Fomesoutra.com
ça soutra !

Université Cheikh Anta Diop de Dakar (U.C.A.D.)

DEPATEMENT DE MATHEMATIQUES

FASCICULE DE MATHEMATIQUES 4e

Présenté par :

Monsieur IBRAHIMA COLY PROFESSEUR DE M.S.P
E-mail : icoly77@gmail.com / Tel : **77 030 41 46**

« Les triangles dont les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 3 ; 4 et 5 sont rectangles»
PYTHAGORE

PROGRESSION ARMONISEE DE MATHEMATIQUE 4e / IA KAOLACK

PREMIER TRIMESTRE	
ACTIVITES GEOMETRIQUES	**ACTIVITES NUMERIQUES**
1). Distance **2).** Droite des milieux **3).** Droites remarquables dans un triangle	**1).** Nombres rationnels **2).** Calcul algébrique
NOEL	
DEUXIEME TRIMESTRE	
4). Triangle rectangle **5).** Translations et vecteurs **6).** Géométrie dans l’espace	**3).** Equations à une inconnue **4).** Inéquations et systèmes de deux inéquations à une inconnue
PAQUES	
TROISIEME TRIMESTRE	
7). Rotations. Polygones réguliers **8).** Projection orthogonale dans le plan	**5).** Statistique **6).** Applications linéaires

FASCICULE DE MATHEMATIQUES 4e

ACTIVITES NUMERIQUES

FORMAT DE FICHE DE MATHEMATIQUES

<table>
<tr><td colspan="3"><u>Etablissement :</u></td><td colspan="3"><u>Classe :</u></td><td><u>Date :</u></td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2"><u>Prénom et Nom du prestataire</u></td><td colspan="2" rowspan="2"><u>Effectif total</u></td><td>G :</td><td rowspan="2"><u>Durée :</u></td></tr>
<tr><td>F :</td></tr>
<tr><td colspan="7"><u>TITRE :</u></td></tr>
<tr><td>Objectif général</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td>Objectif spécifiques</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Matériel et supports didactiques</td><td colspan="2">Pour l'élève</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Pour le professeur</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Prérequis</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td>Sources :</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="7"><u>PLAN DU COURS</u></td></tr>
<tr><td colspan="7"><u>Introduction :</u></td></tr>
<tr><td colspan="6">DEROULEMENT DE LA LEçON</td><td>Observations</td></tr>
<tr><td colspan="2">Moments didactiques Significatifs</td><td colspan="2">Stratégies</td><td colspan="2" rowspan="2">Traces écrites</td><td rowspan="3">- difficultés rencontrés
- la pertinence des stratégies
-Etc.
Pour améliorer les pratiques ultérieures</td></tr>
<tr><td>Titre de la séquence</td><td>D urée</td><td>Activité du prof</td><td>Activité de l'élève</td></tr>
<tr><td>I* :……………..</td><td>…….</td><td>Recopie l'acti. au tableau</td><td>Recopie ds son cahier l'acti. 1</td><td colspan="2"><u>Activité1 :</u>
……………………….
…….

Correction que l'élève doit prendre ds son cahier</td></tr>
<tr><td colspan="7"><u>Révélateur</u></td></tr>
<tr><td><u>Os. sp. 1</u></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td><u>Os. sp. 1</u></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td><u>…</u></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td><u>…</u></td><td colspan="6"></td></tr>
</table>

CHAPITRE I

NOMBRES RATIONNELS

DURREE : 14 HEURES

Objectif général : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation des propriétés relatives aux nombres rationnels dans la résolution de problème.

Objectifs spécifiques : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- ✓ Reconnaitre un nombre rationnel.
- ✓ Écrire un nombre rationnel sous plusieurs formes.
- ✓ Additionner des nombres rationnels ; Soustraire des nombres rationnels.
- ✓ Restituer l'opposé d'un nombre rationnel ; les propriétés de la valeur absolue d'un nombre rationnel ; la condition d'égalité de deux nombres rationnels ; la compatibilité de l'addition et de l'égalité des nombres rationnels ; la compatibilité de la multiplication et de l'inégalité des nombres rationnels ;
- ✓ Calculer le produit de nombres rationnels ; le quotient d'un nombre rationnel par un nombre rationnel non nul ; la puissance entière d'un nombre rationnel ;
- ✓ Déterminer l'inverse d'un nombre rationnel non nul.
- ✓ Utiliser les propriétés de la valeur absolue d'un nombre rationnel ; la condition d'égalité de deux nombres rationnels ; la compatibilité de l'addition et de l'égalité des nombres rationnels ; la compatibilité de la multiplication et de l'inégalité des nombres rationnels.
- ✓ Trouver une approximation décimale d'un nombre rationnel au dixième, au centième, ou au millième par défaut ou par excès.

Sources :

- ✓ Nouveau programme 4^{e} de 2006 et Guide d'usage de 2010
- ✓ Loi d'orientation 91. 22 du 16 Février 1991 ;
- ✓ Manuels : CIAM 3ème ; Excellence 3ème
- ✓ Webographie : http://www.mathovore.fr, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min.
  http://www.mathsvidéos.com, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min.
  http://manuel.sesamath.net/, consulté le 21/ 12/ 2011 à 23 h 24 min.
  http://www.maths-videos.com, consulté le 26/ 01/ 2015 à 14 h 03 min.
- ✓ **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

Prérequis: simplification de fraction ; opposé ; valeur absolue ; équation de la forme **$a + x = b$**

INTRODUCTION (5 min)

Le concept de nombre entier est évidemment très ancien. Jean-Paul Collette, dans son *Histoire des Mathématiques, volume 1*, met en évidence les trois obstacles à franchir afin d'assimiler le concept de nombre:

"L'homme primitif pense à un nombre lorsqu'il saisit bien les relations suivantes :
1) *La nature des objets à compter ne joue aucun rôle dans la numération;*
2) *L'ordre dans lequel les éléments sont observés n'affecte pas le résultat final, c'est à dire le nombre cardinal; 3) le dernier élément compté correspond de fait au nombre cardinal de la collection, dans la mesure où seul le résultat du compte est nécessaire."*

Les fractions peuvent représenter l'action de partager en parts égales une quantité, une longueur. Toutefois, l'étude des nombres rationnels vient de l'extension des nombres **DECIMAUX RELATIFS** vue en **5^{e}**. C'est dire surement que compte tenu des limites constatées dans ID que l'homme a dû penser à trouver un ensemble beaucoup plus englobant.

Dès lors pour des raisons pratiques, ce chapitre sera scindé en deux parties : **Leçon 1 ; Opérations dans** et **Leçon 2 : Comparaison dans $\mathbb{Q}$**

« Les triangles dont les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 3 ; 4 et 5 sont rectangles»
PYTHAGORE

PLAN DU COURS

CHAPITRE I

LEÇON 1 : OPERATIONS DANS ℚ

DEROULEMENT DU COURS

I° DEFINITION

I - 1) Activité :

Les nombres $\frac{-8}{3}$; $\frac{9}{-5}$ et $\frac{-1}{-7}$ admettent-ils de valeur décimale ?

I - 2) Définition :

On appelle *nombre rationnel*, un nombre qui peut se mettre sous la forme d'un quotient d'un entier relatif par un entier relatif non nul.

Un rationnel peut se mettre sous la forme $\frac{a}{b}$; avec **a** $\in \mathbb{Z}$ et **b** $\in \mathbb{Z}^*$

❖ **Remarque :**

Tout nombre décimal est un nombre rationnel. Donc : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

I - 3) Exercice d'application :

Recopie et complète par le symbole $\in$.

1) $\frac{21}{3}$ … IN ; $\frac{41}{3}$ … IN ; $\frac{41}{3}$ … $\mathbb{Q}$ 2) $\frac{21}{3}$ … $\mathbb{D}$; - $\frac{40}{12}$ … $\mathbb{Q}$; $\frac{125}{375}$ … $\mathbb{Q}$ 3) - $\frac{365}{73}$ … $\mathbb{Z}$; $\frac{121}{11}$ … $\mathbb{Q}$; $\frac{12}{6}$ …$\mathbb{D}$ 4) 15, 5….$\mathbb{Q}$; $\frac{41}{3}$ … $\mathbb{D}$; $\frac{3}{4}$ … $\mathbb{Q}$ et - $\frac{45}{3}$ … IN

II° DIFFERENTES ECRITURES D'UN NOMBRE RATIONNEL :

II - 1) Activité :

1) recopie puis complète.

3 x 8 = 24 donc $8 = \frac{24}{3}$; 5 x 8 = … donc $8 = \frac{\cdots}{5}$; -7 x 8 = -… donc $8 = \frac{-\cdots}{-7}$

2) Déduis en que : $\frac{24}{3} = \frac{\cdots}{5} = \frac{-\cdots}{-7}$
3) Montre que $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$
4) Complète : j'ai alors simplifié par … .

II - 2) Propriétés :

Propriété 1 :

Un *nombre rationnel* ne change pas si on multiplie ses termes par un même entier relatif non nul.

$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ **avec** $a \in \mathbb{Z}$; $b \in \mathbb{Z}^*$ et $k \in \mathbb{Z}^*$

Propriété 2 :

Un *nombre rationnel* ne change pas si on divise ses termes par un même entier relatif non nul.

$\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$ **avec** $a \in \mathbb{Z}$; $b \in \mathbb{Z}^*$ et $k \in \mathbb{Z}^*$. **On dit qu'on a simplifié par k.**

II - 3) Exercice d'application :

Simplifie les écritures des rationnels suivants : $\frac{2}{3} = \frac{2 X 5}{3 X 5} = \frac{\cdots}{\cdots}$; $\frac{16}{36} = \frac{\cdots}{\cdots}$

III° OPERATIONS DANS L'ENSEMBLE ℚ :

III - 1) Addition – Soustraction des nombres rationnels:

III - 1 – 1) Activité :

Calcule les rationnels suivants : $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$; $\frac{1}{7}-\frac{5}{3}$; $\frac{2}{3}+11$; $\frac{2}{12}+\frac{1}{8}$

III - 1 – 2) Propriétés :

Pour calculer *la somme ou la différence de deux nombres rationnels*, on commence par les réduire au même dénominateur puis on applique les propriétés ci-dessous :

- ✓ $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$
- ✓ $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$

III - 1 – 3) Méthode :

Pour calculer la somme ou la différence de deux rationnels on peut :

- ✓ simplifier si possible les rationnels ;
- ✓ réduire au même dénominateur les rationnels obtenus si nécessaire ;
- ✓ appliquer l'une des propriétés ci-dessus ;
- ✓ simplifier si possible le résultat.

❖ **Remarque :**

Les propriétés de l'addition dans $\mathbb{Q}$ sont les même que celles de l'addition dans $\mathbb{D}$.

III - 1 – 4) Exercice d'application :

Calcule les rationnels suivants : $\frac{26}{9}+\frac{2}{3}$; $\frac{-4}{5}+\frac{7}{2}$; $\frac{5}{11}+7$; $\frac{26}{13}-6{,}5$

III - 2) Multiplication de rationnels :

III - 2 – 1) Activité :

Effectue : $\frac{3}{7}\text{ x }\frac{11}{2}$; $\frac{-5}{15}\text{ x }\frac{1}{2}$; $(\frac{-4}{3})\text{ x }(\frac{-2}{9})$

III - 2 – 2) Propriété :

Soit a ; b ; c ; et d des entiers relatifs, b et d non nuls : $\frac{a}{b}\text{ x }\frac{c}{d}=\frac{a\text{ X }C}{b\text{ X }d}$

III - 2 – 3) Méthode :

Pour calculer le produit de deux rationnels on peut :

- ✓ simplifier si possible les rationnels ;
- ✓ trouver le signe du résultat
- ✓ appliquer la propriété ci-dessus ;
- ✓ simplifier si possible le résultat.

❖ **Remarque :**

Les propriétés de la multiplication dans $\mathbb{Q}$ sont les mêmes que celles de la multiplication dans $\mathbb{D}$.

III - 2 – 4) Exercice d'application

Calcule les expressions ci-dessous en donnant les résultats sous forme irréductible :
$\frac{-8}{45}\text{ x }\frac{27}{32}$; $7\text{ x }\frac{9}{21}$; $\frac{3}{5}\text{ x }\frac{15}{6}$

III - 3) Inverse d'un rationnel :

III - 3 – 1) Activité :

Effectue : $4 \text{ x } 0{,}25$; $\frac{3}{7}\text{ x }\frac{7}{3}$; $\frac{-1}{5}\text{ x }(-5)$

III - 3 – 2) Définition et notation :

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

III - 3 – 3) Propriétés :

Soit a un entier relatif non nul.

- ✓ **Si le produit $a \text{ x } \frac{1}{a}=\frac{a}{a}=1$ alors l'inverse de a est $\frac{1}{a}$.**
- ✓ **Si a et b sont deux nombres relatifs non nuls quelconques, alors l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$**

III - 3 – 4) Exercice d'application :

1) Recopie et complète : inv (3) = ; inv $(\frac{1}{2})$ = ; inv $(\frac{-5}{8})$ =
2) Montre que $\frac{9}{7}$ et $\frac{7}{9}$ sont des inverses.

III - 4) Division d'un rationnel :

III - 4 – 1) Activité :

Calcule puis compare : 9 : 3 et 9 x $\frac{1}{3}$; 10 : 2 et 10 x $\frac{1}{2}$; $\frac{15}{2} : \frac{4}{5}$ et $\frac{15}{2}$ x $\frac{4}{5}$

III - 4 – 2) Propriétés :

Soit **a** ; **b** ; **c** et d des entiers relatifs, b et d non nuls :

Pour diviser par un rationnel non nul, on multiplie par l'inverse de ce rationnel :

- $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$

III - 4 – 3) Exercice d'application :

Calcule chacune des expressions ci-dessous et donne le résultat sous forme irréductible :

$A = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{11}}$; $B = \frac{\frac{12}{5}}{7}$; $C = \frac{-\frac{1}{3}(2-3)}{-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}} + \frac{-\frac{1}{2}(2 \times 2-5)}{-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}}$

III - 5) Puissance d'un nombre rationnel

III - 5 - 1. Exposant positif :

- ✓ **Définition :**

Pour tout nombre entier positif non nul n et pout tout entier relatif a :

$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs}}$

a^n (Lu « a puissance n ») est appelé puissance nième de a et n est appelé l'exposant.

- ✓ **Remarque :** $a^1 = a$ et $a^0 = 1$
- ✓ **Exemples :** $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$: $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$

III - 5 - 2. Exposant négatif :

- ✓ **Définition :**

Pour tout nombre entier positif non nul n et pout tout entier relatif a :

$a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs}}} = \frac{1}{a^n}$

- ✓ **Exemples :** $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$
- ✓ **Remaeque :** L'inverse de a est $\frac{1}{a} = a^{-1}$

III - 5 - 3. Règles de priorités :

- ✓ **Propriété :** En l'absence de parenthèses, le calcul de la puissance est prioritaire sur les autres opérations.
- ✓ **Exemples :** $6 + 2^3 \times 5 = 6 + 8 \times 5 = 6 + 40 = 46$

III - 6) Puissance de dix :

III - 6 – 1) Définition des puissances de dix :

✓ **Définition :**

Pour tout nombre entier positif non nul n et pout tout entier relatif a :

$\mathbf{10^n} = \underbrace{10 \ X \ 10 \ X \ 10 \ X \ 10 \ X \ 10 \ X \ldots X \ 10}_{\text{n facteurs}} = 1\,\underbrace{0\,00\ldots0}_{\text{n zéros}}$

$\mathbf{10^{-n}} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,00\ldots0}_{\text{n zéro}}1$

✓ **Exemple :** $\mathbf{10^1 = 10 \ ; \ 10^2 = 100 \ ; \ 10^{-3} = 0{,}001 \ ; \ 10^{-5} = 0{,}00001}$

III - 6 - 2) Vocabulaire :

✓ **Définition :** **Ces préfixes désignent des multiples des puissances de dix**

Téra	Méga	Giga	Kilo	Hecto	Déca	Déci	Centi	Milli	Micro	Nano	Pico
10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}

✓ **Exemples :** 1kg = 10^3 g ; 1 cm = 10^{-2} m : 1 Gigaoctet (1 GO) = 10^9 Octets

III - 6 – 2) Propriétés : Pour tous nombres entiers relatifs m et p :

$\mathbf{10^m \times 10^p = 10^{m+p}}$; $\mathbf{(10^m)^p = 10^{n\,Xp}}$; $\mathbf{\frac{10^m}{10^p} = 10^{m-p}}$

III - 6 – 3) Exercice d'application :

Calcule la valeur des expressions suivantes : $10^3 \times 10^4$; $(10^2)^8$ et $\frac{10^9}{10^4}$

III -7) Ecriture scientifique d'un nombre :

III - 7 – 1) Multiplier par une puissance de 10 :

✓ **Propriétés :**

❖ Multiplier un nombre par $\mathbf{10^n}$ revient à décaler la virgule de **n rangs vers la droite** (on complète par des zéros si nécessaire)

❖ Multiplier un nombre par $\mathbf{10^{-n}}$ revient à décaler la virgule de **n rangs vers la gauche** (on complète par des zéros si nécessaire)

✓ **Exemples :** A = 123,875 x 10^2 = 12387,5 et B = 123,875 x 10^{-5} = 0,00123 875

III - 7 – 2) Notation ou écriture scientifique:

✓ **Définition :**

Tout nombre décimal non nul peut s'écrire en notation scientifique, c'est-à-dire sous la forme $\mathbf{a.\ 10^n}$ où **a** est un nombre décimal non nul ayant un seul chiffre avant la virgule et où n est nombre entier relatif. a est appelé mantisse du nombre.

✓ **Exemples :**

❖ Age de la terre : 4 500 000 000 années = 4,5. 10^9 année **;**

❖ Rayon d'un atome : 0,000 000 000 529 m = 5,29. 10^{-10}m

III - 7 – 3) Exercice d'application :

1. Ecrire en notation scientifique les nombres suivants et les ordonner dans l'ordre croissant

E = 0,24 x 10^{-5} ; F = 0,36 x 10^4 ; G = 0, 00000000000035

3. On donne C = $\frac{2{,}6 \ X \ 10^2 \ X \ 1{,}7 \ X \ 10^2}{0{,}2 \ X \ 10^5 \ X \ 10^3}$ Donner l'écriture scientifique de C.

CHAPITRE I

LEÇON 2 : COMPARAISON DANS ℚ

DEROULEMENT DU COURS

I° - VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RATIONNEL :

I - 1) Définition :

La valeur absolue d'un rationnel a est le nombre rationnel positif ou nul noté $|a|$ tel que $\begin{cases} |a| = a \quad si \ a \geq 0 \\ |a| = -a \ si \ a \leq 0 \end{cases}$

I - 2) Propriétés :

Soit a et b deux nombres rationnels

- ✓ Si **a** = **0** alors $|a| = 0$
- ✓ Si $|a| = 0$ alors **a = 0**
- ✓ Si **a = b** ou **a = - b** alors $|a| = |b|$
- ✓ Si $|a| = |b|$ alors **a = b** ou **a = - b**

I - 3) Exercice d'application :

1) Ecrire les expressions suivantes sans le symbole de valeur absolue.

A=$\left|4-\frac{9}{7}\right|$; B = $\left|1-\frac{1}{4}:7\right|$; C = $\left|\frac{3}{4}-\frac{4}{3}\right|$; D = $\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{2}:3\right|$.

2) On considère les nombres rationnels: a, b et c tels que : a > 0, b < 0 et c > 0.

Ecrire les expressions suivantes sans le symbole de valeur absolue.

A = $|a|+|b|-|c|$; B = $|-7\,abc|$; C = $\left|a\,X\,\frac{b}{c}\right|$; D = $|-a+b|$

II° OPPOSE D'UN RATIONNEL :

II - 1) Définition et notation :

Deux rationnels sont dits opposés si et seulement si, leur somme est nulle.

II - 2) Exemple : Opp (5) = - 5 ; opp $(\frac{7}{3})$ = - $\frac{7}{3}$

II - 3) Exercice d'application : Montre que :$-\frac{5}{2}$; $\frac{5}{2}$ sont des nombres opposés.

III° COMPARAISON DE DEUX NOMBRES RATIONNELS :

III - 1) Activité :

a) Compare 3,45 et 2,756.

b) Compare $\frac{5}{2}$ et $\frac{21}{3}$ à l'aide de la division.

c) Retrouve le résultant en utilisant le dénominateur commun.

d) On donne a = - $\frac{31}{7}$ et b = $\frac{26}{6}$. Calcul la différence a – b puis complète :

Si a – b > 0 alors a … b

Si a – b < 0 alors a … b

III - 2) Règles :

Pour comparer deux rationnels, on peut utiliser l'une des règles suivantes :

❖ **Règle 1 :**

On effectue la division puis on procède comme dans 𝔻.

❖ **Règle 2 :**

On écrit avec un dénominateur positif ensuite, on les réduit au même dénominateur puis on compare les numérateurs en utilisant les mêmes règles de comparaison que celles dans 𝔻.

❖ **Règle 3 :**

On fait la différence des rationnels a et b

Si $a - b > 0$ alors $a > b$

Si $a - b < 0$ alors $a < b$

III - 3) Exercice d'application :

1) Comparer les nombres rationnels suivants en utilisant deux méthodes différentes.

a) $\frac{5}{6}$ et $-\frac{2}{5}$; **b)** $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$; **c)** 5,1 et $\frac{14}{3}$

2) Ranger les nombres rationnels ci-dessous dans l'ordre croissant : $\frac{8}{7}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{2}$; et $\frac{5}{2}$

IV° CONDITION D'EGALITE DE DEUX NOMBRES RATIONNELS :

IV - 1) Activité :

On donne $\frac{3}{7}$ et $\frac{6}{14}$

a) Compare $\frac{3}{7}$ et $\frac{6}{14}$
b) Compare les produits en croix. Que constates-tu ?
c) On donne $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, multiplie chaque membre de l'égalité par bd puis simplifie. Que constates-tu ?

IV - 2) Propriété :

Soit a ; b ; c ; et d des décimaux relatifs non nuls.
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **si et seulement si ad = bc (*le produit des moyens est égale au produit des extrêmes*)**

IV - 3) Exercice d'application :

Recopie et complète par le nombre qui convient : $\frac{-8}{14} = \frac{16}{...}$; $\frac{10}{8} = \frac{5}{...}$; $\frac{-15}{9} = \frac{5}{...}$

V° OPERATIONS ET EGALITE :

V - 1) Activité :

On donne $\frac{3}{7}$ et $\frac{6}{14}$

1) Calcul $\frac{3}{7} + \frac{2}{3}$ puis $\frac{6}{14} + \frac{2}{3}$. Compare les résultats obtenus
2) Calcul $\frac{3}{7}$ x $\frac{2}{3}$ puis $\frac{6}{14}$ x $\frac{2}{3}$. Compare les résultats obtenus

V - 2) Propriétés :

❖ **Propriété 1 :**

En *ajoutant ou en retranchant un même rationnel* aux deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.

Si $a = b$ alors $a + c = b + c$; Si $a = b$ alors $a - c = b - c$

❖ **Propriété 2 :**

En multipliant les deux membres d'une égalité par un même rationnel, on obtient une nouvelle égalité. Si a = b alors a x c = b x c

V - 3) Exercice d'application :

Soit x un rationnel. Recopie et complète

1) Si $x = \frac{11}{7}$ alors $x + \frac{3}{7} = \ldots + \ldots$
2) Si $x = \frac{11}{7}$ alors $7x = \ldots$ x $\ldots = \ldots$

VI° INEGALITE DE DEUX NOMBRES RATIONNELS :

VI - 1) Activité :

1) Compare $\frac{5}{2}$ et $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{2} + \frac{3}{7}$ et $\frac{2}{3} + \frac{3}{7}$; $\frac{5}{2} - \frac{3}{7}$ et $\frac{2}{3} - \frac{3}{7}$
2) On a : $\frac{12}{5} > \frac{9}{5}$ et $\frac{11}{2} > \frac{9}{2}$: Compare $\frac{12}{5} + \frac{11}{2}$ et $\frac{9}{5} + \frac{9}{2}$
3) Compare $\frac{5}{2}$ x 11 et $\frac{2}{3}$ x 11; - 5 x $\frac{5}{2}$ et - 5x $\frac{2}{3}$
4) Compare $\frac{5}{2}$: 11 et $\frac{2}{3}$: 11; - 5 : $\frac{5}{2}$ et - 5 : $\frac{2}{3}$

VI - 2) Propriétés :

❖ **Propriété 1**

En *ajoutant ou en retranchant* un même nombre rationnel aux deux membres d'une inégalité, on obtient *une nouvelle inégalité*.

Si $a > b$ alors $a + c > b + c$

Si $a > b$ alors $a - c > b - c$

❖ **Propriété 2 :**

En *ajoutant membre à membre deux inégalités de même sens*, on obtient *une nouvelle égalité de même sens.*

Si $a > b$ et $c > d$ alors $a + c > b + d$

❖ **Propriété 3 :**

Lorsqu'on *multiplie ou divise par un même nombre rationnel positif non nul*, chaque membre d'une inégalité, on obtient une *nouvelle égalité de même sens*.

Si $a > b$ et $c > 0$ alors $ac > bc$

Si $a < b$ et $c > 0$ alors $ac < bc$

❖ **Propriété 4 :**

Lorsqu'on *multiplie ou divise par un même nombre rationnel négatif non nul*, chaque membre d'une inégalité, on obtient une *nouvelle égalité de sens contraire*.

