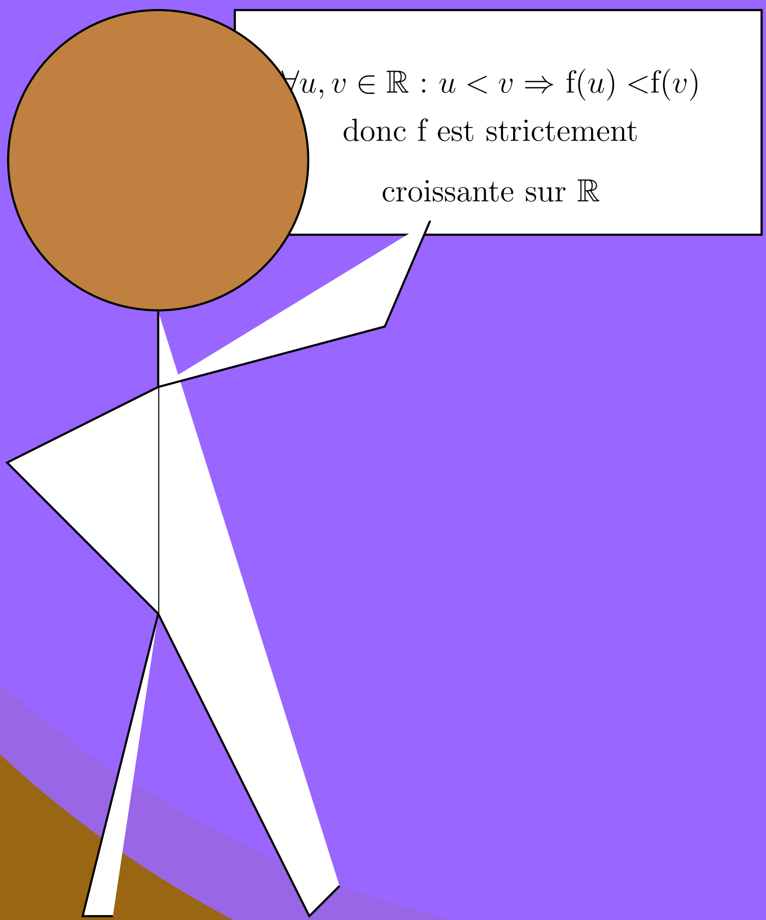
Notes de Cours de MATHÉMATIQUES

Fomesoutra.com
ça soutra !

AGOSSEME Kokou Anani
baudespoir@yahoo.fr
Tél : 92 47 81 85 / 99 68 64 43



Seconde S

Préambule

Ce document est une ébauche d'harmonisation de mes fiches de cours dispensé dans les classes de secondes scientifiques (2^{nde} S) et est basé sur l'Harmonisation des Programmes de Mathématiques (HPM) édition 2004 en vigueur dans l'enseignement des mathématiques au TOGO.
La méthode d'enseignement utilisée est en majorité la méthode active.

Sommaire

Première partie

Algèbre-Analyse

Calculs dans $\mathbb{R}$

Contenus

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 20)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

1. comparer deux réels.
2. calculer avec des puissances de 10 et avec des puissances entières d'un réels.
3. développer, réduire, ordonner, factoriser des expressions littérales et numériques. N.B : Les identités remarquables, vues en classe de 3^e, seront complétées par : $(a+b)^3$, $(a-b)$, a^3+b^3, a^3-b^3, $(a+b+c)^2$.
4. utiliser les propriétés élémentaires des racines carrées pour simplifier une expression.
5. effectuer des calculs avec racines carrées : dénominateur rationnel, élévation au carré pour comparer.
6. utiliser les propriétés de la relation d'ordre.
7. exprimer sans utiliser le symbole de la valeur absolue une expression comportant des valeurs absolues. N.B : On pourra habituer les élèves à presenter les résultats d'une valeur absolue dans un tableau ou un axe.
8. interpréter, graphiquement $x \in \mathscr{R}$, $|x-a| \leqslant$b, $|x-a| \geqslant$b ; a et b étant des réels.
9. reconnaître si un nombre réel est un nombre rationnel, un nombre décimal, un nombre entier.
10. donner la partie entière d'un réel dont on reconnaît le début de son écriture décimale.
11. déterminer son approximation décimale d'ordre n par défaut, par excès déterminer son arrondi d'ordre n.
12. trouver un encadrement d'un réel connaissant son arrondi d'ordre n.
13. montrer qu'un nombre α est une valeur approchée à ϵ près d'un nombre réel r.
14. m et p étant des réels, trouver un encadrement du réel m r + p connaissant un encadrement du réel r.
15. trouver un encadrement des réels r + s et r - s connaissant un encadrement des réels r et s.

1 ℝ et ses sous-ensembles

1.1 Rappels

1.1.1 Sous-ensembles de ℝ

- ℕ : ensemble des nombres entiers naturels ; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
- ℤ : ensemble des nombres entiers relatifs ; $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$
- 𝔻 : ensemble des nombres décimaux ; **Exemple** : 1,52 ; -O,56

Tout nombre décimal est sous la forme $\alpha \times 10^m$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $m \in Z$.

- ℚ : ensemble des nombres rationnels. Un nombre rationnel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. $\frac{p}{q}$ est appelé fraction.

Exemple 1.1

$4,363636\cdots = \frac{432}{99}$, $\frac{2}{5}$.

Remarque 1.1

L'écriture $4,363636\cdots$ *est appelée* ***écriture décimale illimitée****. Dans cette écriture décimale* 36 *se répète ; on dit que cette écriture décimale est périodique de période* 36 *: on écrit* $1,\underline{36}$.
Si l'écriture décimale d'un réel n'est pas périodique, ce réel ne peut s'écrire sous forme de fraction : on dit qu'il est ***irrationnel****.*

Exemple 1.2

$\pi = 1415926535\cdots$; $\sqrt{2} = 1,414213562\cdots$

- ℝ est l'ensemble des nombres réels : formé des rationnels et des irrationnels.

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs et $\mathbb{R}_-$ est l'ensemble des réels négatifs.

1.1.2 Notation scientifique

Un réel A est dit exprimé en notation scientifique lorsqu'il est sous la forme $A = \alpha \times 10^p$, où $p \in \mathbb{Z}$ et α est un réel ayant un seul chiffre non nul avant la virgule.

Exemple 1.3

$43,56 = 4,356 \times 10^1$; $-3,506 = -3,506 \times 10^0$ et $-0,004356 = -4,356 \times 10^{-3}$

EXERCICE 1.1

Calculer à l'aide d'une calculatrice et donner le résultat sous forme de notation scientifique : 2000×206 ; $0,87 \times 0,603$; $\frac{65 \times 0,6}{0,078 \times 10^{-2}}$

Solution:

1.1.3 Les règles de calcul dans ℝ

EXERCICE 1.2

Calculer les nombres suivants en présentant le résultats sous forme de fraction irréductible.

$A = \dfrac{3}{-\frac{6}{5}}$; $B = \dfrac{2}{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}$, $C = \dfrac{\frac{3}{5}-\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}-\frac{2}{5}}$ et $D = \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}} \times \dfrac{\frac{3}{4}-\frac{4}{5}}{\frac{3}{4}-\frac{4}{5}} \div \dfrac{-2+\frac{1}{3}}{-2-\frac{1}{3}}$

EXERCICE 1.3

Écrire les nombres suivants à l'aide de puissances entières de nombres premiers :

$A = \dfrac{6^3 \times 5^{-7} \times 7^3}{7^3 \times 7^7 \times 12^6}$; $B = \dfrac{8,1 \times 10^{-2} \times 0,36 \times 2560}{(24 \times 10^{-1} \times 6)^2 \times 216 \times 64 \times 10^{-2}}$.

EXERCICE 1.4

1) Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$A = (x+2)(x^2-1)-(2x-1)(2x+1)$; $B = (x+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}-1)^2$;

$C = (a+b+c)^2$; $D = (a+b)^3$; $E = (a-b)^3$; $F = (a+b)(a^2-ab+b^2)$;

$F = (a-b)(a^2+ab+b^2)$; $G = (x-1)^3$

2) Factoriser les expressions suivantes :

$A = (2x+1)(2x-6)+(x+5)(3-x)$; $B = x^3-27+(x-3)(4x+3)$;

$C = (x^2-9)^2-(2x-1)^2$ $D = 8-12x+6x^2-x^3$ et $E = (x-\sqrt{2})^2-2(\sqrt{2}-2X)(x-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-2x)^2$.

3) Soit x, y et z trois nombres réels deux à deux distincts.Simplifier $A = \dfrac{x}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y}{(y-x)(y-z)} + \dfrac{z}{(z-x)(z-y)}$

EXERCICE 1.5

Simplifier au maximum sans radical au dénominateur

$A = \dfrac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{1+\sqrt{2}}}}$, $B = \sqrt{54}+\sqrt{24}-\sqrt{600}$, $C = -\dfrac{14}{\sqrt{7}}$

1.1.4 Comparaison des nombres réels

EXERCICE 1.6

1) Comparer $\dfrac{7}{5}$ et $\dfrac{10}{7}$

2) Calculer $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$. En déduire une comparaison de $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ et $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Définition 1.1

Soit a et b deux nombres réels.

$$\begin{aligned} a \leqslant b \quad &\Leftrightarrow \quad a-b \leqslant 0 \\ a \geqslant b \quad &\Leftrightarrow \quad a-b \geqslant 0 \end{aligned}$$

Propriété 1.1

Soit a, b, $c \in \mathbb{R}$. Alors :
- $a \leqslant a$
- $a \leqslant b$ et $b \leqslant a \Rightarrow a = b$.
- $a \leqslant b$ et $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$.

Propriété 1.2

Soit a, $b \in \mathbb{R}$:
- Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$;
- Si $c \geqslant 0$ alors $a \leqslant b \Rightarrow a \times c \leqslant b \times c$;
- Si $c \geqslant 0$ alors $a \leqslant b \Rightarrow a \times c \leqslant b \times c$;

En particulier $a \leqslant b \Rightarrow -a \geqslant -b$

Propriété 1.3

- Pour tout a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ on a $\left\{\begin{array}{ccc} a & \leqslant & b \\ c & \leqslant & d \\ \hline a+c & \leqslant & b+d \end{array}\right.$
- Si a, b, c et d sont tous positifs alors $\left\{\begin{array}{ccc} a & \leqslant & b \\ c & \leqslant & d \\ \hline a\times c & \leqslant & b\times d \end{array}\right.$;
- Si a et b sont tous positifs alors $a \leqslant b \Rightarrow a^2 \leqslant b^2$ et $a \leqslant b \Rightarrow \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$;
- Si a et b sont tous différents de zéro et de même signe alors $a \leqslant b \Rightarrow \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$.

EXERCICE 1.7

1) Comparer $3\sqrt{5}$ et 7 ; $-\dfrac{1}{13}$ et $-\dfrac{1}{2\sqrt{42}}$; puis $2 - 2\sqrt{7}$ et $2 - 3\sqrt{3}$.

2) Soit a un nombre réel supérieur ou égal à 4.
   a) Quelle est le signe de $2 - \sqrt{a}$?
   b) Développer $(2 - \sqrt{a})^2$.
   c) Comparer $\sqrt{4 + a - 2\sqrt{a}}$ et $\sqrt{a} - 2$.

3) Soit a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.
   a) Démontrer que $a < \dfrac{a+b}{2}$.
   b) Démontrer que $\dfrac{1}{a-b} < \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$.
   c) Démontrer que $a < \sqrt{ab} < b$.

4) Soit x et y deux nombres tels que $1 < x < 2$ et $-3 < y < -2$.
   a) Donner un encadrement de y^2
   b) Donner un encadrement de $\dfrac{y - x}{x.y^2}$.

1.2 Partie entière

Définition 1.2
Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle partie entière *de x notée $E(x)$ l'entier relatif n vérifiant $n \leqslant x \leqslant n+1$.*

Exemple 1.4
$E(8,7) = 8$; $E(8,5) = 8$; $E(-8,7) = -9$; $E(8) = 8$; $E(-8) = -8$; $E(\pi) = 3$

Remarque 1.2
- ♠ Si $m \in \mathbb{Z}$ alors $E(m) = m$
- ♠ Si $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{Z}$ alors $E(x+m) = m + E(x)$
- ♠ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $E(x) \leqslant x < E(x)+1$
- ♠ Si $m \in \mathbb{Z}$ alors $\forall x \in [m, m+1[,\ E(x) = m$

EXERCICE D'APPLICATION 1.1
1) Donner la partie entière des nombres suivants(utiliser la calculatrice si besoin est) : $0,001$; -3×10^{-5} ; $\dfrac{13\sqrt{2}-\sqrt{15}}{8}$; $\dfrac{E(10^3\pi)}{3}$.
2) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   a) Montrer que $x-1 < E(x) \leqslant x$ et que $-\dfrac{1}{2} \leqslant x - E(x+\dfrac{1}{2}) < \dfrac{1}{2}$
   b) Déterminer l'intervalle auquel appartient x si $E(x) = 1$ puis si $E(2x-\dfrac{1}{2}) = 3$.

2 Valeur absolue et distance sur la droite numérique

2.1 Rappels

Définition 2.1
La valeur absolue d'un nombre réel a, notée $|a|$, est le plus grand entre a et $-a$.

Définition 2.2
Soit $x, y \in \mathbb{R}$. La distance de x à y, notée $d(x,y)$, est $|x-y|$.

Propriété 2.1
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Alors on a :

$\lvert a\rvert \geqslant 0$	$\lvert a\rvert = 0 \Leftrightarrow a = 0$
$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$	$\lvert a\rvert = \begin{cases} a \text{ si } a \geqslant 0 \\ -a \text{ si } a \leqslant 0 \end{cases}$
$\lvert a\rvert = \lvert b\rvert \Leftrightarrow a = b ou a = -b.$	$\sqrt{a^2} = \lvert a\rvert$
$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert \times \lvert b\rvert$	Si $b \neq 0$ alors $\lvert\dfrac{a}{b}\rvert = \dfrac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$
$\lvert a+b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	$\lvert a\rvert \leqslant r \Leftrightarrow -r \leqslant a \leqslant r$

EXERCICE 2.1
1) Déterminer la valeur absolue des réels suivants : $A = 1-\sqrt{2}$, $B = -\sqrt{2}+\sqrt{3}$.
2) Calculer la distance entre A et B.
3) Placer le réel $C = \dfrac{5}{2}$ sur un axe gradué. Déterminer les réels x tels que $d(x, C) = 2$ puis les réels y tels que $d(y, C) = \dfrac{3}{2}$.

