ÉQUATIONS – INÉQUATIONS– SYSTÈMES
Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Équations du second degré :

1°) – Résolution par la méthode du discriminant :

Pour résoudre l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0)$ d'inconnu x, je calcule le discriminant noté : $\Delta = b^2-4ac$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$;
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

– Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution unique : $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$

2°) –Discriminant réduit :

Si b est pair on pose $b' = \frac{b}{2} \Leftrightarrow b=2b'$; alors on calcule le discriminant réduit

$$\Delta' = (b')^2 - ac.$$

- Si $\Delta' < 0$, alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$;
- Si $\Delta' > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} \quad et \quad x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$$

- Si $\Delta' = 0$, alors l'équation admet une solution unique : $x_1=x_2=\frac{-b'}{a}$

3°)– Recettes :

Soit l'équation du second degré : $ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0)$.

R₁) Si a + b + c = 0, alors $x_1=1 \ et \ x_2=\frac{c}{a}$;

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3x^2-12x+9=0$
3 – 12 + 9 = 0 donc $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$. D'où $S=\{1;3\}$

R₂) Si a + c = b, alors $x_1=-1 \ et \ x_2=\frac{-c}{a}$.

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-x^2+8x+9=0$
– 1+ 9 = 8 donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 9$. D'où $S=\{-1;9\}$

4°)– Somme et Produit des racines :

Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ de discriminant $\Delta \geq 0$ alors l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$. \quad x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \quad et \quad x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \quad .$$

a) Somme des racines :

S= $x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b}{a}$; $\quad S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$.

b) Produit des racines :

P = $x_1 \times x_2 \Leftrightarrow P = \dfrac{\left(-b - \sqrt{\Delta}\right)\left(-b + \sqrt{\Delta}\right)}{4a^2} = \dfrac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \dfrac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$.

$P = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

c) Remarque : Deux nombres x_1 et x_2 dont la somme est S et le produit est P sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

d) Exemples :

1- Soit l'équation $x^2 + 10x + 21 = 0$.
Trouver les racines en utilisant la somme S et le produit P.

S = – 10 et P = 21 $\Rightarrow$ $x_1 = -7$ et $x_2 = -3$.

2- Former l'équation du second degré dont les racines sont : $x_1 = 4$ et $x_2 = -3$.

$x_1 = 4$ et $x_2 = -3$ $\Rightarrow$ S = 1 et P = – 12 d'où $x^2 - x - 12 = 0$.

3- Déterminer les racines x_1 et x_2 d'une équation du second degré dont la somme est $S = \dfrac{12}{5}$ *et* le produit $P = \dfrac{7}{5}$.

5°) – Factorisation de $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ **:**

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow$$
$$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \Leftrightarrow$$
$$= a\left[x^2 - Sx + P\right] \Leftrightarrow$$
$$= a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2\right] \Leftrightarrow$$
$$= a\left[x^2 - xx_1 - x_2x + x_1x_2\right] \Leftrightarrow$$
$$= a\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right] \Leftrightarrow$$

$$. \quad f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad .$$

Exemple :
Factoriser $f(x)=2x^2-3x-2$; $g(x)=x^2-8x+7$; $h(x)=3x^2+18x+27$.

6°)– Équations bicarrées :

Exemples : résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations bicarrées suivantes :

- $x^4-5x^2+4=0$; $x^4-24x^2-25=0$; $x^6-124x^3-125=0$.
  (indication on pose $x^2=T$ ou $x^3=U$)

II –Inéquations:

1°) Signe du binôme ax + b :
Soit le binôme $f(x)=ax+b$

- Si a = 0, alors $f(x)$ est du signe de b.
- Si a ≠ 0, alors $f(x)=0 \Leftrightarrow ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
ax + b		Signe de (– a)	0	Signe de a	

Exemple : étudier le signe de $f(x)=-2x+12$

– 2x + 12 = 0 ⇒ x = 6.

x	$-\infty$		**6**		$+\infty$
–2x + 12		+	0	–	

Pour x ∈]–∞ ; 6] $f(x)\geq 0$; Pour x ∈[6 ; +∞[$f(x)\leq 0$

2°) Signe d'un trinôme du second degré:

Considérons le trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$; Δ le discriminant de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

1er cas : Si $\Delta<0$, alors le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a.

