SOMMAIRE

Deuxième Partie

Quelques sujets de révision

Troisième Partie

Quelques Sujets du DEF

Avertissement

Nous avons sélectionné dans cette collection un ensemble d'exercices et de sujets corrigés pour les élèves des classes de la **9ème Année** de l'enseignement fondamental, classique et moderne de tous les établissements scolaires. Nous le faisons dans un esprit conforme aux tendances actuelles de l'enseignement des mathématiques. Ainsi :

- **LA PREMIERE PARTIE** est consacrée uniquement au programme du premier trimestre.
- **LA DEUXIEME PARTIE** est un mélange du deuxième et du troisième trimestre.
- **LA TROISIEME PARTIE** est une sélection des anciens sujets du DEF de 2002 à 2017.

Il est à noter que la géométrie du sujet du DEF 2015 contient des erreurs. Il convient donc d'en tenir compte.

Nous avons voulu que cette collection soit pour nos collègues et pour leurs élèves un instrument de travail sympathique et efficace. C'est avec reconnaissance que nous recevrons les observations et les suggestions qui nous permettrons de l'améliorer.

L'auteur

ABBA MAIGA

ÉNONCÉS

EXERCICES DE REVISION-MATHEMATIQUES (9ème ANNEE)

PREMIÈRE PARTIE:

1^{er} TRIMESTRE

A/ ALGÈBRE :

EXERCICE 1 : Résous dans ℝ les équations suivantes :

$$x^2 - 81 = 0\ ;\ 3x^2 - 147 = 0\ ;\ 2x + 6 = 4x + 8x + 6\ ;\ \frac{x+3}{2} - \frac{x+5}{3} = \frac{x+1}{3} + 1\ ;$$

$$x^2 - 16 = 0\ ;\ x^2 = 1,21\ ;\ x^2 + 64 = 0\ ;\ \sqrt{x+3} = \sqrt{13}\ ;\ 2x^2 = \frac{8}{9}.$$

EXERCICE 2 : Ecris les nombres suivants sous la forme de produits de nombres premiers, puis calcule leur racine carrée : 27225 ; 59049 ; 23716.

EXERCICE 3 : Ecris sans radical les nombres suivants :

$\sqrt{144}$; $\sqrt{324}$; $\sqrt{\frac{49}{16}}$; $\sqrt{(0,3)^2}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{\sqrt{10^8}}$

EXERCICE 4 : Ecris chacun des réels suivants sous la forme $a\sqrt{b}$; $(a;b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$\sqrt{8}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{120}$; $\sqrt{3200}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{720}$.

EXERCICE 5 : 1°) calcule puis simplifie chacune des expressions suivantes :

$$A = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \times \left(1 - \frac{5}{3}\right)\ ;\ B = \frac{(2 \times 10^{-2})^3 \times 4 \times 10^5}{1,6}$$

2°) Calcule $\left(\sqrt{3} - 3\right)^2$ et $(\sqrt{3} + 3)^2$ puis écris sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs, les expressions S et R telles que : $S = \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ $R = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}}$

EXERCICE 6 : Simplifie les expressions suivantes :

$$A = \sqrt{32} + 3\sqrt{8} - \sqrt{72} - 2\sqrt{128}$$
$$B = \sqrt{147} - \sqrt{108} + \sqrt{48}$$
$$C = \sqrt{180} - \sqrt{245} + \sqrt{320} - \sqrt{125}$$
$$D = 5\sqrt{49 \times 2} + 7\sqrt{64 \times 2} + 3\sqrt{81 \times 2}$$
$$E = 3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - 2\sqrt{80} - \sqrt{180}$$
$$F = 6\sqrt{75} - 7\sqrt{48} + 9\sqrt{192}$$

EXERCICE 7 : Décompose le nombre 7056 en produit de facteurs premiers. En déduire $\sqrt{7056}$; résous dans ℝ les équations suivantes :

$$x^2 = 7056\ ;\ x^2 - 2x + 1 = 7056\ ;\ x\left(x^2 - 2x + 1\right) = 7056x$$

EXERCICE 8 : Calcule puis simplifie si possible chacune des expressions suivantes :

$$A = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}\ ;\ B = 1 - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{4 - \frac{1}{2}}\ ;\ C = B - \frac{4}{17} \times A$$

EXERCICE 9 : On donne $A = 3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - 2\sqrt{80} - \sqrt{180}$

a) Ecris A sous la forme de $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$.
b) Sachant que $2,236 \leq \sqrt{5} < 2,237$; en déduire un encadrement de A.

EXERCICE 10 : une école propose de partager 3120 cahiers proportionnellement aux effectifs de ses trois classes du second cycle sachant que la 7ème Année 78 élèves, la 8ème Année 72 élèves et la 9ème Année 90.
Trouve la part de chaque classe ; en déduire la part d'un élève.

EXERCICE 11 : Rend rationnel les dénominateurs des réels suivants :

$\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\frac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; $\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-1}$; $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$; $5\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$; $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}+4}$; $\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}-4}$; En déduire $\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}+4} + \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}-4}$

EXERCICE 12 : On donne les réels : $A = 2\sqrt{3} + 2$ et $B = 2\sqrt{3} - 2$

a) Calcule A^2 ; B^2 ; $A^2 - B^2$; $A \times B$; $(A+B)^2$; $(A-B)^2$

b) Rends rationnel le dénominateur de $\frac{A}{B}$ puis donne sa valeur approchée au millième près. On prendra $\sqrt{3} = 1,732$.

EXERCICE 13 : Trouve $a \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

$$5^a \times 25 = 125 \ ; \ 9^{3a} = 3^{12} \ ; \ (7^a)^3 = 1 \ ; \ \frac{13^{a-4}}{13} = 169 \ ; \ 4^{2-a} = 1 \ ; \ 5 \times 5^a = 25$$

EXERCICE 14 : Compare les nombres suivants : $6\sqrt{5}$ et $8\sqrt{3}$; $3\sqrt{7}$ et 8 ; $\sqrt{2} + 2$ et $\sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$

EXERCICE 15 : Factorise les expressions suivantes :

$$A = 20x^3 - 45x$$
$$B = -64 + 48x - 9x^2$$
$$C = (5 - x)^2 - (2x - 1)^2$$
$$D = (2 - x)(3x + 5) - 3(2 - x) + 8(2 - x)$$
$$E = 4x^2 + 12x + 9$$
$$F = (5 - 3x)(x - 2) + 9x^2 - 30x + 25$$

EXERCICE 16 : Soient x et y deux réels tels que : $x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$.

Calcule les produits suivants : x^2 ; $2 \times \frac{1}{y}$; $3x^2y$; $\frac{x}{y}$; $\frac{y}{x}$.

EXERCICE 17 : Développe les expressions suivantes : $(2\sqrt{5} - 3)^2$; $\left(x + 2\sqrt{3}\right)^2$; $\left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right)$.

EXERCICE 18 : Soient les réels A et B tels que :

$$A = \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}} \ ; \ B = \sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}}}$$

a) Ecris A et B sous une forme simple.

b) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\sqrt{x + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}} = 5 \ ; \ \sqrt{x + \sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}}}} = 5$$

EXERCICE 19 : Trouve deux nombres x et y proportionnels à 7 et 3 ; la somme de ces deux nombres est 84.

EXERCICE 20 : Trouve $x \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

$$8^x = 4^3 \ ; \ 49^x = 7^8 \ ; \ 27^{4x} = 3^{36} \ ; \ 2^x.2.(2^3)^0 = 8 \ ; \ 5^{2x-6} = 1$$

EXERCICE 21 : a et b étant deux nombres non nuls, on pose : $A = (ab)^2(\frac{1}{b})^4$ et $B = a^2\left(\frac{b}{a}\right)^3(\frac{1}{b^2})$

1. Simplifie A et B.
2. Calcule la valeur numérique de $A \times B$ et de $\frac{A}{B}$ pour $a = 4 \times 10^{-3}$ et $b = 2 \times 10^{-2}$

EXERCICE 22 : Rahama et Mariam de 8 et 11 ans se partagent 171 perles proportionnellement à leurs âges. Combien auront-elles chacune ?

EXERCICE 23 : A la suite des résultats du DEF le ministre de l'éducation décide de donner des prix aux meilleurs élèves du Mali ; le 1er reçoit une somme de 400.000 F, le 2ème une somme de 300.000 F et le 3ème une somme de 200.000 F. Pour les motiver encore plus on leur donne une somme de 180.000 F tout en exigeant de faire le partage proportionnellement à leurs premiers gains. Quelle est la part qui reviendra à chacun d'eux ?

EXERCICE 24 : Complète les pointillés de manière à obtenir un produit remarquable :

a) $x^2 + \cdots + 9 = (x + \cdots)^2$
b) $x^2 - \cdots + 1 = (x - \cdots)^2$
c) $x^2 - 2\sqrt{7}x + \cdots = (x - \cdots)^2$
d) $x^2 + \cdots + \frac{1}{2} = (x + \cdots)^2$
e) $9 + 6x + \cdots = (3 + \cdots)^2$
f) $16x^2 - 40x + \cdots = (4x - \cdots)^2$

EXERCICE 25 : Quatre cultivateurs s'entendent pour louer une camionnette pour ramener leurs récoltes du champ. Le premier a son champ à 22 km de son domicile, le deuxième a le sien à 36 km et les deux derniers ont les leurs à 45 km de leurs domiciles. Le chauffeur leur demande de payer 37.000 FCFA. Ils conviennent que chacun d'eux paiera proportionnellement à la distance parcourue pour arriver chez lui.
Détermine le montant de la somme payée par chacun.

EXERCICE 26 : Trouve trois nombres a; b; c proportionnels à 2; 3 et 7 sachant que :

$$4a - b + 5c = 12.480$$

EXERCICE 27 : Montre que le réel $\frac{\sqrt{50}+\sqrt{98}-\sqrt{8}}{\sqrt{200}}$ peut s'écrire sous la forme d'un entier.

EXERCICE 28 : Une somme est partagée entre trois (3) personnes. Les parts sont respectivement proportionnels à 4 ; 5 et 6 sachant que la première part vaut 16.000 F. Calculer

- La somme qui revient à chacune des autres personnes ;
- Le montant total des parts.

EXERCICE 29 :

a) Ecris plus simplement les radicaux suivants : $\sqrt{\sqrt{7}} \times \sqrt{7\sqrt{7}}$; $\sqrt{2\sqrt{2}} \times \sqrt{4\sqrt{2}}$
b) Rends rationnels les dénominateurs des quotients suivants : $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$; $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$.
c) Réduis le calcul de l'expression $A = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$
d) Calcule la moyenne proportionnelle des nombres $2\sqrt{3} + 2$ et $2\sqrt{3} - 2$.

EXERCICE 30 : Calcule :

$$(2\sqrt{3} + 2)^2 ;\ (2\sqrt{5} - 3)^2 ;\ (\sqrt{7} - 5)^2 ;\ (\sqrt{7} - 2\sqrt{3})(\sqrt{7} + 2\sqrt{3}) ;\ (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}).$$

EXERCICE 31 : a°) L'aire d'un champ rectangulaire est 242 m^2. La longueur est le double de la largeur. Calcule les dimensions de ce champ.
b°) Un disque a une aire de 28,26 m^2 ; Calcule le rayon de ce disque.

EXERCICE 32 : Détermine quatre nombres x ; y ; z ; t sachant que leur somme est -16 et que les deux suites (x ; y ; z ; t) et (-6 ; 14 ; -11 ; -12) sont des suites de nombres proportionnels.

EXERCICE 33 : a°) Calcule $A = 3 \times (1 - 0,8)$ et $B = (\frac{3}{2} - \frac{2}{3}) \times \frac{5}{3}$
b°) Lorsque $a = -1$ et $b = 7$; calcule la valeur de $c = a - \frac{2}{b}$
c°) Soit $d = 7\sqrt{3} + \sqrt{75} - 2\sqrt{243}$. Ecris d sous la forme de $p\sqrt{3}$, p étant un entier relatif.
d°) Soit $E = (3\sqrt{2} - 5)(4 - \sqrt{2})$. Ecris E sous la forme de $m + n\sqrt{2}$, m et n étant des entiers relatifs.

EXERCICE 34 : En prenant $\pi = 3,14$ calcule le rayon d'un disque dont l'aire est $200,96\ cm^2$.

EXERCICE 35 : L'aire d'un triangle rectangle isocèle est $60,50\ dm^2$ calcule la longueur des côtés de l'angle droit.

EXERCICE 36 : Soit a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle, p le demi-périmètre, $\mathcal{A}$ l'aire. Nous admettons l'égalité : $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Calcule $\mathcal{A}$ pour les valeurs suivantes de a, b, c :

1. $a = 8\ cm$; $b = 10\ cm$; $c = 12\ cm$
2. $a = 5,7\ cm$; $b = 8,4\ cm$; $c = 9,6\ cm$
3. $a = b = c = 15\ cm$.

EXERCICE 37 : a) décompose le naturel 320 en produit de facteurs premiers. En déduire $\sqrt{320}$ sous la forme $a\sqrt{b}$.
b) On pose $x = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$ et $y = \frac{\sqrt{20-\sqrt{320}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$. Vérifie que $4x - y = 0$.

EXERCICE 38 : 1°) a- Décompose les nombres naturels 320 et 48 en produit de facteurs premiers. En déduire $\sqrt{320}$ et $\sqrt{48}$ sous la forme $x\sqrt{y}$.
b- Vérifie que le réel $5 - 2\sqrt{5}$ est positif.

M. Mahamar H MAIGA dit ABBA M.S.C-Maths-Physique-Chimie au CAP de Diré cel : 79 35 58 55/65 55 90 93
www.abbamaiga78@gmail.com

c- Ecris les nombres suivants sous forme de fraction ou de nombre entier relatif :

$$E = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{6}} \quad ; \quad T = \frac{\sqrt{20-\sqrt{320}} - \sqrt{12+\sqrt{48}}}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}}.$$

2°) soient les réels a, b, c.

a. Développe $(a+b+c)^2$ et $(a+b+c)^3$.

b. Démontre que si $a+b+c=0$ alors $a^3+b^3+c^3=3abc$.

EXERCICE 39 : Calcule les angles d'un triangle sachant qu'ils sont proportionnels à 5,6 et 7.

B/ GEOMETRIE :

EXERCICE 1 : Soit un triangle KBC rectangle en K. Les points I; L; M sont les milieux respectifs des segments $[BC]$; $[CK]$; $[BK]$ et $E = S_K(L)$; $F = S_K(M)$; $T = S_I(K)$.

1°) a- Construis les points E; F et T.

b- Quelle est la nature des quadrilatères $BKCT$ et $MEFL$?

2°) Trouver les images des points suivants : $t_{\overrightarrow{ML}}(E)$; $t_{\overrightarrow{BK}}(T)$; $t_{\overrightarrow{BI}}(I)$; $t_{\overrightarrow{BK}}(B)$; $t_{\overrightarrow{KI}}(I)$.

EXERCICE 2 : Le rayon d'un cercle est $36\ mm$. En prenant $\pi = 3,14$ complète le tableau :

ARC	α	β	δ
Mesure de la longueur de l'arc		12,56	
Mesure de l'arc en degré	50		75

EXERCICE 3 : Dessine un cercle de rayon $5\ cm$ puis sur ce cercle un arc de $60°$.

a) Calcule sa mesure en radians et en grades.

b) Quelle est la longueur de cet arc ?

c) Calcule l'air d'un secteur circulaire de $60°$ de ce même cercle ; $(\pi = 3,14)$.

EXERCICE 4 : Un arc de $50°$ est sur un cercle de $5\ cm$ de rayon. Calcule la longueur de cet arc.

EXERCICE 5 : a°) construis un triangle isocèle ABC $(AB = AC)$. Place le symétrique D de A par rapport au milieu O de $[BC]$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$.

b°) Complète les écritures suivantes :

$$S_O(B) = \cdots ;\ S_O(D) = \cdots ;\ S_{(BC)}(A) = \cdots ;\ S_{(AD)}(C) = \cdots ;\ t_{\overrightarrow{AB}}(\ldots) = D\ ;\ t_{\overrightarrow{CA}}(D) = \cdots$$

EXERCICE 6 : Construis un triangle PQR et place le point N milieu de $[PR]$.

a) Construis les points S et T tels que : $S = S_Q(P)$; $T = t_{\overrightarrow{PQ}}(N)$

b) Trouve la nature du quadrilatère $QSTN$ (Justifie ta réponse)

EXERCICE 7 : Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O ; de diamètre $[AB]$ et M un point de ce cercle.

1) Quelle est la nature du triangle AMB ?

2) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OM}$, construis les points A'; B'; M' tels que :

$$A' = t_{\overrightarrow{OM}}(A); B' = t_{\overrightarrow{OM}}(B); M' = t_{\overrightarrow{OM}}(M)$$

3) Quelle est l'image par $t_{\overrightarrow{OM}}$ du point O ?

4) Quelle est la nature du quadrilatère $ABB'A'$? Justifie ta réponse.

5) Quelle est la nature du triangle $A'M'B'$? Justifie ta réponse.

EXERCICE 8 : Donne la mesure en radians de chacun des angles suivants : $216°$; $150°$; $135°$. Exprime chacun de ces angles à l'aide d'un produit d'une fraction simple par π.

EXERCICE 9 : α; β; γ sont les mesures respectifs des angles $\widehat{A}$; $\widehat{B}$; $\widehat{C}$ d'un triangle ABC.

a) Détermine γ lorsque $\alpha = 83°$ et $\beta = 51°$.

b) Détermine α lorsque $\beta = \frac{\pi}{2}$; $\gamma = \frac{2\pi}{5}$.

EXERCICE 10 : On donne un bipoint (R, S) répresentant du vecteur $\overrightarrow{V}$ et un point P'. Construis le point P tel que P' est l'image de P par la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$. Compare RP et SP'.

Exercice 11 : construis un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et marque un point A sur ce cercle.

a) Construis l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{U}$ sachant que $\overrightarrow{U} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

b) $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont sécants aux points M et N. Construis M' et N' images respectives de M et N par $t_{\overrightarrow{U}}$. Prouve que M' et N' sont sur le cercle $(\mathcal{C}')$.

EXERCICE 12 : Dans une symétrie de centre I deux points A et B ont respectivement pour images les points C et D. Le milieu M de $[AB]$ a pour image un point P.

a) Démontre que P appartient à $[CD]$.
b) Démontre que $CP = DP$.
c) Que représente P pour $[CD]$?

EXERCICE 13 : Un arc d'un cercle a pour longueur $7,85\ cm$ et pour mesure $55°$. Quel est le rayon de ce cercle ?

EXERCICE 14 : Dessine un triangle ABC rectangle en A. Soit O le milieu de l'hypoténuse. Construis l'image O_1 de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$, puis l'image O_2 de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$. Montre que les points O_1, A , O_2 sont alignés.

EXERCICE 15 : Dessine un cercle de centre O et de rayon $3\ cm$ et un secteur angulaire $[\widehat{XOY}]$ de mesure $75°$. Les demi-droites $[OX)$ et $[OY)$ coupent respectivement le cercle en A et B. Calcule la longueur de l'arc $\widehat{AB}$.

EXERCICE 16 : Marque trois points A, E et Fnon alignés. Construis le symétrique A' de A par rapport à E, puis le symétrique A'' de A par rapport à F. Démontre que $\overrightarrow{A'A''} = 2\overrightarrow{EF}$.

EXERCICE 17 : O, A, B sont trois points non alignés du plan. Construis les points C et D tels que : $S_O(A) = C$, $S_O(B) = D$. Trouve $t_{\overrightarrow{AB}}(D)$ et $t_{\overrightarrow{CO}}(O)$.

EXERCICE 18 : Dessine un triangle ABC rectangle en A. Soit I le milieu $[BC]$. Construis le symétrique A' de A par rapport à I.

a) Démontre que (CA') est perpendiculaire à (BA').
b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABA'C$.

EXERCICE 19 : Trace un triangle ABC et un vecteur $\overrightarrow{EF}$.

a) Construis A'; B' et C' images des points A; B et C par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.
b) Avec les points de la figure, écris tous les vecteurs égaux $\overrightarrow{EF}$.
c) Déduis-en une liste de trois parallélogrammes.
d) Cite un vecteur égal à $\overrightarrow{AC}$ et un vecteur égal à $\overrightarrow{CB}$.

EXERCICE 20 : dessine un parallélogramme $CUIT$ de centre O. Soit M le milieu de $[CU]$, N celui de $[IT]$, E celui de $[CT]$ et F celui de $[UI]$. Soit le vecteur $\vec{t} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CU}$.

Quelles sont les images par la translation de vecteur $\vec{t}$ des points M, C, T, N et O ? Justifie ta réponse.

EXERCICE 21 : Construis un triangle équilatéral TSI. Marque un point K du plan. Construis l'image :

- ♥ B de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{TS}$
- ♥ A de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{ST}$
- ♥ U de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{TI}$
- ♥ R de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{IT}$
- ♥ V de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{SI}$
- ♥ D de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{IS}$

Quelle est la nature du quadrilatère $BUVARD$?

EXERCICE 22 : Soient A, B et C trois points non alignés, E et F les symétriques respectifs de A et B par rapport à C.

a) Démontre que $AB = EF$ et $(AB) \parallel (EF)$
b) Démontre que $AF = BE$ et $(AF) \parallel (BE)$

EXERCICE 23 : Construis un triangle isocèle LUI de sommet principal I. Construis le symétrique R de L par rapport au milieu E de $[UI]$. Quelle est la nature du quadrilatère $LURI$?

EXERCICE 24 : Trace un cercle de centre O et deux cordes $[AB]$ et $[CD]$ parallèles et de longueurs différentes.

a) Démontre que la droite Δ passant par O et perpendiculaire à (AB) est la médiatrice des cordes $[AB]$ et $[CD]$.
b) Démontre que les cordes $[AC]$ et $[BD]$ d'une part et $[AD]$ et $[BC]$ d'autre part ont la même longueur.

EXERCICE 25 : Etant donné un triangle DEF.

- ♥ Construis l'image D' de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.

- Donne la nature du quadrilatère $DEFD'$.
- Quelle est l'image du segment $[DE]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.
- Construis le point I tel que : D' est l'image du point E par la symétrie de centre I.

DEUXIÈME PARTIE :

$2^{ème}$ ET $3^{ème}$ TRIMESTRE

EXERCICE 1 : Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants en utilisant la méthode de ton choix.

- $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 4y - 5 = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} y = -4x - 7 \\ y = x + 8 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 5x + 3y = 77 \\ 2x - y = 11 \end{cases}$

EXERCICE 2 : Résous dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

- $1 + 4x = x - 3$
- $2 - 2x = 5x + 3$
- $3x + 7 = 6x + 4$
- $4(x - 1) = 5(2 - x)$
- $4 - (5 - x) = 9x + 2$
- $(x + 3) - (2x - 1) = 3(x - 4)$
- $6(x - 1) - 2(2 - 3x) = 0$
- $(4x - 1) - (2 - 3x) = 3x - 5(2 - x) + 1$
- $2x - 5[1 - 2(x + 1)] = -7$
- $2 - [2 - (2 - x)] = 3x - [3 - (3 - 2x)]$
- $4x - (x + 3) = 5 - (1 - 3x)$
- $7 + 2(x - 1) = 4x - (7 + x)$
- $-8 + 3(x - 2) = 2x - (14 + x)$
- $8 + (2 - 3x) = 9 - (3x - 1)$
- $-3(3x + 2) = -6x - 3(x + 2)$
- $-x + 5(x - 1) = 2(2x - 3) + 1$

EXERCICE 3 : Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $(x + 5)(x - 2) = 0$
- $(x + 1)(3 - 2x) = 0$
- $(x - 5)(x + 2) + (x - 5)(2x + 1) = 0$
- $2(5x - 7)(3x + 2) = 0$
- $(x - 3)(2 - x) + x - 3 = 0$
- $(x + 5)^2 + (x + 5)(x + 1) = 0$
- $(x + 1)^2 - 9x^2 = 0$
- $(5x + 1)^2 = (4x + 5)^2$
- $(3x + 6)(x + 5) - (x + 2)(2x + 1) = 0$
- $(1 - x)(x - 2) = x^2 - 4x + 4$

EXERCICE 4 : Trouve un nombre sachant que son triple augmenté de deux est égal à son double diminué de trois.