2.2 Résolution d'inéquations

EXERCICE 2.2
1) On considère l'intervalle $[1;4]$.
a) Représenter graphiquement cet intervalle sur une droite graduée. Déterminer son centre c, son amplitude A et son rayon r.
b) Placer un réel $x \in [1;4]$ sur la droite. Comparer au rayon la distance entre x et c.
c) Exprimer ce résultat en utilisant le symbole de valeur absolue.
2) Répondre aux mêmes questions pour l'intervalle $]-3;1[$.
3) Déterminer graphiquement l'intervalle des réels x tels que $|x+\dfrac{1}{2}| \leqslant 2$.

EXERCICE 2.3
1) Représenter graphiquement l'intervalle $]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$. En s'appuyant sur les résultats de l'exercice précédent, interpréter à l'aide de valeur absolue l'expression $x \in]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$.
2) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :$|x-3| > 2,5$; $|x+2| \geqslant 1$; $|x+\dfrac{1}{2}| < -1$; $|-2x+1| \leqslant 1$; et $|6x+8| < -2$.

EXERCICE 2.4
1)Étudier le signe de $-\dfrac{1}{2}x-3$ suivant les valeurs de x puis écrire l'expression $|-\dfrac{1}{2}x-3|$ sans le symbole de la valeur absolue.
2) Écrire sans le symbole de la valeur absolue : $A(x) = |2x+1|$; $B(x) = |-2x+1| - |x+4|$.

2.3 Calcul approché

2.3.1 Valeur approchée

Définition 2.3
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On dit qu'un nombre réel b est une **valeur approchée** *de a à ε près $|a-b| \leqslant \varepsilon$..*
On écrit $a \approx b$ à ε près. $\boldsymbol{\varepsilon}$ est appelé **incertitude** *de cette valeur approchée.*

Exemple 2.1
On a $\sqrt{2} = 1,4142135623731\cdots$. Donc $|\sqrt{2}-1,414| = 0,0002135623731\cdots$; ainsi $|\sqrt{2}-1,414| \leqslant 10^{-3}$.
D'où 1,414 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

EXERCICE D'APPLICATION 2.1
Déterminer cinq autres valeurs approchées de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

Remarque 2.1

♠ Soit b est une valeur approchée de a à ε près alors $b-\varepsilon \leqslant a \leqslant b+\varepsilon$. Ceci est un encadrement de a à d'amplitude 2ε. b est le centre de l'intervalle $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$. On ne sait pas si b est plus grand ou plus petit que a.Alors :

➢ Si b est plus petit que a, on dit que b est une valeur approchée de a à ε près par défaut.

➢ Si b est plus grand que a, on dit que b est une valeur approchée de a à ε près par excès.

♠ Parmi les valeurs approchées de a à 10^{-p} près où $p \in \mathbb{N}$, deux sont importantes :

➢ l'approximation décimale d'ordre p par défaut qui est le nombre décimal $\alpha \leqslant a$ et pouvant s'écrire avec p chiffres après la virgule.

➢ l'approximation décimale d'ordre p par excès qui est le nombre décimal $\beta > a$ et pouvant s'écrire avec p chiffres après la virgule.

2.3.2 Arrondi d'ordre p

Si l'on connaît le début de l'écriture décimale d'un réel, alors son arrondi d'ordre p est égal à :
➢ son approximation décimale d'ordre p par défaut si le $p+1^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule est 0 ; 1 ; 2 ; 3 ou 4.
➢ son approximation décimale d'ordre p par excès si le $p+1^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule est 5 ; 6 ; 7 ; 8 ou 9.

EXERCICE D'APPLICATION 2.2

1) On donne $x = 1.73205080756888\cdots$ et $y = 2.64575131106459\cdots$.

a) Donner un encadrement de x et de y par leurs approximations décimales d'ordre 3 par défaut et par excès.

b) Donner l'arrondi d'ordre 3 de x puis de y.

c) Trouver un réel a tel que $a \times 10^{-2} < xy < (a+1) \times 10^{-2}$.

2) Soit α un réel dont l'arrondi d'ordre 2 est 1,51. Donner le meilleur encadrement possible de $-2\alpha+3$.

3) Un rectangle a pour dimensions les réels L et l. On suppose que 2,15 est une valeur approchée de L à 5×10^{-2} près et 1,35 est une valeur approchée de l à 5×10^{-2} près.

a) Donner un encadrement du périmère et de l'aire de ce rectangle avec le plus de précision possible.

b) Ce rectangle est en fait la base d'un pavé droit de hauteur 3. Donner une valeur approchée du volume de ce pavé. Préciser l'incertitude de cette valeur approchée.

3 Majorant, minorant, maximum et minimum

Définition 3.1

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ *non vide.*
➢ *On dit que* M *est un majorant de A si* M *est plus grand que tous les éléments de A.*
➢ *On dit que* m *est un minorant de A si* m *est plus petit que tous les éléments de A.*
➢ *Lorsqu'il existe le plus grand élément de A est appelé* ***maximum de A****.*
➢ *Lorsqu'il existe le plus petit élément de A est appelé* ***minimum de A****.*
Un ensemble qui admet un majorant (respectivement un minorant) est dit majoré (respectivement minoré)

EXERCICE D'APPLICATION 3.1

Soit $A = \left\{1; -3; \sqrt{3}; \dfrac{2}{5}\right\}$, $B = [2;3[$ et $C =]-\infty, -2[$.
Déterminer si possible deux majorants, deux minorants, le minimum et le maximum de A.
Répondre aux mêmes questions pour les ensembles B et C.

Fonctions numériques : généralités et étude de quelques fonctions usuelles

Contenus

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 21)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

1. des relations binaires étant données :
   • déterminer images et antécédents
   • reconnaître les fonctions
   • reconnaître les applications parmi les fonctions

2. une fonction étant donnée :
   • déterminer son ensemble de définition
   • déterminer image et image réciproque d'un sous-ensemble.

3. reconnaître les fonctions égales, ou coincidant sur un ensemble.
   N.B : A propos de ces généralités, on s'attachera à travailler sur des fonctions, non forcément numériques, en particulier prendre quelques exemples géométriques. Les relations, fonctions, applications devront être données sous différentes formes : • lien verbale ou programme de construction
   • représentation graphique
   • formule explicite.

4. construire une représentation graphique point par point.

5. reconnaître sur la représentation graphique d'une fonction le sens de variation et établir le tableau de variation.

6. démontrer qu'une fonction est croissante ou décroissante sur un intervalle donné et déterminer les coordonnées des extrema éventuels
   N.B : Le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle I s'établira en utilisant les définitions suivantes :
   • (f croissante sur I)$\Longleftrightarrow$ ($(u,v) \in I^2, (u < v) \Longrightarrow f(u) \leqslant f(v)$)
   • (f décroissante sur I)$\Longleftrightarrow$ ($(u,v) \in I^2, (u < v) \Longrightarrow f(u) \geqslant f(v)$)
   • (f constante sur I)$\Longleftrightarrow$ ($(u,v) \in I^2$, f(u) = f(v)

7. déterminer l'allure d'une courbe à partir d'un tableau de variation.

8. utiliser un graphique pour résoudre des équations du type : x$\in \mathscr{R}$, f(x) = k, k$\in \mathscr{R}$

9. résoudre un problème en réalisant un graphique.

10. une fonction usuelle étant données, établir le tableau de variation et tracer la courbe représentative.

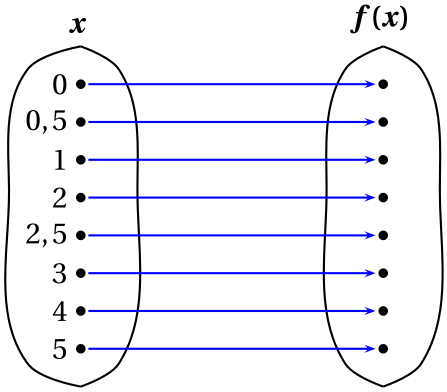
Dans tout le chapitre le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1 Généralités sur les focntions

1.1 Définitions

Activité 1.1

L'unité de mesure est le centimètre.ABC est un triangle rectangle en C tel que $AB = 6 - x$ et $AC = x$; avec $x \geqslant 0$.
1) Calculer BC en fonction de x.
Pour signifier que BC est en fonction de x, on écrit $BC = f(x)$ et on dit qu'on a définit une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2) Pour chacun des x donnés, calculer si possible, la valeur numérique de f puis compléter le diagramme ci-contre :



Solution:
1) On a $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (théorême de Pythagore) donc $BC^2 = AB^2 - AC^2 = (6-x)^2 - x^2$.D'où $BC = \sqrt{36 - 12x}$.
2)

Remarque 1.1

♠ La fonction f est notée : $f: \begin{array}{rcl} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{36-12x} \end{array}$
et on lit : " f définie de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ qui à x associe $\sqrt{36-12x}$ "
♠ Pour un x donné, la valeur numérique de f correspondante est appelée image de x par f
Exemple : l'image de 1 est $\sqrt{24}$ .On dit aussi que $\sqrt{24}$ est l'antécédent de 1.
♠ Si l'image $f(x)$ existe on dit que f est définie en x ou que x appartient à l'ensemble de définition de f noté $\mathscr{D}_f$.

Définition 1.1

Soit A et B deux ensembles non vide. On appelle fonction de A vers B, toute correspondance *f qui à tout élément de A associe au* plus un *élément de B*
♠ $\mathscr{D}_f = \{x \in A / f(x) \text{ existe dans } B\}$
On a $\mathscr{D}_f \subset A$. Si $\mathscr{D}_f = A$, alors on dit que f est une application

Activité 1.2

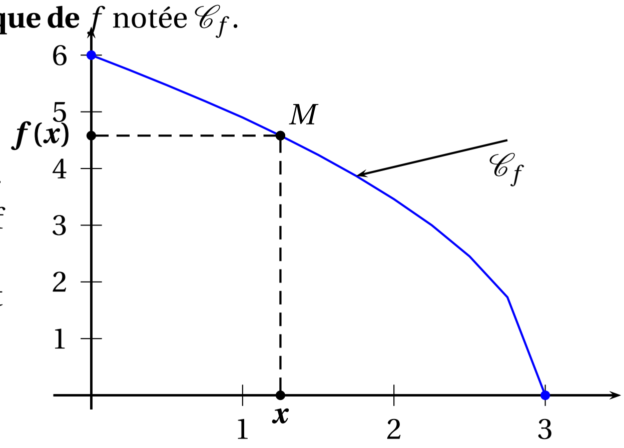
On considère la fonction $f: \begin{array}{rcl} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{36-12x} \end{array}$ de l'activité précédente
1) Quelles sont les contraintes sur x pour que $f(x)$ existe ?

2) En déduire l'ensemble de définition de f.
3) Compléter le tableau suivant :

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
$f(x)$													

4) L'unité graphique du repère orthonormé (O,I,J) est 2cm. Placer les points $M(x, f(x)$ puis relier chaque point et son suivant par un segment
La ligne obtenue est appelée **représentation graphique de** f notée $\mathscr{C}_f$.

Solution:

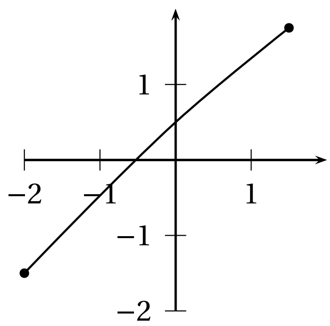


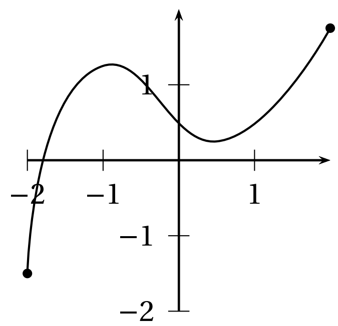
1) $f(x)$ existe si, et seulement si $x \in [0, +\infty[$ et $36 - 12x \geqslant 0$ car la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.
2) Donc $f(x)$ existe si, et seulement si $x \in [0, +\infty[$ et $3 \geqslant x$. D'où $\mathscr{D}_f = [0; 3]$

1.2 Image directe, Image réciproque

Activité 1.3

Soit les fonctions f et g définies par la représentations graphiques suivantes : 1) Gétermi-ner graphiquement l'image 2 ; -1,5 ; 5.
2) Géterminer graphiquement l'antécédent de -6 ; -0,5 ; 2.
3) Déterminer l'ensemble des images des éléments de l'intervalle [-1 ; 1,5].
4) Quels sont les x qui ont leurs image dans l'intervalle [0 ;1].



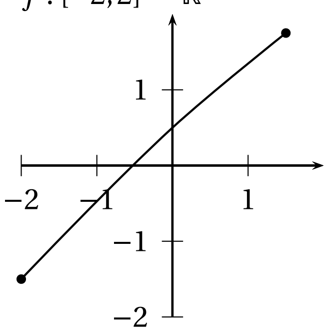


5) On donne $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{2}{E(x-1)} \end{array}$ a) Calculer l'image de 2 ; 4 ; $\sqrt{3}$ b) Déterminer l'image réciproque de $\dfrac{1}{2}$

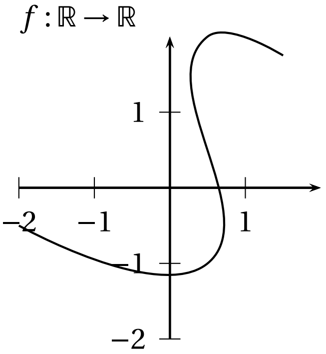
EXERCICE D'APPLICATION 1.1

Les relations suivantes de sont données par leurs représentations graphiques.Préciser les fonctions et les applications.
Dans le cas où on a une fonction, donner l'ensemble de définition.