2ème cas : Si $\Delta=0$, alors le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a pour toutes valeurs x $\neq \frac{-b}{a}$.

3ème cas : Si $\Delta>0$, et x_1 ; x_2 les racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$ ($x_1<x_2$) alors le trinôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de (–a) à l'intérieur des racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	Signe de (– a)	0	Signe de a	

Exemples : étudier le signe des polynômes suivants :

$f(x) = 2x^2 + x + 1$; $g(x) = x^2 - 11x + 30$; $h(x) = \dfrac{x+3}{-2x+8}$.

3°) Application à la résolution d'inéquations :

Exemples : résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

$-2x^2 + 4x + 30 \leq 0$; $3x^2 + 5x + 4 \succ 0$; $9x^2 + 6x + 1 \prec 0$; $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{-x+5} \leq 0$;

III –Équations et Inéquations irrationnelles simples:

1°) Équations irrationnelles simples :

Propriété : $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ \left(\sqrt{a}\right)^2 = b^2 \end{cases}$

Exemple : résoudre dans ℝ l'équation $\sqrt{2x+1} = x - 1$.

L'ensemble de validité $D_v = \{x \in IR \text{ tel que } x - 1 \geq 0\}$.

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_v = [1 ; +\infty[.$$

$$\sqrt{2x+1} = x - 1 \Leftrightarrow 2x + 1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin D_v \text{ ou } x = 4 \in D_v \text{ ; d'où } S = \{\ 4\ \}.$$

2°) Inéquations irrationnelles simples :

a) Exemple 1 : résoudre dans ℝ l'inéquation $\sqrt{3(x^2-1)} \leq 2x - 1$.

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 & (1) \\ 2x - 1 \geq 0 & (2) \\ \left(\sqrt{3(x^2-1)}\right)^2 \leq (2x-1)^2 & (3) \end{cases}$$

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$; $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

$3(x^2 - 1) \leq 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 16 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$.

Le système devient

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 & (1) \\ 2x - 1 \geq 0 & (2) \\ x^2 - 4x + 4 \geq 0 & (3) \end{cases}$$ En dressant le tableau des signes de chacune des inéquations on a :

x	$-\infty$		-1		$1/2$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	−		−	0	+		+	
$2x - 1$		−		−	0	+		+		+	
$x^2 - 4x + 4$		+		+		+		+	0	+	

L'ensemble des solutions est S = [1 ; +∞[

b) Exemple 2 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $5 - x \leq \sqrt{x+1}$.

1er cas : $\begin{cases} 5 - x \leq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$; 5 – x = 0 ⇔ x = 5 ; x + 1 = 0 ⇔ x = –1.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$5 - x$		+		+	0	−	
$x + 1$		−	0	+		+	

$S_1 = [5 ; +\infty [$

2ème cas : $\begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ (5-x)^2 \prec \left(\sqrt{x+1}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 11x + 24 \prec 0 \end{cases}$

5 – x = 0 ⇔ x = 5 ; x + 1= 0 ⇔ x = – 1 ; $x^2 - 11x + 24 = 0$ ⇔

$x_1 = 3$ et $x_2 = 8$.

x	$-\infty$		-1		3		5		8		$+\infty$
$5-x$		+	|	+	|	+	0	−	|	−	
$x+1$		−	0	+	|	+	|	+	|	+	
$x^2-11x+24$		+	|	+	0	−	|	−	0	+	

$S_2 =]\,3\,;\,5\,]$

L'ensemble des solutions est $S = S_1 \cup S_2 =]\,3\,;\,+\infty\,[$

IV– Signes des racines d'une équation du second degré:

1°) Signes des racines :

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) ; supposons que $\Delta > 0$, on calcule le produit $P = \frac{c}{a}$ et la somme $S = \frac{-b}{a}$.

1er cas : Si $P < 0$, alors les deux racines sont de signes contraires ; le signe de S permet de dire laquelle des deux racines est la plus grande en valeur absolue.

2ème cas : Si $P > 0$, alors les deux racines sont de même signes;

- Si $S > 0$, alors les deux racines sont positives
- Si $S < 0$, alors les deux racines sont négatives.

3ème cas : Si $P = 0$, alors l'une au moins des racines est nulle.