EXERCICE 5 : Trouve cinq entiers consécutifs dont la somme est égale 1515.

EXERCICE 6 : Un capitaine a le triple de l'âge de son fils. Dans onze ans, l'âge du capitaine sera le double de celui de son fils. Quels sont les âges respectifs du père et du fils ?

EXERCICE 7 : A la fin de la journée, on demande à un chasseur combien il a tué de lapins et de pigeons. « 12 têtes et 30 pattes », répond-il. Peut-on savoir le nombre de lapins et le nombre de pigeons tués.

EXERCICE 8 : A son retour d'un jardin zoologique, on interroge Rahama sur ce qu'elle a remarqué. Elle a surtout admiré les antilopes qui ont deux cornes sur la tête et les rhinocéros qui en ont un sur le nez. Et quand on lui demande si elle a vu beaucoup de ces animaux, elle répond : « J'ai vu 14 têtes et 19 cornes ».
Combien d'antilopes et de rhinocéros a-t-elle vu ?

EXERCICE 9 : Il y a quatre ans, Adama était cinq fois moins âgée que Salamata. Dans deux ans, Adama sera trois fois moins âgée que Salamata. Quel est l'âge de Adama et celui de Salamata ?

EXERCICE 10 : Détermine deux nombres, sachant que la différence du plus grand et du triple du plus petit est 74 et que si l'on divise le plus grand par le plus petit, le quotient est 4 et le reste est 21.

EXERCICE 11 : x et y sont deux nombres dont la différence est 7 et dont la différence des carrés est 91. Trouve x et y.

EXERCICE 12 : Résous les inéquations suivants et représente graphiquement l'ensemble solution.

- $-3x + 7 < x + 2$
- $-5x - 2 \leq 0$
- $2x - (4 + x) \geq 3x$
- $2 - 4x \geq -5x$
- $-3(x + 1) \geq -12$
- $-2x + 9 \leq -3(x - 4)$
- $-3x - 7 > 9 - 2x$
- $7x - 3 > 2x + 7$
- $5x + 1 \leq x - 3$
- $3x - 2 \geq -x - 8$

EXERCICE 13 : Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit [AH] la hauteur relative à l'hypoténuse.

On a : AB=10 cm et AH=6 cm. Calcule la mesure des côtés : AC, BC, BH, CH.

EXERCICE 14 : Résous les systèmes proposés et faire une représentation graphique de l'ensemble solution.

- $\begin{cases} 7-2x<3 \\ 2x-7\leq 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x+3<-3x-2 \\ 3(x-2)\geq 2-5x \end{cases}$
- $\begin{cases} 3\leq x-2 \\ 2x+3<5 \end{cases}$
- $\begin{cases} -x-2<2x+1 \\ 5x-3\leq 1-2(2-x) \end{cases}$

EXERCICE 15 : Résous graphiquement les systèmes d'inéquations suivants :

- $\begin{cases} x-y+3\leq 0 \\ 2x+y-1\leq 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+3y\leq 0 \\ -x+y\geq 0 \\ x+y-1\leq 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x-4y-3\geq 0 \\ 2x+y\geq 5 \\ y\geq 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x\leq 0 \\ x+y-2\geq 0 \\ -2x-3y+4\geq 0 \end{cases}$

QUELQUES SUJETS DE RÉVISION

Sujet 1 :

Algèbre :

On donne les fonctions polynômes f et g définies par :

$$f(x)=(x-3)-x^2+9+(x-3)(2x-1)+(3x-9)(x+1)\ ;\ \ g(x)=x^2-9$$

1. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$
2. Calculer $f(\sqrt{2})$ et $g(-\sqrt{2})$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $f(x)=g(x)$ et $f(x)+g(x)=0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

Géométrie :

Dans un repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan on considère les points $A\binom{1}{1}$; $B\binom{-1}{-3}$; $E\left(\frac{3}{2}\ ;0\right)$; $M\binom{2}{3}$

1. Déterminer les composantes de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$. En déduire que les points A ; B ; M sont alignés.
2. Déterminer une équation de la droite (AB) et une équation de la droite Δ passant par E et paralleles à la droite (AB) .

Sujet 2 :

Algèbre :

1. Quel nombre augmenté de son tiers donne l'unité.

2. Résoudre par la méthode de ton choix le système : $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{1}{4}y=1 \\ x+\frac{1}{2}y=3 \end{cases}$

3. Deux réels a et b vérifient la relation $2a=18b$.

a- Calcule a et b si $b-a=36$ b- Calcule a et b si $a+b=30$

4. Soient deux entiers x et y tels que $x+y-3=2y$ et $2(x-y)=x+1$; calcule ces deux nombres.

5. Le triple de quel nombre augmenté de 2 est égal à son double augmenté de 4.

6. Soient deux groupes d'oiseaux : un en haut et l'autre en bas. Si un oiseau descendait, le nombre d'oiseaux d'en bas serait le double de celui d'en haut. Si un oiseau montait, le nombre d'en haut serait égal à celui d'en bas. Trouve le nombre d'oiseaux de chaque groupe.

7. Trouve deux réels x et y tels que : $x+y=8$ et $3x+2y=19$.

Géométrie :

Le plan est rapporté à un repère cartésien $(o;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

1. Place les points R; D et P definis par : $\overrightarrow{OR}=4\vec{\imath}+7\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{OD}=-\vec{\imath}-3\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OP}=2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RD}$ et $\overrightarrow{RP}$ .les points R; D ; P sont-ils alignés ?
3. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[RP]$.

Sujet 3 :

Algèbre :

Exercice 1 : On désigne par A l'ensemble des réels $(x;y)$ solution de l'équation $3x-4y=5$.

a. Soit $E=\{\left(\frac{5}{3}\ ;0\right)\ ;(2\ ;\ -4)\ ;(3\ ;1)\}$. Quels sont les couples de E qui sont éléments de A ?

b. Calculer le réel x pour que $(x\ ;\ \frac{1}{4})$ soit élément de A.

Exercice 2 : on donne deux applications f et g definies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f: x \longmapsto -3x+1$ et $g: x \longmapsto ax+b$ ou a et b sont deux réels.

1. Déterminer a et b sachant que $g(-3) = 17$ et $g(1) = -3$. Ecrire alors $g(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 3f(x)$ et l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.
3. Représenter graphiquement les applications f et g.

Exercice 3 : Au marché de Kalabancoura, on vend des oranges par lots de 6 et les carottes par paquets de 5.

- Rahama achète 24 oranges et 15 carottes. Elle Paye 275F.
- Salma achète 42 oranges et 20 carottes. Elle paye 450F.

Quels sont les prix respectifs d'un lot d'orange et d'un paquet de carottes ?

Géométrie :

Dans un repère orthonormé (o ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) on donne les points A ; B ; C ; D definis par :
$\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+3\vec{j}$; $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}$; $\overrightarrow{OC}=-\vec{i}-2\vec{j}$ et $\overrightarrow{OD}=-2\vec{i}+\vec{j}$.

1. Déterminer les coordonnées des points A ; B ; C ; D puis place-les dans ce repère.
2. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
3. Calculer les coordonnées du centre I de ce quadrilatère.
4. Trouver une équation de la droite (BC) puis une équation de la droite Δ parallèle à (AB) et passant par I.
5. Quelles sont les coordonnées du point de rencontre E des droites Δ et (BC) ?

Sujet 4 :

Algèbre :

Exercice 1 : On désigne par A l'ensemble des couples de réels $(x; y)$ solutions de l'équation $5x - 3y = 4$. On donne l'ensemble des couples de réels suivants : $E = \left\{\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{9}\right); (0; 5); (-1; -3)\right\}$.
Quels sont les éléments de E qui sont éléments de A ?

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ et interprète graphiquement l'ensemble solution du système d'inéquation suivant : $\begin{cases} 3x - 3 \leq 7(x+3) \\ 8x - (2x-3) \leq 5x+3 \end{cases}$

Exercice 3 : On donne deux applications f et g définies par $f(x) = -2x+3$ et $g(x) = ax+b$ ou a et b sont des réels

1. Déterminer a et b sachant que $g(-2) = 7$ et $g(5) = -14$. Ecrire alors $g(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $g(x) = -2f(x)$; $f(x) \leq -g(x)$.
3. Représenter graphiquement $f(x)$ et $g(x)$.

Géométrie :

Exercice 1 : Un triangle ABC rectangle en A est tel que : $AB = 5cm$; $AC = 12cm$ .Construire ce triangle. Calculer BC et $\cos\widehat{B}$.

Exercice 2 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on donne les points $E(2; 3)$; $F(-2; 0)$; et $G(4; -3)$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{GE}$.
2. Calculer les coordonnées du point M milieu de $[EG]$ puis celles de H tel que : $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$.
3. Trouver une équation de la droite (EF).

Sujet 5 :

Algèbre :

Exercice 1 : La somme de deux entiers naturels est 320. Si on divise le plus grand par le plus petit le quotient est 3 et le reste est 8. Quels sont ces deux nombres ?

Exercice 2 : Résoudre graphiquement le système d'inéquation suivant : $\begin{cases} 2x + 3y - 12 \geq 0 \\ x - 2y + 4 > 0 \end{cases}$

Exercice 3 : Déterminer l'application affine du type $y = ax + b$, sachant que si $x = 2$ alors $y = 9$ et si $x = -2$ alors $y = 1$.

Géométrie :

Exercice 1 : DEF est un triangle tels que : $DE = 4cm$; $EF = 3cm$; $DF = 5cm$

a. Construire ce triangle et montrer qu'il est rectangle.

b. Soit $[EH]$ sa hauteur issue de E. Calculer DH et HF.

Exercice 2 : On considère un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ du plan et les points $A(4;7)$; $B(-1;-3)$; $C(-2;3)$

1. Placer les points A, B et C
2. Trouver les coordonnées du point I milieu du segment $[AC]$
3. Trouver les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
4. Trouver une équation pour la droite (AB).

Sujet 6 :

Algèbre :

Exercice 1 : Vingt livres sont empilés les uns sur les autres. La hauteur de la pile atteint 76cm. Certains ont une épaisseur de 5cm et les autres une épaisseur de 3cm. Trouve le nombre de livres de chaque sorte.

Exercice 2 : Résoudre et interprète graphiquement les solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y \geq 0 \\ x - 2y + 4 \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 3 : Déterminer l'application affine du type $f(x) = ax + b$ telle que : $f(-2) = 7$ et $f(5) = -14$.

Géométrie :

Exercice 1 : DEF est un triangle tels que : DE=8cm ; EF=6cm ; DF=10cm. Construire ce triangle. Montrer que le triangle DEF est rectangle et précise en quel point ? Calculer $\cos\widehat{D}$ et $\sin\widehat{D}$.

Exercice 2 : On considère un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ et les points : $A\binom{4}{2}$; $B\binom{-1}{-3}$ et $C\binom{-2}{3}$.

1. Placer ces points dans le repère et calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Calculer les coordonnées du point I milieu de $[AC]$ puis celles du point N symétrique de I par rapport à C.
3. Trouver les coordonnées du point D pour que le quadruplet $(A; B; D; C)$ soit un parallélogramme.
4. Déterminer une équation pour la droite Δ passant par le point $E(0;3)$ et parallèle à la droite (AB).
5. Montrer par les calculs que les points $A; C; I$ sont alignés.

Sujet 7 :

Algèbre :

Exercice 1 : Construire dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ les droites : $D1: y = x + 4$ et $D2: y = 3x + 8$. Calculer les coordonnées du point $M = D1 \cap D2$.

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ sont une solution du système :

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y > x \\ 2y \leq -x + 15 \end{cases}$$

Exercice 3 : Un père a le triple de l'âge de son fils. Dans quinze ans, l'âge du père sera le double de l'âge de son fils.
Quels sont les âges respectifs du père et du fils ?

Géométrie :

On considère un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ et les points $A(4;3)$; $B(-2;6)$; $C(-2;-9)$.

1. Ecrire les équations des droites supports des côtés du triangle ABC.
2. Calculer AB ; AC et BC puis en déduire la nature du triangle ABC.
3. Les points $K(2;-1)$ et $M(1;-3)$ appartiennent-ils à la droite (AC).
4. Soient P et Q les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. Ecrire l'équation de la droite qui contient P et Q. Comparer son coefficient directeur à celui de la droite $[AC]$.
5. Démontrer que les points $A; O; Q$ sont alignés.

Sujet 8 :

Algèbre :

Exercice 1 : Résoudre et interprète graphiquement le système d'inéquation suivants :

$$\begin{cases} 12x + 3 \geq 8x - 5 \\ 4x - 5 \leq 2x + 1 \end{cases}$$

Exercice 2 : Construire dans un repère un repère orthonormé les droites $d1$; $d2$; $d3$ ayant respectivement pour équation : $3x - 2y + 2 = 0$; $y = -2x + 2$; $y = -2$.
Trouver un système d'inéquations définissant la surface triangulaire déterminée par ces trois droites.

Exercice 3 : L'une des dimensions d'un rectangle est 3 cm. L'autre dimension, inconnue, est notée x.

1. Exprimer l'aire $\mathcal{A}(x)$ de ce rectangle en fonction de x.
2. On augmente les deux dimensions de ce rectangle de 2 cm.

a. Exprimer l'aire $\mathcal{A}'(x)$ de ce nouveau rectangle en fonction de x.
b. Sachant que l'aire de ce nouveau rectangle est supérieure de 20 cm² à celle du rectangle initial, déterminer la valeur de x.

Géométrie :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$; on considère les points A, C, D, I définis par :

$$\overrightarrow{OA} = -4\vec{i} + 2\vec{j} \text{ ; } \overrightarrow{OC} = 2\vec{i} - 2\vec{j} \text{ ; } \overrightarrow{OD} = \vec{i} + 3\vec{j} \text{ ; } \overrightarrow{OI} = \vec{i}$$

1. Placer ces points dans le repère
2. Calculer les coordonnées puis les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DC}$.
3. Quelles sont les coordonnées du milieu E du bipoint (A, C) et du symétrique B de D par rapport à E ? En déduire la nature quadruplet (A, B, C, D).
4. Trouver les coordonnées du point S tel que : $\overrightarrow{ES} = 3\overrightarrow{ED}$.
5. Trouver une équation de la droite (EC).

Sujet 9 :

Algèbre :

Exercice 1 : a- Résoudre et interpréter graphiquement l'ensemble solution des systèmes d'inéquations suivants :

- $\begin{cases} 4x + 2y - 8 \leq 0 \\ x - 2y + 2 \geq 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x + 4y \leq 5 \\ 2x - 5y \geq -4 \end{cases}$

b- Résoudre par la méthode de ton choix les systèmes d'équation suivants :

- $\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x + 5y = 25 \end{cases}$
- $\begin{cases} x - 2y = -6 \\ 3x + y = -4 \end{cases}$

Exercice 2 : Il y a quatre ans Salma était cinq fois moins âgée que Amadou. Dans deux ans, Salma sera trois fois moins âgée que Amadou. Quel est l'âge de Salma et celui de Amadou ?

Exercice 3 : Déterminer, dans chaque cas, la fonction affine f vérifiant les conditions données et préciser si f est linéaire.

a. $f(0) = 1$ et $f(2) = 4$;
b. f(-5)=10 et $f(4) = -8$;
c. $f(3) = 5$ et $f(5) = 3$;
d. $f(2) = 5$ et $f(-2) = 7$

Géométrie :

Exercice 1 : Pour tout angle aigu α, démontrer que :

- $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = \sin^2\alpha$
- $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$
- $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
- $1 + \frac{1}{\tan^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

Exercice 2 : Dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$; on donne les points :
$A(2; -1)$; $B(4; -1)$; $C(-1; 2)$.

1. Placer ces points dans le repère.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}$ puis en déduire leurs composantes.
3. Calculer les coordonnées du point I milieu de $[AB]$.
4. Trouver une équation de la droite (BC) puis une équation de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.

Sujet 10 :

Algèbre :

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ sont une solution du système d'inéquation : $\begin{cases} x + y + 1 \leq 0 \\ -x + y - 4 \geq 0 \end{cases}$

Exercice 2 : Un groupe d'enfants cotise pour faire un cadeau à un ami venu de Garbèye (G-Rharous). Si chacun versait 775 FCFA, il leur manquerait 375 FCFA. Mais si chacun d'eux versait 830 FCFA il y aurait 450 FCFA en trop.

a. Déterminer le nombre d'enfant du groupe et la valeur du cadeau.
b. Déterminer la cotisation versée par chaque enfant.

Exercice 3 : On donne deux applications f et g définies par :
$f: x \longmapsto 7 - (5x - 4)$ et $g: x \longmapsto ax + b$ ou a et b sont deux réels connus.

1. Déterminer a et b sachant que $g(2) = 5$ et $g(-2) = 7$. Ecrire alors $g(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = -f(x)$ et l'inéquation $f(x) \leq g(x)$
3. Représenter graphiquement les applications f et g.

Géométrie :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on considère les points A; B; C; D définis par :

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}\ ;\ \overrightarrow{OB} = 3\vec{\imath}\ ;\ \overrightarrow{OC} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}\ ;\ \overrightarrow{OD} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$$

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D puis placer-les dans le repère.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
3. Calculer les coordonnées du centre I de ce quadrilatère.
4. Trouver une équation de la droite Δ parallèle à (AB) et passant par I.
5. Quelles sont les coordonnées du point de rencontre E des droites Δ et (BC).

Sujet 11 :

Algèbre :

Exercice 1 : Dans une cours, il y a des poules et des lapins. On compte 96 têtes et 280 pattes. Trouver le nombre de poules et le nombre de lapins.

Exercice 2 : On considère un repère orthonormé et les points : $A(1; 0)$; $B(-3; 2)$; $C(3; -4)$.

1. Calculer AB, AC et BC. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Ecrire les équations des droites supports des côtés du triangle.
3. Ecrire l'équation de la médiane Δ relative au côté $[BC]$.

Géométrie :

Soit un plan rapporté à un repère cartésien $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Placer dans ce repère les points R, D, P définis par :
$$\overrightarrow{OR} = 4\vec{\imath} + 7\vec{\jmath}\ ;\ \overrightarrow{OD} = -\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}\ ;\ \overrightarrow{OP} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$$
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RD}$ et $\overrightarrow{RP}$. En déduire $det(\overrightarrow{RD}, \overrightarrow{RP})$. Que peux-tu dire des points R, D, P.
3. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[RP]$ puis celles du point A symétrique de I par rapport à P.
4. Calculer les coordonnées du point B tel que : $t_{\overrightarrow{RD}}(P) = B$.
5. Ecrire une équation de la droite (AB)
6. Déterminer une équation de la droite Δ passant par le point $E(2; -1)$ et parallèle à la droite (AB).

Sujet 12 :

Algèbre :

Exercice 1 : Soient les polynômes suivants :
$f(x) = (4x + 5)^2 - (2x - 3)^2$ et $g(x) = (3x + 1)(3x + 2) - (x - 8)(3x + 1) + 9x^2 - 1$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$ et $g(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.
2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.
4. On considère la fraction rationnelle $h(x) = \frac{12x^2+52x+16}{(3x+1)(5x-5)}$.

- Donner l'ensemble de définition de $h(x)$ puis simplifier $h(x)$.

- Calculer $h(\frac{-2}{3})$ et $h(\sqrt{3}-2)$ puis donner une valeur approchée de $h(\sqrt{3}-2)$ au centième près par défaut.

Exercice 2 : Une école dispose de 20 animaux comprenant des moutons et des poules. Le nombre de pattes de ces animaux est égal à 54. Trouver le nombre de moutons et de poules de cette école.

Géométrie :

Exercice 1 : Dans un triangle ABC, on donne : $AB = 4\sqrt{5}$; $AC = 2\sqrt{5}$ et $BC = 10$. Démontrer que ABC est un triangle rectangle et précise en quel point ? Calculer $\cos\widehat{B}$, $\sin\widehat{B}$ et démontre que $\sin^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B} = 1$.
Soit $[AH]$ la hauteur issue de A. Calculer BH; CH et AH.

Exercice 2 : Dans un repère orthonormé $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On considère les points $A(4;3)$; $B(-2;5)$; $C(-2;-15)$.

1. Trouver une équation de chacune des droites (AB); (AC) et (BC).
2. Calculer les normes des vecteurs : $\|\overrightarrow{AB}\|$; $\|\overrightarrow{AC}\|$; $\|\overrightarrow{BC}\|$. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Soient P et Q les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$; écrire une équation de la droite (PQ). Que peux-tu dire des droites (PQ) et (AC) ?
4. Les points $K(2;-3)$ et $M(-1;-2)$ appartiennent-ils à la droite (AC) ?
5. Démontrer que les points P, M, Q sont alignés.

Sujet 13 :

Algèbre :

Exercice 1 : Déterminer deux nombres sachant que la différence de leur carrée est 112 et leur somme 56.

Exercice 2 : 1- mettre sous la forme de produit de facteur du premier degré les expressions suivantes : $4x^2 - 4x + 1$; $x^2 - 6x + 9$; $x^2 - 1 + x(x+1)$; $(x-1)^2 - 4$

2- Soit la fraction $f(x) = \frac{(4x^2-4x+1)[(x-1)^2-4]}{(x^2-6x+9)[(x^2-1)+x(x+1)]}$

a. Trouver le domaine de définition Df de la fonction $f(x)$.
b. Simplifier $f(x)$.
c. Pour quelle valeur de x, $f(x) = 1$?

Exercice 3 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases} 5x + 2y = 70 \\ 3y - 5x = 55 \end{cases}$
2. En déduire les solutions des systèmes suivants :

- $\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 = 70 \\ 3y^2 - 5x^2 = 55 \end{cases}$
- $\begin{cases} \frac{5}{5x-1} + \frac{2}{y+1} = 70 \\ \frac{3}{y+1} - \frac{5}{5x-1} = 55 \end{cases}$

Géométrie :

Dans un repère orthonormé $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère les points $A(-2;3)$; $B(3;6)$; $C(1;-2)$ et $D(-4;-5)$.

1. Montrer que les bipoints (A,B) et (D,C) sont équipollents, en déduire la nature du quadruplet (A,B,C,D).
2. Calculer les coordonnées du point E tel que B soit le milieu du bipoint (A,E).
3. Calculer les coordonnées du point Fpour que le quadruplet (A,E,F,D) soit un parallélogramme.
4. Montrer que les droites (DF) et (AC) sont perpendiculaires. Comparer la distance AC à celle de CF. En déduire la nature du quadruplet (A,B,F,C).
5. Déterminer le cosinus, le sinus et la tangente de l'écart angulaire géométrique $\widehat{ADF}$

Sujet 14 :

Algèbre :

Exercice 1 : On donne le polynôme $p(x)$ défini dans $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $p(x) = ax^2 + bx + c$

a. Déterminer les réels a, b, c de $p(x)$ sachant que : $p(0) = -4$; $p(2) = 0$; $p(-2) = -16$.

b. Ecrire le polynôme $p(x)$ puis factoriser $p(x)$.

<u>Exercice 2 :</u> Soit la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3(x-2)^2 - 4 + x^2 + (x+5)(x-2)$

1. Ecrire $f(x)$ sous forme d'un polynôme ordonné.
2. Factoriser $f(x)$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$ et $f(x) = -2$.
3. Soit h la fonction rationnelle définie par : $h(x) = \frac{5x^2-9x-2}{3x^2-12}$

a. Simplifier $h(x)$ dans son domaine de définition.

b. Résoudre dans Dh : $h(x) = 0$; $h(x) = 1$

c. Calculer $h(\sqrt{3})$.