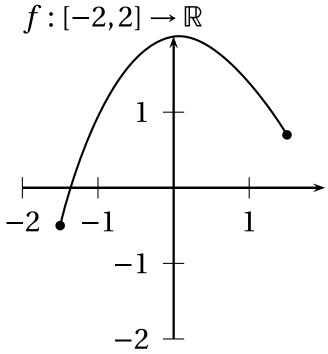
$f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$



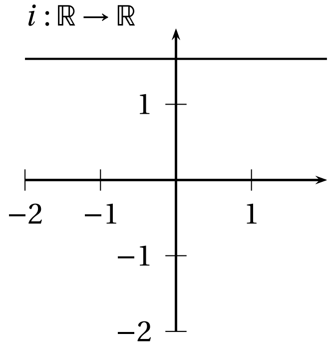
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$



$i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



EXERCICE D'APPLICATION 1.2

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{2x+3}\end{array}\qquad g:\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sqrt{x-1}+\dfrac{x}{|x-2|}\end{array}\qquad h:\begin{array}{rcl}[-2;3] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{E(2x-1)}\end{array}$$

2) Soit A et B deux points du plan tels que $||\overrightarrow{AB}|| = 4$.

a) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -2$.

b) En déduire l'ensemble de définition de la fonction $f:\begin{array}{rcl}\mathscr{P} & \to & \mathscr{P}\\ M & \mapsto & \dfrac{AB}{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2}\end{array}$.

c) Calculer $f(A)$, $f(B)$ et $f(I)$; où I est le milieu du segment $[AB]$.

1.3 Fonctions égales sur un ensemble

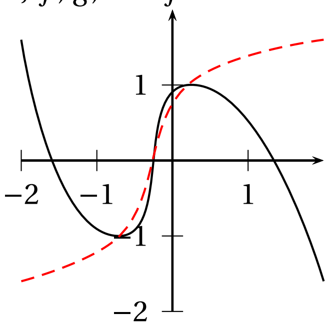
Définition 1.2

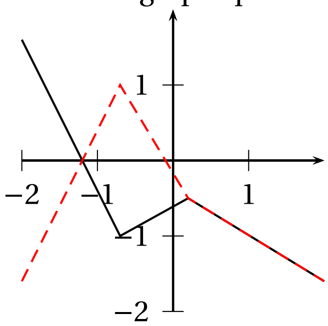
Deux fonctions f et g sont égales (ou coïncident) sur un ensemble K si $K \subset D_f \cap D_g$ et $\forall x \in K, f(x) = g(x)$.

Si f et g sont égales sur K alors elles ont la même courbe sur K.

EXERCICE D'APPLICATION 1.3

1) f, g, h et j sont définies par leurs représentations graphiques suivantes.





Déterminer les ensembles sur lesquels f et g coïncident

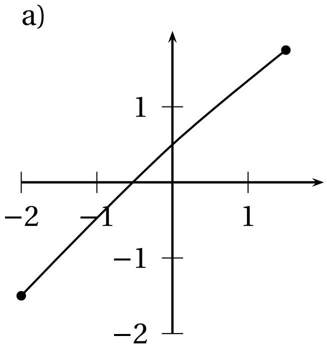
Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto -x+2$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto |x-2|$. Montrer que f et g coïncident sur $K =]-\infty, 2]$

1.4 Sens de variation, extremum d'une fonction

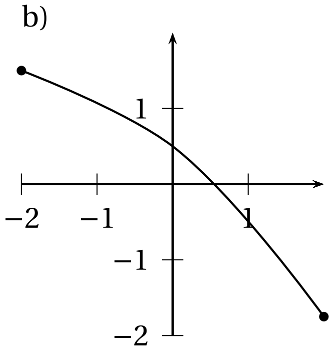
Activité 1.4

Dans chaque cas la fonction f est définie sur [-2,2]

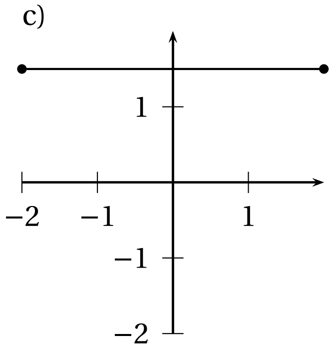
a)



b)



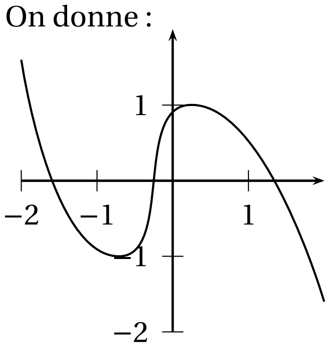
c)



Soit $a, b \in [-2,2]$ tels que $a < b$. Comparer $f(a)$ et $f(b)$

EXERCICE D'APPLICATION 1.4

On donne :



1) Dresser le T.V de f

2) Déterminer la plus grande et la plus petite valeur de f

2 Étude de quelques fonctions usuelles

2.1 Fonctions affines par intervalles

Les fonctions affines sont les fonctions de la forme $\begin{cases} f:\mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto ax+b \end{cases}$

Si $a<0$ alors f est strictement croissante.

Si $a>0$ alors f est strictement décroissante.

Si $a=0$ alors f est strictement constante.

EXERCICE 2.1

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = & -2x-3 & \text{si } x\in[-3;-1] \\ f(x) = & x+1 & \text{si } x\in]-1;2[\\ f(x) = & 1 & \text{si } x\in[2;4[\end{cases}$

La fonction ainsi définie est une fonction affine par intervalle.

1) Déterminer son ensemble de définition de f.

2) Calculer l'image par f de -3, -1, 2, 4, $\dfrac{-4}{3}$ et 0.

3) Déterminer le sens de variation de f sur chacun des intervalles $[-3;-1]$, $]-1;2[$ et $[2;4[$.

4) Tracer les droites $(D_1): -2x-3$, $(D_2): y=x+2$ et $(D_3): y=1$.

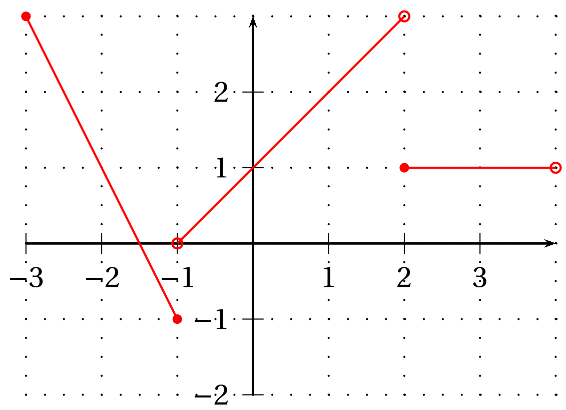
5) En déduire la représentation graphique de f.

6) Déterminer graphiquement l'image-directe par f de l'intervalle $[-3;-2[$, $[1;2]$ et $[3;4[$.

7) Déterminer graphiquement l'image-réciproque par f de 3, 2, 1 puis de l'intervalle $[2;3]$.

Solution:

5)



EXERCICE 2.2

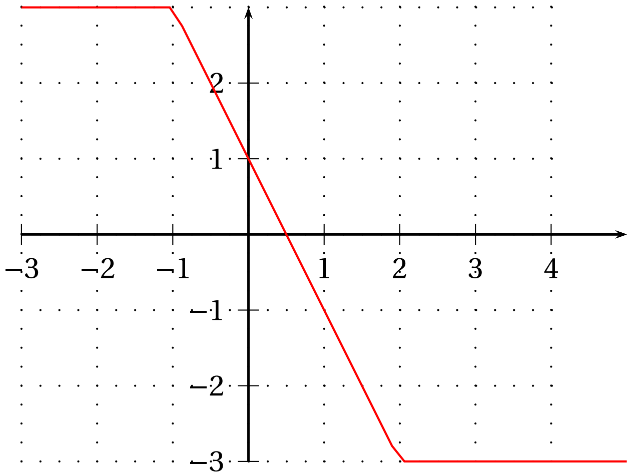
1) Soit $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$

a) Écrire $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.
b) En déduire que f est une fonction affine par intervalle.
c) Dresser le tableau de variation de f.
d) Construire la représentation graphique de f.

2) Soit $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |-x+2|-|x+1| \end{array}$

a) Écrire $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.
b) En déduire que f est une fonction affine par intervalle.
c) Dresser le tableau de variation de f.
d) Construire la représentation graphique de f.

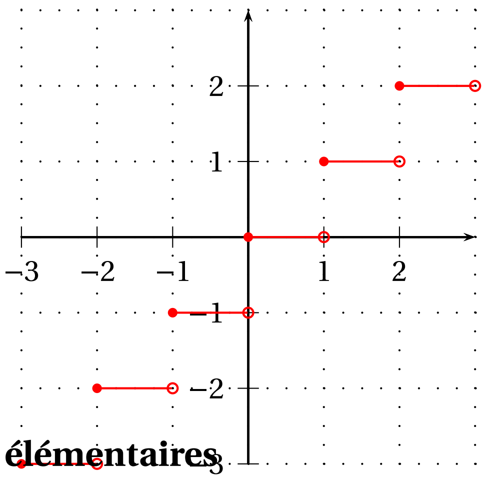
<u>Solution:</u>
2d)



EXERCICE 2.3

Construire la représentation graphique de la fonction $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & E(x) \end{array}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

<u>Solution:</u>



2.2 Quelques fonctions élémentaires

2.2.1 La fonction carrée

EXERCICE 2.4

Soit $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

1) Soit $a, b \in]-\infty, 0[$ tels que $a < b$. Comparer $f(a)$ et $f(b)$.
En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.
2) Déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3) Dresser le tableau de variation de f. Quelle est le minimum de f En quelle x est-il atteint ?.
4) Compléter le tableau suivant :

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$									

5) Construire la représentation graphique de la fonction f.
6) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$ puis l'inéquation $f(x) > 4$.

2.2.2 La fonction racine carrée

EXERCICE 2.5
Soit $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$
1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2) Déterminer le sens de variation de f sur $\mathscr{D}_f$.
3) Dresser le tableau de variation de f. Préciser l'extremum de f.
4) Construire la représentation graphique de la fonction f.

2.2.3 La fonction inverse

EXERCICE 2.6
Soit $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$
1) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ puis sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2) Dresser le tableau de variation de f.
4) Compléter le tableau suivant :

x	-2	-1,5	-1	-0,5	X	0,5	1	1,5	2
$f(x)$									

3) Construire la représentation graphique de la fonction f.

2.2.4 La fonction cube

EXERCICE 2.7
Soit $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$
1) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Construire la représentation graphique de la fonction f.

2.3 Composée de fonctions élémentaires suivie de fonction linéaires

2.3.1 Fonctions polynômes du second degré

EXERCICE 2.8
Soit $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 + 6x + \dfrac{3}{2} \end{array}$
1) Montrer que $f(x) = 2(x + \dfrac{3}{2})^2 - 3$
2) Soit $a, b \in]-\infty, -\dfrac{3}{2}$.

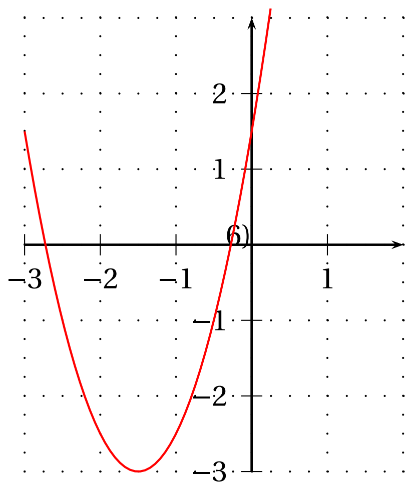
a) Donner les expressions de $f(a)$ et $f(b)$.
b) On suppose que que $a < b$. Montrer que $f(a) < f(b)$.

En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty, -\frac{3}{2}[$.

3) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\frac{3}{2}, +\infty[$.
4) Dresser le tableau de variation de f. Déterminer l'extremum de f.
5) Construire la représentation graphique de la fonction f.
6) Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 2$ et $f(x) = -4$ puis l'inéquation $f(x) < 0$. 7) Étudier et représenter graphiquement la fonction $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2x^2+4x+3 \end{array}$

Solution:

5)



Remarque 2.1

*La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré s'appelle une **parabole**.*
*On sait qu'une fonction polynôme du second degré est du type $f : x \mapsto ax^2+bx+c,\ a \neq 0$. La forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. Le point $S(\alpha,\beta)$ est appelé **sommet** de la parabole.*

2.3.2 Fonctions homographiques

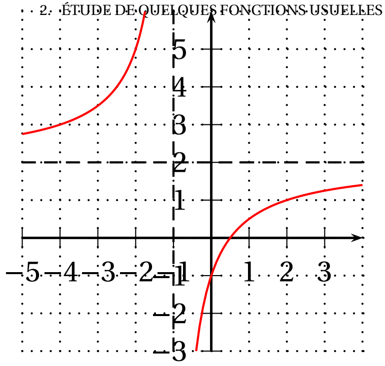
EXERCICE 2.9

Soit $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x-1}{x+1} \end{array}$

1) Montrer que $f(x) = 2 - \frac{3}{x+1}$.
2) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
3) Déterminer le sens de variation de f sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) a) Construire les droites $(D) : x = -1$ et $(D') : y = 2$.
b) Construire la représentation graphique de la fonction f.

Solution:

5)



Remarque 2.2

Une fonction homographique est une fonction du type $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $ad-bc \neq 0$ et $c \neq 0$. La représentation graphique d'une fonction homographique s'appelle une **hyperbole**.
On peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \dfrac{k}{x-p} + q$ avec $p = -\dfrac{d}{c}$, $q = \dfrac{a}{c}$ et $k = b - \dfrac{ad}{c}$.
Le point $\Omega(p,q)$ est appelé **centre de symétrie** de l'hyperbole.

2.3.3 Fonction avec radical

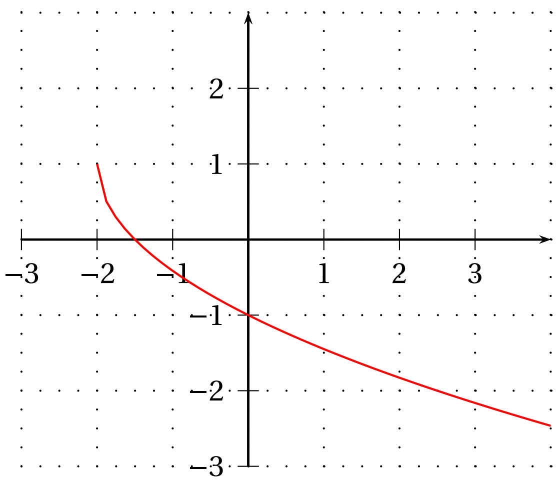
EXERCICE 2.10

Soit $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\sqrt{2x+4}+1 \end{array}$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2) Déterminer le sens de variation de f sur $\mathscr{D}_f$.
3) Dresser le tableau de variation de f. Préciser l'extremum de f.
4) Construire la représentation graphique de la fonction f.