- Si $S > 0$, alors $x_1 = 0$ et $x_2 > 0$;
- Si $S < 0$, alors $x_1 < 0$ et $x_2 = 0$;
- Si $S = 0$, alors $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$;

On résume ces résultats dans le tableau suivant (en supposant $x_1 \leq x_2$)

P	–	–	–	+	+	0	0	0
S	+	–	0	+	–	+	–	0
Signes des racines	$x_1<0$ $x_2>0$ $\lvert x_1\rvert < \lvert x_2\rvert$	$x_1<0$ $x_2>0$ $\lvert x_1\rvert > \lvert x_2\rvert$	$x_1=x_2$	$x_1>0$ $x_2>0$	$x_1<0$ $x_2<0$	$x_1=0$ $x_2>0$	$x_1<0$ $x_2=0$	$x_1=0$ $x_2=0$

2°) Exemples d'équations paramétriques :

a) Exemple 1 :

Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel *m* l'équation (E_m) : $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 = 0$.

– 0 –

Si $m - 2 \neq 0$, $\Leftrightarrow m \neq 2$, alors l'équation est du second degré..

$\Delta = 4(2m-3)^2 - 4(m-2)(5m-6) \Leftrightarrow \Delta = 4[-m^2 + 4m - 3]$.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1$ et $m_2 = 3$.

m	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

- Pour $m \in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$ $\Delta < 0$ donc pas de racines ;
- Pour $m \in]1; 2[\cup]2; 3[$ $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux racines
  $x_1 = \frac{-4m+6-2\sqrt{-m^2+4m-3}}{2(m-2)}$; $x_2 = \frac{-4m+6+2\sqrt{-m^2+4m-3}}{2(m-2)}$; $S = \{x_1 ; x_2\}$
- Pour m = 1 , $\Delta = 0$ donc $x_1 = x_2 = \frac{-4m+6}{2(m-2)} = -1$; donc $S = \{-1\}$;
- Pour m = 2, l équation est du 1^er^ degré, 2x + 4 = 0 x = – 2 ; $S = \{-2\}$
- Pour m = 3, $\Delta = 0$ donc $x_1 = x_2 = \frac{-4m+6}{2(m-2)} = -3$; donc $S = \{-3\}$;

b) Exemple 2 :

Soit l'équation paramétrique (E_m) : $(m-2)x^2 + (2m+2)x + 10m - 14 = 0$.

1°) Discuter suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de (E_m).

2°) Trouver entre les racines x_1 et x_2 une relation indépendante de m.

3°) Pour quelles valeurs de m l'équation admet 2 racines de signes contraires

4°) Pour quelles valeurs de m l'équation admet 2 racines positives.

– 0 –

1°) Pour $m \neq 2$ on a : $\Delta = -36m^2 + 144m - 108$.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow -36m^2 + 144m - 108 = 0$; a + b + c = 0 , donc $m_1 = 1$ et $m_2 = 3$.

m	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

Etudions le signe du produit P et de la somme S.

$$P=\frac{c}{a}=\frac{10m-14}{m-2}\ ;\quad 10m-14=0 \Leftrightarrow m=\frac{7}{5}\ ;\ \text{ et m} \neq 2.$$

m	$-\infty$		$\frac{7}{5}$		2		$+\infty$
$10m-14$		$-$	0	$+$		$+$	
$m-2$		$-$		$-$	0	$+$	
P		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{-2m-2}{m-2}\ ;\ -2m-2=0 \Leftrightarrow m=-1 \text{ et } m\neq 2.$$

m	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-2m-2$		$+$	0	$-$		$-$	
$m-2$		$-$		$-$	0	$+$	
S		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Tableau récapitulatif des signes de Δ , P et S.

m	$-\infty$		-1		1		$7/5$		2		3		$+\infty$
Δ		$-$		$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
P						$+$	0	$-$	‖	$+$			
S						$+$		$+$	‖	$-$			
Conclusions		Pas de solutions $S=\varnothing$			$x_1=x_2=2$	$x_1>0$ $x_2>0$	$x_1=0$ $x_2>0$	$x_1<0$ $x_2>0$ $\lvert x_1\rvert<\lvert x_2\rvert$	$x=-1$	$x_1<0$ $x_2<0$	$x_1=x_2=-4$	$S=\varnothing$	

2°) Relation entre les racines, indépendante de m.