<u>Géométrie :</u>

Soit $\mathcal{P}$ le plan rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$; on donne trois droites D1, D2, D3 d'équations respectives : D1 : $x - y - 2 = 0$; D2 : $x + y + 4 = 0$; D3 : $y = 2$

1. Tracer ces droites dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$
2. Calculer les coordonnées des points A, B, C définis par : D1∩D2=$\{A\}$; D1∩D3=$\{B\}$; D2∩D3=$\{C\}$.
3. Calculer $d(A, B)$; $d(B, C)$; $d(A, C)$.
4. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
5. Calculer $\cos\widehat{B}$; $\cos\widehat{C}$; $\tan\widehat{B}$ et $\sin\widehat{B}$.

TROISIÈME PARTIE

QUELQUES SUJETS DU DEF (2017-2002):

DEF 2017

I. <u>ALGEBRE</u>

<u>EXERCICE 1</u> : Dessine un triangle ABC tels que : $AB = 4cm$; $BC = 5cm$ et $AC = 3cm$.

1. Montrer que ABC est un triangle rectangle en A.
2. Calcule les valeurs suivantes : $\sin(\widehat{B})$; $\cos(\widehat{B})$; $\tan(\widehat{B})$

<u>EXERCICE 2</u> : Soient les polynômes suivants :
$f(x) = (4x+5)^2 - (2x-3)^2$ et $g(x) = (3x+1)(3x+2) - (x-8)(3x+1) + 9x^2 - 1$

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$ et $g(x)$ suivant les puissances croissantes de x.
2. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.

<u>PROBLEME</u> :

Lors d'un spectacle, la famille Niaré, composée de 4 adultes et de 3 enfants, a payé 165 Euros. Pour le même spectacle, la famille Diarra, Composée de 2 adultes et 2 enfants, a payé 90 Euros.

1. Quel est le prix du spectacle pour un adulte et le prix du spectacle pour un enfant ?
2. Combien paiera la famille Diallo, sachant qu'elle est composée de 3 adultes et 2 enfants ?

II. <u>GEOMETRIE</u> :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1cm).

1. a) Places les points : $A(3, 2)$; $B(9; 5)$; $C(1; 6)$.
   b) Calcule les cordonnées du point K milieu du segment $[AC]$
2. Cherche les coordonnées du point $D(x_D ; y_D)$ afin que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

a) Justifier que les coordonnées de D doivent vérifier les deux égalités suivantes :

$$\frac{9 + x_D}{2} = 2 \quad ; \quad \frac{5 + y_D}{2} = 4$$

b) Déduire des égalités suivantes les coordonnées du point D ; puis placer ce point.

3. On considère le point $E(7; 9)$. Le quadrilatère $ABEC$ est-il un rectangle ? justifier votre réponse.
4. Détermine la nature du polygone $ABED$. Calcule les distances : AB ; ED ; AC.
   Détermine l'aire a du polygone $ABED$.

DEF 2016 :

I. <u>ALGEBRE :</u>

EXERCICE 1 : Calcule et donne le résultat sous la forme la plus simple

$A = 2 + (2+\sqrt{2})\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$; $B = 2\sqrt{\frac{2}{27}} \times \sqrt{\frac{3}{8}}$; $C = 4\sqrt{\frac{26}{5}} \times \sqrt{\frac{65}{8}}$

EXERCICE 2 : On considère les polynômes

$A(x) = (9x^2-1)(2x+3) - (4x^2-9)(3x+1)$;

$B(x) = (x^2-4)(3x-1) - (9x^2-1)(x+2)$

1. Mettre $A(x)$ et $B(x)$ sous la forme de produit de polynômes du 1er degré.
2. Soit la fonction rationnelle P telle que $P(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$. Montrer que $P(x)$ après simplification peut s'écrire $P'(x) = \frac{1+3x}{1-3x}$. Quel est l'ensemble de définition de P' ?

Problème : « Les âges de Ali et Boubacar »

Ali s'adresse à Boubacar en ces termes « j'ai trois fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âges que j'ai la somme de nos âges sera 98 ». Détermine l'âge de chacune de ces deux personnes.

II. GEOMETRIE :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1°) a) Place dans le repère les points : $A(-4;1)$; $D(2;7)$; $E(0;-3)$.

b)Calcule les distances AD; AE; DE et en déduire la nature du triangle EAD

2°) Détermine les coordonnées du point F image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.

3°) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle EAD.

a) Détermine les coordonnées du point K, centre du cercle (C) puis calcule son rayon
b) Montre que le point F appartient au cercle (C)

4°) Détermine une équation de chacune des droites (AD) et (AE).

5°) Montre que les droites (AD) et (AE) sont perpendiculaires.

DEF 2015 :

I. ALGEBRE :

A) On définit le polynôme $P(x)$ tel que :

$P(x) = x^2 + (a-b+3)x + 2a - 3b$ où a et b sont deux réels.

1°) Calculer a et b sachant que $P(0) = 9$ et $P(1) = 4$

2°) En remplaçant a et b par leurs valeurs ainsi trouvées, factoriser $P(x)$.

B) On considère les applications suivantes :

$A(x) = (x-5)(3x-8) + (x-5)^2 + 2x^2 - 50$

$B(x) = (3x-15)$

1°) Développer, réduire et ordonner ces polynômes suivant les puissances décroissantes de x.

2°) Factoriser $A(x)$ et $B(x)$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$A(x) = 0$; $B(x) = 0$; $A(x) = B(x)$.

4°) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction rationnelle $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$

5°) Calculer $f(0)$; $f(\sqrt{2})$.

II. GEOMETRIE :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B, C tels que : $A(0;3)$; $B(6;3)$ et $C(-\frac{3}{2};+\frac{9}{2})$.

1°) Placer ces points dans le repère puis montrer que A, B, C sont alignés.

2°) Déterminer les coordonnées du milieu M de $[BC]$ puis celles du point D symétrique de O par rapport à A.

3°) Calculer les distances : $d(O,C)$; $d(O,D)$; $d(C,D)$, en déduire la nature du triangle OCD.

4°) Calculer les coordonnées du centre I du cercle circonscrit au triangle OCD puis calculer son rayon .

NB : la géométrie du DEF 2015 contient des erreurs. Il convient donc d'en tenir compte.

DEF 2014 :

I. ALGEBRE :

On considère les applications f, g, h définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (2x+3)^2 - (x+6)^2$; $h(x) = ax^2 + bx + c - (x+6)^2$; $g(x) = (x+3)(5-x) - h(x)$.

1. Détermine les réels a, b, c de $h(x)$ sachant que : $h(0) = 18$; $h(-3) = 0$ et $h(-1) = -8$. Ecris $h(x)$.
2. Développe, réduis et ordonne $f(x)$ et $g(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.
3. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.
4. Soit la fonction rationnelle $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

a. Déterminer l'ensemble de définition de q et simplifier $q(x)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $q(x) = 0$; $q(x) = -\frac{9}{4}$; $q(x) = \sqrt{3}$.

II. GEOMETRIE :

EXERCICE 1 :

1. Construis un triangle ABC dont les côtes mesurent : $AB = 3cm$; $AC = 4cm$; $BC = 5cm$.
2. Détermine la nature du triangle ABC.
3. Calcule $\cos\widehat{C}$; $\cos\widehat{B}$.
4. Construis le point H projeté orthogonal de A sur (BC).

EXERCICE 2 :

$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé du plan.

1. Place ces points $A(2; 4)$; $B(-2; 0)$ et $C(4; 0)$.
2. Calcule les coordonnées des points A' et B' respectivement milieu de $[BC]$ et $[AC]$.
3. Trouve une équation de (AA') et une équation de (BB'). En déduis les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.
4. Trouve une équation de la médiatrice de $[BC]$ et une équation de la médiatrice de $[AC]$. En déduis les coordonnées du centre I du cercle circonscrit au triangle ABC et calcule le rayon de ce cercle.

DEF 2013 :

A. ALGEBRE :

EXERCICE 1 : Détermine trois nombres a, b, c proportionnels à 3, 4 et 5 sachant que : 2a-3b+4c=1400.

EXERCICE 2 : On considère les nombres :

$A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ et $B = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

a. Calcule A^2 et B^2 et en déduire une expression simple de A et B.

b. En déduire que : $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$ et $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

EXERCICE 3 : Quatre rectangles ont les dimensions consignées dans le tableau suivant :

Longueur (cm)	3 ,6	14,4	7,2	4,8
Largeur (cm)	2,4	0,6	1 ,2	1,8

a. Montre que les longueurs sont inversement proportionnelles aux largeurs.

b. Compare les surfaces de ces rectangles.

Problème : Un groupe d'enfant cotise pour faire un cadeau à un ami venu du nord du Mali. Si chacun versait 775 F, il leur manquerait 375 F. Mais si chacun d'eux versait 830 F, il y aurait 450 F en trop.

a. Détermine le nombre d'enfant du groupe et la valeur du cadeau.

b. Quelle est la cotisation versée par chaque enfant.

B. GEOMETRIE :

I. Partie A :

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on donne le point $P(-2; -1)$ et le vecteur $\vec{u}(2; 3)$.

a. Calcule les coordonnées de Q transformé de P par la translation de vecteur $\vec{u}$.

b. Calcule les coordonnées de R symétrique de P par rapport à Q.

c. Calcule les coordonnées de S image de P par l'homothétie de centre O et de rapport -1.

II. Partie B :

On considère un triangle OAB rectangle en O tel que : $OA = 4\ cm$; $OB = 5\ cm$.

a. Construire le cercle (C) de diamètre $[AB]$ et la droite tangente (T) en A à ce cercle qui coupe la droite (OB) en K.

b. Calcule AB ; BK ; OK et AK.

c. Détermine le point I centre du cercle (C) et le point I', le symétrique de I par rapport à A.

d. Construire le point L, image de I', dans la translation du vecteur $\overrightarrow{KI}$ puis montre que le quadrilatère $KILI'$ est un parallélogramme.

DEF 2012 :

I. ALGEBRE :

EXERCICE 1 : Trouve $a \in \mathbb{N}$ tel que :
$2^{4-a} = 1$; $(3^a)^5 = 1$; $9^{3a} = 3^{12}$; $(2^2)^{3a} = 4^6$; $5 \times 5^{a-3} = 25$

EXERCICE 2 : a- Développer $(3\sqrt{2} + 5)(3\sqrt{2} - 5)$.

En déduire une écriture simplifiée du nombre $\frac{-7\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+5}$.

b-Donner un encadrement à 10^{-2} près du nombre $6 - 5\sqrt{2}$ sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

EXERCICE 3 : On donne $a = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$. On pose $u = a + b$.

1. Calculer $a \times b$.
2. Calculer u^2

PROBLEME : l'âge d'un père est inférieur de trois ans à la somme des âges de ses trois enfants. Sachant que les âges du père et de ses trois enfants sont respectivement proportionnels à 15, 7, 5 et 4. Trouve l'âge de chacun d'eux.

II. GEOMETRIE :

A/ Partie I : soit ABC un triangle isocèle de base (BC) et I le milieu de $[BC]$. On construit le point Q tel que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IQ}$. Démontre que le quadrilatère $ACQB$ est un parallélogramme puis un losange.

B/ Partie II : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A\binom{4}{2}$; $B\binom{2}{6}$ et $C\binom{-1}{-3}$.

1. Place ces points et trace les médiatrices Δ et Δ' des segments $[AB]$ et $[AC]$.
2. Trouve une équation de Δ et une équation de Δ' et déterminer les coordonnées du point M point d'intersection de Δ et Δ'.
3. Montre que M appartient à la médiatrice de $[BC]$.

NB : Les parties I et II sont indépendantes.

DEF 2011

I. ALGEBRE :

EXERCICE 1 : La somme de deux nombres est 320. Si l'on divise le plus grand des deux nombres par l'autre, le quotient est 3 et le reste est 8. Quels sont ces deux nombres ?

EXERCICE 2 : Soient les nombres réels a et b tels que : $a = \frac{m-1}{2}$ et $b = \frac{m-4}{2}$.

Calcule le nombre réel m pour que :

1. a et b soient opposés.
2. a et b soient inverse

Problème :

On donne les deux applications f et g définies dans $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :
$f(x) = \frac{x-2}{9} - x^3 + 2x^2$ et $g(x) = (7x - 3)^2 - 5^2$

1. Factorise $f(x)$ et $g(x)$ dans $\mathbb{R}$ puis résous $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.
2. On considère la fraction rationnelle h définie dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{9}}{f(x)}$.

a. Détermine le domaine de définition de h dans $\mathbb{R}$, puis simplifie $h(x)$.

b. Calcule $h(\sqrt{3})$.

c. Résous $g(x) = -16$.

II. GEOMETRIE :

EXERCICE 1 : Dessine un triangle A, B, C rectangle en A. Soit I le milieu de l'hypoténuse BC. Construis l'image I_1 de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ et l'image I_2 de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

Montre que les points I_1, A, I_2 sont alignés.

EXERCICE 2 : On considère un cercle de centre A et de rayon $5\ cm$. Soit $[EF]$ un de ses diamètres. M le point du segment $[AE]$ tel que : $AM = 4\ cm$ et P un point du cercle tel que : $MP = 3\ cm$.

1. Faire la figure.
2. Démontre que le triangle AMP est rectangle en M.
3. On trace la tangente au cercle en F. Cette droite coupe la droite (AP) en T. Démontre que les droites (FT) et (MP) sont parallèles.
4. Calcule la longueur AT.

DEF 2010 :

I. ALGEBRE

EXERCICE 1 : 1- a- Décompose les nombres 320 et 48 en produits de facteurs premiers. En déduis $\sqrt{320}$ et $\sqrt{48}$ sous forme $x\sqrt{y}$.

b- Vérifier que le réel $5 - 2\sqrt{5}$ est positif.

2- Ecris les nombres suivants sous forme de fraction ou de nombre entier relatif

$E = \dfrac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{6}}$; $T = \dfrac{\sqrt{20-\sqrt{320}} - \sqrt{12+\sqrt{48}}}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}}$

EXERCICE 2 : Soient les réels a, b, c.

1. Développe $(a+b+c)^2$ et $(a+b+c)^3$.
2. Démontre que si $a+b+c=0$ alors $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Problème : Un train est constitué, à l'aller, de deux locomotives identiques et dix wagons-citernes du même modèle et ce train mesure alors 152m de long. Après avoir vidé le contenu de tous les wagons-citernes ; on décroche une locomotive et on ajoute deux wagons-citernes vides. Après ces changements, le train ainsi constitué mesure 160m de long. Trouve la longueur d'une locomotive et celle d'un wagon-citerne.

II. GEOMETRIE :

Partie A : Soient E, F, G un triangle rectangle en F et soit O le milieu de l'hypoténuse. La bissectrice de $\widehat{FOG}$ coupe (FG) en I.

1. Démontre que (OI) est parallèle à (EF).
2. Démontre que les angles $\widehat{FOI}$ et $\widehat{FEO}$ ont même mesure.
3. Le point O a pour image le point T par la symétrie orthogonale d'axe (FG).
   Démontre que (FT) est parallèle à (EG) et précise la nature du quadrilatère $OGTF$.

Partie B : Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF})$.

1. Trace par rapport à ce repère la droite D d'équation $y = 2x + 1$ et place le point $A(2; 2)$.
2. Construis le point A' tel que la droite D soit médiatrice du segment $[AA']$.
3. Calculer les coordonnées du point d'intersection H de la droite (AA') et de la droite D. On appelle B le point d'abscisse 0 de la droite D.Sachant que $2,235 < \sqrt{5} < 2,236$ calcule à 10^{-2} près par défaut les longueurs $A'B$ et BH.

DEF 2009 :

I. ALGEBRE :

EXERCICE 1 : Au moment des fêtes des Noël, un client achète six boules et une guirlande dans un grand magasin. Il paie 1840 FCFA. Le client suivant possède une carte de fidélité de ce magasin lui donnant droit à une réduction de 20% sur tous les articles. Il achète cinq boules et cinq guirlandes. En présentant sa carte de fidélité à la caisse, il paie 2560 FCFA. Donne le prix d'une boule et celui d'une guirlande.

EXERCICE 2 : 1- détermine trois nombres entiers positifs consécutifs $(x-1)$; x et $(x+1)$ dont la somme des carrées est 1325.

2- Détermine les deux nombres relatifs dont le carrée du triple est égal à 64.

EXERCICE 3 : Voici les distances (en km) qui séparent le soleil des trois planètes du système solaire :

Venus :105×10^6 ; Mars : 2250×10^5 ; Terre : $1,5 \times 10^8$; parmi ces trois planètes, quelle est celle qui est plus éloignée du soleil ? Explique toutes les démarches.

II. GEOMETRIE :

EXERCICE 1 : On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et diamètre $8\ cm$. I et J sont deux points de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés ; K est un point de $\mathcal{C}$ tel que $JK = 4\ cm$.

1. Précise la nature du triangle IJK. Justifie ta réponse.
2. Calcule IK. Donne le résultat sous la forme $b\sqrt{3}$ avec b entier.
3. Précise la nature du triangle OJK. Justifie ta réponse.
4. On appelle R le symétrique de K par rapport à la droite (IJ). Démontre que le quadrilatère $ROKJ$, un losange.

EXERCICE 2 : 1- a- le segment $[AB]$ donné. Explique la construction géométrique du triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 6\ cm\ et\ AC = 8\ cm$ à l'aide du compas et du rapporteur.

b- Montre que $BC = 10\ cm$.

2- a- Place le point E sur le segment $[AB]$ tel que $BE = 1,5\ cm$. Place le point F sur le segment $[BC]$ tel que
$BF = 2,5\ cm$.

b- Montre que les droites (AC) et (EF) sont parallèles.

c- Montre que $EF = 2\ cm$.

3- Soit le point B' symétrique de B par rapport à A. Montre que le triangle $BB'C$ est isocèle en C.

DEF 2008 :

A. ALGEBRE :

EXERCICE 1 : a- Décompose le naturel 320 en produit de facteurs premiers. En déduire $\sqrt{320}$ sous forme $a\sqrt{b}$.

b- On pose $x = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$; $y = \frac{\sqrt{20-\sqrt{320}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$. Vérifie que $4x - y = 0$.

EXERCICE 2 : Un centre d'examen de 910 élèves compte 60% de garçons et 40% de filles.

- Le nombre total d'élèves est égal au double du nombre de garçons admis et la moitié du nombre de filles admises
- Le nombre de garçons admis est égal au triple de filles admises.

a. Trouve le nombre de garçons et le nombre de filles de ce centre.
b. Calcule le pourcentage de garçons admis et le pourcentage de filles admises.
c. Quel est le pourcentage d'élèves qui ont échoués ?

B. GEOMETRIE :

On donne trois points non alignés A, B, C et on choisit pour repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

1. Trouve les coordonnées du milieu D de $[AB]$ et de celles du milieu E de $[AC]$.
2. Soit h un nombre réel. On définit un point M par la relation $\overrightarrow{BM} = h.\overrightarrow{BC}$. Trouve les coordonnées de M et du milieu I de $[AM]$.
3. Trouve une équation de la droite (DE)
4. Vérifie que I appartient à cette droite.
5. On pose maintenant $h = \frac{1}{2}$. Reprendre les coordonnées de M et de I. Construis le point H tel que $ABHC$ soit un parallélogramme. Calcule d'au moins de deux manières différentes, les coordonnées du point H.

DEF 2007 :

A. ALGEBRE :

EXERCICE 1 : Au marché de médina-coura, On vend les oranges par lots de 6 et les carottes par paquets de 5.

- Oumou achète 24 oranges et 15 carottes. Elle paye 275 F.
- Niakalé achète 42 oranges et 20 carottes. Elle paye 450 F.

Quels sont les prix respectifs d'un lot d'oranges et d'un paquet de carottes ?

EXERCICE 2 : A la suite des résultats du D.E.F, le Ministre de l'Education Nationale a décidé de donner des prix aux trois meilleurs élèves du Mali. Le premier reçoit une somme de 400 000 F ; le deuxième une somme de 300 000 F et le troisième une somme de 200 000 F. Pour les motiver encore plus, on leur donne une somme de 180 000 F tout en exigeant de faire le partage proportionnellement à leur premier gain. Quelle est la part qui reviendra à chacun d'eux ?

B. GEOMETRIE :

EXERCICE 1 : 1- Dessine un triangle ABC et marque son centre de gravité G.

2- Construis l'image de ce triangle par l'homothétie de centre G et rapport $-\frac{1}{2}$.

3- Quel est le centre de gravité du nouveau triangle ? Explique ta réponse.

EXERCICE 2 : On donne un cercle de centre O et de diamètre $AB = 8\ cm$. Sur ce cercle, construis à l'aide du rapporteur l'angle $\widehat{AOE}$ de 60°

1. Calcule en degrés la mesure des angles $\widehat{AEB}, \widehat{ABE}, \widehat{BAE}$. En déduis la nature du triangle EAB.
2. Démontre que le triangle OAE est un triangle équilatéral.

DEF 2006 :

A. ALGEBRE :

EXERCICE 1 : On considère le nombre $n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

a. Soit $\frac{1}{n}$ l'inverse de n ; exprime $\frac{1}{n}$ sous la forme $\frac{a+b\sqrt{5}}{C}$ où a, b, c sont des entiers relatifs.

b. Démontre que $n^2 - n - 1 = 0$.

c. A partir du résultat a. démontre que $\frac{1}{n} = n - 1$.

d. Retrouve alors le résultat établit en b.

EXERCICE 2 : On considère l'inégalité suivante : $\frac{x+3}{2} + \frac{x-5}{2} \leq \frac{3}{2}$

1. Déterminer l'ensemble A des nombres réels qui vérifient l'inégalité
2. Déterminer l'ensemble B des nombres naturels qui vérifient l'inégalité
3. Déterminer l'ensemble C des nombres rationnels qui sont strictement compris entre -9 et -6 et qui ont 2 comme dénominateur et qui vérifient l'inégalité

B. GEOMETRIE :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. On donne le point $E(1; -1)$. Place ce point. On considère la droite Δ passant par E et de vecteur directeur $\vec{V}(1; -2)$. Trouve une équation de Δ. Trace Δ. Elle coupe l'axe des ordonnées en A.
2. On appelle D la droite passant par A et telle que Δ soit bissectrice des angles aigus formés par l'axe des ordonnées et D. Explique la construction géométrique de D à l'aide du compas et de la règle. Construis D.
3. On appelle G le projeté orthogonal de E sur $(y'oy)$, Quelles sont les coordonnées de G ? H désigne le symétrique de G par rapport à Δ. Montrer que H appartient à D. Quelles sont les coordonnées de H ? Trouver alors une équation de D.

DEF 2005 :

A. ALGEBRE :

EXERCICE 1 : Un carré a une diagonale de longueur $8\ cm$. Soit x la mesure du côté de ce carré.

a. Prouve que $2x^2 = 64$

b. Donne une valeur approchée à $0,1$ près la longueur du côté du carré.

EXERCICE 2 : Au marché Binta a acheté des œufs à 50 F l'unité. Sa fille Fifi très turbulente en casse 10. Elle vend le reste à 60 F l'unité et réalise un bénéfice égal au dixième du prix d'achat des œufs.

a. Combien d'œufs Binta a-t-elle acheté ? b. Quel est le bénéfice réalisé ?

EXERCICE 3 : 1- On donne $A = 4\sqrt{8} - 3\sqrt{18} + \sqrt{121}$

a. Mets A sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers relatifs.

b. Sachant que $1,41 \leq \sqrt{2} < 1,42$ donne un encadrement de A.

