x en y

On a : $x = a'y + b'$;

avec $a' = \frac{\text{cov}(x;y)}{V(x)} = -0{,}5$ et $b' = \bar{x} - a'\bar{y} = 115$.

D'où (Δ_2) : $x = -0{,}5y + 115$.

c) Les équations sont celles d'une même droite. Il y a donc une infinité de points d'intersection.

♦ Exercice 6. page 290

1. Graphique ci-contre.
2. Droite de regression (Δ) de y en x

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
100	51	10 000	2 601	5 100
160	44	25 600	1 936	7 040
220	42	48 400	1 764	9 240
320	39	102 400	1 521	12 480
400	34	160 000	1 156	13 600
480	23	230 400	529	11 040
560	21	313 600	441	11 760
640	13	409 600	169	8 320
720	7	518 400	49	5 040
800	6	640 000	36	4 800
Σ 4 400	280	2 458 400	10 202	88 420

On obtient : $\overline{x} = 440$; $\overline{y} = 28$

$V(x) = 52\ 240$; $V(y) = 236{,}2$

$\text{cov}(x\ ;\ y) = -3\ 478$

d'où : (Δ) $y = -0{,}06x + 57{,}29$

3. *a)* Bénéfice $b_{(x)}$ en milliers de F CFA :

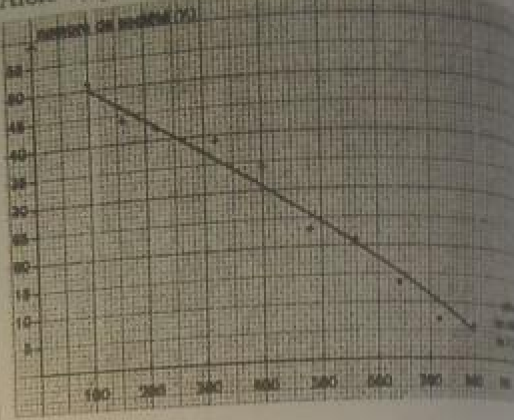
$b(x) = yx - (50y + 8\ 000)$

$b(x) = -0{,}06x^2 + 60{,}29x - 10\ 864{,}5$

b) $b'(x) = -0{,}12x + 60{,}29$

$b'(x) = 0$ si et seulement si $x = x_0 \approx 502{,}4 \in [100$; ...

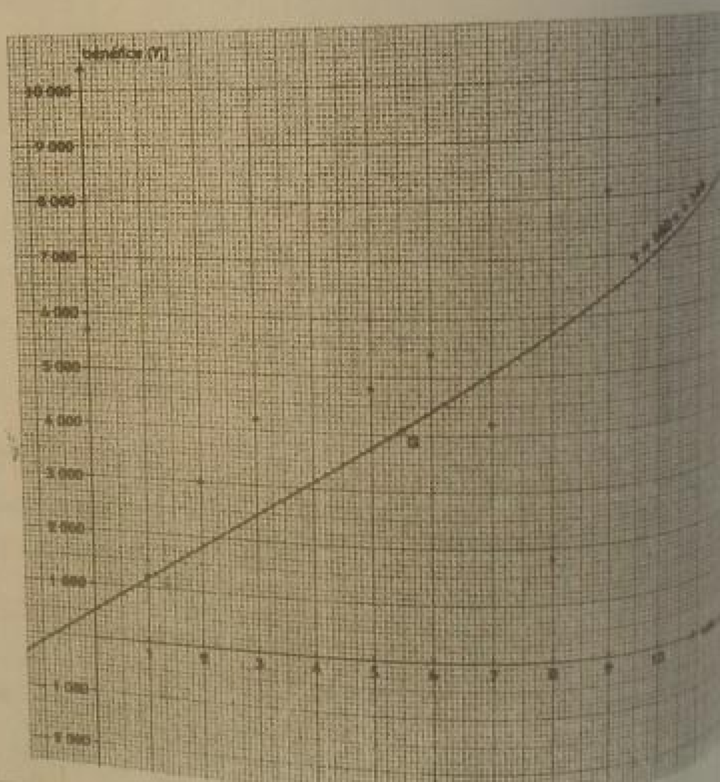
Alors $b(x_0) = 4\ 280{,}85 \cdot 10^3$ F CFA $= 4\ 280\ 850$ F C...



♦ Exercice 7. page 290

1. Graphique ci-contre.

G(5,5 ; 4 170)



• Droite (𝒟) de Mayer

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1 200	3 000	4 200	− 600	4 800

$x_{G_1} = 3$

$y_{G_1} = 2\ 520$

x_i	6	7	8	9	10
y_i	5 400	4 200	1 800	8 100	9 600

$x_{G_2} = ...$

$y_{G_2} = ...$

on obtient : (𝒟) $y = 660x + 540$

2. a) Coefficient de corrélation r

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
1	1 200	1	1 440 000	1 200
2	3 000	4	9 000 000	6 000
3	4 200	9	$1,764\cdot10^7$	12 600
4	− 600	16	$3,6\cdot10^5$	− 2 400
5	4 800	25	$2,304\cdot10^7$	24 000
6	5 400	36	$2,916\cdot10^7$	32 400
7	4 200	49	$1,764\cdot10^7$	29 400
8	1 800	64	$3,24\cdot10^6$	14 400
9	8 100	81	$6,561\cdot10^7$	72 900
10	9 600	100	$9,216\cdot10^7$	96 000
Σ 55	41 700	385	$2,592\,9\cdot10^8$	$2,865\cdot10^5$

On obtient : $\overline{x} = 5,5$; $\overline{y} = 4\,170$

$V(x) = 8,25$; $V(y) = 8\,540\,100$

$\text{cov}(x\,;y) = 5\,715$; $r = 0,68$

b) Équation de (Δ) d'ajustement affine (méthode des moindres carrés).

on obtient : (Δ) $y = 692,73x + 360$

3. Bénéfice pour une exploitation de 50 ha est estimé à : 34 996,5 F.

Exercice 8. page 290

1. Équation de la droite d'ajustement $(\mathscr{D}_1)$.

x_i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
1	63 000	85 000	$3,969\cdot10^9$	$7,225\cdot10^9$	$5,355\cdot10^9$
2	65 000	83 000	$4,225\cdot10^9$	$6,889\cdot10^9$	$5,395\cdot10^9$
3	64 000	95 000	$4,096\cdot10^9$	$9,025\cdot10^9$	$6,08\cdot10^9$
4	66 000	105 000	$4,356\cdot10^9$	$1,102\,5\cdot10^{10}$	$6,93\cdot10^9$
5	69 000	116 000	$4,761\cdot10^9$	$1,345\,6\cdot10^{10}$	$8,004\cdot10^9$
6	71 000	117 000	$5,041\cdot10^9$	$1,368\,9\cdot10^{10}$	$8,307\cdot10^9$
7	75 000	125 000	$5,625\cdot10^9$	$1,562\,5\cdot10^{10}$	$9,375\cdot10^9$
8	76 000	133 00	$5,776\cdot10^9$	$1,768\,9\cdot10^{10}$	$1,010\,8\cdot10^{10}$
9	80 000	129 000	$6,4\cdot10^9$	$1,864\,1\cdot10^{10}$	$1,096\cdot10^{10}$
10	81 000	1[illegible]7 000	$6,561\cdot10^9$	$1,876\,9\cdot10^{10}$	$1,109\,7\cdot10^{10}$
Σ 55	710 000	1 125 000	$5,081\,1\cdot10^{10}$	$1,300\,33\cdot10^{11}$	$8,097\,1\cdot10^{10}$

$(y_i\,;x_i)$ est la série considérée.

On obtient : $\overline{z} = 5,5$; $\overline{x} = 71\,000$

$(\mathscr{D}_1)$ $x = 2\,117,58z + 59\,133,31$

2. Coefficient de corrélation linéaire considéré.

On obtient :

$V(x) = 40\,000\,000$; $V(y) = 347\,050\,000$

$r = 0,93$

3. Une équation de la droite de regression de y en x

On obtient :

$(\mathscr{D}_2)$ $y = 2,74x - 82\,040$

4. Nombre de colis livrés en 2002

2002 correspond au rang 21 ; on obtient :

$x = 104\,442,49$; $y = 204\,132,4$

d'où : nombre de colis livrés en 2002 est de 204 132.

Exercice 9. page 290

1. Graphique page suivante.

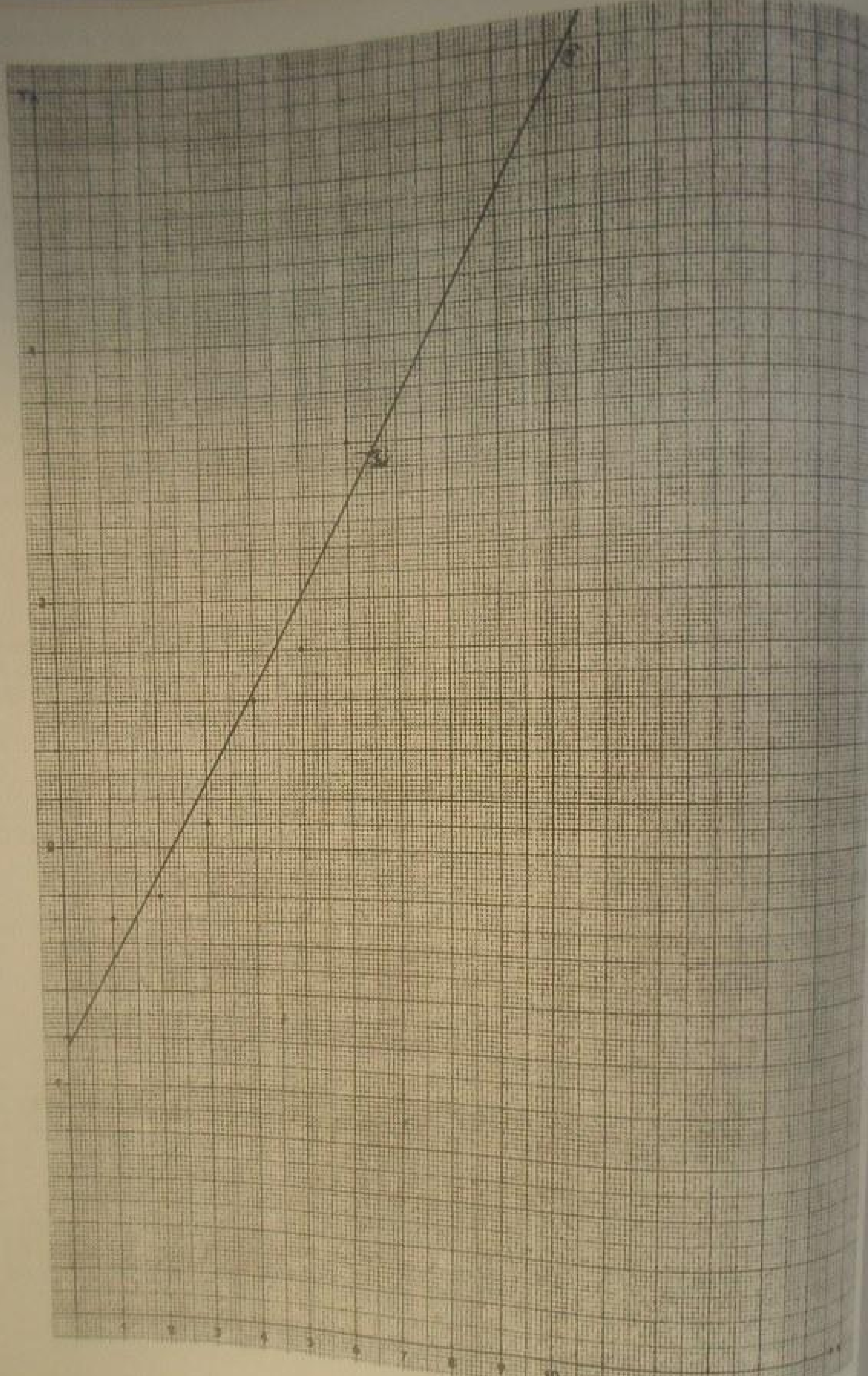
2. Équation de la droite $(\mathscr{D})$ de regression de y en x