Je tire m dans les formules de P et S puis je les égalise.

$$P=\frac{10m-14}{m-2}\Leftrightarrow m=\frac{2P-14}{P-10} \quad et \quad S=\frac{-2m-2}{m-2}\Leftrightarrow m=\frac{2S-2}{S+2}$$

$$m=m\Leftrightarrow \frac{2P-14}{m-2}=\frac{2S-2}{S+2}\Leftrightarrow 6P+6S-48=0\Leftrightarrow P+S-8=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_1x_2)+(x_1+x_2)-8=0 \quad est \;\; la \;\; relation \;\; cherchée.$$

3°) Pour quelles valeurs de m l'équation admet 2 racines de signes contraires ?

Pour m $\in$ *]* $7/5$ *; 2[* x_1 *et* x_2 *sont de signes contraires.*

4°) Pour quelles valeurs de m l'équation admet 2 racines positives.

Pour m $\in$ *[1 ;* $7/5$*]* x_1 *et* x_2 *sont toutes deux positives.*

3– Comparaison d'un réel α aux racines d'une équation du second degré:

1°) Théorème :

Soit l'équation $f(x)=ax^2+bx+c=0 \;\; (a\neq 0)$ avec $\Delta>0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

- Si $af(\alpha)\prec 0,\;\; alors \;\; on \;\; a:\;\; x_1\prec\alpha\prec x_2$;
- Si $af(\alpha)\succ 0,\;\; alors \;\; on \;\; a:\;\; x_1\prec x_2\prec\alpha \;\; ou \;\; \alpha\prec x_1\prec x_2$;
  - Si en plus $\left(\alpha+\frac{b}{2a}\right)\succ 0,\; alors \;\; x_1\prec x_2\prec\alpha$;
  - Si en plus $\left(\alpha+\frac{b}{2a}\right)\prec 0,\; alors \;\; \alpha\prec x_1\prec x_2$;
- Si $af(\alpha)=0,\;\; alors \;\; \alpha \;\; est \;\; solution \;\; de \;\; l'équation$.

2°) Exemple :

Classer α = 2 par rapport aux racines de l'équation :

$$(m-2)x^2-2(m+1)x+m-3=0$$

Réponse :

1[er] cas : si m–2 = 0 ⇔ m = 2 l'équation devient –6x–1 = 0 ⇔ $x = -\frac{1}{2} < \alpha = 2$.

2[ème] cas : m–2 ≠ 0 ⇔ m ≠ 2 ; Δ' = 7m – 5. Δ' = 0 ⇔ $m = \frac{5}{7}$.

m	$-\infty$		5/7		$+\infty$
Δ'		−	0	+	

$$af(\alpha) = (m-2)[(m-2)4 - 4(m+1) + m - 3] \;;$$

$$a\,f(\alpha) = (m-2)(m-15) \;;$$

$$a\,f(\alpha) = 0 \iff (m-2)(m-15) = 0 \iff m = 2 \text{ ou } m = 15.$$

m	$-\infty$		2		15		$+\infty$
$a\,f(\alpha)$		+	0	−	0	+	

$\alpha + \frac{b}{2a} = \frac{2m-10}{2(m-2)} = \frac{m-5}{m-2}$. Dressons le tableau récapitulatif

m	$-\infty$	5/7		2		5		15	$+\infty$
Δ'	−	0	+	‖	+		+		+
$a\,f(\alpha)$			+	0	−		−	0	+
$\alpha + \frac{b}{2a}$			+	‖	−	0	+		+
Résultats	Pas de racines	$x_1 = x_2 = \frac{-4}{3} < \alpha$	$x_1 < x_2 < \alpha$	$x_1 = \frac{-1}{6} < \alpha$, $x_2 = \alpha$	$x_1 < \alpha < x_2$	$x_1 < \alpha < x_2$	$x_1 < \alpha < x_2$	$x_1 = \alpha$, $x_2 = \frac{-6}{13} < \alpha$	$x_1 < x_2 < \alpha$

4 – Exemple d'Inéquation paramétrique:

Exemple :

Soit $f(x) = (m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6$. Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m l'inéquation $f(x) < 0$.