2- Résous l'équation suivante :

$$\sqrt{x+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}=5$$

B. GEOMETRIE :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ on donne les points A, B et C définis par :

$$\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 2\vec{j}\ ;\ \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 6\vec{j}\ ;\ \overrightarrow{OC} = -\vec{i} + 3\vec{j}$$

1. Place ces points dans le repère et trace les médiatrices Δ et Δ' des segments $[AB]$ et $[AC]$
2. Trouve une équation de Δ et une équation de Δ' et détermine les coordonnées de M ; point d'intersection de Δ et Δ'.
3. Montre que M appartient à la médiatrice de $[BC]$
4. Trace le cercle circonscrit au triangle ABC et calcule son rayon.

DEF 2004 :

A. ALGEBRE :

EXERCICE 1 : On donne $a = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$; $b = \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ et on pose $u = a + b$.

1. Calcule $a \times b$.
2. Calcule u^2.

EXERCICE 2 : Soit deux fonctions f et g définies dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3 - 2x$ et $g(x) = x + 2$.

1. Compare $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.
2. Calcule le réel $a = f(\sqrt{2}) \times g(\sqrt{2})$. Quel est le signe de a ?
3. Sachant que $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ donne un encadrement de a à $0,01$ près.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\frac{3}{2}f(x) - \frac{1}{2}g(x) = -\frac{1-2x}{6}$

b. $f(x) \geq g(x)$

B. GEOMETRIE :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$; on considère les points $A(-1; 0)$, $B(5; 6)$

1. Détermine les coordonnées du point C milieu de $[AB]$ puis l'équation de la droite Δ médiatrice du segment $[AB]$.
2. Vérifie que le point $P(-3; 8)$ appartient à Δ. En déduis la nature du triangle ACP.
3. Soit I le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ACP et r son rayon. Détermine les coordonnées du point I puis calcule r.
4. Le point Q est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CP}$

a. Détermine les coordonnées du point Q

b. Vérifie que Q appartient à $\mathcal{C}$

c. Quelle est la nature du quadruplet de points $ACPQ$?

5- La droite Δ coupe l'axe des abscisses en H.

a- Quelles sont les coordonnées de H

b- Donne la mesure en degrés de l'écart angulaire de l'angle géométrique $\widehat{BAH}$.

DEF 2003 :

A. ALGEBRE

Soit un plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} 4x - y = 8 & (1) \\ 3x + 2y = 17 & (2) \end{cases}$
2. Résoudre algébriquement le même système et comparer les résultats.
3. Par le point A de coordonnées $x = 0$; $y = 4$. On mène une parallèle à la droite d'équation (1). Forme l'équation de cette parallèle et montrer que la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x + 4$ la rencontre au point A.
4. Les droites passant par A coupent l'axe (xx') en B et C. Prouver que le triangle ABC est rectangle et calculer les mesures des côtés de l'angle droit.

B. GEOMETRIE :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (d) la droite d'équation $y + 2x - 1 = 0$.

1. Trace la droite (d). I est le point de (d) d'ordonnée (-1), quelle est son abscisse . Quelle est l'ordonnée de B de (d) d'abscisse nulle. Placer les points B et I sur la figure.
2. Calculer et écrire une équation de la perpendiculaire (Δ) à (d) passant par I. Construire (Δ). On note A le point où (Δ) coupe l'axe des ordonnées. Quelles sont les coordonnées de A ?
3. Construire le point C de (Δ) tel que le triangle BAC soit isocèle; (B étant le sommet). Calcule les coordonnées du point C.
4. Trouver les valeurs du sinus et du cosinus de l'angle géométrique $\widehat{IAB}$.
5. On trace la droite d'équation $x = 2$. Sur cette droite, on porte le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. Montrer que la droite (BD) est parallèle à (Δ). En déduire que D appartient à la médiane (AM) du triangle ABC issue de A.

DEF 2002 :

A. ALGEBRE :

On considère les applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :
$f(x) = (2x+3)^2 - (x+6)^2$ et $g(x) = (x+3)(5-x) + (2x+6)$

1. Factoriser $f(x)$ et $g(x)$
2. Développer $f(x)$ et $g(x)$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en utilisant l'expression la mieux adaptée de $f(x)$ ou de $g(x)$ selon les cas : $f(x) = 0$; $g(x) = 0$; $g(x) = 21$; $f(x) = g(x)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(x+3)(7-x) \geq 0$. En déduire les valeurs de x pour lesquelles $g(x)$ est positif ou nul.
5. Soit la fraction rationnelle $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

a. Déterminer l'ensemble de définition de Q dans $\mathbb{R}$ puis simplifier $Q(x)$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $Q(x) = 0$ et $Q(x) = -\frac{2}{3}$

B. GEOMETRIE :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, trace la droite $(\Delta 1)$ d'équation $y = \frac{1}{2}x + 3$.
On appelle B le point de $(\Delta 1)$ de coordonnées $(0; 3)$.

1. Démontrer que le point $C(5; \frac{11}{2})$ appartient à la droite $(\Delta 1)$
2. On appelle $(\Delta 2)$ la droite passant par l'origine O et le point $A(3; \frac{3}{2})$. Montrer que la droite $(\Delta 2)$ est parallèle à la droite $(\Delta 1)$
3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
4. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et N le point tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM}$. Démontrer que le quadrilatère $BACN$ est rectangle.
5. Soit E l'image du point B dans la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$. Démontrer que :

- B est le milieu du segment $[EN]$
- E appartient à la droite $(\Delta 2)$.

SOLUTIONS

PREMIÈRE PARTIE :

1ER TRIMESTRE

A/ ALGEBRE :

EXERCICE 1 : Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $x^2 - 81 = 0$ équivaut à $x^2 = 81 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{81} \Leftrightarrow x = \pm 9$; $S = \{-9; 9\}$.
- $3x^2 - 147 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{147}{3} \Leftrightarrow x^2 = 49 \Leftrightarrow x = \sqrt{49}$ ou $x = -\sqrt{49} \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -7$;
  $S = \{-7; 7\}$.
- $2x + 6 = 4x + 8x + 6 \Leftrightarrow 2x - 4x - 8x = 6 - 6 \Leftrightarrow -10x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $S = \{0\}$
- $\frac{x+3}{2} - \frac{x+5}{3} = \frac{x+1}{3} + 1 \Leftrightarrow \frac{3(x+3)}{6} - \frac{2(x+5)}{6} = \frac{2(x+1)}{6} + \frac{6}{6}$
  $$\Leftrightarrow 3(x+3) - 2(x+5) = 2(x+1) + 6$$
  $$\Leftrightarrow 3x + 9 - 2x - 10 = 2x + 2 + 6$$
  $$\Leftrightarrow 3x - 2x - 2x = 2 + 6 - 9 + 10$$
  $$\Leftrightarrow -x = 9 \Leftrightarrow x = -9 ; S = \{-9\}$$
- $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt{16}$ ou $x = -\sqrt{16} \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -4$; $S = \{-4; 4\}$
- $x^2 = 1,21 \Leftrightarrow x = \sqrt{1,21}$ ou $x = -\sqrt{1,21} \Leftrightarrow x = 1,1$ ou $x = -1,1$; $S = \{-1,1; 1,1\}$
- $x^2 + 64 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -64$ impossible car le carré de tout nombre réel est strictement positif ; donc $S = \emptyset$
- $\sqrt{x+3} = \sqrt{13} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}\right)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 \Leftrightarrow x + 3 = 13 \Leftrightarrow x = 10$; $S = \{10\}$
- $2x^2 = \frac{8}{9} \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{18} \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{4}{9}}$ ou $x = \sqrt{\frac{4}{9}} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ ou $x = \frac{2}{3}$;
  $$S = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$$

EXERCICE 2 :

- $27225 = 3^2 \times 5^2 \times 11^2 \Leftrightarrow \sqrt{27225} = \sqrt{3^2 \times 5^2 \times 11^2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5^2} \times \sqrt{11^2} \Leftrightarrow \sqrt{27225} = 3 \times 5 \times 11 \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{27225} = 165}$
- $59049 = 3^{10} \Leftrightarrow \sqrt{59049} = \sqrt{3^{10}} \Leftrightarrow \sqrt{59049} = 3^5 \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{59049} = 243}$
- $23716 = 2^2 \times 7^2 \times 11^2 \Leftrightarrow \sqrt{23716} = \sqrt{2^2 \times 7^2 \times 11^2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{7^2} \times \sqrt{11^2} \Leftrightarrow \sqrt{23716} = 2 \times 7 \times 11 \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{23716} = 154}$

EXERCICE 3 : J'écris sans radical les nombres suivants :

- $\sqrt{144} = \sqrt{2^4 \times 3^2} = \sqrt{2^4} \times \sqrt{3^2} = 2^2 \times 3 = 12$; $\boxed{\sqrt{144} = 12}$
- $\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \times 3^4} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^4} = 2 \times 3^2 = 18$; $\boxed{\sqrt{324} = 18}$
- $\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{7^2}}{\sqrt{2^4}} = \frac{7}{2^2} = \frac{7}{4}$; $\boxed{\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}}$
- $\boxed{\sqrt{(0,3)^2} = 0,3}$
- $\sqrt{16} = \sqrt{2^4} = 2^2 = 4$; $\boxed{\sqrt{16} = 4}$
- $\sqrt{\sqrt{10^8}} = \sqrt{(\sqrt{10^4})^2} = \sqrt{10^4} = \sqrt{(10^2)^2} = 10^2 = 100$; $\boxed{\sqrt{\sqrt{10^8}} = 100}$

EXERCICE 4 : Ecrivons chacun des réels suivants sous la forme $a\sqrt{b}$:

- $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$; $\boxed{\sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$
- $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$; $\boxed{\sqrt{12} = 2\sqrt{3}}$
- $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$; $\boxed{\sqrt{27} = 3\sqrt{3}}$
- $\sqrt{120} = \sqrt{4 \times 30} = \sqrt{4} \times \sqrt{30} = 2\sqrt{30}$; $\boxed{\sqrt{120} = 2\sqrt{30}}$
- $\sqrt{3200} = \sqrt{1600 \times 2} = \sqrt{1600} \times \sqrt{2} = 40\sqrt{2}$; $\boxed{\sqrt{3200} = 40\sqrt{2}}$
- $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$; $\boxed{\sqrt{50} = 5\sqrt{2}}$
- $\sqrt{720} = \sqrt{144 \times 5} = \sqrt{144} \times \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$; $\boxed{\sqrt{720} = 12\sqrt{5}}$

<u>EXERCICE 5 :</u> 1°) Calculons et simplifions :

$$A=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\times\left(1-\frac{5}{3}\right)=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\times\left(\frac{3-5}{3}\right)=\frac{2}{3}+\frac{10}{9}=\frac{6+10}{9}=\frac{16}{9}\ ;\ \boxed{A=\frac{16}{9}}$$

$$B=\frac{(2\times10^{-2})^3\times4\times10^5}{1,6}=\frac{8\times10^{-6}\times4\times10^5}{16\times10^{-1}}=\frac{8\times4}{16}=2\ ;\ \boxed{B=2}$$

2°) Calculons :

$$\left(\sqrt{3}-3\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\times3\times\sqrt{3}+3^2=3-6\sqrt{3}+9=12-6\sqrt{3}\ ;\ \boxed{\left(\sqrt{3}-3\right)^2=12-6\sqrt{3}}$$

$$\left(\sqrt{3}+3\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times3\times\sqrt{3}+3^2=3+6\sqrt{3}+9=12+6\sqrt{3}\ ;\ \boxed{\left(\sqrt{3}+3\right)^2=12+6\sqrt{3}}$$

Simplifions S et R :

$$S=\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-3\right)^2}=\sqrt{3}-3\ ;\ \boxed{S=-3+\sqrt{3}}$$

$$R=\sqrt{12+6\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+3\right)^2}=\sqrt{3}+3\ ;\ \boxed{R=3+\sqrt{3}}$$

<u>EXRECICE 6 :</u> Simplifions les expressions :

$$\begin{aligned}A&=\sqrt{32}+3\sqrt{8}-\sqrt{72}-2\sqrt{128}\\&=\sqrt{16\times2}+3\sqrt{4\times2}-\sqrt{36\times2}-2\sqrt{64\times2}\\&=\sqrt{16}\times\sqrt{2}+3\sqrt{4}\times\sqrt{2}-\sqrt{36}\times\sqrt{2}-2\sqrt{64}\times\sqrt{2}\\&=(4+6-6-16)\sqrt{2}\\&=-12\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=\sqrt{147}-\sqrt{108}+\sqrt{48}\\&=\sqrt{49\times3}-\sqrt{36\times3}+\sqrt{16\times3}\\&=\sqrt{49}\times\sqrt{3}-\sqrt{36}\times\sqrt{3}+\sqrt{16}\times\sqrt{3}\\&=7\sqrt{3}-6\sqrt{3}+4\sqrt{3}\\&=5\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C&=\sqrt{180}-\sqrt{245}+\sqrt{320}-\sqrt{125}\\&=\sqrt{36\times5}-\sqrt{49\times5}+\sqrt{64\times5}-\sqrt{25\times5}\\&=\sqrt{36}\times\sqrt{5}-\sqrt{49}\times\sqrt{5}+\sqrt{64}\times\sqrt{5}-\sqrt{25}\times\sqrt{5}\\&=6\sqrt{5}-7\sqrt{5}+8\sqrt{5}-5\sqrt{5}\\&=2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D&=5\sqrt{49\times2}+7\sqrt{64\times2}+3\sqrt{81\times2}\\&=5\sqrt{49}\times\sqrt{2}+7\sqrt{64}\times\sqrt{2}+3\sqrt{81}\times\sqrt{2}\\&=35\sqrt{2}+56\sqrt{2}+27\sqrt{2}\\&=118\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E&=3\sqrt{20}+4\sqrt{45}-2\sqrt{80}-\sqrt{180}\\&=3\sqrt{4\times5}+4\sqrt{9\times5}-2\sqrt{16\times5}-\sqrt{36\times5}\\&=3\sqrt{4}\times\sqrt{5}+4\sqrt{9}\times\sqrt{5}-2\sqrt{16}\times\sqrt{5}-\sqrt{36}\times\sqrt{5}\\&=6\sqrt{5}+12\sqrt{5}-8\sqrt{5}-6\sqrt{5}\\&=4\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F&=6\sqrt{75}-7\sqrt{48}+9\sqrt{192}\\&=6\sqrt{25\times3}-7\sqrt{16\times3}+9\sqrt{64\times3}\\&=6\sqrt{25}\times\sqrt{3}-7\sqrt{16}\times\sqrt{3}+9\sqrt{64}\times\sqrt{3}\\&=30\sqrt{3}-28\sqrt{3}+72\sqrt{3}\\&=74\sqrt{3}\end{aligned}$$

<u>EXERCICE 7 :</u> Décomposons 7056 en produit des facteurs premiers :

$$7056=2^4\times3^2\times7^2$$

$$\sqrt{7056}=\sqrt{2^4\times3^2\times7^2}=\sqrt{2^4}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{7^2}=2^2\times3\times7=84\ ;\ \boxed{\sqrt{7056}=84}$$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $x^2 = 7056 \Leftrightarrow x = -84$ ou $x = 84$; $S = \{-84; 84\}$
- $x^2 - 2x + 1 = 7056 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 7056 \Leftrightarrow x - 1 = 84 \Leftrightarrow x = 85$; $S = \{85\}$
- $x(x^2 - 2x + 1) = 7056x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 7056 \Leftrightarrow x = 85$; $S = \{85\}$

<u>EXERCICE 8</u> : Calculons puis simplifions :

$$A = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3-1}{3} - \frac{1}{\frac{3+1}{3}} = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{8-9}{12} = -\frac{1}{12} \ ; \boxed{A = -\frac{1}{12}}$$

$$B = 1 - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{4 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{\frac{3+2}{6}}{\frac{8-1}{2}} = 1 - \frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{2}} = 1 - \frac{5}{6} \times \frac{2}{7} = 1 - \frac{10}{42} = \frac{42-10}{42}$$

$$= \frac{32}{42} = \frac{16}{21} \ ; \ \boxed{B = \frac{16}{21}}$$

$$C = B - \frac{4}{17} \times A = \frac{16}{21} - \frac{4}{17} \times \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{16}{21} + \frac{1}{51} = \frac{816+21}{1071} = \frac{837}{1071} = \frac{93}{119} \ ; \boxed{C = \frac{93}{119}}$$

<u>EXERCICE 9</u> : a°) Simplifions A :

$$\begin{aligned} A &= 3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - 2\sqrt{80} - \sqrt{180} \\ &= 3\sqrt{4 \times 5} + 4\sqrt{9 \times 5} - 2\sqrt{16 \times 5} - \sqrt{36 \times 5} \\ &= 3\sqrt{4} \times \sqrt{5} + 4\sqrt{9} \times \sqrt{5} - 2\sqrt{16} \times \sqrt{5} - \sqrt{36} \times \sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 8\sqrt{5} - 6\sqrt{5} \\ &= 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

b°) En déduisons un encadrement de A :

$$2,236 \leq \sqrt{5} < 2,237 \Leftrightarrow 4 \times 2,236 \leq 4\sqrt{5} < 4 \times 2,237 \Leftrightarrow 8,944 \leq 4\sqrt{5} < 8,948$$

$$\boxed{8,944 \leq A < 8,945}$$

<u>EXERCICE 10</u> : Soient x, y, z les parts respectifs des classes de 7ème , 8èème et 9ème :

$$\frac{x}{78} = \frac{y}{72} = \frac{z}{90} = \frac{x+y+z}{78+72+90} = \frac{3120}{240} = 13$$

$$\frac{x}{78} = 13 \Leftrightarrow x = 7813 = 1014 \ ; \ \boxed{x = 1014}$$

$$\frac{y}{72} = 13 \Leftrightarrow y = 7213 = 936 \ ; \ \boxed{y = 936}$$

$$\frac{z}{90} = 13 \Leftrightarrow z = 9013 = 1170 \ ; \ \boxed{z = 1170}$$

Chaque élève recevra 13 livres.

<u>EXERCICE 11</u> : Rendons rationnel les dénominateurs des réels suivants :

- $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
- $\frac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} = \frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$
- $\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-1} = \frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{2}+1)}{(3\sqrt{2}-1)(3\sqrt{2}+1)} = \frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{2}+1)}{18-1} = \frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{2}+1)}{17}$
- $\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2 + \sqrt{3}$
- $5\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{5\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{5} = \sqrt{6}$
- $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$
- $\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}+4} = \frac{\sqrt{7}(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2}+4)(3\sqrt{2}-4)} = \frac{\sqrt{7}(3\sqrt{2}-4)}{18-16} = \frac{\sqrt{7}(3\sqrt{2}-4)}{2}$

- $\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}-4} = \frac{\sqrt{7}(3\sqrt{2}+4)}{(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)} = \frac{\sqrt{7}(3\sqrt{2}+4)}{18-16} = \frac{\sqrt{7}(3\sqrt{2}+4)}{2}$

  En déduisons :

$$\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}+4} + \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}-4} = \frac{\sqrt{7}(3\sqrt{2}-4)}{2} + \frac{\sqrt{7}(3\sqrt{2}+4)}{2} = \frac{\sqrt{7}(3\sqrt{2}-4+3\sqrt{2}+4)}{2} = \frac{6\sqrt{14}}{2} = 3\sqrt{14}$$

<u>EXERCICE 12</u> : on donne $A = 2\sqrt{3}+2$ et $B = 2\sqrt{3}-2$. a°) Calculons :

- $A^2 = (2\sqrt{3}+2)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2\times 2\sqrt{3}\times 2 + 2^2 = 12 + 8\sqrt{3} + 4 = 16 + 8\sqrt{3}$;
  $$\boxed{A^2 = 16 + 8\sqrt{3}}$$
- $B^2 = (2\sqrt{3}-2)^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2\times 2\sqrt{3}\times 2 + 2^2 = 12 - 8\sqrt{3} + 4 = 16 - 8\sqrt{3}$;
  $$\boxed{B^2 = 16 - 8\sqrt{3}}$$
- $A^2 - B^2 = (16+8\sqrt{3}) - (16-8\sqrt{3}) = 16 + 8\sqrt{3} - 16 + 8\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$;
  $$\boxed{A^2 - B^2 = 16\sqrt{3}}$$
- $A\times B = (2\sqrt{3}+2)(2\sqrt{3}-2) = (2\sqrt{3})^2 - 2^2 = 12 - 4 = 8$; $\boxed{A\times B = 8}$
- $(A+B)^2 = (2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}-2)^2 = (4\sqrt{3})^2 = 48$; $\boxed{(A+B)^2 = 48}$
- $(A-B)^2 = (2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}+2)^2 = 4^2 = 16$; $\boxed{(A-B)^2 = 16}$

b°) Rendons rationnel le dénominateur de $\frac{A}{B}$:

$$\frac{A}{B} = \frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-2} = \frac{(2\sqrt{3}+2)(2\sqrt{3}+2)}{(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)} = \frac{A^2}{A\times B} = \frac{16+8\sqrt{3}}{8} = 2+\sqrt{3}\ ; \boxed{\frac{A}{B} = 2+\sqrt{3}}$$

Sa valeur approchée au millième près : $\frac{A}{B} = 2 + 1,732 = 3,732$; $\boxed{\frac{A}{B} = 3,732}$

<u>EXERCICE 13</u> : Trouvons $a \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

$$5^a \times 25 = 125 \iff 5^a\times 5^2 = 5^3 \iff 5^{a+2} = 5^3 \iff a+2 = 3 \iff a = 1$$
$$9^{3a} = 3^{12} \iff (3^2)^{3a} = 3^{12} \iff 3^{6a} = 3^{12} \iff 6a = 12 \iff a = 2$$
$$\frac{13^{a-4}}{13} = 169 \iff 13^{a-5} = 13^2 \iff a-5 = 2 \iff a = 7$$
$$4^{2-a} = 1 \iff 4^{2-a} = 4^0 \iff 2-a = 0 \iff a = 2$$
$$5\times 5^a = 25 \iff 5^{1+a} = 5^2 \iff 1+a = 2 \iff a = 1$$

<u>EXERCICE 14</u> : Comparons :

$6\sqrt{5}$ et $8\sqrt{3}$; $(6\sqrt{5})^2 = 36\times 5 = 180$; $(8\sqrt{3})^2 = 64\times 3 = 192$; $180 < 192$ donc $6\sqrt{5} < 8\sqrt{3}$

$\sqrt{2}+2$ et $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$; $\sqrt{6+4\sqrt{2}} = \sqrt{4+4\sqrt{2}+2} = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2} = 2+\sqrt{2}$

Donc $\sqrt{2}+2 = \sqrt{6+4\sqrt{2}}$

<u>EXERCICE 15</u> : Factorisons les expressions suivantes :

- $A = 20x^3 - 45x = 5x(4x^2-9) = 5x(2x-3)(2x+3)$
- $B = -64 + 48x - 9x^2 = -(64 - 48x + 9x^2) = -(8-3x)^2 = -(8-3x)(8-3x)$
- $C = (5-x)^2 - (2x-1)^2 = [(5-x)-(2x-1)][(5-x)+(2x-1)]$
  $= (5-x-2x+1)(5-x+2x-1) = (-3x+6)(x+4) = -3(x-2)(x+4)$
- $D = (2-x)(3x+5) - 3(2-x) + 8(2-x) = (2-x)(3x+5-3+8)$
  $= (2-x)(3x+10)$
- $E = 4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2 = (2x+3)(2x+3)$
- $F = (5-3x)(x-2) + 9x^2 - 30x + 25 = -(3x-5)(x-2) + (3x-5)^2$
  $= (3x-5)(-x+2+3x-5) = (3x-5)(2x-3)$

<u>EXERCICE 16</u> : On donne : $x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ Calculons

