# ARITHMÉTIQUE

**Exercice 1 :**

1°) La division de $900$ par un entier naturel $b$ a pour quotient $14$ et pour reste $r$. Quelles sont les valeurs possibles de $b$ et $r$ ?

2°) Déterminer les entiers naturels $n$ dont la division euclidienne par $16$ a un reste égal au carré du quotient.

3°) Soit $\mathrm{q}$ et $\mathrm{r}$ le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b. Sachant que $\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{r}=3025$ et $\mathrm{q}=50$.Rétablir la division.

**Exercice 2 :**

1°) Démontrer par récurrence que :

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*: 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*: 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

d) $\forall\, n \geq 1 : \frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

e) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ : $3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par $5$.

f ) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n+1$$

h) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

i) $\forall\, n \geq 5 : 2^n > 5(n+1)$

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

a) $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par $11$.

b) $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par $17$.

c) $4^n+15n-1$ est divisible par $9$.

d) $n^7-n$ est divisible par $7$.

e) $n(n^4-1)$ est multiple de $5$.

**Exercice 3 :**

**I/** 1°) Déterminer suivants les valeurs de l'entier naturel $n$, les restes de la division euclidienne de : $5^n$ par $11$ ; $2^n$ par $5$ ; $6^n$ par $11$

2°) Déterminer le reste de la division euclidienne de :

$2^{2019}$ par $5$ ; $7^{2002}+2$ par $9$ ; $11^{1999}$ par $7$

**II/** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a) $14x+21y=7$ ; $5\mathrm{p}+3\mathrm{q}=7$ ; $4u-8v=3$

Malamine Diakité

b) $11u - 7v = -4$ ; $7x - 21y = 4$ ; $34p - 15q = 2$

c) $5x + 3y = 7$ ; $11x - 26y = 1$ ; $2x - 3y = 3$

**III/**1°) On désigne respectivement par $a$ et $b$ (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur mesurées en mètres d'un rectangle. Sachant que $a = 72$ et que le plus petit multiple commun à $a$ et $b$ est $216$, quelles sont les valeurs possibles de $b$ ?

2°) Trouver les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier $240$. Calculer l'entier naturel $n$ tel que $n^2 - 240$ est un carré parfait.

**<u>Exercice 4</u> :**

1) Soit l'entier naturel $\mathrm{N} = 1323$.

a) Décomposer N en produit de facteur premier.

b) Déterminer le nombre de diviseurs de N et trouver tous les diviseurs de N.

c) Écrire N dans le système de numération de base 2 et 3.

2) Déterminer $n$ entier naturel pour que $A_n = n^2 + n + 12$ soit divisible par $B_n = n + 1$.

**<u>Exercice 5</u> :**

**I-**Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations et systèmes suivants :

a) $5x \equiv 1[6]$ ; $15x \equiv 25[35]$ ; $424 + 161x \equiv 0[16]$ ; $x^2 + 2x \equiv 6[9]$

b) $x \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ : $\dot{2}x + \dot{1} = \dot{0}$

$x \in (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$ : $x^2 - \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0}$

$x \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ : $x^2 + x + \dot{6} = \dot{0}$ ; $\begin{cases} \dot{2}x - \dot{4}y = \dot{2} \\ x + \dot{5}y = \dot{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 1[4] \end{cases}$ ; $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 9x \equiv 4[11] \end{cases}$ ; $\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 0 \\ x \cdot y = -1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x \equiv 3[11] \\ x \equiv 4[15] \end{cases}$

**II/**1°) Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ dans la base dix. Déterminer $x$ et $y$ pour qu'il soit divisible par $2$ et $9$.

2°) Un nombre s'écrit $\overline{724x5}$ dans le système décimal. Déterminer $x$ pour qu'il soit divisible par $9$.

3°) Un nombre s'écrit $\overline{28x75y}$ dans le système décimal. Déterminer $x$ et $y$ pour qu'il soit divisible par $3$ et par $11$.

4°) Déterminer les entiers naturels $n$ et $p$ tels que : $n^2 - p^2 = 28$

**<u>Exercice 6</u> :**

1°) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$les systèmes suivants:

a) $\begin{cases} x + y = 60 \\ \mathrm{PGCD}(x\,, y) = 12 \end{cases}$ ; b) $\begin{cases} \mathrm{PGCD}(x, y) = 27 \\ \mathrm{PPCM}(x, y) = 108 \end{cases}$ ; c) $\begin{cases} \mathrm{PGCD}(x, y) = 13 \\ x \cdot y = 14196 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \mathrm{PPCM}(x, y) = 168 \\ x \cdot y = 1008 \end{cases}$ ; e) $\begin{cases} x + y = 56 \\ \mathrm{PPCM}(x, y) = 105 \end{cases}$ ; f) $\begin{cases} \mathrm{PGCD}(x; y) = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases}$

g) $\mathrm{PPCM}(x; y) + \mathrm{PGCD}(x; y) = y + 9$ ; h) $2(x \vee y) + 3(x \wedge y) = 78$

Malamine Diakité

i) $\begin{cases} x+y=651 \\ \frac{x\vee y}{x\wedge y}=108 \end{cases}$ ; j) $\begin{cases} x\vee y=120 \\ x^2+y^2=801 \end{cases}$ ; k) $\begin{cases} x+y=96 \\ \text{PGCD}(x;y)=4 \end{cases}$

2°) Déterminer l'ensemble des couples $(a,b)$ d'entiers naturels tels que : $\text{PPCM}(a\,,b)=m$ ; $\text{PGCD}(a,b)=d$ vérifiant les relations suivantes

a) $\begin{cases} m-3d=108 \\ 10<d<15 \end{cases}$ ; b) $2m+3d=11$ ; c) $m^2-3d^2=1998$

d) $\begin{cases} m+3d=276 \\ 10<d<30 \end{cases}$

**Exercice 7 :**

**I-** Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $5$, on considère les nombres

$a=n^3-n^2-12n$ et $b=2n^2-7n-4$

1°) Montrer que $a$ et $b$ sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.

2°) On pose $\alpha=2n+1$ et $\beta=n+3$. On note $d$ le PGCD de $\alpha$ et $\beta$.

a) Établir une relation entre $\alpha$ et $\beta$ indépendante de $n$.

b) Démontre que $d$ est un diviseur de $5$.

c) Démontrer que les nombres $\alpha$ et $\beta$ sont multiples de $5$ si et seulement si $n-2$ est multiple de $5$.

3°) Montrer que $2n+1$ et $n$ sont premiers entre eux.

4°) a) Déterminer suivant les valeurs de $n$ et en fonction de $n$, le PGCD de $a$ et $b$.

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

**Exercice 8 :**

**I/** Un général décide de compter son troupe de soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de $16$ il reste $3$ soldats, il leur ordonne de se ranger en rang de $25$, il reste $5$ soldats sachant que la troupe est constituée de moins de $400$ soldats combien y'a-t-il de soldats ?

**II/** 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue $(\mathrm{p},\mathrm{q})$ : $11\mathrm{p}-7\mathrm{q}=1$.

2) a) La division euclidienne d'un entier naturel $n$ par $7$ donne pour reste $4$ ; le même entier divisé par $11$ donne pour reste $3$. Quel sera son reste dans la division par $77$ ?

b) Déterminer les valeurs de l'entier naturel $n$ inférieures à $200$.

**Exercice 9 :**

**I-**) N et M sont deux nombres tels que : N s'écrit $\overline{1a3a}^4$ et M s'écrit $\overline{bca35}^7$.

1°) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel $n$ le reste de la division de $6^n$ par $11$

2°) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $7x+y=46$

3°) Sachant que N est divisible par $11$ et que le couple $(b\,;c)$ est solution de $7x+y=46$. Donner les écritures en base $4$ de N et en base $7$ de M.

4°) Déterminer l'entier naturel $n$ tel que $\mathrm{M}^n\equiv 3[5]$.

5°) a) Écrire dans le système décimal M et N.

b) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système d'inconnues $a$ et $b$.

$$\begin{cases} \text{PPCM}(a,b)=\mathrm{M}-\mathrm{N} \\ \text{PGCD}(a,b)=5\mathrm{N}+14 \end{cases}$$



Malamine Diakité

**Exercice 10 :**

On note $n$ un entier non nul, p l'entier naturel $3n+1$ et q l'entier naturel $5n-1$.

1°) Démontrer que le PGCD de p et q est diviseur de $8$.

2°) Pour quelles valeurs de $n$, ce PGCD est-il égal à $8$ ? Calculer alors le PPCM de p et q.

**Exercice 11 :**

1°) Trouver trois entiers naturels $a, b, c$ différents de $1$, premiers entre eux deux à deux et tels que : $a \times b \times c = 495$ .

2°) $x, y, z$ étant des chiffres de la base dix, on considère le nombre $A = \overline{x13y8z}$ en base dix. Déterminer tous les triplets $(x, y, z)$ pour lesquelles A est divisible par $495$.

**Exercice 12 :**

Soit le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$

1°) Déterminer un couple d'entier $(\alpha; \beta)$solution de $23\alpha + 7\beta = 1$.

2°) En déduire un couple $(u_0; v_0)$ solution de l'équation ci-dessous puis résoudre complètement cette équation : $23u - 7v = -6$.

3°) Démontrer que $x$ est solution de (S) si et seulement si il existe $(u; v)$ couple d'entier vérifiant : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$

En déduire l'ensemble des solutions de (S).

4°) Déterminer la plus petite solution entier naturel $x_0$ divisible par $16$.

**Exercice 13 :**

1°) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_1)$ : $11x + 8y = 79$.

a) Montrer que si $(x, y)$ est solution de $(E_1)$ alors $y \equiv 3[11]$

b) Résoudre alors l'équation $(E_1)$.

2°) Le prix total de $41$ pièces détachées, réparties en trois lots, est de $48000$ F.

- Le prix d'une pièce du premier lot est de $4800$ F.
- Le prix d'une pièce du deuxième lot est de $3600$ F.
- Le prix d'une pièce du troisième lot est de $400$ F.

Déterminer le nombre de pièces de chaque lot.

**Exercice 14 :**

1°) a) Montrer en utilisant l'algorithme d'Euclide qu'il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que : $324u + 245v = 1$.

b) Déduire de ce qui précède une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E) : $324u - 245v = 7$ et résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ cette équation

2°) On considère la fraction $A(n) = \frac{n+16}{n-2}$ où $n$ est un entier naturel strictement supérieure à $2$.

a) Montrer que l'on peut écrire $A(n)$ sous la forme : $a + \frac{b}{n-2}$ où $a$ et $b$ sont deux entiers naturels à déterminer.

b) Pour quelles valeurs de $n$, $A(n)$ est-il un entier naturel ?

c) Pour quelles valeurs de $n$, $A(n)$ est-il irréductible ?

3°) Déterminer l'entier naturel $n$ tel que $2 \times 3^n + 1$ soit divisible par $11$.



Malamine Diakité

4°) Trouver les couples d'entiers naturels $(a\,, b)$ tels que :

$$2m - d = 220 \text{ où } m = a \vee b \text{ et } d = a \wedge b.$$

**Exercice 15 :**

1°) Déterminer tous les couples d'entiers naturels $a$ et $b$ $(a < b)$ tels que :

$m = a \vee b$ $et$ $d = a \wedge b$ vérifient $\begin{cases} m + d = 126 \\ 5 < d < 10 \end{cases}$

2°) Effectuer la division euclidienne de $a$ par $b$ pour $a = -532$ et $b = -71$.

3°) Effectuer les opérations suivantes :

$$\overline{\mathrm{FACE}}^{16} - \overline{\mathrm{BEC}}^{16} \;;\; \overline{3421}^{5} + \overline{240}^{5} \;;\; \overline{3421}^{5} \times \overline{230}^{5}$$

**Exercice 16 :**

**I/** 1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer, suivant les valeurs de $n$ le reste de la division par $7$ de l'entier $3^n$.
En déduire le reste de la division par $7$ de l'entier naturel $(506390)^{128}$.

b) Dans le système de numération décimal, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$ .
Déterminer x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par $7$.

2. a) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres $21590$ et $9525$.

b) Déterminer l'ensemble des entiers $x$ tels que : $34x \equiv 2[15]$ .

c) Résoudre l'équation : $(x\,, y) \in \mathbb{Z}^2 : 21590x + 9525y = 1270$.

d) Quel est le chiffre des unités de l'entier naturel $7^{1980}$ écrit dans le système décimal ?

**II/** On considère l'entier naturel **A** qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

1°) Déterminer $x$ pour que :

a) **A** soit divisible par six.

b) **A** soit divisible par cinq.

c) En déduire qu'il existe $x$ tel que **A** soit divisible par trente.

2°) On donne à $x$ la valeur zéro, déterminer l'écriture décimale de **A**. Dans ce cas quel est le nombre de diviseurs positifs de **A** ? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de **A** qui sont premiers avec trois ?

**Exercice 17 :**

**I/** 1°) Montrer que : $4x^4 + 3x^2 + 1 = (2x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 1)$.

2°) En déduire que dans tout système de numération de base b supérieure ou égale à $5$ le nombre $\overline{40301}$ est divisible par $\overline{211}$.

3°) Que vaut le quotient de la division de $\overline{40301}$ par $\overline{211}$ quand $b = 9$ ?

**II/** Dans le système de numération de base $3$, un nombre s'écrit : $\overline{2101}^{3}$.

1°) Dans quel système de numération $n$ ce nombre s'écrit : $\overline{224}^{n}$ ?

2°) Existe-t-il un système de numération dans lequel il s'écrit : $\overline{174}$.

3°) Soit $\boldsymbol{a}$ un entier naturel strictement supérieur à $2$. On considère les nombres $\mathrm{N} = 2(\boldsymbol{a} - 1)$ et $\mathrm{N}' = (\boldsymbol{a} - 1)^2$. Écrire $\mathrm{N}$ et $\mathrm{N}'$ dans le système de base $\boldsymbol{a}$.

4°) Démontrer que dans tout système de numération de base $\boldsymbol{b}$
(avec **b**≥4) le nombre $\overline{1331}$ est le cube d'un entier $x$.

**III/**1°) On veut recouvrir une surface rectangulaire de $4{,}75m$ sur $3{,}61m$ avec des dalles

Malamine Diakité

carrées dont le côté mesure un nombre entier de centimètres. Quelle est la taille maximale de ces dalles ?

2°) Soit le nombre $\boldsymbol{n}$ qui s'écrit dans la base dix, $\boldsymbol{n} = y17x35$ ; trouver $x$ et $y$ pour que $\boldsymbol{n}$ soit divisible par $9$ et $11$.

**Exercice 18 :**

Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.

1°) Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur $4{,}54m$ et de largeur $3{,}75m$. On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de $33$ cm de côté. On commence la pose par un coin de la pièce comme le suggère la figure 1.

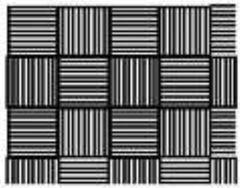

Figure 1

Calculer le nombre de carreaux non découpées qui auront été posés.

2°) Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur $4{,}55m$ et de largeur $3{,}85m$. On veut carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.

a) Donner la liste des diviseurs de $455$ puis la liste des diviseurs de $385$.

b) Donner la liste des diviseurs communs à $455$ et $385$.

c) Quel est alors le plus grand côté possible des dalles carrées à utiliser pour carreler cette cuisine ?

3°) On dispose de dalles rectangulaires de longueur $24cm$ et de largeur $15cm$.

a) Donner la liste des multiples de $24$ inférieurs à $400$, puis la liste des multiples de $15$ inférieurs à $400$.

b) Donner la liste des multiples communs à $24$ et $15$ inférieurs à $400$.

c) Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe ?

**Exercice 19 :**

I/ Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coute $5$F l'unité. Awa dit à Rokia, je dispose d'un montant égal à $m_1$ Francs et Rokia répond, moi aussi j'ai une somme égale à $m_2$ Francs.

L'entier $m_1$ s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit et $m_2$ s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de numération de base sept.

1°) Déterminer les chiffres $x$ et $y$ pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.