– 0 –

1[er] cas : Si m – 2 = 0 ⇒ m = 2, alors on a : 2x + 4 < 0 ⇔ x < –2 ;

d'où S =]–∞ ; – 2[.

2[ème] cas : Si m – 2 ≠ 0, ⇔m ≠2, alors

$\Delta = 4(2m-3)^2 - 4(m-2)(5m-6) \Leftrightarrow \Delta = 4[-m^2 + 4m - 3] = 4\,\Delta'$.

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1$ et $m_2 = 3$.

On étudie le signe de Δ' et de a (ici = m – 2) .

m	–∞		1		2		3		+∞
Δ'		–	0	+	‖	+	0	–	
m – 2		–		–	0	+		+	

- Pour m ∈] – ∞; 1[Δ'<0 donc $f(x)$ est du signe de a = m – 2 ; qui est négatif d'où S = ℝ ;

- Pour m ∈] 1; 2[Δ'> 0 donc l'équation admet deux racines

$x_1 = \frac{-2m+3-\sqrt{-m^2+4m-3}}{(m-2)}$; $x_2 = \frac{-2m+3+\sqrt{-m^2+4m-3}}{(m-2)}$; et $(m-2)$ *négatif*

x	–∞		x_1		x_2		+∞
$f(x)$		–	0	+	0	–	

S =]–∞ ; x_1[∪] x_2 ; +∞ [

- Pour m ∈] 2 ; 3[$\Delta' > 0$ et $(m-2)$ *positif*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

S =] x_1 ; x_2 [

- Pour m ∈] – ∞; 1[∪] 3 ; + ∞[$\Delta' < 0$ donc $f(x)$ est du signe de a = m–2 qui est positif d'où S = ∅.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		+	

S = ∅

- Pour m = 1 , $\Delta' = 0$ donc $x_1 = x_2 = \dfrac{-2m+3}{(m-2)} = -1$ et m–2 négatif ;

x	$-\infty$		$x_1 = x_2 = -1$		$+\infty$
$f(x)$		−	0	−	

S = ℝ− {–1}

- Pour m = 3, $\Delta' = 0$ donc $x_1 = x_2 = \dfrac{-4m+6}{2(m-2)} = -3$ et m–2 positif ;

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	

S = ∅

V – Systèmes d'équations et d'inéquations :

1°) Système d'équations du 1^er^ degré à 2 inconnues :

a) Définition :

Soient a, b, c, a', b', c' six réels donnés. Résoudre pour x et y réels le système

$$\begin{cases} ax+by=c & (E_1) \\ a'x+b'y=c' & (E_2) \end{cases}$$

Consiste à déterminer l'ensemble S des couples $(x\,;\,y)$ de réels qui vérifient simultanément les deux équations.

c) Exemple :

Résoudre pour x et y réels le système (S) $\begin{cases} 2x-5y=11 \\ 3x+4y=5 \end{cases}$

- **1ère méthode : par combinaison linéaires**

(S) $\begin{cases} 2x-5y=11 & \times(-3) \\ 3x+4y=5 & \times(2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x+15y=-33 \\ 6x+8y=10 \end{cases}$

$---------------$

$23y=-23 \Leftrightarrow y=-1$

(S) $\begin{cases} 2x-5y=11 & \times(4) \\ 3x+4y=5 & \times(5) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x-20y=44 \\ 15x+20y=25 \end{cases}$

$---------------$

$3x=69 \Leftrightarrow x=3$

Le système (S) admet le couple $(3\,;-1)$ comme solution ; $S=\{\ (3\,;-1)\ \}$.

- **2ème méthode : par substitution**

$$(S)\ \begin{cases} 2x-5y=11 & (1) \\ 3x+4y=5 & (2) \end{cases}$$

Dans l'équation (1) exprimons x en fonction y : 2x – 5y = 11 $\Leftrightarrow$ $x=\dfrac{5y+11}{2}$.

Dans l'équation (2) remplaçons x par sa valeur :

$$3\left(\frac{5y+11}{2}\right)+4y=5 \Leftrightarrow \frac{15y}{2}+4y=5-\frac{33}{2} \Leftrightarrow 15y+8y=-23 \Leftrightarrow 23y=-23$$

$\Leftrightarrow y=-1$. On remplace y par –1 dans l'expression de $x=\dfrac{5y+11}{2}$. On obtient $x=3$. D'où l'ensemble solution du système est $S=\{\ (3\,;-1)\ \}$.