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
0	1,2	0	1,44	0
1	1,7	1	2,89	1,7
2	1,8	4	3,24	3,6
3	2,2	9	4,84	6,6
4	2,6	16	6,76	10,4
5	2,8	25	7,84	14
6	3,6	36	12,96	21,6
21	15,9	91	39,97	57,9

On obtient :

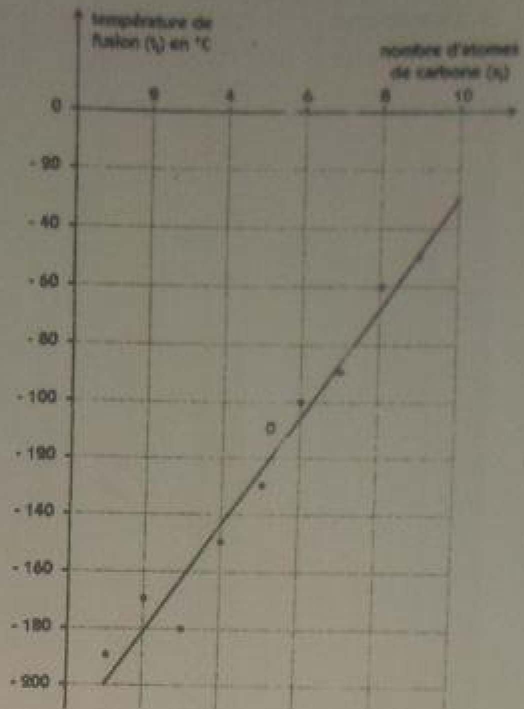
$(\mathscr{D})$ $y = 0,37x + 1,18$

3. En 2004, le nombre d'actifs à temps partiel sera de $4,14\cdot10^6$.


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

♦ Exercice 10. page 291

1. Graphique ci-contre.



2. Le point moyen G a pour coordonnées (5,5 ; – 115).

3. *a)*

	x_i	t_i	$(x_i-\overline{x})^2$	$(t_i-\overline{t})^2$	$(x_i-\overline{x})(t_i-\overline{t})$
	1	– 190	20,25	5 625	337,5
	2	– 170	12,25	3 025	192,5
	3	– 180	6,25	4 225	162,5
	4	– 150	2,25	1 225	52,5
	5	– 130	0,25	225	7,5
	6	– 100	0,25	225	7,5
	7	– 90	2,25	625	37,5
	8	– 60	6,25	3 025	137,5
	9	– 50	12,25	4 225	227,5
	10	– 30	20,25	7 225	382,5
Moyenne	5,5	– 115	8,25	2 965	154,5

On obtient : $\overline{x} = 5,5$; $\overline{t} = -115$

$V(x) = 8,25$; $V(t) = 2\,965$

$\text{cov}(x\,;\,t) = 154,5$

d'où : $r = 0,988$

b) $a = 18,727$ et $b = -218$.

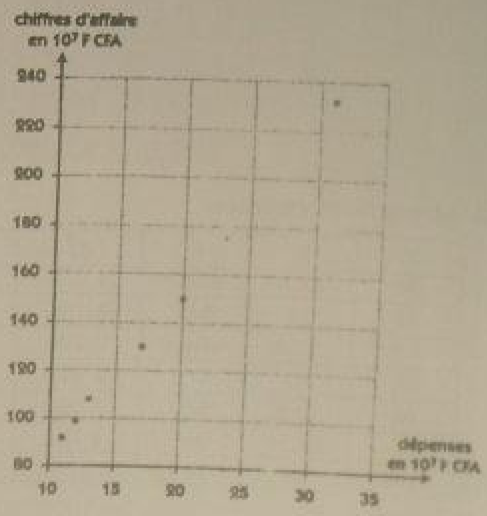
Donc (D) : $t = 18,727x - 218$.

c) La molécule $C_{12}H_{26}$ compte 12 atomes de carbone.

Donc : $t_j = -65,3$ °C.

♦ Exercice 11. page 291

1. Graphique ci-contre.



2. Droite de regression de y en x par la méthode de Mayer

x_i	12	17	11	13	31	20
y_i	99	130	12	108	232	150

$G_1(13,33\,;\,107)$ $\quad G_2(21,33\,;\,163,33)$

On obtient : $y = -7,04x + 13,11$

3. Droite de regression pour la méthode des moindres carrés

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
	12	99	144	9 801	1 188
	17	130	289	16 900	2 210
	11	92	121	8 464	1 012
	13	108	169	11 664	1 404
	31	232	961	53 824	7 192
	20	150	400	22 500	3 000
Σ	104	811	2 084	123 153	16 006

On obtient :

– la droite de regression de y en x

$y = 6,92x + 15,11$

– la droite de regression de x en Y

$x = 0,14y - 2,13$

4. Coefficient de corrélation r : $r = 0,998$

Il existe une bonne corrélation entre les deux droites de régression.

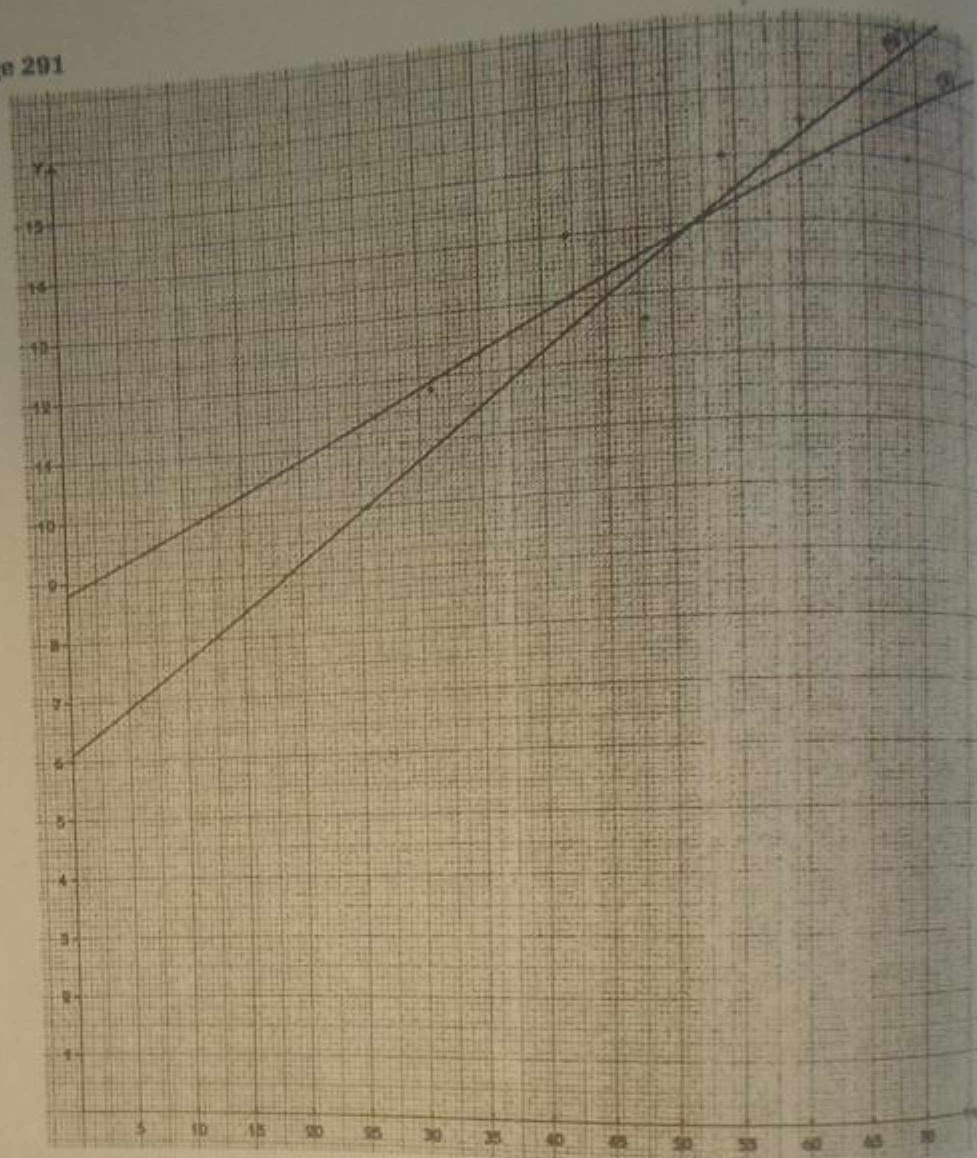
• Dépense pour un chiffre d'affaires bimensuel de 2 milliards de F.CFA : $x = 25,87$ soit 258 700 000 F

• Chiffre d'affaires pour une dépense bimensuel de 300 millions de F.CFA :

$y = 222,71$ soit 2 227 100 000 F

♦ Exercice 12. page 291

1. Graphique ci-contre.



2. Moyenne et variance.

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
	36	11,8	424,8	1 296	139,24
	42	14	588	1 764	196
	48	12,6	604,8	2 304	158,76
	54	15	810	2 916	225
	60	15,5	930	3 600	240,25
	69	15,10	1 041,9	4 761	228,01
Σ	309	84	4 399,5	16 641	1 187,26

On obtient :

$\overline{x} = 51{,}50$; $\overline{y} = 14$; $V(x) = 121{,}25$; $V(y) = 1{,}88$

3. – Droite de regression de y en x

On obtient : $y = 0{,}1x + 8{,}8$

– Droite de regression de x en y

On obtient : $x = 6{,}5y - 39{,}9$

4. $r = 0{,}812$

5. On a : $y = 0{,}1x + 8{,}8$

pour $x = 70$; $y = 15{,}8$

♦ Exercice 13. page 291

1. Coefficient de corrélation r

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	6 400	7 200	8 700	10 400	12 600	15 0[illegible]
z_i	3,806 2	3,857 3	3,939 5	4,017 0	4,100 4	4,176 [illegible]

$\overline{x} = 3{,}5$; $\overline{z} = 3{,}982\,8$;

$V(x) = 2{,}916\,7$; $V(z) = 0{,}016\,4$;