2°) Déterminer le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.

3°) a) Décomposer $m_1$ et $m_2$ en produit de facteur premiers.

b) En déduire le nombre de diviseurs de $m_1$ et $m_2$ puis le $\mathrm{PGCD}(m_1 \,;\, m_2)$

4°) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1\mathrm{u} + m_2\mathrm{v} = 5$ où $\mathrm{u}$ et $\mathrm{v}$ sont deux entiers relatifs.



Malamine Diakité

**II/** Le vieux Moussa a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres $x, y, z, t$ et $h$ dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

* Le $1^{er}$ chiffre est pair ;
* La somme des deux premiers chiffres est $15$ ;
* Le troisième est la différence des deux premiers (le $1^{er}$ *moins le* $2^{\text{ème}}$) ;
* Le $1^{er}$ chiffre est le produit du troisième par le quatrième ;
* Le nombre est divisible par $9$.

Quelle est la combinaison cherchée ?

**Exercice 20 :**

On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x\,, y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

1°) a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2°) Soit $N$ un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a\,, b)$ de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

a) Montrer que le couple $(a, -b)$ est solution de (E).

b) Quel est le reste, dans la division de $N$ par $40$ ?

3°) a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$ , où $(x\,;\, y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b) Au VIII$^e$ siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé $100$ pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé $8$ pièces chacun et les femmes a dépensé $5$ pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe.

**Exercice 21 :**

1°) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $x^3 - y^3 = 631$.

2°) a) Trouver le reste de la division euclidienne de $111$ par $7$ et de $10^n$ par $7$ suivant les valeurs de l'entier naturel $n$.

b) Soit l'entier naturel N = 999 888 777 666 555 444 333 222 111.

- Montrer que N peut s'écrire en fonction de $111$.
- Quel est le reste de la division euclidienne de N par $7$

**Exercice 22 :**

**I**/ 1) On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions $525\ m$ et $285\ m$. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calculer :

a) La distance comprise entre deux arbres.

b) Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

2) On considère l'équation $(\boldsymbol{E})$ : $11x - 26y = 1$, où $x$ et $y$ désignent deux nombres entiers relatifs.

Malamine Diakité

a) Vérifie que le couple $(-7\ ;\ -3)$ est une solution de $(\boldsymbol{E})$.

b) Résous alors l'équation $(\boldsymbol{E})$.

c) En déduis le couple d'entiers relatifs $(\mathrm{p}, \mathrm{q})$ solution de $(\boldsymbol{E})$ tel que : $0 \leq \mathrm{p} \leq 25$

**II/** On appelle nombre triangulaire tout entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{\mathrm{a}^2+\mathrm{a}}{2}$ (avec $\mathrm{a} \in \mathbb{N}$).

1°) Démontrer que si $n$ est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n+1$ est la somme de deux carrés.

2°) On pose $n = 3$. $4n+1$ est-il la somme de deux carrés d'entiers ?
Étudier la réciproque de la propriété **1°)**.

Malamine Diakité

# CORRIGÉS :

1°) Les valeurs possibles de $b$ et $r$ sont : $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$

$a = 900\,;q = 14$

On a : $a = bq + r \Rightarrow 900 = 14b + r \Leftrightarrow r = 900 - 14b$

$\begin{cases} 0 \leq r < b \\ r = 900 - 14b \end{cases}$ ; en remplaçant $r$ dans l'encadrement

On aura $\begin{cases} 0 \leq 900 - 14b \\ 900 - 14b < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq 64{,}28 \\ b > 60 \end{cases} \Leftrightarrow 60 < b \leq 64{,}28$

donc $b \in \{61; 62; 63; 64\}$, pour $r$ on remplace les différentes valeurs de $b$ dans $r = 900 - 14b$.

* Si $b = 61 \Rightarrow r = 900 - 14(61) \Leftrightarrow \boxed{r = 46\,;b = 61}$
* Si $b = 62 \Rightarrow r = 900 - 14(62) \Leftrightarrow \boxed{r = 32\,;b = 62}$
* Si $b = 63 \Rightarrow r = 900 - 14(63) \Leftrightarrow \boxed{r = 18\,;b = 63}$
* Si $b = 64 \Rightarrow r = 900 - 14(64) \Leftrightarrow \boxed{r = 4\,;b = 64}$

2°) Déterminons les entiers naturels $n$ : $\begin{array}{c|c} n & 16 \\ \hline r & q \end{array}$

$r = q^2$

$\begin{cases} 0 \leq r < b \text{ or } b = 16 \\ n = 16q + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq q^2 < 16 \\ n = 16q + q^2 \end{cases}$

$0 \leq q^2 < 16 \Rightarrow 0 \leq q < 4$ donc $q \in \{0; 1; 2; 3\}$

* Si $q = 0 \Rightarrow n = 16(0) + (0)^2 \Leftrightarrow \boxed{n = 0\,;q = 0}$
* Si $q = 1 \Rightarrow n = 16(1) + (1)^2 \Leftrightarrow \boxed{n = 17\,;q = 1}$
* Si $q = 2 \Rightarrow n = 16(2) + (2)^2 \Leftrightarrow \boxed{n = 36\,;q = 2}$
* Si $q = 3 \Rightarrow n = 16(3) + (3)^2 \Leftrightarrow \boxed{n = 57\,;q = 3}$

3°) Rétablissons la division : $\mathrm{a + b + r = 3025}$ et $\mathrm{q = 50}$

Or $\mathrm{a = bq + r}$ et $\mathrm{0 \leq r < b}$

$\mathrm{a = 50b + r \Rightarrow 51b + 2r = 3025} \Rightarrow \boxed{\mathrm{r = \frac{3025-51b}{2}}}$

$$\mathrm{0 \leq r < b}$$

$$\mathrm{0 \leq \frac{3025-51b}{2} < b}$$

$$\mathrm{0 \leq 3025 - 51b < 2b}$$

$\begin{cases} \mathrm{0 \leq 3025 - 51b} \\ \mathrm{3025 - 51b < 2b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{51b \leq 3025} \\ \mathrm{53b > 3025} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{b \leq 59{,}31} \\ \mathrm{b > 57{,}07} \end{cases}$

donc $\mathrm{57{,}07 < b \leq 59{,}31}$ ; alors $\mathrm{b \in \{58; 59\}}$

* Si $\mathrm{b = 58 \Rightarrow r = \frac{3025-51(58)}{2} = \frac{67}{2}} \notin \mathbb{N}$
* Si $\mathrm{b = 59 \Rightarrow r = \frac{3025-51(59)}{2} = 8} \Rightarrow \boxed{\mathrm{b = 59\,;r = 8}}$

On a : $\mathrm{a = 50b + r = 50(59) + 8} \Rightarrow \boxed{\mathrm{a = 2958}}$

Malamine Diakité

**Exercice 2 :**

1°) Démontrons par récurrence :

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*: 1+2+3+\cdots\cdots +n = \frac{n(n+1)}{2}$

Si $n=1$, on a : $1 = \frac{1(1+1)}{2} \Leftrightarrow 1 = 1$ vraie.

Supposons la relation vraie à l'ordre $P(n)$ et démontrons à l'ordre $P(n+1)$.

$$\underbrace{1+2+3+\cdots\cdots +n}_{P(n)} + \underbrace{n+1}_{P(n+1)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Or $P(n)+P(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$

$P(n)+P(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ; Alors $P(n+1)$ est vraie

donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*: 1+2+3+\cdots\cdots +n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*: 1+3+5+\cdots\cdots +(2n-1) = n^2$

Si $n=1$, on a : $1 = 1^2 \Leftrightarrow 1 = 1$ vraie.

Supposons la relation vraie à l'ordre $P(n)$ et démontrons à l'ordre $P(n+1)$.

$$\underbrace{1+3+5+\cdots\cdots +(2n-1)}_{P(n)} + \underbrace{2n+1}_{P(n+1)} = (n+1)^2$$

Or $P(n)+P(n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$

$P(n)+P(n+1) = (n+1)^2$ ; Alors $P(n+1)$ est vraie

donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*: 1+3+5+\cdots\cdots +(2n-1) = n^2$

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = 6+24+\cdots\cdots +n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Si $n=1$, on a : $6 = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} \Leftrightarrow 6 = 6$ vraie.

Supposons la relation vraie à l'ordre $P(n)$ et démontrons à l'ordre $P(n+1)$.

$$\underbrace{6+24+\cdots\cdots +n(n+1)(n+2)}_{P(n)} + \underbrace{(n+1)(n+2)(n+3)}_{P(n+1)} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

Or $P(n)+P(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)+4(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

$P(n)+P(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$ ; Alors $P(n+1)$ est vraie

donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*: 6+24+\cdots\cdots +n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

d) $\forall\, n \geq 1$ : $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Si $n=1$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ Vraie

Supposons la relation vraie à l'ordre $P(n)$ et démontrons à l'ordre $P(n+1)$.

$\underbrace{\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}}_{P(n)}+\underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{P(n+1)}=\frac{n+1}{n+2}$

Or $P(n)+P(n+1)=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$

$P(n)+P(n+1)=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$ ; alors $P(n+1)$ est vraie

donc $\forall\, n\geq 1:\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

e) $\forall\, n \in \mathbb{N};\ 3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par $5$

Si $n=0$, on a : $3^2+2^4=25$ ; $25$ est divisible par $5$ Vraie.

Supposons la relation vraie à l'ordre $P(n)$ et démontrons à l'ordre $P(n+1)$.

$3^{3(n+1)+2}+2^{(n+1)+4}=3^{3n+2}\times3^3+2^{n+4}\times2=3^{3n+2}\times27+2^{n+4}\times2$

$=3^{3n+2}\times(25+2)+2^{n+4}\times2=2(3^{3n+2}+2^{n+4})+5\times5\times3^{3n+2}$

Puisque $3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par $5$, il existe un nombre $k$ tel que :

$3^{3n+2}+2^{n+4}=5k$ et il existe $k'$ tel que : $5\times5\times3^{3n+2}=5k'$.

D'où $3^{3(n+1)+2}+2^{(n+1)+4}=2\times5k+5k'=5(2k+k')$ est divisible par $5$ vraie.

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N};\ 3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par $5$.

2°) Démontrons :

a) $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11.

$3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11 si

$3^{n+3}-4^{4n+2}\equiv0[11]\Leftrightarrow3^n\times3^3-(4^4)^n\times4^2\equiv0[11]\Leftrightarrow3^n\times5-3^n\times5\equiv0[11]$

$0\equiv0[11]$ alors $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11.

b) $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17.

* Première méthode démonstration avec la congruence modulo :

$3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17 si

$3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}\equiv0[17]\Leftrightarrow(3\times(5^2)^n\times5+(2^3)^n\times2)\equiv0[17]$

$(3\times8^n\times5+8^n\times2)\equiv0[17]\Leftrightarrow17(8^n)=17k\equiv0[17]$

alors $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17.

* Deuxième méthode démonstration par récurrence :

Si $n=0$, on a : $3\times5^1+2^1=17$

$17$ est divisible par $17$ Vraie.

Supposons la relation vraie à l'ordre $P(n)$ et démontrons à l'ordre $P(n+1)$.

$3\times5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1}=3\times5^{2n+1}\times5^2+2^{3n+1}\times2^3$

$=3\times5^{2n+1}\times25+2^{3n+1}\times8$

$=3\times5^{2n+1}\times(17+8)+2^{3n+1}\times8$

$=17(3\times5^{2n+1})+8(3\times5^{2n+1}+2^{3n+1})$

Puisque $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par $17$, il existe un nombre $k$

tel que : $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}=17k$ et il existe $k'$ tel que : $17(3\times5^{2n+1})=17k'$

D'où $3\times5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1}=17k'+17k\times8=17(k'+8k)$ est divisible par $17$ vraie. Alors $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par $17$.

c) $4^n+15n-1$ est divisible par $9$.

* Premier méthode avec le tableau :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4^n + 15n - 1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tous les restes sont nuls alors $4^n + 15n - 1$ est divisible par $9$.

* Deuxième méthode avec la congruence modulo :

$4^0 \equiv 1[9]$ ; $4^1 \equiv 4[9]$ ; $4^2 \equiv 7[9]$ ; $4^3 \equiv 1[9]$

La période est $3$ :

- Pour $n = 3k$,

On a : $\begin{cases} 4^n = 4^{3k} \equiv 1[9] \\ 15n = 15(3k) \equiv 0[9] \\ -1 \equiv -1[9] \Rightarrow -1 \equiv 8[9] \end{cases} \Rightarrow 4^n + 15n - 1 \equiv 1 + 0 + 8[9] \Leftrightarrow 4^n + 15n - 1 \equiv 0[9]$

- Pour $n = 3k + 1$,

On a : $\begin{cases} 4^n = 4^{3k+1} \equiv 4[9] \\ 15n = 15(3k+1) \equiv 6[9] \\ -1 \equiv -1[9] \Rightarrow -1 \equiv 8[9] \end{cases} \Rightarrow 4^n + 15n - 1 \equiv 4 + 6 + 8[9] \Leftrightarrow 4^n + 15n - 1 \equiv 0[9]$

- Pour $n = 3k + 2$,

On a : $\begin{cases} 4^n = 4^{3k+2} \equiv 7[9] \\ 15n = 15(3k+2) \equiv 3[9] \\ -1 \equiv -1[9] \Rightarrow -1 \equiv 8[9] \end{cases} \Rightarrow 4^n + 15n - 1 \equiv 7 + 3 + 8[9] \Leftrightarrow 4^n + 15n - 1 \equiv 0[9]$

Tous les restes sont nuls alors $4^n + 15n - 1$ est divisible par $9$.

d) $n^7 - n$ est divisible par 7.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^7 - n$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tous les restes sont nuls alors $n^7 - n$ est divisible par $7$

**Exercice 3 :**

**I/** 1°) Déterminons suivants les valeurs de l'entier naturel $n$, les restes de la division euclidienne :

* De $5^n$ par $11$ :

$5^0 \equiv 1[11]$ | La période est $5$ donc :
$5^1 \equiv 5[11]$ | - Pour $n = 5k$, on a : $5^{5k} \equiv 1[11]$
$5^2 \equiv 3[11]$ | - Pour $n = 5k + 1$, on a : $5^{5k+1} \equiv 5[11]$
$5^3 \equiv 4[11]$ | - Pour $n = 5k + 2$, on a : $5^{5k+2} \equiv 3[11]$
$5^4 \equiv 9[11]$ | - Pour $n = 5k + 3$, on a : $5^{5k+3} \equiv 4[11]$
$5^5 \equiv 1[11]$ | - Pour $n = 5k + 4$, on a : $5^{5k+4} \equiv 9[11]$

Les restes de la division de $5^n$ par $11$ sont : $1; 3; 4; 5; 9$.

* De $2^n$ par $5$ :

$2^0 \equiv 1[5]$ | La période est $4$ donc :
$2^1 \equiv 2[5]$ | - Pour $n = 4k$, on a : $2^{4k} \equiv 1[5]$
$2^2 \equiv 4[5]$ | - Pour $n = 4k + 1$, on a : $2^{4k+1} \equiv 2[5]$
$2^3 \equiv 3[5]$ | - Pour $n = 4k + 2$, on a : $2^{4k+2} \equiv 4[5]$
$2^4 \equiv 1[5]$ | - Pour $n = 4k + 3$, on a : $2^{4k+3} \equiv 3[5]$

Mamine Diakité

Les restes de la division de $2^n$ par $5$ sont : $1; 2; 3; 4$.

2°) Déterminons le reste de la division euclidienne :

* De $3^{2019}$ par $5$ :

| | |
|---|---|
| $3^0 \equiv 1[5]$ | La période est $4$ donc : |
| $3^1 \equiv 3[5]$ | - Pour $n = 4k$, on a : $3^{4k} \equiv 1[5]$ |
| $3^2 \equiv 4[5]$ | - Pour $n = 4k+1$, on a : $3^{4k+1} \equiv 3[5]$ |
| $3^3 \equiv 2[5]$ | - Pour $n = 4k+2$, on a : $3^{4k+2} \equiv 4[5]$ |
| $3^4 \equiv 1[5]$ | - Pour $n = 4k+3$, on a : $3^{4k+3} \equiv 2[5]$ |

La division euclidienne de $2019$ par $4$ nous donne : $2019 = 4(504) + 3 = 4k + 3$ or $3^{4k+3} \equiv 2[5]$ alors le reste de la division euclidienne de $3^{2019}$ par $5$ est $2$.