- $x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}$; $\boxed{x^2 = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}}$
- $2 \times \frac{1}{y} = 2 \times \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$; $\boxed{2 \times \frac{1}{y} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$
- $3x^2y = 3\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)[(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)] = \frac{3\times2}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)$
  $= \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$; $\boxed{3x^2y = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}}$
- $\frac{x}{y} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}$; $\boxed{\frac{x}{y} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}}$
- $\frac{y}{x} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{2}$; $\boxed{\frac{y}{x} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{2}}$

<u>EXERCICE 17</u> : Développons les expressions suivantes :

$$(2\sqrt{5}-3)^2 = (2\sqrt{5})^2 - 2\times3\times2\sqrt{5} + 3^2 = 20 - 12\sqrt{5} + 9 = 29 - 12\sqrt{5}$$

$$(x+2\sqrt{3})^2 = x^2 + 2\times2\sqrt{3}x + (2\sqrt{3})^2 = x^2 + 4\sqrt{3}x + 12$$

$$(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) = x^2 - \sqrt{7}^2 = x^2 - 7$$

<u>EXERCICE 18</u> : a°) Simplifions A et B :

$$A = \sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}} = \sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}} = \sqrt{13+\sqrt{9}} = \sqrt{16} = 4 \ ; \boxed{A = 4}$$

$$B = \sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{9}}}} = \sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{16}}} = \sqrt{1+\sqrt{9}} = \sqrt{4} = 2 \ ; \ \boxed{B = 2}$$

b°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\sqrt{x+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}} = 5 \iff \sqrt{x+4} = 5 \iff x+4 = 25 \iff x = 21 \ ; S = \{21\}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{9}}}}} = 5 \iff \sqrt{x+2} = 5 \iff x+2 = 25 \iff x = 23 \ ; S = \{23\}$$

<u>EXERCICE 19</u> : Trouvons x et y :

$$\begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{3} \\ x+y = 84 \end{cases} \iff \frac{x}{7} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{7+3} = \frac{84}{10} = 8,4$$

$$\frac{x}{7} = 8,4 \iff x = 58,8 \quad \frac{y}{3} = 8,4 \iff y = 25,2$$

<u>EXERCICE 20</u> : Trouvons $x \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

$$8^x = 4^3 \iff 2^{3x} = 2^6 \iff 3x = 6 \iff x = 2$$

$$49^x = 7^8 \iff 7^{2x} = 7^8 \iff 2x = 8 \iff x = 4$$

$$27^{4x} = 3^{36} \iff 3^{12x} = 3^{36} \iff 12x = 36 \iff x = 3$$

$$2^x.2.(2^3)^0 = 8 \iff 2^{x+1} = 2^3 \iff x+1 = 3 \iff x = 2$$

$$5^{2x-6} = 1 \iff 5^{2x-6} = 5^0 \iff 2x-6 = 0 \iff 2x = 6 \iff x = 3$$

EXERCICE 21 : 1°) Simplifions A et B :

$$A = (ab)^2(\frac{1}{b})^4 = \frac{a^2b^2}{b^4} = \frac{a^2}{b^2} \ ; \boxed{A = \left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

$$B = a^2\left(\frac{b}{a}\right)^3\left(\frac{1}{b^2}\right) = \frac{a^2b^3}{a^3b^2} = \frac{b}{a} \ ; \boxed{B = \frac{b}{a}}$$

2°) Calculons la valeur numérique de :

$$A \times B = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \times \frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{4 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-2}} = 2 \times 10^{-3+2} = 0,2 \ ; \boxed{A \times B = 0,2}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\frac{b}{a}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = (0,2)^3 = 0,008 \ ; \boxed{\frac{A}{B} = 0,008}$$

EXERCICE 22 : Soit r la part de Rahama et m celle de Mariam :

$\frac{r}{8} = \frac{m}{11}$ et $r + m = 171$

$$\frac{r}{8} = \frac{m}{11} = \frac{r+m}{8+11} = \frac{171}{19} = 9$$

$\frac{r}{8} = 9 \iff r = 8 \times 9 = 72 \ ; \ r = 72$ $\quad \frac{m}{11} = 9 \iff m = 9 \times 11 = 99 \ ; \ m = 99$

Donc Rahama aura 72 perles et Mariam 99.

EXERCICE 23 : Soient a, b, c les parts respectifs du premier, deuxième et troisième dans 180000F :

$$\frac{a}{400000} = \frac{b}{300000} = \frac{c}{200000} = \frac{a+b+c}{400000+300000+200000} = \frac{180000}{900000} = 0,2$$

$$\frac{a}{400000} = 0,2 \iff a = 400000 \times 0,2 = 80000 \ ; \ a = 80000$$

$$\frac{b}{300000} = 0,2 \iff b = 300000 \times 0,2 = 60000 \ ; \ b = 60000$$

$$\frac{c}{200000} = 0,2 \iff c = 200000 \times 0,2 = 40000 \ ; \ c = 40000$$

Donc le 1er aura 80.000F, le 2ème 60.000F et le 3ème 40.000F.

EXERCICE 24 : Complétons :

a°) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$

b°) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

c°) $x^2 - 2\sqrt{7}x + 7 = \left(x - \sqrt{7}\right)^2$

d°) $x^2 + x + \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2$

e°) $9 + 6x + x^2 = (3+x)^2$

f°) $16x^2 - 40x + 25 = (4x-5)^2$

EXERCICE 25: Déterminons le montant de la somme payée par chacun :

Soit R le montant payé par le premier, S celui payé par le deuxième et T celui payé par les deux derniers.

$$\frac{R}{22} = \frac{S}{36} = \frac{T}{45} = \frac{R+S+2T}{22+36+90} = \frac{37000}{148} = 250$$

$$\frac{R}{22} = 250 \iff R = 250 \times 22 = 5500 \ ; \ R = 5500$$

$$\frac{S}{36} = 250 \iff S = 250 \times 36 = 9000 \ ; \ S = 9000$$

$$\frac{T}{45} = 250 \iff T = 250 \times 45 = 11250 \ ; \ T = 11250$$

Le premier payera donc 5500F, le deuxième 9000F, les deux derniers 11250F chacun.

EXERCICE 26 : Trouvons les trois nombres :

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7} = \frac{4a - b + 5c}{8 - 3 + 35} = \frac{12480}{40} = 312$$

$$\frac{a}{2} = 312 \Leftrightarrow a = 2 \times 312 = 624 \ ; \ a = 624$$
$$\frac{b}{3} = 312 \Leftrightarrow b = 312 \times 3 = 936 \ ; \ b = 936$$
$$\frac{c}{7} = 312 \Leftrightarrow c = 7 \times 312 = 2184 \ ; c = 2184$$

EXERCICE 27 : Montrons que ce réel peut s'écrire sous la forme d'un entier :

$$\frac{\sqrt{50}+\sqrt{98}-\sqrt{8}}{\sqrt{200}} = \frac{\sqrt{25\times 2}+\sqrt{49\times 2}-\sqrt{4\times 2}}{\sqrt{100\times 2}} = \frac{\sqrt{25}\times\sqrt{2}+\sqrt{49}\times\sqrt{2}-\sqrt{4}\times\sqrt{2}}{\sqrt{100}\times\sqrt{2}}$$
$$= \frac{5\sqrt{2}+7\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = 1$$

EXERCICE 28 : Soient a, b, c les parts respectives :
On sait que $a = 16000F$ et on a :

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}\frac{b}{5} = \frac{c}{6}\frac{16000}{4} = 4000$$
$$\frac{b}{5} = 4000 \Leftrightarrow b = 5 \times 4000 = 20000 \ ; \ b = 20000$$
$$\frac{c}{6} = 4000 \Leftrightarrow c = 6 \times 4000 = 24000 \ ; \ c = 24000$$

Le montant total des parts est : $a + b + c = 16000F + 20000F + 24000F = 60000F$.

EXERCICE 29 : Ecrivons plus simplement :

a) $\sqrt{\sqrt{7}} \times \sqrt{7\sqrt{7}} = \sqrt{7\sqrt{7}^2} = \sqrt{7^2} = 7$; $\sqrt{2\sqrt{2}} \times \sqrt{4\sqrt{2}} = \sqrt{8\sqrt{2^2}} = \sqrt{16} = 4$

b) **Rendons rationnel le dénominateur de :**

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}{9-5}} = \sqrt{\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}{4}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}{9-5}} = \sqrt{\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}{4}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

c) **Réduisons le calcul de l'expression :**

$$A = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \ ; \boxed{A = 3}$$

d) **Calculons la moyenne proportionnelle des nombres $2\sqrt{3}+2$ et $2\sqrt{3}-2$**

Théorème de la moyenne proportionnelle de deux nombres : Soient deux réels a et b de même signe ; il existe deux valeurs opposées du réel x telles que a, x, x, b forment une proportion. Par définition, nous disons que chacune des valeurs de x est une moyenne proportionnelle des réels a et b.
Il résulte de ce qui précède que les moyennes proportionnelles des deux réels de même signe a et b, sont respectivement : $x_1 = \sqrt{ab}$ et $x_2 = -\sqrt{ab}$
Donc les moyennes proportionnelles de $2\sqrt{3}+2$ et $2\sqrt{3}-2$ sont :

$$x_1 = \sqrt{\left(2\sqrt{3}+2\right)\left(2\sqrt{3}-2\right)} = \sqrt{12-4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$x_2 = -\sqrt{\left(2\sqrt{3}+2\right)\left(2\sqrt{3}-2\right)} = -\sqrt{12-4} = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$

EXERCICE 30 : Calculons :

$$\left(2\sqrt{3}+2\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2\times 2\times 2\sqrt{3} + 2^2 = 12 + 8\sqrt{3} + 4 = 16 + 8\sqrt{3}$$
$$\left(2\sqrt{5}-3\right)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 - 2\times 3\times 2\sqrt{5} + 3^2 = 20 - 12\sqrt{5} + 9 = 29 - 12\sqrt{5}$$
$$\left(\sqrt{7}-5\right)^2 = \sqrt{7}^2 - 2\times 5\times\sqrt{7} + 5^2 = 7 - 10\sqrt{7} + 25 = 32 - 10\sqrt{7}$$

$$\left(\sqrt{7}-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+2\sqrt{3}\right)=\sqrt{7}^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2=7-12=-5$$
$$\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)=3^2-\sqrt{2}^2=9-2=7$$

EXERCICE 31 : a°) Calculons les dimensions de ce champ :

$S=L\times l$ et $L=2l \Leftrightarrow S=2l^2=242 \Leftrightarrow l^2=\frac{242}{2}=121 \Leftrightarrow l=\sqrt{121} \Leftrightarrow l=11$ donc $L=2\times 11$; $\boxed{L=22m \text{ et } l=11m}$

b°) Calculons le rayon de ce disque :

$$S=\pi r^2=28,26 \Leftrightarrow r^2=\frac{28,26}{3,14}=9 \Leftrightarrow \boxed{r=3m}$$

EXERCICE 32 : Déterminons x,y,z,t :

$$\frac{x}{-6}=\frac{y}{14}=\frac{z}{-11}=\frac{t}{-12}=\frac{x+y+z+t}{-6+14-11-12}=\frac{-16}{-15}=\frac{16}{15}$$
$$\frac{x}{-6}=\frac{16}{15} \Leftrightarrow x=\frac{-6\times 16}{15}=-\frac{96}{15} \;;\; \boxed{x=-\frac{96}{15}}$$
$$\frac{y}{14}=\frac{16}{15} \Leftrightarrow y=\frac{14\times 16}{15}=\frac{224}{15} \;;\; \boxed{y=\frac{224}{15}}$$
$$\frac{z}{-11}=\frac{16}{15} \Leftrightarrow z=\frac{-11\times 16}{15}=-\frac{176}{15} \;;\; \boxed{z=-\frac{176}{15}}$$
$$\frac{t}{-12}=\frac{16}{15} \Leftrightarrow t=\frac{-12\times 16}{15}=-\frac{192}{15} \;;\; \boxed{t=\frac{192}{15}}$$

EXERCICE 33 : a°) Calculons :

$$A=3\times(1-0,8)=3\times 0,2=0,6 \;;\; A=0,6$$
$$B=\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)\times\frac{5}{3}=\left(\frac{9-4}{6}\right)\times\frac{5}{3}=\frac{5}{6}\times\frac{5}{3}=\frac{25}{18} \;; B=\frac{25}{18}$$

b°) Calculons : $C=a-\frac{2}{b}=-1-\frac{2}{7}=\frac{-7-2}{7}=-\frac{9}{7}$; $C=-\frac{9}{7}$

c°) Simplifions :

$$d=7\sqrt{3}+\sqrt{75}-2\sqrt{243}=7\sqrt{3}+\sqrt{25\times 3}-2\sqrt{81\times 3}=7\sqrt{3}+\sqrt{25}\times\sqrt{3}-2\sqrt{81}\times\sqrt{3}$$
$$=7\sqrt{3}+5\sqrt{3}-18\sqrt{3}=-6\sqrt{3} \;;\; d=-6\sqrt{3}$$

d°) Calculons :

$$E=\left(3\sqrt{2}-5\right)\left(4-\sqrt{2}\right)=12\sqrt{2}-3\sqrt{4}-20+5\sqrt{2}=17\sqrt{2}-26; E=-26+17\sqrt{2}$$

EXERCICE 34 : Calculons le rayon du disque :

$$S=\pi r^2=200,96 \Leftrightarrow r^2=\frac{200,96}{3,14}=64 \Leftrightarrow \boxed{r=8cm}$$

EXERCICE 35 : Calculons la longueur du côté de l'angle droit :

$$S=\frac{C^2}{2}=60,50 \Leftrightarrow C^2=121 \Leftrightarrow \boxed{C=11dm}$$

EXERCICE 36 : 1°) $a=8\ cm; b=10\ cm\ ; c=12\ cm$

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{8+10+12}{2}=\frac{30}{2}=15$$
$$\mathcal{A}=\sqrt{15(15-8)(15-10)(15-12)}=\sqrt{15\times 7\times 5\times 3}=\sqrt{1575}=15\sqrt{7} \;;\; \boxed{\mathcal{A}=15\sqrt{7}cm^2}$$

2°) $a=5,7\ cm\ ; b=8,4\ cm\ ; c=9,6\ cm$

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5,7+8,4+9,6}{2}=\frac{23,7}{2}=11,85$$
$$\mathcal{A}=\sqrt{11,85(11,85-5,7)(11,85-8,4)(11,85-9,6)}=\sqrt{11,85\times 6,15\times 3,45\times 2,25}$$
$$=23,78 \;;\; \boxed{\mathcal{A}=23,78cm^2}$$

3°) $a=b=c=15\ cm$

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{15+15+15}{2}=\frac{45}{2}=22,5$$
$$\mathcal{A}=\sqrt{22,5(22,5-15)(22,5-15)(22,5-15)}=\sqrt{22,5\times(7,5)^3}=97,42 \;;\boxed{\mathcal{A}=97,42cm^2}$$

EXERCICE 37 : a°) $320 = 2^6 \times 5$ et $\sqrt{320} = \sqrt{2^6 \times 5} = \sqrt{2^6} \times \sqrt{5} = 2^3\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$; $\sqrt{320} = 8\sqrt{5}$

b°) Vérifions que $4x - y = 0$

$$x = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \ ; \ x = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{20-\sqrt{320}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{4(5-2\sqrt{5})}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{4}\times\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \sqrt{4} = 2 \ ; \ y = 2$$

$4x - y = 4 \times \frac{1}{2} - 2 = 2 - 2 = 0$ donc $4x - y = 0$

EXERCICE 38 : 1°) a- Décomposons en produit des facteurs premiers :

$$320 = 2^6 \times 5 \ ; \ 48 = 2^4 \times 3 \ ; \ \sqrt{320} = 8\sqrt{5} \ ; \ \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

b°) Vérifions que le réel $5 - 2\sqrt{5} \geq 0$

$$5^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 25 - 20 = 5 > 0 \Leftrightarrow 5^2 \geq \left(2\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 5 \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 5 - 2\sqrt{5} \geq 0$$

c°) Simplifions :

$$E = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}}}{2\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{6}{4}}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}}}{2\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)} = \frac{1}{2} \ ; \ E = \frac{1}{2}$$

$$T = \frac{\sqrt{20-\sqrt{320}} - \sqrt{12+\sqrt{48}}}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{4\left(5-2\sqrt{5}\right)} - \sqrt{4\left(3+\sqrt{3}\right)}}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{5-2\sqrt{5}} - 2\sqrt{3+\sqrt{3}}}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{-2\left(\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}} = -2 \ ; \ T = -2$$

2°) a°) Développons :

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b+c)^3 = (a+b+c)^2(a+b+c) = \left(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\right)(a+b+c)$$
$$= a^3 + a^2b + a^2c + ab^2 + b^3 + b^2c + ac^2 + bc^2 + c^3 + 2a^2b + 2ab^2 + 2abc$$
$$+ 2a^2c + 2abc + 2ac^2 + 2abc + 2b^2c + 2bc^2$$
$$\underline{= a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2}$$

b°) Démontrons que si $a + b + c = 0$ alors $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = -b - c$; $b = -a - c$ et $c = -a - b$

$$a + b + c = 0 \Leftrightarrow (a+b+c)^3 = 0$$

c'est-à-dire $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 = 0$

Dans cette relation remplaçons a, b, c par leurs valeurs tirées plus haut, on a :

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3a^2(-a-c) + 3a^2(-a-b) + 3(-b-c)b^2 + 3b^2(-a-b)$$
$$+ 3(-b-c)c^2 + 3(-a-c)c^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 6abc - 3a^3 - 3a^2c - 3a^3 - 3a^2b - 3b^3 - 3b^2c - 3ab^2 - 3b^3 - 3bc^2$$
$$- 3c^3 - 3ac^2 - 3c^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 6abc - 3a^3 - 3b^3 - 3c^3 - 3a^3 - 3a^2b - 3a^2c - 3b^3 - 3ab^2 - 3b^2c$$
$$- 3c^3 - 3ac^2 - 3bc^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 6abc - 3a^3 - 3b^3 - 3c^3 - 3a^2(a+b+c) - 3b^2(a+b+c)$$
$$- 3c^2(a+b+c) = 0$$
$$\Leftrightarrow -2a^3 - 2b^3 - 2c^3 + 6abc = 0 \Leftrightarrow 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right) = 6abc \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

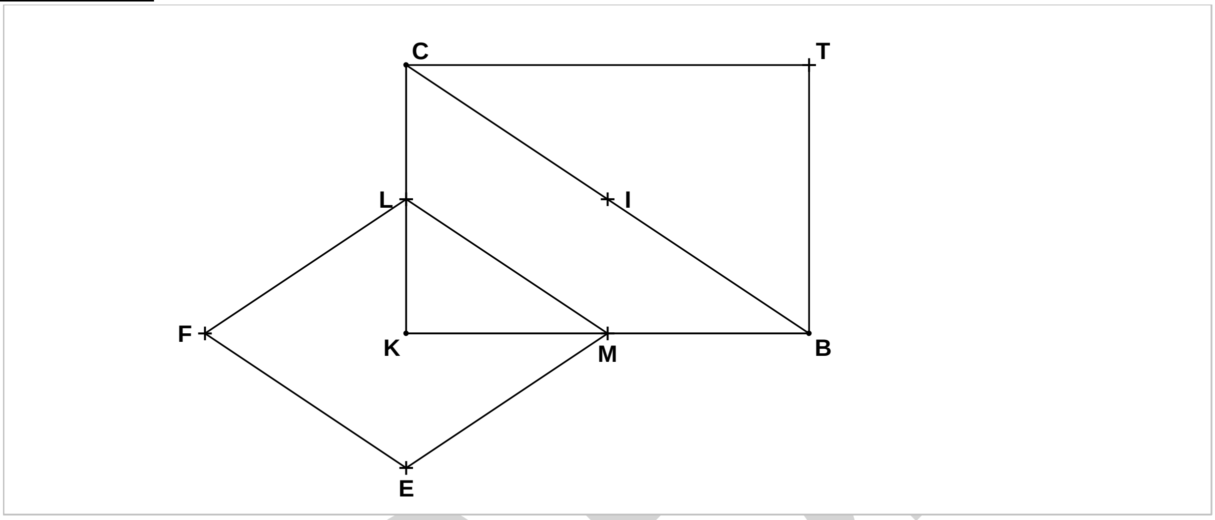
EXERCICE 39 : Soient α, β, θ ces angles on a :

$$\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{6} = \frac{\theta}{7} = \frac{\alpha+\beta+\theta}{5+6+7} = \frac{180}{18} = 10$$

$$\frac{\alpha}{5} = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5 \times 10 = 50 \ ; \ \alpha = 50°$$
$$\frac{\beta}{6} = 10 \Leftrightarrow \beta = 6 \times 10 = 60 \ ; \ \beta = 60°$$
$$\frac{\theta}{7} = 10 \Leftrightarrow \theta = 7 \times 10 = 70 \ ; \ \theta = 70°$$

B/ GÉOMÉTRIE :

EXERCICE 1 :



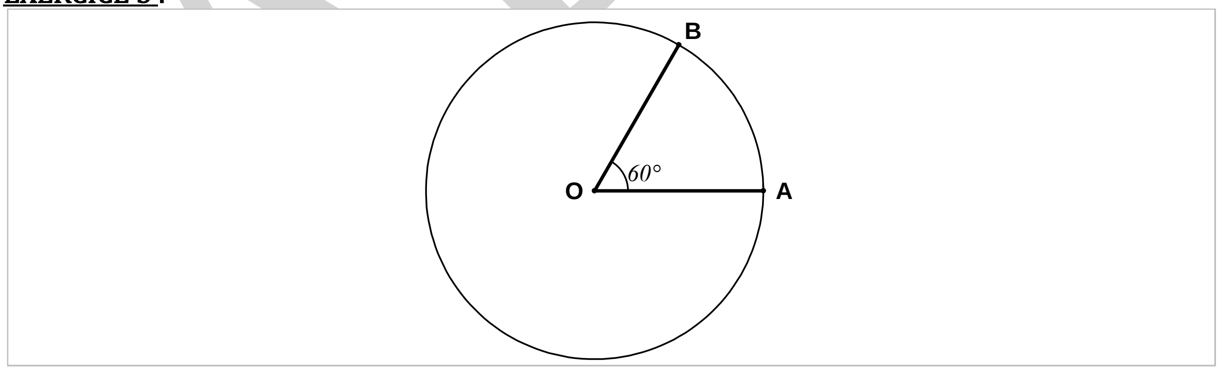
1°) a) Voir figure
b°) Le quadrilatère $BKCT$ est un rectangle et le quadrilatère $MEFL$ est losange.
2°) Trouvons les images des points suivants :

$$t_{\overrightarrow{ML}}(E) = F \ ; \ t_{\overrightarrow{BK}}(T) = C; \ t_{\overrightarrow{BI}}(I) = C; \ t_{\overrightarrow{BK}}(B) = K; \ t_{\overrightarrow{KI}}(I) = T$$

EXERCICE 2 : Complétons le tableau suivant :

ARC	α	β	δ
Mesure de la longueur de l'arc	31,4mm	12,56mm	47,1mm
Mesure de l'arc en degré	50°	20°	75°