$cov(x\,;z) = 0{,}2213$

d'où $r = 0{,}998$

2. Droite d'ajustement linéaire de z à x

$z = 0{,}076x + 3{,}717$

Donc $\log(y) = 0{,}076x + 3{,}717$

d'où $y = 10^{0{,}076x + 3{,}717} = 10^{3{,}717}\ 10^{0{,}076x}$

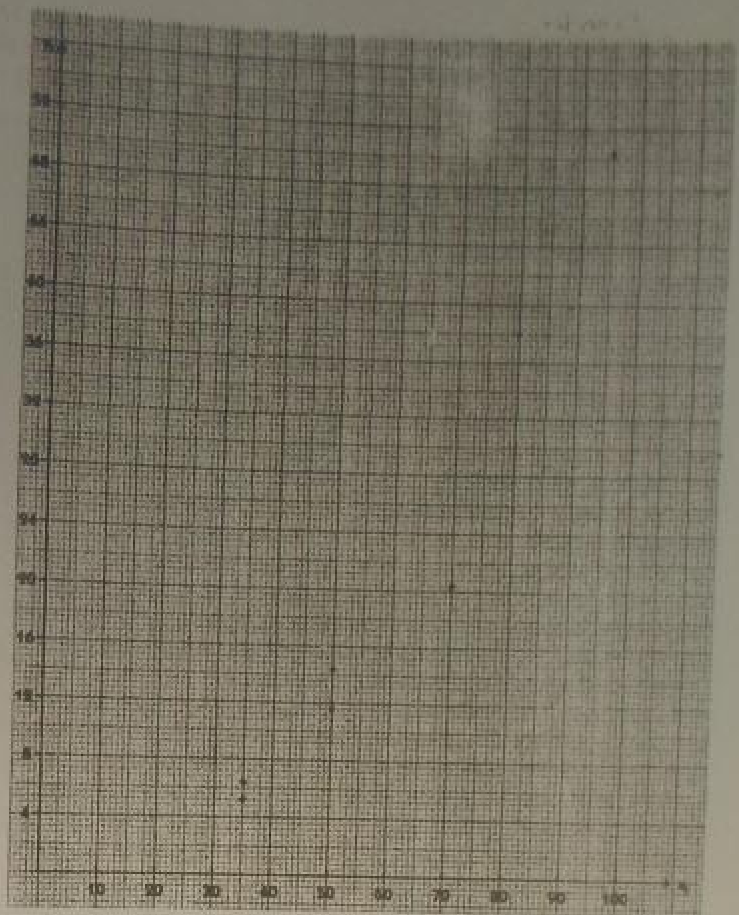
$y = 5212 \cdot 10^{0{,}076x}$.

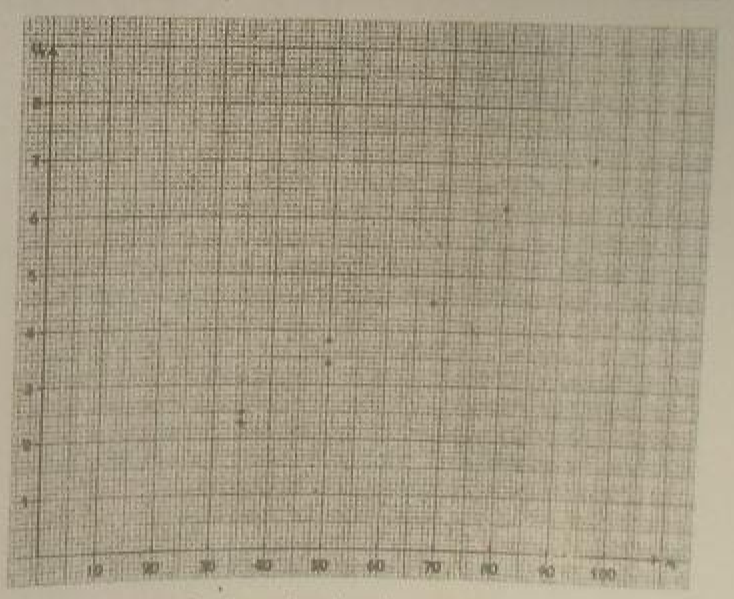
3. Estimation du nombre d'articles en stock en 2002.

$x = 14$ donc : $y = 5212.10^{0{,}076 \times 14} = 60\,395$

◆ **Exercice 14. page 281**

1. Graphiques ci-contre.





2. Tableau statistique de la série double $(x\ ;\ u)$

x_i	35	50	68	35	80	50	95
u_i	2,31	3,81	4,51	2,55	6,21	3,39	7,11

Il y a un ajustement affine entre x et u.
Coefficient de corrélation linéaire r. On obtient :
$\bar{x} = 59$; $\bar{u} = 4{,}27$; $V(x) = 447{,}43$; $V(u) = 2{,}81$.
$\mathrm{cov}(x\ ;\ u) = 35{,}04$; $r = 0{,}99$

- Droite de regression de u en x
  $u = 0{,}08x + 0{,}3$[illegible]
- Estimation de la distance pour 100 km/h
  $u = 7{,}65$; $y = u^2 = 58{,}52$ m.

♦ **Exercice 15. page 292**

1re partie : Ajustement affine

1. Coefficient de corrélation de la série $(x_i\,;\,y_i)$

On obtient : $\overline{x} = 7$; $\overline{y} = 322{,}13$;

$V(x) = 10{,}5$; $V(y) = 2\,274{,}359$

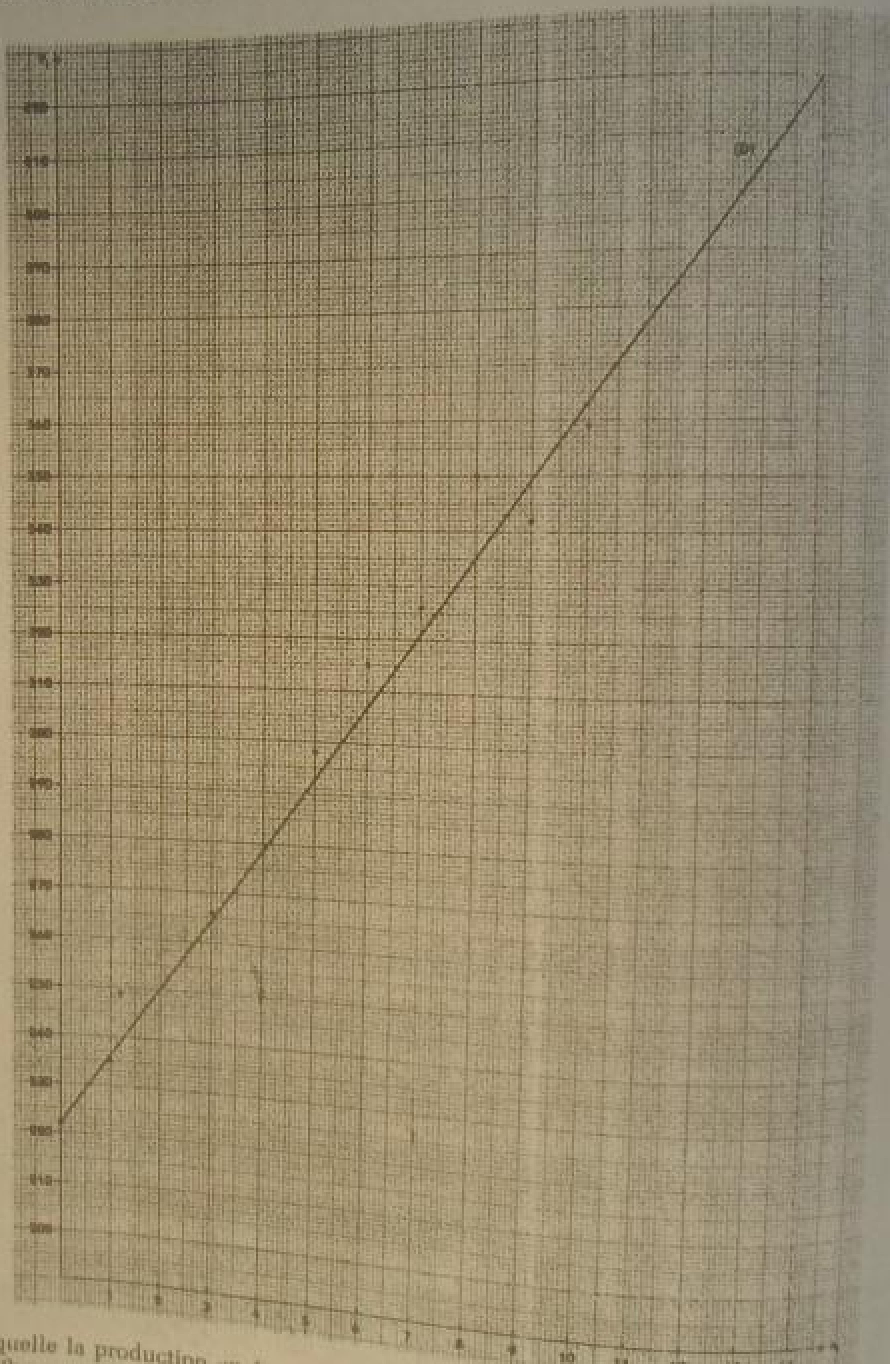
$\mathrm{cov}(x\,;\,y) = 152{,}625$; $r = 0{,}988$

donc, il existe une bonne corrélation entre x_i et y_i.

2. Droite de regression (D) de y en x [...]
de des moindres carrés

(D) : $y = 14{,}5x + 220{,}3$

3. Graphique ci-dessous.



Année à laquelle la production en énergie dépassera 420 TWh : $x = 14$ ans.