Si $a > b$ et $c < 0$ alors $ac < bc$

Si $a < b$ et $c < 0$ alors $ac > bc$

VI - 4) Exercice d'application:

1) Ajoute ou retranche à chaque membre 5
   a) Si $a > b$ alors
   b) Si $a > b$ alors
2) Ajoute membre à membre les inégalités $7 > 5$ et $4 > 1{,}5$ alors
3) Multiplie puis compare :
   a) Si $7 > 4$ et $5 > 0$ alors 7×5 … 4×5
   b) Si $3 < 4$ et $5 > 0$ alors 3×5 … 4×5
4) Multiplie puis compare :
   a) Si $7 > 4$ et $-5 < 0$ alors $7 \times (-5)$ ... $4 \times (-5)$
   b) Si $4 < 7$ et $-5 < 0$ alors $4 \times (-5)$ ... $7 \times (-5)$

VII° VALEUR EXACTE, VALEUR APPROCHEE :

Calcule le quotient de $\frac{4}{5}$ et $\frac{5}{3}$

VII - 1) Vocabulaire :

$\frac{4}{5} = 0{,}8$. 0,8 est une *valeur exacte* de $\frac{4}{5}$

Par contre nous ne pouvons pas trouver une valeur exacte à $\frac{5}{3}$ mais nous pouvons l'***encadrer*** par des valeurs de plus en plus précises, dites *valeurs approchées*.

VII - 2) Exemples:

✓ Encadrement à l'unité près :

Trouve deux entiers consécutifs qui encadrent $\frac{5}{3}$: $\frac{5}{3} = 1{,}666666…$ alors : $1 \leq \frac{5}{3} \leq 2$

✓ Encadrement au dixième près (d'ordre 1 ; ou à 10^{-1} près)

Trouve deux décimaux consécutifs d'ordre 1 qui encadrent $\frac{5}{3}$: $1{,}6 \leq \frac{5}{3} \leq 1{,}7$

✓ Encadrement au centième près (d'ordre 2 ; ou à 10^{-2} près)

Trouve deux décimaux consécutifs d'ordre 2 qui encadrent $\frac{5}{3}$: $1{,}66 \leq \frac{5}{3} \leq 1{,}67$

« Les triangles dont les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 3 ; 4 et 5 sont rectangles»
PYTHAGORE

CHAPITRE II

CALCUL ALGEBRIQUE

DUREE : **12 HEURES**

Objectif général :

Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser le calcul algébrique pour résoudre des problèmes

Objectifs spécifiques : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

Leçon 1 :

- ❖ Développer une expression littérale en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction.
- ❖ Réduire une expression littérale en utilisant la somme.
- ❖ Restituer les égalités usuelles pour développer et réduire une expression littérale.
- ❖ Utiliser les égalités usuelles pour développer et réduire une expression littérale.

Leçon 2 :

- ❖ Restituer la distributivité pour factoriser une expression littérale.
- ❖ Utiliser les égalités usuelles pour factoriser une expression littérale.
- ❖ Calculer une valeur numérique d'une expression littérale en choisissant une forme factorisée ou une forme développée pour les calculs.

Sources :

- ✓ Loi d'Orientation : 91.22 du 16 Février 1991 ; Guide d'usage de Maths 4^{e}
- ✓ Nouveau programme 2006 ; Manuel d'excellence 4ème Pages 141 à 154 ;
- ✓ **Webographie :** http://www.mathovore.fr, consilté le 17/ O1/ 2015 à 21 h 19 min.
- ✓ **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

Prérequis : Puissance : a ² = a x a ; … ; Distributivité ; propriétés opératoires ; règle de suppression des parenthèses dans $\mathbb{D}$.

INTRODUCTION : (5min)

Les notions développement et de factorisation sont essentiellement nouvelle pour la 4ème. Toutefois elles ont été abordées intuitivement en 6ème et 5ème avec la notion de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction. En quatrième, l'étude de ces notions nous permettra de découvrir les égalités usuelles et d'établir qu'elles fonctionnent en sens inverse l'une de l'autre. Leur utilité se fera sentir dans la résolution de certaines équations. Dans la vie courante, ces notions nous permettrons de faire des calculs rapides sans user de machine calculatrice.

Aussi, devons-nous faire attention sur la difficulté des apprenants d'user les signes + et – . Pour plus de pragmatisme, ce chapitre sera divisé en deux leçons : leçon 1 Développement et leçon 2 Factorisation.

PLAN DU COURS : LEÇON 1

I) Réduire un produit	***III° DEVELOPPEMENT ET REDUCTION :***
I – 1) Activité:	III – 1) Rappel des règles de priorité :
I – 2) Propriétés :	III – 1- 1) Règles de priorité :
I – 3) Exercice d'appication :	III- 1 - 2) Exercice d'application :
II° DEVELOPPEMENT :	**III – 2) Développement et réduction**
II - 1) Par simple distributivit :	III – 2 – 1) Activité :
II – 1 – 1) Activité :	III – 2 – 2) Méthode :
II- 1 - 2) Définiton et Propriété:	III - 2 - 3 Exercice d'application :

CHAPITRE II

LEÇON 1 : DEVELOPPEMENT

DEROULEMENT DU COURS

I° REDUIRE UN PRODUIT :

I -1) Activité :

Soit a et b deux nombres relatifs. Recopie et complète : (- 2a) (7b) = ; (-3a) (- 2b) =

I- 2) Propriétés :

Soit a et b deux nombres relatifs.

(– a) b = – ab **a (–b) = – ab** **(+a) (+b) = + ab = ab** **– (–a) b = + ab = ab**

I- 3) Exercice d'application :

Soit a et b deux nombres relatifs. Calcule les produits suivant sachant que : ab = 23

a(-b) ; (-a) (-b) ; a (-2b) ; (-3a) (2b)

II° DEVELOPPEMENT :

II - 1) Par simple distributivit :

II – 1 – 1) Activité :

Recopie et complète en utilisant la distributivité : a (x + y) = ; 2 (x + 5) ; x (x – 7)

II- 1 - 2) Définiton et Propriété:

- **Définition :** Développer un produit c'est l'écrire sous forme d'une somme.
- **Propriété :** Soit **a** ; x et y des nombres relatifs :

a (x + y) = ax + ay ; **a (x – y) = ax – ay.**

II- 1 - 3) Exercice d'application :

Développer les produits suivants : 2(x - y) ; x (7 + 2x) ; 5x (1 – 2y)

II – 2) Par double distributivité :

II – 2 – 1) Activité :

Recopie et complète

(2 + x) (x- 3) = 2 (x – 3) + x (x -3)
= ……..
= ……..

(a + b) (x – y) = ……..

II - 2 - 2) Propriété:

Soit **a** ; **b** ; x et y des nombres relatifs :

(a + b) (x - y) = a (x – y) + b (x – y)
= a x – ay + bx – by

II - 2 - 3) Exercice d'application :

Développer les expressions suivantes : (-2 + a) (x + 3y) ; (a – 2) (b – y) ; (a + 4) (b - 1)

III° DEVELOPPEMENT ET REDUCTION :

III – 1) Rappel des règles de priorité :

III – 1- 1) Règles de priorité : En l'absence de parenthèses :

- **La multiplication est prioritaire sur l'addition et la soustraction.**
- **Le calcul de puissance est prioritaire sur la multiplication.**

III – 1- 2) Exercice d'application :

Pour a = -1 ; b = 2 ; c = -2 et d = 0,5

1) Calculer les valeurs numériques de : A ; B ; C et D

A = ab + cd ; B = a (b + c)d ; C = ab² ; D = (ab)²

2) Comparer les valeurs numériques de : A et B ; C et D

III – 2) Développement et réduction

III – 2 – 1) Activité :

Soit x un entier relatif

1) Réduire les expressions ssuivantes : $2x - 5x + 9x$; $x - 5{,}2x$; $-2{,}5x + 3{,}2x$; $4x + 2x^2 - 5x^2$
2) Développer et réduire les expressions suivantes : (x - 1) (x + 2) **et** (2x - 1) (3x + 5)

III – 2 – 2) Méthode :

Pour développer et réduire un produit, il faut :

- l'écrire sous forme de somme puis ;
- regrouper les termes semblables en un seul terme

III – 2 – 3) Exercice d'application :

1) Dans l'expression A = 3a – 2b + 2a, les parenthèses ont été oubliées ; place-les afin que 49 soit la valeur numérique de A pour a = 3 et b = 1 **Rép. : A = (3a – 2) (b + 2a)**
2) Développer et réduire les expressions suivantres : $5(2x - 3) - 3x$; $-2(\frac{1}{2}x - 7) + 3(x + 4)$; $(2x - 3)(5x - 2)$

IV° PRODUITS REMARQUABLES OU EGALITES USUELLES :

IV – 1) Activtité :

Soit a et b deux nombres relatifs

1) En uitilisant la définition du carré d'un nombre, développe et réduit les expressions : (a + b)² ; (a – b)²
2) En utlisant la double distributivité développe et réduit l'expression (a +b) (a – b)

IV – 2) Propriétés :

Soit a et b deux nombres relatifs on a :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$** **$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$**

IV- 3) Exercice d'application : y est un nombre relatif.

Développer les produits suivants : (y + 4)² ; (y + 1,1)² ; (y – 1)² ; (3 – y) ² ; (y + 1) (y- 1) ; (3 – y) (3 + y)

CHAPITRE II

LEÇON 2 : FACTORISATION

PLAN DU COURS LEÇON 2

DEROULEMENT DU COURS

I° RECONNAITRE UNE SOMME, UN PRODUIT :

I -1) Somme :

$x + 1$ est une somme. Ses termes sont $\boldsymbol{x}$ et **1**

$5\,x - 3$ est une somme. Ses termes sont **5$\boldsymbol{x}$** et **(-3)**

I – 2) Produit :

$x\,(x - 3)$ est un produit ses facteurs sont x et $(x - 3)$

$(7\,x - 1)\,(x + 2)$ est un produit ses facteurs sont $(7\,x - 1)$ et $(x + 2)$

I – 3) Exercice d'application :

Identifier les sommes et les produits en précisant les termes ou les facteurs

$8(2\,x)$; $x - 7$; $2\,x + 9$ et $(3\,x - 1)\,(2 + x)$

II° FACTORISATION :

II – 1) Par la mise en évidence d'un facteur commun

II-1- 1) Activité :

1) En utilisant la distributivité écris chaque expression d'une autre façon.

A = 5 X 3 + 5 X 8 ; B = 4 X7 – 7 X 2 ; C = 3x – 3y ; D= 2a + 6 b

II – 1 – 2) Méthode :

La méthode consiste à repérer le *facteur commun*, l'isoler puis écrire l'expression sous forme d'un produit de facteurs.

Exemples :

Soit à factoriser E = 12 y – 12 k ; F= 5x (x -1) + 2x (x-1)

1) Souligne le facteur commun de chaque expression puis factorise.

II – 1 – 3) Application :

Factoriser : A= k x + k y ; B = 7 x – 14y ; C = (x- 5) (x+1) – 2(x +1) ; D = 2 a² + 5 a

II – 2) Par l'utilisation des égalités usuelles :

II – 2 – 1) Activité

On donne A = 9 x² + 30 x + 25

1) Justifier que 9 x² est sous la forme de a²; 25 sous la forme de b² et 30 x sous la forme de 2ab puis déduire l'expression de a et b ainsi que la forme factorisée de A.

2) En utilisant la même démarche factoriser : $B = 81x^2 - 16$ et $C = 16x^2 - 24x + 9$

II – 2 – 2) Méthode

Pour factoriser une expression à l'aide des égalités usuelles il faut connaitre les trois égalités usuelles par cœur et savoir les reconnaître.

Exemples :

Factoriser : $A = x^2 + 6x + 9$ et $J = 49x^2 - 64$

Solution

$A = x^2 + 6x + 9$ est de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ d'où $A = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

$J = 49x^2 - 64$ est de la forme $(a-b)(a+b)$ D'où $J = 49x^2 - 64 = (7x - 8)(7x + 8)$

II – 2 – 3) Application

Factoriser : $I = 25x^2 - 30x + 9$; $J = 9x^2 + 12x + 4$; $K = x^2 - 1$

III° COMBINAISON DES DEUX METHODES :

La factorisation de certaines expressions nécessite la combinaison des deux méthodes.

Exemples :

Soit à factoriser : $A = 2x^2 + 20x + 50$; $B = 27x^2 - 3$ $C = x^2 + 10x + 21$

Solution

$A = 2x^2 + 20x + 50$

$= 2(x^2 + 10x + 25)$ Or, $x^2 + 10x + 25$ est de la forme $a^2 + 2ab + b^2$. Par identification, on trouve $a = x$ et $b = 5$ Donc $\mathbf{A = 2(x + 5)^2}$

De la même manière on trouve $\mathbf{B = 3(3x - 1)(3x + 1)}$

$C = x^2 + 10x + 21$

$C = x^2 - 10x + 25 - 4$

$C = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 - 4$ Or, $x^2 - 10x + 25$ est de la forme $a^2 - 2ab + b^2$. Par identification, on trouve $a = x$ et $b = 5$

D'où $C = (x - 5)^2 - 2^2$, il s'en suit qu'on a finalement la forme $a^2 - b^2$. Par identification, on trouve $a = x - 5$ et $b = 2$

$C = [(x - 5) - 2][(x - 5) + 2]$ Donc $\mathbf{C = (x - 7)(x - 3)}$

IV° CALCUL NUMERIQUE :

Calculer la valeur numérique d'une expression littérale revient à remplacer l'inconnue ou les inconnues par une valeur numérique.

On donne $A = 2x^2 + 20x + 50$

1) Factoriser A

2) Utilise la forme factorisée puis la forme développer pour calculer la valeur numérique de A pour x = 6

1) $A = 2x^2 + 20x + 50$ $A = 2(x + 5)^2$	2) *En utilisant la forme factorisée Pour $x = 6$, $A = 2(6 + 5)^2$; $A = 2(11)^2$ $A = 2 \times 121$ $A = 242$	2)*En utilisant la forme développée $A = 2x^2 + 20x + 50$

CHAPITRE III

EQUATIONS A UNE INCONNUE

DUREE : **8 HEURES**

OBJECTIF GENERAL : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation des équations à une inconnue pour résoudre des problèmes.

OBJECTIF DE SPECIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- Mettre en équation une situation simple ;
- Vérifier qu'un nombre rationnel est solution d'une équation ;
- Utiliser l'inverse pour résoudre dans $\mathbb{Q}$ des équations à une inconnue du type ax + b = 0
- Résoudre dans $\mathbb{Q}$ des équations à une inconnue du type (ax + b) (cx + d) = 0
- Résoudre dans $\mathbb{Q}$ des équations à une inconnue du type $\frac{a}{x} = b$; $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ avec x ≠ 0 et c ≠ 0
- Résoudre des problèmes utilisant ces équations

Source et Support pédagogiques

- Programme de maths 4^{e} de 2006 pages 60.
- Loi d'orientation **91.22 du 16 Février 1991**
- Manuels : Excellence 4ème page 166 et CIAM 4ème page 162.
- Introduction à l'algèbre et géométrie page
- Guide pédagogique 4^{e} ; Guide d'usage 4^{e} ; CIAM 4^{e} ; Excellence 4^{e} ; Pythagore 4^{e} ;
- Webographie : http://www.mathovore.fr, consulté le 17 / 01 / 2015 à 21 h 16 min.
  http://www.mathsvidéos.com, consulté le 26 / 06 / 2015 à 10 h 30 min.
  http://www.logamaths.fr, consulté le 26 / 06 / 2015 à 8 h 37 min.
- **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

Prérequis :

Equations du type : x + a = b ; ax = b ; Egalité et Opérations ; Nombres rationnels et Opérations sur les nombres rationnels ; Développement et Factorisation

Introduction : (5 min)

Les premières traces tangibles de résolution d'équations remontent à l'apparition de l'écriture et donc à la Mésopotamie. Ainsi, des Babyloniens aux Grecques en passant par les Arabes, la résolution de problème s'est toujours faite sous forme d'équations simples même si la notation mathématique, et ce à partir de l'écriture, a toujours changé à travers notre histoire. En Europe, le développement systématique des méthodes de résolution des équations se fait au XV^{e} et XVI^{e} Siècle.

En effet, une équation n'est rien d'autre qu'une égalité entre deux membres. Souvent, il s'agit de déterminer une certaine quantité, connaissant simplement une égalité qui fait intervenir cette quantité inconnue. Comme le fait de nommer les choses permet souvent de mieux les étudier, l'on donne alors un certain nom à notre inconnue (le plus souvent on l'appelle x). On obtient ainsi une égalité que doit vérifier x, c'est ce qu'on appelle une équation. Bien sûr, il y a des équations de toutes sortes.

En **5ème**, vous aviez étudié les équations numériques de la forme a + x = b où a et b sont des nombres décimaux relatifs. Cette année(en **4ème**), nous aborderons les affines, c'est – à - dire celles de la forme ax + b = 0 ou se ramenant à cette forme ; les équations de la forme (ax + b) (c x +d) = O et se ramenant à cette forme. Nous terminerons par celle de la forme : $\boldsymbol{\frac{a}{x} = b; \frac{a}{x} = \frac{b}{c}}$ **(x ≠0 ; c≠ 0)**. Cette étude se poursuivra en **3ème** où vous aborderez d'autres formes d'équations. Il est donc important de bien suivre.

Toutefois, résoudre une équation, c'est trouver tous les nombres *x* qui vérifient l'équation de départ. Aussi, faut-il souligner que les équations trouvent leurs applications en Sciences physique, en statistique, en géométrie, …

PLAN DU COURS

DEROULEMENT DU COURS

I° METTRE EN EQUATION UNE SITUATION SIMPLE :

I - 1) Activité :

Omar achète une gomme et crayon noir à 150 F. La gomme coûte deux fois plus que le crayon noir.

a) En désignant x le prix du crayon noir, écrit le prix de la gomme en fonction de x.
b) Ecrit la somme dépensée en fonction de x.

I - 2) Définition :

On appelle équation toute égalité dont les membres contiennent au moins une inconnue.
L'inconnue est désignée généralement par la lettre x ou y.
Bref, elle peut être désignée par toute lettre de l'alphabet.

I - 3) Exemple :

x - 3 = 0 ; 7a – 5 = 2 a + 3 ; 3m + 9 = 0 ; - 4 y + 12 = $\frac{3x+7}{3}$; sont des exemples d'équations dont les inconnues sont x ; a ; m et **y**

II° RESOLUTION D'EQUATION :

II - 1) Définition :

Résoudre une équation dans $\mathbb{Q}$ revient à déterminer l'ensemble des nombres rationnels qui vérifient cette égalité.
Cet ensemble est appelé l'ensemble des solutions de l'équation. On le note S.

II - 2) Exemples :

Soit à résoudre les équations x + 6 = 9 ; 3x = 150

x + 6 = 9 ; 3x = 150
x = 9 – 6 ; x = 150/ 3
x = 3$\in \mathbb{Q}$; x = 50 $\in \mathbb{Q}$
S = {3} ; S = {50}

III° EQUATION DU TYPE ax + b = 0 ; a ≠ 0 :

III – 1) Activité :

La somme de trois nombres entiers consécutifs est 99. Quels sont ces trois nombres ?

Solution :

1° Choix de l'inconnu

Soit x le premier nombre ; (x + 1) le deuxième nombre et (x + 1) + 1 = (x + 2) le troisième nombre

2° Mise en équation

$x + (x+ 1) + (x+ 2) = 99$ soit $3x + 3 = 99$

3° Résolution

$3x + 3 = 99$

$3x = 99 - 3 = 96$

$x = \frac{96}{3} = 32$

Donc le premier nombre est 32 ; le deuxième 33 et le troisième 34.

4° Vérification

32+ 33+ 34 = 99

III – 2) Méthode :

Pour résoudre une équation du type ax + b = 0 il faut :

- ✓ ajouter à chaque membre de l'égalité l'opposé de b
- ✓ on multiplie chaque membre de la nouvelle équation par l'inverse de a
- ✓ on vérifie, puis on donne la solution de l'équation

Soit à résoudre l'équation ax + b = 0

$ax + b = 0$

$ax + b - b = 0 - b$

$ax = -b$

$x = \frac{-b}{a}$ d'où $S = \left\{\frac{-b}{a}\right\}$

III – 3) Exercice d'application :

a) Résoudre dans $\mathbb{Q}$ les équations $x + 1 = 7$; $x + \frac{3}{2} = 0$; $x + 5 = \frac{1}{3}$; $2x + 5 = 5x + 1$

b) Dans une classe $\frac{1}{4}$ écrit ; $\frac{1}{4}$ dessine ; $\frac{1}{6}$ calcule ; $\frac{1}{10}$ bavarde et les 9 restants sont absents Calculer l'effectif de la classe.

IV° EQUATION PRODUIT NUL :

IV – 1) Activité :

a) Calcule les produits suivants : 0 x 5 = ; 5 x 0 = ; 0 x 0 =
b) Pour quelle valeur de A ou de B le produit A x B = 0 ?
c) Résoudre dans $\mathbb{Q}$ $(ax + b)(cx + d) = 0$

IV – 2) Théorème du produit nul:

Soit à résoudre $(ax + b)(cx + d) = 0$, un produit de facteurs nuls tel que : $a \neq 0$et $c \neq 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

Autrement dit, pour tout rationnel A et B [A x B = 0 équivaut à A = 0 ou B = 0] ou encoure [$(ax + b)(cx + d) = 0$ équivaut à $(ax + b) = 0$ ou $(cx + d) = 0$]

❖ **Remarque :**

Pour certaines équations, il faut factoriser l'expression pour retrouver l'équation produit.

IV – 3) Exercice d'application :

a) Résous dans $\mathbb{Q}$ les équations ci-dessous : $(x - 1)(x + 3) = 0$; $(2x - 1)(4x + 3) = 0$
b) Résous dans $\mathbb{Q}$ les équations ci-dessous
$x^2 - 9 = 0$; $4x^2 - 25 = 0$; $(3x - 2)^2 = (3x - 2)(x + 5)$; $4x^2 - 9 + (2x + 3)(x - 7) = 0$.

V ° EQUATION - QUOTIENT NUL:

V – 1) Définition

Une équation du type $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ où P (x) et Q (x) sont des expressions algébriques (avec $Q(x) \neq 0$) s'appelle une *équation-quotient*.

V – 2) Théorème :

Pour tout nombre rationnel x tel que $Q(x) \neq 0$, on a : l'équation $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ équivaut à $[P(x) = 0$ et $Q(x) \neq 0]$.

V – 3) Méthode et Exemple :

❖ **Méthode :**

Pour résoudre une équation – quotient, on peut adopter la méthode suivante :

- ✓ **Déterminer la condition d'existence** de l'équation – quotient : Ce sont les valeurs telles que *le dénominateur* $\neq 0$, qu'on appelle ***les valeurs interdites***.
- ✓ **Simplifier l'équation – quotient** si nécessaire.
- ✓ **Résoudre l'équation – quotient**.

❖ **Exemple :**

Soit l'équation q $(x) = \frac{(x-2)(x+5)}{x-2} = 0$, une équation-quotient.

1) **Détermination de la condition d'existence de q (x) :**

On obtient ainsi le domaine de définition de l'équation (q) : q existe si $x \neq 2$

2) **Simplification de q (x) :** il vient q $(x) = x - 5 = 0$

3) **Résolution de l'équation $(x + 5) = 0$**

$x + 5 = 0$ équivaut à $x + 5 = 0$ soit $x = -5$. Donc $S = \{-5\}$

VI° EQUATION DU TYPE $\frac{a}{x} = b$; $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ AVEC $x \neq 0$ et $c \neq 0$:

VI – 1) Résolution :

$\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ signifie $bx = ac$

En multiplant par l'inverse de $\frac{1}{b}$; on a : $bx \times \frac{1}{b} = ac \times \frac{1}{b}$

$$x = \frac{ac}{b}$$

Ainsi, $\frac{ac}{b}$ est la solution de l'équation dans $\mathbb{Q}$ on écrit aussi $\boxed{S = \left\{\frac{ac}{b}\right\}}$

V – 2) Exemples :

- Résoudre dans $\mathbb{Q}$ les équations : a) $\frac{2}{x} = \frac{5}{3}$; b) $\frac{7}{x} = \frac{1}{4}$ et c) $\frac{14}{x} = \frac{7}{3}$ (avec $x \neq 0$)

Solution :

a) $\frac{2}{x} = \frac{5}{3}$, signifie $5x = 2 \times 3$

$5x = 6$

$5x \frac{1}{5} \times = 6 \times \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ d'où $\boxed{S = \left\{\frac{6}{5}\right\}}$

b) $\frac{7}{x} = \frac{1}{4}$, signifie $x = 7 \times 4$ d'où x= 28 $\boxed{S = \{28\}}$

V – 3) Exercices d'application :

Résoudre dans $\mathbb{Q}$ les équations suivantes pour $x \neq 0$: a) $\frac{1}{x} = \frac{2}{7}$; b) $\frac{3}{x} = \frac{1}{8}$; c) $\frac{4}{x} = \frac{1}{7}$ et d) $\frac{12}{x} = \frac{2}{3}$

CHAPITRE IV

INEQUATION ET SYSTEME D'INEQUATION

DUREE : 6 HEURES

Objectif général : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation des inéquations et systèmes de deux inéquations à une inconnue pour résoudre un problème.

Objectifs spécifiques : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable, de :

- ✓ Mettre en système d'inéquations une situation simple.
- ✓ Vérifier qu'un nombre rationnel est solution d'un système d'inéquations à une inconnue.
- ✓ Résoudre dans **Q** les systèmes d'inéquations à une inconnue mentionnés dans les contenus ; des problèmes dont la résolution fait appel à des systèmes de deux inéquations à une inconnue des types mentionnés dans les contenus.
- ✓ Restituer les notations d'intervalles: [a, b] ;] a, b [;] a, b]; [a, b [
- ✓ Donner les solutions d'un système de deux inéquations à une inconnue sous forme d'intervalle(s) ou sous forme de phrase.
- ✓ Représenter graphiquement les solutions d'un système de deux inéquations à une inconnue.
- ✓ Interpréter graphiquement les solutions d'un système de deux inéquations à une inconnue.