* De $11^{1999}$ par $7$ :

| | |
|---|---|
| $11^0 \equiv 1[7]$ | La période est $3$ donc : |
| $11^1 \equiv 4[7]$ | - Pour $n = 3k$, on a : $11^{3k} \equiv 1[7]$ |
| $11^2 \equiv 2[7]$ | - Pour $n = 3k+1$, on a : $11^{3k+1} \equiv 4[7]$ |
| $11^3 \equiv 1[7]$ | - Pour $n = 3k+2$, on a : $11^{3k+2} \equiv 2[7]$ |

La division euclidienne de $1999$ par $3$ nous donne : $1999 = 3(666) + 1 = 3k + 1$ or $11^{3k+1} \equiv 4[7]$ alors le reste de la division euclidienne de $11^{1999}$ par $7$ est $4$.

**II/** Résolvons dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a) Méthode par congruence :

* $14x + 21y = 7$ ; $14 \wedge 21 = 7$; $7/7$ donc $2x + 3y = 1$

$2x = 1 - 3y \Leftrightarrow 2x \equiv 1[3] \Leftrightarrow 4x \equiv 2[3] \Rightarrow x = 3k + 2$. En remplaçant $x$ par sa valeur dans l'équation $2x + 3y = 1$, on obtient $y = -2k - 1$.

$$\boxed{S = \{(3k+2\,;\ -2k-1); k \in \mathbb{Z}\}}$$

* $5\text{p} + 3\text{q} = 7$ ; $5 \wedge 3 = 1$; $7/1$ donc $5\text{p} + 3\text{q} = 7$

$5\text{p} = 7 - 3\text{q} \Leftrightarrow 5\text{p} \equiv 1[3] \Leftrightarrow 10\text{p} \equiv 2[3] \Rightarrow \text{p} = 3k + 2$. En remplaçant $\text{p}$ par sa valeur dans l'équation $5\text{p} + 3\text{q} = 7$, on obtient $\text{q} = -5k - 1$.

$$\boxed{S = \{(3k+2\,;\ -5k-1); k \in \mathbb{Z}\}}$$

* $4u - 8v = 3$ ; $4 \wedge 8 = 4$; $4$ ne divise pas 3 donc $\boxed{S = \emptyset}$

b) Avec l'algorithme d'Euclide :

* $11u - 7v = -4$ ; $11 \wedge 7 = 1$; $4/1$ donc $11u - 7v = -4$

Recherche de solution particulière

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $q$ | 1 | 1 | 1 | 3 |
| $a$ | 11 | 7 | 4 | 3 |
| $b$ | 7 | 4 | 3 | 1 |
| $r$ | 4 | 3 | 1 | 0 |

$a = bq + r \Rightarrow r = a - bq$ ;

$1 = 4 - 3(1)$ ; $3 = 7 - 4(1)$ ; $4 = 11 - 7(1)$

On a : $1 = 4 - 3 = 4 - 7 + 4$

$1 = 4(2) - 7 = 2(11 - 7) - 7$
$1 = 11(2) - 7(2) - 7 = 11(2) - 7(3)$

$11(2) - 7(3) = 1$, en multipliant par $(-4)$, on obtient : $11(-8) - 7(-12) = -4$ ; une solution particulière de l'équation $11u - 7v = -4$ est le couple $(u_0; v_0) = (-8; -12)$

$$- \begin{cases} 11u - 7v = -4 \\ 11u_0 - 7v_0 = -4 \end{cases}$$
$$11(u - u_0) - 7(v - v_0) = 0$$

$11(u - u_0) - 7(v - v_0) = 0 \Leftrightarrow 11(u - u_0) = 7(v - v_0) \Rightarrow$

- $7/11(u+8) \Rightarrow$d'après Gauss $7/(u+8) \Rightarrow u + 8 = 7k \Leftrightarrow u = 7k - 8$ , $k \in \mathbb{Z}$
- $11/7(v+12) \Rightarrow$d'après Gauss $11/(v+12) \Rightarrow v + 12 = 11k$ $\Leftrightarrow v = 11k - 12$ , $k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S = \{(7k - 8 ; 11k - 12); k \in \mathbb{Z}\}}$$

* $7x - 21y = 4$ ; $7 \wedge 21 = 7$; $7$ne divise pas $4$ donc $\boxed{S = \emptyset}$

* $34p - 15q = 2$ ; $34 \wedge 15 = 1$; $2/1$ donc $34p - 15q = 2$

Recherche de solution particulière

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $q$ | 2 | 3 | 1 | 3 |
| $a$ | 34 | 15 | 4 | 3 |
| $b$ | 15 | 4 | 3 | 1 |
| $r$ | 4 | 3 | 1 | 0 |

$a = bq + r \Rightarrow r = a - bq$ ;

$1 = 4 - 3(1)$ ; $3 = 15 - 4(3)$ ; $4 = 34 - 15(2)$

On a : $1 = 4 - 3 = 4 - 15 + 4(3)$
$1 = 4(4) - 15 = 4[34 - 15(2)] - 15$
$1 = 34(4) - 15(8) - 15 = 34(4) - 15(9)$

$34(4) - 15(9) = 1$, en multipliant par $(2)$, on obtient : $34(8) - 15(18) = 2$ ; une solution particulière de l'équation $34p - 15q = 2$ est le couple $(p_0; q_0) = (8; 18)$

$$- \begin{cases} 34p - 15q = 2 \\ 34p_0 - 15q_0 = 2 \end{cases}$$
$$34(p - p_0) - 15(q - q_0) = 0$$

$34(p - p_0) - 15(q - q_0) = 0 \Leftrightarrow 34(p - p_0) = 15(q - q_0) \Rightarrow$

- $15/34(p-8) \Rightarrow$d'après Gauss $15/(p-8) \Rightarrow p - 8 = 15k$ $\Rightarrow p = 15k + 8$ , $k \in \mathbb{Z}$
- $34/15(q-18) \Rightarrow$d'après Gauss $34/(q-18) \Rightarrow q - 18 = 34k$ $\Rightarrow q = 34k + 18$ , $k \in \mathbb{Z}$

Makamine Diakité

$$\boxed{S = \{(15k + 8\,; 34k + 18); k \in \mathbb{Z}\}}$$

**III**/1°) On désigne par $a$ la longueur et $b$ la largeur du rectangle, avec $(a > b)$.

On a : $\begin{cases} a = 72 \\ \text{PPCM}(a, b) = 216 \end{cases}$

<u>Les valeurs possibles de $b$</u> :

$\begin{cases} a = 72 \\ \text{PPCM}(72, b) = 216 \end{cases}$ Soit $a = a'd\,; b = b'd$ tel que : $a' \wedge b' = 1$

$m \times d = a'd \times b'd \Rightarrow 216d = a'b'd^2 \Rightarrow 216 = a'b'd$ ; or $\left(a' = \frac{a}{d}\right)$

alors $216 = ab' \Leftrightarrow 216 = 72b' \Rightarrow b' = 3$

$a'd = 72 \Leftrightarrow a' \in D_{72} \Leftrightarrow a' \in \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72\}$

Or $a' \wedge b' = 1$ et $b' = 3$ alors $a' \in \{1; 2; 4; 8\}$

* Si $a' = 1 \Rightarrow d = \frac{a}{a'} = \frac{72}{1} = 72$ et $b = b'd = 3(72) = 216$

$216 > 72$ donc $a' = 1$ ne convient pas.

* Si $a' = 2 \Rightarrow d = \frac{a}{a'} = \frac{72}{2} = 36$ et $b = b'd = 3(36) = 108$

$108 > 72$ donc $a' = 2$ ne convient pas.

* Si $a' = 4 \Rightarrow d = \frac{a}{a'} = \frac{72}{4} = 18$ et $b = b'd = 3(18) = 54$

$54 < 72$ donc $a' = 4$ convient.

* Si $a' = 8 \Rightarrow d = \frac{a}{a'} = \frac{72}{8} = 9$ et $b = b'd = 3(9) = 27$

$27 < 72$ donc $a' = 8$ convient.

Donc les valeurs possibles de $b$ sont : $27$ et $54$

2°) * <u>Trouvons les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier $240$</u> :

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$. Le nombre de diviseur de 240 est 20 dans $\mathbb{N}$.

$$\boxed{D_{240} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 16; 20; 24; 30; 40; 48; 60; 80; 120; 240\}}$$

* <u>Calculons l'entier naturel $n$ tel que</u> : $n^2 - 240$ est un carré parfait.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

$n^2 - 240$ est un carré parfait si et seulement si $n^2 - 240 = p^2$.

$n^2 - 240 = p^2 \Leftrightarrow n^2 - p^2 = 240 \Leftrightarrow (n + p)(n - p) = 240$

$(n + p)$ et $(n - p)$ sont éléments des diviseurs de 240 ; et $(n + p) > (n - p)$.

- $240 = 1 \times 240 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 240 \\ n - p = 1 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{241}{2} \notin \mathbb{N}$
- $240 = 2 \times 120 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 120 \\ n - p = 2 \end{cases} \Rightarrow n = 61 \in \mathbb{N}$
- $240 = 3 \times 80 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 80 \\ n - p = 3 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{83}{2} \notin \mathbb{N}$
- $240 = 4 \times 60 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 60 \\ n - p = 4 \end{cases} \Rightarrow n = 32 \in \mathbb{N}$
- $240 = 5 \times 48 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 48 \\ n - p = 5 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{53}{2} \notin \mathbb{N}$

Malamine Diakité

- $240 = 6 \times 40 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 40 \\ n - p = 6 \end{cases} \Rightarrow n = 23 \in \mathbb{N}$
- $240 = 8 \times 30 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 30 \\ n - p = 8 \end{cases} \Rightarrow n = 19 \in \mathbb{N}$
- $240 = 10 \times 24 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 24 \\ n - p = 10 \end{cases} \Rightarrow n = 17 \in \mathbb{N}$
- $240 = 12 \times 20 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 20 \\ n - p = 12 \end{cases} \Rightarrow n = 16 \in \mathbb{N}$
- $240 = 15 \times 16 \Leftrightarrow \begin{cases} n + p = 16 \\ n - p = 15 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{31}{2} \notin \mathbb{N}$

Pour que $n^2 - 240$ soit un carré parfait il faut que : $\boxed{n \in \{16; 17; 19; 23; 32; 61\}}$

**Exercice 4 :**

1) Soit l'entier naturel $\mathrm{N} = 1323$.

a) $\boxed{\mathrm{N} = 3^3 \times 7^2}$.

b) * Déterminons le nombre de diviseurs de N :

nombres de diviseurs est $(3+1) \times (2+1) = 12$, donc le nombre de diviseur de N est $12$.

* Trouvons tous les diviseurs de N :

$\boxed{\mathcal{D}_{1323} = \{1; 3; 7; 9; 21; 27; 49; 63; 147; 189; 441; 1323\}}$

c) Écrivons N dans le système de numération de base 2 et 3 :

* N en base 2 : $\boxed{\mathrm{N} = 1323 = \overline{10100101011}^{2}}$

* N en base 3 : $\boxed{\mathrm{N} = 1323 = \overline{1211000}^{3}}$

2) Déterminons $n$ entier naturel pour que :

$A_n = n^2 + n + 12$ soit divisible par $B_n = n + 1$.

$$\begin{array}{r|l} n^2 + n + 12 & n + 1 \\ \cline{2-2} -n^2 - n \quad\quad & n \\ \cline{1-1} / \quad\quad / \quad 12 & \end{array}$$

alors on a : $\frac{n^2+n+12}{n+1} = n + \frac{12}{n+1}$

Pour que $A_n$ soit divisible par $B_n$, il faut que $(n+1)$ soit élément des diviseurs de 12.

Donc $(n+1) \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

- $n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0$
- $n + 1 = 2 \Rightarrow n = 1$
- $n + 1 = 3 \Rightarrow n = 2$
- $n + 1 = 4 \Rightarrow n = 3$
- $n + 1 = 6 \Rightarrow n = 5$
- $n + 1 = 12 \Rightarrow n = 11$

$A_n$ est divisible par $B_n$ si $\boxed{n \in \{0; 1; 2; 3; 5; 11\}}$

Malamine Diakité

**Exercice 5 :**

**I-**Résolvons dans $\mathbb{Z}$ les équations et systèmes suivants :

- $5x \equiv 1[6] \Rightarrow 25x \equiv 5[6] \Rightarrow x \equiv 5[6]$ alors $x = 6k + 5$

$$\boxed{S = \{6k + 5; k \in \mathbb{Z}\}}$$

- $15x \equiv 25[35] \Leftrightarrow 3x \equiv 5[7] \Leftrightarrow 15x \equiv 25[7] \Leftrightarrow x \equiv 4[7] \Rightarrow x = 7k + 4$

$$\boxed{S = \{7k + 4; k \in \mathbb{Z}\}}$$

- $424 + 161x \equiv 0[16] \Leftrightarrow 8 + x \equiv 0[16] \Leftrightarrow x \equiv 8[16] \Rightarrow x = 16k + 8$

$$\boxed{S = \{16k + 8; k\in\mathbb{Z}\}}$$

- $x^2 + 2x \equiv 6[9]$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + 2x$ | 0 | 3 | 8 | **6** | **6** | 8 | 3 | 0 | 8 |

$$\boxed{S = \{9k + 3; 9k + 4\} \text{avec } k \in \mathbb{Z}}$$

- $x \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) : \dot{2}x + \dot{1} = \dot{0}$

1ère méthode : $\dot{2}x + \dot{1} = \dot{0} \Rightarrow \dot{2}x = -\dot{1} \Rightarrow \dot{2}x = \dot{4} \Rightarrow x = \dot{2}$

$$\boxed{S = \{\dot{2}\}}$$

2ème méthode :

| $x$ | $\dot{0}$ | $\dot{1}$ | $\dot{2}$ | $\dot{3}$ | $\dot{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\dot{2}x + \dot{1}$ | $\dot{1}$ | $\dot{3}$ | $\dot{0}$ | $\dot{2}$ | $\dot{4}$ |

$$\boxed{S = \{\dot{2}\}}$$

- $x \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) : x^2 + \dot{2}x + \dot{6} = \dot{0}$

$$\Delta = (\dot{2})^2 - \dot{4}(\dot{1})(\dot{6}) = -\dot{2}\dot{0} = -\dot{6} = \dot{1}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\dot{2}-\dot{1}}{\dot{2}} = \frac{-\dot{3}}{\dot{2}} = \frac{\dot{4}}{\dot{2}} = \dot{2} \\ x_2 = \frac{-\dot{2}+\dot{1}}{\dot{2}} = \frac{-\dot{1}}{\dot{2}} = \frac{\dot{6}}{\dot{2}} = \dot{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{\dot{2}\,; \dot{3}\}}$$

d) $\begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 1[4] \end{cases}$ ; Soit le couple $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $\begin{cases} x = 3u + 2 \\ x = 4v + 1 \end{cases}$ en posant $x = x$, on aura : $3u - 4v = -1$

$3u \equiv 3[4] \Leftrightarrow u \equiv 1[4] \Rightarrow u = 4k + 1$, en remplaçant $u$ par sa valeur dans $x$ on a :
$x = 3(4k + 1) + 2 \Rightarrow x = 12k + 5$.

$$\boxed{S = \{12k + 5; k \in \mathbb{Z}\}}$$

* $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 9x \equiv 4[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x \equiv 12[7] \\ 45x \equiv 20[11] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 5[7] \\ x \equiv 9[11] \end{cases}$ ;