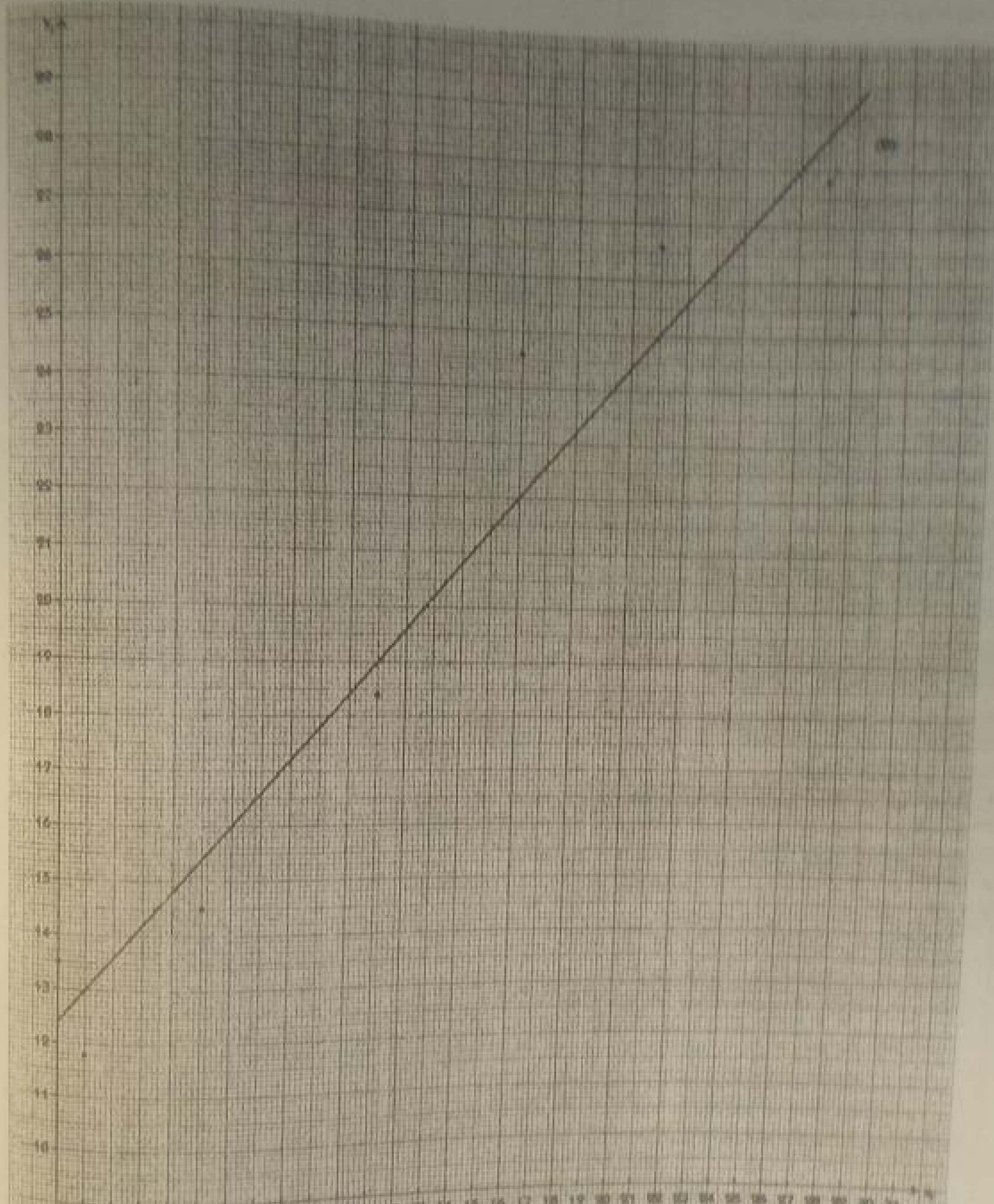
La production serait supérieure à 420 TWh en 1999.

2e partie : Ajustement par une parabole $(\mathcal{P})$

$(\mathcal{P})$ $Y = -0{,}48x^2 + 19{,}4x$ [...]

♦ **Exercice 16, page 292**

1. Graphique ci-dessous.



2. Coefficient de corrélation

On obtient : $\overline{x} = 15,571$; $\overline{y} = 21,357$;

$V(x) = 91,250$; $V(y) = 34,876$

$cov(x\,;y) = 54,264$; $r = 0,946$

3. Droite de régression de Y en X (D) :

$$y = 0,6x + 12,4$$

4. L'an 2000 correspond au rang 31 donc : $y = 31$

Une estimation du nombre de véhicule en l'an 2000 dans le pays P est 31 millions.

3. $a = 9,5$; $b = \dfrac{16,5}{\ln 25} = 5,1$.

• Expression de $f_{(x)}$: $f_{(x)} = 9,5 + 5,1 \ln x$.

Estimation du nombre de véhicule en 2000

$$f_{(31)} = 27,01$$

En 2000 ce nouvel ajustement prévoit 27 millions de véhicules.

♦ Exercice 17. page 292

1. Graphique ci-contre.

2. Coefficients de corrélation entre x et y

On obtient :

$\bar{x} = 1\,400$; $\bar{y} = 1\,938$;

$V(x) = 960\,000$;

$V(y) = 5\,887\,900{,}8$

$\text{cov}(x\,;\,y) = 2\,090\,400$;

$r_1 = 0{,}88$

– Série $(x_i\,;\,\ln y_i)$

on pose $u_i = \ln y_i$

On obtient :

$\bar{x} = 1\,400$; $\bar{u} = 6{,}14$;

$V(x) = 960\,000$;

$V(u) = 4{,}65$

$\text{cov}(x\,;\,u) = 2\,065{,}4$;

$r_2 = 0{,}978$

– Série $(\ln x_i\,;\,\ln y_i)$

on pose $w_i = \ln x_i$

On obtient :

$\overline{w_i} = 6{,}84$; $\bar{u} = 6{,}14$;

$V(w_i) = 1{,}034$; $V(u) = 4{,}65$

$\text{cov}(w\,;\,u) = 2{,}182$; $r_3 = 0{,}99$

• On a $r_3 > r_2 > r_1$

donc l'ajustement de la série $(\ln x_i\,;\,\ln y_i)$ semble le meilleur.

3. Droite de regression de $\ln y$ en $\ln x$

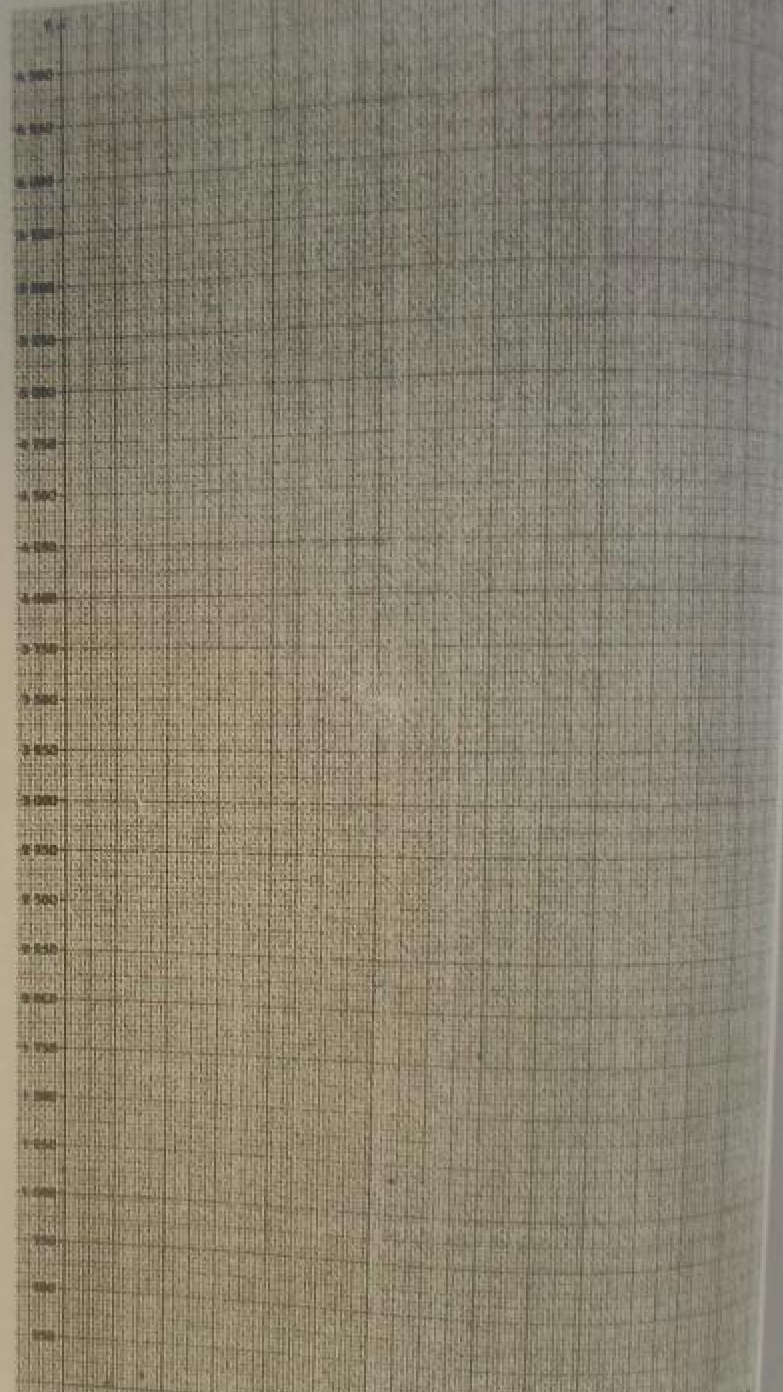
$\ln y = 2{,}11 \ln x - 8{,}301$

• Ajustement puissance de y en x

on a : $e^{\ln y} = e^{2{,}11 \ln x - 8{,}301}$

$y = e^{\ln x^{2{,}11}} \times e^{-8{,}301}$

$y = 2{,}48 \cdot 10^{-4}\, x^{2{,}11}$



15. Probabilité

(pages 293 à 312 du livre de l'élève)

OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :
- revoir brièvement le programme de l'analyse combinatoire de la classe de Première, dont la mauvaise maîtrise compromet une aisance dans l'étude de la probabilité ;
- introduire la probabilité d'un événement en liaison avec la statistique d'une part et le langage ensembliste d'autre part.

COMMENTAIRES

Les notions d'expérience aléatoire et de probabilité d'un événement sont totalement nouvelles pour les élèves.
Ces notions seront donc introduites sur des exemples simples en faisant le lien entre les fréquences statistiques de réalisation d'un événement et la probabilité de cet événement.
Le choix de l'univers étant fondamental, on apprendra aux élèves à reconnaître l'univers et les événements élémentaires d'une expérience aléatoire. On fera le lien entre l'algèbre des événements et les opérations sur les ensembles finis.
On modélisera des expériences aléatoires de référence (lancers de un ou plusieurs dés discernables ou non, tirage au hasard dans une urne, avec remise, sans remise, choix de nombres, de cartes au hasard, ...).
On proposera des situations variées ne conduisant pas toutes à un cadre d'équiprobabilité.
À cette occasion il conviendra de consolider les connaissances acquises en première sur le dénombrement des ensembles finis, sans rechercher des difficultés techniques inutiles.
On proposera, autant que faire se peut, des exercices se rapportant à des situations ayant du sens (économie, biologie, ...).

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

savoirs	savoir-faire
Analyse combinatoire • Arrangements, permutations, combinaisons. • Formule du binôme : - le triangle de Pascal ; - formule du binôme de Newton.	• Dénombrer les arrangements, permutations, combinaisons d'un ensemble. • Utiliser les arrangements, permutations et combinaisons pour dénombrer des éléments d'un ensemble.
Probabilité d'un événement • Vocabulaire des événements : - expérience aléatoire ; - univers des éventualités ; - événement ; - événement élémentaire ; - événement impossible, événement certain ; - événements contraires, événements incompatibles ; - réunion d'événements ; - intersection d'événements.	• Définir une éventualité associée à une expérience aléatoire. • Déterminer les événements $A \cup B$ et $A \cap B$. • Reconnaître les événements contraires. • Reconnaître des événements incompatibles. • Passer du langage probabiliste au langage ensembliste et vice-versa.
• Probabilité d'un événement - Définition. - Propriétés. - Cas d'équiprobabilité. • Modèle de références : - tirages simultanés ; - tirages successifs avec remise ; - tirages successifs sans remise.	• Utiliser les propriétés d'une probabilité pour calculer les probabilités d'événements. • Utiliser les techniques du dénombrement pour calculer les probabilités dans un cadre d'équiprobabilité. • Modéliser une situation aléatoire.