- **$3^{\text{ème}}$ méthode : par déterminant**

  Soit le système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y.

$$\begin{cases} ax+by=p & (E_1) \\ cx+dy=q & (E_2) \end{cases}$$

Où a ; b ; c ; d ; p ; q sont des réels donnés. Pour résoudre ce système on calcule le déterminant principal : $Dét = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$;

le déterminant secondaire en x: $D_x = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix} = pd - bq$;

le déterminant secondaire en y: $D_y = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix} = aq - pc$;

- Si $Dét \neq 0$; alors les droites (E_1) et (E_2) sont sécantes en un point I $(x\,;\,y)$. Le système admet un couple unique $(x\,;\,y)$ de solution tel que :

$$. \boxed{x = \frac{D_x}{Dét} \quad et \quad y = \frac{D_y}{Dét}} \text{. et} \quad S = \{(x\,;\,y)\}$$

- $\left.\begin{array}{c} Si\ \ Dét = 0 \\ et\ \ \ D_x \neq 0\ \ ou\ \ D_y \neq 0 \end{array}\right\}$ $Alors\ \ les\ droites\ (E_1)\ et\ (E_2)\ sont\ \ parallèles$

  Le système n'admet pas de solutions, $S = \phi$.

- $\left.\begin{array}{c} Si\ \ Dét = 0 \\ et\ \ \ D_x = 0\ ;\ D_y = 0 \end{array}\right\}$ $Alors\ \ les\ droites\ (E_1)\ et\ (E_2)\ sont\ confondues.$

  Le système admet une infinité de solutions de la forme,
  $S = \{\,(x\,; \alpha x + \beta)/\, x \in IR\}$ ou $S = \{\,(\alpha y + \beta\ ;\ y\ )/\, y \in IR\}$.

Exemple : Soit à résoudre par la méthode du déterminant le système

$$(S)\ \begin{cases} 2x - 5y = 11 & (1) \\ 3x + 4y = 5 & (2) \end{cases}$$

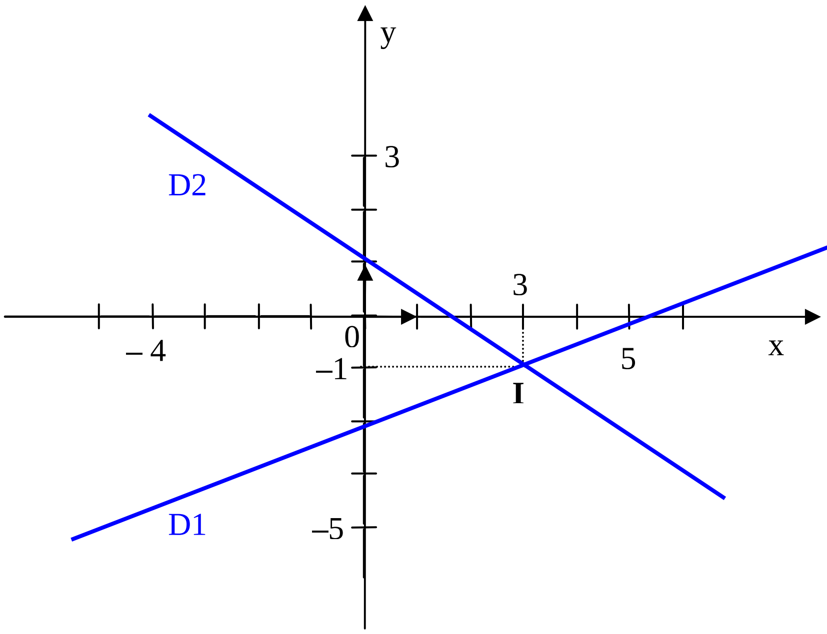
$$Dét = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-15) = 23\ ;\ D_x = \begin{vmatrix} 11 & -5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 44 - (-25) = 69\ ;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - (33) = -23\ ;\ x = \frac{D_x}{Dét} = \frac{69}{23} = 3\ \ ;\ \ y = \frac{D_y}{Dét} = \frac{-23}{23} = -1.$$

D'où l'ensemble solution est : $S = \{\ (3\,; -1)\ \}$.

d) Interprétation graphique du système :

$$(S)\ \begin{cases} 2x - 5y = 11 & (1) \\ 3x + 4y = 5 & (2) \end{cases}$$



2x – 5y = 11 est une équation d'une droite D_1.