Sources :

- ✓ Programme de mathématiques de 2006 ; Guide d'Usage en Maths 4e
- ✓ Loi d'orientation **91. 22 du 167 Février 1991** ;
- ✓ Manuels : CIAM 4ème ; Excellence 4ème
- ✓ **Site web :** http://www.mathovore.fr, consulté le 17 / 01 / 2015 à 21 h 16 min.
  : http://www.maths-vidéos.com, consulté le 17 / 01 / 2015 à 21 h 30 min.
- ✓ **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

Prérequis : Addition et inégalité ; multiplication et inégalité ; inverse d'un rationnel ; opposé d'un rationnel ; addition ; multiplication et propriétés (commutativité ; associativité ; élément neutre) ;

Introduction :

Par étymologie, le mot **inéquation** est composé du **préfixe « in- » et du radical « équation ».** C'est donc une inégalité entre deux valeurs algébriques contenant une inconnue (ou des inconnues). Alors, tout comme le concept d'équation, celui d'inéquation et de système de deux équations à une inconnue est apparue avec l'avènement de l'écriture, donc à partir de la Mésopotamie jusqu'à nos jours.

Toutefois, même si le terme « système d'équation » est nouveau en **4ème**, celui d'inéquation a été vu depuis la **5ème** avec les inéquations de la forme $\mathbf{a} + x < \mathbf{b}$ par exemple.

Ainsi, l'étude des **inéquations** sera pour nous l'occasion d'introduire la notion d'intervalle. De la même manière que les équations, nous aborderons la résolution de **Problème d'inéquation** et de **Système de deux inéquations à une inconnue**, étant entendu que notre vie est aussi caractérisée par des inégalités.

« Les triangles dont les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 3 ; 4 et 5 sont rectangles»
PYTHAGORE

PLAN DU COURS

DEROULEMENT DU COURS

I° MISE EN INEQUATION D'UNE SITUATION SIMPLE :

I - 1) Activité :

Sophie a le tiers de l'âge de sa maman qui a elle-même la moitié de l'âge de la sienne.
La somme des âges de Sophie, de sa mère et de sa grand-mère est inférieure ou égale à 110.
Soit x l'âge de Sophie.

a) Ecrit l'âge de la mère de Sophie en fonction de $\boldsymbol{x}$.
b) Ecrit l'âge de la grand-mère de Sophie en fonction de $\boldsymbol{x}$.
c) Mets la situation en inéquation.

I - 2) Définition :

On appelle inéquation toute inégalité dont les membres contiennent au moins une inconnue.
L'inconnue est désignée par toute lettre de l'alphabet, en généralement par la lettre $\boldsymbol{x}$ ou $\boldsymbol{y}$.

I - 3) Exemple :

$\boldsymbol{x} - 3 \geq 0$; $7\mathbf{a} - 5 < 2\,\mathbf{a} + 3$; $3\mathbf{m} + 9 > 0$; $-4\,\mathbf{y} + 12 \leq \frac{3y+7}{3}$; sont des exemples d'inéquations dont les inconnues sont $\boldsymbol{x}$; **a** ; **m** et **y**.

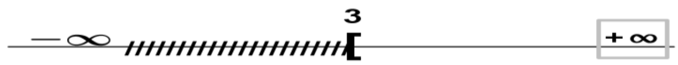
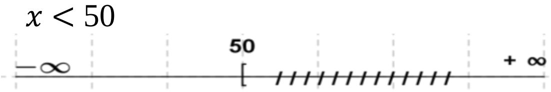
II° RESOLUTION D'INEQUATION :

II - 1) Définition :

Résoudre une inéquation dans $\mathbb{Q}$ revient à déterminer l'intervalle contenant l'ensemble des nombres rationnels qui vérifient cette inégalité. Cet ensemble est appelé l'ensemble des solutions de l'inéquation. On le note S.

II - 2) Exemples :

Soit à résoudre les équations $x + 6 \geq 9$; $3\,x < 150$

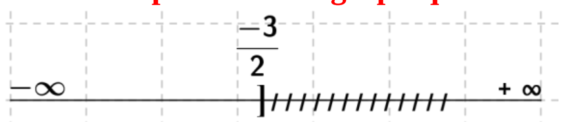
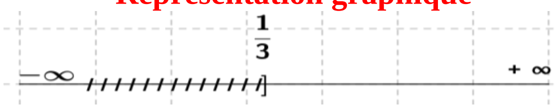
$x + 6 \geq 9$ $x \geq 9 - 6$ $x \geq 3$  La solution est l'ensemble des nombres rationnels supérieurs ou égale à 3. S $= [3; +\infty[$	$3\,x < 150$ $x < 150/3$ $x < 50$  La solution est l'ensemble des nombres rationnels strictement inférieurs à 50. S = $]-\infty\,; 50[$

III ° INEQUATION DU TYPE a x + b ≤ O et a x + b > O :

III – 1) Exemples :

Soit à résoudre dans $\mathbb{Q}$ les inéquations suivantes : a) $2\,x + 3 \leq 0$; b) $-3\,x + 1 < 0$

Solution :

a) $2\,x + 3 \leq 0$ **1ère étape :** la transposition $2\,x + 3 + (-3) \leq 0 + (-3)$ $2\,x \leq -3$ **2ème étape :** multiplication par l'inverse de a. $\frac{1}{2}\ X\ 2\,x \leq -3\ X\ \frac{1}{2}$ $x \leq \frac{-3}{2}$ L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des **nombres rationnels** inférieurs ou égaux à $\frac{-3}{2}$. On note $\boxed{S =]-\infty; \frac{-3}{2}]}$ **Représentation graphique**  	b) $-3x + 1 < 0$ **1ère étape :** la transposition $-3x + 1 + (-1) < 0 + (-1)$ $-3\,x < -1$ **2ème étape :** multiplication par l'inverse de a. $-3\ x\ (\frac{-1}{3}) > -1\ (\frac{-1}{3})$ $x > \frac{1}{3}$ L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des **nombres rationnels** supérieurs à $\frac{1}{3}$; on note $\boxed{S =]\frac{1}{3}; +\infty[}$ **Représentation graphique** 

❖ **Remarque :**

✓ **Lorsque, l'inéquation se ramène à la forme $0x \leq$ b avec b non nul et positif alors tout rationnel x est solution. L'ensemble des solutions est $\mathbb{Q}$.** On note : S = $\mathbb{Q}$

Exemple : $3\,x + 1 \leq 3\,x + 7$ équivaut à $0\,x \leq 6$ Ce qui est toujours Vrai. Donc S = $\mathbb{Q}$

✓ **Lorsque, l'inéquation se ramène à la forme $0x \leq$ b avec b non nul et négatif alors ; il n'existe aucun rationnel x solution.** L'ensemble des solutions est : S = ϕ

Exemple : $3\,x - 1 \leq 3\,x - 7$ équivaut à $0\,x \leq -6$. Ce qui est absurde. Donc S = ϕ

III – 2) Exercices d'application :

Résoudre dans $\mathbb{Q}$ les inéquations suivantes : a) $-5\,x + 3 < 0$; b) $6\,x + 2 > 5\,x - 7$; c) $3\,x - 9 \leq 0$ et d) $-11\,x - 3 \geq 0$

IV° SYSTEME DE DEUX INEQUATIONS A UNE INCONNUE :

IV – 1) Méthode:

Pour résoudre un système de deux inéquations du premier degré à une inconnue il faut résoudre chacune des inéquations puis représenter les deux solutions sur une **même droite graduée**. La partie non hachurée représente l'ensemble des solutions du système.

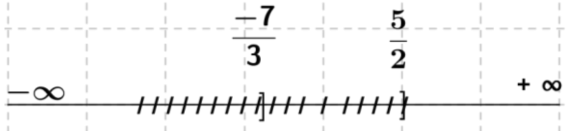
IV – 2) Exemples :

Soit à résoudre les systèmes de deux inéquations suivants :

a) $\begin{cases} 2\,x - 5 > 0 \\ 3\ x + 7 > 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -5\,x - 2 \leq 0 \\ 4\,x + 1 \leq 0 \end{cases}$

Solution :

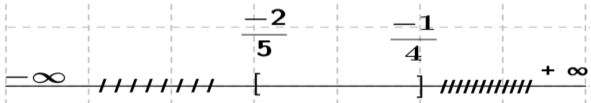
a) $\begin{cases} 2\,x - 5 > 0 \\ 3\ x + 7 > 0 \end{cases}$, signifie que $2\,x - 5 > 0$ et $3x + 7 > 0$ d'où $2\,x - 5 > 0$ et $3\ x + 7 > 0$ $2\,x - 5 + 5 > 0 + 5$ et $3\ x + 7 - 7 > 0 - 7$ $2\ x > 5$ et $3\ x > -7$ $2\ x\ (\frac{1}{2}) > 5\ (\frac{1}{2})$ et $3\ x\ (\frac{1}{3}) > -7(\frac{1}{3})$ $x > \frac{5}{2}$ et $x > \frac{-7}{3}$	b) $\begin{cases} -5\,x - 2 \leq 0 \\ 4\,x + 1 \leq 0 \end{cases}$, signifie que $-5\,x - 2 \leq 0$ et $4\,x + 1 \leq 0$ d'où $-5\,x - 2 \leq 0$ et $4\,x + 1 \leq 0$ $-5\,x - 2 + 2 \leq 0 + 2$ et $4\,x + 1 - 1 \leq 0 - 1$ $-5\ x \leq 2$ et $4\ x \leq -1$ $-5\ x\ (\frac{-1}{5}) \geq 2\ (\frac{-1}{5})$ et $4\ x\ (\frac{1}{4}) \leq -1(\frac{1}{4})$ $x \geq \frac{-2}{5}$ et $x \leq \frac{-1}{4}$;



L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des **nombres rationnels** supérieurs à $\frac{-7}{3}$ et à $\frac{5}{2}$; comme $\frac{5}{2} > \frac{-7}{3}$

S = $]\frac{5}{2}\ ;\ +\infty]$

on écrit, $\frac{-2}{5} \leq x \leq \frac{-1}{4}$ c'est une double égalité.



Donc, L'ensemble des solutions est l'ensemble des **nombres rationnels** supérieurs ou égaux à $\frac{-2}{5}$ et inférieurs ou égaux à $\frac{-1}{4}$

$\boxed{S = [\frac{-2}{5}\ ;\frac{-1}{4}].}$

IV – 3) Exercices d'application :

Résoudre dans $\mathbb{Q}$ les systèmes de deux inéquations à une inconnue suivantes :

a)$\begin{cases} 3\,x + 2 \geq 0 \\ 2\,x - 7 < 0 \end{cases}$; $b)\begin{cases} -6\,x - 5 < 0 \\ 9\,x + 10\ \geq 0 \end{cases}$ $et\ \ c)\begin{cases} 7\,x - 1 > 0 \\ 8\,x + 3 \geq 0 \end{cases}$

V° RESOLUTION DE PROBLEMES :

V° - 1) Exemple et Méthode :

Maman dit à moussa « avec ces 2500 F, achète deux stylos à 100F et des cahiers à 375F chacun, autant que tu voudras ». Combien de cahiers Moussa peut-il acheter ?

Solution :

➢ **Choisissons l'inconnue :** Soit x le nombre de cahiers que peut acheter Moussa Deux stylos coûtent 200F et les x cahiers coûtent 375x. Il dépensera en tout 375x + 200	➢ **Mise en inéquation :** Moussa ne doit pas dépasser 25OOF, donc on doit avoir 375x + 200≤ 2500
➢ **Résolution :** $375x + 200 \leq 2500$ $375x + 200 - 2500 \leq 2500 - 2500$ $375x - 2300 \leq 0$ $375x \leq 2300$ $x \leq \frac{2300}{375}$ En simplifiant par 25, on obtient x $\leq \frac{92}{15}$ L'ensemble des solutions de l'inéquation est S =]-∞;$\frac{92}{15}$].	➢ **Validation :** Le nombre x désigne le nombre de cahiers ; il est donc un entier naturel. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle]-∞;$\frac{92}{15}$]. Ce sont les nombres 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 Moussa pourra donc acheter 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6 cahiers.

V – 2) Exercices d'application :

Pour acheter un bijou qui coûte 6500F, une fille a gardé 3450F puis décide d'économiser chaque semaine 75F pour compléter le montant. Calculer le nombre de semaines minimales qu'il lui faut pour réaliser son projet.

« Les triangles dont les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 3 ; 4 et 5 sont rectangles»
PYTHAGORE

CHAPITRE V

APPLICATION LINEAIRE

DUREE : **6 HEURES**

Objectif général : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de maîtriser l'utilisation des propriétés des applications linéaires pour résoudre des problèmes.

Objectifs spécifiques : Au terme de la leçon, l'apprenant devra être capable de :

- déterminer l'expression littérale f (x) = a x d'une application linéaire à partir d'un tableau de proportionnalité.
- restituer les notations f, f (x) et le schéma : x $\longmapsto$ f (x)
- différencier les notations f, f (x) et le schéma : x $\longmapsto$ f (x)
- déterminer des valeurs numériques ; établir un tableau de proportionnalité à partir de l'expression littérale d'une application linéaire
- résoudre des problèmes pratiques faisant intervenir la proportionnalité.
- utiliser la linéarité pour compléter un tableau de proportionnalité.
- représenter graphiquement des applications linéaires

Prérequis : Calcule de vitesse ; addition des rationnels ; distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction ; droites perpendiculaires

Sources :

- ✓ Loi d'orientation 91. 22 du 16 Février 1991 ;
- ✓ Manuels : CIAM 4ème ; Excellence 4ème
- ✓ Webographie : http://www.mathovore.fr, consulté le 09/ 05/ 2015 à 21 h 30 min.
  http://www.maths-vidéos.com, consulté le 09/ 05/ 2015 à 22 h 00 min.
- ✓ **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

Introduction : (5 min)

En classe de **6e** et **5e** vous aviez formalisé l'étude de la proportionnalité entamée depuis l'élémentaire. A cette occasion, vous aviez définit un nombre **« appelé coefficient de proportionnalité ».**

En **4e**, il s'agira d'utiliser ce « coefficient de proportionnalité » pour définir le procédé qui permet de caractériser de façon générale une situation de proportionnalité.

Du point de vue historique, le concept d'application linéaire (fonction) apparu vers la fin du 17e Siècle, s'est dégagé comme une **étude de Galilée** sur **la dépendance de la vitesse par rapport au temps**.

Toutefois, le concept a intéressé bon nombre de mathématiciens et physiciens comme Descartes ; Newton ; Leibniz ; Bernoulli…

Enfin, au 20e Siècle, le terme **fonction** signifie « grandeur dépendant d'une ou plusieurs variables. »

PLAN DU COURS

DEOULEMENT DU COURS

I° EXEMPLES ET DEFINITIONS :

I - 1) Activités :

1) Parmi les tableaux ci-dessous indique celui qui représente un tableau de proportionnalité.

2	5	9	11,5
6	15	27	34,5

2	3	5
30	48	75

2) Un athlète a parcouru à vitesse constante 300m par minute. Recopie et complète le tableau ci-dessous.

Temps en (min)	1	4	7	10	15
Distance parcourue en (km)					

I - 2° Définition :

a étant un rationnel, le procédé qui fait correspondre à tout nombre rationnel x le nombre rationnel **a**x est appelé ***application linéaire*** de coefficient **a**.

Soit **f** cette application, on note : f : $x \mapsto f(x) = ax$

ax ou **f** (x) est appelé ***image*** de x par **f** et x est appelé ***antécédent***.

I - 3° Exemples :

* f : $x \mapsto f(x) = 5x$; h: $x \mapsto h(x) = 2{,}5x$ leurs coefficients respectifs sont 5 et 2,5.

❖ **Remarque :**

- ✓ A toute situation de proportionnalité, on peut associer une application linéaire.
- ✓ Toute application linéaire traduit une situation de proportionnalité.

I - 4° Exercices d'application

f es une application linéaire. On donne f (2) = 6 ; 8= f (4) ; f (-2) = - 4

1) Recopier et compléter le tableau :

	image	antécédent	Expression f(x) = ax
f (2) = 6			
8 = f (4)			
f (-2) = -4			

II° PROPRIETES DE LINEARITE :

II - 1° Activité :

1) Soit f une application linéaire tel que f (x) =3x.
   a) Calculer f (2) ; f (3) et f (2+3) puis comparer f (2) + f (3) et f (2+3)
   b) Calculer f (4) et f (2 + 4) puis comparer f (2) + f (4) et f (2+4)
   c) Calculer f (2 x3) et 2f (3) puis comparer f (2x3) et 2f (3).
2) Soit f l'application linéaire tel que f (x)= mx ; a, b et k étant trois rationnels.
   a) Démontrer que f (a + b) = f (a) + f (b).
   b) Démontrer que f (ka) = k f(a).

II - 2° Propriétés :

Soit f une application linéaire et a, b et k trois rationnels donnés. On a :

✓ f (a + b) = f (a) + f (b) ; ✓ f (ka) = k f (a)

II - 3° Exercices d'application

A/ Soit f : $x \mapsto f\ (x) = \frac{2}{5}x$: 1) Calculer f (3) et f (4). 2) Calculer de deux façons f (7) et f (8)

B/ Soit g une application linéaire tel que : g (2) + g (8) = 40
Déterminer le coefficient de l'application.

III REPRESENTATION GRAPHIQUE :

III - 1° Activité

Soit f l'application linéaire tel que f (x) = 2x

1) Compléter le tableau ci-dessous :

f	-2	-1	O	1	2
f (x)					

2) Représenter sur un système d'axes perpendiculaires cette situation de proportionnalité.

Solution :

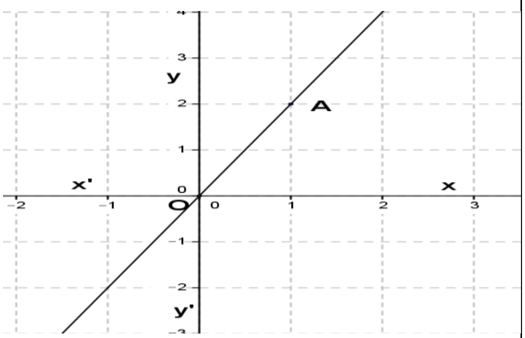
1) complétons le tableau

f	- 2	- 1	O	1	2
f (x)	- 4	- 2	0	2	4

❖ **REMARQUE :**

Dans un repère d'axes perpendiculaires la représentation graphique d'une application linéaire est une droite qui passe par l'origine.

2) Représentation graphique

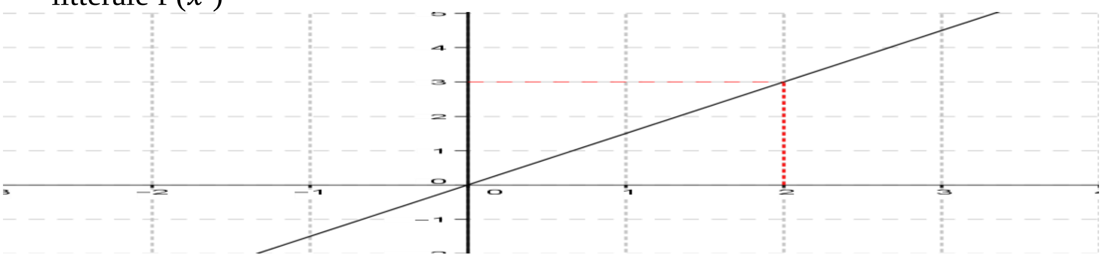


III - 2° Méthode :

Pour tracer la représentation graphique de l'application linéaire f : x $\mapsto$ f () = ax, on place le point A$\binom{1}{a}$ puis on trace la droite passant par l'origine du repère et par le point A.

III - 2° Exercices d'application :

1) Représenter dans un même repère les applications linéaires définies par : f (x) = -3 x et g (x) = $\frac{5}{2}x$
2) Voici la représentation graphique d'une application linéaire f. Détermine son expression littérale f (x)



CHAPITRE VI

STATISTIQUES

DUREE : **7 HEURES**

Objectif général : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation de la statistique pour résoudre des problèmes.

Objectifs spécifiques : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- ✓ Restituer le vocabulaire suivant : population, individu, échantillon, caractère qualitatif, caractère quantitatif, variable, valeur du caractère (modalité), effectif, mode, moyenne, fréquence, pourcentage
- ✓ Ordonner une série statistique.
- ✓ Etablir le tableau des effectifs.
- ✓ Déterminer le mode d'une série statistique.
- ✓ Calculer la fréquence et le pourcentage d'une valeur du caractère et la moyenne d'une série statistique.
- ✓ Représenter une série statistique par un diagramme en bâtons, par un diagramme à bandes, par un diagramme circulaire, par un diagramme semi-circulaire.
- ✓ Déterminer à l'aide d'un diagramme : les valeurs d'un caractère ; les effectifs d'une série statistique.
- ✓ Interpréter des données statistiques.

Sources :

- ✓ Loi d'Orientation 91- 22 du 16 Février 1991 ; Guide d'usage de mathématiques 4^{e}
- ✓ Manuels : C.I.A.M. et Excellence 4^{e} ; Pythagore 4^{e}
- ✓ Webographie : http://www.mathovore.fr, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min.
  http://www.mathsvidéos.com, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 30 min.
  http://manuel.sesamath.net/, consulté le 21/ 12/ 2011 à 23 h 24 min.
  http://www.maths-videos.com, consulté le 26/ 01/ 2015 à 14 h 03min.
- ✓ **Encyclopédie des connaissances actuelles en mathématiques**

Prérequis : Proportionnalité ; pourcentage ; les 4 opérations ;

Introduction : (5 min)

Les Statistiques sont des notions tout à fait nouvelles pour la classe 4^{e}.
Toutefois ; au plan social, les statistiques définissent comme une étude méthodique des faits sociaux, par des procédés numériques (classements, dénombrements, inventaires chiffrés, recensements, tableaux…).
Du point de vue moderne, elles se veulent être ensemble de techniques d'interprétation mathématique appliquées à des phénomènes pour lesquels une étude exhaustive de tous les facteurs est impossible, à cause de leur grand nombre ou de leur complexité.
Tout compte fait, allez acquérir du vocabulaire, et apprendre à organiser des données statistiques dans le cas de caractères discrets.
Ainsi, l'importance de la statistique en tant que méthode quantitative de description des ensembles ayant beaucoup d'éléments n'est plus à prouver. Il suffit d'ouvrir un journal, de se connecter à l'internet ou d'écouter une radio pour sans convaincre.
Dès lors l'interdisciplinarité rend son étude indispensable. Les statistiques interviennent dans tous les domaines de la vie : en géographie ; en SVT ; en Physique ; en économie ; …
En **4ème**, la Statistique est une notion nouvelle vous permettant de vous familiariser avec un nouveau type de vocabulaire et d'avoir un esprit critique sur des données.

PLAN DU COURS

DEROULEMENT DU COURS

I° VOCABULAIRE DE BASE :

I - 1) Activité :

Considérons votre classe, la 4ème A

1) Comment appelle – t – on le nombre total des garçons et des filles ? Ou le nombre total des habitants d'un village, ou ville, ou pays ?
2) Que représente chacune des filles ou chacun des garçons ou chaque habitant?
3) Combien y a – t – il de rangées ? 4) Qu'est ce qui peut permettre de différentier les élèves ?
5) Quelles sont les ethnies représentées dans la classe ?

I - 2) Vocabulaire et exemples :

- **Population :** C'est l'ensemble de personnes ; d'animaux ou de choses sur lequel porte une étude statistique.

Exemple : l'ensemble des élèves de la classe ; la population d'une commune ; le nombre de table-bancs de votre établissement, peuvent en constituer *la population*.

- **Individu ou unité statistique:** Chaque élément de la population est une *unité statistique*.

Exemple : chaque élève de la classe est *un individu ou unité statistique*.

- **Echantillon :** C'est une partie de la population effectivement utilisée pour faire l'étude.

Exemple : les élèves de chaque rangée constituent *un échantillon*.

- **Caractère quantitatif / Caractère qualitatif:**

4) Dans une classe, on peut différentier les élèves, soit par leurs notes, soit par leur taille, soit par leur poids, soit par leurs sexes (garçons/ filles) soit par leur ethnies soit par leurs nationalités.

- **Caractère quantitatif :**

Un *caractère est dit quantitatif*, lorsqu'il peut être exprimé par un nombre soit par comptage soit par mesure.

Exemples : Les notes, la masse, le poids, la taille, … des élèves ; la race ; sont des *caractères quantitatifs*.

- **Caractère qualitatif :**

Un *caractère est dit qualitatif*, lorsqu'il ne peut pas être compté ni mesuré.

Exemples : La nationalité, le sexe, l'ethnie, le teint, le courage,…sont des *caractères qualitatifs*.

- **Modalité :** C'est la valeur prise par un caractère.

Exemple : Si nous considérons le caractère ethnie « Peul » ; « Wolof » ; « Diola » ; … sont des **modalités**. De même pour le caractère masse « 36 kg » ; « 40kg » ; … sont des **modalités**.

I - 3) Exercice d'application :

Lors d'une étude, on désire connaitre le nombre d'animaux domestiques par village
a) Quelle est la population ? b) Donne un exemple d'individu.
c) Dans une maison, on trouve 9 moutons dont 4 ordinaires et 5 La doum de taille moyenne 1 m. Comment est le caractère « taille » ? Justifie ? Que représentent les termes « ordinaire » et « La doum » ?

Solution :

a) La **population** est : le nombre d'animaux domestiques. b) Chaque animal domestique est **un individu**.
c) Le caractère « taille » est quantitatif car il est mesurable.
Les termes « ordinaire » et « La doum » sont des échantillons.

II° CLASSEMENT DES DONNEES STATISTIQUES :

II° - 1) Activité :

On désire connaître les différentes ethnies qui composent votre classe. On désignera par chaque ethnie par son initiale : S : sérère ; W : wolof ; P : peul ; B : Bambara ; …

II - 2) Vocabulaire :

L'ensemble des données recueillies constitue ***une série statistique*****.**

II - 2 – a) Série statistique brute :

Une **série statistique est dite brute,** lorsque les données ne sont pas rangées.