Exercices d'application directe

♦ Exercice 1.a page 295

$A_1^n = n$; $A_n^p - A_n^{p-1} = \dfrac{n!}{(n-p-1)!}$

♦ Exercice 1.b page 295

$$(1+x)^8 = 1 + 8x + 28x^2 + 56x^3 + 70x^4 + 56x^5 + 28x^6 + 8x^7 + x^8.$$

$$(1-x)^7 = 1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^5 + 7x^6 - x^7.$$

$$(1-x)^n = 1 - nx + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^p C_n^p x^p + \dots + (-1)^n x^n.$$

$$(3x-2)^9 = 19\,683x^9 - 118\,098x^8 + 314\,928x^7 - 489\,888x^6 + 489\,888x^5 - 326\,592x^4 + 145\,152x^3 - 41\,472x^2 + 6\,912x - 512$$

♦ Exercice 1.c page 295

$A = n + 1$;

$B = n(n-1)(n-2)\dots(p+1)$ $[p \le n]$;

$C = n!\,[(n+1)(n+2)\dots(n+p) - 1]$ $[p \le n]$.

♦ Exercice 1.d page 295

a) Nombre de mots de 4 lettres avec répétition de lettres : $26^4 = 456\,976$.

b) Nombre de mots de 4 lettres sans répétition de lettres : $A_{26}^4 = 358\,800$.

♦ Exercice 1.e page 295

a) Nombre de nombres de 5 chiffres formés avec 5, 6, 7, 8 et 9 sans chiffres identiques :
$5! = 120$.

b) Avec le chiffre 9 pour chiffre des centaines :
$4! = 24$.

c) Commençant par 56 : $3! = 6$.

♦ Exercice 1.f page 295

a) Nombre de dispositions de 10 personnes autour d'une table avec des chaises numérotées :
$10! = 3\,628\,800$.

b) Nombre de dispositions de 10 personnes autour d'une table avec des chaises non numérotées :
$9! = 362\,880$.

♦ Exercice 1.g page 295

Nombre d'équipes de football :

$C_{20}^{11} = \dfrac{20!}{11!\,9!} = 167\,960$.

Exercices d'apprentissage

♦ Exercice 1 page 309

1. Chaque casier peut contenir au plus 1 journal ;

a) les journaux sont distincts E étant le nombre de dispositions :

card E = $A_{11}^6 = 332\,640$

b) les journaux sont identiques E' étant le nombre de dispositions :

card E' = $C_{11}^6 = 462$

2. Chaque casier peut contenir un nombre quelconque de journaux ;

a) les journaux sont distincts F étant le nombre de dispositions :

card F = $11^6 = 1\,771\,561$

b) les journaux sont identiques F' étant le nombre de dispositions :

card F' = $C_{6+11-1}^6 = 8\,008$

♦ Exercice 3 page 309

Enquête comportant 10 questions seules réponses possibles :
Oui – non – s'abstenir.
Le nombre de fiches est 3^{10}

♦ Exercice 4 page 309

Nombres d'itinéraires du touriste : A_5^3

♦ Exercice 5 page 309

Désignation d'un comité dans une classe.

a) Le chef est interne.
Nombre de comités différents :
$15 \times C_{29}^2 \times C_{27}^2 = 2\,137\,590$

b) Les adjoints sont de sexes différents.
Nombre de comités différents :
$6 \times 24 \times 28 \times C_{27}^2 = 1\,415\,232$.

♦ Exercice 6 page 309

Divisibilité par 3.

a) {18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ; 81 ; 90}
{39 ; 48 ; 57 ; 66 ; 75 ; 84 ; 93}

b) Nombres à 2 chiffres divisibles par 3 (S : somme des chiffres).
S = 3 : {12 ; 21 ; 30}
S = 6 : {15 ; 24 ; 33 ; 42 ; 51 ; 60}
S = 15 : {69 ; 78 ; 87 ; 96}
S = 18 : {99}
on obtient 30 nombres

c) card A = 30.

♦ Exercice 7 page 309

Lancé simultané de deux dés non truqués : faire un tableau des résultats.

a) A : la somme obtenue est 8

$P(A) = \frac{5}{36}$

b) B : la somme obtenue est impaire

$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

c) C : la somme obtenue est paire

$P(C) = 1 - P(B) = \frac{1}{2}$

d) D : la somme obtenue est > 8

$P(D) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

e) E : La somme obtenue est < 4

$P(E) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

♦ Exercice 8 page 309

Fonctions $f : f(x) = (1 + x)^n$

a) $(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + .. + C_n^n x^n$

$[(1+x)^n]' = C_n^1 + 2C_n^2 x + .. + nC_n^n x^{n-1}$

b) pour $x = 1$; $C_n^1 + 2C_n^2 + .. + nC_n^n = n2^{n-1}$

pour $x = -1$; $C_n^1 - 2C_n^2 + .. + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$

♦ Exercice 9 page 309

Occupation de deux salles.

On a :

$P(S_1 \cup S_2) = 0,9$

$P(S_1) = P(S_2)$

$P(S_1 \cap S_2) = 0,5$

$P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)$

d'où : $P(S_1) = P(S_2) = 0,7$

a) A : la salle 1 est libre,

$P(A) = P(\overline{S}_1) = 1 - P(S_1) = 0,3$

b) B : les salles 1 et 2 sont libres,

$B = (\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2) = (\overline{S_1 \cup S_2})$

$= 1 - P(S_1 \cup S_2) = 0,1$

c) C : une salle au moins est libre,

$P(C) = P(\overline{S_1 \cap S_2}) = 1 - P(S_1 \cap S_2) = 0.5$

d) D : une seule salle est libre,

D : une seule salle est occupée,

$D = (S_1 \cap \overline{S}_2) \cup (\overline{S}_1 \cap S_2)$

$P(D) = P(\overline{S}_1 \cup \overline{S}_2) - P(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2) = 0,4$

♦ Exercice 10 page 309

Lancer d'un dé truqué.

a) P_5 est la probabilité d'apparition du 5 et P celle des autres numéros. On a :

$P_5 = 2P$; $5P + P_5 = 1$

d'où : $P = \frac{1}{7}$; $P_5 = \frac{2}{7}$

b) A = {2 ; 4 ; 6} ; $P(A) = \frac{3}{7}$

$B = \overline{A}$: $P(B) = 1 - P(A) = \frac{4}{7}$

♦ Exercice 11 page 310

Lancer d'un dé truqué.

a) Probabilité d'obtenir 1, 2, 3, 4, 5, 6 est respectivement k, $2k$, $3k$, $4k$, $5k$, $6k$ avec :

$k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1$

d'où : $k = \frac{1}{21}$

$P_1 = \frac{1}{21}$; $P_2 = \frac{2}{21}$; $P_3 = \frac{1}{7}$;

$P_4 = \frac{4}{21}$; $P_5 = \frac{5}{21}$; $P_6 = \frac{2}{7}$

b) A = {4 ; 5 ; 6} ; $P(A) = \frac{5}{7}$

♦ Exercice 12 page 310

2 lancers successifs d'un dé.

$\Omega = \{1 ; 2 ; ...6\} \times \{1 ; 2 ; ...6\}$

$A = \{1 ; 2 ; ...6\} \times \{2 ; 4 ; 6\}$

$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$C = \{5 ; 6\} \times \{1 ; 2 ; ...6\}$

$P(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

$\overline{D} = \{1 ; 2 ; ...5\} \times \{1 ; 2 ; ...5\}$

$P(\overline{D}) = \frac{25}{36}$; $P(D) = \frac{11}{36}$

♦ Exercice 13 page 310

(E) $x^2 + ax + b = 0$

$\Omega = \{1 ; 2 ; ...6\} \times \{1 ; 2 ; ...6\}$

$A = \{(a ; b) / a^2 \geq 4b\}$

$= \{(6 ; 1) ; (6 ; 2) ; (6 ; 3)...$

$(5 ; 1) ; (5 ; 2) ...$

$(4 ; 1) ; (4 ; 2) ...$

$(3 ; 1) ; (3 ; 2) ; (2 ; 1)\}$

$P(A) = \frac{19}{36}$

♦ Exercice 14 page 310

a) Deux tirages avec remise.

$\Omega = \{r_1, r_2, r_3, n_1, n_2\} \times \{r_1, r_2, r_3, n_1, n_2\}$

évènement élémentaire $(a ; b)$

card $\Omega = 25$

b) • R_1 : boule rouge au 1^er^ tirage.

$P(R_1) = \frac{3 \times 5}{25} = \frac{3}{5}$

• R_2 : boule rouge au 2^e^ tirage.

$P(R_2) = \frac{3}{5}$

• $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P(R_2) = \frac{9}{25}$

$P(R_1 \cup R_2) = \frac{21}{25}$

♦ Exercice 15 page 310

1. Tirage simultané de 3 boules dans :

$\{b_1, b_2, b_3, n_1, n_2, n_3\}$

card $\Omega = C_6^3 = 20$

• A : au moins une blanche.

card $\overline{A} = C_3^3 = 1$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{19}{20}$

• B : au moins deux noires.

card $B = C_3^2 \times C_3^1 + C_3^3 \times C_3^0$

$P(B) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

• C : au moins une boule de chaque couleur.

card $C = C_3^1 \times C_3^2 + C_3^2 \times C_3^1$

$P(C) = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$

2. $A \cap B$: une blanche et deux noires.

card $(A \cap B) = C_3^1 \times C_3^2$

$P(A \cap B) = \frac{9}{20}$

♦ Exercice 16 page 310

1. Tirage successif de deux cartes avec remise.

card $\Omega = A_{52}^2$

• A : tirer 2 as

$P(A) = \frac{4^2}{52^2} = \frac{1}{169}$

• B : tirer au moins un as

card $\overline{B} = 48^2$

$P(B) = 1 - \frac{48^2}{52^2} = \frac{25}{169}$

• C : la 2ᵉ carte est un as

card $C = 52 \times 4$

$P(C) = \frac{1}{13}$

2. Tirage successif de deux cartes sans remise.

card$(\Omega') = 52 \times 51$

• A' : tirer 2 as

card $A' = A_4^1 \times A_3^1 = 12$

$P(A') = \frac{1}{221}$

• B' : tirer au moins un as

card $\overline{B}' = A_{48}^2$

$P(\overline{B}') = \frac{188}{221}$

$P(B') = \frac{33}{221}$

• C' : tirer un as au 2ᵉ tirage.

D' : tirer un as uniquement au 2ᵉ tirage.

$C' = A' \cup D'$ et $A' \cap D' = \varnothing$

$P(C') = P(A') + P(D') = \frac{1}{13}$

♦ Exercice 17 page 310

$P_2 = P_1 + \frac{1}{8}$; $P_3 = P_1 + \frac{2}{8}$

$P_m = P_1 + \frac{3}{8}$ et $P_1 + P_2 + P_3 + P_m = 1$

d'où : $P_1 = \frac{1}{16}$; $P_2 = \frac{3}{16}$; $P_3 = \frac{5}{16}$; $P_m = \frac{7}{16}$

♦ Exercice 18 page 310

1. Répartition de 2 boules dans 3 cases.

a) card $\Omega = A_3^2$

b) • A : chaque boule dans la case de sa couleur.

card $A = A_1^1 A_1^1$; $P(A) = \frac{1}{6}$

• B : la case jaune est vide

card $B = A_2^2$; $P(B) = \frac{1}{3}$

• C : seule la boule rouge dans la case de sa couleur.

card $C = A_1^1 A_1^1$; $P(C) = \frac{1}{6}$

2. *a)* card $\Omega = 3^2$

b) $P(A) = \frac{1}{9}$; $P(B) = \frac{4}{9}$

♦ Exercice 19 page 310

100 lancers successifs d'une pièce (pile P et face F).