Soit le couple $(p; q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $\begin{cases} x = 7p + 5 \\ x = 11q + 9 \end{cases}$ en posant $x = x$

on aura : $7p - 11q = 4$

$7p = 4 + 11q \Leftrightarrow 7p \equiv 4[11] \Rightarrow 56p \equiv 32[11]$

$p \equiv 10[11] \Rightarrow p = 11k + 10$, en remplaçant $p$ par sa valeur dans $x$ on a :



Malamine Diakité

$x = 7(11k + 10) + 5 \Rightarrow x = 77k + 75$

$$\boxed{S = \{77k + 75; k \in \mathbb{Z}\}}$$

* $\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 0 \\ x \cdot y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x \cdot y} = 0 \\ x \cdot y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 & (\mathbf{1}) \\ x \cdot y = -1 & (\mathbf{2}) \end{cases}$

$x^3 + y^3 = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x^2 - x \cdot y + y^2) = 0$

Dans $\mathbb{Z}^2$ : $x + y = 0$ et $x^2 + y^2 = -1$ impossible,

Donc on a : $\begin{cases} x + y = 0 & (S) \\ x \cdot y = -1 & (P) \end{cases} \Rightarrow X^2 - 1 = 0 \Rightarrow X = \pm 1$

Alors si $y = 1; x = -1$ et si $y = -1; x = 1$

$$\boxed{S = \{(1; -1); (-1; 1)\}}$$

**II/** 1°) Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ dans la base dix.

<u>Déterminons $x$ et $y$ pour qu'il soit divisible par 2 et 9</u> :

Posons $\mathrm{N} = \overline{x43y}$ ; $0 < x \leq 9$ ; $0 \leq y \leq 9$

- N est divisible par 2, si $y \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$
- N est divisible par 9, si $x + 4 + 3 + y \equiv 0[9] \Rightarrow x + y \equiv 2[9]$

* Si $y = 0$ alors $x \equiv 2[9] \Rightarrow x = 9k + 2$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$$0 < 9k + 2 \leq 9$$
$$-0{,}22 < k \leq 0{,}77$$

alors $k = 0 \Rightarrow x = 9(0) + 2 = 2$ d'où $\boxed{(2; 0) = \overline{\mathbf{2}43\mathbf{0}}}$

* Si $y = 2$ alors $x \equiv 0[9] \Rightarrow x = 9k$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$$0 < 9k \leq 9$$
$$0 < k \leq 1$$

alors $k = 1 \Rightarrow x = 9(1) = 9$ d'où $\boxed{(9; 2) = \overline{\mathbf{9}43\mathbf{2}}}$

* Si $y = 4$ alors $x \equiv 7[9] \Rightarrow x = 9k + 7$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$$0 < 9k + 7 \leq 9$$
$$-0{,}77 < k \leq 0{,}22$$

alors $k = 0 \Rightarrow x = 9(0) + 7 = 7$ d'où $\boxed{(7; 4) = \overline{\mathbf{7}43\mathbf{4}}}$

* Si $y = 6$ alors $x \equiv 5[9] \Rightarrow x = 9k + 5$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$$0 < 9k + 5 \leq 9$$
$$-0{,}55 < k \leq 0{,}44$$

alors $k = 0 \Rightarrow x = 9(0) + 5 = 5$ d'où $\boxed{(5; 6) = \overline{\mathbf{5}43\mathbf{6}}}$

* Si $y = 8$ alors $x \equiv 3[9] \Rightarrow x = 9k + 3$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$$0 < 9k + 3 \leq 9$$
$$-0{,}33 < k \leq 0{,}66$$

alors $k = 0 \Rightarrow x = 9(0) + 3 = 3$ d'où $\boxed{(3; 8) = \overline{\mathbf{3}43\mathbf{8}}}$

$$\boxed{S = \{\mathbf{2}43\mathbf{0}; \mathbf{9}43\mathbf{2}; \mathbf{7}43\mathbf{4}; \mathbf{5}43\mathbf{6}; \mathbf{3}43\mathbf{8}\}}$$

2°) Un nombre s'écrit $\overline{724x5}$ dans le système décimal.

<u>Déterminons $x$ pour qu'il soit divisible par 9</u> :

Le nombre $\overline{724x5}$ est divisible par 9 si $7+2+4+x+5 \equiv 0[9]$
Alors $x+18 \equiv 0[9] \Rightarrow x = 9k$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq x \leq 9$.

$$0 \leq 9k \leq 9$$
$$0 \leq k \leq 1$$

Alors $k \in \{0; 1\}$ ; $\begin{cases} \text{Si } k = 0; x = 9(0) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{Si } k = 1; x = 9(1) = 9 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{724\mathbf{0}5; 724\mathbf{9}5\}}$$

4°) <u>Déterminons les entiers naturels $n$ et $p$ tels que</u> : $n^2 - p^2 = 28$

$n^2 - p^2 = 28 \Leftrightarrow (n-p)(n+p) = 28$

$(n+p)$ et $(n-p)$ sont éléments des diviseurs de $28$;

Donc $(n+p)$ et $(n-p) \in D_{28} = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$ et $(n+p) > (n-p)$.

- $28 = 1 \times 28 \Leftrightarrow \begin{cases} n+p = 28 \\ n-p = 1 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{29}{2} \notin \mathbb{N}$
- $28 = 2 \times 14 \Leftrightarrow \begin{cases} n+p = 14 \\ n-p = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} n=8 \in \mathbb{N} \\ p=6 \in \mathbb{N} \end{pmatrix}$
- $28 = 4 \times 7 \Leftrightarrow \begin{cases} n+p = 7 \\ n-p = 4 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{11}{2} \notin \mathbb{N}$

$$\boxed{S = \{(8; 6)\}}$$

**<u>Exercice 6</u> :**

1°) Résolvons dans $\mathbb{N}^2$les systèmes suivants : Soit : $\begin{cases} \text{PGCD}(x\,,y) = x \wedge y = d \\ \text{PPCM}(x, y) = x \vee y = m \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+y = 60 \\ \text{PGCD}(x\,,y) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 60 \\ d = 12 \end{cases}$ ;

Soit $x'$ et $y'$ tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = 12x'; y = 12y'$

$\begin{cases} 12x' + 12y' = 60 \\ d = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + y' = 60/12 \\ d = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + y' = 5 \\ d = 12 \end{cases}$

| | | |
|---|---|---|
| $x'$ | 1 | 2 |
| $y'$ | 4 | 3 |

Or $x' \wedge y' = 1$

- Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12x' = 12(1) = 12 \\ y = 12y' = 12(4) = 48 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 2 \\ y' = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12x' = 12(2) = 24 \\ y = 12y' = 12(3) = 36 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{(12; 48); (48; 12); (24; 36); (36; 24)\}}$$

b) $\begin{cases} \text{PGCD}(x, y) = 27 \\ \text{PPCM}(x, y) = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 27 \\ m = 108 \end{cases}$ ;

Soit $x'$ et $y'$ tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = 27x'; y = 27y'$

$m \cdot d = x \cdot y \Leftrightarrow 108 \times 27 = 27^2 x' \cdot y' \Leftrightarrow x' \cdot y' = 4$

| | | |
|---|---|---|
| $x'$ | 1 | $\cancel{2}$ |
| $y'$ | 4 | $\cancel{2}$ |

Or $x' \wedge y' = 1$



Mahamane Diakité

Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 27x' = 27(1) = 27 \\ y = 27y' = 27(4) = 108 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{(27; 108); (108; 27)\}}$$

c) $\begin{cases} \text{PGCD}(x, y) = 13 \\ x \cdot y = 14196 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 13 \\ x \cdot y = 14196 \end{cases}$ ;

Soit $x'$ et $y'$ tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = 13x'; y = 13y'$

$\begin{cases} d = 13 \\ 13x' \cdot 13y' = 14196 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 13 \\ x' \cdot y' = \frac{14196}{169} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 13 \\ x' \cdot y' = 84 \end{cases}$

| $x'$ | 1 | ~~2~~ | 3 | 4 | ~~6~~ | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | 84 | ~~42~~ | 28 | 21 | ~~14~~ | 12 |

Or $x' \wedge y' = 1$

- Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13x' = 13(1) = 13 \\ y = 13y' = 13(84) = 1092 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 3 \\ y' = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13x' = 13(3) = 39 \\ y = 13y' = 13(28) = 364 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 4 \\ y' = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13x' = 13(4) = 52 \\ y = 13y' = 13(21) = 273 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 7 \\ y' = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13x' = 13(7) = 91 \\ y = 13y' = 13(12) = 156 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{(13; 1092); (1092; 13); (39; 364); (364; 39); (52; 273); (273; 52); (91; 156); (156; 91)\}}$$

d) $\begin{cases} \text{PPCM}(x, y) = 168 \\ x \cdot y = 1008 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 168 \\ x \cdot y = 1008 \end{cases}$ ;

Soit $x'$ et $y'$ tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = x'd; y = y'd$

$m \cdot d = x \cdot y \Leftrightarrow d = \frac{x \cdot y}{m} = \frac{1008}{168} \Rightarrow d = 6$

$\begin{cases} d = 6 \\ x \cdot y = 1008 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6 \\ 6x' \cdot 6y' = 1008 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6 \\ x' \cdot y' = 28 \end{cases}$

| $x'$ | 1 | ~~2~~ | 4 |
|---|---|---|---|
| $y'$ | 28 | ~~14~~ | 7 |

Or $x' \wedge y' = 1$

- Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6x' = 6(1) = 6 \\ y = 6y' = 6(28) = 168 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 4 \\ y' = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6x' = 6(4) = 24 \\ y = 6y' = 6(7) = 42 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{(6; 168); (168; 6); (24; 42); (42; 24)\}}$$

e) $\begin{cases} x + y = 56 \\ \text{PPCM}(x, y) = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 56 \\ m = 105 \end{cases}$ ;



Mahamine Diakité

Soit $x'$ et $y'$ tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = x'd; y = y'd$

$m \cdot d = x \cdot y \Rightarrow m = x'y'd$

$\begin{cases} d(x'+y') = 56 \\ x'y'd = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x'+y') = 56/d \\ x' \cdot y' = 105/d \end{cases} \Leftrightarrow d \in D_{56} \cap D_{105}$

Or $D_{56} = \{1; 2; 4; 7; 8; 14; 28; 56\}$ et $D_{105} = \{1; 3; 5; 7; 15; 21; 35; 105\}$

Alors $d \in \{1; 7\}$

- Pour $d = 1$, on a : $\begin{cases} x' + y' = 56 & (S) \\ x' \cdot y' = 105 & (P) \end{cases}$

  L'équation $X^2 - 56X + 105 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$

- Pour $d = 7$, on a : $\begin{cases} x' + y' = 8 & (S) \\ x' \cdot y' = 15 & (P) \end{cases}$

  L'équation $X^2 - 8X + 15 = 0$ admet comme solution dans $\mathbb{N}$, $X_1 = 3$ ; $X_2 = 5$

  Alors $\begin{cases} x' = 3 \\ y' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7x' = 7(3) = 21 \\ y = 7y' = 7(5) = 35 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{(21; 35); (35; 21)\}}$$

f) $\text{PPCM}(x; y) + \text{PGCD}(x; y) = y + 9$

Soit $x'$ et $y'$ tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = x'd; y = y'd$

$m + d = y + 9$ ; or $m = x'y'd$

$x'y'd + d = y' \cdot d + 9 \Leftrightarrow d(x' \cdot y' + 1) = y' \cdot d + 9$

$x' \cdot y' + 1 = y' + \frac{9}{d}$ ; alors $d \in \{1; 3; 9\}$

- Pour $d = 1$, on a : $x' \cdot y' + 1 = y' + 9 \Rightarrow y'(x' - 1) = 8$

- Si $\begin{cases} x' - 1 = 8 \\ y' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 9 \\ y' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' = 9 \\ y = y' = 1 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' - 1 = 1 \\ y' = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 8 \end{cases}$ ; $2 \wedge 8 = 2$ ne convient pas.
- Si $\begin{cases} x' - 1 = 4 \\ y' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 5 \\ y' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' = 5 \\ y = y' = 2 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' - 1 = 2 \\ y' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' = 3 \\ y = y' = 4 \end{cases}$

- Pour $d = 3$, on a : $x' \cdot y' + 1 = y' + 3 \Rightarrow y'(x' - 1) = 2$

  - Si $\begin{cases} x' - 1 = 2 \\ y' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3x' = 3(3) = 9 \\ y = 3y' = 3(1) = 3 \end{cases}$
  - Si $\begin{cases} x' - 1 = 1 \\ y' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 2 \end{cases}$ ; $2 \wedge 2 = 2$ ne convient pas

- Pour $d = 9$, on a : $x' \cdot y' + 1 = y' + 1 \Rightarrow y'(x' - 1) = 0$

  ne convient pas car $x' \wedge y' \neq 1$

$$\boxed{S = \{(9; 1); (5; 2); (3; 4); (9; 3)\}}$$

h) $2(x \vee y) + 3(x \wedge y) = 78$

Soit $x'$ et $y'$ tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = x'd; y = y'd$

$2m + 3d = 78 \Leftrightarrow 2x'y'd + 3d = 78 \Leftrightarrow 2x'y' + 3 = \frac{78}{d}$

Malamine Diakité

alors $d \in D_{78} \Leftrightarrow d \in \{1; 2; 3; 6; 13; 26; 39; 78\}$

- Pour $d = 1$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{1} \Leftrightarrow x' \cdot y' = \frac{75}{2} \notin \mathbb{N}$
- Pour $d = 2$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{2} \Leftrightarrow x' \cdot y' = 18$

| $x'$ | 1 | 2 | $\cancel{3}$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | 18 | 9 | $\cancel{6}$ |

- Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2x' = 2(1) = 2 \\ y = 2y' = 2(18) = 36 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 2 \\ y' = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2x' = 2(2) = 4 \\ y = 2y' = 2(9) = 18 \end{cases}$

- Pour $d = 3$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{3} \Leftrightarrow x' \cdot y' = \frac{23}{2} \notin \mathbb{N}$.
- Pour $d = 6$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{6} \Leftrightarrow x' \cdot y' = 5$

| $x'$ | 1 |
|---|---|
| $y'$ | 5 |

Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6x' = 6(1) = 6 \\ y = 6y' = 6(5) = 30 \end{cases}$

- Pour $d = 13$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{13} \Leftrightarrow x' \cdot y' = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$
- Pour $d = 26$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{26} \Leftrightarrow x' \cdot y' = 0$,
  ne convient pas car ici $x' \wedge y' \neq 1$
- Pour $d = 39$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{39} \Leftrightarrow x' \cdot y' = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{N}$
- Pour $d = 78$, on a : $2x'y' + 3 = \frac{78}{78} \Leftrightarrow x' \cdot y' = -1 \notin \mathbb{N}$.

$$\boxed{S = \{(2; 36); (36; 2); (4; 18); (18; 4); (6; 30); (30; 6)\}}$$

2°) Déterminons l'ensemble des couples $(a, b)$ d'entiers naturels tels que : $PPCM(a, b) = m$ ; $PGCD(a, b) = d$ vérifiant les relations suivantes

a) $\begin{cases} m - 3d = 108 \\ 10 < d < 15 \end{cases}$ ; Soit $x'$ et $y'$ tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = x'd; y = y'd$

$m - 3d = 108 \Leftrightarrow x'y'd - 3d = 108 \Rightarrow x'y' - 3 = \frac{108}{d}$

alors $d \in D_{108} \Leftrightarrow d \in \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 27; 36; 54; 108\}$

Or $10 < d < 15 \Rightarrow d = 12$

On a : $x'y' - 3 = \frac{108}{12} \Leftrightarrow x' \cdot y' = 12$

| $x'$ | 1 | $\cancel{2}$ | 3 |
|---|---|---|---|
| $y'$ | 12 | $\cancel{6}$ | 4 |

- Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12x' = 12(1) = 12 \\ y = 12y' = 12(12) = 144 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 3 \\ y' = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12x' = 12(3) = 36 \\ y = 12y' = 12(4) = 48 \end{cases}$

Malamine Diakité

$$\boxed{S = \{(12;144);(144;12);(36;48);(48;36)\}}$$

d) $m^2 - 3d^2 = 1998$

Soit $x'$ et $y'$ tel que : $x' \wedge y' = 1$ et $x = x'd ; y = y'd$

$m^2 - 3d^2 = 1998 \Leftrightarrow (x'y'd)^2 - 3d^2 = 1998 \Rightarrow (x'y')^2 - 3 = \frac{1998}{d^2}$

Or $1998 = 2 \times 3^3 \times 37$, alors l'entier dont le carré est un diviseur de $1998$ est $3$, donc $d = 3$.