Exemple : Voici la série brute des notes d'un devoir de Maths de six élèves : 18 ; 02 ; 03 ; 15 ; 12 et 09

II - 2 – b) Série statistique ordonnée :

Modou veut connaître les loisirs préférés de ses camarades de sa classe de 24 élèves. Il fait une petite enquête auprès de ses camarades et demande à chacun de noter sur un bout de papier son activité préférée. Voici le résultat : sport - sport - sport - lecture - jeu vidéo – sport - lecture - lecture – cinéma - télévision - jeu vidéo - cinéma – sport - jeu vidéo- sport - cinéma – sport - sport - lecture – cinéma - télévision - lecture - lecture - cinéma
En fait, sans le savoir, Modou veut faire une étude statistique. Il a rassemblé des données (les loisirs préférés) et va les exploiter.
1) Que est le caractère étudié ? Est – il comptable ou non ?
2) Quelle est la population ? Quel est le nombre total d'individu ?

loisir préféré	jeu vidéo	télévision	cinéma	sport	lecture
effectif	3	2	5	8	6

- **Effectif partiel :** C'est la valeur prise par chaque modalité.

Exemples : Les valeurs 3 ; 2 ; … sont les ***effectifs partiels*** pris par le jeu vidéo ; la télévision ;…

- **Effectif total** : C'est la somme des valeurs prisent par les différentes modalités. Ici, c'est le nombre total d'élèves interrogés : 24 élèves.

II° - 2 – c) Propriétés :

- **Fréquence :** $\frac{effectif\ de\ la\ modalité}{effectif\ total}$
- **Pourcentage :** $\frac{effectif\ de\ la\ modalité}{effectif\ total}$ **x 100** **ou** **Pourcentage = Fréquence x 100**

Exemple : Complète la ligne des fréquences et des pourcentages du tableau.

loisir préféré	jeu vidéo	télévision	cinéma	sport	lecture
effectif	3	2	5	8	6
Fréquence					
Pourcentage					

❖ **Remarque :**

- ✓ La somme des pourcentages total fait 100.
- ✓ La somme des fréquences fait 1.
- ✓ La fréquence en % n'est rien d'autre que le pourcentage même.

III° CALCUL DE MOYENNES :

III - 1) Activité :

1) Dans un CEM il y a 4 classes de 4[e] comprenant 48 ; 52 ; 64 et 60 élèves. Le principal veut avoir des classes de même effectif. Comment va – t- il procéder ?
2) Le tableau ci-dessous indique le bulletin de notes obtenues par un élève au premier semestre :

Matière	Coefficient	Note	Total matière
Maths	4	13,50	
Fr	4	9,50	
SVT	2	13,00	
Anglais	2	12,00	
H- G	2	13,00	
Ed. Arts	1	8	
I.C	1	8	
P - C	2	12	
EPS	2	15,00	
Total des coefficients :	20	Total notes:	
		Moyenne	

Pour calculer la moyenne de l'élève les notes sont affectées de leurs coefficients. Complète le tableau.

III - 2) Moyenne d'une série statistique :

Pour calculer la moyenne M d'une série statistique :

- ✓ on additionne toutes les valeurs du caractère de la série ;
- ✓ on divise la somme obtenue par le nombre de valeurs P, de la série. Si x_1, x_2, ..., x_p représentent les valeurs du caractère de la série, on a alors : $\mathbf{M=\dfrac{x_1+\ x_2+\cdots+\ x_p}{p}}$

III - 3) Moyenne pondérée d'une série statistique

Pour calculer la moyenne pondérée M d'une série statistique :

- ✓ on effectue le produit de chacun des effectifs par la valeur du caractère associée ;
- ✓ on additionne les produits ;
- ✓ on divise la somme obtenue par l'effectif total de la série. Si $\mathbf{n_1, n_2, ..., n_p}$ sont les effectifs des valeurs du caractère, x_1, x_2, ..., x_p les valeurs associées et **N** l'effectif total, alors : $M = \dfrac{n_1 x1+n_2 x2+\cdots+n_p xp}{N} = \dfrac{\sum n_p\, n_i}{N}$

III - 4) Exercice d'application :

Exercice 1 :

Sophie a calculé le temps qu'elle a passé devant la télévision la semaine dernière. Voici ses résultats.

Jour	Lundi	Mardi	Mercre.	Jeudi	Vendre	Samedi	Dimanche
Tps en min	62	57	110	60	46	122	131

Calcule le temps moyen passé par Sophie devant la télévision.

Exercice 2 : Chaque élève de 4^{e} B du collège de Keur Mandongo a indiqué le nombre de livres qu'il a lus durant le mois de septembre. Voici les résultats de l'enquête.

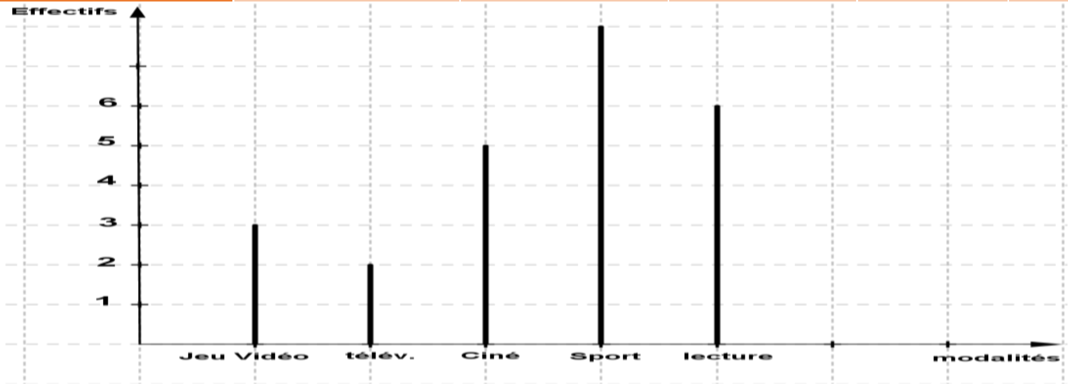
Nombre de livres lus	0	1	2	3	7	8	15
Effectif	12	4	3	3	1	1	1

1) Complète le tableau par la ligne des fréquences en %
2) Calcule le nombre de livres lus, en moyenne, par les élèves de 4^{e}A durant le mois de Septembre.

IV° REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE SERIE :

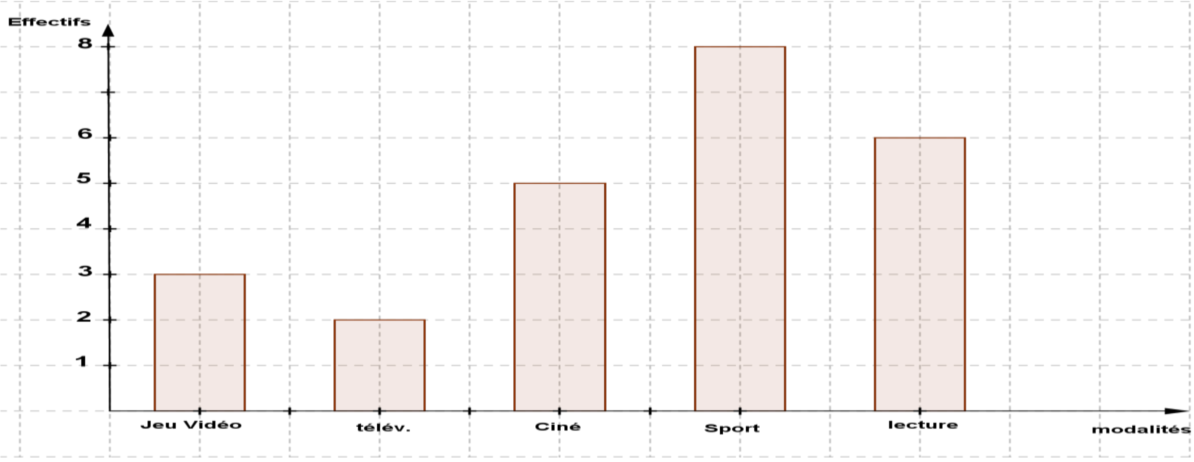
IV - 1 – a) Diagramme en bâton :

loisir préféré	jeu vidéo	télévision	cinéma	sport	lecture
effectif	3	2	5	8	6



IV - 1 – b) Diagramme à bandes :

loisir préféré	jeu vidéo	télévision	cinéma	sport	lecture
effectif	3	2	5	8	6



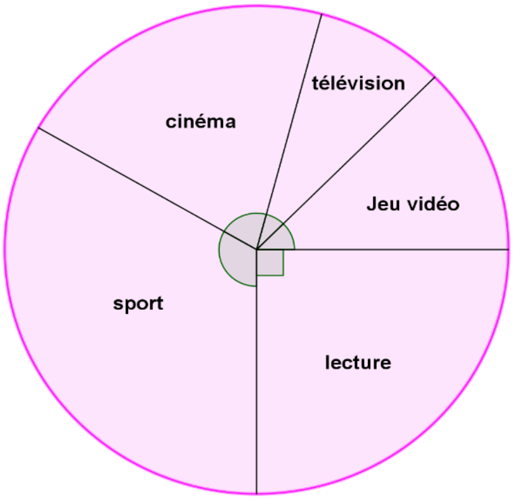
IV - 1 – c) Diagramme circulaire :

loisir préféré	jeu vidéo	télévision	cinéma	sport	lecture	Total
effectif	3	2	5	8	6	24
Angle (°)	45	30	75	120	90	360

Soit $\boldsymbol{\alpha}_i$ l'angle correspondant à la valeur d'une modalité, x_i son effectif et N l'effectif total.

On a : 360° → N

$\boldsymbol{\alpha}_i \rightarrow x_i$; alors $\boldsymbol{\alpha}_i = \frac{360° X xi}{N}$



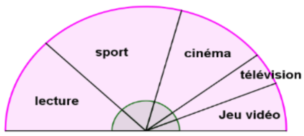
IV - 1 – d) Diagramme semi – circulaire :

loisir préféré	jeu vidéo	télévision	cinéma	sport	lecture	Total
effectif	3	2	5	8	6	24
Angles (°)	22,5	15	37,5	60	45	180

Soit $\boldsymbol{\alpha}_i$ l'angle correspondant à la valeur d'une modalité, x_i son effectif et N l'effectif total.

On a : 180° → N

$\boldsymbol{\alpha}_i \rightarrow x_i$; alors $\boldsymbol{\alpha}_i = \frac{180° X xi}{N}$



IV - 2) Exercice d'application :

Sophie a calculé le temps qu'elle a passé devant la télévision la semaine dernière. Voici ses résultats.

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Temps en min	62	57	110	60	46	122	131

1) Construis le diagramme à, bande de cette série statistique.
2) Construis le diagramme circulaire de la série statistique.

« Les triangles dont les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 3 ; 4 et 5 sont rectangles»
PYTHAGORE

La géométrie qui se constitue à l'époque des débuts de l'écriture est assez peu différente des connaissances intuitives de l'homme ordinaire.

Ainsi, pas moins ! Personne n'ignore que PLATON avait fait inscrire au fronton de l'entrée de son Académie « Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre », et aujourd'hui, il est peu de professions qui n'exigent certaines connaissances mathématiques, au moins rudimentaires.

Alors, faisons sien ce cri de cœur de PLATON afin d'amener nos apprenant à comprendre à quel point la géométrie participe à la formation de l'esprit cartésien.

FASCICULE DE MATHEMATIQUES 4e

ACTIVITES GEOMETRIQUES

« Les triangles dont les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 3 ; 4 et 5 sont rectangles»
PYTHAGORE

CHAPITRE I

DISTANCE

DUREE : **7 HEURES**

OBJECTIF GENERAL : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation des propriétés de la distance pour résoudre des problèmes de la vie quotidienne.

OBJECTIFS SPECIFIQUES : Au terme de la leçon, l'apprenant devra être capable de :

- ✓ Restituer les configurations d'intersection de deux cercles.
- ✓ Reconnaître que deux cercles sont sécants ; que deux cercles sont tangents intérieurement ; que deux cercles sont tangents extérieurement ; que deux cercles sont disjoints.
- ✓ Restituer le critère d'existence d'un triangle à partir de trois nombres donnés.
- ✓ Restituer les propriétés de la médiatrice pour effectuer un régionnement du plan.
- ✓ Utiliser les propriétés de la médiatrice pour effectuer un régionnement du plan.
- ✓ Restituer la définition de la distance d'un point à une droite.
- ✓ Trouver la distance d'un point à une droite.
- ✓ Restituer la propriété de reconnaissance de la bissectrice pour justifier une égalité de distance ou l'appartenance d'un point à la bissectrice d'un angle ; les configurations d'intersection d'un cercle et d'une droite.
- ✓ Démontrer qu'une droite et un cercle sont sécants, tangents, disjoints.
- ✓ Construire une tangente à un cercle passant par un point donné, extérieur au cercle.

SOURCES :

- ✓ Nouveau programme 2006 de mathématiques ; + Manuels : Excellence 6ème ; 5ème ; 4ème ; Introduction à l'algèbre et à la géométrie 4ème – 3ème ; +Guide d'usage du programme.
- ✓ Webographie : http://www.mathovore.fr, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 17 min
  : http://www.maths-vidéos.com, consulté le 12/06/2014 à 07 h 38 min
- ✓ **Encyclopédie des connaissances actuelles en Mathématiques**

Prérequis :

Inégalités triangulaire ; cercle et intersection de deux cercles (en 6ème) ; médiatrice d'un segment ; symétrie axiale ; alignement en 6ème et symétrie orthogonale en 5ème ;…

INTRODUCTION : (5min)

Dans les classes précédentes, vous aviez étudié la notion de distance à travers : l'inégalité triangulaire, la symétrie axiale, le cercle et l'intersection de deux cercles, l'alignement de trois points en **6ème** ; la symétrie orthogonale en **5ème** et la médiatrice d'un segment en **6ème – 5ème**. Cette année, nous allons approfondir ces notions à travers l'intersection de deux cercles et la tangente d'un cercle et démontrer des propriétés qui avaient été admises en **6ème – 5ème**. C'est pourquoi, les notions nouvelles comme distance entre deux droites, caractérisation de la bissectrice méritent une attention particulière aussi bien dans ce chapitre que pour la suite du programme en plus de l'intérêt que suscite la notion de distance dans notre vécu quotidien.

PLAN DU COURS

DEROULEMENT DU COURS

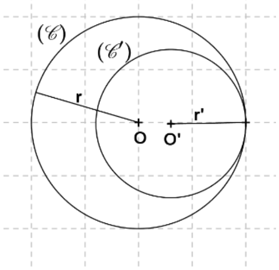
I° POSITION RELATIVE DE DEUX CERCLES :

I - 1) Cercles tangents :

I – 1 – 1) Activité 1 :

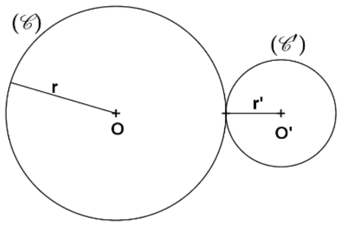
1) Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r = 3, 5 cm.
   a) Tracer (C) puis placer le point O' tel que OO' = 5 cm.
   b) Tracer le cercle (C') (O' ; r' = 1, 5 cm)
   c) Comparer OO' et r + r' puis donne la position relative de ces deux cercles.
2) Soit (C) (O ; 3) et (C') (0' ; 2) tel que OO' = 1 cm
   a) Tracer la figure.
   b) Comparer les distances OO' et |r – r'| puis donne la position relative de (C) et (C').

I – 1 – 2) Vocabulaire et configuration :



OO' = |r – r'|
Si la distance des centres est égale à la différence des rayons, alors les deux cercles sont ***tangents intérieurement.*** Ils ont un seul point en commun.

OO' = r + r'
Si la distance des centres est égale la somme des rayons, alors les deux cercles sont ***tangents extérieurement.*** Ils ont un seul point en commun



I - 2) Cercles sécants :

I - 2) Cercles sécants :

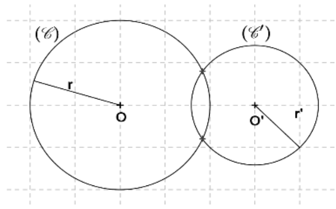
I – 2 – 1) Activité 2 :

Soit à construire un cercle (C) (O ; r = 2,5 cm).

1) Placer le point 0' tel que 00' = 3 cm.
2) Tracer le cercle (C') (0' ; r'= 2 cm)
3) Combien de point ont-ils en commun ?
4) Comparer |r- r'| et r +r' à OO' puis compléter $\ldots < 00' < \ldots$

I – 2 – 2) Vocabulaire et configuration

Si la distance des centres est comprise entre la différence et la somme des rayons, alors les deux **cercles** sont **sécants.**
Ils ont deux points en commun.



$|r – r'| < OO' < r + r'$

I - 3) Cercles disjoints :

I – 3 – 1) Activité 3 :

1) Tracer un cercle (C) (O ; r = 2 cm) puis placer un point O' tel que OO' = 5 cm.
2) Tracer le cercle (C') (0 ; r' = 1,5 cm).
3) a/ (C) et (C') ont-ils un point en comment ?
   b/ Comparer les distances OO' et r + r'.
4) Tracer un autre cercle (C) (O ; r = 4 cm) puis placer un point O' tel que OO' = 1 cm.
5) Comparer les distances OO' et |r- r'|

I – 3 – 2) Vocabulaires et configurations :

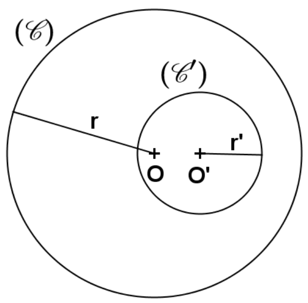


Figure 1 : Si la distance des centres est inférieure à la différence des rayons, alors les deux cercles sont ***disjoints intérieurement*** **: OO' < |r- r'|**

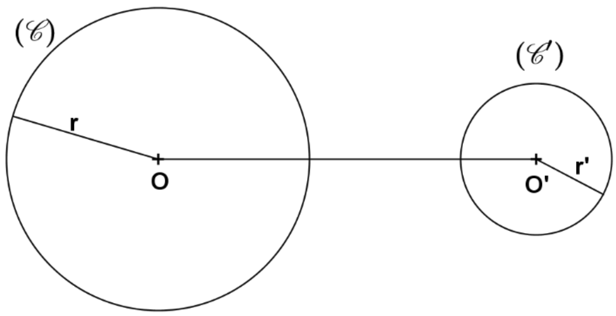


Figure2 : Si la distance des centres est supérieure à la somme des rayons, alors les deux cercles Sont ***disjoints extérieurement :***
OO' > r + r'

II° APPLICATION AU TRIANGLE :

II – 1) Activité 4 :

Soit A, B et C trois points tel que AB = c = 2, 5 cm ; BC = a = 4 cm ; AC = b = 2 cm

1) Marquer A et B puis tracer le cercle (C) (A ; r = 2) puis le cercle (C') (B ; r' = 4).
2) Justifier que (C) et (C') sont sécants. On peut appeler C l'un de leurs points d'intersection.
3) Calculer puis comparer a + b…c ; a + c…b et c + b…a

4) Le triangle ABC existerait-il si a = 5 cm ?
5) Quelles est alors la condition d'existence d'un triangle ABC de mesures a ; b et c ?

II – 2) Condition d'existence d'un triangle :

Dans tout triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. Soit ABC un triangle tel que AB = c ; BC = a et AC = b, alors : $a + b > c$

$a + c > b$

$b + c > a$

II – 3) Exercice d'application :

Dans chacun des cas suivant dis s'il est possible de construire un triangle ABC sachant que :

a) AB = 5 cm BC = 10 cm AC = 9 cm
b) AB = 3 cm BC = 2 cm AC = 7 cm
c) AB = 14 cm BC = 11, 5 cm AC = 12 cm

III° REGIONNEMENT PLAN ET CARACTERISATION D'UN DEMI-PLAN :

III – 1) Activité 5 :

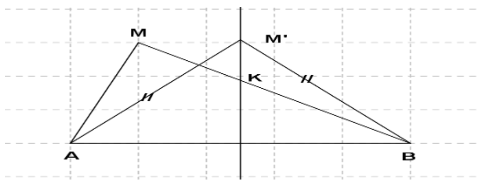
Soit [AB] un segment et (D) sa médiatrice.

1) Placer un point M du plan du même côté de A par rapport à (D) puis comparer MA et MB.
2) Placer un point M' sur (D) puis comparer M'A et M'B.
3) Traduire « K est plus proche de B que de A » par une relation entre KB et KA puis placer le point K.

3.1 MA < MB

3.2 M'A = MB

3.3 « K est plus proche de B que de A » signifie que KA > KB



III – 2) Régionnement du plan :

La médiatrice d'un segment partage un plan en trois régions : le demi-plan contenant A et le demi-plan contenant B et la médiatrice (D) appelée frontière des deux demi-plans.

III – 3) Propriétés de caractérisation d'un demi-plan :

Soit A, B et M trois points distincts du plan et (D) la médiatrice de [AB].

a) *Si M$\in$ (D), alors MA = MB
*Si MA = MB, alors M$\in$ (D).

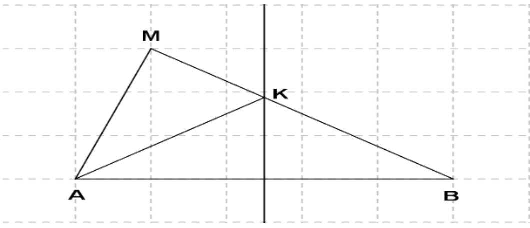
b) *Si M est du même côté que A par rapport à (D), alors MA< MB.
*Si MA < MB, alors M est du même côté que A par rapport à (D)

c) *Si M est du même côté que B par rapport à (D), alors MA >MB.
*Si MA > MB, alors M est du même côté que B par rapport à (D).

III – 4) Exercice d'application :

1) Tracer un segment [AB] puis sa médiatrice (Δ).
2) Soit M un point du plan tel que AM < BM et M $\notin$ (AB).
3) La droite (MB) coupe la droite (Δ) en K. Démontrer que le périmètre du triangle AMB est supérieur à celui du triangle AKB.

On a : AM + MK > AK (Inégalité triangulaire)
D' où AM + MK + KB > AK + KB
AM + MK + KB + AB > AK + KB + AB
Or, M ; K et B sont aligné alors MK + KB = MB et comme P (AMB) = AM + MB+ AB et P (AKB) = AB + AK +KB, alors P (AMB) > P (AKB)



IV° PLUS COURTE DISTANCE :

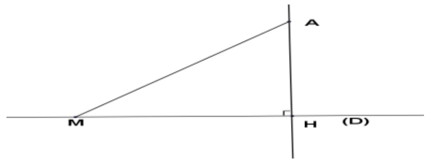
IV – 1) Activité 6 :

Soit (D) une droite et A un point hors de (D).

1) Placer le symétrique A' de A par rapport à (D).
2) (AA') coupe (D) en un point H appelé pied de la perpendiculaire issue de A. Soit M un point de (D) distinct de H. Comparer AM et AH.

IV – 2) Position d'un point à une droite :

Soit une droite (D) et un point A n'appartenant pas à (D).
La distance du point A à la droite (D) est la longueur AH où H désigne le pied de la perpendiculaire à (D) passant par A.
Pour tout point M de (D), on a : AH ≤ AM.



AH est la distance du point A à la droite (D).

IV – 3) Exercice d'application :

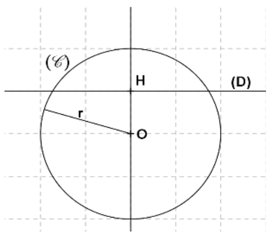
1) Soit (D) une droite. Construire un point A distant de 3, 5 cm de (D).
2) Construire la parallèle (D') à (D) passant par A.
3) Déterminer la distance de (D) et (D').
4) Trouver dans le demi-plan de frontière (D) et ne contenant pas le point A, l'ensemble des points situés à 3, 5 cm de (D).

V° POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE :

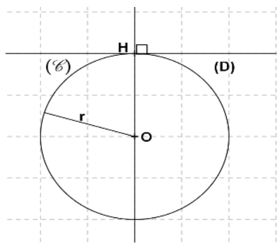
V – 1) Activité :

1) Construire un cercle (C) (O ; r = 3 cm).
2) Tracer trois droites (D1) ; (D2) et (D3) dont leurs distances respectives par rapport à 0 est 3 cm ;
   1 ,5 cm et 4 cm.
3) Déterminer pour chaque cas la position relative de la droite par rapport au cercle.

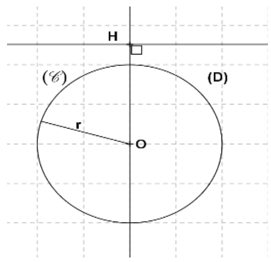
V – 2) Configurations et vocabulaires :



Si OH < r, alors (D) et (C) ont deux points en commun. On dit qu'ils sont **sécants.**



Si OH = r, alors (D) et (C) ont un seul point en commun. On dit qu'ils sont **tangents**.



Si OH > r, alors (D) et (C) sont disjoints.

Donc seuls les trois cas ci-dessus sont possibles

V – 3) Définition et Propriétés de la tangente à un cercle :

V – 3 – 1) Activité

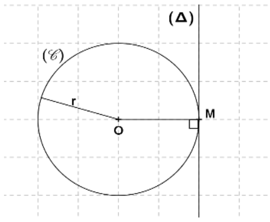
***Activité 1 : Construction de la tangente à un cercle :**

1) Construire un cercle (C) (O ; 3 cm) et un point M tel que M∈ (C).
2) Trace la droite (Δ) perpendiculaire à (OM) en M.
3) Quelle est la position relative de (Δ) par rapport à (C) ? Justifier votre réponse.

Solution :

3) On a : r = OM et (Δ) la perpendiculaire à (OM) en M.

Comme M ∈ (C) et M ∈ (Δ), alors (Δ) est la tangente au cercle.



***Activité 2 : tangente d'un cercle issue d'un point hors de cercle :**

1) Tracer un cercle (𝒞) (O ; r) puis marquer un M hors de (C).
2) Tracer un cercle (𝒞') d'un diamètre [OM] qui coupe (C) en A et B.
3) Montrer que le triangle AOM est rectangle en A.
4) Que représente (AM) et (BM) par rapport au cercle ?