Solution:

5)



Fonctions polynômes, fonctions rationnelles

Contenus

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 22)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

1. reconnaître une fonction polynôme, une fonction rationnelle.

2. développer, réduire une polynôme, la factoriser dans le cas où un facteur commun apparaît, où on reconnaît une identité remarquable.

3. trouver la fonction polynômes Q telle que P(x) = (x-α)Q(x), par la méthode des coefficients indéterminés ou par la division euclidienne, connaissant un zéro α d'une fonction polynôme P de degré 2 ou 3.

4. trouver la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré et la factoriser en utilisant cette forme (lorsque cela est possible).

5. f désignant une fonction polynôme ou une fonction rationnelle, étudier le signe de f(x) suivant les valeurs de x.
   N.B :
   • On travaillera sur les fonctions polynômes (il n'est pas utile de distinguer polynômes et fonctions polynômes).
   • Pas d'étude générale sur la fonction polynôme du second degré par calcul du discriminant.

1 Fonctions polynômes

1.1 Révision des acquis

EXERCICE 1.1
Soit $P(x) = x(x-1)(x+2)(x-3)+(2x+4)(x-1)$.
1) Développer, réduire et ordonner $P(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.
2) Quels sont les monômes qui composent $P(x)$.Quels sont les cœfficients de $P(x)$.
3) Quel est le degré de $P(x)$.
4) Calculer la valeur numérique de P pour $x = 4$; $x = 1$; $x = -3$ et $x = -2$.

Définition 1.1
Soit $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0$ des nombres réels avec $a_n \neq 0$. La somme algébrique $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ est appelée polynôme*. Chaque terme de cette somme est appelée* monôme*.*
n est appelé degré de *P et est noté dřP. Les réels $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0$ sont les* les cœfficients de *P.*
Pour deux polynômes P et Q,on a dř$(P+Q) \leqslant max\{$dřP, dřQ$\}$ et dř$(PQ) =$ dřP + dřQ

Propriété 1.1
Deux polyôme sont égaux si, et seulement si les cœfficients des termes de même degré sont égaux

1.2 Factorisation d'une fonction polyôme

1.2.1 Zéro d'une fonction polyôme

Définition 1.2
On appelle zéro d'un polynôme $P(x)$ tout nombre réel α tel que $P(\alpha) = 0$.

Exemple 1.1
Dans l'exercice précédent 1 et -2 sont des zéros de $P(x)$.

1.2.2 Factorisation d'une fonction polyôme

➧ **Utilisation des identités remarquables et de facteurs communs**

EXERCICE 1.2
Factoriser les expressions suivantes
$f(x) = (2x-1)(x-3)+(5-x)(3-x)-x+3$; $g(a) = (a^3-8)+(a-2)(4a+5)$
$h(t) = t^4+4t^2+4$; $P(x) = (x-\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})+3$

➧ **Polynôme du second degré**

Activité 1.1

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et γ un nombre réel.

1) Montrer que $x^2 + \gamma x = (x + \frac{\gamma}{2})^2 - \frac{\gamma^2}{4}$

2) En mettant a en facteur, déduire du résultat précédent que $P(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$.

Remarque 1.1

L'écriture $P(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$ *est appelée forme canonique de* $P(x)$.

EXERCICE 1.3

Donner la forme canonique des polynôme suivants puis factoriser si possible.

$f(t) = 2t^2 + 4t - 6$; $P(x) = -5x^2 + 2x + 7$; $Q(x) = 3x^2 - 2x - 1$; $R(y) = y^2 + y + 1$; et $S(u) = -u^2 + 2u - 1$

❥ Polynôme de degré supérieur à deux

Propriété 1.2

Soit $f(x)$ un polynôme de degré supérieur à deux et α un nombre réel.
Si α est un zéro de $f(x)$ alors il existe un polynôme $g(x)$ tel que $d\check{r}g = d\check{r}f - 1$ et $f(x) = (x - \alpha)g(x)$. On dit alors que $f(x)$ est divisible ou factorisable par $x - \alpha$ et que $g(x)$ est le quotient de $f(x)$ par $x - \alpha$.

Il existe deux méthodes fondamentales pour déterminer le quotient de $f(x)$ par $x - \alpha$: **la méthode de la division euclidienne et la méthode des cœfficients indéterminés**.

Exemple 1.2

Soit $f(x) = -2x^3 - x^2 + 4x - 4$.

On a $f(-2) = 0$ donc -2 est un zéro de $f(x)$. Ainsi $f(x)$ est divisible par $x - 2$. Il existe un polynôme $g(x)$ tel que $f(x) = (x+2)g(x)$.

Méthode de la division euclidienne

$-2x^3$	$-x^2$	$+4x$	-4	$x+2$
$-(-2x^3$	$-4x^2)$			$-2x^2 + 3x - 2$
	$3x^2$	$+4x$		
	$-(3x^2$	$+6x)$		
		$(-2x$	$-4)$	
		$-(-2x$	$-4)$	
			0	

D'où $g(x) = -2x^2 + 3x - 2$ et $f(x) = (x+2)(-2x^2 + 3x - 2)$.

Méthode de la division euclidienne

Comme $f(x) = (x+2)g(x)$ et $d\check{r}f = 3$ alors $d\check{r}g = 3 - 1 = 2$. Anisi $g(x)$ est sous la forme $g(x) = ax^2 + bx + c$. On écrit alors $f(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b + 2a)x^2 + (c + 2b)x + 2c$. Par identification à $-2x^3 - x^2 + 4x - 4$ on a $\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ b+2a & = & -1 \\ c+2b & = & 4 \\ 2c & = & -4 \end{array}\right.$. D'où $a = -2$; $b = 3$ et $c = -2$.

EXERCICE 1.4

1) Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

a) Montrer que 1 est un zéro de $P(x)$.

b) Déterminer le quotient $Q(x)$ de $P(x)$ par $x - 1$.

c) Factoriser $Q(x)$. En déduire une factorisation de $P(x)$.

2) Factoriser le polynôme suivant : $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

1.3 Signe d'une fonction polyôme

Signe de $ax + b$

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$. On a

$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

x	$-\infty$	$\dfrac{-b}{a}$	$+\infty$
signe de $ax+b$	signe de $-a$	0	signe de a

EXERCICE 1.5

Étudier le signe des polynôme suivants :

$f(t) = 2t^2 + 4t - 6$; $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ et $Q(x) = -x^3 + 2x^2 + x + 2$

2 Fonctions rationnelles

Définition 2.1

On appelle fonction rationnelle tout quotient de fonctions polynômes.

Soit f est une fonction rationnelle définit par $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ et α est un nombre réel. On dit que α est un zéro de f si $f(\alpha) = 0$: ce qui signifie que $P(\alpha) = 0$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

EXERCICE 2.1

1) Soit la fonction rationnelle définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{-x^2 + 3x - 2}$.

a) Les réels 1, -1 et 2 sont-ils zéros de f ?

b) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

a) On pose $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Montrer que 1 est un zéro de Q. Factoriser $Q(x)$.

b) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

c) Simplifier $f(x)$ sur D_f.

d) Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

3) Déterminer a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$: $\dfrac{1}{x^2 - 4} = \dfrac{a}{x - 2} + \dfrac{b}{x + 2}$.

Équations - Inéquations - Systèmes

Contenus

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 23)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

1. dťerminer si des équations sont équivalentes.

2. résoudre des équations par équivalence.

3. résoudre graphiquement des équations du types $x \in \mathscr{R}$, f(x) = k ($k \in \mathscr{R}$), f(x) = g(x) ou donner un encadrement des solutions éventuelles les représentations graphiques des fonctions f et g étant données.

4. résoudre des équations, des inéquations se ramenant à la forme f(x) = 0 ou $f(x) \leqslant 0$, lorsque f(x) s'écrit comme produit ou quotient de fonctions polynômes du premier degré.

5. résoudre des équations de la forme f(x) = 0 où f est une fonction affine par intervalles.

6. déterminer si des systèmes sont équivalents et les résoudre par équivalence.

7. résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré dans $\mathscr{R}^2$ par combinaison linéaire, par substitution et par l'utilisation du déterminant.

8. résoudre graphiquement un système de 2 ou 3 équations du premier degré dans $\mathscr{R}^2$.

9. résoudre algébriquement un système de 3 équations du premier degré dans $\mathscr{R}^3$ par substitution.

10. mettre un problème en équation et le résoudre.

1 Généralités

Soit A un ensemble, f et g deux fonctions de A vers $\mathbb{R}$.
Toute relation de la forme $f(x) = g(x)$ (respectivement $f(x) \leqslant g(x)$) est appelée **équation** (respectivement **inéquation**) dans A d'inconnue x.
Un élément $\alpha \in A$ est dit **solution** de l'équation (respectivement de l'inéquation) si $f(\alpha) = g(\alpha)$ (respectivement $f(\alpha) \leqslant g(\alpha)$.
Résoudre une équation ou une inéquation c'est déterminer l'ensemble des éléments de A qui sont solutions. Deux équations ou inéquations sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont le même ensemble solution.
Avant de résoudre une équation ou une inéquation il est nécessaire de préciser son **ensemble de validité** c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'équation ou l'inéquation a un sens. Cet ensemble est déterminé par les contrainte sur l'inconnue.

2 Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

EXERCICE 2.1

On considère l'équation suivante : $\dfrac{(x-2)(2x-7)(x^2-9)(7x-\sqrt{3})}{x-3} = 0$ où x est un nombre réel.
1) Le réel 1 est-il solution de cette équation ?
2) Quelle est la contrainte sur l'inconnue. En déduire l'ensemble de validité de cette équation.
3) Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{Z}$.
4) Les équations ou inéquations suivantes sont-elles équivalentes ?
a) $|x-2| = 5$ et $(x-2)^2 = 25$ b) $|x-2| = x$ et $(x-2)^2 = x^2$ c) $\dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{x-1}{2x+1}$ et $(2x+1)^2 = (x-1)^2$
d) $\dfrac{2x+1}{x-1} \leqslant \dfrac{x-1}{2x+1}$ et $(2x+1)^2 \leqslant (x-1)^2$
Justifier les réponses.

EXERCICE 2.2

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$(3x-1)(2x+9)+1-9x^2 = (1-3x)(5x-8)$; $(x+1)^3 = 1-x^2$
$(2x^2-x+1)(x+5) = (x+2)(x^2+5)+x(5x-11)$
2) On considère l'inéquation suivante : $(I) : x \in \mathbb{R}; x^2-4 \geqslant 0$.
a) Étudier le signe du polynôme x^2-4 b) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (I).
c) Quelles sont les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'inéquation $x^2-4 \geqslant 0$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
$x^2+x \leqslant x+1$; $x^3+x^2 \geqslant x+1$
4) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
$(x+1)(2x^2-4x+2) \leqslant (x+1)(x^2-2)$ et $(x+1)(x^2-2) \leqslant 2x^2(x^2-2)$
b) En déduire l'ensemble des réels x tels que $(x+1)(2x^2-4x+2) \leqslant (x+1)(x^2-2) \leqslant 2x^2(x^2-2)$

EXERCICE 2.3

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{x-1}{2x^3-5x+2} = \dfrac{1}{2x^2}$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2-7}{x-3} \leqslant \dfrac{2x(5-x)}{x^2-9}$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{4x-1}{x-1} < \dfrac{2x+3}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{x}$

EXERCICE 2.4

1) Soit $f(x) = |2x-5| - x - 3$

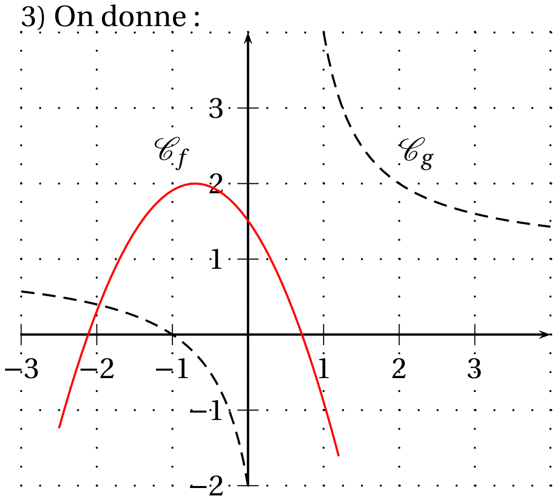
a) Écrire $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $|2x-5| = x+3$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$

$|-x-1| = x-3$ $\quad |x-1| = |2x|$ $\quad |x-1| < 2x+3$ $\quad |x+2| < 3x-4$.

3) On donne :



Résoudre graphiquement les équations ou inéquations suivantes : $f(x) = -1$; $g(x) = 1$; $f(x) = g(x)$; $f(x) < 0$; $g(x) > 0$

3 Système d'équations ou d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

3.1 Système d'équations dans $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{R}^3$

EXERCICE 3.1

1) Résoudre les systèmes suivants par la méthode de substitution.

$(\Sigma_1) : \begin{cases} 2x+2y &= 1 \\ 3x+4y &= 6 \end{cases}$, $(\Sigma_2) : \begin{cases} -x-9y &= 0 \\ 3x+y &= 8 \end{cases}$

2) Résoudre les systèmes suivants par la méthode de combinaison.

$(\Sigma_3) : \begin{cases} 3x+2y &= 1 \\ 2x+\frac{4}{3}y &= \frac{2}{3} \end{cases}$; $(\Sigma_4) : \begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y &= 1 \\ -x+\frac{3}{2}y &= \frac{2}{3} \end{cases}$

♠ **Méthode de déterminant (ou de cramer)**

Propriété 3.1

Soit $(\Sigma): \left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{array}\right.$ un système d'équations dans $\mathbb{R}^2$.