$(x'y')^2 - 3 = \frac{1998}{3^2} \Leftrightarrow x' \cdot y' = 15$

| | | |
|---|---|---|
| $x'$ | 1 | 3 |
| $y'$ | 15 | 5 |

- Si $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3x' = 3(1) = 3 \\ y = 3y' = 3(15) = 45 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} x' = 3 \\ y' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3x' = 3(3) = 9 \\ y = 3y' = 3(5) = 15 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{(3;45);(45;3);(9;15);(15;9)\}}$$

**Exercice 7 :**

**I-** Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $5$, on considère les nombres

$a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$

1°) Montrons que $a$ et $b$ sont divisibles par $n - 4$ :

- La division euclidienne de $a$ par $(n - 4)$ nous donne :

$\boxed{a = (n-4)(n^2 + 3n) = n(n-4)(n+3)}$

- La division euclidienne de $b$ par $(n - 4)$ nous donne :

$\boxed{b = (n-4)(2n+1)}$

**Conclusion :** $a$ et $b$ sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.

2°) On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$ On note $d$ le PGCD de $\alpha$ et $\beta$.

a) Établissons une relation entre $\alpha$ et $\beta$ indépendante de n :

On a : $\beta = n + 3 \Rightarrow n = \beta - 3$ ; or $\alpha = 2n + 1 = 2(\beta - 3) + 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2\beta - 5}$

b) Démontrons que $d$ est un diviseur de $5$ :

$\mathrm{PGCD}(2n + 1 ; n + 3) = 2n + 1 - n - 3 = n - 2$

$\mathrm{PGCD}(n + 3; n - 2) = n + 3 - n + 2 = 5$

$d = 5$ alors $d$ est un diviseur de $5$.

c) Démontrons que les nombres $\alpha$ et $\beta$ sont multiples de $5$ si et seulement si $n - 2$ est multiple de $5$ :

$n - 2$ est un multiple de $5$ si et seulement si : $n - 2 = 5k$

$\alpha$ et $\beta$ sont multiples de $5$ si et seulement si : $\alpha = 5k'$ et $\beta = 5k''$

$n - 2 = 5k \Rightarrow n = 5k + 2,$

En remplaçant $n$ dans $\alpha$, on aura : $\alpha = 2n + 1 = 2(5k + 2) + 1$

$\Rightarrow \alpha = 10k + 5 = 5(2k + 1) \Rightarrow \alpha = 5k'$, alors $\alpha$ est un multiple de $5$

En remplaçant $n$ dans $\beta$, on aura : $\beta = n + 3 = 5k + 2 + 3$

$\Rightarrow \beta = 5k + 5 = 5(k+1) \Rightarrow \beta = 5k''$, alors $\beta$ est un multiple de $5$

3°) Montrons que $2n+1$ et $n$ sont premiers entre eux :

Deux nombres sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à $1$.

$\text{PGCD}\big(2n+1\,;n\big) = 2n + 1 - n = n + 1$

$\text{PGCD}(n+1; n) = n + 1 - n = 1.$

Le $\text{PGCD}\big(2n+1\,;n\big) = 1$ alors $2n+1$ et $n$ sont premiers entre eux.

4°) a) Déterminons suivant les valeurs de $n$ et en fonction de $n$, le PGCD de $a$ et $b$ :

$a = n(n-4)(n+3) = n(n-4) \times 5(k+1)$

$b = (n-4)(2n+1) = (n-4) \times 5(2k+1)$

1er Cas : Si $(n-2)$ n'est pas un multiple de $5$, alors $\boxed{\text{PGCD}(a;b) = n-4}$

2er Cas : Si $(n-2)$ est un multiple de $5$, alors $\boxed{\text{PGCD}(a;b) = 5(n-4)}$

b) Vérifions les résultats obtenus dans les cas particuliers :

- Si $n = 11$ ; $11 - 2 = 9 \Rightarrow \text{PGCD}(a;b) = 11 - 4 = 7$
- Si $n = 12$ ; $12 - 2 = 10 \Rightarrow \text{PGCD}(a;b) = 5(12-4) = 40$

**Exercice 8 :**

Soit $n$ le nombre de soldats et $0 < n < 400$

On a : $\begin{cases} n \equiv 3[16] \\ n \equiv 5[25] \end{cases}$ ; Soit le couple $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $\begin{cases} n = 16x + 3 \\ n = 25y + 5 \end{cases}$ en posant $n = n$

on a : $16x - 25y = 2$ .

Utilisons l'Algorithme d'Euclide :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 |
| $a$ | 25 | 16 | 9 | 7 | 2 |
| $b$ | 16 | 9 | 7 | 2 | 1 |
| $r$ | 9 | 7 | 2 | 1 | 0 |

$a = bq + r \Rightarrow r = a - bq$

On a : $1 = 7 - 2(3)$

$2 = 9 - 7$

$7 = 16 - 9$

$9 = 25 - 16$

$1 = 7 - 2(3) = 7 - 3(9-7) = 7(4) - 9(3)$

$1 = 4(16-9) - 9(3) = 16(4) - 9(7)$

$1 = 16(4) - 7(25-16) = 16(4+7) - 25(7)$

$1 = 16(11) - 25(7)$, en multipliant le tout par $2$ on obtient : $16(22) - 25(14) = 2$

une solution particulière de l'équation $16x - 25y = 2$ est le couple $(x_0; y_0) = (22; 14)$

$$- \begin{cases} 16x - 25y = 2 \\ 16x_0 - 25y_0 = 2 \end{cases}$$

$$16(x - x_0) - 25(y - y_0) = 0$$

$16(x - x_0) - 25(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow 16(x - x_0) = 25(y - y_0) \Rightarrow$

- $25/16(x-22) \Rightarrow$d'après Gauss $25/(x-22) \Rightarrow x - 22 = 25k$

  $\Rightarrow x = 25k + 22 \;\; , k \in \mathbb{Z}$



Mohamine Diakité

- $16/25(y-14) \Rightarrow$d'après Gauss $16/(y-14) \Rightarrow y-14=16k$
  $\Rightarrow y=16k+14\ \ ,k \in \mathbb{Z}$

Remplaçons $x$ dans $n$ : $n=16x+3=16(25k+22)+3$ on obtient

$n=400k+355$

$0<n<400$

$0<400k+355<400$

$-355<400k<45$

$-0{,}88<k<0{,}11$

On a $k=0 \Rightarrow n=400(0)+355=355$ alors il y'a $355$ soldats.

**II/**-1) Résolvons dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ : $11p-7q=1$.

$11p=1+7q \Leftrightarrow 4p \equiv 1[7] \Leftrightarrow 8p \equiv 2[7] \Rightarrow p=7k+2$, en remplaçant $p$ par sa valeur dans $11p-7q=1$, on a : $11(7k+2)-7q=1 \Rightarrow q=11k+3$.

$$\boxed{S=\{(7k+2;11k+3);k \in \mathbb{Z}\}}$$

2) a) Son reste dans la division par $77$ :

$\begin{cases} n \equiv 4[7] \\ n \equiv 3[11] \end{cases}$ ; Soit le couple $(p;q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $\begin{cases} n=7q+4 \\ n=11p+3 \end{cases}$ ; en posant $n=n$, on a : $11p-7q=1$, cette équation a pour solution : $\begin{cases} p=7k+2\ \ ,k \in \mathbb{Z} \\ q=11k+3\ ,k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ; en remplaçant $p$ dans $n$, on a : $n=11p+3=11(7k+2)+3$

$\Rightarrow n=77k+25 \Leftrightarrow n \equiv 25[77]$, alors le reste de la division de $n$ par $77$ est $25$.

b) Déterminons les valeurs de l'entier naturel $n$ inférieures à $200$ :

On a : $0<n<200$

$0<77k+25<200$

$-0{,}32<k<2{,}27$ ; alors $k \in \{0;1;2\}$

- Si $k=0$, on a : $n=77k+25=77(0)+25 \Rightarrow \boxed{n=25}$
- Si $k=1$, on a : $n=77k+25=77(1)+25 \Rightarrow \boxed{n=102}$
- Si $k=2$, on a : $n=77k+25=77(2)+25 \Rightarrow \boxed{n=179}$

**Exercice 9 :**

**I-**) N et M sont deux nombres tels que : N s'écrit $\overline{1a3a}^4$ et M s'écrit $\overline{bca35}^7$.

1°) Déterminons suivant les valeurs de l'entier naturel $n$ le reste de la division de $6^n$ par $11$ :

| | | |
|---|---|---|
| $6^0 \equiv 1[11]$ | $6^4 \equiv 9[11]$ | $6^8 \equiv 4[11]$ |
| $6^1 \equiv 6[11]$ | $6^5 \equiv 10[11]$ | $6^9 \equiv 2[11]$ |
| $6^2 \equiv 3[11]$ | $6^6 \equiv 5[11]$ | $6^{10} \equiv 1[11]$ |
| $6^3 \equiv 7[11]$ | $6^7 \equiv 8[11]$ | |

La période est $10$ donc :

- Pour $n=10k$, on a : $6^{10k} \equiv 1[11]$

Malamine Diakité

- Pour $n = 10k+1$, on a : $6^{10k+1} \equiv 6[11]$
- Pour $n = 10k+2$, on a : $6^{10k+2} \equiv 3[11]$
- Pour $n = 10k+3$, on a : $6^{10k+3} \equiv 7[11]$
- Pour $n = 10k+4$, on a : $6^{10k+4} \equiv 9[11]$
- Pour $n = 10k+5$, on a : $6^{10k+5} \equiv 10[11]$
- Pour $n = 10k+6$, on a : $6^{10k+6} \equiv 5[11]$
- Pour $n = 10k+7$, on a : $6^{10k+7} \equiv 8[11]$
- Pour $n = 10k+8$, on a : $6^{10k+8} \equiv 4[11]$
- Pour $n = 10k+9$, on a : $6^{10k+9} \equiv 2[11]$

Les restes de la division euclidienne de $6^n$ par $11$ sont : $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$.

2°) <u>Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation</u> : $7x + y = 46$

$7x + y = 46 \Leftrightarrow y = 46 - 7x \Rightarrow y \equiv 4[7]$

$y = 7k + 4$, en remplaçant $y$ dans l'équation $7x + y = 46$

on a : $7x + 7k + 4 = 46 \Rightarrow x = -k + 6$.

$$\boxed{S = \{(-k+6; 7k+4); k \in \mathbb{Z}\}}$$

3°) <u>Donnons les écritures en base 4 de N et en base 7 de M</u> :

Sachant que : $N \equiv 0[11]$ et $7b + c = 46$

$N \equiv 0[11] \Leftrightarrow \overline{1a3a}^4 \equiv 0[11] \Rightarrow 6a \equiv 1[11]$ en multipliant par $2$

on a : $12a \equiv 2[11] \Rightarrow a \equiv 2[11] \Rightarrow a = 11k + 2$

$$0 < a < 4$$
$$0 < 11k + 2 < 4$$
$$-0{,}18 < k < 0{,}18 \Rightarrow k = 0$$

alors $a = 2$

$7b + c = 46$ alors $b = 6$ et $c = 4$.

On a : $\boxed{N = \overline{1232}^4}$ et $\boxed{M = \overline{64235}^7}$

4°) <u>Déterminons l'entier naturel $n$ tel que $M^n \equiv 3[5]$</u> :

$M^n \equiv 3[5] \Leftrightarrow \left(\overline{64235}^7\right)^n \equiv 3[5]$

$(15902)^n \equiv 3[5] \Leftrightarrow 2^n \equiv 3[5]$

$2^0 \equiv 1[5]$ ; $2^1 \equiv 2[5]$ ; $2^2 \equiv 4[5]$ ; $2^3 \equiv 3[5]$

alors $n = 3$.

5°) a) <u>Écrivons dans le système décimal M et N</u> :

$\boxed{M = 15902 ; N = 110}$

b) <u>Résolvons dans $\mathbb{N}^2$ le système d'inconnues $a$ et $b$</u> :

$$\begin{cases} PPCM(a,b) = M - N \\ PGCD(a,b) = 5N + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PPCM(a,b) = 15792 \\ PGCD(a,b) = 564 \end{cases}$$

Soit $a'$ et $b'$ tel que : $a' \wedge b' = 1$ et $a = 564a'; b = 564b'$.

$PPCM(a,b) \times PGCD(a,b) = a \times b$

$15792 \times 564 = 564a' \times 564b' \Leftrightarrow a' \times b' = 28$

| $a'$ | 1 | ~~2~~ | 4 |
|---|---|---|---|
| $b'$ | 28 | ~~14~~ | 7 |

- Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 564a' = 564(1) = 564 \\ b = 564b' = 564(28) = 15792 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} a' = 4 \\ b' = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 564a' = 564(4) = 2256 \\ b = 564b' = 564(7) = 3948 \end{cases}$

$\boxed{S = \{(564; 15792); (15792; 564); (2256; 3948); (3948; 2256)\}}$

**Exercice 10 :**

On note $n$ un entier non nul, $p$ l'entier naturel $3n + 1$ et $q$ l'entier naturel $5n - 1$.

On a : $p = 3n + 1$ et $q = 5n - 1$

1°) Démontrons que le PGCD de $p$ et $q$ est diviseur de $8$ :

$\text{PGCD}(5n - 1\,; 3n + 1) = 5n - 1 - 3n - 1 = 2n - 2$

$\text{PGCD}(3n + 1; 2n - 2) = 3n + 1 - 2n + 2 = n + 3$

$\text{PGCD}(2n - 2; n + 3) = 2n - 2 - n - 3 = n - 5$

$\text{PGCD}(n + 3; n - 5) = n + 3 - n + 5 = 8$

$\text{PGCD}(5n - 1\,; 3n + 1) = 8$ alors le PGCD de $p$ et $q$ est un diviseur de $8$.

2°)* Les valeurs de $n$ :

Le PGCD est égal à $8$ si et seulement si : $n - 5 = 8k$

Alors le PGCD est égal à $8$ si : $\boxed{n = 8k + 5}$ avec $k \in \mathbb{N}$.

* Calculons le PPCM de $p$ et $q$ :

$\text{PPCM}(p\,; q) \times \text{PGCD}(p\,; q) = p \times q$

Or $\begin{cases} \text{PGCD}(p\,; q) = 8 \\ p = 3n + 1 = 3(8k + 5) + 1 = 24k + 16 \\ q = 5n - 1 = 5(8k + 5) - 1 = 40k + 24 \end{cases}$

$\text{PPCM}(p\,; q) \times 8 = (24k + 16) \times (40k + 24)$

alors $\boxed{\text{PPCM}(p\,; q) = 120k^2 + 152k + 48}$ avec $k \in \mathbb{N}$

**Exercice 11 :**

1°) Trouvons les trois entiers naturels $a, b, c$ :

Après décomposition en produit de facteur premier on a : $495 = 3^2 \times 5 \times 11$, alors

$\boxed{a = 9; b = 5; c = 11}$

2°) $x, y, z$ étant des chiffres de la base dix, on considère le nombre $A = \overline{x13y8z}$ en base dix.

Déterminons tous les triplets $(x, y, z)$ pour lesquelles A est divisible par $495$ :

A est divisible par $495$ si A est à la fois divisible par $9; 5$ et $11$.