Démonstration :

3) Démontrons que, AOM est rectangle en A

Soit O' le milieu de [OM], alors AO' = O'M.

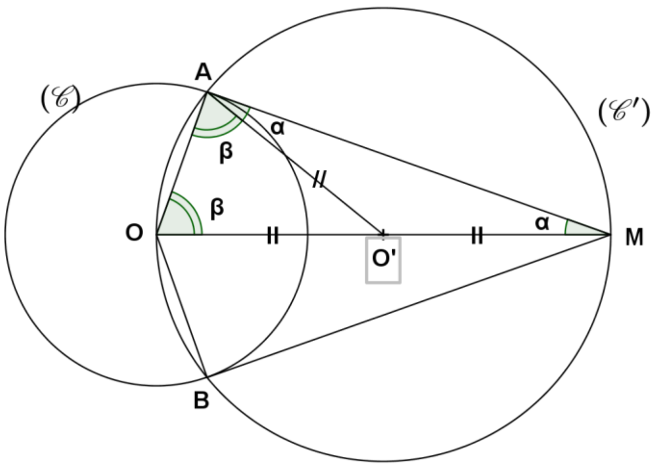
On a : $\hat{A} + \hat{O} + \widehat{M} = 180°$

$\alpha + \beta + \alpha + \beta = 180°$

$\alpha + \beta = 90°$

D'où $\hat{A} = 90°$ donc AOM est un triangle rectangle en A.

4) On a (OA) ⊥ (AM) en A, et (OB) ⊥ (BM) en B alors (AM) et (BM) sont des tangentes au cercle (C)



V - 3- 2) Définition :

Une tangente à un cercle en un point est la droite perpendiculaire au rayon en ce point.

V – 3 – 3) Propriétés :

Propriété 1 :

Si (C) est un cercle de centre O et si A est un point de (C), **alors** la perpendiculaire en A à la droite (OA) est la tangente au cercle (C).

Réciproquement, **si** (C) est un cercle de centre O et si A est un point de (C), **alors** la tangente en A au cercle (C) est la perpendiculaire à (OA).

Propriété 2 :

Si (C) est un cercle de centre O et de rayon r et si A est un point hors de (C), **alors** il existe deux droites issues de A et tangentes au cercle (C).

V – 3 – 3) Exercice d'application :

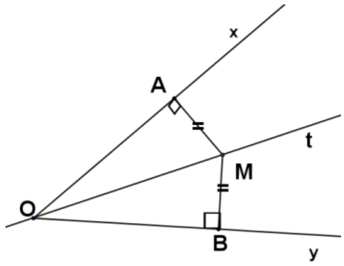
Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r = 3 cm.
Placer un point J hors de (C) puis construire les tangentes à (C) passant par J.

VI° PROPRIETES DE LA BISSECTRICE : POINT EQUIDISTANT DE DEUX DROITES SECANTES :

VI – 1/ Activité

1) Soit à tracer un angle x $\hat{o}$ y et sa bissectrice intérieure [O t).
2) Marquer sur [O t) un point M.
3) Tracer la perpendiculaire passant par M à [O x).Elle la coupe en un point A.
4) Tracer la perpendiculaire passant par M à [O y).Elle la coupe en B.
5) ON considère la symétrie axiale d'axe (o t). Montrer que, AM = MB

Démonstration :



Soit S_Δ la symétrie axiale d'axe le support [O t).
S_Δ(A) = A' ∈ [O y).
AOM est triangle rectangle en A.
S_Δ(AOM) = A'OM, ce qui équivaut à dire que (OA') ⊥ (MA')
Or, (OB) ⊥ (BM) d'où (MA') // (MB) et comme par un point donné, il passe une et une seule droite parallèle à une droite alors (MA') = (MB). Donc A' = B
D'où AM = MB. C'est dire que pour tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des côté de cet angle.

VI- 2) Propriétés :

Propriété 1 :

Tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des côtés de cet angle.

Activité 2:

Soit (D) une droite, A et B deux points distincts de (D).
1) Construire les droites (D1) et (D2) situées à 2 cm de part et d'autre de (D).
2) Tracer la perpendiculaire à (D), (D1) et (D2) passant par B. Elle coupe (D1) en H1 et (D2) en H2.
3) Comparer BH1 et BH2.
4) Montrer que B appartient à la bissectrice de l'angle $H_1\hat{A}\,H_2$.

Démonstration :

3) Comparons BH1 et BH2

On a : (D1) et (D2) parallèles à (D) et situées 2 cm de part et d'autre de (D). Comme (H1H2) est la perpendiculaire à (D), (D1) et (D2) passant par B, alors BH1 =BH2 =2 cm

4) Montrons que B appartient à la bissectrice de $H_1\hat{A}\,H_2$.

On a : A, B ∈ (D)
HH1 = BH2
Comme (D)// (D1)// (D2) et (D1). Or, (D1) et (D2) se situes de part et d'autre de (D), alors (D) est la bissectrice de $H_1\hat{A}\,H_2$. Par conséquent, B est sur la bissectrice de $H_1\hat{A}\,H_2$.

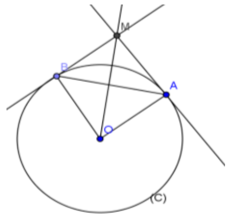
Propriété 2 :

Tout point équidistant des côtés d'un angle est sur la bissectrice de cet angle.

VI – 3) Exercice d'application :

Soit A et B deux points d'un cercle (C) (O ; r = 3 cm) et non diamétralement opposés.
Soit M un point appartenant au demi-plan de frontière la droite (AB) et ne contenant pas O tels que
(AM)⊥ (OA) et (BM) ⊥ (OB).
Démontrer que la droite (OM) est la bissectrice de l'angle A $\widehat{M}$ B.

Solution :



On a : A et B deux points distincts du cercle non diamétralement opposés alors OA = OB

Comme A appartient au demi-plan de frontière (AB) et (0A) ⊥ (AM) ; (OB) ⊥ (BM) alors le quadrilatère OAMB au moins un angle droit, alors c'est un rectangle. Par conséquent, AM = OB et BM = OA d'où AM = BM, d'où OBMA est un carré. Donc O est équidistant des côtés de l'angle A $\widehat{M}$ B. Donc (OM) est la bissectrice de l'angle A $\widehat{M}$ B.

VII° POINTS EQUIDISTANTS DE DEUX DROITES PARALLELES :

VII° -1) Activité :

1) Tracer deux droites (D) et (D') parallèles.
2) Tracer la droite (AB) ⊥ (D) en A et à (D') en B.
3) Tracer la droite (EF) ⊥ (D) en E et à (D') en F.
4) Justifier que les segments $[AB]$ et $[EF]$ ont même médiatrice.

VII – 1- 1) Axe médian

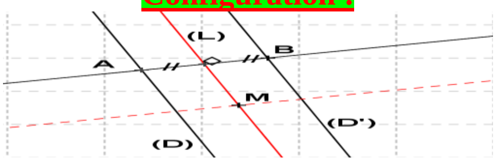
On appelle axe médian de deux droites parallèles. La médiatrice du segment formé par les intersections de la perpendiculaire à ces deux droites.

VII – 1 – 2) Propriétés :

Propriété 1 :

Si un point appartient à l'axe médian de deux droites parallèles, alors il est équidistant de ces deux droites.

Configuration :



Déductogramme :

M appartient à l'axe médian de (D) et (D')

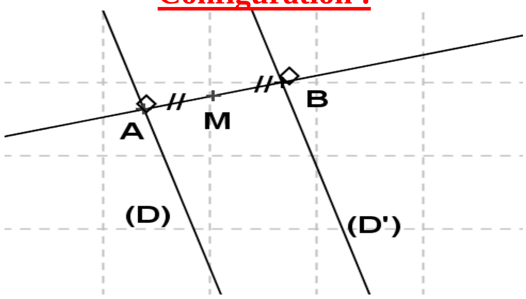
↓

distance de M à (D) = distance de M à (D')

Propriété 2 :

Si un point est équidistant de deux droites parallèles alors il appartient à l'axe médian de ces deux droites.

Configuration :



Déductogramme :

distance de M à (D) = distance de M à (D')

↓

M appartient à l'axe médian de (D) et (D')

CHAPITRE II

DROITES DES MILIEUX

DUREE : **5 HEURES**

OBJECTIF GENERAL : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation des propriétés de la droite des milieux pour résoudre des problèmes.

Objectifs spécifiques : Au terme de la leçon, l'apprenant devra être capable de :

- ✓ Restituer les propriétés relatives à la droite des milieux.
- ✓ Restituer les configurations relatives à la droite des milieux.
- ✓ Utiliser les propriétés (ou théorèmes) relatives à la droite des milieux pour démontrer le parallélisme de droites ; pour démontrer qu'un point est milieux d'un segment.
- ✓ Utiliser les propriétés relatives à la droite des milieux pour calculer ou comparer des longueurs.

PREREQUIS :

- ➢ **milieu d'un segment** : si I ϵ [AB] et AI = IB, alors I est milieu de [AB].
- ➢ **droites parallèles :** (D) et (D') sont parallèles si elles sont **soit confondues**, soit **perpendiculaires à une même droite.**
- ➢ **notion de segment :** un segment peut être une droite ; une longueur ; un segment, selon le contexte.
- ➢ **parallélogramme :**

+Définition : un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés son parallèles deux à deux.

+Caractéristiques :

- Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère ABCD a deux côtés opposés de même longueur et de support parallèles, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

***médiatrice d'un segment :**

+Si (D) est la médiatrice de [AB], alors MA= MB pour tout point de (D).

+Si MA= MB, M appartient à la médiatrice de [AB].

Sources :

- ✓ Programme de maths 2006 pages : 67
- ✓ Manuels : - Excellence 4ème pages 20 à 29
  - Introduction à l'algèbre et à la géométrie
- ✓ Webographie : http://www.mathovore.fr, consulté le 17/ 01/ 2015 à 21 h 06 min
  : http://www.maths-vidéos.com, consulté le 26/01/ 2015 à 13 h 28 min
- ✓ **Encyclopédie des connaissances actuelles en Mathématiques**

INTRODUCTION : **(5 min)**

Dans les classes précédentes, vous aviez étudié la notion de distance ; du milieu d'un segment ; de droite parallèles ; de parallélogramme ; de médiatrice d'un segment. Ces notions essentiellement liés à celle de droite seront utilisées dans ce chapitre. Ce dernier qui a pour centre d'intérêt le raisonnement et la démonstration, nous fera découvrir une propriété fondamentale de la droite des milieux d'un triangle.

Ainsi, il prépare l'introduction au théorème de Thalès qui sera vu en **3ème**.

PLAN DU COURS

DEROULEMENT DU COURS

I° THEOREME DE LA DROITE DES MILIEUX :

I – 1) Activité :

ABC est un triangle. Soit I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC]. Soit K le symétrique de I par rapport à J.

a) Montrer que le quadrilatère AICK est un parallélogramme.
b) Montrer que IB = CK et que (IB)// (CK). En déduire que le quadrilatère IBCK est un parallélogramme.
c) Démontrer que (IJ) // (BC).

Démonstration :

a) Montrons qu'AICK est un parallélogramme.

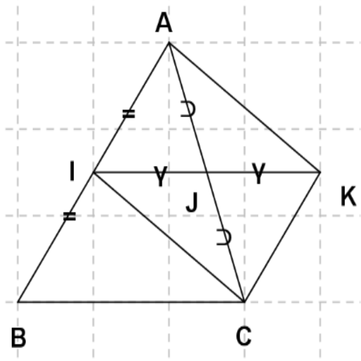
J étant le milieu de [AC] et [IK], alors AICK est un quadrilatère qui a ses diagonales de même milieu. Donc AICK est un parallélogramme.

b) Montrons que IB = CK et que (IB) // (CK).

Comme AICK est un parallélogramme, alors AI = CK et (AI) // (CK).
Comme, I milieu de [AB] et AI = IB d'où (AI) et (IB) son confondues.
On en déduit que IB = CK et (IB) // (CK)

Déduisons en que IBCK est un parallélogramme.

On a : IB = CK
(IB) // (CK), donc IBCK est un quadrilatère qui a deux côté opposés de supports parallèles et de même longueur. Donc IBCK est un parallélogramme.



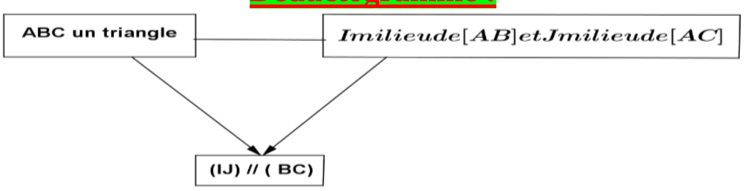
c) Montrons que (IJ) // (BC).

Comme IBCK est un parallélogramme, alors (IK) // (BC). Or, (IK) et (IJ) sont confondues car J∈ (IK). Donc (IJ) // (BC).

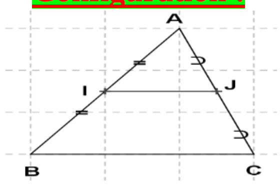
I – 2) Théorème 1 :

Dans un triangle toute droite qui passe par le milieu de deux côtés est parallèle au support du troisième côté.

Déductogramme :

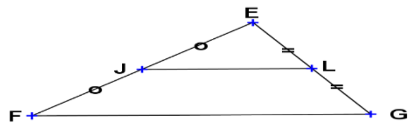


Configuration :



I – 3) Exercice d'application :

On donne la figure ci-dessous. Montrer en utilisant **le théorème I** que les droites (JL) et (FG) sont parallèles.



II° SEGMENT DES MILIEUX :

II - 1) Activité :

Reconduisons l'activité précédente et calculons la longueur du segment [IJ].

Démonstration :

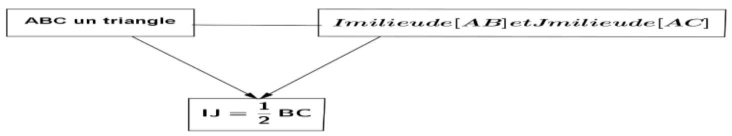
Comme IBCK est un parallélogramme, alors IK = BC. Or, J milieu de [IK], alors IJ = $\frac{1}{2}$ IK.

On en déduit que : IJ = $\frac{1}{2}$ BC

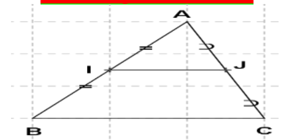
II – 2) Théorème 2 :

Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté.

Déductogramme :



Configuration :



II – 3) Exercices d'application :

1) Marquer trois points I ; O et U non alignés.
2) Construire le point D symétrique de O par rapport à I et le point F symétrique de O par rapport à U.
3) Montrer que : IU = $\frac{1}{2}$ DF

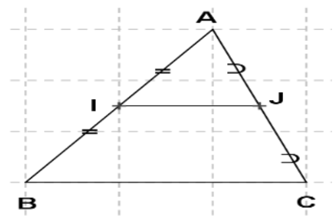
III° THEOREME DES PARALLELES :

III – 1) Activité 3 :

Soit un triangle ABC, I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC].
Soit (D) une droite passant par I et parallèle à (BC).
Montrer que (D) passe par J.

Démonstration :

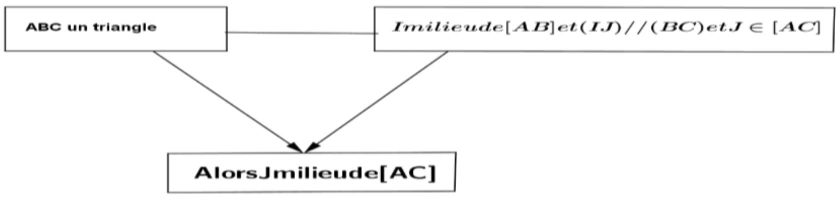
Comme I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC], alors (IJ) // (BC).
(IJ) et (D) sont alors deux droites passant par I et parallèles à (BC). Or, d'après, ***l'axiome d'Euclide*** **(Dans le plan, il ∃ une droite et une seule passant par un pt et parallèle à une droite donnée)**, (IJ) et (D)
Sont confondues et comme (IJ) passe par J alors (D) passe par J.



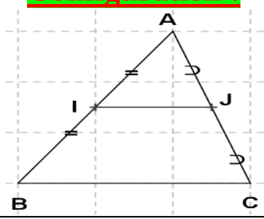
III – 2) Théorème 3 :

Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et parallèle au support d'un autre côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.

Déductogramme :



Configuration :



III – 3) Exercice d'application :

Trois points I ; J et K sont non alignés et M est le milieu de [IJ].

La droite (D) passant par M et parallèle à (KJ) coupe [IK] en N. Montrer que N est milieu de [IK].

IV° PARALLELES EQUIDISTANTES ET DROITES SECANTES A SES PARALLELES :

IV - 1) Activité 4 :

Soit (D_1) ; (D_2) et (D_3) trois droites parallèles du plan. Soit (L) une droite sécante à (D_1) ; (D_2) et (D_3) respectivement en A ; B et C tel que AB = BC. Soit (L') une droite distincte de (L) et sécante à (D_1) ; (D_2) et (D_3) respectivement en A' ; B' et C'.
Montrer que A'B' = B'C'

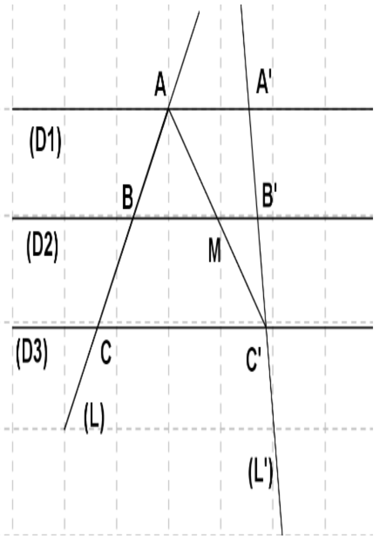
Démonstration :

Montrons que : A'B' = B'C'

Par hypothèse, on a :
(D_1), (D_2) et (D_3) parallèles et équidistantes ; (L) coupe (D_1), (D_2) et (D_3) respectivement en A, B et C
(L') coupe (D_1), (D_2) et (D_3) respectivement en A', B' et C'.
Soit M le point d'intersection de (AC') et (D_2).

- ✓ **Dans le triangle ACC'**, la droite (D_2) passe par le milieu B de [AC] et (D_2) est parallèle à (CC') ≡ (D_3). Donc (D_2) coupe [AC'] en son milieu. Or, (D_2) coupe [AC'] en M d'où M milieu de [AC'].
- ✓ **Dans le triangle AA'C'**, la droite (D_2) passe par le milieu M de [AC'] et (D_2) parallèle à (AA') ≡(D_1), donc (D_2) coupe [A'C'] en son milieu.

Or, (D_2) coupe [A'C'] en B' d'où B' milieu de [A'C'].

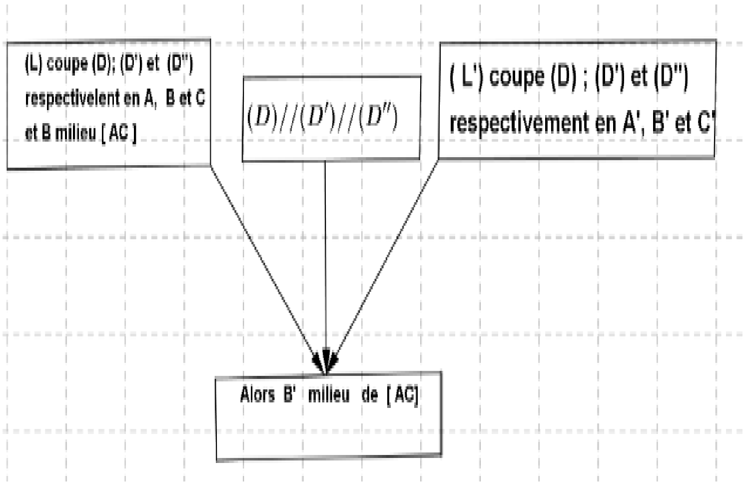


Donc A'B' = B'C'.

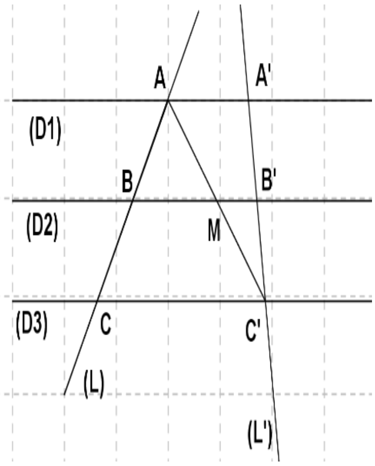
IV – 2) Théorème 4 :

Si des droites parallèles découpent sur une droite sécante des segments consécutifs de même longueur, alors elles découpent sur toute autre sécante des segments consécutifs de même longueur.

Déductogramme :



Configuration :



IV – 3) Exercice d'application :

Trace un segment [AB] et marque un point I en dehors de (AB). Construit les points J et K tels que J soit le symétrique de A par rapport à I et K le symétrique de B par rapport à J. La droite (IK) coupe (AB) en M. Démontrer qu'AB = 3 AM.

« Les triangles dont les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 3 ; 4 et 5 sont rectangles»
PYTHAGORE

CHAPITRE III

DROITES REMARQUABLES DANS UN TRIANGLE

DUREE : **7 HEURES**

OBJECTIF GENERAL: Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation des propriétés relatives aux droites remarquables pour résoudre des problèmes.

OBJECTIF DE SPECIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- Restituer la propriété : les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.
- Rappeler la définition de cercle inscrit.
- Construire le cercle inscrit dans un triangle.
- Restituer la propriété : les trois médianes d'un triangle sont concourantes.
- Restituer le vocabulaire : centre de gravité.
- Démontrer qu'un point est le centre de gravité d'un triangle.
- Placer le centre de gravité d'un triangle connaissant une médiane.
- Utiliser les droites remarquables pour démontrer que : trois points sont alignés, trois droites sont concourantes, un point est milieu d'un segment.
- Montrer qu'un triangle est isocèle à partir des propriétés de ses droites remarquables.

SOURCE ET SUPPORT PEDAGOGIQUES

- Programme de maths 4 de 2006 pages 60.
- Loi d'orientation 91.22 du 16 Février 1991
- Manuels : Excellence 4ème page 166 et CIAM 4ème page 162.
- Introduction à l'algèbre et géométrie page
- Guide pédagogique 4^{e} ; Guide d'usage 4^{e} ; CIAM 4^{e} ; Excellence 4^{e} ; Pythagore 4^{e} ;
- Webographie : http://www.mathsvidéo.com, consulté le 12 Mars
  : http://www.mathmaurer.com, consulté le 11/ 04/ 2015 à 10 h 59 min.
- **Encyclopédie des connaissances actuelles mathématiques**, page 89 à 92

PREREQUIS :

Notion sur les triangles et le parallélogramme (caractéristiques) ; Définition et propriétés d'une bissectrice et d'une médiane (acquis de la 6ème et 5ème) ; Propriétés de la distance d'un point à une droite et de la position relative d'une droite et d'un cercle (**tangente à un cercle**) ; Propriétés de la droite des milieux.

INTRODUCTION (5 MIN)

L'histoire a montré que l'utilisation de la corde à 12 nœuds également espacés, comme équerre, encore utilisé aujourd'hui a été connue depuis l'Egypte ancienne. C'est dire que les concepts liés au triangle ont fait l'objet d'étude chez bon nombres de mathématiciens comme Euclide, Thales, Euler…

Du point de vue programme, l'étude des droites remarquables d'un triangle n'est pas nouvelle : elle a été amorcée en **6ème** et **5ème**. En **6ème**, il s'agissait de la construction des droites remarquables (médiatrice ; hauteur ; médiane ; bissectrice). En **5ème**, nous sommes intervenus à l'intersection des médiatrices et des hauteurs d'un triangle.

En **4ème**, on démontrera la position relative des bissectrices et des médianes. Il s'agira, alors pour vous (les élèves) d'améliorer votre connaissance et pratique de la démonstration, structurées à partir d'un raisonnement rigoureux.

Toutefois, les droites remarquables dans un triangle trouvent leurs applications dans l'architecture, l'industrie textile, l'astronomie ; la structure moléculaire en physique, d'où l'intérêt de prêter aussi une attention à cette leçon.

« Les triangles dont les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 3 ; 4 et 5 sont rectangles»
PYTHAGORE

PLAN DU COURS

DEROULEMENT DU COURS

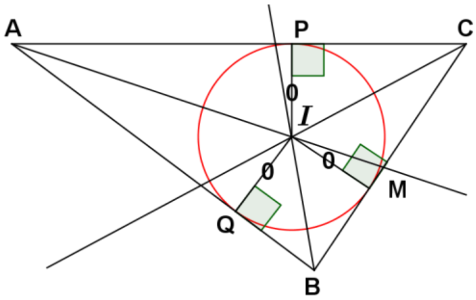
I° BISSECTRICE D'UN TRIANGLE :

I - 1) Activité :

Soit ABC un triangle. Les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ se coupent en I.
a) Tracer les droites passant par I et perpendiculaires aux droites (BC) ; (CA) et (AB). Elles coupent celles-ci respectivement en M ; P et Q.
b) Démontrer que IM = IP = IQ puis en déduire que la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ passe par I.
c) Tracer le cercle (C) de centre I et de rayon IM puis justifier qu'il est tangent aux droites (BC) ; (CA) et (AB).

Solution :

b) Démontrons que IM = IP = IQ.
Par hypothèse les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ se coupent en I ; (IM) ⊥ (BC) ; (IQ) ⊥ (AB) et (IP) ⊥ (AC) ; respectivement en M ; Q et P.
Or, si un point est sur la bissectrice d'un angle alors il est équidistant des côtés de cet angle.
Donc IM = IP = IQ.