Probabilité d'obtenir P à chaque lancer est de $\frac{1}{2}$.

A : obtenir 50 fois P sur les 100 lancers.

$P(A) = C_{100}^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{50} = 0{,}0796$

♦ Exercice 20 page 311

1. card $\Omega = 6^2$

A : le 2ᵉ dé gagne.

$A = \{(1 ; 2) ; (1 ; 3) \dots (1 ; 6)$
$(2 ; 3) ; (2 ; 4) \dots (2 ; 6)$
$(3 ; 4) ; (3 ; 5) ; (3 ; 6)$
$(4 ; 5) ; (4 ; 6) ; (5 ; 6)\}$

$P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

Exercice 21 page 311

1. $P(A) = 0{,}0318$

2. Probabilité pour qu'un albinos soit mâle est 0,943.

♦ Exercice 22 page 311

card $U = C_5^2$

a) A : obtenir une description véridique des faits.

$P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$

b) B : obtenir 2 versions contradictoires

$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$

c) C : obtenir 2 versions fausses

$P(C) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

♦ Exercice 23 page 311

N_1 : nombre d'équipes possibles avec X.

N_2 : nombre d'équipes possibles avec Y.

$N_1 = C_{17}^{10}$; $N_2 = C_{14}^{10}$

Ω : univers des éventualités pour le club A

Ω' : univers des éventualités pour le club B

card $\Omega = C_{18}^{11}$; card $\Omega' = C_{15}^{11}$

$P(X) = \frac{C_{17}^{10}}{C_{18}^{11}} = \frac{19\,448}{31\,822}$

$P(Y) = \frac{C_{14}^{10}}{C_{15}^{11}} = \frac{1\,001}{1\,365}$

$P(X \text{ et } Y) = P(X) \times P(Y) = 0{,}448$

♦ **Exercice 24 page 311**

Card $U = C_{25}^{3}$

1. Faire de drapeau ivoirien

a) $P(A) = \frac{C_{10}^{1}C_{20}^{1}C_{5}^{1}}{C_{35}^{3}} = 0{,}15$

b) $P(B) = \frac{C_{10}^{1}C_{20}^{1}C_{5}^{1}\,C_{32}^{1}}{C_{35}^{4}} = 0{,}61$

2. $P(C) = \frac{A_{10}^{1}A_{20}^{1}A_{5}^{1}}{A_{35}^{3}} = 0{,}025$

♦ **Exercice 25 page 311**

1. $\mathcal{A}$: aire du terrain déboisé
$\mathcal{A}_1$: aire d'espace cultivé
$\mathcal{A}_2$: aire du plan d'eau
$\mathcal{A}_3$: aire de la cible circulaire
$\mathcal{A} = 10\,000\ m^2$
$\mathcal{A}_1 = 1\,500\ m^2$
$\mathcal{A}_2 = 5\,000\ m^2$
$\mathcal{A}_3 = 314\ m^2$
A_1 : tomber dans l'espace cultivé

$P(A_1) = 1\,500 \times \frac{1}{10\,000} = 0{,}15$

A_2 : tomber dans le plan d'eau

$P(A_1) = 5\,000 \times \frac{1}{10\,000} = 0{,}50$

A_3 : tomber dans la cible circulaire

$P(A_3) = 314 \times \frac{1}{10\,000} = 0{,}0314$

2. $P(B) = 1 - [\,P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)] = 0{,}3186$
3. $P(C) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}65$

♦ **Exercice 26 page 311**

Card $U = 10^4$

1. Le fils ouvre le cadenas
A_1 : au 1er essai

$P(A_1) = \frac{1}{10\,000}$

A_2 : au 2e essai

$P(A_2) = \frac{1}{999}$

2. Le père ouvre le cadenas k^e essai :

$P_k = \frac{1}{6-(k-1)} = \frac{1}{7-k}$

♦ **Exercice 27 page 311**

$P(\text{vert}) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} = P_v$

$P(\text{rouge}) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} = P_r$

$P(\text{orange}) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6} = P_o$

$\overline{A}$: il ne rencontre aucun feu vert

$P(\overline{A}) = P_v^7 = \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{2\,187}$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{2\,186}{2\,187}$

♦ **Exercice 28 page 311**

$P(M) = 0{,}4\ ;\ P(M') = 0{,}6$
$P(M \cap M') = P(M) \times P(M') = 0{,}24$
$P(M \cup M') = P(M) + P(M') - P(M \cap M')$
$= P(M) + P(M') - P(M) \times P(M')$
$= 0{,}76$
A : contracter les deux maladies
$P(A) = P(M \cap M') = 0{,}24$
B : contracter au moins une des deux maladies
$P(B) = P(M \cup M') = 0{,}76$
C : ne contracter aucune des deux maladies
$P(C) = P(\overline{M \cup M'}) = 0{,}24$

♦ **Exercice 29 page 311**

1. A : le car A est ponctuel
B : le car B est ponctuel
$P(A) = 0{,}9\ ;\ B(B) = 0{,}8$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0{,}98$
2. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B})$
$= 1 - P(A \cap B) = 0{,}28$

♦ **Exercice 30 page 312**

1. *a)* A : elle frappe une lettre,

$P(A) = \frac{26}{42} = \frac{13}{21}$

b) B : elle frappe une lettre de son prénom,

$P(B) = \frac{5}{42}$

Si l'enfant se prénomme Mariam,

$P(C) = \frac{4}{42} = \frac{2}{21}$

c) Probabilité P(D) pour que Nongba tape la dernière lettre de son nom,

$P(D) = \frac{1}{42}$

2. Après 6 frappes, probabilité que Nongba frappe son nom :

$P(E) = \left(\frac{1}{42}\right)^6 = 1{,}8 \cdot 10^{-10}$

♦ **Exercice 31 page 312**

1. card $\Omega = C_{22}^{4} = 7\,315$
• A : aucun homme n'est désigné

$P(A) = \frac{330}{7\,315} = \frac{6}{133}$

• B : M. KONE est désigné :

$P(B) = \frac{1\,330}{7\,315} = \frac{2}{11}$

• C : le couple Koné a désigné

$P(C) = \frac{190}{7\,315} = \frac{2}{77}$

• D : deux hommes et deux femmes sont désignés

$P(D) = \frac{3\,025}{7\,315} = \frac{55}{133}$

• E : deux couples sont désignés

$P(E) = \frac{55}{7\,315} = \frac{1}{133}$

$A \cap B = \varnothing$ donc A et B sont incompatibles.

$B \cap E \neq \varnothing$ (événement impossible)

donc B et E sont compatibles.

♦ **Exercice 32 page 312**

• <u>1</u>

• 1ʳᵉ situation

A : avoir au moins un 6

P_1 : probabilité pour que le 6 sorte

$P_1 = \frac{1}{6}$; $Q_1 = \overline{P}_1 = \frac{5}{6}$

$P(\overline{A}) = (Q_1)^4$

$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}5\,177$

• 2ᵉ situation

P_2 : probabilité d'obtenir un double 6

$P_2 = \frac{1}{36}$; $Q_2 = \overline{P}_2 = \frac{35}{36}$

B : avoir au moins un double 6

$P(\overline{B}) = (Q_2)^{24}$

$P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}4\,914$

♦ **Exercice 33 page 312**

1. $A = [1 ; 20] \cap \mathbb{N}$

2. $n = 8$

a) probabilité P_1 de tirer une boule de chaque couleur

$P_1 = \frac{C_8^1 \times C_4^1 \times C_8^1}{C_{20}^3} = 0{,}144$

b) probabilité P_2 de tirer 3 boules vertes

$P_2 = \frac{C_{8}^3}{C_{20}^3} = 0{,}[illegible]26$

3. Étude de la variation de $f : [1 ; 20] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -2x^3 + 42x^2$

x	1		14		20
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	[illegible]	↗		↘	[illegible]

4. $n \in A$

a) P_n : probabilité de tirer une boule de chaque couleur

$P_n = \frac{C_n^1 \times C_4^1 \times C_{[illegible]}^1}{C_{20}^3} = \frac{-2n^3 + 42n^2}{11\,400}$

b) pour $n = 14$: $P_n = 0{,}239$

♦ **Exercice 34 page 312**

1. B_n : le n^e tirage est une boule blanche

N_n : le n^e tirage est une boule noire

U_k^n : le n^e tirage se fait dans l'urne U_k

a) P_1 : probabilité pour que le tirage se fasse dans l'urne U_1

$P1 = P(U_1^1) = \frac{1}{2}$

b) P_2 : probabilité pour que le tirage se fasse dans l'urne U_2

$P_2 = P\,[(B_1 \cap U_1^1) \cup (N_1 \cap U_2^1)]$

$= P((B_1 \cap U_1^1) + P(N_1 \cap U_2^1)$

(réunion d'éléments incompatibles.)

$P(B_1 \cap U_1^1) = P\,(B_1/U_1^1) \times P\,(U_1^1) = \frac{6}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

$P(N_1 \cap U_2^1) = P(N_1/U_2^1) \times P(U_2^1) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

donc : $P_2 = \frac{2}{5}$

c) suite (P_n)

à partir de la définition on obtient : pour tout $n \geq 2$,

$P_n = \frac{2}{5}\ P_{n-1} + \frac{1}{5}$

2. suite (u_n)

$u_1 = \frac{1}{2}$

$u_n = \frac{2}{5}\ u_{n-1} + \frac{1}{5}$; $(n \geq 2)$

a) $v_n = u_n - \alpha$; $(n \in \mathbb{N}^*)$

$v_{n+1} = \frac{2}{5} u_n + \frac{1}{5} - \alpha = \frac{2}{5} v_n + \frac{1}{5}(1 - 3\alpha)$

(v_n) est une suite géométrique si et seulement si $\alpha = \frac{1}{3}$

Sa raison est : $\frac{2}{5}$

Son premier terme $\frac{1}{6}$

b) $v_n = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$; $(n \in \mathbb{N}^*)$

$u_n = v_n + \alpha$

$\lim v_n = \frac{1}{6} \lim\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$

(v_n) est convergente donc (u_n) est convergente vers $\frac{1}{3}$

suite (P_n) $\begin{cases} P_1 = \frac{1}{2} \\ P_n = \frac{2}{5}\ P_{n-1} + \frac{1}{5} \\ (n \geq 2) \end{cases}$

Pour $n \geq 1$, $P_n = u_n$

Donc $\lim P_n = \lim u_n$

$= \lim\,(v_n + \alpha) = \alpha$

d'où $\lim P_n = \frac{1}{3}$.

16. Probabilités conditionnelles et variable aléatoire

(page 313 à 334 du livre de l'élève)

Ce chapitre vise essentiellement à :
- introduire les probabilités conditionnelles ;
- mettre en place l'utilisation d'arbres de probabilité en s'appuyant sur des modèles de référence ;
- introduire la variable aléatoire ;
- mettre en place la loi de probabilité et la fonction de répartition ;
- mettre en place le calcul de l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart-type.