* $A = x13y8z$ est divisible par $5$ si $z \in \{0; 5\}$ ;
  - Pour $z = 0$ :
* $A = x13y80$ est divisible par $9$ si : $x + 1 + 3 + y + 8 + 0 \equiv 0[9]$

  Soit $k \in \mathbb{Z}$, tel que : $x + y = 9k + 6$ (**1**)
* $A = x13y80$ est divisible par $11$ si : $0 - 8 + y - 3 + 1 - x \equiv 0[11]$

Soit $k' \in \mathbb{Z}$, tel que : $y - x = 11k' + 10$ (**2**)

On a : $x + y = 9k + 6$

$$\begin{array}{l} 0 < x \leq 9 \\ + \ 0 < y \leq 9 \\ \hline 0 < x + y \leq 18 \end{array}$$

$0 < 9k + 6 \leq 18$

$-0{,}66 < k \leq 1{,}33$

Alors $k \in \{0; 1\}$

On a : $y - x = 11k' + 10$

$$\begin{array}{l} 0 < y \leq 9 \\ -9 < -x \leq 0 \\ \hline -9 < y - x \leq 9 \end{array}$$

$-9 < 11k' + 10 \leq 9$

$-1{,}72 < k' \leq -0{,}09$

Alors $k' = -1$

Formons un système avec l'équation (**1**) et (**2**) :

* Si $\begin{cases} k = 0 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 6 \\ -x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$

* Si $\begin{cases} k = 1 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 15 \\ -x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \end{cases}$

Avec le triplet $(8; 7; 0)$, on a : $\boxed{A = \mathbf{8}137\mathbf{8}\mathbf{0}}$

- <u>Pour $z = 5$</u> :

* $A = x13y85$ est divisible par $9$ si : $x + 1 + 3 + y + 8 + 5 \equiv 0[9]$

Soit $k \in \mathbb{Z}$, tel que : $x + y = 9k + 1$ (**3**)

* $A = x13y85$ est divisible par $11$ si : $5 - 8 + y - 3 + 1 - x \equiv 0[11]$

Soit $k' \in \mathbb{Z}$, tel que : $y - x = 11k' + 5$ (**4**)

On a : $x + y = 9k + 1$

$$\begin{array}{l} 0 < x \leq 9 \\ + \ 0 < y \leq 9 \\ \hline 0 < x + y \leq 18 \end{array}$$

$0 < 9k + 1 \leq 18$

$-0{,}11 < k \leq 1{,}88$

Alors $k \in \{0; 1\}$

On a : $y - x = 11k' + 5$

$$\begin{array}{l} 0 < y \leq 9 \\ -9 < -x \leq 0 \\ \hline -9 < y - x \leq 9 \end{array}$$

$-9 < 11k' + 5 \leq 9$

$-1{,}27 < k' \leq 0{,}36$

Alors $k' \in \{-1; 0\}$

Formons un système avec l'équation (**3**) et (**4**) :

- Si $\begin{cases} k = 0 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = -6 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-5}{2} \notin \mathbb{N}$
- Si $\begin{cases} k = 0 \\ k' = 0 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \notin \mathbb{N}$
- Si $\begin{cases} k = 1 \\ k' = 0 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 10 \\ -x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{15}{2} \notin \mathbb{N}$
- Si $\begin{cases} k = 1 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 10 \\ -x + y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$

Avec le triplet $(8; 2; 5)$, on a : $\boxed{A = \mathbf{8}13\mathbf{2}8\mathbf{5}}$

$$\boxed{S = \{(\mathbf{8}; \mathbf{7}; \mathbf{0}); (\mathbf{8}; \mathbf{2}; \mathbf{5})\}}$$

**<u>Exercice 12</u> :**

Soit le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 10[23] \\ x \equiv 4[7] \end{cases}$

1°) <u>Déterminons un couple d'entier $(\alpha; \beta)$</u> :

$23\alpha + 7\beta = 1$

Malamine Diakité

Utilisons l'Algorithme d'Euclide :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $q$ | 3 | 3 | 2 |
| $a$ | 23 | 7 | 2 |
| $b$ | 7 | 2 | 1 |
| $r$ | 2 | 1 | 0 |

$a = bq + r \Rightarrow r = a - bq$

On a : $1 = 7 - 2(3)$

$2 = 23 - 7(3)$

$1 = 7 - 2(3) = 7 - 3\big(23 - 7(3)\big) = 23(-3) + 7(10)$

$1 = 23(-3) + 7(10)$, alors $\boxed{(\alpha;\beta) = (-3;10)}$

2°)* <u>Déduisons un couple $(u_0;v_0)$</u> : $23u - 7v = -6$

On a : $23(-3) + 7(10) = 1$, en multipliant par $-6$ on obtient

$23(18) - 7(60) = -6$, alors $\boxed{(u_0;v_0) = (18;60)}$

* <u>Résolvons complètement l'équation</u> : $23u - 7v = -6$

$$-\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ 23u_0 - 7v_0 = -6 \end{cases}$$
$$\overline{23(u - u_0) - 7(v - v_0) = 0}$$

$23(u - u_0) - 7(v - v_0) = 0 \Leftrightarrow 23(u - u_0) = 7(v - v_0) \Rightarrow$

- $7/23(u - 18)$ $\Rightarrow$d'après Gauss $7/(u - 18) \Rightarrow u - 18 = 7k$
  $\Rightarrow u = 7k + 18\ ,k \in \mathbb{Z}$
- $23/7(v - 60)$ $\Rightarrow$d'après Gauss $23/(v - 60) \Rightarrow v - 60 = 23k$
  $\Rightarrow v = 23k + 60\ ,k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S = \{(7k + 18; 23k + 60); k \in \mathbb{Z}\}}$$

3°) * <u>Démontrons que $x$ est solution de (S) si et seulement si il existe $(u;v)$ couple d'entier vérifiant</u> : $\begin{cases} 23u - 7v = -6 \\ x = 10 + 23u \end{cases}$

$x$ est solution de (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 23u\ ,(u \in \mathbb{Z}) \\ 10 + 23u \equiv 4[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 23u\ ,(u \in \mathbb{Z}) \\ 23u \equiv -6[7] \end{cases}$

$\begin{cases} x = 10 + 23u\ ,(u \in \mathbb{Z}) \\ 23u = -6 + 7v\ ,(v \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ C.Q.F.D

* <u>Déduisons l'ensemble des solutions de (S)</u> :

L'équation $23u - 7v = -6$ admet comme solution : $\begin{cases} u = 7k + 18 \\ v = 23k + 60 \end{cases}$ ; en remplaçant $u$ dans $x$, on a : $x = 10 + 23u = 10 + 23(7k + 18) \Rightarrow x = 161k + 424$

$$\boxed{S = \{161k + 424; k \in \mathbb{Z}\}}$$

4°) <u>Déterminons la plus petite solution entier naturel $x_0$ divisible par 16</u> :

On a : $x \equiv 0[16] \Leftrightarrow 161k + 424 \equiv 0[16] \Rightarrow k \equiv 8[16] \Rightarrow k = 16k' + 8$ avec $k' \in \mathbb{Z}$

$$0 < k < 16$$
$$0 < 16k' + 8 < 16$$
$$-0{,}5 < k' < 0{,}5$$

Malamine Diakité

alors $k' = 0 \Rightarrow k = 8$, donc $\boxed{x_0 = 1712}$

**Exercice 13 :**

1°) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(\mathrm{E_1})$ : $11x + 8y = 79$

a) Montrons que si $(x, y)$ est solution de $(\mathrm{E_1})$ alors $y \equiv 3[11]$ :

$11x + 8y = 79 \Rightarrow 8y \equiv 79[11] \Leftrightarrow 56y \equiv 14[11]$, alors $y \equiv 3[11]$ C.Q.F.D

b) Résolvons l'équation $(\mathrm{E_1})$ :

On a : $11x + 8y = 79 \Rightarrow y \equiv 3[11] \Rightarrow y = 11k + 3$ en remplaçant $y$ dans l'équation $11x + 8y = 79$ on a : $x = -8k + 5$.

$$\boxed{S = \{(-8k + 5; 11k + 3) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}}$$

2°) Déterminons le nombre de pièces de chaque lot :

Soit $\begin{cases} x \text{ le nombre de pièces du } 1^{\text{er}} \text{ lot} \\ y \text{ le nombre de pièces du } 2^{\text{ème}} \text{ lot} \\ z \text{ le nombre de pièces du } 3^{\text{ème}} \text{ lot} \end{cases}$

tel que : $\begin{cases} x + y + z = 41 \\ 4800x + 3600y + 400z = 48000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 41 & (\mathbf{1}) \\ 12x + 9y + z = 120 & (\mathbf{2}) \end{cases}$

Dans $(\mathbf{1})$ ; $z = 41 - x - y$ en remplaçant $z$ dans $(\mathbf{2})$, on a : $11x + 8y = 79$, or cette équation admet comme solution : $\begin{cases} x = -8k + 5 \\ y = 11k + 3 \end{cases}$ ; et le nombre de pièces ne dépasse pas $41$, donc on a :

| | |
|---|---|
| $1 \leq x < 41$ | $1 \leq y < 41$ |
| $1 \leq -8k + 5 < 41$ | $1 \leq 11k + 3 < 41$ |
| $-4{,}5 \leq k < 0{,}5$ | $-0{,}18 \leq k < 3{,}45$ |
| $k \in \{-4; -3; -2; -1; 0\}$ | $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ |

$k \cap k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow z = 41 - 5 - 3 = 33$

alors $\boxed{\begin{cases} \text{le nombre de pièces du } 1^{\text{er}} \text{ lot est } 5 \\ \text{le nombre de pièces du } 2^{\text{ème}} \text{ lot est } 3 \\ \text{le nombre de pièces du } 3^{\text{ème}} \text{ lot est } 33 \end{cases}}$

**Exercice 14 :**

1°) a) Montrons en utilisant l'algorithme d'Euclide qu'il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que : $324u + 245v = 1$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | 1 | 3 | 9 | 1 | 7 |
| $a$ | 324 | 245 | 79 | 8 | 7 |
| $b$ | 245 | 79 | 8 | 7 | 1 |
| $r$ | 79 | 8 | 7 | 1 | 0 |

$a = bq + r \Rightarrow r = a - bq$

$1 = 8 - 7$ ; $7 = 79 - 9(8)$ ; $8 = 245 - 79(3)$ ; $79 = 324 - 245$

On a : $1 = 8 - 7 = 8 - 79 + 8(9) = 8(10) - 79$

$1 = 10[245 - 79(3)] - 79 = 245(10) - 79(31)$

$1 = 245(10) - 31(324 - 245) = 324(-31) + 245(41)$



Malamine Diakité

$324(-31)+245(41)=1$ ; alors $\boxed{(u;v)=(-31;41)}$

b) Déduisons une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E) :

$324u - 245v = 7$

On a : $324(-31)+245(41)=1 \Leftrightarrow 324(-31)-245(-41)=1$ en multipliant par 7, on a : $324(-217)-245(-287)=7$ ; donc $\boxed{(x_0;y_0)=(-217;-287)}$

* Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ cette équation :

$$-\begin{cases}324u-245v=7\\324u_0-245v_0=7\end{cases}$$
$$\overline{324(u-u_0)-245(v-v_0)=0}$$

$324(u-u_0)-245(v-v_0)=0 \Leftrightarrow 324(u-u_0)=245(v-v_0) \Rightarrow$

- $245/324(u+217) \Rightarrow$d'après Gauss $245/(u+217)$
  $u+217=245k \Rightarrow u=245k-217\ ,k\in\mathbb{Z}$
- $324/245(v+287) \Rightarrow$d'après Gauss $324/(v+287)$
  $v+287=324k \Rightarrow v=324k-287\ ,k\in\mathbb{Z}$

$$\boxed{S=\{(245k-217;324k-287);k\in\mathbb{Z}\}}$$

2°) On considère la fraction $A(n)\ =\frac{n+16}{n-2}$

a) Montrons que l'on peut écrire $A(n)$ sous la forme : $a\ +\ \frac{b}{n-2}$

La division euclidienne de $n+16$ par $n-2$ nous donne :

$\boxed{A(n)=1+\frac{18}{n-2}}$ avec $\boxed{a=1}$ et $\boxed{b=18}$

b) Les valeurs de $n$ :

$A(n)$ est un entier naturel si $n-2$ est un diviseur de 18

$(n-2)\in D_{18}=\{1;2;3;6;9;18\}$

- $n-2=1 \Rightarrow n=3$
- $n-2=2 \Rightarrow n=4$
- $n-2=3 \Rightarrow n=5$
- $n-2=6 \Rightarrow n=8$
- $n-2=9 \Rightarrow n=11$
- $n-2=18 \Rightarrow n=20$

$A_n$ est un entier naturel si $\boxed{n\in\{3;4;5;8;11;20\}}$

c) Les valeurs de $n$ : On a : $A(n)=1+\frac{18}{n-2}$

$A(n)$ est irréductible si $n-2=18k+1 \Leftrightarrow n=18k+3$

Alors $A(n)$ est irréductible si $\boxed{n=18k+3}$, avec $k\in\mathbb{N}$.

3°) Déterminons l'entier naturel $n$ tel que :

$2\times3^n+\ 1\equiv0[11] \Rightarrow 2\times3^n\equiv10[11] \Rightarrow 3^n\equiv5[11]$ ;

$3^0\equiv1[11]$ ; $3^1\equiv3[11]$ ; $3^2\equiv9[11]$ ; $3^3\equiv5[11]$.

Alors $\boxed{n=3}$



Malamine Diakité

4°) Trouvons les couples d'entiers naturels $(a\,,b)$ tels que :

$$2m - d = 220 \text{ où } m = a \vee b \text{ et } d = a \wedge b$$

$2m - d = 220,$

Soit $a'$ et $b'$ tel que : $a' \wedge b' = 1$ et $a = a'd\,;b = b'd.$

Or $m = a'b'd\,;2a'b'd - d = 220 \Leftrightarrow 2a'b' - 1 = \frac{220}{d}$ alors $d \in D_{220}$

$\Rightarrow d \in \{1; 2; 4; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55; 110; 220\}$

- Pour $d = 1$ :

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{1} \Leftrightarrow a'b' = \frac{221}{2} \notin \mathbb{N}$

- Pour $d = 2$ :

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{2} \Leftrightarrow a'b' = \frac{111}{2} \notin \mathbb{N}$

- Pour $d = 4$ :

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{4} \Leftrightarrow a'b' = 28$

| $a'$ | 1 | $\cancel{2}$ | 4 |
|---|---|---|---|
| $b'$ | 28 | $\cancel{14}$ | 7 |

- Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4a' = 4(1) = 4 \\ b = 4b' = 4(28) = 112 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} a' = 4 \\ b' = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4a' = 4(4) = 16 \\ b = 4b' = 4(7) = 28 \end{cases}$

- Pour $d = 5$ :

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{5} \Leftrightarrow a'b' = \frac{45}{2} \notin \mathbb{N}$

- Pour $d = 10$ :

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{10} \Leftrightarrow a'b' = \frac{23}{2} \notin \mathbb{N}$

- Pour $d = 11$ :

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{11} \Leftrightarrow a'b' = \frac{21}{2} \notin \mathbb{N}$

- Pour $d = 20$ :

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{20} \Leftrightarrow a'b' = 6$

| $a'$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $b'$ | 6 | 3 |

- Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 20a' = 20(1) = 20 \\ b = 20b' = 20(6) = 120 \end{cases}$
- Si $\begin{cases} a' = 2 \\ b' = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 20a' = 20(2) = 40 \\ b = 20b' = 20(3) = 60 \end{cases}$

- Pour $d = 22$ :

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{22} \Leftrightarrow a'b' = \frac{11}{2} \notin \mathbb{N}$

- Pour $d = 44$ :

On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{44} \Leftrightarrow a'b' = 3$

Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 44a' = 44(1) = 44 \\ b = 44b' = 44(3) = 132 \end{cases}$

Malamine Diakité

- Pour $d = 55$ :

  On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{55} \Leftrightarrow a'b' = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$

- Pour $d = 110$ :

  On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{110} \Leftrightarrow a'b' = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$

- Pour $d = 220$ :

  On a : $2a'b' - 1 = \frac{220}{220} \Leftrightarrow a'b' = 1$

  Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 220a' = 220(1) = 220 \\ b = 220b' = 220(1) = 220 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{(4; 112); (16; 28); (20; 120); (40; 60); (44; 132); (220; 220)\}}$$

**Exercice 15 :**

1°) <u>Déterminons tous les couples d'entiers naturels</u> : $a$ et $b$ $(a < b)$

tels que : $m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$ vérifient $\begin{cases} m + d = 126 \\ 5 < d < 10 \end{cases}$

Soit $a'$ et $b'$ tel que : $a' \wedge b' = 1$ et $a = a'd$ ; $b = b'd$.