On pose $det(\Sigma) = \left|\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right| = ab' - a'b$; $det(x) = \left|\begin{smallmatrix} c & b \\ c' & b' \end{smallmatrix}\right| = cb' - c'b$ et $det(y) = \left|\begin{smallmatrix} a & c \\ a' & c' \end{smallmatrix}\right| = ac' - a'c$.

♠ Si $det(\Sigma) \neq 0$ alors le système admet un unique couple solution (x, y) tel que $x = \dfrac{det(x)}{det(\Sigma)}$ et $y = \dfrac{det(y)}{det(\Sigma)}$:

$S = \{(\dfrac{det(x)}{det(\Sigma)}, \dfrac{det(y)}{det(\Sigma)})\}$

♠ Si $det(\Sigma) = 0$ et $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{c}{c'}$ ou $\dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$ alors le système n'admet pas de solution : $S = \emptyset$

♠ Si $det(\Sigma) = 0$ et $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{c}{c'}$ ou $\dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$ alors le système admet une infinité de solutions :
$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$

EXERCICE 3.2

1) Résoudre les systèmes suivants par la méthode de Cramer (méthode du déterminant :
2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ suivant les valeurs du paramètre m :

$(\Sigma_1): \left\{\begin{array}{rcl} mx+y & = & 1 \\ x-y & = & 3 \end{array}\right.$, $(\Sigma_2): \left\{\begin{array}{rcl} 2x-my & = & m-1 \\ (5-m)x-3y & = & 11-5m \end{array}\right.$

EXERCICE 3.3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$(\Sigma_1): \left\{\begin{array}{rcl} x+10y-3z & = & 5 \\ 2x-y+2z & = & 2 \\ -x+y+z & = & -3 \end{array}\right.$, $(\Sigma_2): \left\{\begin{array}{rcl} 3x+4y+z & = & 7 \\ x+2y-z & = & 13 \\ 2x-y+2z & = & 5 \end{array}\right.$, $(\Sigma_3): \left\{\begin{array}{rcl} 2x+5y-6z & = & 8 \\ x+y-6z & = & 0 \end{array}\right.$

$(\Sigma_4): \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ 2x-3y & = & 0 \end{array}\right.$

3.2 Système d'inéquations dans $\mathbb{R}^2$ - Programmation linéaire

EXERCICE 3.4

1) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $2x + y < 5$.

2) a) Représenter graphiquement l'ensemble (S) des points $M(x, y)$ tels que : $\left\{\begin{array}{rcl} y-2x & \leqslant & 0 \\ 2x+y & \leqslant & 2 \\ y & \geqslant & 0 \end{array}\right.$

b) Déterminer le point de (S) qui rend maximale la somme $x + y$. Trouver la valeur maximale de cette somme sur (S).

Deuxième partie

Géométrie

Vecteurs et points du plan

Contenus

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 24)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

1. reconnaître des vecteurs égaux, opposés, colinéaires
2. représenter : $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $k\vec{u}(k \in \mathscr{R})$, $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ (α et β réels)
3. exprimer vectoriellement le point O milieu du segment [AB]
4. utiliser la relation de Chasles pour simplifier des sommes vectorielles
5. faire intervenir des points pour modifier une expression vectorielle
6. utiliser la colinéarité pour montrer le parallélisme et l'alignement
7. prouver que deux vecteurs sont colinéaires, qu'une famille de deux vecteurs est une base (par le calcul du déterminant du couple de ces deux vecteurs)
8. tracer un représentant d'un vecteur donné par ses coordonnées dans une base
9. décomposer graphiquement un vecteur dans une base et en déduire ses coordonnées
10. calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base
    N.B : Apprendre aux élèves à travailler sans repère.

1 Consolidation des acquis

EXERCICE 1.1

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 4 cm. I le milieu du segment $[BC]$.

1) Construire le point D tel que le vecteur $\overrightarrow{CA}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{BD}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2) Donner sur la figure :

a) deux vecteurs de directions différentes ;

b) deux vecteurs de même direction et de sens contraires ;

c) deux vecteurs de même direction et de même sens ;

d) trois vecteurs de même longueur. Préciser cette longueur ;

e) deux vecteurs égaux autre que $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BD}$.

3) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$. Que dit-on de ces deux vecteurs ?

4) Construire le vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}$.

5) Construire le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = -\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IC}$.

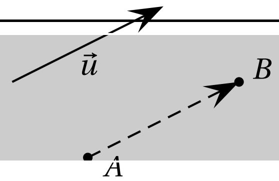
6) Soit (δ) la droite perpendiculaire à (BC) passant par B. Soit E le point d'intersection de la droite (δ) avec la droite (AD). Marquer le point F tel que $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\vec{v}$.

7) La longueur d'un vecteur $\vec{x}$ est aussi appelée sa **norme** et notée $||\vec{x}||$. Donner la norme des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\overrightarrow{IC}$.

Solution:

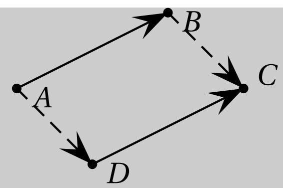
Propriété 1.1

Étant donné un point A et un vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.



Propriété 1.2

Soit quatre points A, B, C et D tels que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
Alors :
♠ $ABCD$ est un parallélogramme ;
♠ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
♠ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.



Définition 1.1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. α et β des nombres réels.
♠ *Le vecteur $\alpha\vec{u}$ est appelé* ***vecteur colinéaire*** *à $\vec{u}$.*
♠ *Le vecteur $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est appelé* ***combinaison linéaire*** *de $\vec{u}$ et $\vec{V}$.*

Dans l'exercice précédent le vecteur $2\overrightarrow{IC}$ est un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{IC}$ et le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$.

2 Quelques utilisations de vecteurs

2.1 Milieu d'un segment

EXERCICE 2.1

Soit $[AB]$ un segment et I son milieu.

1) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{IA}$.

2) Calculer $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}$.

Solution:

Propriété 2.1

♠ Si I est milieu du segment $[AB]$ alors $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}$.

♠ Si J est un point vérifiant $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}$ alors I est milieu du segment $[AB]$.

2.2 Centre de gravité d'un triangle

EXERCICE 2.2

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. Soit C' le milieu du côté $[AB]$. On sait que $GC = 2GC'$.

1) Déterminer une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{GC'}$.

2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ en fonction de $\overrightarrow{GC'}$. En déduire $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

Solution:

Propriété 2.2

♠ Si G est le centre de gravité du triangle ABC alors $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

♠ Si F est un point vérifiant $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ alors F est le centre de gravité du triangle ABC.

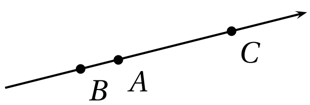
2.3 Alignement et parallélisme

Théorème 2.1

Soit A, B et C trois points du plan.

♠ Si A, B et C sont alignés alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

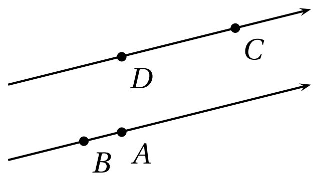
♠ Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les points A, B et C sont alignés.



$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

Théorème 2.2

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan.
♠ *Si $(AB)//(CD)$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.*
♠ *Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors $(AB)//(CD)$.*



$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

EXERCICE 2.3
Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$ cm et $AC = 4$ cm. Construit les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
1) Démontrer que $(MN)//(BC)$.
2) Soit S et T les milieux de $[MN]$ et $[BC]$ respectivement. Démontrer que les point A, S et T sont alignés.

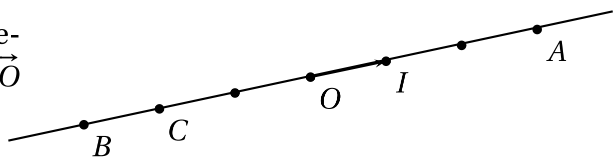
3 Bases

3.1 Mesure algébrique d'un vecteur

Soit M et N deux points d'une droite (OI). Posons $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$.

Définition 3.1
Il existe un nombre réel k tels que $\overrightarrow{MN} = k\vec{i}$. Ce nombre réel k est appelé mesure algébrique *du vecteur $\overrightarrow{MN}$ relativement à $\vec{i}$.*

Exemple 3.1
Considérons la figure ci-contre. Déterminer la mesure algébrique des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{IC}$ relativement à $\vec{i}$. On note $\overline{MN} = k$



Propriété 3.1
♠ $\forall M, N, P \in (OI)$, $\overline{MN} = \overline{MP} + \overline{PN}$.
♠ Si A a pour abscisse x_A et B a pour abscisse x_B dans le repère $(O, \overrightarrow{OI})$ de la droite (OI) alors $\overline{AB} = x_B - x_A$.
♠ Si $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ alors $\overline{AB} = \lambda\overline{AC}$.
♠ $\overline{BA} = -\overline{AB}$ et $|\overline{AB}| = AB$.

3.2 Base et repère

Définition 3.2 (Rappel)
♠ *Deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$* non colinéaires *pris dans cet ordre forment une* base *du plan vectorielle. Cette base est notée $(\vec{i}, \vec{j})$.*
Si $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ alors on dit que $\vec{u}$ a pour coordonnées (α, β) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et on note $\vec{u}(\alpha, \beta)$.
♠ *Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base alors pour tout point O du plan le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé* repère *d'origine O.*
Un point M a pour coordonnées (α, β) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ si $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$.
♠ *Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite orthogonale si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux (i.e $\vec{i} \perp \vec{j}$).*

♠ *Une base $(\vec{i},\vec{j})$ est dite normée si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont la même norme égale à 1(i.e $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1$).*
Un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est dit orthogonal (respectivement normé)si la base $(\vec{i},\vec{j})$ est orthogonale (respectivement normée) est orthogonale (respectivement normée).
Un repère(une base) est dit(e) **orthonormé(e)** *si il(elle) est à la fois* **orthogonal(e) et normé(e)**.

EXERCICE 3.1
Soit ABC un triangle tel que les côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ aient pour milieux respectifs A', B' et C' et pour longueurs respectives 4 cm, 5 cm et 5 cm. On note G le centre de gravité du triangle ABC.
1) Faire une figure.
2) Les couples de vecteurs $(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ forment-ils une base ?
3) Quelle est la nature de la base $(\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{A'C})$? Déterminer une base orthonormée $(A',\vec{i},\vec{j})$ à partir de cette base $(\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{A'C})$.
4) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BB'}$ dans la base $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$.
5) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{GC'}$ et $\overrightarrow{CB}$ dans la base $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ puis dans la base $(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC})$.
6) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, B' et G dans le repère $(B,\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ puis dans le repère $(A',\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$.

Solution:

Propriété 3.2

Soit $\vec{u}(x,y)$, $\vec{v}(x',y')$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ et $k \in \mathbb{R}$.
♠ $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$.
♠ $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x', y+y')$ et $k\vec{u}$ a pour coordonnées (kx, ky).

Définition 3.3

Soit $\vec{u}(x,y)$, $\vec{v}(x',y')$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.
On appelle **déterminant** *de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel $xy' - yx'$ et on le note $det(\vec{u},\vec{v})$ ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.*

Propriété 3.3

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si $det(\vec{u},\vec{v}) = 0$

Propriété 3.4

Soit A, B, C trois points du plan.
♠ $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$
♠ Si I est le milieu du segment $[AB]$ alors $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$
♠ Si G est le centre de gravité du triangle ABC alors $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$ et $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

EXERCICE 3.2

1) Le plan vectoriel est muni d'une base $(\vec{i},\vec{j})$. Calculer $det(\vec{i},\vec{j})$, $det(-2\vec{i},\vec{i})$, $det(\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u} = \vec{i}+2\vec{j}$ et $\vec{i}-\vec{j}$.

2) Soit ABC un triangle, B' et C' les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$. k est un nombre réel, D et E sont les points du plan définis par $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CA}$. I est le milieu de $[DA]$.

a) Déterminer les coordonnées des points B', C', D, E et I dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

b) En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{B'I}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

c) Calculer $det(\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{B'I})$. Que peut-on dire des points B', C' et I ?

Géométrie métrique plane

Contenus

1 Représentation paramétrique d'une droite

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 26)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

1. montrer qu'un point appartient à une droite d'équation ou de représentation paramétrique donnée.
2. déterminer un vecteur directeur et un vecteur normal d'une droite
3. tracer une droite connaissant le coefficient directeur
4. déterminer une représentation paramétrique d'une droite connaissant son équation cartésienne et réciproquement.
5. trouver une équation cartésienne ou une représentation paramétrique d'une droite déterminer par :
   — deux points distincts
   — un point et un vecteur directeur
   — un point et une parallèle à une droite donnée
   — un point et une perpendiculaire à une droite donnée
   — sa représentation graphique
6. déterminer la position relative de deux droites

1.1 Équation cartésienne d'une droite

Dans les exercice 1.1 et 1.2 le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

EXERCICE 1.1
1) Soit la droite $(\delta_1): 2x-3y+5=0$ et les points $A(0;4)$, $B(4;-1)$; $C(-1;1)$; $D(0;1)$.
a) Parmi ces points préciser ceux qui appartiennent à (δ).
b) Déterminer deux vecteurs directeurs et trois vecteurs normaux à (δ_1).
c) Construire (δ_1) en utilisant un de ces vecteurs directeurs et un de ces points.
2) Soit la droite (δ_2) de cœfficent directeur $\dfrac{3}{2}$ et passant par le point $D(-2;-1)$. Construire (δ_2).
3) Soit la droite (δ_3) de vecteur normal $\vec{n}(-5;2)$ et passant par le point $D(2;1)$. Construire (δ_3).

EXERCICE 1.2
Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D})$.
1) $(\mathscr{D})$ passent par $A(3;-1)$ et $B(4;1)$.
2) $(\mathscr{D})$ passent par $C(-2;5)$ et dirigée par $\vec{u}(1;1)$.
3) $(\mathscr{D})$ passent par $D(-1;2)$ et est parallèle à la droite d'équation $3x-4y+7=0$.
4) $(\mathscr{D})$ passent par $E(\dfrac{1}{2};1)$ et est perpendiculaire à la droite d'équation $x-y=0$.

1.2 Représentation paramétrique d'une droite

Activité 1.1
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Soit $A(x_0;y_0)$ $\vec{u}(a;b)$ et $(\mathscr{D})$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit $M(^{x},y)$ un point du plan.