On introduira la notion de probabilité conditionnelle à l'aide d'arbres et de tableaux portant sur des exemples simples.
D'ailleurs, on utilisera le plus souvent possible, à bon escient, les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes... efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités. Un arbre de probabilité correctement construit permet de résoudre aisément de nombreux problèmes.
On insistera sur la différence entre événements indépendants et événements incompatibles (deux événements indépendants sont incompatibles seulement si l'un au moins est de probabilité nulle).
On présentera des exercices ayant trait à des domaines économiques ou scientifiques (tests de dépistages, tests de qualité, ...).
Les élèves devront savoir appliquer la formule des probabilités totales sans aide dans des cas simples.
On retravaillera les expériences de références vues en seconde et première (dés, pièces, urnes, différents types de tirages...).
On montrera aux élèves qu'une variable aléatoire est en réalité une fonction.
Les notions de fonction de répartition, d'espérance mathématique et de variance seront mises en place à partir d'exemples.
Concernant l'espérance mathématique et la variance, on fera le lien avec la moyenne et la variance d'une série de données vues en statistiques en seconde. On pourra utiliser des tableaux pour effectuer les calculs.
On habituera les élèves à reconnaître une situation où la loi binomiale intervient (épreuves répétées identiques indépendantes).
On donnera des exemples variés où interviennent des lois de Bernoulli et des lois binomiales.

Savoirs et savoir-faire

savoirs	savoir-faire
Probabilités conditionnelles • Définition : $P_A(B) = P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. • Propriétés. • Événements indépendants. • Formule des probabilités totales. • Arbres de probabilités.	• Calculer la probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à un événement de probabilité non nulle. • Démontrer l'indépendance de deux événements. • Construire un arbre de probabilité. • Utiliser, dans des cas simples, la formule des probabilités totales.
Variable aléatoire • Définition d'une variable aléatoire numérique. • Loi de probabilité d'une variable aléatoire. • Fonction de répartition. • Espérance mathématique, variance, écart type. - Définitions. - Propriétés.	• Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire. • Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire. • Définir une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition. • Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type dune variable aléatoire.

savoir
Épreuve de Bernoulli, loi binomiale • Définition. • Propriété : $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. • Espérance mathématique et variance.

savoir-faire
• Reconnaître une épreuve de Bernoulli et une situation où intervient la loi binomiale. • Calculer la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli • Calculer l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Exercices d'application directe

◆ Exercice 1.a page 317

Soit les événements :

A : « tirer le jeton aux deux faces numérotées 1 » ;
B : « lire 1 sur la première face » ;
C : « lire 1 sur la deuxième face ».

$P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{3}{4}$; $P(\bar{B}) = \frac{1}{4}$;

$P(C) = \frac{3}{4}$; $P(\bar{C}) = \frac{1}{4}$.

$P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)}$;

$P(B \cap C) = P(A \cap (B \cap C)) + P(\bar{A} \cap (B \cap C))$
$= \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.

Donc $P_B(C) = \frac{0{,}5}{0{,}75} = \frac{2}{3}$.

◆ Exercice 1.b page 317

card $\Omega = 36$.

Si on note A l'événement « sortie du 3 » et B l'événement « la somme des deux chiffres est paire » :

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$;

or $P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$; $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Donc $P_A(B) = \frac{1}{2} = P(B)$ (les événements A et B sont statistiquement indépendants).

◆ Exercice 1.c page 317

Soit I l'événement « le nombre obtenu est impair », $\bar{I}$ l'événement « le nombre obtenu est pair », F l'événement « on obtient face », $\bar{F}$ l'événement « on obtient pile ».

1. $P(I) = P(I \cap \bar{F}) + P(I \cap F) = P_{\bar{F}}(I) \times P(\bar{F}) + P_F(I) \times P(F)$
$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{77}{135}$.

2. $P_{\bar{I}}(\bar{F}) = \frac{P(\bar{I} \cap \bar{F})}{P(\bar{I})} = \frac{P_{\bar{F}}(\bar{I}) \times P(\bar{F})}{P(\bar{I})} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{58}{135}} = \frac{9}{29}$

◆ Exercice 2.a page 323

x_i	$-\infty$		-3		0		2		5		$+\infty$
p_i		0	$\boxed{0{,}1}$	0,1	$\boxed{0{,}5}$	0,5	$\boxed{0{,}8}$	0,8	$\boxed{1}$	1	

◆ Exercice 2.b page 323

x_i	-2	1	3	5
$P(x = x_i)$	0,2	0,2	0,3	0,3

◆ Exercice 2.c page 325

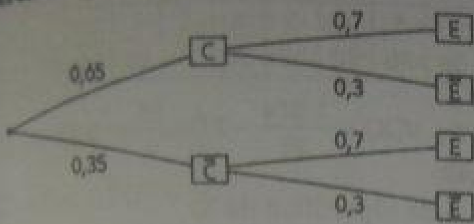
1.

x_i	2	3	4	5
$P(x = x_i)$	0,030625	0,06125	0,091875	0,1225
x_i	6	7	8	9
$P(x = x_i)$	0,161875	0,16625	0,135625	0,105
x_i	10	11	12	
$P(x = x_i)$	0,075	0,04	0,01	

2. $E(X) = 6{,}7$; $V(X) = 5{,}255$; $\sigma(X) = 2{,}29$.

Exercices d'apprentissage

♦ Exercice 1 page 332



$P(C) = 0,65$

$P(E/C) = \dfrac{P(E \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,65 \times 0,7}{0,65} = 0,7$

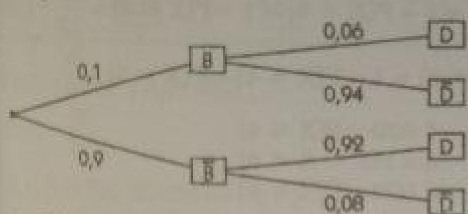
$P(C/E) = \dfrac{P(E \cap C)}{P(E)}$

$P(E) = P(C \cap E) + P(\overline{C} \cap E)$
$= 0,65 \times 0,7 + 0,35 \times 0,7 = 0,56$

$P(C/E) = \dfrac{0,65 \times 0,7}{0,56} = 0,8125$

♦ Exercice 2 page 332

B : « le stylo a un défaut »



$E_1 = D \cap \overline{B}$; $E_2 = D \cap B$
$P(E_1) = 0,9 \times 0,92 = 0,828$
$P(E_2) = 0,1 \times 0,06 = 0,006$

♦ Exercice 3 page 332

B : « obtenir une face bleue »
R : « obtenir une face rouge »
A : « obtenir 4 fois une face bleue et une fois une face rouge dans cet ordre ».
C : « obtenir 4 fois une face bleue et une fois une face rouge ».

$P(B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$; $P(R) = \dfrac{2}{3}$

$P(A) = (P(B))^4 \times P(R) = \dfrac{2}{243}$

$P(C) = C_5^4 \times P(A) = \dfrac{10}{243}$

♦ Exercice 4 page 332

a) $P(F_2/F_1) = \dfrac{1}{5}$ vraie

b) $P(F_n/F_{n-1}) = \dfrac{1}{5}$ et $P(F_n/\overline{F}_{n-1}) = \dfrac{1}{2}$ vraie

c) $F_n = (F_n \cap F_{n-1}) \cup (F_n \cap \overline{F}_{n-1})$
$P(F_n) = P(F_n/F_{n-1}) \times P(F_{n-1}) + P(F_n/\overline{F}_{n-1}) \times P(\overline{F}_{n-1})$
$P_n = -\dfrac{3}{10} P_{n-1} + \dfrac{1}{2}$ vraie

d) $P_n - \dfrac{5}{13} = \dfrac{8}{13} \times (-0,3)^{n-1}$ (1)

$P_n - \dfrac{5}{13} = -\dfrac{3}{10}\left(P_{n-1} - \dfrac{5}{13}\right)$

Si $u_n = P_n - \dfrac{5}{13}$

(u_n) est une suite géométrique de raison $-0,3$ et de premier terme $u_1 = \dfrac{8}{13}$.

Donc $P_n - \dfrac{5}{13} = \dfrac{8}{13} \times (-0,3)^{n-1}$ vraie.

♦ Exercice 5 page 332

1. $P(A) = \dfrac{9}{500} = 0,018$

$P(B) = \dfrac{440}{500} = 0,88$

2. Somme rapportée par la tombola :
$500 \times 500\ F - (62\,000\ F + 9 \times 7\,000\ F + 50 \times 500\ F)$
$= 100\,000\ F$

3. *a)* Différentes valeurs de X :
-500 ; 0 ; $6\,500$; $61\,500$

b) Loi de probabilité

x_i	-500	0	$6\,500$	$61\,500$
$P(X = x_i)$	$\dfrac{440}{500}$	$\dfrac{50}{500}$	$\dfrac{9}{500}$	$\dfrac{1}{500}$

c) $E(X) = -200$

♦ Exercice 6 page 332

1. $\Omega = \{P ; F\} \times \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
$X(\Omega) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12\}$
Loi de probabilité de X

x_i	1	2	3	4	5	6	8	10	12
P_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

2. $E(X) = \dfrac{63}{12} = 5,25$; $V(X) = \dfrac{497}{48} \simeq 10,35$;

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 3,22$

♦ Exercice 7 page 332

1. $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\} \times \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$
$Z(\Omega) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 16\}$
Loi de probabilité de Z

x_i	1	2	3	4	6	8	9	12	16
Ω_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. $E(Z) = \dfrac{100}{16} = 6,25$; $V(Z) = \dfrac{900}{16} - (6,25)^2 = 17,187$

$\sigma(Z) = \sqrt{17,1875} \simeq 4,146$

♦ Exercice 8 page 333

1. Nombre de matchs joués : $C_5^2 = 10$.
Chaque équipe joue 4 matchs.

2. $\Omega = \{0 ; 1 ; 2\}$
$X(\Omega) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 0\}$
Loi de probabilité de X

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Ω_i	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{19}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{81}$

3. $E(X) = 4$

$$V(X) = \frac{56}{3} - 4^2 = \frac{8}{3}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{8}{3}} \simeq 1{,}633$$

♦ Exercice 9 page 333

1. *a)* Tirage simultané
$\text{card}(\Omega) = C_{32}^3 = 4\,360$
$X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

$$P(X = 0) = \frac{C_{28}^3}{C_{32}^3} = \frac{819}{1\,240}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_{28}^2}{C_{32}^3} = \frac{189}{620}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_{28}^1}{C_{32}^3} = \frac{21}{620}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_4^3}{C_{32}^3} = \frac{1}{1\,240}$$

$$E(X) = \frac{1\,860}{4\,960} = 0{,}375$$

$$V(X) = \frac{609}{1\,984} \simeq 0{,}307$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 0{,}554$$

b) Tirage avec remise

$$P(X = 0) = C_3^0 \left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{343}{512}$$

$$P(X = 1) = C_3^1 \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{147}{512}$$

$$P(X = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{21}{512}$$

$$P(X = 3) = C_3^3 \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}$$

$$E'(X) = 3 \times \frac{1}{8} = 0{,}375$$

$$V'(X) = 3 \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{8} = 0{,}328125$$

$$\sigma'(X) \simeq 0{,}57$$

c. Les deux résultats, dans les situations de *a)* et de *b)* sont très proches.