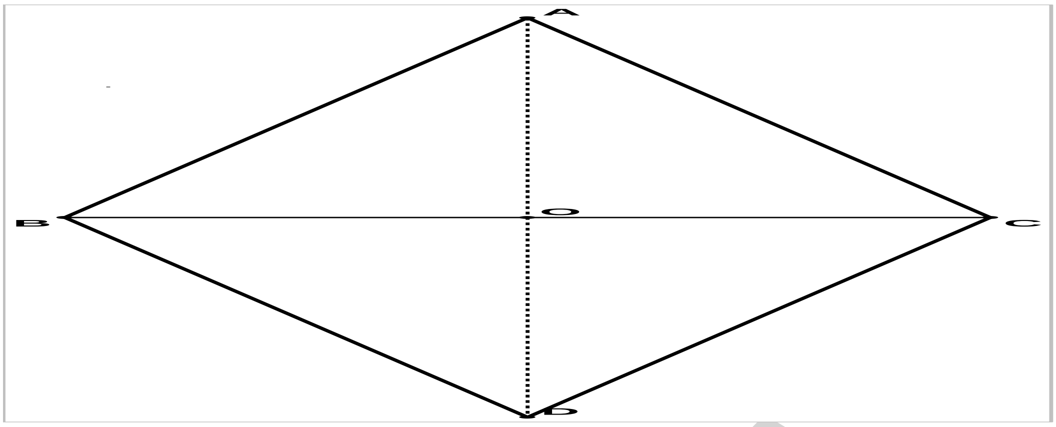
EXERCICE 3 :



a°) Calculons sa mesure :
En radians : $\alpha = \frac{\pi \times d}{180} = \frac{\pi \times 60}{180} = \frac{\pi}{3}$; $\alpha = \frac{\pi}{3} rds$. En grades : $g = \frac{200 \times d}{180} = \frac{200 \times 60}{180} = 66,66 grds$
b°) La longueur de cet arc est : $L = \frac{\pi \times r \times d}{180} = \frac{3,14 \times 5 \times 60}{180} = 5,23$; $L = 5,23 cm$
c°) L'aire du secteur circulaire est : $\mathcal{A} = \frac{\pi \times d \times r^2}{360} = \frac{3,14 \times 60 \times (5)^2}{360} = 13,08$; $\mathcal{A} = 13.08 cm^2$
EXERCICE 4 : La longueur de cet arc est :

$$L = \frac{\pi \times r \times d}{180} = \frac{3,14 \times 5 \times 50}{180} = 4,36 cm \ ; \ L = 4,36 cm$$

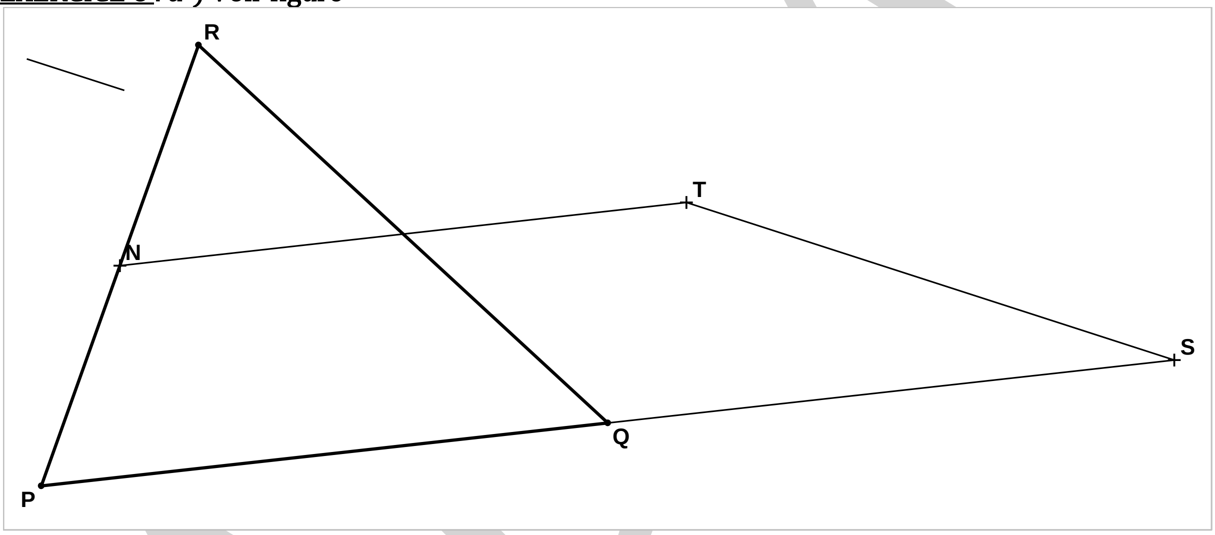
EXERCICE 5 : a°) Voir figure. Le quadrilatère $ABDC$ est un losange.



b°) Complétons les écritures suivantes :

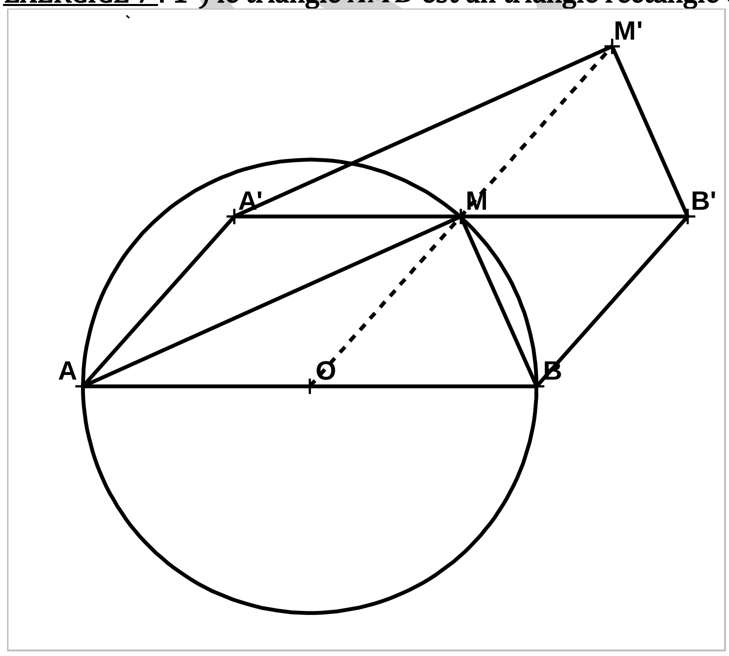
$$S_O(B) = C;\ S_O(D) = A;\ S_{(BC)}(A) = D;\ S_{(AD)}(C) = B;\ t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D\ ;\ t_{\overrightarrow{CA}}(D) = B$$

EXERCICE 6 : a°) Voir figure



b°) Le quadrilatère $QSTN$ est un parallélogramme car on deux côtés opposés parallèles de même longueur ($NT = PQ = QS$).

EXERCICE 7 : 1°) le triangle AMB est un triangle rectangle en M.



2°) Voir figure. 3°) L'image du point $\boldsymbol{O}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ est le point $\boldsymbol{M}$.
4°) Le quadrilatère $\boldsymbol{ABB'A'}$ est un parallélogramme ($\overrightarrow{\boldsymbol{AA'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{BB'}}$).
5°) Le triangle $\boldsymbol{A'M'B'}$ est un triangle rectangle en $\boldsymbol{M'}$ car c'est l'image du triangle $\boldsymbol{AMB}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$.

EXERCICE 8 : Donnons la mesure en radians des angles suivants :

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi \times d}{180}}$$

Pour $\boldsymbol{d = 216°}$, $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi \times 216}{180} = \frac{6\pi}{5}}$; $\boldsymbol{\alpha = \frac{6\pi}{5}}$. Pour $\boldsymbol{d = 150°}$, $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi \times 150}{180} = \frac{5\pi}{6}}$; $\boldsymbol{\alpha = \frac{5\pi}{6}}$.
Pour $\boldsymbol{d = 135°}$, $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi \times 135}{180} = \frac{3\pi}{4}}$; $\boldsymbol{\alpha = \frac{3\pi}{4}}$.

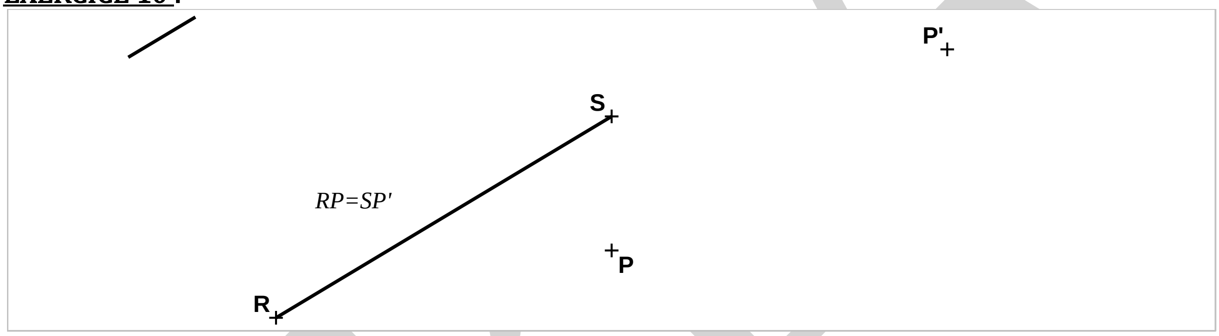
EXERCICE 9 : a°) Déterminons $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\boldsymbol{\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (83° + 51°) = 46° \ ; \ \gamma = 46°}$$

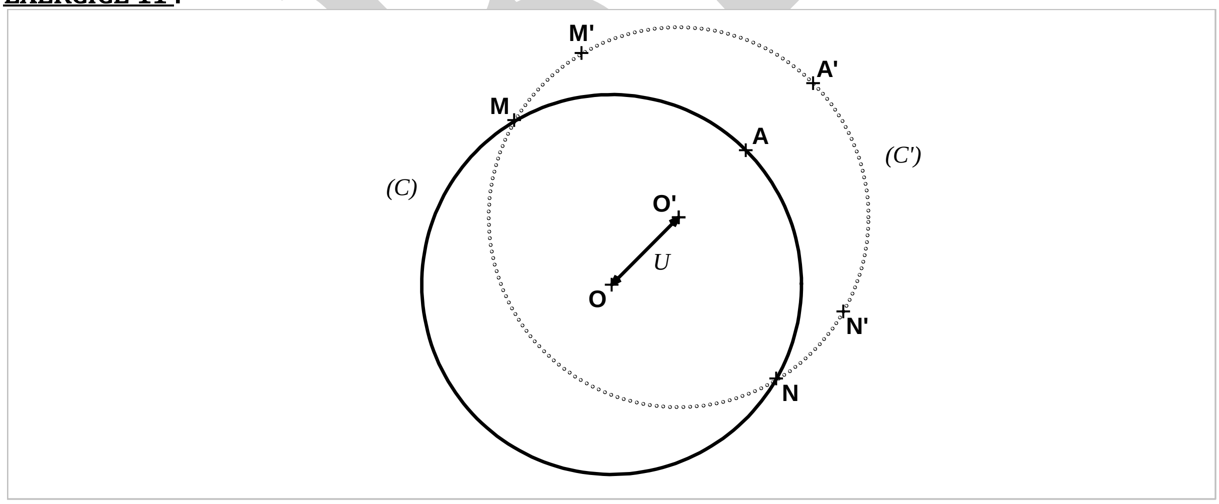
b°) Déterminons $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\alpha = \pi - (\beta + \gamma) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5}\right) = \pi - \frac{9\pi}{10} = \frac{\pi}{10} \ ; \ \alpha = \frac{\pi}{10}}$$

EXERCICE 10 :

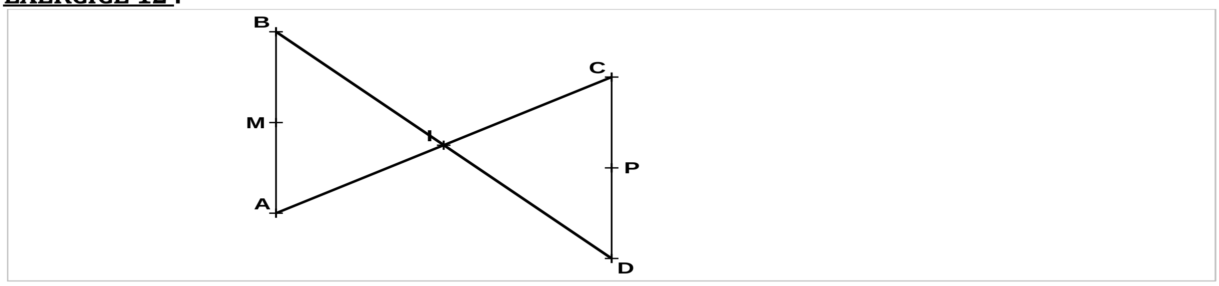


EXERCICE 11 :



Les points $\boldsymbol{M'}$ et $\boldsymbol{N'}$ sont sur le cercle $(\boldsymbol{\mathcal{C}'})$ car ils sont sur le cercle $(\boldsymbol{\mathcal{C}})$et $(\boldsymbol{\mathcal{C}'})$ est l'image de $(\boldsymbol{\mathcal{C}})$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{U}}$.

EXERCICE 12 :



a) Démontrons que $P \in [CD]$:
Les points C et D sont les images respectives des points A et B par la symétrie centrale de centre I,
Le point $M \in [AB]$ or le pont P est l'image du point M par cette même symétrie donc $P \in [CD]$.

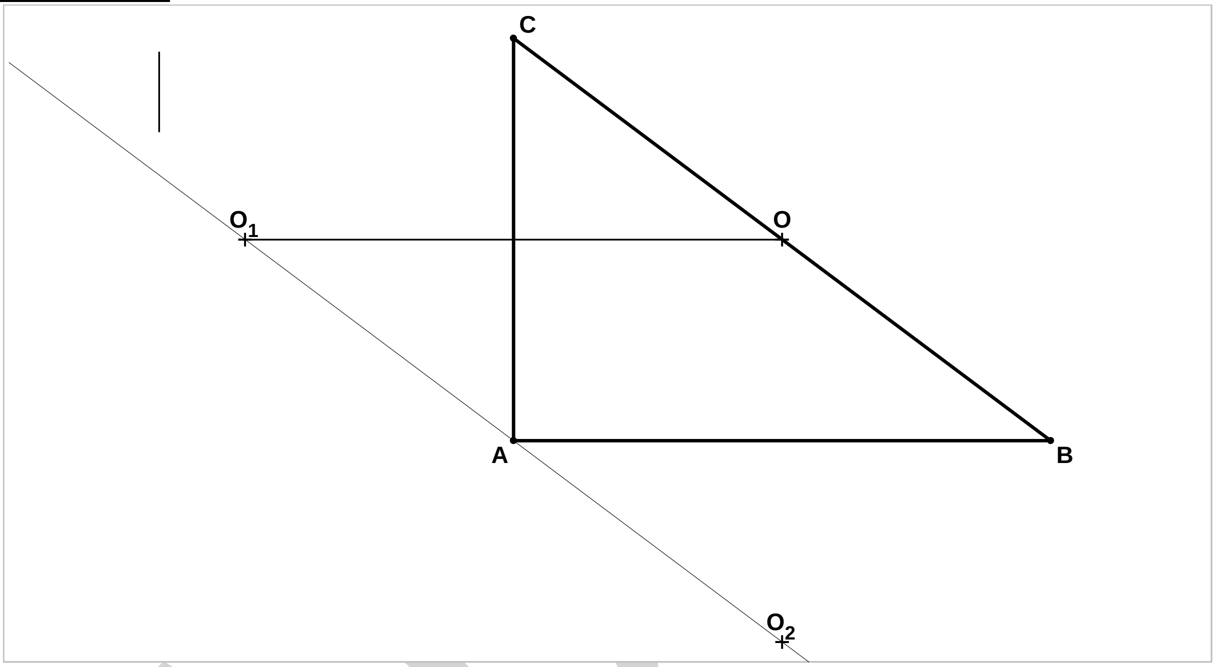
b) Démontrons que $CP = DP$:
$AB = CD$ car la translation conserve les distances et de plus on a : $AM = MB$ donc $CP = DP$.

c) Le point P représente le milieu du segment $[CD]$.

EXERCICE 13 : Le rayon de ce cercle est :

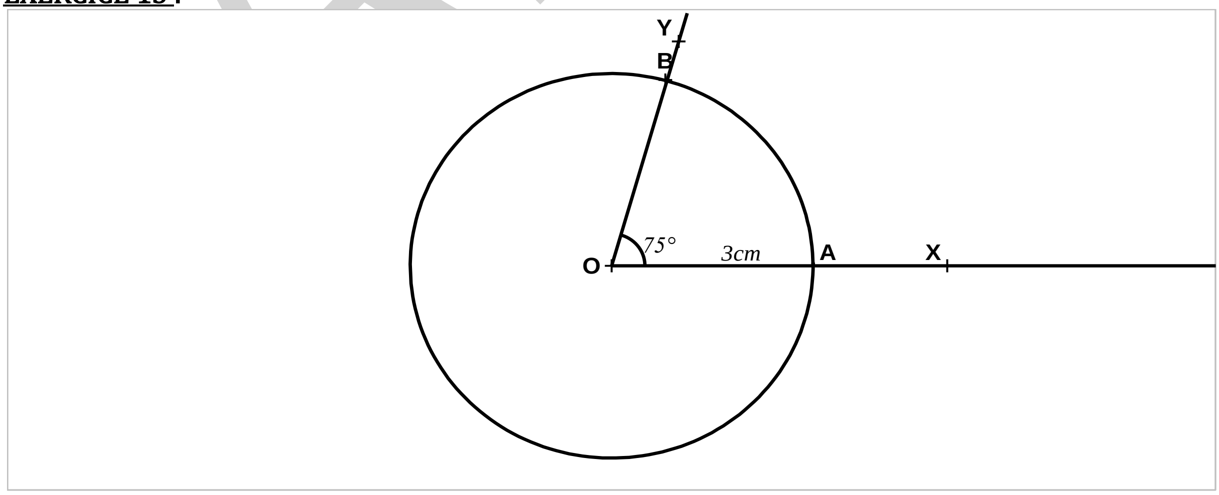
$$L = \frac{\pi \times r \times d}{180} \Leftrightarrow r = \frac{180 \times L}{\pi \times d} = \frac{180 \times 7,85}{3,14 \times 55} = 8,18cm \;;\; r = 8,18cm$$

EXERCICE 14 :



Montrons que les points O_1, A, O_2 sont alignés :
Les triangles ABC et OO_1O_2 sont isométriques car on a : $OO_1 = AB$, $OO_2 = AC$ donc
$BC = O_1O_2$ de plus O milieu de $[BC]$ donc A est le milieu de $[O_1O_2]$ d'où les points O_1, A, O_2 sont alignés.

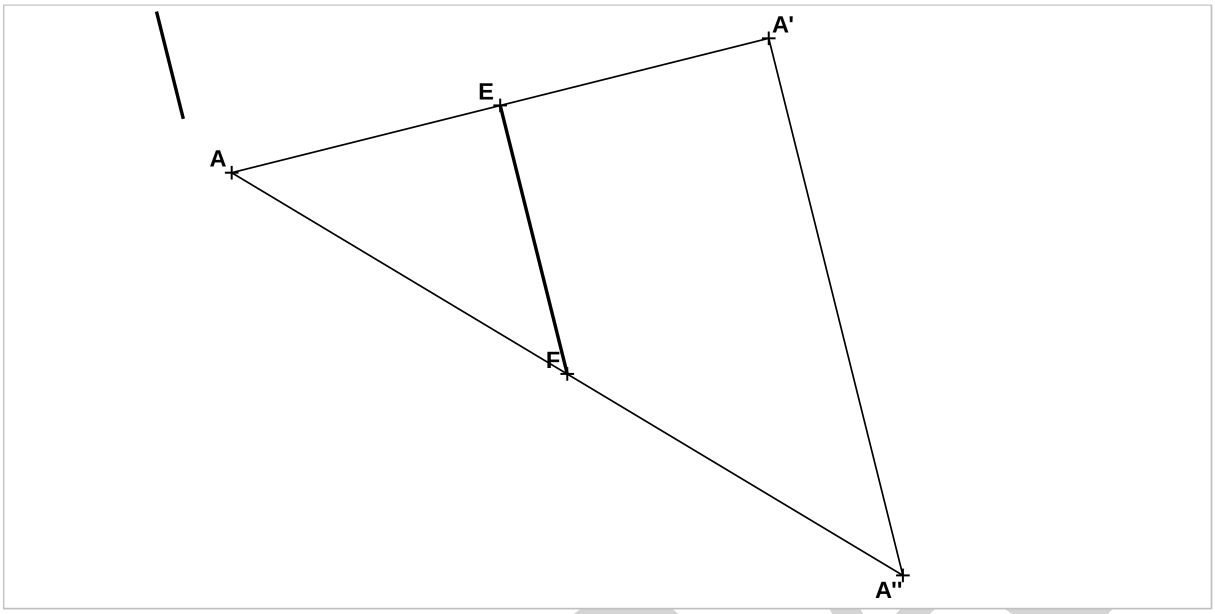
EXERCICE 15 :



Calculons la longueur de l'arc $\widehat{AB}$:

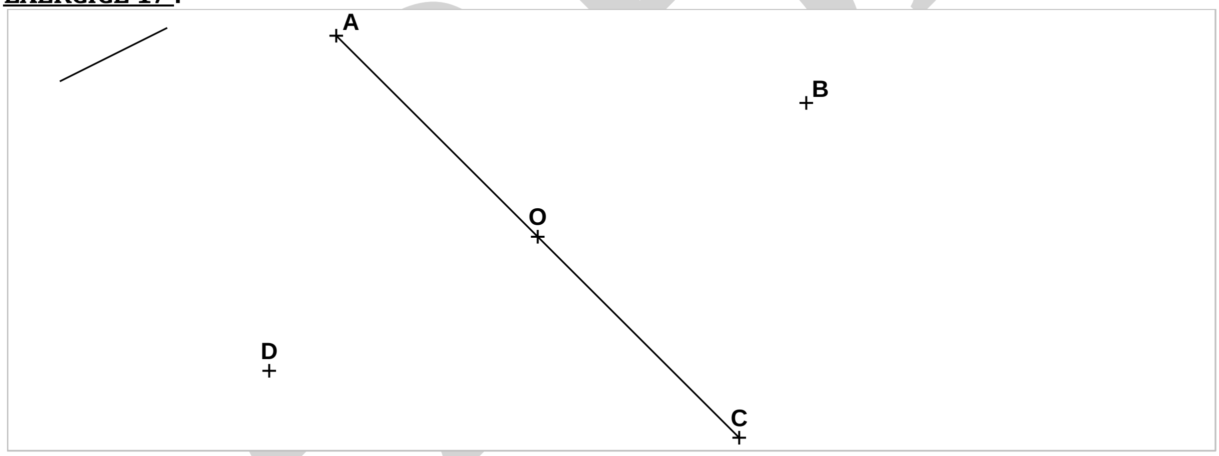
$$L = \frac{\pi \times r \times d}{180} = \frac{3,14 \times 3 \times 75}{180} = 3,925cm \;;\; L = 3,93cm$$

EXERCICE 16 :