1) Montrer que $M \in (\mathscr{D})$ si, et seulement si il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

2) En déduire que $M \in (\mathscr{D})$ si, et seulement si $\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Solution:

1) $M \in (\mathscr{D})$ si, et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Définition 1.1

Le système $\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ *est appelé représentation paramétrique de la droite* $(\mathscr{D})$ *dans repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Remarque 1.1

❤ L'unique réel t vérifiant $\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ est l'abscisse du point M dans le repère $(A, \vec{u})$ de la droite $(\mathscr{D})$.

❤ Une droite admet plusieurs représentation paramétriques déterminées chacune par le choix d'un point et d'un vecteur directeur.

EXERCICE D'APPLICATION 1.1

1)Soit $(\delta) : 3x - 6y + 5 = 0$. Déterminer une représentation paramétrique de (δ).

2) Soit (δ') de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 2 - \frac{1}{3}t \\ y &= 5 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ et les points $A(0;5)$; $B(1;8)$; $C(\frac{7}{3};2)$.

a) Déterminer parmi ces points ceux qui appartiennent à (δ').

b) Trouver une équation cartésienne de (δ').

3) Trouver une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$ dans chacun des cas suivants :

a) $(\mathscr{D})$ passent par $A(3;-1)$ et $B(4;1)$.

b) $(\mathscr{D})$ passent par $C(-2;5)$ et dirigée par $\vec{u}(1;1)$.

c) $(\mathscr{D})$ passent par $D(-1;2)$ et est parallèle à la droite d'équation $3x - 4y + 7 = 0$.

d) $(\mathscr{D})$ passent par $E(\frac{1}{2};1)$ et est perpendiculaire à la droite d'équation $x - y = 0$.

2 Produit scalaire et application

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 25)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

1. utiliser la définition la mieux adaptée pour calculer le produit scalaire (trois définitions possibles)
2. simplifier des expressions à l'aide des propriétés du produit scalaire
3. l'expression du produit scalaire pour calculer analytiquement $cos(\alpha)$, $||\vec{u}||$, $d(A,B)$
4. montrer que deux vecteurs sont orthogonaux, ou que deux droites sont perpendiculaires à l'aide de l'expression analytique du produit scalaire

5. appliquer le produit scalaire pour déterminer :
   — les relations métriques dans un triangle : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$, la longueur de la médiane.
   — les relations métriques dans un triangle rectangle (théorème de Pythagore et sa réciproque)
   — utiliser le produit scalaire dans la résolution de problème. (Recherche de ligne de niveau)
   Exemples : ligne de niveau des applications $M \mapsto \vec{u}\cdot\overrightarrow{OM}$, $M \mapsto MA^2 - MB^2$, $M \mapsto MA^2 + MB^2$, $M \mapsto \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

2.1 Définition du produit scalaire

Définition 2.1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle **produit scalaire** *de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et défini par*

- $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ *si* $\vec{u} \neq \vec{0}$ *et* $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ *si* $\vec{u} = \vec{0}$ *ou* $\vec{v} = \vec{0}$.

Exemple 2.1

1) Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ sachant que $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{v}|| = 5$ et $Mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 50ř$.
2) Soit ABC un triangle équilatéral de côté 4 et I le milieu de $[BC]$.Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$.

Remarque 2.1

❤ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

❤ On a $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||.||\vec{u}||.cos(\widehat{\vec{u},\vec{u}})$. Or $cos(\widehat{\vec{u},\vec{u}}) = cos(0) = 1$; donc $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2$.
On en déduit que $||\vec{u}||^2 = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$.

Propriété 2.1 Élémentaires

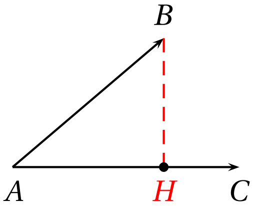
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

♠ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
♠ $|\vec{u}.\vec{v}| \leqslant ||\vec{v}|| \times ||\vec{u}||$
♠ $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{v}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
♠ $(a\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(a\vec{v}) = a(\vec{u}.\vec{v})$
♠ $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
♠ $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
♠ $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
♠ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[(\vec{u}+\vec{v})^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2] = \frac{1}{2}[(\vec{u}+\vec{v})^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2]$

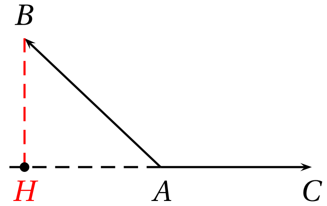
2.2 Autres expressions du produit scalaire

2.2.1 Expression du produit scalaire à l'aide de mesure algébrique

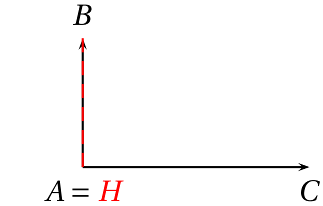
Soit A, B et C quatre points du plan tels que $A \neq C$.
Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC). Orientons la droite (AC) dans le sens du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AH}.\overline{AC} = \overline{AH}.AC$.



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH.AC$



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AH.AC$



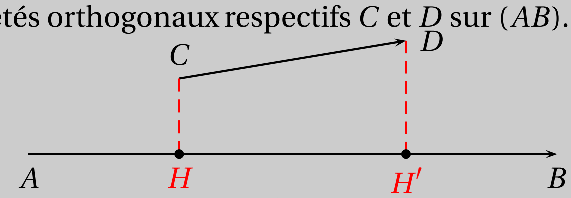
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Remarque 2.2 Vecteur orthogonaux

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si, et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

Propriété 2.2

Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$.
Soit H et H' les projetés orthogonaux respectifs C et D sur (AB).



Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB}.\overline{HH'}$.

EXERCICE D'APPLICATION 2.1

1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}$, $Mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 80$ř et $||\vec{u}|| = 3$. Calculer $\vec{v}$ à 10^{-2} près.

2) Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tel que $AB = 3$ et $BC = 4$. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC), K le projeté orthogonal de H sur (AC).

   a) Calculer AH.
   b) Calculer $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes.
   c) En déduire la valeur de AK.
   d) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

3) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $(2\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = 2$, $Mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 30$ř et $||\vec{u}|| = 2$. Calculer $||\vec{v}||$

2.2.2 Expression du produit scalaire dans une base orthonormé

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée, $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ dans cette base.
On a

$$\begin{aligned}
\vec{u}.\vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j}).(x'\vec{i} + y'\vec{j}) \\
&= xx'\vec{i}.\vec{i} + xy'\vec{i}.\vec{j} + yx'\vec{j}.\vec{i} + yy'\vec{j}.\vec{j} \\
& \boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}
\end{aligned}$$

car $\vec{i}.\vec{i} = ||\vec{i}||^2 = 1$, $\vec{j}.\vec{j} = ||\vec{j}||^2 = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0$.

Remarque 2.3

❤ $\vec{u}.\vec{u} = x^2 + y^2$ d'où $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$.
❤ Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - Y_A)^2}$
❤ Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ les coordonnée d'un vecteur $\vec{u}$ sont données par $x_{\vec{u}} = \vec{u}.\vec{i}$ et $y_{\vec{u}} = \vec{u}.\vec{j}$.

2.3 Utilisation du produit scalaire

2.3.1 Relations métriques dans un triangle

EXERCICE 2.1
1) Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC).
a) En décomposant le vecteur $\overrightarrow{BC}$, démontrer le **théorème de Pythagore** : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
b) Démontrer que :$BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$.
c) Démontrer que :$AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.
2) **Théorème d'Al Kashi**
Soit ABC un triangle quelconque. On pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.
Démontrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{BAC}$.
2) **Théorème de la médiane**
Soit ABC un triangle quelconque et $[AA']$ la médiane relative à $[BC]$. Démontrer que
a) $AB^2 + Ac^2 = 2AA' + \dfrac{BC^2}{2}$.
b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA' - \dfrac{BC^2}{4}$

2.3.2 Ligne de niveau

Définition 2.2
Soit f une application du plan $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$ et k un réel. On appelle ligne de niveau k de f, l'ensemble des points dont l'image par f est k.

EXERCICE 2.2
Soit A et B deux points du plan tels que AB=4cm.
1) On définit l'application $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ par $f(M) = MA^2 + MB^2$ pour tout point M du plan.
a) Calculer $f(A)$, $f(B)$ et $f(I)$ où I est le milieu de $[AB]$.
b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = 14$ (on pourra introduire le point I dans les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$).
c) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $||\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}|| = 3$.
d) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = -4$.
2) a) Soit O un point du plan. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OM} = 0$.
b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 4$.

3 Équation cartésienne d'un cercle

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 26)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

1. déterminer une équation du cercle, soit de diamètre donné, soit de centre et de rayon donnés
2. reconnaître l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) d'un plan $\mathscr{P}$ tels que $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ en utilisant la décomposition canonique.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 3.1

1) Soit A et B deux points du plan et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.

a) Montrer que pour tout point M du plan, $M \in \mathscr{C}$ si, et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

b) On suppose que $A(1;2)$ et $B(3;-2)$. Montrer que $M(x;y) \in \mathscr{C}$ si, et seulement si $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$.

2) Soit I un point du plan et $\mathscr{C}'$ le cercle de centre I et de rayon R où R est un nombre réel positif.

a) Montrer que pour tout point M du plan, $M \in \mathscr{C}$ si, et seulement si $IM^2 = R^2$.

b) On suppose $I(-2;3)$ et $R = 2$. Montrer que $M(x;y) \in \mathscr{C}'$ si, et seulement si $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$.

Définition 3.1

Soit $\mathscr{C}$ un cercle.Alors il existe des réels a, b et c tels que pour tout point $M(x;y)$ du plan $M \in \mathscr{C}'$ si, et seulement si $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.
L'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est appelée équation cartésienne du cercle.

Propriété 3.1

Soit a, b et c des nombres réels.
L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est :
- soit l'ensemble vide,
- soit un point,
- soit un cercle.

EXERCICE D'APPLICATION 3.1

Soit $A(2;-1)$ et $C(5;3)$.

1) Trouver une équation cartésienne du cercle de centre A et de rayon 2.

2) a) Trouver une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$.

b) Déterminer les points d'intersection de ce cercle avec la droite passant par le point $C(3;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;1)$.

3) Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant :

a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$;
b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 15 = 0$;
c) $x^2 + y^2 - 2x\sqrt{2} + 2y\sqrt{3} + 5 = 0$;
d) $(x + y + 1)^2 = 2xy$;
e) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$.

Exercice de maison : CIAM p.91 N°2e, 2f, 2c, Td 2.3 et p.95 N°35

4 Angles inscrits non orientés-Polygones réguliers

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 26)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

1. reconnaître un angle inscrit non orienté et son angle au centre associé
2. calculer la mesure d'un angle inscrit non orienté connaissant celle de l'angle au centre et réciproquement
3. démontrer que deux angles inscrits sont égaux ou supplémentaires
4. démontrer qu'une demi-droite est demi-tangente en un point d'un cercle à l'aide d'angles inscrits non orientés
5. démontrer que quatre points sont cocycliques à l'aide des quadrilatères convexes ou croisés
6. déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $mes A\hat{M}B = \theta$ř avec $\theta \in$ $]0;180[$
7. calculer le sinus d'un angle, l'aire d'un triangle et le rayon du cercle circonscrit
8. connaissant les mesures des trois éléments d'un triangle (côtés ou angles) dont au moins un des côtés, l'élèves doit être capable de :
   — construire ce triangle
   — calculer la mesure des trois autres éléments
   — calculer la mesure de l'aire de ce triangle
   — calculer le rayon du cercle circonscrit
   — calculer la distance d'un sommet au milieu du côté opposé
9. inscrire un polygone régulier dans un cercle
10. déterminer les éléments caractéristiques d'un polygone régulier par différentes méthodes de calcul
11. extraire certains résultats trigonométrique tels que : $\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\cos\dfrac{2\pi}{5}$
12. justifier l'égalité de deux angles inscrits et l'utiliser pour montrer que quatre points sont cocycliques.

4.1 Angles inscrits non orientés

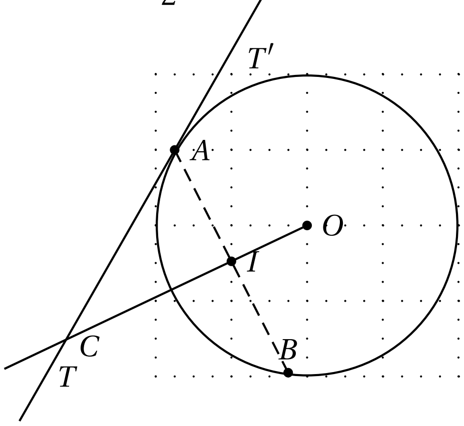
EXERCICE 4.1
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O; A, B, C et D quatre points du cerce $\mathscr{C}$ tel que A et B ne soit pas diamétralement opposés.
1) Citer quatre angles inscrits dans le cercle $\mathscr{C}$. Préciser pour chacun d'eux, l'angle au centre associé et l'arc intercepté.
2) Donner deux angles inscrits interceptant un même arc. Comparer leurs mesures.
3) Soit M un point du grand arc AB. Quelle relation y a-t-il entre $mes\widehat{AMB}$ et $mes\widehat{AOB}$.
3) Soit N un point du grand arc AB. Quelle relation y a-t-il entre $mes\widehat{ANB}$ et $mes\widehat{AOB}$.
5) Démontrer que $mes\widehat{AMB} + mes\widehat{ANB} = 180$ř

Activité 4.1 **Angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente**
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O; A et B deux points de $\mathscr{C}$ tels que $[AB]$ ne soit pas un diamètre. Soit $[AT)$ la demi-tangente à $\mathscr{C}$ contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant O, $[AT')$ l'autre demi-tangente. Soit I le milieu de $[AB]$. La droite (OI) coupe la droite (AT) en un point C.
1) Quelle est la nature du triangle AOB.

2) Démontrer que $mes\widehat{TAB} = mes\widehat{AOI}$ (*On pourra considérer les triangles AOC et AIC*). En déduire que $mes\widehat{TAB} = \frac{1}{2} mes\widehat{AOI}$.

3) Démontrer que $mes\widehat{T'AB} = 180$ř $- \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}$.