♦ Exercice 10 page 333

1. $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}^2$
$X(\Omega) = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$
Loi de probabilité de X

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. $E(X) = 7$; $V(X) = \frac{1\,974}{36} - 7^2 = \frac{35}{6} \simeq 5{,}83$
$\sigma(X) \simeq 2{,}42$

3. Fonction de répartition de X

x_i	$-\infty$	2		3		4		5		6	
$f(x_i)$	0	$\boxed{\frac{1}{36}}$	$\frac{1}{36}$	$\boxed{\frac{3}{36}}$	$\frac{3}{36}$	$\boxed{\frac{6}{36}}$	$\frac{6}{36}$	$\boxed{\frac{10}{36}}$	$\frac{10}{36}$	$\boxed{\frac{15}{36}}$	$\frac{15}{36}$

7		8		9		10		11		12		$+\infty$
$\boxed{\frac{21}{36}}$	$\frac{21}{36}$	$\boxed{\frac{26}{36}}$	$\frac{26}{36}$	$\boxed{\frac{30}{36}}$	$\frac{30}{36}$	$\boxed{\frac{33}{36}}$	$\frac{33}{36}$	$\boxed{\frac{35}{36}}$	$\frac{35}{36}$	$\boxed{1}$	1	

$$P(X \leqslant 4) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(X \geqslant 9) = 1 - P(X < 9) = 1 - P(X \leqslant 8) = \frac{5}{18}$$

$$P(5 \leqslant X \leqslant 8) = 1 - P(X \leqslant 4) - P(X \geqslant 9) = \frac{5}{9}$$

4.
$$\begin{aligned} E(X) &= -1\,000 \times P(X \leqslant 4) \\ &\quad - n \times P(5 \leqslant X \leqslant 8) \\ &\quad + 2\,000 \times P(X \geqslant 9) \\ &= \frac{20}{36}(700 - n) \end{aligned}$$

$E(X) = 0 \Leftrightarrow n = 700$

♦ Exercice 11 page 333

x_i	1	2	3	…	k
$P(x = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3}$	…	$\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}$

1.
$$\sum_{i=1}^{k} P(x = x_i) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \, \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

car on a la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

$$\lim\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k\right) = 1.$$

Donc la somme des probabilités est égale à 1.

2. *a)* $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$

$$= 1 - \frac{1}{3} \, \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 \simeq 0{,}132$$

b) $P(X \leq 7) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^7 \approx 0{,}941.$

c) $P(5 \leq X \leq 8) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^8 \approx 0{,}237.$

♦ Exercice 12 page 333

1. $P(2) = P(4) = P(0) = 2\,P(1) = 2\,P(3) = 2\,P(5)$
$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$
on obtient :
$P(1) = P(3) = P(5) = \dfrac{1}{9}$
$P(2) = P(4) = P(6) = \dfrac{2}{9}$

2. *a)* Loi de probabilité de X

x_i	0	500	1 000
P_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$

b) $E(X) = \dfrac{5\,500}{9}$; $V(X) = 98\,765,4321$
$\sigma(X) \simeq 314{,}27$

c) Fonction de répartition

x_i	$-\infty$		0		500		1 000		$+\infty$
$f(x_i)$		0	$\boxed{\frac{1}{9}}$	$\frac{1}{9}$	$\boxed{\frac{6}{9}}$	$\frac{6}{9}$	$\boxed{1}$	1	

♦ Exercice 13 page 333

1. $P(E) = \dfrac{18}{28}$.

2. X suit la loi binomiale de paramètre $\left(5 ; \dfrac{9}{14}\right)$
b) $P(F) = C_5^2\left(\dfrac{9}{14}\right)^2\left(1 - \dfrac{9}{14}\right)^{5-2} \simeq 0{,}19$

♦ Exercice 14 page 333

1. X suit la loi binomiale de paramètre $(n ; 0{,}8)$
Y suit la loi binomiale de paramètre $(n ; 0{,}2)$
$P(X = k) = C_n^k\,(0{,}8)^k\,(0{,}2)^{n-k}$
$P(Y = k) = C_n^k\,(0{,}2)^k\,(0{,}8)^{n-k}$
$P(X = 0) = (0{,}2)^n$
$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$
$\quad = 1 - (0{,}2)^n$
$P(Y = n) = (0{,}2)^n$

2. Pour $n = 10$
$P(X = 0) = (0{,}2)^{10} \simeq 0$
$P(X = 2) = C_{10}^2\,(0{,}8)^2(0{,}2)^8$
$\quad \simeq 0{,}000074$
$P(X = 1) = C_{10}^1\,(0{,}8)(0{,}2)^9$
$\quad = 0{,}000004$
$P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
$\quad = 0{,}000078$
$P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2)$
$\quad = 0{,}999922$
$E(X) = 10 \times 0{,}8 = 8$
$V(X) = 10 \times 0{,}8 \times 0{,}2 = 1{,}6$
$\sigma(X) = \sqrt{1{,}6} \simeq 1{,}264911$

♦ Exercice 15 page 333

1. $P(E_1) = 1$; $P\left(\dfrac{E_{n+1}}{E_n}\right) = \dfrac{3}{4}$; $P\left(\dfrac{E_{n+1}}{\overline{E}_n}\right) = \dfrac{1}{10}$.
$P(E_{n+1} \cap E_n) = P\left(\dfrac{E_{n+1}}{E_n}\right) \times P(E_n) = \dfrac{3}{4}\,P_n$.
$P(E_{n+1} \cap \overline{E}_n) = P\left(\dfrac{E_{n+1}}{\overline{E}_n}\right) \times P(\overline{E}_n) = \dfrac{1}{10}\,(1 - P_n)$.

2. $P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1} \cap E_n) + P(E_{n+1} \cap \overline{E}_n)$
$\quad = \dfrac{3}{4}\,P_n + \dfrac{1}{10}\,(1 - P_n) = \dfrac{3}{20}\,P_n + \dfrac{1}{10}$.

3. On pose $q_n = P_n - \dfrac{2}{17}$.
a) $q_{n+1} = P_{n+1} - \dfrac{2}{17} = \dfrac{3}{20}\left(P_n - \dfrac{2}{17}\right) = \dfrac{3}{20}\,q_n$.
Donc (q_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{20}$.
b) $q_1 = \dfrac{15}{17}$; donc $q_n = \dfrac{15}{17} \times \left(\dfrac{3}{20}\right)^{n-1}$.
$P_n = q_n + \dfrac{2}{17} = \dfrac{15}{17} \times \left(\dfrac{3}{20}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{17}$.
c) $P_n < \dfrac{3}{10}$ et seulement si $\left(\dfrac{3}{20}\right)^{n-1} < \dfrac{31}{150}$
$(n - 1)\ln\left(\dfrac{3}{20}\right) < \ln\left(\dfrac{31}{150}\right)$
$n > 1{,}83$.
Donc dès la 2ᵉ semaine, la probabilité que le technicien intervienne est inférieure à 0,3.

♦ Exercice 16 page 334

1. $P(A) = 0{,}02$; $P(B) = 0{,}12$;
$P(C) = P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = 0{,}8 \times 0{,}02 = 0{,}016$;
$P(D) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cup \overline{B})$
$\quad = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - (1 - P(A \cap B))$
$\quad = 0{,}98 + 0{,}88 - 0{,}984$
$\quad = 0{,}876.$

2. *a)* La loi est une loi binomiale de paramètres $(8 ; 0{,}876)$.
b) $P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$
$\quad = C_8^6\,(0{,}876)^6\,(0{,}124)^2$
$\quad + C_8^7\,(0{,}876)^7\,(0{,}124)$
$\quad + C_8^8\,(0{,}876)^8$
$\quad = 0{,}934.$

♦ Exercice 17 page 334

1. X suit une loi binomiale de paramètres $(10 ; 0{,}036)$.

2. $E(X) = 10 \times 0{,}036 = 0{,}36$.
Cette valeur représente la nombre moyen de camions tombant en panne chaque jour.

3. $P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$
$\quad = 1 - (0{,}964^{10} + C_{10}^1\,0{,}964^9 \times 0{,}036)$
$\quad = 0{,}04812.$

4. *a)* La variable Y suit une loi binomiale de paramètres $(250 ; 0{,}05)$.
$P(Y = n) = C_{250}^n\,(0{,}05)^n\,(0{,}94)^{250-n}$.
b) $E(Y) = 250 \times 0{,}05 = 12{,}5$.
c) $\sigma^2(X) = V(X) = 10 \times 0{,}036 \times 0{,}964 = 0{,}34707$;
$\sigma^2(Y) = 250 \times 0{,}05 \times 0{,}95 = 11{,}875$.

◆ **Exercice 18 page 334**

1. $P(X=1)=p$; $P(X=n+1)=(1-p)^n$;

$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} P(X=k) = (1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1}$$
$$= (1-p)^n + p\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1}$$
$$= (1-p)^n + p\,\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}$$
$$= 1.$$

◆ **Exercice 19 page 334**

Appelons « porte 1 » la porte que vous avez choisie et « porte 2 » et « porte 3 » les autres portes.

Notons : P_i l'événement « la voiture est derrière la porte $i (i \in \{1 ; 2 ; 3\})$ » ;

O_i l'événement « l'animateur ouvre la porte $i (i \in \{2 ; 3\})$ ».

On a $P(P_i)=\frac{1}{3}$ pour tout $i \in \{1 ; 2 ; 3\}$.

Si la voiture est derrière la porte 1 :

$P_{P1}(O_2)=P_{P1}(O_3)=\frac{1}{2}$.

Si la voiture est derrière la porte 2 :

$P_{P2}(O_2)=0$ et $P_{P2}(O_3)=1$.

Si la voiture est derrière la porte 3 :

$P_{P3}(O_2)=1$ et $P_{P3}(O_3)=0$.

Supposons que l'animateur ouvre la porte 2 (on ferait le même raisonnement s'il ouvre la porte 3) :

$$P_{O2}(P_1)=\frac{P(P_1\cap O_2)}{P(O_2)}$$
$$=\frac{P_{P1}(O_2)\times P(P_1)}{P(O_2\cap P_1)+P(O_2\cap P_2)+P(O_2\cap P_3)}$$
$$=\frac{P_{P1}(O_2)\times P(P_1)}{P_{P1}(O_2)\times P(P_1)+P_{P2}(O_2)\times P(P_2)+P_{P3}(O_2)\times P(P_3)}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{1}{3}$$

$P_{O2}(P_3)=\frac{P(P_3\cap O_2)}{P(O_2)}$ (on refait le même calcul)

$$=\frac{2}{3}.$$

Il y a deux fois plus de chance que la voiture soit derrière la porte 3 que derrière la porte 1. Vous avez donc intérêt à changer votre choix.

Achevé d'imprimer en Italie par Rotolito Lombardo - Dépôt legal : 07/2009
Collection n° 61 - Edition n° 01 - 59/6322/8

ISBN : 978 2 84129922 5

DIFFUSION
R.C.I. : NOUVELLES EDITIONS IV[illegible]
AUTRES PAYS : EDICEF