Déduisons-en que la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ passe par I.
Comme IP = IQ; (IP) ⊥ (AC) et (IQ) ⊥ (AB) alors I est équidistant des côtés de l'angle $\widehat{BAC}$.
Or, si un point est équidistant des côtés d'un angle alors il est sur la bissectrice de cet angle. Donc I appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
Conclusion : (AI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
c) Justifions que le cercle (C) (I ; IM) est tangent aux droites (BC) ; (CA) et (AB).
Comme IM = IP = IQ ; (IM) ⊥ (BC) ; (IQ) ⊥ (AB) et (IP) ⊥ (AC), **Or, une tangente à un cercle en un point est la droite perpendiculaire au rayon en ce point.** Donc le cercle **(C) (I ; IM)** est tangent aux droites (BC) ; (CA) et (AB) respectivement en M ; P et Q.

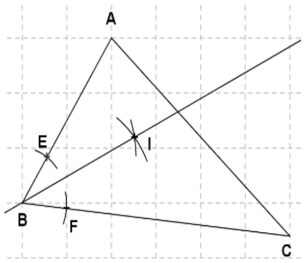
I - 2) Définition :

Une bissectrice d'un triangle est une droite qui passe par le sommet d'un angle de ce triangle et qui le partage en deux angles égaux.

I – 3) Méthode :

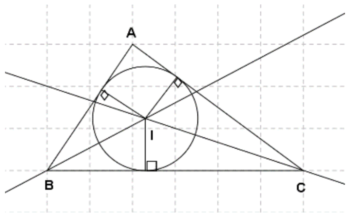
Pour construire la bissectrice d'un angle $\widehat{ABC}$ d'un triangle ABC, il faut

- ❖ Construire un triangle ABC
- ❖ Construire un arc de cercle de centre B qui coupe $[BA)$ en E et $[BC)$ en F
- ❖ Construire deux arcs de cercle de même rayon, sécants en I, l'un de centre E et l'autre de centre F
- ❖ La droite (BI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$



I - 4) Propriétés :

- ❖ Tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des côtés de cet angle.
- ❖ Si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant aux côtés de cet angle
- ❖ Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.



I - 5) Cercle inscrit : vocabulaire et méthode de construction :

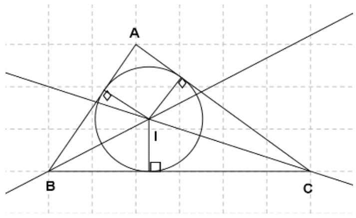
a) Vocabulaire :

- ✓ Le point de concourt de ces trois bissectrices est le centre du cercle tangent aux côtés de ce triangle.
- ✓ Ce cercle est appelé ***cercle inscrit*** dans le triangle et ***tangent à chacun des côtés*** de ce triangle.

b) Méthode de construction :

Pour construire le cercle inscrit dans un triangle, il faut :

- ✓ Tracer soigneusement deux bissectrices ;
- ✓ Construire le projeté orthogonal H de leur point d'intersection I sur un des côtés du triangle
- ✓ Construire le cercle (C) de centre I et de rayon IH



I - 6) Exercice d'application :

On donne IJ =3 cm ; IK = 4 cm et KJ = 2,5 cm.

Soit (AI) et (CI) les bissectrices respectives des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$.

1) Montrer que la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ passe par I. 2) Démontrer que les points A ; Q et B sont alignés. 3) Construire le cercle qui lui est inscrit.

II° MEDIANE D'UN TRIANGLE :

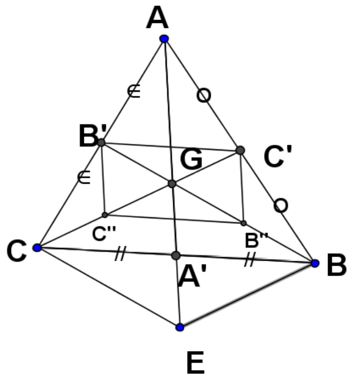
II - 1) Activité :

Soit ABC un triangle, B' et C' les milieux respectifs de [AC] et [AB]. Les médianes (BB') et (CC') se coupent en un point G.

1) Construire le point E symétrique de A par rapport à G.
2) Montrer que le quadrilatère CGBE est un parallélogramme.
3) Justifier que la droite (AG) est une médiane du [BC].
4) Montrer que le point G est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet.

Solution :

1) Montrer que le quadrilatère CGBE est un parallélogramme.



- Dans les triangles ABE et ACE:
On a : G ; C' et B' les milieux respectifs des segments [AE] ; [AB] et [AC].
Or, dans un triangle, la droite qui passe par le milieu de deux côtés est parallèle au support du troisième côté (**Théorème de la droite des milieux**).
D'où, (GC')// (BE) et (GB')// (CE).
Comme C ∈ (GC') et B ∈ (GB') donc (BG) // (CE) et (GC)// (BE). ***Or, si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux alors c'est un parallélogramme.***
Donc le quadrilatère CGBE est un parallélogramme.

2) Justifier que la droite (AG) est une médiane.

Comme CGBE est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu. Or, [GE] est une diagonale de CGBE passant par A, alors elle coupe [BC] en son milieu A'. D'où par définition (GA) est une médiane du triangle ABC.

Montrons que B'C'B''C'' est un parallélogramme :

- Dans le triangle ABC, on a : C' et B' milieux respectifs de [AB] et [AC], alors C'B' = $\frac{1}{2}$ BC et d'après le TDM, (B'C') // (BC) ❶
- Dans le triangle BGC, on a : B'' et C'' milieux respectifs de [BG] et [CG], alors B''C'' = $\frac{1}{2}$ BC et d'après le T.D.M, (B''C'') // (BC) ❷

De ❶ et ❷ on tire (C'B') // (B''C'') et B'C' = B''C''
Or, ***si un quadrilatère a deux côtés opposés de supports parallèles et de même longueur alors c'est un parallélogramme***. **Donc B'C'B''C'' est un parallélogramme.**

***Déduisons- en que G est situé aux $\frac{2}{3}$ sur chacune des médianes à partir du sommet.**

Comme B'C'B''C'' est un parallélogramme et G le milieu de ses diagonales, alors $\begin{cases} C'G = GC'' \\ B'G = GB'' \end{cases}$ **(*)**

Comme B'' et C'' sont les milieux respectifs de [BG] et [CG], alors $\begin{cases} BB'' = GB'' \\ CC'' = GC'' \end{cases}$ ou $\begin{cases} \mathrm{BG} = 2\,\mathrm{GB''} \\ \mathrm{CG} = 2\,\mathrm{GC''} \end{cases}$ **(**)**

De (*) et (**), on a : BB' = 3 GB'' et CC' = 3 GC'', alors GB'' = $\frac{1}{3}$ BB' et GC''= $\frac{1}{3}$ CC''.
Etant donné que BG = 2 GB'' et CG = 2 GC'', alors en remplaçant on a : BG = $\frac{2}{3}$ BB' et CG=$\frac{2}{3}$ CC'. De la même manière on pourra montrer que AG = $\frac{2}{3}$ AA'.

II - 2) Définition :

Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

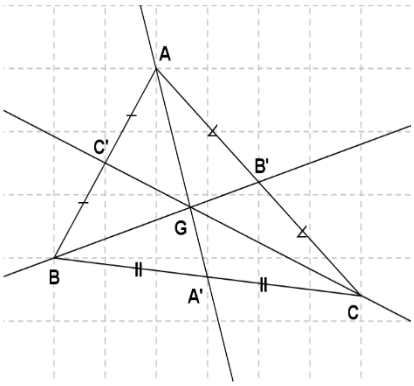
II - 3) Propriétés :

- Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.
- Le point de concourt de ces médianes est appelé **centre de gravité** de ce triangle.
- Le centre de gravité d'un triangle se trouve au deux tiers de chaque médiane à partir du sommet.

AG = $\frac{2}{3}$ AA' et G ∈ $[AA']$ alors A ; G et A' sont alignés.

BG = $\frac{2}{3}$ BB' et G ∈ $[BB']$ alors B ; G et B' sont alignés.

AC = $\frac{2}{3}$ CC' et G ∈ $[CC']$ alors C ; G et C' sont alignés.



II - 4) Exercice d'application :

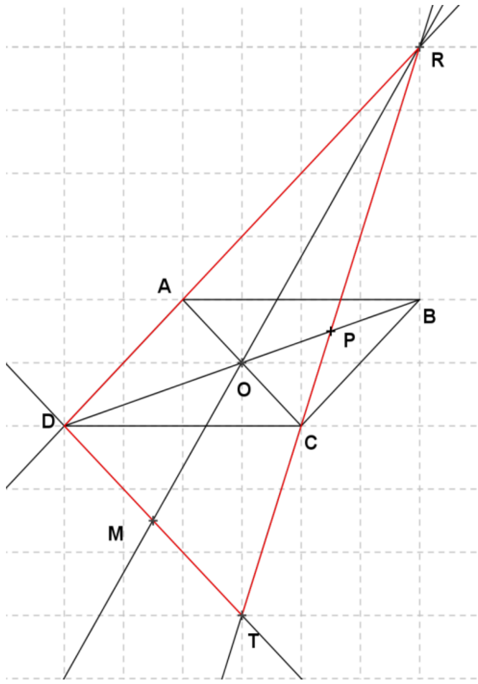
ABCD est un parallélogramme de centre O, P est le milieu de [OB]. Les droites (CP) et (DA) se coupent en R. T est le symétrique de R par rapport à P. Les droites (RO) et (DT) se coupent en M. **1.** Faire une figure complète. **2.** Montrer que (DP) est une médiane de RDT.

3. Montrer que DO = $\frac{2}{3}$ $\boldsymbol{DP}$. **4.** Quel est le centre de gravité du triangle RDT.

5. Démontrer que M est milieu du segment [DT].

Solution :

Faisons une figure complète (voir figure).



2. Montrons que (DP) est une médiane de RDT.

Par hypothèse; $S_p(R)$ = T alors P est le milieu de [RT] et D ∈ (DP) et RDT est un triangle.

Or, la médiane d'un triangle est une droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet. **Donc (DP) est une médiane de RDT**

3. Montrons que : DO = $\frac{2}{3}$ $\boldsymbol{DP}$.

Par hypothèse, on a : ABCD un parallélogramme de centre O alors O alors DO = OB et comme P est milieu de [OB] alors 2 OP = OB

De plus, DO = OB alors DO = 2OP

Or, D ; O et P étant alignés alors

DP = DO + OP

DP = 2OP + OP = 3 OP

OP = $\frac{1}{3}$ DP

Il vient alors que DO = 2OP et OP = $\frac{1}{3}$ DP

Donc DO = 2 x $\frac{1}{3}$ DP

DO = $\frac{2}{3}$ DP

4. Le centre de gravité du triangle RDT. On a : DO = $\frac{2}{3}$ DP

Or, Le centre de gravité d'un triangle se trouve au deux tiers de chaque médiane à partir du sommet. Donc O est le centre de gravité du triangle RDT.

5. Démontrons que M est milieu du segment [DT].

Par hypothèse, les droites (RO) et (DT) se coupent en M et O est le centre de gravité de RDT

Or, les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

Donc (RO) est une médiane de RDT passant par M. D'où M milieu du segment [DT].

III° RAPPEL SUR LA MEDIATRICE D'UN TRIANGLE :

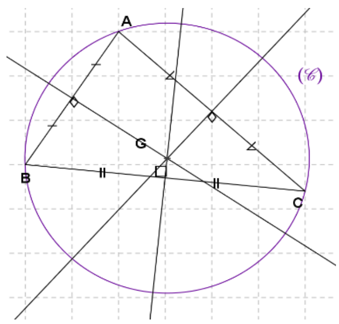
III - 1) Définition :

La médiatrice d’un triangle est une droite qui passe par le milieu d’un côté et perpendiculaire au support de ce côté

III - 2) Propriétés :

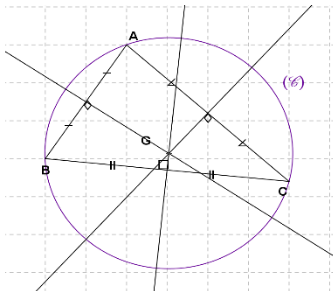
- ❖ Tout point de la médiatrice d’un segment est équidistant des extrémités de ce segment.
- ❖ Tout point équidistant des extrémités d’un segment appartient à la médiatrice de ce segment.

- ❖ Les trois médiatrices d’un triangle sont concourantes.
- ❖ Le point de concourt des trois médiatrices est le centre du cercle passant par les trois sommets du triangle.
- ❖ Ce cercle est appelé ***cercle circonscrit*** au triangle.

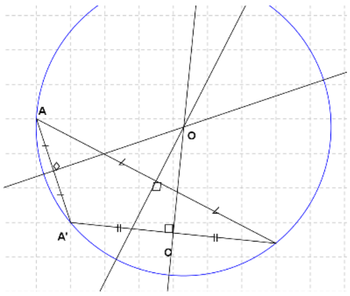


❖ **Remarque :**

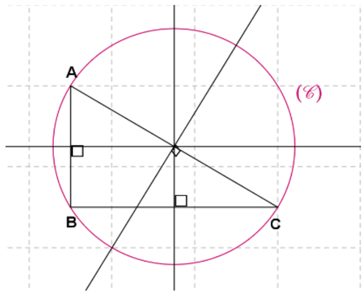
✓ **Quand le triangle a** ***trois angles aigus***, le centre du cercle circonscrit est à l’intérieur du triangle.



✓ **Quand le triangle a** ***un angle obtus***, le centre du cercle circonscrit est à l’extérieur du triangle.



✓ **Quand le triangle a** ***un angle droit*** (triangle rectangle), le centre du cercle circonscrit est le milieu de l’hypoténuse.



III - 3) Exercice d’application :

1. Construire un triangle ABC quelconque. 2 a) Construire la droite (D_1) médiatrice de [AB]. b) Construire la droite (D_2) médiatrice de [BC]. **2.** a) Les droites (m_1) et (m_2) se coupe en O. **3.** a) Démontrer que : OA = OB= OC. b) En déduire que la droite (D_3) médiatrice [AC] passe par O. d) Que représente le point O pour le triangle ABC ?

IV° HAUTEUR D’UN TRIANGLE :

IV - 1) Activité :

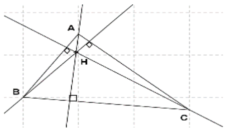
1) Tracer un triangle ABC puis construis la hauteur (D) issue de A et la hauteur (D’) issue B, qui se coupent en O
2) Tracer la hauteur (D’’) de issue de C. Le point O appartient-il à la hauteur (D’’) ?

IV - 2) Définition :

La hauteur d’un triangle est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au support du côté opposé.

IV - 3) Propriétés :

❖ **Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.**



❖ **Le point de concours de ces hauteurs est appelé orthocentre du triangle.**

❖ **Remarques**

- ✓ Quand le triangle a trois angles aigus, *l'orthocentre est à l'intérieur du triangle*.
- ✓ Quand le triangle a un angle obtus, *l'orthocentre est à l'extérieur du triangle*.
- ✓ Quand le triangle est rectangle, *l'orthocentre est le sommet de l'angle droit*.

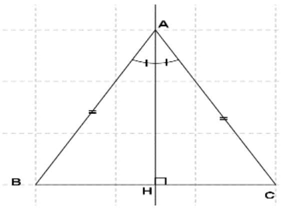
IV - 4) Exercice d'application :

Soit ABCD un parallélogramme de centre H. La perpendiculaire à (DB) passant par A et la perpendiculaire à (AC) passant par B se coupent en G.

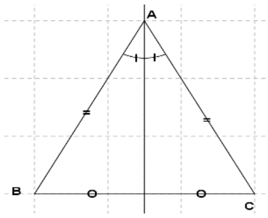
1. Faire une figure. **2.** Que représente le point H pour le triangle AGB.
3. Montrer que les droites (GH) et (AB) sont perpendiculaires.
4. Montrer que les droites (GH) et (DC) sont perpendiculaires.

V° RECONNAISSANCE D'UN TRIANGLE ISOCELE :

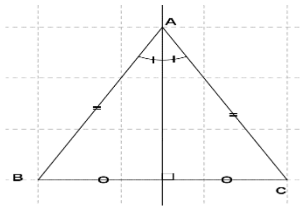
✓ Si dans un triangle, une *hauteur* est en même temps *bissectrice*, alors ce triangle est isocèle



✓ Si dans un triangle, une *médiane* est en même temps *bissectrice*, alors ce triangle est isocèle.

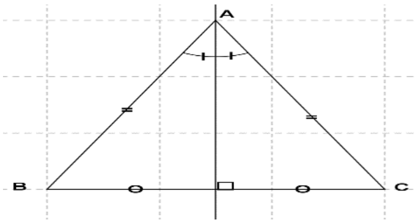


✓ Si dans un triangle, une *médiatrice* est en même temps *bissectrice*, alors ce triangle est isocèle.

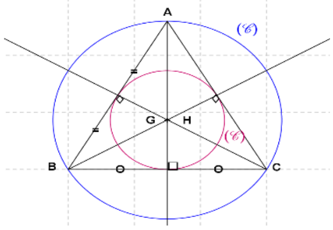


❖ **Remarque :**

✓ Dans un triangle, isocèle l'axe de symétrie est à la fois la médiatrice de la base ; la médiane ; la *hauteur* et la *bissectrice*, passant par le sommet principal.



✓ Dans un triangle, équilatéral le centre de gravité est à la fois le centre du cercle inscrit ; le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre.



CHAPITRE IV

TRIANGLE RECTANGLE

DUREE : **8 HEURES**

OBJECTIF GENERAL : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation des propriétés du triangle rectangle pour résoudre des problèmes

OBJECITFS SPECIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de

- restituer le Théorème de Pythagore.
- utiliser le Théorème de Pythagore pour des calculs de longueurs ou d'aires.
- restituer la relation : AB × AC = AH × BC.
- utiliser pour des calculs de longueurs ou d'aires, la relation : AB × AC = AH × BC.
- restituer la réciproque du Théorème de Pythagore.
- utiliser la réciproque du Théorème de Pythagore pour montrer qu'un triangle est rectangle en un point.

SOURCE

- Programme de maths 4 de 2006 pages 60.
- Loi d'orientation 91.22 du 16 Février 1991
- Manuels : Excellence 4ème page 166 et CIAM 4ème page 162.
- Introduction à l'algèbre et géométrie page
- Guide pédagogique 4e ; Guide d'usage 4e ; CIAM 4e ; Excellence 4e ; Pythagore 4e ;
- Webographie : http://www.mathovore.fr, consulté le 17 / 01 / 2015 à 21 h 15 min
  http://www.mathsvidéos.com**,** consulté le 26/ 01/ 2015 à 13 h 29 mi
  http://www.debart.fr/pdf/triangle_college.pdf, consulté le14/01/2015 à 9 h 13 min
- **Encyclopédie des connaissances actuelles mathématiques**, page 92

Prérequis :

Propriété des triangles ; angles complémentaires ; angle droit ; centre du cercle circonscrit ;

Introduction (5 min)

L'étude du triangle rectangle n'est pas nouvelle en 4e. Commencée depuis l'élémentaire, elle a été reprise en 6e (définition et présentation) et en 5e (propriété et reconnaissance).

En 4ème, son étude nous donne l'occasion d'introduire les ***propriétés métriques du triangle rectangle***. Par exemple, le ***théorème de Pythagore (né, vers le 6e siècle avant J. C)***, qui n'est en fait pas une découverte de Pythagore, mais qui l'a formalisée. Il était déjà connu sur des cas particuliers par les Chinois et les Babyloniens 1000 ans auparavant. Les Égyptiens connaissaient aussi le théorème. Ils utilisaient la corde à 13 nœuds (régulièrement répartis) qui, une fois tendue, formait le triangle rectangle 3 ; 4 ; 5 (**appelé le triplet pythagoricien**) et permettait d'obtenir un angle droit entre deux « longueurs » (cette corde à 13 nœuds est d'ailleurs encore utilisée par les maçons pour s'assurer de la perpendicularité des murs). C'est dire que l'étude du triangle rectangle est plus qu'une nécessité pour la vie car il permet entre autre de diviser tout triangle rectangle en deux autres triangles rectangles.

PLAN DU COURS

DEROULEMENT DU COURS

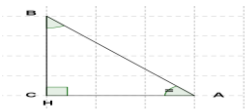
I° RAPPELS :

I – 1) Définition

Un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit (de 90°).

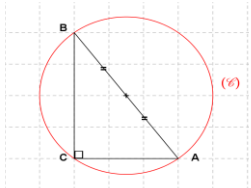
I – 2) Propriétés :

- Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires

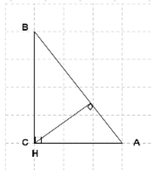


Autrement dit, si ABC est un triangle rectangle en A alors
$\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$

- Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.



- Le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle est l'orthocentre de ce triangle.



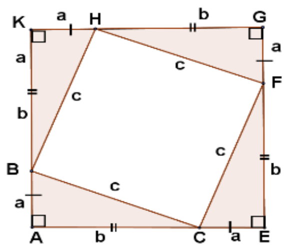
I – 3) Calcul d'aire :

Soit A l'aire d'un triangle alors $\mathcal{A} = \frac{1}{2}$ Base x Hauteur.

II° THEOREME DE PYTHAGORE :

II – 1) Activité :

Le carré AEGK qui a pour côté **(a + b)** est formé à partir de 4 triangles rectangles identiques (voir figure ci-contre). On veut comparer c^2 et $a^2 + b^2$. Pour cela :
1) Justifie que BCFH est un losange.
2) Démontre que BCFH est un carré.
3) Calcule de deux manières l'aire A du carré AEGK puis compare c^2 et $a^2 + b^2$.



Solution :

1) Justifions que BCFH est losange.

D'après la figure le quadrilatère BCFH a ces 4 côtés égaux. Donc c'est un losange.

2) Démontrons que BCFH est un carré.

*Les triangles rectangles ABC et CEF étant identiques alors les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{ECF}$ sont complémentaires car $\widehat{ABC} = \widehat{ECF}$ d'où $\widehat{BCA} + \widehat{ECF} = 90°$

Comme $C \in [AE]$ alors $\widehat{BCF} = 180° - (\widehat{BCA} + \widehat{ECF})$

$= 180° - 90° = 90°$ d'où BCFH a un angle droit.

Or, un losange qui a un angle droit est un carré.

Donc **BCFH est un carré.**

3) Calculons de deux manières l'aire A du carré AEGK.

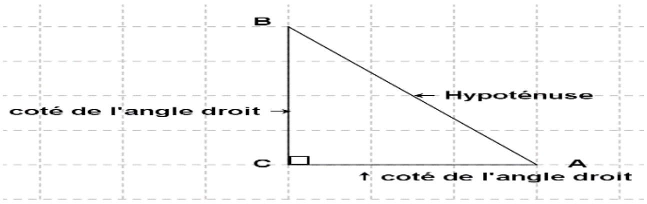
1ère manière	2ème manière
AEGK étant un carrée de côté : (a + b), alors A= $(a+b)^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$	AEGK est composé de 4 triangles de même aire de base a et de hauteur b et d'un carrée de côté c D'où $A = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$ Soit $A = \mathbf{c^2 + 2ab}$

Comparons c^2 et $a^2 + b^2$.

Puis que A= $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2} = \mathbf{c^2 + 2ab}$; alors $c^2 = a^2 + b^2$.

II – 2) Théorème de Pythagore :

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.



$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

II – 3) Exercice d'application :

1) Dans le tableau ci-dessous AB, AC et BC représentent les mesures des longueurs en cm des côtés d'un triangle ABC rectangle en A. Recopier et compléter le tableau.

ABC	AB	AC	BC
1er Cas	6	8	
2e Cas		4	5
3e Cas	1,5		2,5

2) Soit ABC un triangle rectangle en C tel que : BC = 4cm ; AC = 3cm. Démontre que AB = 5 cm
3) A quoi sert le théorème de Pythagore ?

III° RELATION METRIQUE DANS UN TRIANGLE :

III – 1) Activité :

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur passant par A.

1) Calculer l'aire du triangle ABC de deux façons différentes.
2) Démontrer que AB x AC et AH x BC.

III – 2) Propriété :

Dans un triangle rectangle, le produit des côtés de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par la hauteur correspondante.

III – 3) Exercice d'application :

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 15 cm, et CA = 20 cm. Soit H le pied de la hauteur passant par A.

1) Calculer la longueur de l'hypoténuse.

2) Calculer AH.

IV° RECONNAISSANCE D'UN TRIANGLE RECTANGLE :

IV– 1) Reconnaissance déduite de l'aire:

Si dans un triangle, le produit de deux côtés est égal au produit du plus grand côté par la hauteur correspondante, alors ce triangle est rectangle.

IV – 2) Réciproque du théorème de Pythagore :

Si dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

IV – 3) Reconnaissance d'un triangle rectangle par les angles :

Si un triangle a deux angles complémentaires alors ce triangle est rectangle.

Autrement dit, si α et β sont deux angles d'un triangle ABC tel que $\alpha + \beta = 90°$ alors ABC est un triangle rectangle.

IV – 4) Reconnaissance d'un triangle rectangle par le cercle :

Si un triangle est inscrit dans un cercle et un des côtés de ce triangle est un diamètre du cercle alors ce triangle est rectangle.

Autrement dit, si $[AB]$ est un diamètre du cercle et M un point du cercle distinct de A et B, alors ABM est un triangle rectangle en M.

IV – 4) Exercice d'application :

Réponds par oui ou non si ABC est rectangle et justifie à chaque fois ta réponse.

ABC est triangle tel que	ABC est un triangle rectangle.	Justification
AB = 6 ; BC = 1O ; AC = 8		
AB = 6 ; BC= 9 ; AC = 8		
AB =4,5 ; BC= 7,5 ; AC =6		

« Les triangles dont les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 3 ; 4 et 5 sont rectangles»
PYTHAGORE

CHAPITRE V

TRANSLATIONS ET VECTEURS

DUREE : 8 HEURES

OBJECTIF GENERAL : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation des propriétés relatives aux vecteurs pour résoudre des problèmes.