3x + 4y = 5 est une équation d'une droite D_2.

Le calcul précédent permet d'affirmer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes au point I (3 ; –1). (3 ; –1) est la solution du système.

2°) Systèmes de trois équations à trois inconnues :

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 & (L_1) \\ x + 3y - 5z = -16 & (L_2) \\ 4x + 2y - z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

- **Méthode de Substitution :**

$(L_3) \Rightarrow z = 4x + 2y - 3$. En remplaçant z par sa valeur dans les autres équations on a le système devient : $\begin{cases} 11x + 3y = 19 & (1) \\ -19x - 7y = -31 & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow 3y = 19 - 11x \Leftrightarrow y = \dfrac{19 - 11x}{3}$. En remplaçant y par sa valeur dans (2) on obtient : $20x = 40 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1$ $z = 3$. D'où la solution du système est le triplet (2 ; –1 ; 3). Et l'ensemble solution est $S = \{ (2\,; -1\,;\ 3) \}$.

- **Méthode du pivot de Gauss :**

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 & (L_1) \\ x + 3y - 5z = -16 & (L_2) \\ 4x + 2y - z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

Eliminons x dans les équations (L_2) et (L_3)

$$\begin{array}{rl} (L_1) & 3x - y + 2z = 13 \\ (-3L_2) & -3x - 9y + 15z = 48 \\ & ------------ \\ & = 0 - 10y + 17z = 61 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} (4L_1) & 12x - 4y + 8z = 52 \\ (-3L_2) & -12x - 6y + 3z = -9 \\ & ------------ \\ & = 0 - 10y + 11z = 43 \end{array}$$

Le système devient : $\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 & (L_1) \\ 0 - 10y + 17z = 61 & (L_2) \\ 0 - 10y + 11z = 43 & (L_3) \end{cases}$

Eliminons y dans l'équation (L_3)

$$\begin{array}{rl} (L_2) & -10y + 17z = 61 \\ (-L_3) & 10y - 11z = -43 \\ & ------------ \\ & = \ 0 \ + \ 6z = 18 \end{array}$$

Le système devient :

$\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 & (L_1) \\ 0 - 10y + 17z = 61 & (L_2) \\ 0 \ + \ 0 + \ 6z = 18 & (L_3) \end{cases}$ Un tel système est dit échelonné ou triangularisé.

$(L_3) \Rightarrow 6z = 18 \Leftrightarrow z = 3$

$(L_2) \Rightarrow -10y + 51 = 61 \Leftrightarrow y = -1$ d'où $S = \{\,(2\,;-1\,;\,3)\,\}$

$(L_1) \Rightarrow 3x + 1 + 6 = 13 \Leftrightarrow x = 2$

3°) **Système d'inéquations du 1er degré à 2 inconnues :**

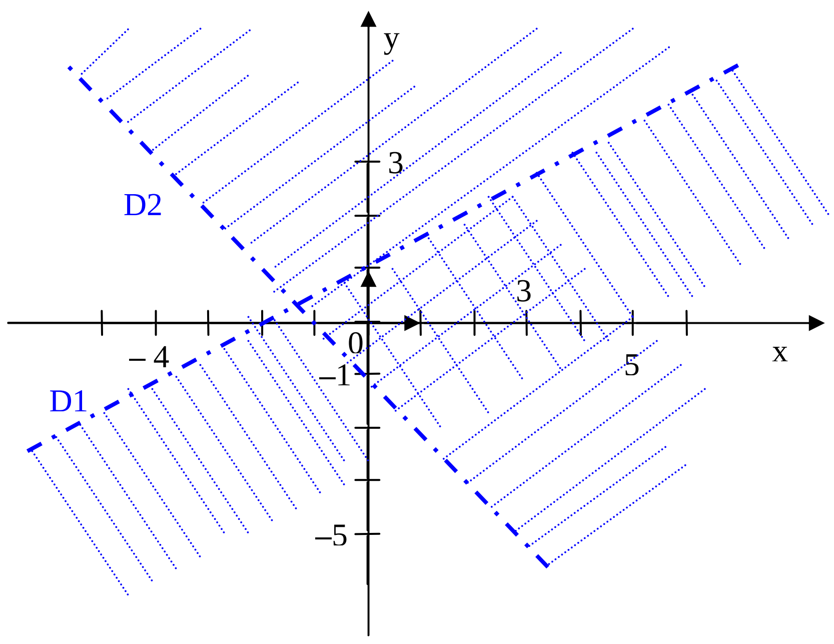
Exemple 1 :