Or $m = a'b'd$ ; $a'b'd + d = 126 \Leftrightarrow a'b' + 1 = \frac{126}{d}$

alors $d \in D_{126}$ et $5 < d < 10$, donc $d \in \{6; 7; 9\}$

- Pour $d = 6$ :

  On a : $a'b' + 1 = \frac{126}{6} \Leftrightarrow a'b' = 20$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a'$ | 1 | ~~2~~ | 4 |
| $b'$ | 20 | ~~10~~ | 5 |

  - Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6a' = 6(1) = 6 \\ b = 6b' = 6(20) = 120 \end{cases}$
  - Si $\begin{cases} a' = 4 \\ b' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6a' = 6(4) = 24 \\ b = 6b' = 6(5) = 30 \end{cases}$

- Pour $d = 7$ :

  On a : $a'b' + 1 = \frac{126}{7} \Leftrightarrow a'b' = 17$

  Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7a' = 7(1) = 7 \\ b = 7b' = 7(17) = 119 \end{cases}$

- Pour $d = 9$ :

  On a : $a'b' + 1 = \frac{126}{9} \Leftrightarrow a'b' = 13$

  Si $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9a' = 9(1) = 9 \\ b = 9b' = 9(13) = 117 \end{cases}$

$$\boxed{S = \{(6; 120); (24; 30); (7; 119); (9; 117)\}}$$

2°) <u>Effectuons la division euclidienne de $a$ par $b$</u> :

$a = -532$ et $b = -71$.

$a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$

$532 = 71(7) + 35$

$-532 = -71(7) - 35 = -71(7) - 35 - 71 + 71$

Malamine Diakité

$-532 = -71(8) + 36$ ;

alors $\boxed{a = -532; b = -71; q = 8; r = 36}$

3°) Effectuons les opérations suivantes :

$\overline{\text{FACE}}^{16} - \overline{\text{BEC}}^{16} = \overline{\text{EEE2}}^{16}$

$\overline{3421}^{5} + \overline{240}^{5} = \overline{4211}^{5}$

$\overline{3421}^{5} \times \overline{230}^{5} = \overline{2002330}^{5}$

**Exercice 16 :**

**I/** 1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a)* Déterminons, suivant les valeurs de $n$ le reste de la division par $7$ de l'entier $3^n$ :

$3^0 \equiv 1[7]$

$3^1 \equiv 3[7]$

$3^2 \equiv 2[7]$

$3^3 \equiv 6[7]$

$3^4 \equiv 4[7]$

$3^5 \equiv 5[7]$

$3^6 \equiv 1[7]$

La période est $6$ donc :

- Pour $n = 6k$, on a : $3^{6k} \equiv 1[7]$
- Pour $n = 6k + 1$, on a : $3^{6k+1} \equiv 3[7]$
- Pour $n = 6k + 2$, on a : $3^{6k+2} \equiv 2[7]$
- Pour $n = 6k + 3$, on a : $3^{6k+3} \equiv 6[7]$
- Pour $n = 6k + 4$, on a : $3^{6k+4} \equiv 4[7]$
- Pour $n = 6k + 5$, on a : $3^{6k+5} \equiv 5[7]$

Les restes de la division euclidienne de $3^n$ par $7$ sont :$1; 2; 3; 4; 5; 6$

* Déduisons le reste de la division par $7$ de l'entier naturel $(506390)^{128}$ :

$(506390)^{128} \equiv ?[7] \Leftrightarrow 3^{128} \equiv ?[7]$, or la division euclidienne de $3^n$ par $7$ a pour période $6$. La division euclidienne de $128$ par $6$ nous donne

$128 = 6(21) + 2 = 6k + 2$, or $3^{6k+2} \equiv 2[7]$ alors le reste de la division euclidienne de $(506390)^{128}$ par $7$ est $2$.

b) Dans le système de numération décimal, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$ .

Déterminons $x$ pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par $7$ :

$(506390)^{128} + \overline{651x} \equiv 0[7] \Rightarrow 2 + x + 10 + 500 + 6000 \equiv 0[7]$

$x \equiv 5[7] \Rightarrow x = 7k + 5.$

$0 \leq x \leq 9 \Leftrightarrow 0 \leq 7k + 5 \leq 9 \Rightarrow k = 0$, alors $\boxed{x = 5}$.

2. a) Déterminons le plus grand diviseur commun des nombres $21590$ et $9525$ :

| $q$ | 2 | 3 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 21950 | 9525 | 2540 | 1905 |
| $b$ | 9525 | 2540 | 1905 | 635 |
| $r$ | 2540 | 1905 | 635 | 0 |

Alors $\boxed{\text{PGCD}(21950; 9525) = 635}$

b) Déterminons l'ensemble des entiers $x$ tels que : $34x \equiv 2[15]$

$34x \equiv 2[15] \Rightarrow 4x \equiv 2[15] \Rightarrow x = 15k + 8.$

$$\boxed{S = \{15k + 8; k \in \mathbb{Z}\}}$$

c) Résolvons l'équation : $(x , y) \in \mathbb{Z}^2$ :

$21590x + 9525y = 1270$

Mahamine Diakité

$21590 \wedge 9525 = 635$ ; $1270/635$, alors on a : $34x + 15y = 2$
$34x \equiv 2[15] \Rightarrow x = 15k + 8$, en remplaçant $x$ dans l'équation
$34x + 15y = 2 \Rightarrow 34(15k + 8) + 15y = 2 \Rightarrow y = -34k - 18$

$$\boxed{S = \{(15k + 8; -34k - 18); k \in \mathbb{Z}\}}$$

d) <u>Déterminons le chiffre des unités de $7^{1980}$ écrit dans le système décimal</u> :

$7^0 \equiv 1[10]$ | La période est $4$ donc :
$7^1 \equiv 7[10]$ | - Pour $n = 4k$, on a : $7^{4k} \equiv 1[10]$
$7^2 \equiv 9[10]$ | - Pour $n = 4k + 1$, on a : $7^{4k+1} \equiv 7[10]$
$7^3 \equiv 3[10]$ | - Pour $n = 4k + 2$, on a : $7^{4k+2} \equiv 9[10]$
$7^4 \equiv 1[10]$ | - Pour $n = 4k + 3$, on a : $7^{4k+3} \equiv 3[10]$

La division euclidienne de $1980$ par $4$ nous donne : $1980 = 4(495) = 4k$
or $7^{4k} \equiv 1[10]$, alors le chiffre des unités de $7^{1980}$ dans le système décimal est $1$.

**II/** On considère l'entier naturel **A** qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

1°) <u>Déterminons $x$ pour que</u> :

a) <u>**A** soit divisible par six</u> :

$A \equiv 0[6] \Leftrightarrow \overline{1x416}^7 \equiv 0[6] \Rightarrow 6 + 7 + 196 + 343x + 2401 \equiv 0[6]$
$x \equiv 0[6] \Rightarrow x = 6k$ ; or $0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq 6k \leq 6 \Rightarrow k \in \{0; 1\}$

$$\boxed{x \in \{0; 6\}}$$

b) <u>**A** soit divisible par cinq</u> :

$A \equiv 0[5] \Leftrightarrow \overline{1x416}^7 \equiv 0[5] \Rightarrow 6 + 7 + 196 + 343x + 2401 \equiv 0[5]$
$3x \equiv 0[5] \Rightarrow x = 5k$ ; or $0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq 5k \leq 6 \Rightarrow k \in \{0; 1\}$

$$\boxed{x \in \{0; 5\}}$$

c) <u>Déduisons qu'il existe $x$ tel que **A** soit divisible par trente</u> :

**A** est divisible par $30$, si **A** est divisible à la fois par $5$ et $6$

$\begin{cases} A \equiv 0[6] \text{ ; si } x \in \{0; 6\} \\ A \equiv 0[5] \text{ ; si } x \in \{0; 5\} \end{cases} \Rightarrow x \cap x = 0$ ; alors $\boxed{x = 0}$

2°) On donne à $x$ la valeur zéro,

* <u>L'écriture décimale de **A** est</u> : $\boxed{\mathbf{A} = \overline{10416}^7 = 2610}$

* <u>Le nombre de diviseurs positifs de **A**</u> :

On a : $A = 2610 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 29$
nombre de diviseurs est : $(1 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 24$
Le nombre de diviseurs positifs est $24$

* <u>L'ensemble des diviseurs positifs de **A** qui sont premiers avec trois sont</u> :

$1; 2; 5; 10; 29; 58; 145; 290.$

**<u>Exercice 17</u> :**

**I/** 1°) <u>Montrons que</u> :

$4x^4 + 3x^2 + 1 = (2x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 1)$
$(2x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 1)$ après développement



Malamine Diakité

on a : $4x^4 + 3x^2 + 1 = 4x^4 + 3x^2 + 1$ vraie. C.Q.F.M

2°) Déduisons que dans tout système de numération de base $b$ supérieure ou égale à $5$ : $b \geq 5$

Le nombre $\overline{40301}$ est divisible par $\overline{211}$ :

$\overline{40301}^b = 1 + 3b^2 + 4b^4$ ; $\overline{211}^b = 1 + b + 2b^2$

$\overline{40301}^b = (2b^2 + b + 1)(2b^2 - b + 1)$

$= \overline{211}^b \times (b^2 + b^2 - b + 1)$

$= \overline{211}^b \times (b^2 + b(b-1) + 1)$

$\boxed{\overline{40301}^b = \overline{211}^b \times \overline{1(b-1)1}^b}$ alors $\overline{40301}^b$ est divisible par $\overline{211}^b$.

3°) Le quotient de la division :

$\overline{40301}^9 = 26488$ et $\overline{211}^9 = 172$,

On a : $q = 2b^2 - b + 1 = 2(9)^2 - 9 + 1 \Rightarrow \boxed{q = 154}$

**II/** Dans le système de numération de base $3$, un nombre s'écrit : $\overline{2101}^3$.

1°) Le système de numération $n$ dans lequel il s'écrit : $\overline{224}^n$

$\overline{224}^n = \overline{2101}^3 \Leftrightarrow n^2 + n - 30 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 5 \in \mathbb{N}; 5 > 4 \\ n_2 = -6 \notin \mathbb{N}; -6 < 4 \end{cases}$

Alors on a : $\boxed{\overline{224}^5}$.

2°) Le système de numération dans lequel il s'écrit : $\overline{174}$

Soit $x$ le système de numération avec $x > 7$ et $x \in \mathbb{N}$ :

$\overline{174}^x = \overline{2101}^3 \Leftrightarrow -x^2 - 7x + 60 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \in \mathbb{N}; 5 < 7 \\ x_2 = -12 \notin \mathbb{N}; -12 < 7 \end{cases}$

Alors il n'existe pas de système de numération dans lequel il s'écrit $\overline{174}$.

3°) Soit $\boldsymbol{a}$ un entier naturel strictement supérieur à $2$. On considère les nombres $\mathrm{N} = 2(\boldsymbol{a} - 1)$ et $\mathrm{N}' = (\boldsymbol{a} - 1)^2$.

Écrivons N et N′ dans le système de base $\boldsymbol{a}$ :

* $\mathrm{N} = 2(\boldsymbol{a} - 1) = 2\boldsymbol{a} - 2 = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a} - 2)$

Alors $\boxed{\mathrm{N} = \overline{1(\boldsymbol{a} - 2)}^a}$

* $\mathrm{N}' = (\boldsymbol{a} - 1)^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{a} + 1 = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} - 2) + 1$

Alors $\boxed{\mathrm{N}' = \overline{(\boldsymbol{a} - 2)1}^a}$

4°) Démontrons :

$\overline{1331}^b = b^3 + 3b^2 + 3b + 1 \Leftrightarrow \boxed{\overline{1331}^b = (b+1)^3}$ C.Q.F.D

**III/** 1°) La taille maximale de ces dalles :

$\mathrm{PGCD}(475; 361) = 19$, à l'aide de dalles carrées de $19cm$ de côté, on peut donc carreler une surface rectangulaire de $4{,}75m$ sur $3{,}61m$

(il faudra $19$ dalles en longueur et $25$ en largeur, soit un total de $475$ dalles en tout)



Mohamine Diakité

2°) Soit le nombre $\boldsymbol{n}$ qui s'écrit dans la base dix, $\boldsymbol{n} = y17x35$ ;

Trouvons $x$ et $y$ pour que $\boldsymbol{n}$ soit divisible par 9 et 11 :

* $\boldsymbol{n}$ est divisible par 9 si : $y + 1 + 7 + x + 3 + 5 \equiv 0[9]$

$x + y \equiv 2[9]$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x + y = 9k + 2$. (**1**)

* $\boldsymbol{n}$ est divisible par 11 si : $5 - 3 + x - 7 + 1 - y \equiv 0[11]$

$x - y \equiv 4[11]$, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - y = 11k' + 4$. (**2**)

| | |
|---|---|
| On a : $x + y = 9k + 2$ | On a : $x - y = 11k' + 4$ |
| $0 < x \le 9$ | $0 < x \le 9$ |
| $+ \ 0 < y \le 9$ | $-9 < -y \le 0$ |
| $0 < x + y \le 18$ | $-9 < x - y \le 9$ |
| $0 < 9k + 2 \le 18$ | $-9 < 11k' + 4 \le 9$ |
| $-0{,}22 < k \le 1{,}77$ | $-1{,}18 < k' \le 0{,}45$ |
| Alors $k \in \{0; 1\}$ | Alors $k' \in \{-1; 0\}$ |

Formons un système avec l'équation (**1**) et (**2**) :

- Si $\begin{cases} k = 0 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-5}{2} \notin \mathbb{N}$
- Si $\begin{cases} k = 0 \\ k' = 0 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow y = -1 \notin \mathbb{N}$
- Si $\begin{cases} k = 1 \\ k' = 0 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{15}{2} \notin \mathbb{N}$
- Si $\begin{cases} k = 1 \\ k' = -1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 9 \end{cases}$

Alors on a : $\boxed{\boldsymbol{n} = \mathbf{917235}}$

**Exercice 18 :**

1°) Calculons le nombre de carreaux non découpées :

$454 = 33 \times 13 + 25$ et $375 = 33 \times 11 + 12$, il faut plus de 13 carreaux en longueur et un peu plus de 11 carreaux en largeur, donc un nombre de carreaux non coupés égal à $11 \times 13 = 143$.

2°) a) Donnons la liste des diviseurs :

$\boxed{D_{455} = \{1; 5; 7; 13; 35; 65; 91; 455\}}$

$\boxed{D_{385} = \{1; 5; 7; 11; 35; 55; 77; 385\}}$

b) $\boxed{D_{455} \cap D_{385} = \{1; 5; 7; 35\}}$

c) On peut donc utiliser des dalles de côté $35\ cm$ pour carreler la cuisine. Il en faudra 13 en longueur et 11 en largeur.

3°) On dispose de dalles rectangulaires de longueur $24cm$ et de largeur $15cm$.

a) * Donnons la liste des multiples de 24 inférieurs à 400 :

$\boxed{M_{24} = \{24; 48; 72; 96; 120; 144; 168; 192; 216; 240; 264; 288; 312; 336; 360; 384\}}$

* La liste des multiples de 15 inférieurs à 400 :

$M_{15} = 15; 30; 45; 60; 75; 90; 105; 120; 135; 150; 165; 180; 195; 210; 225; 240; 255; 270; 285; 300; 315; 330; 345; 360; 375; 390$

b) Donnons la liste des multiples communs à 24 et 15 inférieurs à 400 :

$$\boxed{M_{24} \cap M_{15} = \{120; 240; 360\}}$$

c) On pourrait donc carreler une pièce carrée de $120\ cm$ de côté avec des carreaux de longueur $24\ cm$ et de largeur $15\ cm$.