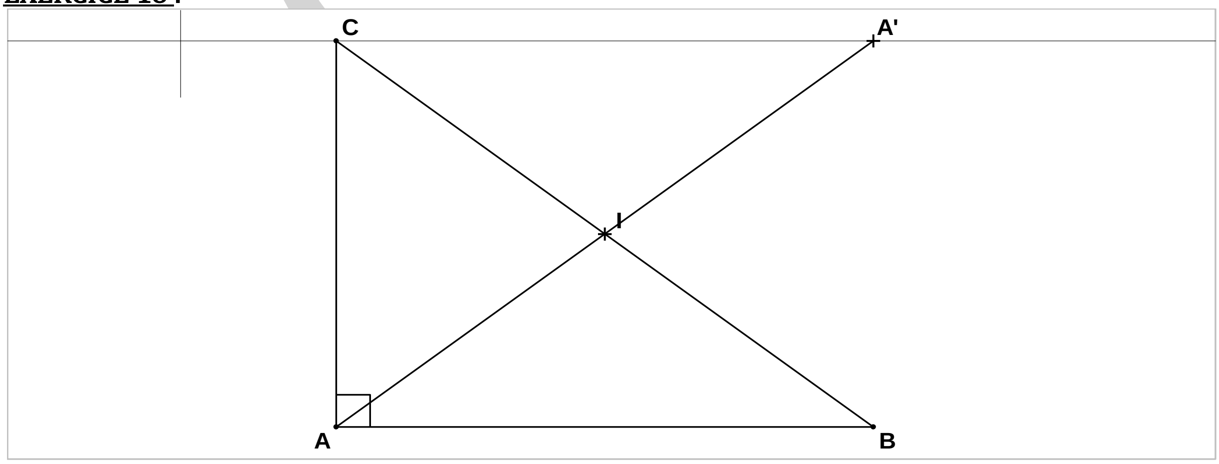
Démontrons que $\overrightarrow{A'A''} = 2\overrightarrow{EF}$:
$AA'A''$ est un triangle, E est le milieu du côté $[AA']$ et F celui de $[AA'']$. Dans un triangle, le segment qui relie les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté et égal à sa moitié. Par conséquent $A'A'' = 2EF$ d'où $\overrightarrow{A'A''} = 2\overrightarrow{EF}$

EXERCICE 17 :



Trouvons : $t_{\overrightarrow{AB}}(D) = C$; $t_{\overrightarrow{CO}}(O) = A$

EXERCICE 18 :

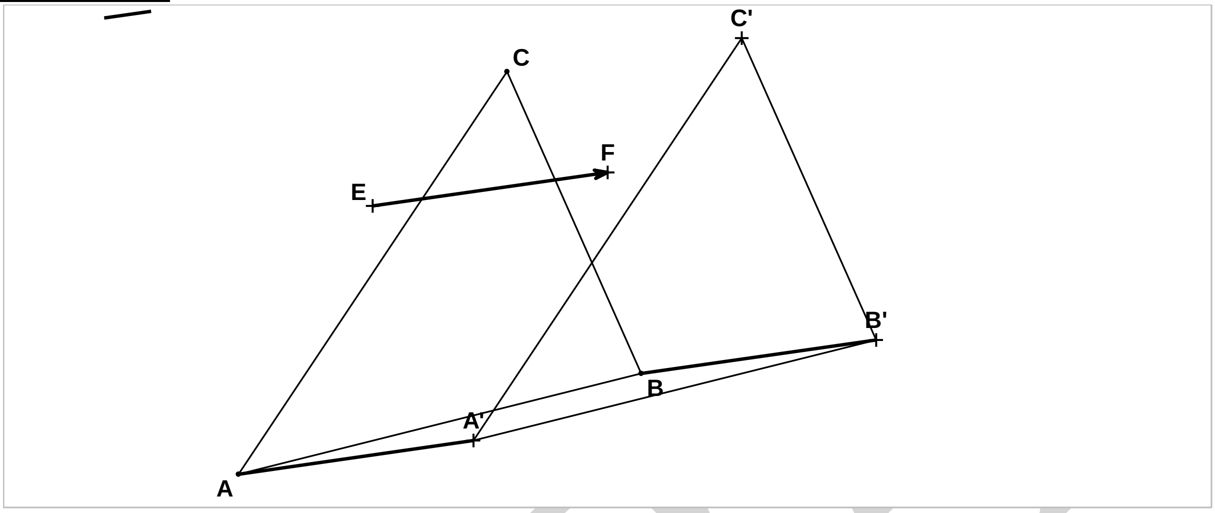


a) Démontrons que les droites (CA') et (BA') sont perpendiculaires :

Les triangles ABC et $A'BC$ sont isométriques puisque I est le milieu des segments $[BC]$ et $[AA']$ et que $AC = BA'$; $AB = CA'$ donc $\widehat{A} = \widehat{A'}$. D'où les droites (CA') et (BA') sont perpendiculaires.

b) Le quadrilatère $ABA'C$ est un rectangle.

EXERCICE 19 :

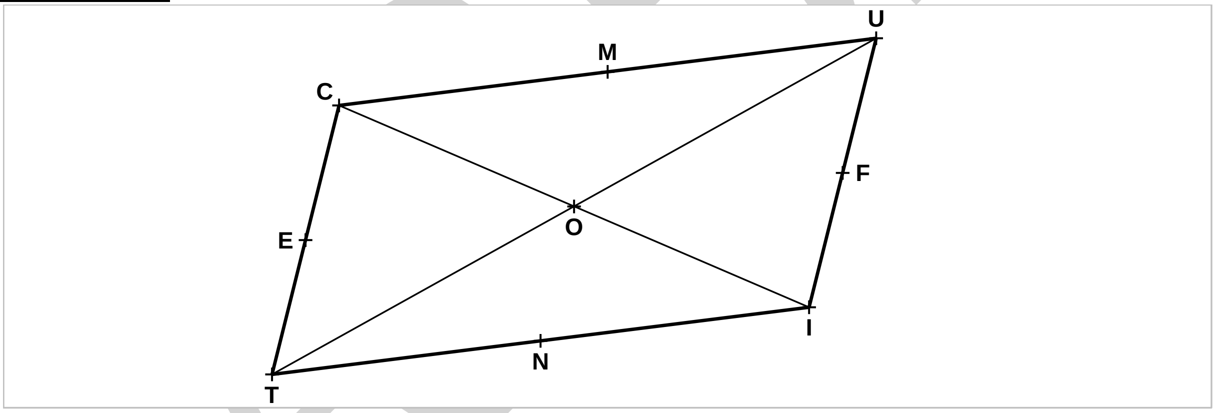


a) Voir figure. b) les vecteurs égaux à $\overrightarrow{EF}$ sont : $\overrightarrow{AA'}$; $\overrightarrow{BB'}$; $\overrightarrow{CC'}$.

c°) Déduisons une liste de trois parallélogramme : $ABB'A'$; $BCC'B'$; $ACC'A'$.

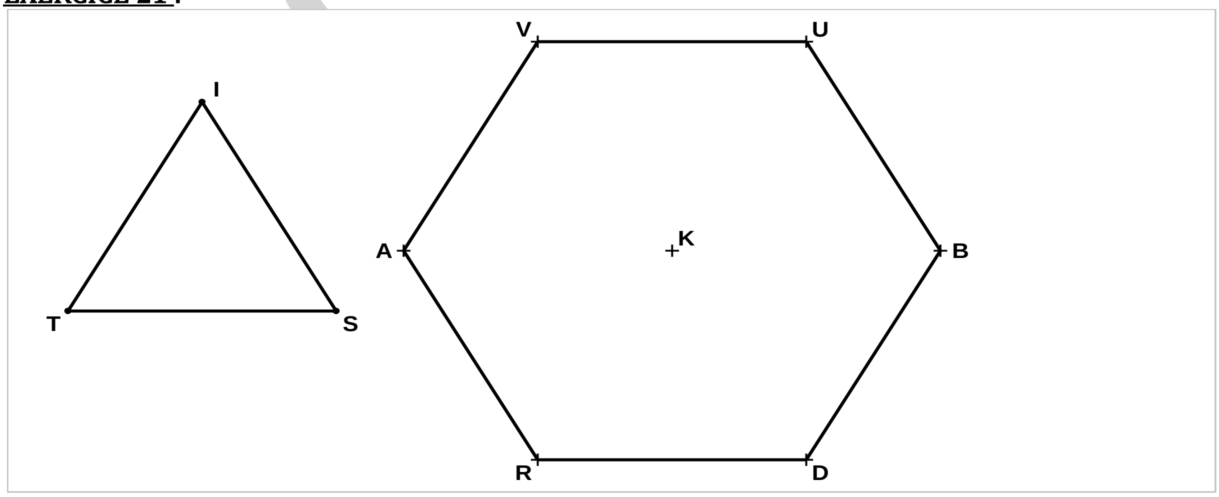
d°) $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{CB}$.

EXERCICE 20 :



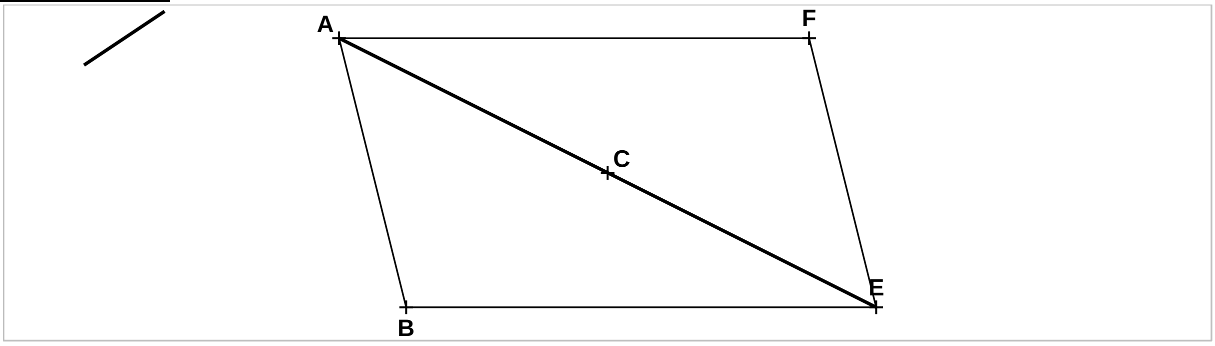
Les images respectives des points M, C, T, N et O sont les points U, M, N, I et F car on a :
$\overrightarrow{MU} = \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{TN} = \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{OF} = \vec{t}$.

EXERCICE 21 :



Le quadrilatère $BUVARD$ est un hexagone régulier.

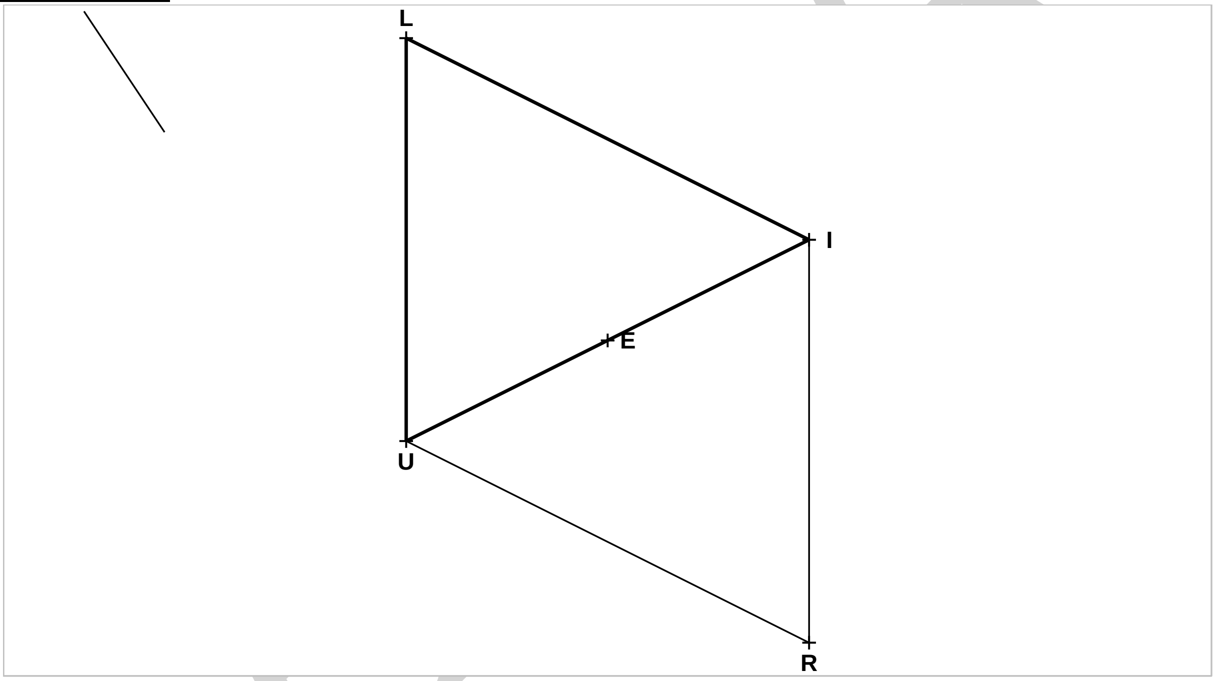
EXERCICE 22 :



Démontrons a) et b) :

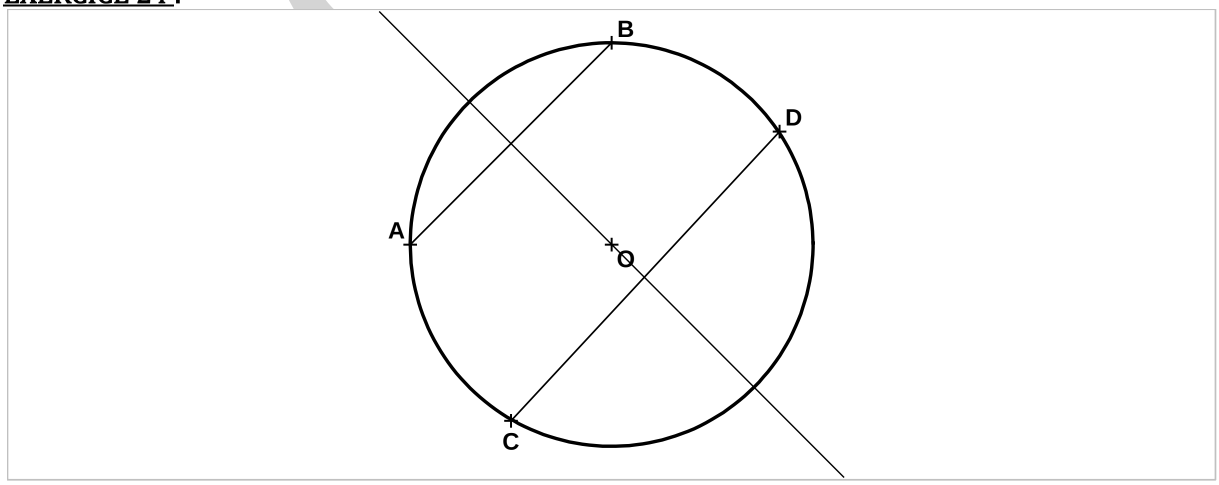
$ABFE$ est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leurs milieux, c'est donc un parallélogramme. Or dans un parallélogramme les côtés opposés sont parallèles de même longueur d'où $AB = EF$ et $(AB) \parallel (EF)$ de meeme $AF = BE$ et $(AF) \parallel (BE)$.

EXERCICE 23 :



Le quadrilatère $LURI$ est un parallélogramme.

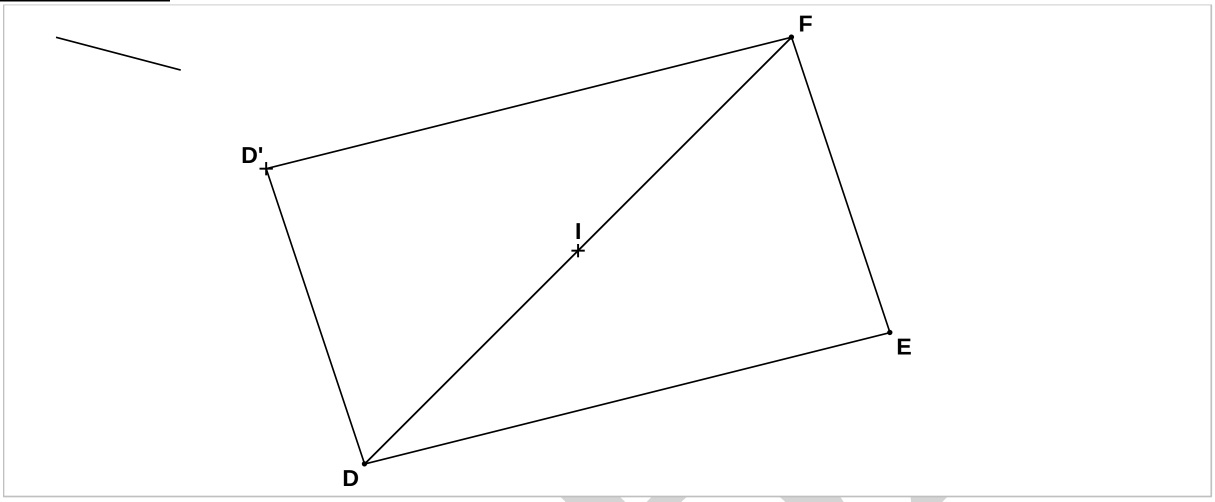
EXERCICE 24 :



a) Démonstration :
Dans un cercle, la sécante diamétrale perpendiculaire à une corde est médiatrice de cette corde, et elle est axe de symétrie pour la figure formée par le cercle et la corde.
La droite Δ est donc la médiatrice des cordes $[AB]$ et $[CD]$.

b) Démonstration :
Dans un cercle, les arcs compris entre deux cordes parallèles sont des arcs égaux.
Donc on a : $\widehat{AC} = \widehat{BD} \Leftrightarrow AC = BD$; $\widehat{AD} = \widehat{BC} \Leftrightarrow AD = BC$.

EXERCICE 25 :



Le quadrilatère $DEFD'$ est un parallélogramme. L'image du segment $[DE]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$ est le segment $[D'F]$.

DEUXIÈME PARTIE :

$2^{ème}$ ET $3^{ème}$ TRIMESTRE

EXERCICE 1 : Résolvons dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

- $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 & (1) \\ x + 4y - 5 = 0 & (2) \end{cases}$ Eliminons x en multipliant l'équation (2) par -2 et en ajoutant membre à membre les deux nouvelles équations obtenues, on aura :
$-7y + 7 = 0 \Leftrightarrow y = 1$
Je remplace y par sa valeur dans l'équation (2) :
$x + 4(1) - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $S = \{(1; 1)\}$
- $\begin{cases} y = -4x - 7 & (1) \\ y = x + 8 & (2) \end{cases}$ Dans l'équation (1), remplaçons y par sa valeur tirée dans l'équation (2) on a : $x + 8 = -4x - 7 \Leftrightarrow x + 4x = -7 - 8 \Leftrightarrow 5x = -15 \Leftrightarrow x = -3$
Dans l'équation (2), remplaçons x par -3 : $y = -3 + 8 \Leftrightarrow y = 5$ $S = \{(-3; 5)\}$
- $\begin{cases} 2x - y = 7 & (1) \\ 5x + 3y = 1 & (2) \end{cases}$ Eliminons y en multipliant l'équation (1) par 3 et en ajoutant membre à membre les deux nouvelles équations obtenues, on aura :
$11x = 21 + 1 \Leftrightarrow 11x = 22 \Leftrightarrow x = 2$
Remplaçons x par 2 dans l'équation (1) : $2(2) - y = 7 \Leftrightarrow y = -7 + 4 \Leftrightarrow y = -3$
$S = \{(2; -3)\}$
- $\begin{cases} 5x + 3y = 77 & (1) \\ 2x - y = 11 & (2) \end{cases}$ Eliminons y en multipliant l'équation (2) par 3 et en ajoutant membre à membre les deux nouvelles équations obtenues, on aura :
$11x = 77 + 33 \Leftrightarrow 11x = 110 \Leftrightarrow x = 10$
Remplaçons x par 10 dans l'équation (2) : $2(10) - y = 11 \Leftrightarrow y = 20 - 11 \Leftrightarrow y = 9$
$S = \{(10; 9)\}$

EXERCICE 2 : Résolvons dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

- ✓ $1+4x=x-3 \Leftrightarrow 4x-x=-3-1 \Leftrightarrow 3x=-4 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}$
  Dans $\mathbb{R}$, $S=\left\{-\frac{4}{3}\right\}$ et dans $\mathbb{Z}$, $S=\emptyset$
- ✓ $2-2x=5x+3 \Leftrightarrow -2x-5x=3-2 \Leftrightarrow -7x=1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{7}$
  Dans $\mathbb{R}$, $S=\left\{-\frac{1}{7}\right\}$ et dans $\mathbb{Z}$, $S=\emptyset$
- ✓ $3x+7=6x+4 \Leftrightarrow 3x-6x=4-7 \Leftrightarrow -3x=-3 \Leftrightarrow x=1$
  Dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Z}$, $S=\{1\}$
- ✓ $4(x-1)=5(2-x) \Leftrightarrow 4x-4=10-5x \Leftrightarrow 4x+5x=10+4 \Leftrightarrow 9x=14 \Leftrightarrow x=\frac{14}{9}$
  Dans $\mathbb{R}$, $S=\left\{\frac{14}{9}\right\}$ et dans $\mathbb{Z}$, $S=\emptyset$
- ✓ $4-(5-x)=9x+2 \Leftrightarrow 4-5+x=9x+2 \Leftrightarrow x-9x=2-4+5 \Leftrightarrow -8x=3$
  $\Leftrightarrow x=-\frac{3}{8}$. Dans $\mathbb{R}$, $S=\left\{-\frac{3}{8}\right\}$ et dans $\mathbb{Z}$, $S=\emptyset$
- ✓ $(x+3)-(2x-1)=3(x-4) \Leftrightarrow x+3-2x+1=3x-12$
  $\Leftrightarrow x-2x-3x=-12-3-1 \Leftrightarrow -4x=-16 \Leftrightarrow x=4$
  Dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Z}$, $S=\{4\}$
- ✓ $6(x-1)-2(2-3x)=0 \Leftrightarrow 6x-6-4+6x=0 \Leftrightarrow 12x-10=0 \Leftrightarrow 12x=10$
  $\Leftrightarrow x=\frac{10}{12} \Leftrightarrow x=\frac{5}{6}$. Dans $\mathbb{R}$, $S=\left\{\frac{5}{6}\right\}$ et dans $\mathbb{Z}$, $S=\emptyset$
- ✓ $(4x-1)-(2-3x)=3x-5(2-x)+1 \Leftrightarrow 4x-1-2+3x=3x-10+5x+1$
  $\Leftrightarrow 4x+3x-3x-5x=-10+1+1+2 \Leftrightarrow -x=-6 \Leftrightarrow x=6$ Dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Z}$, $S=\{6\}$
- ✓ $2x-5[1-2(x+1)]=-7 \Leftrightarrow 2x-5+10(x+1)=-7 \Leftrightarrow 2x-5+10x+10=-7$
  $\Leftrightarrow 2x+10x=-7+5-10 \Leftrightarrow 12x=-12 \Leftrightarrow x=-1$. Dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Z}$, $S=\{-1\}$
- ✓ $2-[2-(2-x)]=3x-[3-(3-2x)] \Leftrightarrow 2-(2-2+x)=3x-(3-3+2x) \Leftrightarrow 2-x=3x-2x \Leftrightarrow 3x+x-2x=2 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$
  Dans $\mathbb{R}$et dans $\mathbb{Z}$, $S=\{1\}$
- ✓ $4x-(x+3)=5-(1-3x) \Leftrightarrow 4x-x-3=5-1+3x \Leftrightarrow 4x-x-3x=5-1+3$
  $\Leftrightarrow 0=7\ impossible$. Dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Z}$, $S=\emptyset$
- ✓ $7+2(x-1)=4x-(7+x) \Leftrightarrow 7+2x-2=4x-7-x \Leftrightarrow 2x-4x+x=2-7-7$
  $\Leftrightarrow -x=-12 \Leftrightarrow x=12$. Dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Z}$, $S=\{12\}$
- ✓ $-8+3(x-2)=2x-(14+x) \Leftrightarrow -8+3x-6=2x-14-x$
  $\Leftrightarrow 3x-2x+x=8+6-14 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$. Dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Z}$, $S=\{0\}$
- ✓ $8+(2-3x)=9-(3x-1) \Leftrightarrow 8+2-3x=9-3x+1 \Leftrightarrow 3x-3x=9+1-8-2$
  $\Leftrightarrow 0=0$. Dans $\mathbb{R}$, $S=\{x/x\in\mathbb{R}\}$ et dans $\mathbb{Z}$, $S=\{x/x\in\mathbb{Z}\}$
- ✓ $-3(3x+2)=-6x-3(x+2) \Leftrightarrow -9x-6=-6x-3x-6 \Leftrightarrow 9x-9x=6-6$
  $\Leftrightarrow 0=0$. Dans $\mathbb{R}$, $S=\{x/x\in\mathbb{R}\}$ et dans $\mathbb{Z}$, $S=\{x/x\in\mathbb{Z}\}$
- ✓ $-x+5(x-1)=2(2x-3)+1 \Leftrightarrow -x+5x-5=4x-6+1$
  $\Leftrightarrow -x+5x-4x=5-6+1 \Leftrightarrow 0=0$. Dans $\mathbb{R}$, $S=\{x/x\in\mathbb{R}\}$ et dans $\mathbb{Z}$, $S=\{x/x\in\mathbb{Z}\}$