Représentons l'ensemble des solutions du système d'inéquations :

$\begin{cases} x - 2y + 2 \prec 0 \\ x + y + 1 \prec 0 \end{cases}$ Ce système est équivalent au système $\begin{cases} y \succ \dfrac{1}{2}x + 1 \\ y \prec -x - 1 \end{cases}$

il faut représenter dans le plan les droites d'équation respectives :

$$(D_1) : \; y = \frac{1}{2}x + 1 \text{ et } (D_2) : \; y = -x - 1.$$



La région du plan non hachurée est la partie solution du système.

Exemple 2 :

Représentons l'ensemble des solutions du système d'inéquations :

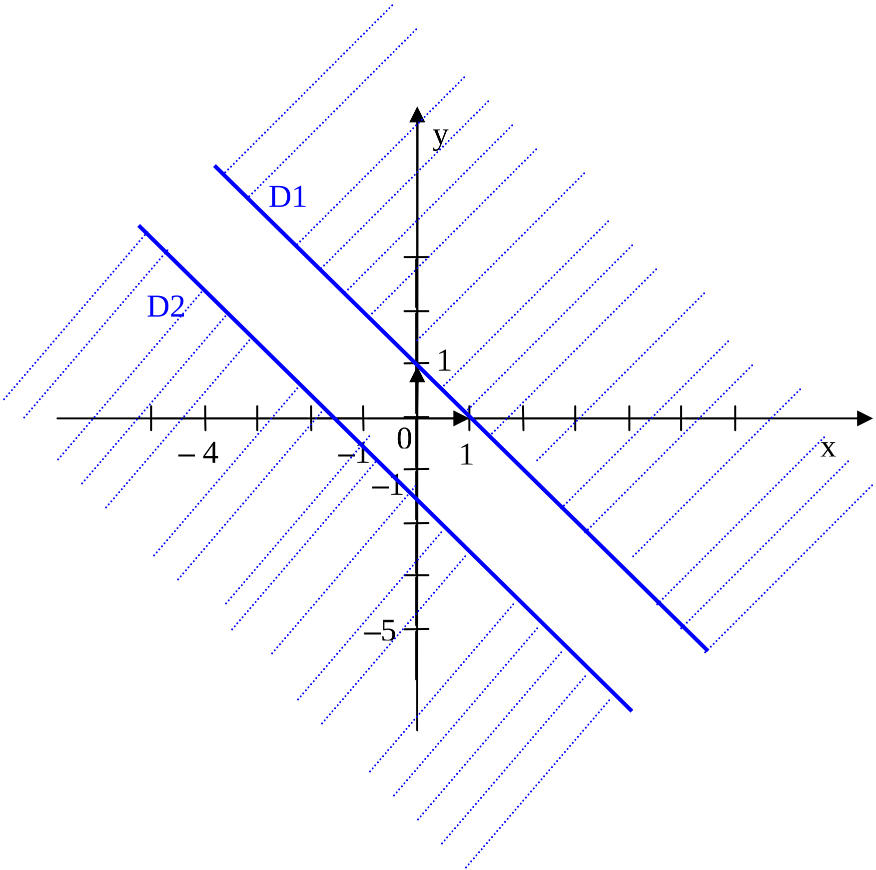
$$\begin{cases} x+y-1\leq 0 \\ 2x+2y+3\geq 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} y\leq 1-x \\ y\geq -x-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

il faut représenter dans le plan les droites d'équation respectives :

(D_1) : $y=-x+1$ et (D_2) : $y=-x-\dfrac{3}{2}$.



La région du plan non hachurée est la partie solution du système.