**Exercice 19 :**

**I**/L'entier $m_1$ s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit et $m_2$ s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de numération de base sept.

1°) Déterminons les chiffres $x$ et $y$ :

$0 \leq x \leq 6$ et $0 \leq y \leq 6$ ;

* $m_1 \equiv 0[5] \Leftrightarrow \overline{1x00y2}^8 \equiv 0[5] \Rightarrow x + 3y \equiv 0[5]$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 3y = 5k$. (**1**)

* $m_2 \equiv 0[5] \Leftrightarrow \overline{x1y003}^7 \equiv 0[5] \Rightarrow 2x + 3y \equiv 1[5]$, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que : $2x + 3y = 5k' + 1$. (**2**)

$$\begin{cases} x + 3y \equiv 0[5] \\ 2x + 3y \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 3y \equiv 0[5] \\ 2x + 3y \equiv 1[5] \end{cases} \Rightarrow x \equiv 1[5] \Rightarrow x = 5k + 1,\ k \in \mathbb{Z}$$

$0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq 5k + 1 \leq 6$, alors $k \in \{0; 1\}$

$$\begin{cases} \text{Si } k = 0; x = 1 \\ \text{Si } k = 1; x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y \equiv 0[5] \\ 2x + 3y \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 9y \equiv 0[5] \\ 2x + 3y \equiv 1[5] \end{cases} \Rightarrow 2y \equiv 1[5] \Leftrightarrow y \equiv 3[5], k \in \mathbb{Z}$$

$y = 5k + 3$

$0 \leq y \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq 5k + 3 \leq 6$, alors $k = 0 \Rightarrow y = 3$.

Pour que chacune des commerçantes puisse avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues, il faut que : $\boxed{x = 6}$ et $\boxed{y = 3}$.

2°)* Déterminons le montant que dispose chacune des commerçantes :

$m_1 = \overline{160032}^8 = 57370$ F et $m_2 = \overline{613003}^7 = 104275$ F

* Déduisons le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter :

Awa peut acheter $11474$ mangues et Fanta peut acheter $20855$ mangues

3°) a) $\boxed{m_1 = 57370 = 5 \times 2 \times 5737}$

$\boxed{m_2 = 104275 = 5^2 \times 43 \times 97}$

b)* Déduisons le nombre de diviseurs :

Pour $m_1$ le nombre de diviseur est : $(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8$

Pour $m_2$ le nombre de diviseur est : $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$

* $\boxed{\text{PGCD}\ (m_1\ ;\ m_2) = 5}$

4°) Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $m_1\text{u} + m_2\text{v} = 5$

$57370\text{u} + 104275\text{v} = 5 \Leftrightarrow 11474\text{u} + 20855\text{v} = 1$

Mohamine Diakité

Recherche d'une solution particulière :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | 1 | 1 | 4 | 2 | 13 | 2 | 4 | 1 | 6 |
| $a$ | 20855 | 11474 | 9381 | 2093 | 1009 | 75 | 34 | 7 | 6 |
| $b$ | 11474 | 9381 | 2093 | 1009 | 75 | 34 | 7 | 6 | 1 |
| $r$ | 9381 | 2093 | 1009 | 75 | 34 | 7 | 6 | 1 | 0 |

On a : $11474(3059) + 20855(-1683) = 1$, une solution particulière de l'équation $11474\mathrm{u} + 20855\mathrm{v} = 1$ est $(\mathrm{u_0}; \mathrm{v_0}) = (3059; -1683)$

$$- \begin{cases} 11474\mathrm{u} + 20855\mathrm{v} = 1 \\ 11474\mathrm{u_0} + 20855\mathrm{v_0} = 1 \end{cases}$$
$$\overline{11474(\mathrm{u} - \mathrm{u_0}) + 20855(\mathrm{v} - \mathrm{v_0}) = 0}$$

$11474(\mathrm{u} - \mathrm{u_0}) + 20855(\mathrm{v} - \mathrm{v_0}) = 0 \Leftrightarrow 11474(\mathrm{u} - \mathrm{u_0}) = 20855(-\mathrm{v} + \mathrm{v_0}) \Rightarrow$

- $20855/11474(\mathrm{u} - 3059)$ ⇒d'après Gauss $20855/(\mathrm{u} - 3059)$
  $\mathrm{u} - 3059 = 20855\mathrm{k} \Leftrightarrow \mathrm{u} = 20855\mathrm{k} + 3059$.
- $11474/20855(-\mathrm{v} - 1683)$ ⇒d'après Gauss $11474/(-\mathrm{v} - 1683)$
  $-\mathrm{v} - 1683 = 11474\mathrm{k} \Leftrightarrow \mathrm{v} = -11474\mathrm{k} - 1683$.

$$\boxed{\mathrm{S} = \{(20855\mathrm{k} + 3059; -11474\mathrm{k} - 1683) \text{ avec } \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}}$$

**II/** Cherchons la combinaison :

On a : $\overline{xyzth}$ en base $10$, alors

$0 \leq x \leq 9$ ; $0 \leq y \leq 9$ ; $0 \leq z \leq 9$ ; $0 \leq t \leq 9$ ; $0 \leq h \leq 9$

* Le premier chiffre est pair, alors $x \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$ ;
* La somme des deux premiers chiffres est 15, alors $x + y = 15$ ;
* Le troisième est la différence des deux premiers, alors $x - y = z$ ;
* Le $1^{er}$ chiffre est le produit du troisième par le quatrième, alors $z \cdot t = x$ ;
* Le nombre est divisible par 9, alors $x + y + z + t + h \equiv 0[9]$.

La valeur de $x$ qui vérifie tous les conditions est $8$ ; donc :

$x + y = 15 \Rightarrow \boxed{x = 8}$ et $\boxed{y = 7}$

$x - y = z \Rightarrow \boxed{z = 1}$ ; $z \cdot t = x \Rightarrow \boxed{t = 8}$

$x + y + z + t + h \equiv 0[9] \Leftrightarrow h \equiv 3[9] \Rightarrow h = 9k + 3 \Rightarrow \boxed{h = 3}$

La combinaison cherchée est : **87183**

**Exercice 20 :**

On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x, y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

1°) a) Une solution particulière de l'équation (E) est le couple $\boxed{(x, y) = (2; -3)}$

b) Résolvons l'équation (E) :

$8x + 5y = 1 \Leftrightarrow 8x = 1 - 5y \Rightarrow 8x \equiv 1[5] \Rightarrow x = 5k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$ en remplaçant $x$ par sa valeur dans l'équation $8x + 5y = 1$, on a : $y = -8k - 3$

$$\boxed{S = \{(5k + 2; -8k - 3);\ k \in \mathbb{Z}\}}$$

2°) Soit $N$ un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a, b)$ de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

a) <u>Montrons que le couple $(a, -b)$ est solution de (E)</u> :

On sait que : $N = N \Leftrightarrow 8a - 5b = 1 \Leftrightarrow 8a + 5(-b) = 1$ alors $(a, -b)$ est une solution de (E).

b) <u>Le reste de la division de $N$ par $40$</u> :

D'après la relation qui vérifie $N$, on a : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

D'après 2)a), $(a, -b)$ est une solution de (E), par suite

$\begin{cases} a = 5k + 2 \\ -b = -8k - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5k + 2 \\ b = 8k + 3 \end{cases}$ ; en remplaçant $a$ dans $N$,

on a : $N = 8a + 1 = 8(5k + 2) + 1 \Rightarrow N = 40k + 17 \Leftrightarrow N \equiv 17[40]$ alors le reste de la division euclidienne de $N$ par $40$ est $17$.

3°) a) <u>Résolvons l'équation</u> : $8x + 5y = 100$

$8x + 5y = 100 \Leftrightarrow 5y = 100 - 8y \Leftrightarrow 5y \equiv 4[8] \Rightarrow y \equiv 4[8]$

$y = 8k + 4\ , k \in \mathbb{Z}$ en remplaçant $y$ par sa valeur dans l'équation $8x + 5y = 100$,

on a : $x = -5k + 10$

$$\boxed{S = \{(-5k + 10; 8k + 4) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}}$$

b) Soit $\alpha$ le nombre d'hommes et $\beta$ le nombre de femmes :

D'après l'énoncé, on a : $8\alpha + 5\beta = 100$

D'après 3)a) on a : $\alpha = -5k + 10$ et $\beta = 8k + 4$

$\begin{cases} \alpha > 0 \Leftrightarrow -5k + 10 > 0 \Rightarrow k < 2 \\ \beta > 0 \Leftrightarrow 8k + 4 > 0 \Rightarrow k > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow k \in \{0; 1\}$

- Si $k = 0$, on a : $\alpha = 10$ et $\beta = 4$
- Si $k = 1$, on a : $\alpha = 5$ et $\beta = 12$

**<u>Exercice 21</u> :**

**I**/1°) <u>Résolvons dans $\mathbb{N}^2$ l'équation</u> : $x^3 - y^3 = 631$

$x^3 - y^3 = 631 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 631$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 631 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ (1 + y)^2 + (1 + y)y + y^2 = 631 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ 3y^2 + 3y + 1 = 631 \end{cases}$ ; L'équation $3y^2 + 3y + 1 = 631 \Leftrightarrow y^2 + y - 210 = 0$ a pour solution dans $\mathbb{N}$, $y = 14$. Si $y = 14$ alors $x = 15$.

$$\boxed{S = \{(15; 14)\}}$$

2°) a) * <u>Le reste de la division euclidienne</u> :

* <u>De $111$ par $7$</u> : est $6$

* <u>De $10^n$ par $7$</u> :

$10^0 \equiv 1[7]\ ;\ 10^1 \equiv 3[7]\ ;\ 10^2 \equiv 2[7]\ ;\ 10^3 \equiv 6[7]\ ;\ 10^4 \equiv 4[7]$

$10^5 \equiv 5[7]\ ;\ 10^6 \equiv 1[7]$

La période est $6$ donc :

- Pour $n = 6k$, on a : $10^{6k} \equiv 1[7]$



Malamine Diakité

- Pour $n = 6k + 1$, on a : $10^{6k+1} \equiv 3[7]$
- Pour $n = 6k + 2$, on a : $10^{6k+2} \equiv 2[7]$
- Pour $n = 6k + 3$, on a : $10^{6k+3} \equiv 6[7]$
- Pour $n = 6k + 4$, on a : $10^{6k+4} \equiv 4[7]$
- Pour $n = 6k + 5$, on a : $10^{6k+5} \equiv 5[7]$

Les restes de la division euclidienne de $10^n$ par $7$ sont : $1; 2; 3; 4; 5; 6$

b) Soit l'entier naturel $\mathrm{N} = 999\,888\,777\,666\,555\,444\,333\,222\,111$.

- Montrons que N peut s'écrire en fonction de $111$ :

$\mathrm{N} = 111 + 2 \times 111 \times 10^3 + 3 \times 111 \times 10^6 + 4 \times 111 \times 10^9 + 5 \times 111 \times 10^{12} + 6 \times 111 \times 10^{15} + 7 \times 111 \times 10^{18} + 8 \times 111 \times 10^{21} + 9 \times 111 \times 10^{24}$

$\boxed{\mathrm{N} = 111(1 + 2 \times 10^3 + 3 \times 10^6 + 4 \times 10^9 + 5 \times 10^{12} + 6 \times 10^{15} + 7 \times 10^{18} + 8 \times 10^{21} + 9 \times 10^{24})}$

- Le reste de la division euclidienne de N par $7$ :

$\mathrm{N} \equiv 6(1 + 5 + 3 + 3 + 5 + 1 + 0 + 6 + 2)[7] \Leftrightarrow \mathrm{N} \equiv 2[7]$ alors le reste de la division euclidienne de N par $7$ est $2$.

**Exercice 22 :**

1) $L = 525\ m$ ; $l = 285\ m$

Calculons :

a) La distance comprise entre deux arbres : C'est le $\mathrm{PGCD}(525; 285) = 15$.

La distance comprise entre deux arbres est $15\ m$.

b) Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ :

Le périmètre du champ : $P = 2(L + l) = 2(525 + 285) = 1620 \Rightarrow P = 1620$.

Le nombre d'arbres est : $n = \frac{P}{\mathrm{PGCD}(525;285)} = \frac{1620}{15} \Rightarrow \boxed{n = 108}$ on a $108$ arbres.

2) On considère l'équation $(\boldsymbol{E})$ : $11x - 26y = 1$, où $x$ et $y$ désignent deux nombres entiers relatifs.

a) Vérifions que le couple $(-7\ ;\ -3)$ est une solution de $(\boldsymbol{E})$ :

$11(-7) - 26(-3) = -77 + 78 = 1$ donc le couple $(-7\ ;\ -3)$ est une solution de $(\boldsymbol{E})$

b) Résolvons l'équation $(\boldsymbol{E})$ : $11x - 26y = 1$

$$-\begin{cases} 11x - 26y = 1 \\ 11x_0 - 26y_0 = 1 \end{cases}$$

$$\overline{11(x - x_0) - 26(y - y_0) = 0}$$

$11(x - x_0) - 26(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow 11(x - x_0) = 26(y - y_0) \Rightarrow$

- $26/11(x + 7) \Rightarrow$d'après Gauss $26/(x + 7)$

  $x + 7 = 26k \Rightarrow x = 26k - 7\ , k \in \mathbb{Z}$
- $11/26(y + 3) \Rightarrow$d'après Gauss $11/(y + 3)$

  $y + 3 = 11k \Rightarrow y = 11k - 3\ , k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\mathrm{S} = \{(26k - 7; 11k - 3) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}}$$



Makanine Diakité

3) Déduisons le couple d'entiers relatifs $(\mathrm{p}, \mathrm{q})$ solution de $(\boldsymbol{E})$ tel que : $0 \leq \mathrm{p} \leq 25$

D'après 2) on a : $\mathrm{p} = 26k - 7$ et $\mathrm{q} = 11k - 3$

$0 \leq \mathrm{p} \leq 25 \Leftrightarrow 0 \leq 26k - 7 \leq 25 \Leftrightarrow 0{,}26 \leq k \leq 1{,}25$, alors $k = 1$ et les valeurs de $\mathrm{p}$ et $\mathrm{q}$ sont : $\mathrm{p} = 19$ et $\mathrm{q} = 8$ d'où le couple $\boxed{(\mathrm{p}; \mathrm{q}) = (19; 8)}$

**II/** On appelle nombre triangulaire tout entier naturel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{\mathrm{a}^2+\mathrm{a}}{2}$ (avec $\mathrm{a} \in \mathbb{N}$).

1°) Démontrons que si $n$ est la somme de deux nombres triangulaires, alors $4n + 1$ est la somme de deux carrés :

Soit $n = \frac{\mathrm{a}^2+\mathrm{a}}{2} + \frac{\mathrm{b}^2+\mathrm{b}}{2} \quad \mathrm{a} > \mathrm{b} \ ; \ \mathrm{a} \in \mathbb{N} \ ; \ \mathrm{b} \in \mathbb{N}$

$4n + 1 = 2\mathrm{a}^2 + 2\mathrm{a} + 2\mathrm{b}^2 + 2\mathrm{b} = (\mathrm{a}^2 + 2\mathrm{a} + 2\mathrm{b} + 1 + \mathrm{b}^2) + \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2$

$= (\mathrm{a} + \mathrm{b} + 1)^2 - 2\mathrm{ab} + \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 = (\mathrm{a} + \mathrm{b} + 1)^2 + (\mathrm{a} - \mathrm{b})^2$

Alors $4n + 1 = (\mathrm{a} + \mathrm{b} + 1)^2 + (\mathrm{a} - \mathrm{b})^2$ est la somme de deux carrés. C.Q.F.D

2°) On pose $n = 3$.

$4n + 1 = 13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$ Vraie.

$3$ n'est pas la somme de deux nombres triangulaires mais $4(3) + 1$ est la somme de deux carrés donc la réciproque de la propriété **1°)** est fausse.

Malamine Diakité