OBJECTIFS SPECIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- ✓ Construire l'image par une translation : d'un point ; d'une droite ; d'une demi-droite, d'un angle ; d'un segment, d'un triangle ; d'un cercle.
- ✓ Reconnaitre une translation dans une configuration.
- ✓ Utiliser l'égalité de deux vecteurs pour justifier : une égalité de distances et le parallélisme de droites.
- ✓ Construire le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; le vecteur $\vec{u}$ et le point A étant donnés.
- ✓ Utiliser l'égalité de deux vecteurs pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.
- ✓ Utiliser l'égalité de deux vecteurs pour justifier qu'un point est le milieu d'un segment.

PREREQUIS : parallélogramme ; droite parallèles ; segment ; milieu d'un segment

SOURCES :

- ✓ **Loi d'Orientation 91- 22** du 16 Février 1991 ; G.U. de Maths 4^{e}
- ✓ **Manuels :** C.I.A.M. 4^{e} et Excellence 4^{e} ;
- ✓ **Encyclopédie des connaissances actuelles de mathématiques**.
- ✓ **Webographie :** http://www.maths-videos.com, consulté le 26 / 01/2015 à 13 H 46 min

INTRODUCTION : (5 min)

Le mot **« vecteur »** vient du latin **« vehere »** (conduire, transporter). De même Translation signifie « porter.»

La notion de vecteur est le fruit d'une longue histoire, commencée voici plus de deux mille ans. Ainsi, du point de vue géométrique, la translation est une **transformation ponctuelle faisant correspondre à chaque point de l'espace un autre point par un vecteur fixe.**

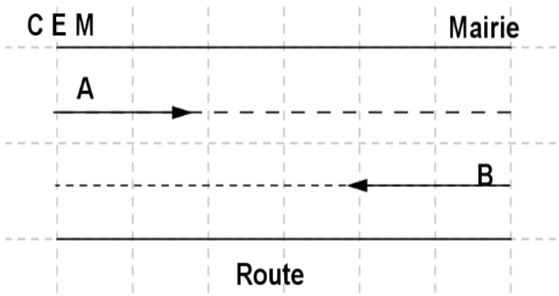
Du point de vue programme, l'étude des Translations et des Vecteurs est tout à fait nouvelle. Elle aboutira sur la caractérisation d'un parallélogramme. Ainsi, la maîtrise de ces deux opérations est nécessaire pour la résolution de certains problèmes.

PLAN DU COURS :

DEROULEMENT DU COURS

I° DIRECTION ET SENS :

I – 1) Présentation :



- Dans le **langage usuel**, deux voitures qui se croisent sur une route horizontale n'ont pas la même direction
- Dans le **langage mathématique**, on dit qu'elles ont la même direction. Cette direction est celle de deux droites parallèles (D) et (D')

* Du CEM vers la mairie pour le taxi
* De la mairie vers le CEM pour le camion

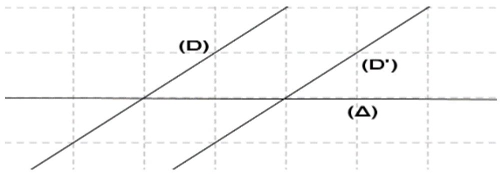
I – 2) Définition :

Définition :

Une droite définit une direction. On dit que deux droites (D) et (D') ont la même direction lorsque (D) et (D') sont parallèles ou confondues. Par conséquent, si deux droites sont sécantes, alors elles n'ont pas la même direction.

Exemple :

Les droites (D) et (D') sont parallèles donc elles ont la même direction. (Δ) et (D) sont sécantes, donc elles n'ont pas la même direction.

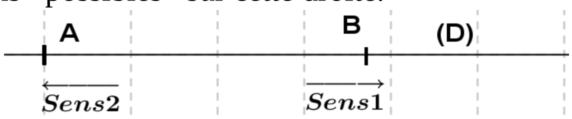


I – 1 – 3) Sens sur une direction :

Soit (D) une droite donnée. On peut définir deux sens possibles sur cette droite.

Le Sens 1 : de A vers B. On dira que c'est le couple (A ; B).

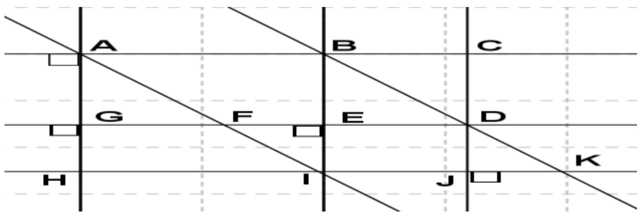
Le sens 2 : de B vers A. On dira que c'est le couple (B ; A).



I – 4) Application :

Sur la figure ci- contre ABDF est un parallélogramme.

1) Cite deux droites ayant la même direction que (BC) ; (GF) ; (CD)
2) Cite trois couples ayant la même sens.



II° LA TRANSLATION :

II – 1) Activité :

Soit A ; B et C trois points non alignés du plan.

1) Construis le point M tel que :
   - (AB) // (CM)
   - AB = CM
   - $[AB]$ et $[CM]$ ont le même sens.
2) Justifie que ABMC est un parallélogramme.

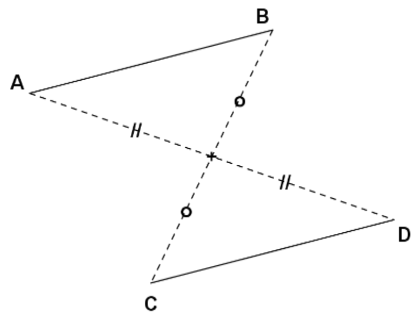
II – 2) Définition :

Soit A et B deux point du plan.

La **translation** qui transforme **A en B** associe **à C l'unique point D** tels que les segments **[AD] et [BC] ont le même milieu**. Ce qui signifie que :

- ✓ les droites (AB) et (CD) sont parallèles
- ✓ les **[AB] et [CD] ont même longueur : AB = CD**
- ✓ **les demi-droites** $[AB)$ et $[CD)$ ont le même sens.

Le quadrilatère ABDC est alors un parallélogramme.

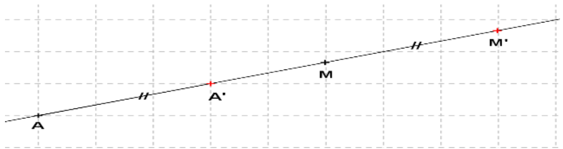


II – 3) Notation :

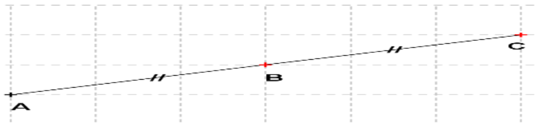
Soit **t** la translation qui transforme A en B, alors on note **t** (A) = B. « On lit l'image de A par la translation **t** est B »

❖ **Remarque :**

- ✓ Si M ∈ (AA') alors M' ∈ (AA') tel que MM' = AA' et les couples (A ; A') et (M ; M') même sens.



- ✓ Si **t** (A) = B et **t** (B) = C, alors B est le milieu du segment **[AC].**

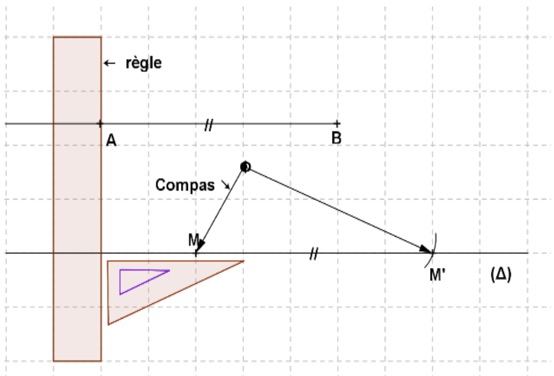


II – 4) Procédure de construction :

a) Avec la règle ; équerre et compas

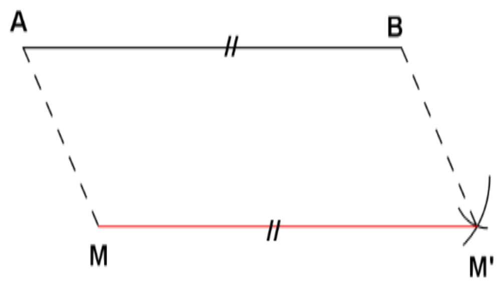
Pour construire l'image d'un point M par translation, on peut utiliser la règle ; l'équerre et le compas :

- ✓ Tracer la droite (AB) puis la droite (Δ) parallèle à (AB) passant par M
- ✓ Mesurer le segment **[AB] avec le compas.**
- ✓ Marquer sur (Δ) un arc de cercle de centre M et de rayon AB de sorte que les couples (A ; B), et (M ; M') aient le même sens.



b) Avec règle et compas

- ✓ Mesurer avec le compas le segment **[AB]**
- ✓ Marquer un arc de cercle de centre M et de rayon AB dans le sens du couple (A ; B)
- ✓ Marquer un arc de cercle de centre B et de rayon AM dans le sens du couples (A ; M),
- ✓ Les deux arcs de cercle se coupent au point M'.

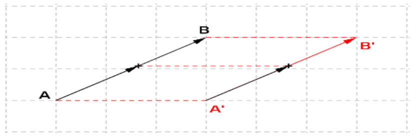


II – 5) Propriétés de la translation :

a) Image de points alignés :

Lorsque trois points sont alignés, leurs images sont trois points alignés.

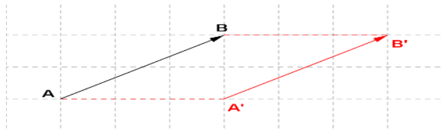
La translation conserve *l'alignement de points*.



a) Image d'un segment

Dans une translation l'image d'un segment est segment qui lui est parallèle.

La translation conserve la *distance*.

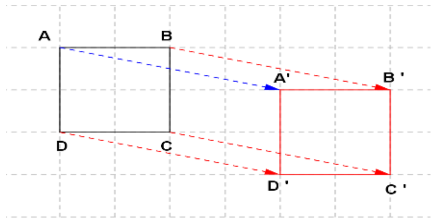


b) Image d'une figure :

ABCD est un carrée et A'B'C'D' est son image par la translation du vecteur $\overrightarrow{AA'}$ tel que : AB = A'B'

L'image d'un carré est un carré de même côté. Donc de même aire.

La translation conserve les *aires* et les *angles*.



c) Image de deux droites parallèles :

Lorsque des droites sont parallèles, leurs images sont des droites parallèles.

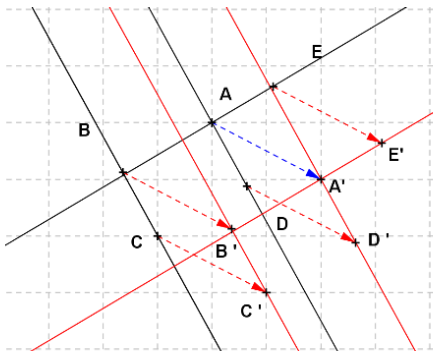
- ✓ Dans une translation, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.
- ✓ Dans une translation l'image d'une demi-droite est une demi-droite parallèle et de même sens.

La translation conserve le *parallélisme*.

d) Image de deux droites perpendiculaires :

Lorsque deux droites sont perpendiculaires leurs images sont deux droites perpendiculaires

La translation conserve *l'orthogonalité*.



b) Image d'un cercle

Dans une translation l'image d'un cercle est un cercle de même rayon, son centre est l'image du centre.

II – 6) Exercice d'application :

1) Marque trois points A, B et C non alignés.

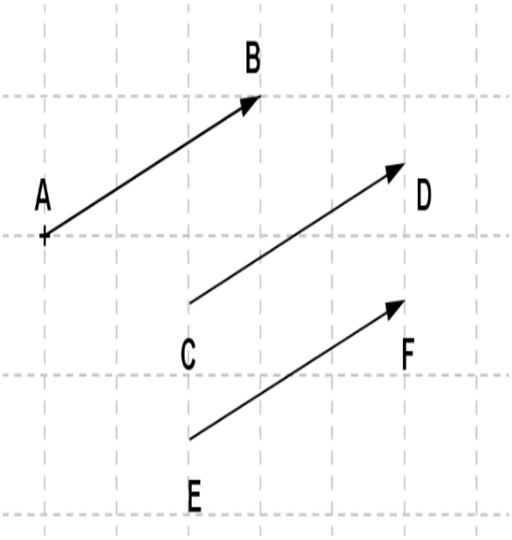
2) Construis les points B' et C', images respectives de B et C par la translation qui transforme A en C.

3) Quelle est l'image du triangle ABC par cette même translation ?

III° VECTEUR :

III – 1) Notion de vecteur :

Le vecteur permet de définir une translation. Il doit donc préciser un sens, une direction, une longueur. On le représente sous forme de segment fléché.
Soit A et B deux point du plan et **t** la translation qui applique A sur B.



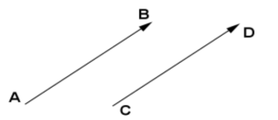
- ✓ Lorsque A et B sont distincts, **le vecteur $\overrightarrow{AB}$** se distingue par :
- sa direction : celle de la droite (AB) ;
- son sens : celui du couple (A ; B) ;
- sa longueur : celle du segment [AB].

Ce vecteur est noté $\overrightarrow{AB}$

- ✓ Lorsque ***les point A et B sont confondus***, **le vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$** est dit ***vecteur nul*** et est noté, $\overrightarrow{O}$. **Il est de longueur nulle et il n'a ni sens ni direction.**

III – 2) Vecteurs égaux :

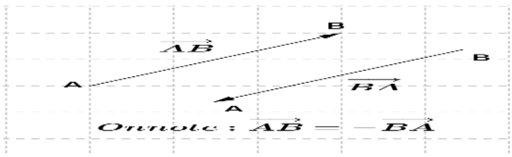
Deux vecteurs non nuls sont dits égaux s'ils ont :
- même direction ;
- même sens ;
- même longueur



$\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont égaux on note* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

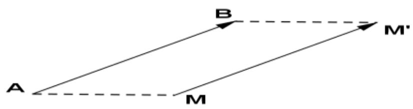
III – 3) Vecteurs opposés

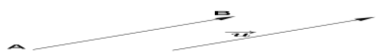
Deux vecteurs non nuls sont dits opposés s'ils ont :
- même direction ;
- même longueur ;
- des sens contraires



III – 4) Propriétés :

- ❖ Si M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B, alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$
- ❖ Si $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$, alors M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B.
- ❖ Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et A un point du plan. Il existe un point B et un seul tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$



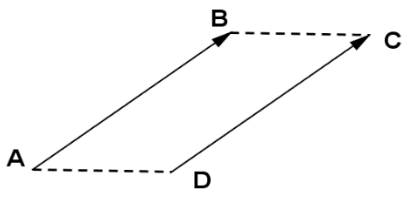


le point B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$

IV° PARALLELOGRAMME ET VECTEUR :

IV – 1) Propriétés :

- Si le quadrilatère ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et A, B et C sont non alignés, alors ABCD est un parallélogramme propre.



Conséquence :

Pour démontrer que les droite (AB) et (DC) sont parallèles ou que les distances AB et CD sont égales, il suffit de prouver que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

IV – 2) Application :

Soit $\vec{u}$ un vecteur, M et N deux point distincts du plan n'appartenant pas à la direction de $\vec{u}$.

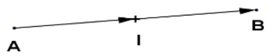
1) Construis les points P et L tel que $\vec{u} = \overrightarrow{MP}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{NL}$

2) Montre que MPLN est un parallélogramme.

V° MILIEU D'UN SEGMENT ET VECTEUR :

V – 1) Propriété :

- Si le point I est milieu du segment [AB], alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- Si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, alors I est le milieu du segment [AB].



V – 2) Exercice d'application :

OUMI est un parallélogramme de centre P. Justifie que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PM}$ et que $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{UP}$

CHAPITRE VI

ROTATIONS ET POLYGONES REGULIERS

DUREE : **6 HEURES**
OBJECTIF GENERAL : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation des rotations et des polygones réguliers pour résoudre des problèmes.
OBJECYIFS SPECIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- ✓ Reconnaitre un angle au centre.
- ✓ Reconnaitre l'arc intercepté par un angle au centre.
- ✓ Trouver la longueur d'un arc de cercle connaissant le rayon et la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.
- ✓ Construire l'image d'un point par une rotation.
- ✓ Déterminer une rotation dans des cas simples (triangle isocèle, triangle équilatéral, carré...).
- ✓ Restituer les propriétés de la rotation.
- ✓ Utiliser les propriétés de la rotation pour : comparer des longueurs, démontrer l'alignement de 3 points,
- ✓ comparer des angles, comparer des aires, démontrer le parallélisme de deux droites et démontrer l'orthogonalité de deux droites.
- ✓ Restituer les propriétés de la rotation pour :
- ✓ Démontrer le parallélisme ; l'orthogonalité de droites
- ✓ Reconnaitre un polygone régulier.
- ✓ Construire un polygone régulier rapporteur et du compas.
- ✓ Utiliser une rotation de centre O et d'angle $\frac{360°}{n}$ pour construire un polygone régulier de centre O à n côtés.
- ✓ Caractériser le cercle inscrit dans un polygone régulier.
- ✓ Caractériser le cercle circonscrit à un polygone régulier.
- ✓ Restituer les éléments de symétrie d'un polygone régulier.

PREREQUIS : cercle ; angle ; droites et positions relatives ;
SOURCES :

- ❖ Loi d'orientation **91.22 du 16 Février 1991 ; Guide d'Usage de Maths 4^{e}**
- ❖ Nouveau programme de **2006 et** Guide d'usage de Février 2010
- ❖ Manuels : CIAM 4ème et 3ème, Excellence 4ème et 3ème
- ❖ **Webographie :** http://www.maths-videos.com, consulté le 26 / 01 /2015 à 13 H 46 min
- ❖ **Encyclopédie des connaissances actuelles mathématiques**

INTRODUCTION : (5 min)
Du point de vue général la rotation est une transformation ponctuelle d'une figure géométrique, telle que tous ses points décrivent des arcs de cercles de même angle au sommet et de même axe.
En classe de **4^{e}**, la rotation est définie comme par la donnée de son centre, d'un point et de son image.
C'est dire que nous tiendrons toujours compte de la position initiale et de la position finale de la figure considérée.
Toutefois les rotations trouvent leurs applications dans beaucoup de domaine tels que : l'agriculture, arrosage avec un tourniquet ; en transport, elles entrent même dans la construction des automobiles,…

« Les triangles dont les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 3 ; 4 et 5 sont rectangles»
PYTHAGORE

PLAN DU COURS

DEROULEMENT DU COURS

I ° ANGLE AU CENTRE :

I – 1) Activité :

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r.

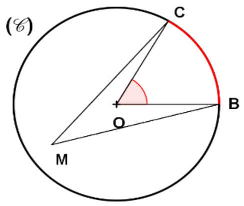
1) Marque sur le cercle (C), deux points distincts A et B. **2)** Trace les demi- droites [OA) ; [OB)

3) Que représente le sommet de l'angle $\widehat{AOB}$ pour le cercle (C) ? Un tel angle est dit angle au centre.

I – 2) Définition et Vocabulaire :

Soit un cercle (C) de centre O et de rayon r.

On appelle **angle au centre,** tout angle dont le sommet est le centre du cercle.



Exemples :

L'angle $\widehat{AOB}$ est un ***angle au centre*** qui intercepte **l'arc $\widehat{AB}$**

Contre- exemple :

L'angle $\widehat{BMC}$ n'est pas un angle au centre car son sommet n'est pas le centre du cercle.

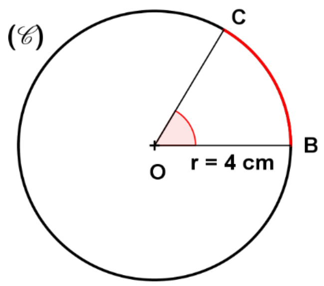
I – 3) Longueur d'un arc de cercle :

La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.

Soit A et B deux points d'un cercle de centre O et de rayon r.

La longueur **l** de arc $\widehat{AB}$ est On sait que $180° \longrightarrow r.\pi$

$45° \longrightarrow \ell$



$\ell = \frac{\pi\,\alpha}{180°} R$ où α = mes$\widehat{AOB}$ en degré.

Exemple : Si $\propto$ = 45° et r = 4 cm

D'où x = $4\,\frac{45°\ X\ \pi}{180°}$ =

Donc l = 4 X $\frac{45°\ X\ \pi\ rad}{180°}$ = 3,14

✓ **Remarque :**

Si la mesure de l'angle au centre α est en radian alors la longueur de l de l'arc est :

l = R α

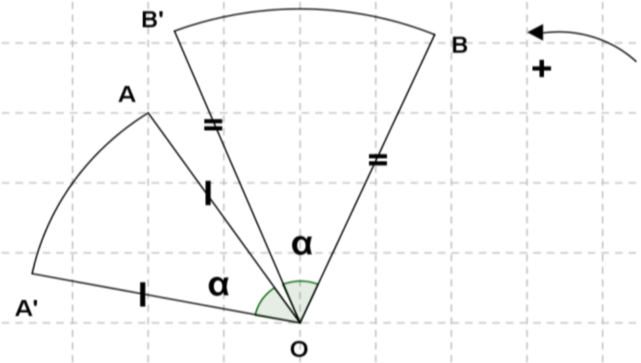
I – 4) Exercice d’application :

1) Construis un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon r = 2 cm puis marque sur ce cercle deux points distincts M et N.
2) Quel est l’angle au centre ? Cite l’arc de cercle intercepté par cet angle au centre.
3) Calcule la longueur de l’arc $\widehat{\mathbf{MN}}$ si l’angle $\widehat{MON} = 80°$.

II° ROTATION :

II – 1) Activité :

1) Marque trois points O ; A ; A’ et B tel que OA = OA’



2) Construis le point B’ tel que OB = OB’ et $\widehat{BOB'} = \widehat{AOA'}$ en tournant dans le sens des aiguilles d’une montre.

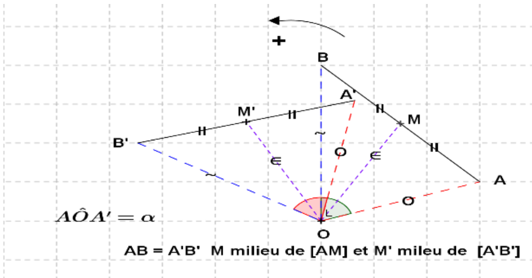
II – 2) Définition :

Soient O, A et A' trois points distincts du plan tels que : OA = OA'.
Dire qu'un point B' est l'image d'un point B par la rotation de centre O qui transforme A en A' signifie que : OB = OB' et $\widehat{BOB'} = \widehat{AOA'}$

Le sens de déplacement de B vers B' est celui de A vers A'.

II – 3) Construction de l’image d’un point par une rotation : **(figure ci- contre)**

II – 4) Propriétés :



- ✓ Une rotation conserve les longueurs.

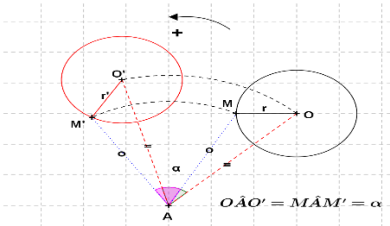
L’image d’un segment est un segment de même longueur.

- ✓ Une rotation conserve l’alignement :

l’image d’une droite est une droite.

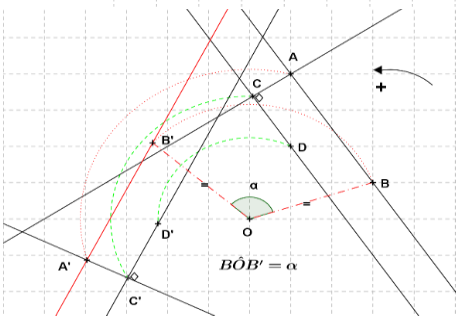
- ✓ Dans une rotation

l'image d'une demi-droite est une demi-droite.



- ✓ Dans une rotation l'image

d'un cercle est un cercle de même rayon.
Une rotation conserve les angles et les aires.



- ✓ Une rotation conserve le ***parallélisme*** :

L’image de deux droites parallèles est deux droites parallèles.

- ✓ Une rotation conserve le ***l'orthogonalité*** :

L’image de deux droites perpendiculaires est deux droites perpendiculaires.

II – 5) Exercice d’application :

1) Construis un triangle équilatéral ABC tel que AB = 4 cm et O un point extérieur au triangle.

2) Construis le triangle A'B'C' image du triangle ABC par la rotation d'angle $\widehat{AOA'} = 60°$
3) Démontre que A'B'C' est un triangle équilatéral.

III° POLYGONES REGULIERS :

III – 1) Activité :

1) Construis un cercle de centre O et de rayon r.
2) Place sur ce cercle les points A, B, C et D tel que les angles au centre aient la même mesure $= \frac{360°}{4} = 90°$
3) Démontre que le quadrilatère ABCD est un losange.
4) Démontre que le triangle ABC est rectangle en B.
5) En déduire que le quadrilatère ABCD est un carré.

III – 2) Définition et Exemples :

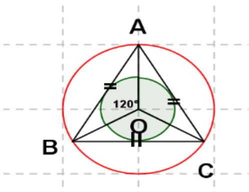
Un polygone est dit régulier s'il a tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux.

Exemples : Le triangle équilatéral, le carré, le pentagone régulier (5 côtés égaux), l'hexagone régulier (6 côtés égaux), l'octogone régulier (8 côtés égaux).....