<u>Solution:</u>

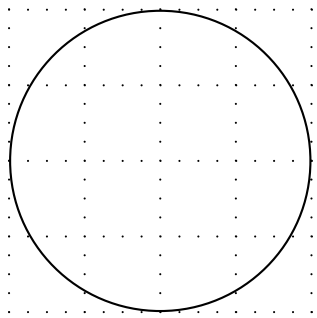


Remarque 4.1

> Les angles $\widehat{TAB}$ et $\widehat{T'AB}$ sont aussi appelé des angles inscrits dans le cercle et interceptent respectivement le petit arc $\widehat{AB}$ et le grand $\widetilde{AB}$.
> Les résultats démontrés restent valables même si $[AB]$ est un diamètre.

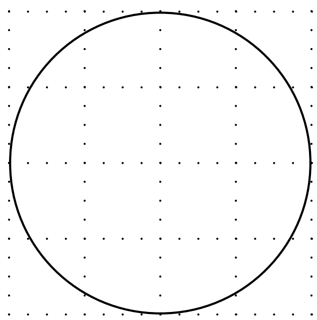
Propriété 4.1 Angles inscrits interceptant des arcs de même longueur

Deux angles inscrits dans un même cercle et interceptant des arcs de même longueur sont égaux.



Propriété 4.2 Bissectrice d'un angle inscrit

La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc intercepté en deux arcs de mme longueur.

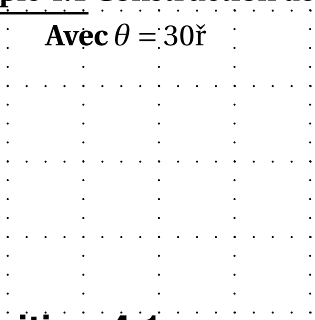


Propriété 4.3 Arcs capables

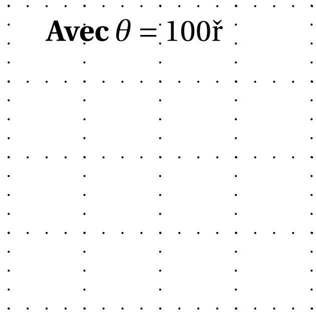
Soit A et B deux points distincts, θ un nombre réel tel que $0 < \theta < 180ř$.
L'ensemble des points M du plan tels que $mes\widehat{AMB} = \theta$ est la réunion de deux arcs de cercles symétriques par rapport à (AB) et privée des points A et B.

Exemple 4.1 Construction des deux arcs

Avec $\theta = 30ř$



Avec $\theta = 100ř$



Définition 4.1

Les deux arcs de la propriété suivante sont appelés arcs capables d'un angle de mesure θ.

EXERCICE D'APPLICATION 4.1

1) Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$, C un autre point de $\mathscr{C}$ et I le mileu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$. La tangente en I au cercle coupe (AC) en D. Démontrer que les triangles AIB et AID sont semblables.
Arcs capables
2) Soit ABC un triangle. Construire à la règle et au compas le lieu géométrique des points M du demi-plan de frontière (AB) contenant C tels que $mes\widehat{AMB} = mes\widehat{ACB}$.
3) Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm et $mes\widehat{ABC} = 40ř$.
Construire à la règle et au compas un point M tel que $mes\widehat{AMB} = 45ř$ et $mes\widehat{BMC} = 60ř$.
3) Soit A et B deux points distincts. À toute demi-droite $[AP)$, on associe lorsque c'est possible, la demi-droite $[BT)$ incluse dans le même demi-plan de frontière (AB) telle que : $mes\widehat{ABT} = 120ř - mes\widehat{BAP}$.

a) Pour quelles valeurs de $[AP)$, $[BT)$ existe-t-elle ?

b) Soit M le point d'intersection de $[AP)$ et $[BT)$. Déterminer et tracer le lieu géométrique.

4.2 Quadrilatère inscriptible

Définition 4.2

Un quadrilatère est dit inscriptible s'il existe un cercle passant par ces quatre sommets.

Propriété 4.4

Un quadrilatère convexe est inscriptible si, et seulement si deux de ses angles opposés sont supplémentaires.

Propriété 4.5

Un quadrilatère croisé est inscriptible si, et seulement si ses angles opposés ont même mesure

EXERCICE D'APPLICATION 4.2

4.3 Relations métriques dans un triangle

Activité 4.2

Soit ABC un triangle tel que l'angle $\widehat{BAC}$ soit obtus. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) et K celui de B sur (AC). Soit $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC.

1) a) Calculer $\mathscr{A}$ de deux façon différentes. En déduire que $\dfrac{HC}{AC} = \dfrac{KB}{AB}$.

b) Dans le triangle AHC, calculer $\sin\widehat{HAC}$.

Par définition on pose $\sin\widehat{BAC} = \sin\widehat{HAC} = \dfrac{HC}{AC} = \dfrac{KB}{AB}$.

2) On pose $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

Montrer que $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}ac\sin\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}ab\sin\widehat{BCA}$.

En déduire que $\dfrac{a}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{ABC}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{BCA}} = \dfrac{abc}{2\mathscr{A}}$.

3) Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC et I le projeté orthogonal de O sur (AB).

Montrer que $c = 2R\sin\widehat{BOI}$ avec R le rayon du cercle.

En déduire que $\dfrac{c}{\sin\widehat{BCA}} = 2R$.

EXERCICE D'APPLICATION 4.3

Soit ABC un triangle isocèle en A d'aire égale 2 et tel que $mes\widehat{BAC} = 80$ř.

1) Déterminer la longueur de chaque côté.

2) Déterminer le rayon du cercle circonscrit à ABC.

4.4 Polygones réguliers

Définition 4.3

On appelle polygone régulier tout polygone inscriptible dans un cercle et dont les côtés ont même longueur. Le centre du polygone est le centre du cercle circonscrit.
La distance du centre du polygone à un quelconque de ses côtés est appelé apothème *du polygone.*

EXERCICE 4.2

Transformations planes

Contenus

1 Homothéties

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 27)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

1. construire l'image d'une figure simple par une homothétie de centre et de rapport données
2. reconnaître si deux figures données sont homothétiques
3. construire l'image d'un point ou d'une figure simple par une homothétie déterminée par :
   • son centre et un point et son image
   • son rapport et un point et son image
   • deux points distincts et leurs images
4. caractériser vectoriellement une homothétie et établir son expression analytique
5. utiliser l'homothétie pour des problèmes de construction ou de recherche d'ensembles de points.
   N.B : En activité, on étudiera, sur des exemples, la composée de deux homothéties de même centre

Activité 1.1

Soit ABC un triangle et O un point du plan. Construire le triangle A'B'C' tel que $\overrightarrow{OA'} = -2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = -2\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC'} = -2\overrightarrow{OC}$.

Solution:

$\overrightarrow{OA'} = -2\overrightarrow{OA}$: on dit que A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -2. On écrit $A' = h_{(O,k)}(A)$.

Définition 1.1

Soit O un point du plan $\mathscr{P}$ et k un réel non nul.
On appelle ***homothétie de centre O et de rapport k*** *l'application h de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. On note $M' = h_{(O,k)}(M)$ ou tout simplement $M' = h(M)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.*

Définition 1.2

Soit $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ une application du plan $\mathscr{P}$ dans lui même. Un point M du plan est dit invariant s'il est son propre image : $M' = f(M) = M$.

Remarque 1.1

➢ Un point, son image et le centre de l'homothétie sont **toujours** alignés.
➢ Si $k \neq 1$ alors O est le seul point invariant par h.
➢ Si $k = 1$ alors h est l'application identique (tout point du plan est invariant).

Propriété 1.1

Soit h une homothétie de rapport k ; A, B et I trois points du plan d'images respectives A', B' et I' par h. Alors :
- l'image de la droite (A'B') et (A'B') est parallèle à (AB) ;
- l'image du segment [AB] est le segment [A'B'] et A'B'=$|k|\times$AB ;
- si I est milieu de [AB] alors I' est milieu de [A'B'] ;
- l'image de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B') ;
- l'image d'un cercle de centre I et de rayon R est le cercle de centre I' et de rayon $k\times$R.

Propriété 1.2

Toute homothétie de rapport k transforme :
- trois points alignés en trois points alignés ;
- deux droites parallèles en deux droites parallèles ;
- deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires ;
- le milieu d'un segment en le milieu du segment image ;
- une figure d'aire $\mathscr{A}$ en une figure d'aire $k^2 \times \mathscr{A}$.

Propriété 1.3 Caractéristique d'une homothétie

Soit M, N, M' et N' quatre points du plan.
M et N ont pour images respectives M' et N' par une homothétie de rapport k si, et seulement si $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

EXERCICE D'APPLICATION 1.1

Soit ABCD un parallélogramme de centre O, B' le symétrique de A par rapport à B et D' le symétrique de A par rapport à D.
1° Déterminer l'homothétie h de rapport 2 qui transforme B en B'.
2° Quelle est l'image de D par h ? Justifier.
3° En déduire que les points B', C et D' sont alignés.

EXERCICE 1.1 Homothétie déterminer par son rapport, un point et son image

Soit A, A' et M trois points distincts du plan.
1° En utilisant la propriété caractéristique, construire l'image M' du point M par l'homothétie de rapport $\frac{3}{2}$ qui transforme A en A'.
2° Déterminer et construire le centre de cette homothétie.

EXERCICE 1.2 Homothétie déterminer par son centre, un point et son image

Soit Ω, A, A' trois points deux à deux distincts et alignés et h l'homothétie de centre Ω transformant A en A'.
1° Soit M un point du tel que $M \notin (AA')$.
a) Écrire l'image M' de M par h comme intersection de deux droites à préciser.
b) Construire M'.

2° Soit N un point tel que $N \in (AA')$. Construire N'=h(N).

EXERCICE 1.3 Homothétie déterminer par deux points et leurs images

Soit A, A', B et B' quatre points du plan tels que $(AB)//(A'B')$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. Soit h l'homothétie qui transforme A en A' et B en B'.

1° Soit M un point tel que $M \notin (AB)$.

a) Écrire l'image M' de M par h comme intersection de deux droites à préciser.

b) Construire M'.

2° Soit N un point tel que $N \in (AA')$. Construire N'=h(N).

EXERCICE 1.4 Expression analytique d'une homothétie, composée d'homothéties de même centre

Soit (O, I, J) un repère du plan et h_1 l'homothétie de centre $\Omega\binom{1}{2}$ et de rapport $\dfrac{2}{3}$. Soit $M\binom{x}{y}$ et $M'\binom{x}{y}$ deux points tels que $M' = h_1(M)$.

1° Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

2° Soit h_2 l'homothétie de centre Ω et de rapport 3. Soit $A\binom{3}{1}$.

Construire le point $A' = h_2 \circ h_1(A)$.

Remarque 1.2

Une homothétie peut être déterminée par la donnée de :

- *son centre et son rapport;*
- *son centre, un point et son image;*
- *son rapport, un point et son image;*
- *deux points et leurs images.*

EXERCICE 1.5

Soit O et O' deux points du plan tels OO'=6 cm. Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles de centre O et O' puis de rayons 2 cm et 3 cm respectivement. Il existe deux homothéties h_1 et h_2 qui transforment $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.

1° Déterminer les rapports de ces homothéties.(h_1 est celle de rapport positif)

2° Montrer que leurs centres appartient à (OO').

3° Soit A' un point de $\mathscr{C}'$. Construire les points A_1 et A_2 de $\mathscr{C}$ qui ont pour image A'.

En déduire la construction des centres de h_1 et h_2.

2 Isométries du plan

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 27)

À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

1. construire l'image d'une figure simple par une translation, une symétrie centrale, une symétrie orthogonale, une rotation.

2. reconnaître et caractériser l'isométrie qui échange deux figures (dans le cas où l'isométrie est une translation ou une symétrie centrale ou une symétrie orthogonale ou une rotation).

3. caractériser vectoriellement une translation, une symétrie centrale, une symétrie orthogonale et établir leur expression analytique (pour la symétrie orthogonale on se limitera aux cas où l'axe a pour équation y = 0 ; x = 0 ; y = x ; y = -x)

4. utiliser les isométries, pour résoudre des problèmes de construction ou de recherche d'ensembles de points.

2.1 Définitions

Définition 2.1

➢ *On appelle isométrie du plan toute transformation du plan (application bijective de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$) qui conserve la distance. C'est à dire que si M et N sont deux points d'images respectives M' et N' alors M'N'=MN.*
➢ *Deux triangles ABC et A'B'C' sont dits isométriques (ou superposables) si A'B'=AB, B'C'=BC et C'A'=CA.*

2.2 Translations et symétries

EXERCICE 2.1
1° ABC est un triangle. Construire l'image A_1 du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Quelle est l'image de la droite (AB) par $t_{\overrightarrow{BC}}$? Quelle est l'image de la droite (AB) par $t_{\overrightarrow{BC}}$?
2° Soit I un point du plan situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas C. Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par la symétrie de centre I.

EXERCICE 2.2
Soit ABCD un rectangle. Construire l'image A'B'C'D' de ABCD par la symétrie orthogonale d'axe (AC).

Rappels

Propriété 2.1 Caractéristique d'une translation

Soit M, N, M' et N' quatre points du plan.
M et N ont pour images respectives M' et N' par une translation si, et seulement si $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Propriété 2.2

Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par un point A.
Un point M a pour image M' par $S_(\Delta)$ si, et seulement si $\begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \\ \text{dét}(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = 0 \end{cases}$ où H est le milieu du segment [MM'].

Remarque 2.1

> ➢ La translation, la symétrie centrale et la symétrie orthogonale sont des isométries.
> ➢ L'application identique laissent invariant tous les points du plan.
> ➢ Une translation n'admet pas de point invariant.
> ➢ L'ensemble des points invariants par une symétrie orthogonale est la droite de la symétrie.

EXERCICE 2.3 Expressions analytiques
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit $\vec{u}\binom{1}{2}$, $(\Delta_1) : y = 0$, $(\Delta_2) : x = 0$, $(\Delta_3) : y = x$, $(\Delta_4) : y = -x$ et $A\binom{\frac{1}{2}}{3}$. Soit $M\binom{x}{y}$ un point du plan.
1° Déterminer les coordonnées x' et y' du point M' image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.
2° Répondre à la même question pour la symétrie de centre A et pour les symétrie orthogonales d'axes (Δ_1), (Δ_2), (Δ_3) et (Δ_4).

2.3 Rotations

Activité 2.1
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $Mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{\pi}{6}$. Soit O un point du plan, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites sécantes en O de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soit M un point du plan.
1° Construire l'image M' de M par $S_{\mathscr{D}'} \circ S_{\mathscr{D}}$ appelée composée de $S_{\mathscr{D}}$ suivie de $S_{\mathscr{D}'}$.
2° Montrer que OM=OM' et déterminer la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}})$

Solution:

Définition 2.2

Soit O un point du plan et $\alpha \in]-\pi,\pi]$. On appelle rotation de centre O et d'angle α l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : - si M=O alors M'=M ;
- si M≠ O alors $\begin{cases} OM = OM' \\ Mes(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = \alpha \end{cases}$
On écrit $M' = r_{(O,\alpha)}(M)$ ou tout simplement $M' = r(M)$.

Remarque 2.2

> ➢ Le seul point invariant par une rotation est le centre de cette rotation.
> ➢ La rotation de centre O et d'angle α est une transformation du plan et la transformation réciproque est la rotation de centre O et d'angle $-\alpha$.

Propriété 2.3 Caractéristique d'une rotation

Deux points A et B ont pour images respectives A' et B' par une rotation d'angle α si, et seulement si AB=A'B' et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = \alpha$

Propriété 2.4

Toute rotation transforme :
• une droite en une droite, une segment en un segment, une demi-droite en une demi-droite et un cercle en un cercle de même rayon ;
• le milieu d'un segment en le milieu du segment image ;
• deux droites parallèles en deux droites parallèles et deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.

EXERCICE D'APPLICATION 2.1

1° Soit ABC un triangle. Construire l'image A'B'C' da ABC par la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.
2° Soit O un point du plan et $\mathscr{D}$ une droite. Construire l'image de la droite $\mathscr{D}$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.
3° Soit A et A' deux points distincts du plan et une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Construire à la règle et au compas le centre de cette rotation.

Solution:

Remarque 2.3

Une rotation est une isométrie du plan.

EXERCICE 2.4

Soit ABCD un rectangle et D' le symétrique de D par rapport à C.
1° Montrer que le triangle BCD' est l'image de ADC par une isométrie du plan.
2° Déterminer cette isométrie.

Trigonométrie

Contenus

Objectifs pédagogiques : (Confère programmes HPM page 58)

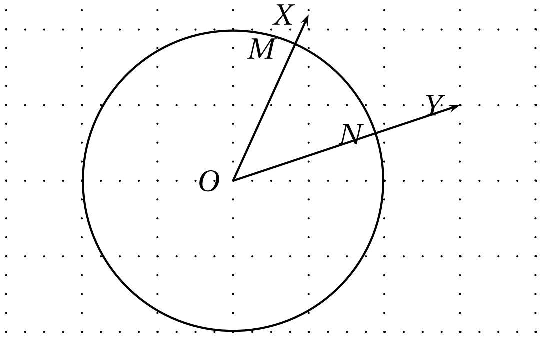
À la fin de la leçon, l'élève doit être capable de :

1. donner le sens d'un triplet de points non alignés dans un plan orienté
2. dessiner un représentant d'un angle orienté de mesure principale donnée
3. déterminer la mesure principale d'un angle orienté
4. construire un représentant de la somme de deux angles orientés et calculer sa mesure principale
5. utiliser la relation de Chasles dans les calculs ou démonstrations
6. déterminer le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle orienté dont on connaît la mesure principale.

1 Orientation du plan

1.1 Définition

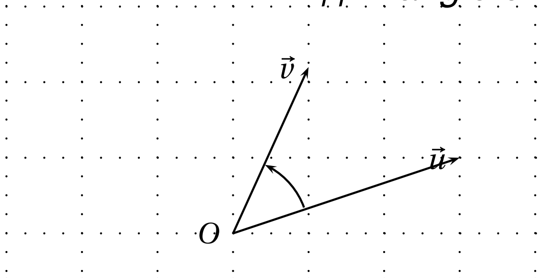
Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs non nuls ;X, Y et O les points du plan tels que $\overrightarrow{OX} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OX} = \vec{u}$. Soit M et N les points respectifs des demi-droites $[OX)$ et $[OY)$ avec un cercle de centre O.



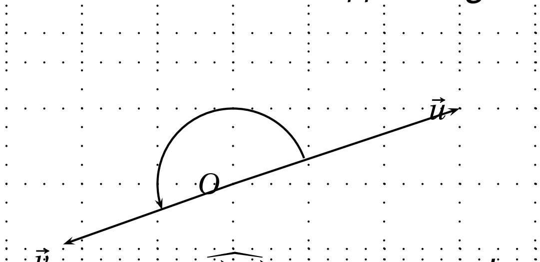
$\widehat{MON}$ et $\widehat{NOM}$ désignent un même angle. L'arc MN peut être parcouru de M vers N ou de N vers M.

Définition 1.1

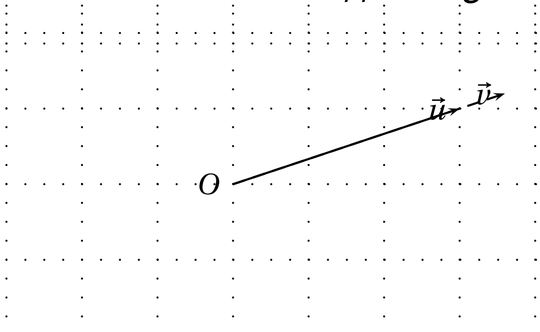
L'ensemble des couples $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs non colinéaires pour lesquels l'arc $\widehat{MN}$ garde la même mesure et est parcouru dans le même sens de M vers N est appelé **angle orienté** *noté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.*



- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ est appelé **angle orienté plat**.



- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ est appelé **angle orienté nul**.



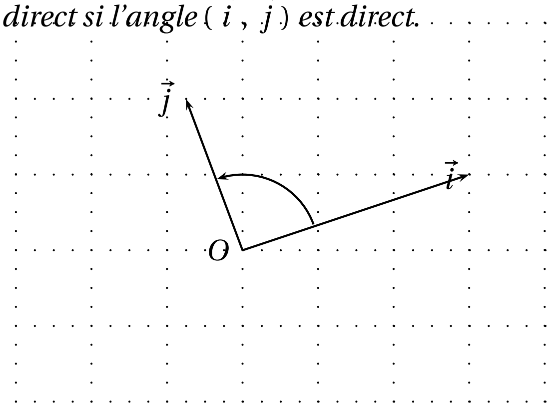
Remarque 1.1

❤ Le couple $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})$ est un représentant de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.
❤ Si le déplacement de M vers N se fait dans le même sens que celui des aiguilles d'une montre on dit que c'est un déplacement de **sens indirect ou négatif ou rétrograde**.
Dans le cas contraire, on parle de déplacement de sens **direct ou positif ou trigonométrique**.
❤ Les angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$ sont dits opposés.
❤ Le plan est dit orienté si le déplacement se fait dans le même sens sur tous les cercles.

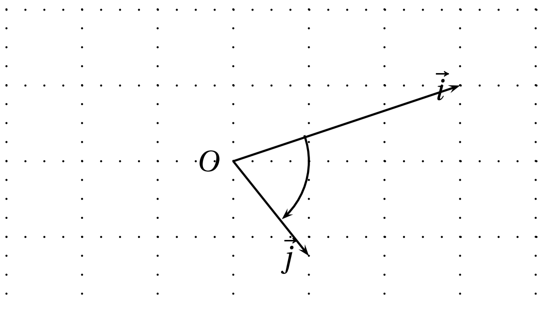
❊ Repère direct, repère indirect
Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

Définition 1.2

On dit que le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est direct si l'angle $(\widehat{\vec{i},\vec{j}})$ est direct.

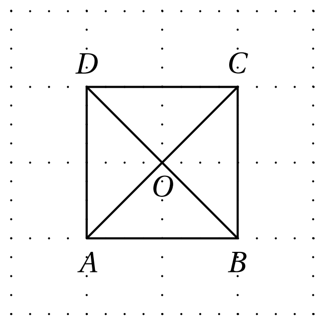


-*On dit que le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est indirect si l'angle $(\widehat{\vec{i},\vec{j}})$ est indirect.*



EXERCICE D'APPLICATION 1.1

On considère le carré $ABCD$ suivant :
1) Quel est le sens des triplets suivants : (A,B,C), (A,D,C), (D,O,C) et (C,B,D).
2) Trouver le sens des angles orientés suivants : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{DC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OB}})$.
3) Quel est la nature des repères suivants : $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$; $(D,\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB})$
4) Trouver deux repères orthonormés directs et deux repères orthonormés indirects.



1.2 Mesure principale d'un angle orienté

Soit $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ un angle orienté. La mesure principale en radian de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ noté $Mes(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ est définie par :

- Si $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ est l'angle nul alors $Mes(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}}) = 0$.
- Si $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ est l'angle plat alors $Mes(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}}) = \pi$.
- Si $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ n'est ni nul ni plat alors $Mes(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}}) = mes\widehat{XOY}$ si $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ est direct et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}}) = -mes\widehat{XOY}$ si $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ est indirect.

Remarque 1.2

- Deux angles orientés sont égaux si et seulement si ils ont la même meure principale.
- La mesure principale de l'angle plat est π et non $-\pi$.
- $Mes(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) = -Mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.
- Pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $Mes(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) \in]-\pi,\pi]$

Propriété 1.1

Étant donné un nombre réel $\alpha \in]-\pi,\pi]$ et une demi-droite $[Ox)$, il existe une et une seule demi-droite $[OX)$ telle que $Mes(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}}) = \alpha$.

EXERCICE D'APPLICATION 1.2

1) π correspond à 180°. Compléter le tableau suivant.

mesure en degré	-90°	-60°	-45°	-30°	0°	30°	45°	60°	90°	180°
mesure en radian										

2) Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct, O son centre de gravité et H le pied de la hauteur issue de A.

Déterminer les mesures principales des angles suivants : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OH},\overrightarrow{AB}})$, $(\widehat{\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OH},\overrightarrow{AC}})$,$(\widehat{\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})$.

EXERCICE D'APPLICATION 1.3

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{x}$ quatre vecteurs non nuls tels que $Mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{4}$ et $Mes(\widehat{\vec{w},\vec{x}}) = \frac{\pi}{3}$. Soit O, P et Ω deux points du plan.

1) Construire des représentants $(\widehat{\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OV}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega X},\overrightarrow{\Omega X}})$ des angles orientés $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{w},\vec{x}})$ respectivement puis un représentant de $(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{w},\vec{x}})$. Quelle est la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}})$.

2) Répondre aux mêmes questions si $Mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = -\frac{3\pi}{4}$ et $Mes(\widehat{\vec{w},\vec{x}}) = -\frac{\pi}{3}$.

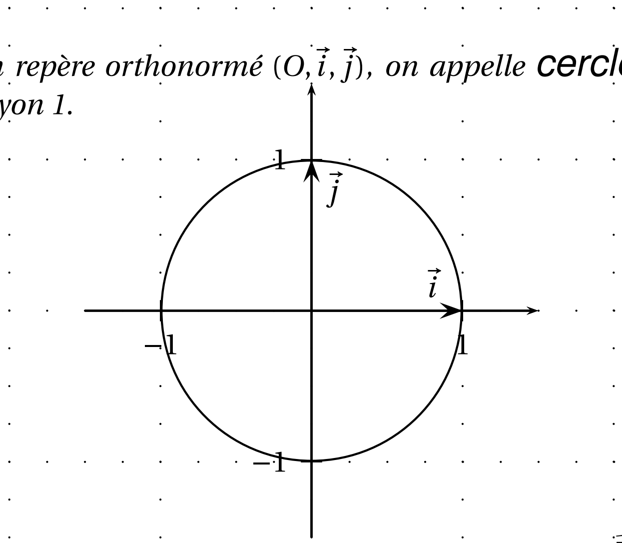
➽ Exercices de maison: CIAM p.58 N° 6, 7, 10.

2 Cercle trigonométrique

2.1 Définition

Définition 2.1

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle **cercle trigonométrique** *le cercle de centre O et de rayon 1.*



EXERCICE 2.1

Construire le cercle trigonométrique les points A, B, C et D tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}}) = \frac{\pi}{4}$, $Mes(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{3}$, $Mes(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OC}}) = \frac{5\pi}{6}$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OD}}) = \frac{-2\pi}{3}$.

Définition 2.2

Soit $\alpha \in]-\pi, \pi]$ et M un point du cercle trigonométrique tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}}) = \alpha$. Alors on dit que M est l'image de α sur le cercle trigonométrique.

2.2 Cosinus et sinus d'un angle orienté

Activité 2.1

Soit $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et M l'image de α sur le cercle trigonométrique. Soit P et Q les projetés orthogonaux respectifs de M sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

1) Quelles sont les coordonnées du point M.

2) En utilisant le triangle OMP, montrer que $\cos\alpha = OP$ et $\sin\alpha = OQ$

Définition 2.3

Soit $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ un angle orienté de mesure principale α et M l'image de α sur le cercle trigonométrique.Soit P et Q les projetés orthogonaux respectifs de M sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

Le cosinus et le sinus de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ ou de sa mesure principale α sont définis par $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \cos\alpha = \overline{OP}$ *et* $\sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \sin\alpha = \overline{OQ}$.

On a $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

EXERCICE 2.2

Compléter le tableau suivant(faire une figure) :

mesure principale	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cosinus									
sinus									

EXERCICE 2.3
Compléter le tableau suivant :

α	$-\pi$ $\quad$ $-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$ $\quad$ 0	0 $\quad$ $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ $\quad$ π
signe de cosinus α				
signe de sinus α				

Propriété 2.1

Pour tout nombre réel $\alpha \in]-\pi, \pi]$, on a
♠ $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$
♠ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Définition 2.4

Pour tout nombre réel $\alpha \in]-\pi, \pi]$ *différent de* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{2}$ *on appelle* **tangente de** α *le réel noté* $\tan\alpha$ *tel que* $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

2.3 Cosinus et sinus d'angles associés

Activité 2.2
Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
1) Placer sur le cercle trigonométrique les images des réels suivants : $-\alpha$, $\pi+\alpha$, $\pi-\alpha$, $\frac{\pi}{2}+\alpha$ et $\frac{\pi}{2}-\alpha$.
2) Déterminer les cosinus et sinus de ces angles en fonction de cosinus et sinus de α.