III – 3) Construction de polygone :

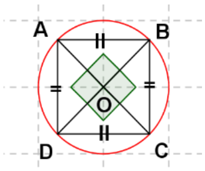
Pour construire un polygone régulier à n côtés (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 3), on construit un cercle de centre O, un point du cercle et on utilise la rotation d'angle $\frac{360°}{n}$

Triangle équilatéral : 3 côtés



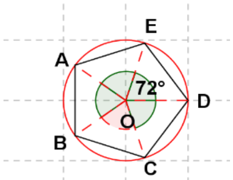
$\alpha = \frac{360°}{3} = 120°$

Carré : 4 côtés



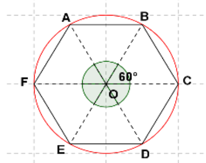
$\alpha = \frac{360°}{4} = 90°$

Pentagone régulier : 5côtés



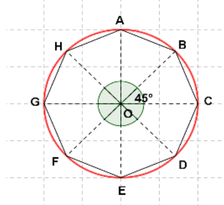
$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$

Hexagone régulier: 6côtés



$\alpha = \frac{360°}{6} = 60°$

Octogone régulier : 8côtés



$\alpha = \frac{360°}{8} = 45$

III – 4) Propriétés :

- ✓ Tout polygone régulier admet un cercle circonscrit dont le centre est celui du polygone et de rayon la distance du centre à un sommet du polygone.
- ✓ Chaque médiatrice d'un côté d'un polygone régulier est un axe de symétrie de ce polygone.
- ✓ Le centre de tout polygone régulier est son centre de symétrie.
- ✓ Tout polygone régulier admet un cercle inscrit dont le centre est celui du polygone et de rayon la distance du centre à un des côtés du polygone.
- ✓ Tout polygone régulier à **n cotés** est globalement invariant dans une rotation d'angle $\alpha = \frac{360°}{n}$

III – 5) Exercice d'application :

ABC est un triangle équilatéral de côté 3cm. Le cercle (C) circonscrit au triangle a pour centre I. Par la rotation de centre I et d'angle 60° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre A, a pour image D, B a pour image E et C a pour image F.

1. Construis le triangle ABC puis trace le cercle (C).
2. Justifie que les points D, E et F appartiennent au cercle.
3. Donne la nature du polygone ADBECF.
4. Indique le centre et le rayon du cercle inscrit au polygone ADBECF.

CHAPITRE VII

PROJECTION ORTHOGONALE DANS LE PLAN

DUREE : **4 HEURES**

OBJECTIF GENERAL : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de maîtriser l'utilisation la projection orthogonale pour résoudre des problèmes

OBJECTIFS SPECIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- ✓ Construire l'image par une projection orthogonale d'un point.
- ✓ Construire l'image par une projection orthogonale d'un segment.
- ✓ Restituer la propriété : « **Le milieu d'un segment** se projette au milieu du segment image. »
- ✓ Utiliser la propriété « **Le milieu d'un segment** se projette au milieu du segment image » dans la résolution de problèmes.
- ✓ Déterminer les coordonnées du milieu d'un segment connaissant celles de ses extrémités dans un repère orthonormal
- ✓ Utiliser dans un repère orthonormal la formule $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ pour :
  - ➢ calculer des carrés de longueurs et des longueurs,
  - ➢ démontrer qu'un triangle est rectangle

PREREQUIS : Triangle rectangle ; droites perpendiculaires ; milieu d'un segment ; distance 6[e]

SOURCES :

- ❖ Loi d'orientation **91.22 du 16 Février 1991 ;**
- ❖ Nouveau programme de **2006 et** Guide d'usage de Février 2010
- ❖ Manuels : CIAM 4[ème] et 3[ème], Excellence 4[ème] et 3[ème]
- ❖ **Webographie :** Recherche sur Google effectue le 04/ 07/ 2015 à 21 h 22 min
- ❖ **Encyclopédie des connaissances actuelles mathématiques**

INTRODUCTION : (5 min)

Du point de vue programme, le concept de projection orthogonale est tout à fait nouvelle même si elle a été intuitivement utilisée dans le chapitre application linéaire pour tracer sa représentation graphique.

En **mathématiques**, la **projection orthogonale** est une transformation de l'espace, une application linéaire :

- ✓ en **géométrie plane**, c'est une projection telle que les deux droites — la droite sur laquelle on projette et la direction de projection — sont perpendiculaires ;
- ✓ en **géométrie dans l'espace**, c'est une projection telle que la droite et le plan — quels que soient leurs rôles respectifs — sont perpendiculaires. La projection orthogonale est un type de perspective très utilisée en dessin (géométrie descriptive), et en infographie : la génération des figures est simple, par contre, on ne peut pas représenter l'éloignement (la taille des objets ne varie pas avec la distance).

La projection orthogonale permet de résoudre le problème de la plus courte distance d'un point à une droite, d'un point à un plan, ou plus généralement d'un point à

L'idée générale, basée sur **le théorème de Pythagore**, est que le problème de plus courte distance se ramène à une propriété d'orthogonalité.

PLAN DU COURS

DEROULEMENT DU COURS

I° PROJETE ORTHOGONAL D'UN POINT :

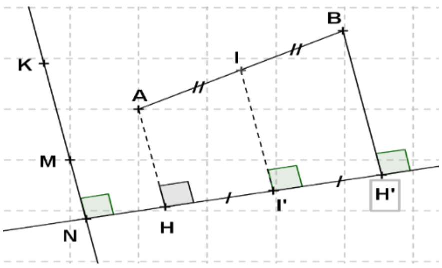
I – 1) Activité :

1) Trace une droite (D) du plan puis marque deux points A et B hors de (D).
2) Construis la perpendiculaire à (D) passant par A. Elle coupe (D) en H.
3) Construis la perpendiculaire à (D) passant par B. Elle coupe (D) en H'.
4) Soit I le milieu du segment [AB] et I' l'intersection de la perpendiculaire passant par I avec (D). Que représente I ' pour le segment image [HH′]

I – 2) Définition :

Soit (D) une droite du plan et M un point du plan. La perpendiculaire à (D) passant par M coupe (D) en un point. Ce point est appelé projeté orthogonal de M sur (D).

I – 3) Propriété :



a) Le projeté d'un segment est un segment qui peut être réduit à un point.

❖ **Remarque :**

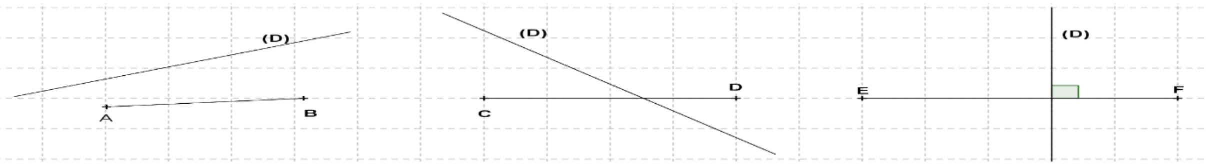
Si la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (D alors le projeté orthogonal du segment[AB] est un point

b) Le milieu d'un segment se projette au milieu du segment image.

I – 4) Exercice d'application :

Pour chacune des figures ci-dessous, une droite et un segment sont donnés.

Reproduis chaque figure et construis le projeté orthogonal du segment sur la droite



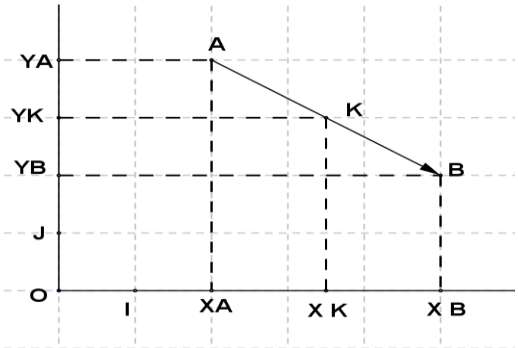
II° COORDONNEES DU MILIEU D'UN SEGMENT :

II -1) Activité :

Sur la figure ci-contre deux axes (O*x*) et (O*y*) sont perpendiculaires en O. On donne les points A $(x_A ; y_A)$ et B $(x_B ; y_B)$. Trouve les coordonnées x_K et y_K du point K milieu de [AB].

Solution :

On a K milieu de [AB] alors AK = KB
Sur l'axe (Ox) on a : AK = $x_K - x_A$ et
KB = $x_B - x_K$ D'où $x_K - x_A = x_B - x_K$ **(1)**
Sur l'axe (Oy) on a : AK = $y_K - y_A$ et
KB = $y_B - y_K$ D'où $y_K - y_A = y_B - y_K$ **(2)**
De (1) et (2) on a :
$2x_K = x_A + x_B$ et $2y_K = y_A + y_B$
D'où $x_K = \frac{x_B + x_A}{2}$ et $y_K = \frac{y_B + y_A}{2}$



II – 2) Propriété:

Le plan est muni du repère orthonormal (O, I, J) si K est le milieu du segment [AB] tel A $(x_A ; y_A)$ et B $(x_B ; y_B)$ alors **K $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.**

II – 3) Exercice d'application :

Dans le plan est muni d'un repère orthonormal. On donne deux points A (2 ; - 3) et B (7 ; - 5). Quel est le couple de coordonnées du milieu I, du segment [AB] ?

III° CARRE DE LA DISTANCE :

III – 1) Activité :

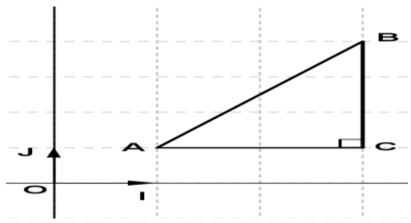
La figure ci-contre représente un plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) tel que le triangle ABC rectangle en C. Par projection orthogonale, on donne : AC = $x_B - x_A$ et CB = $y_B - y_A$
Calcule le carré AB² da la distance AB.

Solution

ABC étant rectangle en C, alors d'après le théorème de Pythagore,

on a : $AB^2 = AC^2 + CB^2$

$= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$



III – 2) Propriété :

Dans un repère orthonormal, le carré AB² de la distance entre deux points A $(x_A ; y_A)$ et B $(x_B ; y_A)$ est : **$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$**

III – 3) Exercice d'application

Dans un repère orthonormal (O ; I ; J). On donne A (3 ; 5) et B (7 ; - 4). Calcule le carré de la distance AB.

« Les triangles dont les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 3 ; 4 et 5 sont rectangles»
PYTHAGORE

CHAPITRE VIII

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

DUREE : **12 HEURES**

OBJECTIF GENERAL : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation de la géométrie dans l'espace pour résoudre des problèmes.

OBJECTIFS SPECICFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- ✓ Restituer le vocabulaire : droites coplanaires, droites non coplanaires
- ✓ Coder un angle droit dans l'espace.
- ✓ Reconnaitre : deux droites orthogonales ; sur des solides simples une droite perpendiculaire à un plan ; sur des solides simples deux plans parallèles.
- ✓ Représenter : une droite perpendiculaire à un plan ; deux plans parallèles.
- ✓ Calculer le rayon du cercle intersection d'une sphère et d'un plan.

SOURCES :

- ❖ Loi d'orientation **91.22 du 16 Février 1991 ;**
- ❖ Nouveau programme de **2006 et** Guide d'usage de Février 2010
- ❖ Manuels : CIAM 4ème et 3ème, Excellence 4ème et 3ème
- ❖ **Webographie :** Internet sur Google le 07/ 06 / 2014 à 9 H 22 min
http://mathemitec.free.fr/index.php, consulté le 08/ 02/2011 à15h44 min
- ❖ **Encyclopédie des Mathématiques des connaissances actuelles page 81**

PREREQUIS : Notion de plan - positions relatives de droites dans le plan - type de solides : cube ; pavé ; ...

INTRODUCTION : (5 min)

L'étude de la géométrie dans l'espace en classe de 4ème obéi au principe de la continuité de l'étude des solides entamée depuis la 6ème et visant à doter l'apprenant d'un vocabulaire en plus d'une vision nette dans l'espace.

De ce point de vue, nous allons consolider et approfondir ces acquis par :

- ✓ l'introduction de certaines propriétés d'incidence dans l'espace :
- ✓ l'utilisation du théorème de Pythagore sur des figures de solides de l'espace.

Pour ce faire nous procéderons à des manipulations avec des objets réels comme des cahiers, les livres; pour illustrer leurs différentes positions dans l'espace.

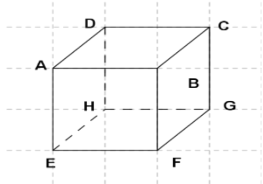
PLAN DU COURS

« Les triangles dont les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 3 ; 4 et 5 sont rectangles»
PYTHAGORE

DEROULEMENT DU COURS

I° DETERMINATION DE PLAN :

I – 1) Activité



La figure ci-contre est un cube. Chacune de ces faces est un plan.

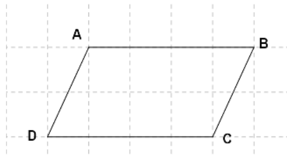
Pour déterminer chacun de ces plans utilise trois points non alignés ; ou un point et une droite d'une face ; ou deux droites sécantes ; ou deux droites parallèles contenus dans chacune de ces faces.

I – 2) Définition et représentation de plan dans l'espace :

✓ **Définition :** Un plan peut-être déterminé par **:**

- Trois points non alignés.
- Une droite et un point hors de cette droite.
- Deux droites sécantes.
- Deux droites strictement parallèles.

✓ **Représentation de plan dans l'espace :**



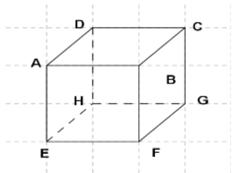
Dans l'espace, on représente généralement un plan par un parallélogramme ou par un triangle.
Donc deux droites parallèles seront toujours représentées par deux droites parallèles.

❖ **Remarque : Gardez toujours à l'esprit qu'un plan est infini, illimité.**

I – 3) Propriétés :

- **Si une droite (D) a deux points dans un plan (P) alors elle est incluse dans ce plan. On note (D) $\subset$ (P)**
- **Si une droite est incluse dans un plan (P) alors deux points quelconques de cette droite sont des points du plan.**

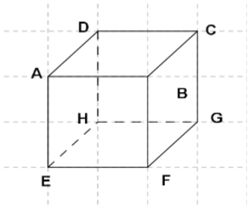
I – 4) Exercice d'application



1) Détermine deux plans à partir de trois points.
2) Détermine deux plans à partir d'un point et une droite
3) Détermine un plan à partir de deux droites sécantes.
4) Détermine un plan à partir de deux droites parallèles.

II° POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES DANS L'ESPACE :

II – 1) Activité



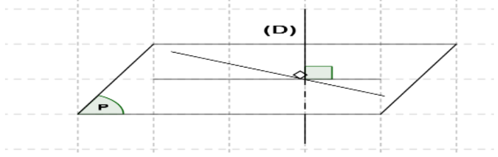
Le solide ABCDEFGH représenté ci-contre est un cube.
1) Nomme un plan contenant les droites (AF) et (AE)
2) Existe – t – il un plan contenant les droites (AD) et BF) ?
3) Quel est le plan contenant les droites (HG) et (EG) ?
4) Quel est la position relative des droites (AE) ; (AD) ; (AC) et (BC) ?

II – 2) Définitions :

Etant données (Δ) et (Δ') deux droites de l'espace.

- Si (Δ) et (Δ') sont incluses dans un même plan alors elles sont ***coplanaires***.
- Si (Δ) et (Δ') ne sont pas incluses dans un même plan alors elles sont ***non coplanaires***.

II – 3) Droites orthogonaux dans l'espace :



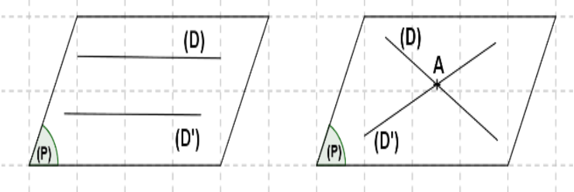
Soit (Δ) et (Δ′) deux droites de l'espace.

- Deux droites (Δ) et (Δ′) sont orthogonales si l'une est perpendiculaire à une droite (D) parallèle à l'autre.
- Si une droite est perpendiculaire à un plan alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

❖ **Remarque :**

Contrairement au plan, *dans l'espace*, deux *droites orthogonales* n'ont pas toujours un point en commun. Seules leurs directions seront toujours perpendiculaires.

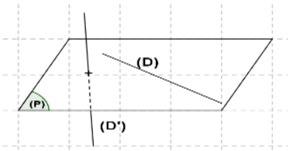
II – 4) Propriétés :



- Deux droites sont *coplanaires* si, elles sont parallèles ou sécantes (résultat connu du plan).
- Deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont coplanaires au plan (P) et parallèles dans le plan P.

❖ **Remarque :**

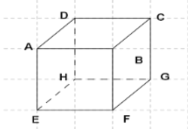
- Un résultat pratique : **deux droites sécantes ou parallèles seront toujours coplanaires** (**et réciproquement**). Souvenez-vous-en !



- Deux droites sont *non coplanaires* si, elles ne sont ni parallèles, ni sécantes (aucun plan ne peut contenir les deux simultanément).

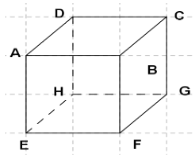
II – 5) Exercice d'application

Dans le cube ABCDEFGH nomme deux couples de droites coplanaires et deux couples de droites non coplanaires.



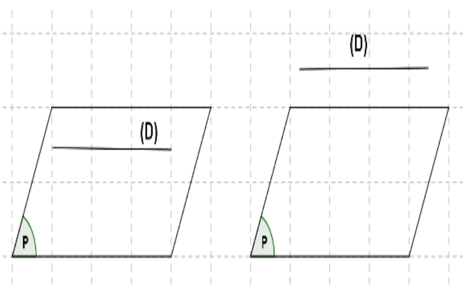
III° POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN PLAN DANS L'ESPACE :

III – 1) Activité :



1) Quelle est la position relative de la droite(EC) et du plan ABCD ?
2) Quelle est la position relative de la droite (EG) et du plan ABCD ?
3) Quelle est la position relative de la droite(EA) et du plan ABCD ?

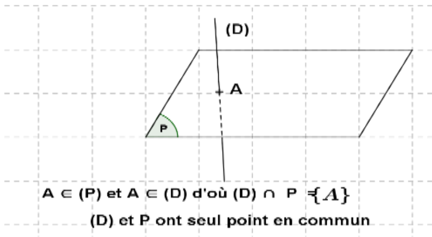
III – 2) Droite et plan parallèles



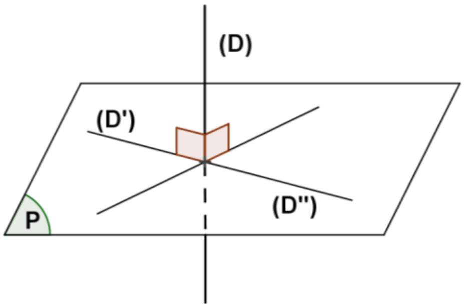
- La droite (D) est parallèle au plan P si (D) est incluse dans P ou si (D) et P n'ont aucun point commun.
- Pour démontrer qu'une droite (D) est parallèle à un plan P, il suffit de trouver une droite (D') incluse dans P et qui lui est parallèle.

III – 3) Droites et plan sécants :

- Une droite et un plan sont sécants si leur intersection est un unique point.



III – 4) Droites et plan perpendiculaires

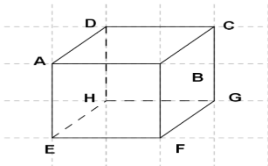


- Une droite **(D)** est perpendiculaire à un plan **P** lorsqu'elle est perpendiculaire à droites sécantes de P.
- Pour démontrer qu'une droite **(D)** est perpendiculaire à un plan **P**, il suffit de trouver deux droite **(D')** et **(D'')** incluses dans P et perpendiculaires à (D).
-

III – 5) Propriétés

- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.
- Quand deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est aussi orthogonal à l'autre.

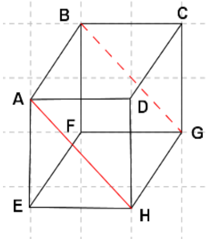
III – 6) Exercice d'application



1) Donne une droite sécante au plan (DHG)
2) Existe- t- il une droite parallèle au plan (AEF) ? Si oui nomme-la.
3) Dans la figure ABCDEFGH trouve un plan perpendiculaire au plan (BCG).
4) Démontre que la droite (HD) el le plan ((AD), C) de même que la droite (CG) et le plan ((HG), F) sont orthogonaux. En déduire la position relative des plans ((AD), C) et ((HG), F).

IV° POSITION RELATIVES DE PLANS DANS L'ESPACE :

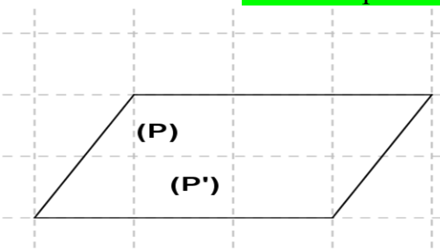
IV – 1) Activité :

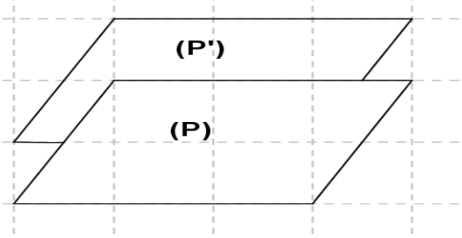


1) Quelle est la position relative des plans (ABC) et (ADC) ?
2) Quelle est la position relative des plans (AEF) et (DHG) ?
3) Quelle est l'intersection des plans (ABC) et (ABG) sécants ?
4) En déduire la position relative des plans (ABG) et (CGH) ?

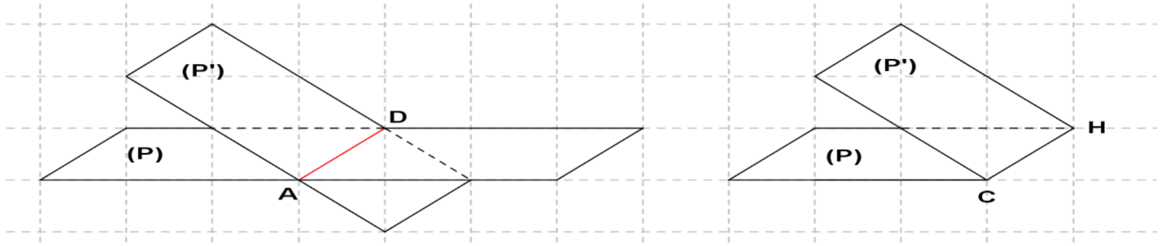
IV – 2) Définition :

✓ Deux plans sont parallèles lorsqu'ils sont confondus ou disjoints.





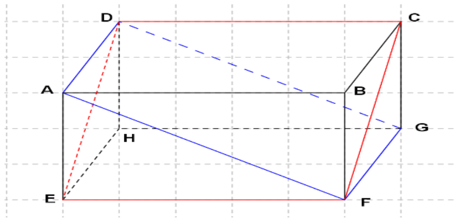
✓ Deux plans sont sécants lorsque leur intersection est une droite.



IV – 3) Propriétés :

- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.
- Quand deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est aussi orthogonale à l'autre.
- Si deux plans distincts ont un point en commun alors leur intersection est une droite passant par ce point.
- Si un plan P contient deux droites sécantes, parallèles, à deux autres droites sécantes d'un plan P' alors les plans P et P' sont parallèles.

IV – 4) Exercice d'application



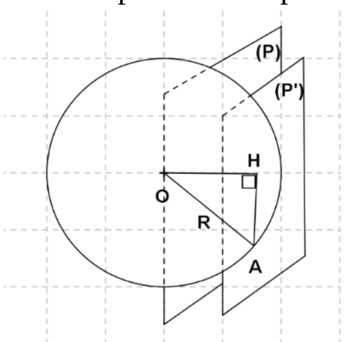
On donne la figure ci-contre représentant un pavé droit.

1) Quelle est la position relative des plans (ABC) et (DEF) ?
2) Nomme deux plans parallèles. Justifie.
3) Nomme deux plans orthogonaux. Justifie.
4) Quelle est la nature de l'intersection des plans (AFG) et (FGC) ? En déduire leur position relative.
5) Les droites (AF) et (BE) et incluses au le plan (ABF) et parallèles aux sécantes (DG) et (CH) incluses au plan (CDH). Que dire de la position relative des plans (ABF) et (CDH) ?
6) Démontre que les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.

V° SECTION D'UNE SPHERE PAR UN PLAN PARALLELE :

V – 1) Activité :

A est un point de la sphère de centre O et de rayon R. Sa section qui passe en A et H avec H le pied de la perpendiculaire issue de O, est plane et forme un petit cercle de rayon OH.



Sa section plane par un plan passant par O donne un grand cercle de rayon R.

1) Quelle est la nature du triangle AOH ? Justifie

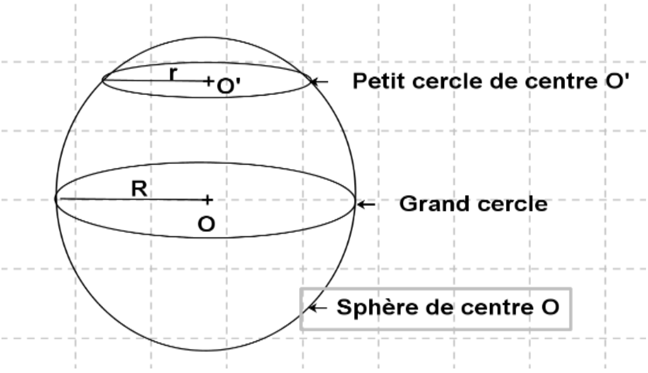
2) Détermine le carré de la distance OH en fonction de HA et R.

V – 2) Définition de la sphère :

Une sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace situés à la même distance R de O.

❖ **Remarque :** La sphère est creuse, c'est une surface.

V – 3) Vocabulaire :



✓ La section d'une sphère par un plan passant par son centre est appelée *un grand cercle* de rayon R.

✓ Les autres sections d'une sphère par un plan sont appelées *des petits cercles* de rayon r tel que ;
$r^2 = R^2 - OH^2$; H étant le pied de la perpendiculaire issue de O au plan

V- 4) Propriété

La section d'une sphère par un plan est toujours un cercle.

V – 5) Exercice d'application :

On coupe une sphère (S) de centre O et de rayon R = 15 cm par un plan passant par (HM) tel que : M soit un point de ce cercle et H le pied de la perpendiculaire issue de O au plan.

1) Démontre que le triangle OHM est rectangle en H.
2) Calcule le carré du rayon HM du petit cercle formé de centre H si OH = 12 cm
3) En déduire la longueur HM du petit rayon.