<u>EXERCICE 3</u> : Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $(x+5)(x-2)=0 \Leftrightarrow x+5=0$ ou $x-2=0 \Leftrightarrow x=-5$ ou $x=2$; $S=\{-5;2\}$
- $(x+1)(3-2x)=0 \Leftrightarrow x+1=0$ ou $3-2x=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=\frac{3}{2}$; $S=\left\{-1;\frac{3}{2}\right\}$
- $(x-5)(x+2)+(x-5)(2x+1)=0 \Leftrightarrow (x-5)(x+2+2x+1)=0 \Leftrightarrow$
  $(x-5)(3x+3)=0 \Leftrightarrow x-5=0$ ou $3x+3=0 \Leftrightarrow x=5$ ou $x=-1$; $S=\{-1;5\}$
- $2(5x-7)(3x+2)=0 \Leftrightarrow 2\neq 0; 5x-7=0$ ou $3x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{7}{5}$ ou $x=-\frac{2}{3}$
  $$S=\left\{-\frac{2}{3};\frac{7}{5}\right\}$$
- $(x-3)(2-x)+x-3=0 \Leftrightarrow (x-3)(2-x+1)=0 \Leftrightarrow (x-3)(3-x)=0 \Leftrightarrow -(x-3)^2=0 \Leftrightarrow -1\neq 0; x-3=0 \Leftrightarrow x=3$; $S=\{3\}$
- $(x+5)^2+(x+5)(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+5)(x+5+x+1)=0 \Leftrightarrow (x+5)(2x+6)=0$
  $\Leftrightarrow x+5=0$ ou $2x+6=0 \Leftrightarrow x=-5$ ou $x=-3$; $S=\{-5;-3\}$
- $(x+1)^2-9x^2=0 \Leftrightarrow [(x+1)-3x][(x+1)+3x]=0 \Leftrightarrow (1-2x)(1+4x)=0 \Leftrightarrow$

$1 - 2x = 0$ ou $1 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{4}$; $S = \left\{-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\}$

- $(5x+1)^2 = (4x+5)^2 \Leftrightarrow (5x+1)^2 - (4x+5)^2 = 0 \Leftrightarrow$
  $[(5x+1) - (4x-5)][(5x+1) + (4x+5)] = 0 \Leftrightarrow (x+6)(9x+6) = 0 \Leftrightarrow$
  $x + 6 = 0$ ou $9x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$ ou $x = -\frac{2}{3}$; $S = \left\{-6; -\frac{2}{3}\right\}$
- $(3x+6)(x+5) - (x+2)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow 3(x+2)(x+5) - (x+2)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow$
  $(x+2)[3(x+5) - (2x+1)] = 0 \Leftrightarrow (x+2)(3x+15-2x-1) = 0 \Leftrightarrow$
  $(x+2)(x+14) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$ ou $x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = -14$; $S = \{-14; -2\}$
- $(1-x)(x-2) = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow (1-x)(x-2) = (x-2)^2 \Leftrightarrow$
  $(1-x)(x-2) - (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)[(1-x) - (x-2)] = 0 \Leftrightarrow (x-2)(3-2x) = 0 \Leftrightarrow$
  $x - 2 = 0$ ou $3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = \frac{3}{2}$; $S = \left\{\frac{3}{2}; 2\right\}$

EXERCICE 4 : Soit x ce nombre : $3x + 2 = 2x - 3 \Leftrightarrow 3x - 2x = -3 - 2 \Leftrightarrow x = -5$; $S = \{-5\}$

EXERCICE 5 : Soient a, b, c, d, e ces cinq entiers consécutifs, on a :

$$b = a + 1 , \quad c = a + 2 , \quad d = a + 3 , \quad e = a + 4$$

$$a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4) = 1515 \Leftrightarrow 5a + 10 = 1515 \Leftrightarrow 5a = 1505 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{1505}{5} \Leftrightarrow a = 301$$

Ces cinq entiers sont : 301, 302, 303, 304, 305.

EXERCICE 6 : Soit x l'âge du père et y celui du fils : $x = 3y$ et $(x + 11) = 2(y + 11)$

$$\begin{cases} x = 3y & (1) \\ (x+11) = 2(y+11) & (2) \end{cases}$$

Remplaçons x par $3y$ dans l'équation (2) : $(3y + 11) = 2(y + 11) \Leftrightarrow 3y + 11 = 2y + 22 \Leftrightarrow$
$3y - 2y = 22 - 11 \Leftrightarrow y = 11$

Remplaçons y par 11 dans l'équation (1) : $x = 3(11) \Leftrightarrow x = 33$

Donc le père a 33 ans et le fils 11 ans.

EXERCICE 7 : Soit x le nombre de lapins et y celui de pigeons :

$$\begin{cases} x + y = 12 & (1) \\ 4x + 2y = 30 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - x & (1) \\ 4x + 2y = 30 & (2) \end{cases}$$

Remplaçons y par $12 - x$ dans l'équation (2) : $4x + 2(12 - x) = 30 \Leftrightarrow 4x + 24 - 2x = 30 \Leftrightarrow$
$4x - 2x = 30 - 24 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

Remplaçons x par 3 dans l'équation (1) : $y = 12 - 3 \Leftrightarrow y = 9$. Donc il a tué 3 lapins et 9 pigeons.

EXERCICE 8 : Soit x le nombre d'antilopes et y celui de rhinocéros :

$$\begin{cases} x + y = 14 & (1) \\ 2x + y = 19 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 - x & (1) \\ 2x + y = 19 & (2) \end{cases}$$

Remplaçons y par $14 - x$ dans l'équation (2) :$2x + 14 - x = 19 \Leftrightarrow 2x - x = 19 - 14 \Leftrightarrow x = 5$

Remplaçons x par 5 dans l'équation (1) : $y = 14 - 5 \Leftrightarrow y = 9$

Donc elle a vu 5 antilopes et 9 rhinocéros.

EXERCICE 9 : Soit x l'âge de Adama et y celui de Salamata :

$$\begin{cases} 5(x-4) = y - 4 & (1) \\ 3(x+2) = y + 2 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 20 = y - 4 & (1) \\ 3x + 6 = y + 2 & (2) \end{cases}$$

Eliminons y en multipliant l'équation (2) par -1 et en ajoutant membre à membre les deux nouvelles équations obtenues : $2x - 26 = -6 \Leftrightarrow 2x = 26 - 6 \Leftrightarrow 2x = 20 \Leftrightarrow x = 10$

Remplaçons x par 10 dans l'équation (2) : $3(10) + 6 = y + 2 \Leftrightarrow 30 + 6 = y + 2 \Leftrightarrow y = 34$

Donc Adama a 10 ans et Salamata 34 ans.

EXERCICE 10 : Soit a et b ces deux nombres $(a > b)$:

$$\begin{cases} a - 3b = 74 & (1) \\ a = 4b + 21 & (2) \end{cases}$$

Remplaçons a par $4b + 21$ dans l'équation (1) : $4b + 21 - 3b = 74 \Leftrightarrow 4b - 3b = 74 - 21$
$\Leftrightarrow b = 53$

Remplaçons b par 53 dans l'équation (2) : $a = 4(53) + 21 \Leftrightarrow a = 233$

EXERCICE 11 : Trouvons x et y $(x > y)$:

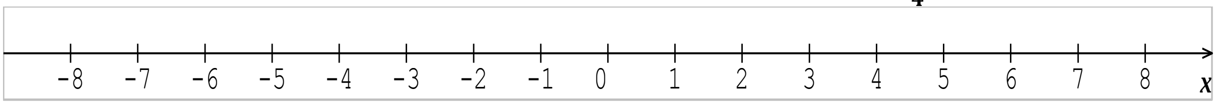
$$\begin{cases} x-y=7 \\ x^2-y^2=91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=7 \\ (x-y)(x+y)=91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=7 \\ 7(x+y)=91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=7 & (1) \\ x+y=13 & (2) \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre ces deux équations on a : $2x = 20 \Leftrightarrow x = 10$; $\boxed{x = 10}$

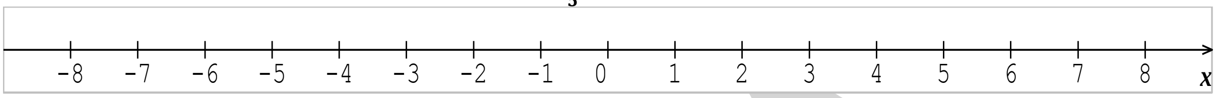
En remplaçant x par 10 dans l'équation (2) on a : $10 + y = 13 \Leftrightarrow y = 13 - 10 \Leftrightarrow y = 3$; $\boxed{y = 3}$

<u>EXERCICE 12</u> : Résolvons les inéquations suivantes :

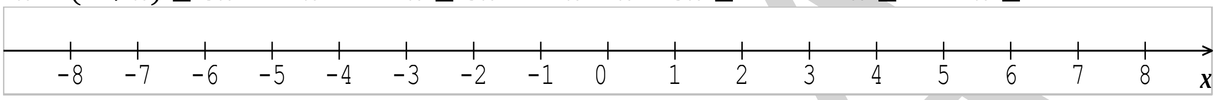
- $-3x + 7 < x + 2 \Leftrightarrow -3x - x < 2 - 7 \Leftrightarrow -4x < -5 \Leftrightarrow 4x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{4}$



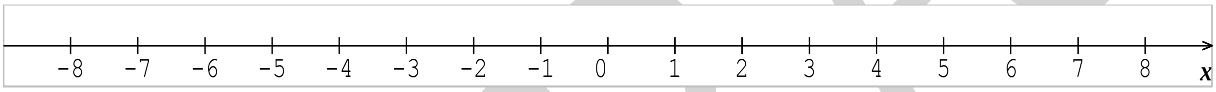
- $-5x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -5x \leq 2 \Leftrightarrow 5x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{5}$



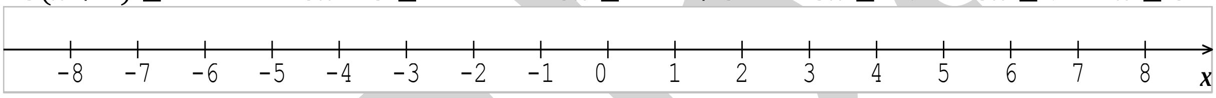
- $2x - (4 + x) \geq 3x \Leftrightarrow 2x - 4 - x \geq 3x \Leftrightarrow 2x - x - 3x \geq 4 \Leftrightarrow -2x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -2$



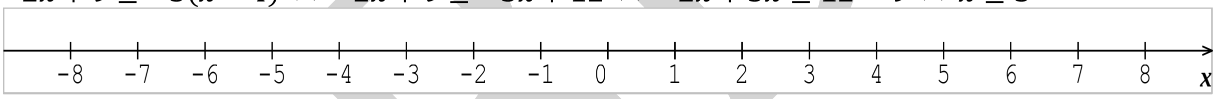
- $2 - 4x \geq -5x \Leftrightarrow 5x - 4x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -2$



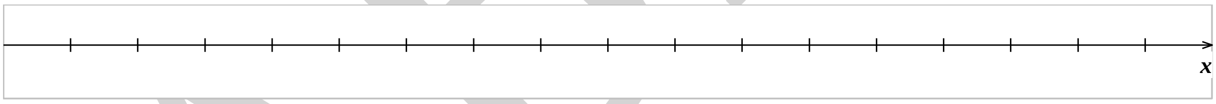
- $-3(x + 1) \geq -12 \Leftrightarrow -3x - 3 \geq -12 \Leftrightarrow -3x \geq -12 + 3 \Leftrightarrow -3x \geq -9 \Leftrightarrow 3x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 3$



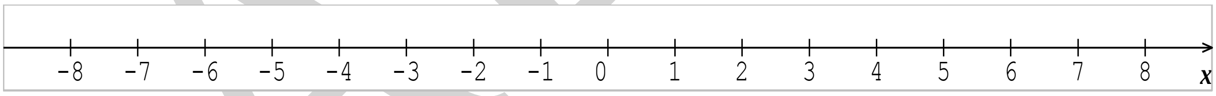
- $-2x + 9 \leq -3(x - 4) \Leftrightarrow -2x + 9 \leq -3x + 12 \Leftrightarrow -2x + 3x \leq 12 - 9 \Leftrightarrow x \leq 3$



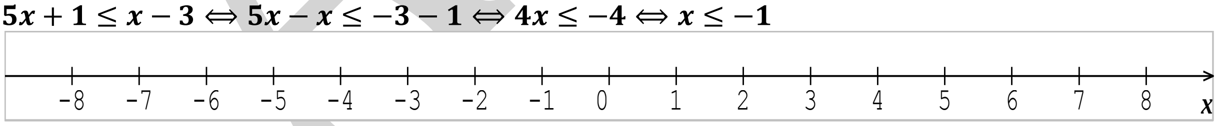
- $-3x - 7 > 9 - 2x \Leftrightarrow -3x + 2x > 9 + 7 \Leftrightarrow -x > 16 \Leftrightarrow x < -16$



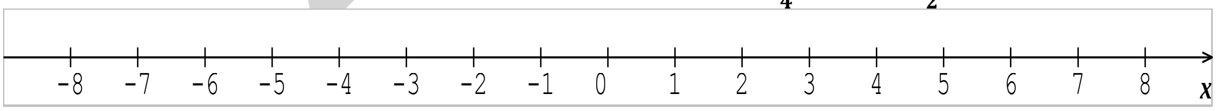
- $7x - 3 > 2x + 7 \Leftrightarrow 7x - 2x > 7 + 3 \Leftrightarrow 5x > 10 \Leftrightarrow x > 2$



- $5x + 1 \leq x - 3 \Leftrightarrow 5x - x \leq -3 - 1 \Leftrightarrow 4x \leq -4 \Leftrightarrow x \leq -1$



- $3x - 2 \geq -x - 8 \Leftrightarrow 3x + x \geq -8 + 2 \Leftrightarrow 4x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -\frac{6}{4} \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$



<u>EXERCICE 13</u> : Calculons la mesure des côtés : AC, BC, BH, CH.

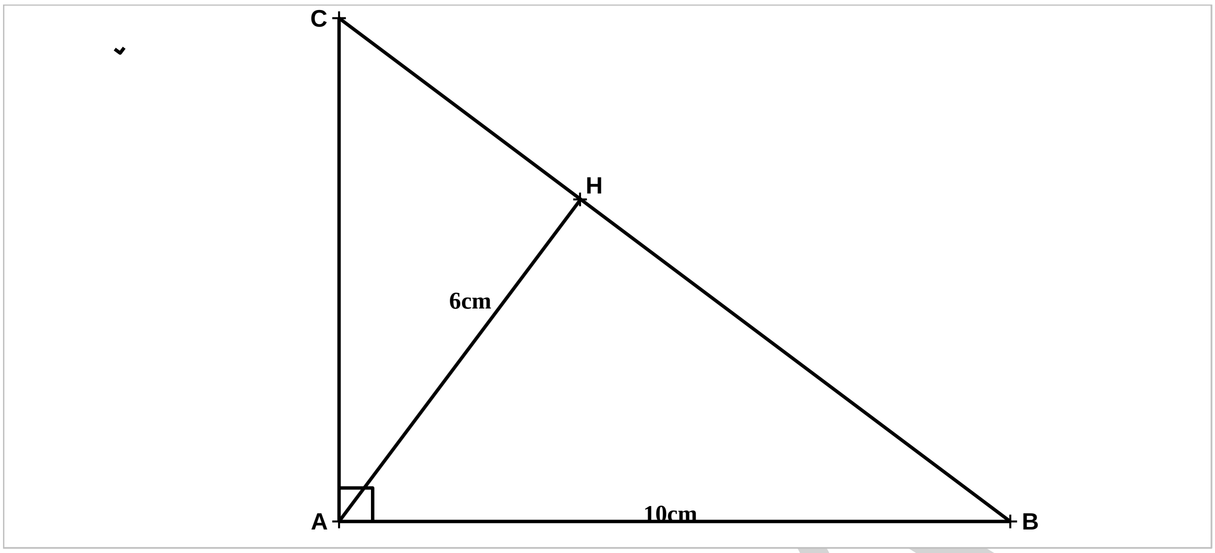
Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H :

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \Leftrightarrow BH^2 = AB^2 - AH^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Leftrightarrow BH = \sqrt{64} = 8$$

$$\boxed{BH = 8cm}$$

D'après les relations métriques dans le triangle ABC rectangle en A on a :

$$AB^2 = BC \times BH \Leftrightarrow BC = \frac{AB^2}{BH} = \frac{10^2}{8} = \frac{100}{8} = 12,5cm \ ; \ \boxed{BC = 12,5cm}$$



Appliquons le théorème de Pythagore au triangle ABC rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 \Leftrightarrow AC^2 = (12,5)^2 - 10^2 = 156,25 - 100 = 56,25$$

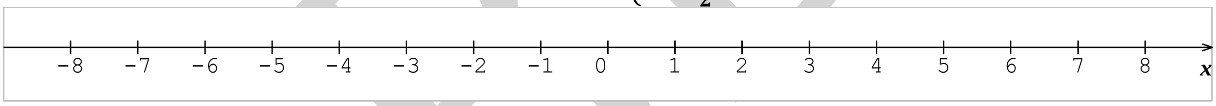
$$\Leftrightarrow AC = \sqrt{56,25} = 7,5cm \ ; \ \boxed{AC = 7,5cm}$$

D'après les relations métriques dans le triangle ABC rectangle en A on a :

$$AC^2 = BC \times CH \Leftrightarrow CH = \frac{AC^2}{BC} \Leftrightarrow CH = \frac{(7,5)^2}{12,5} = 4,5cm \ ; \ \boxed{CH = 4,5cm}$$

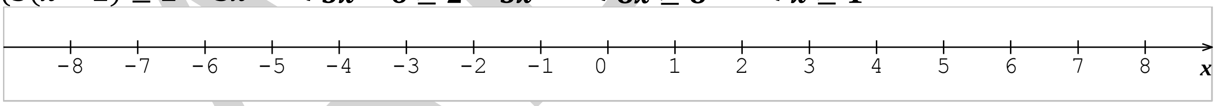
<u>EXERCICE 14</u> : Résolvons les systèmes suivants :

- $\begin{cases} 7 - 2x < 3 \\ 2x - 7 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x < 3 - 7 \\ 2x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x < -4 \\ 2x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq \frac{7}{2} \end{cases}$



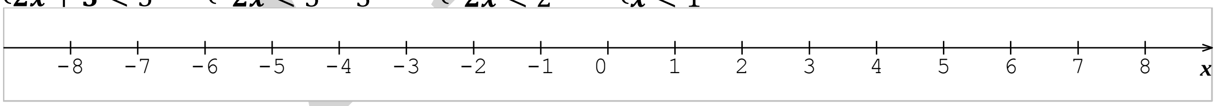
$$S =]2; 3,5]$$

- $\begin{cases} 2x + 3 < -3x - 2 \\ 3(x - 2) \geq 2 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3x < -2 - 3 \\ 3x - 6 \geq 2 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x < -5 \\ 8x \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$



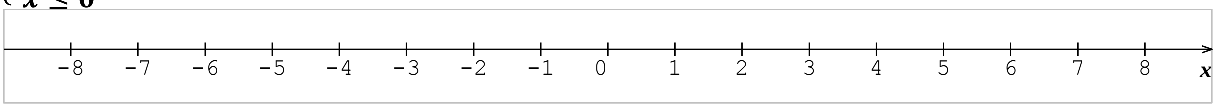
$$S = \emptyset$$

- $\begin{cases} 3 \leq x - 2 \\ 2x + 3 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \leq -2 - 3 \\ 2x < 5 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \leq -5 \\ 2x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x < 1 \end{cases}$



$$S = \emptyset$$

- $\begin{cases} -x - 2 < 2x + 1 \\ 5x - 3 \leq 1 - 2(2 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2x < 1 + 2 \\ 5x - 3 \leq 1 - 4 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x < 3 \\ 5x - 2x \leq 1 - 4 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > -3 \\ 3x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x > -1 \\ x \leq 0 \end{cases}$



$$S =]-1; 0]$$

<u>EXERCICE 15</u> : Résolvons graphiquement les systèmes suivants :

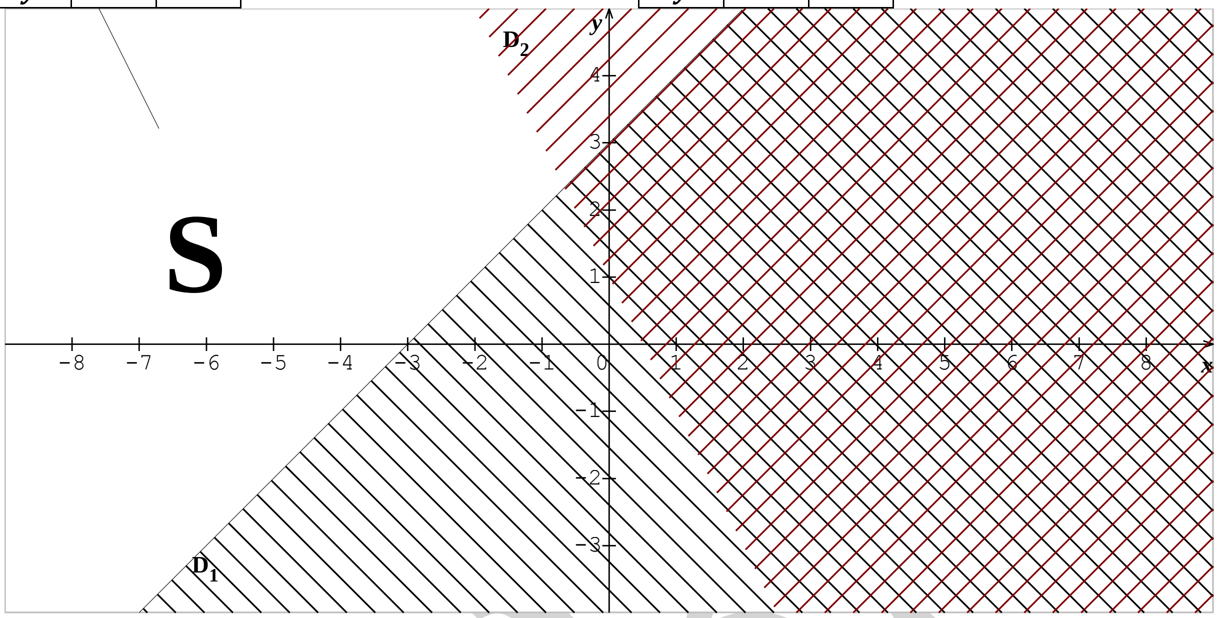
$$\begin{cases} x - y + 3 \leq 0 \\ 2x + y - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$D_1 : x - y + 3 = 0$

x	0	-3
y	3	0

$D_2 : 2x + y - 1 = 0$

x	0	-1
y	1	3



$$\begin{cases} x + 3y \leq 0 \\ -x + y \geq 0 \\ x + y - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$D_1 : x + 3y = 0$

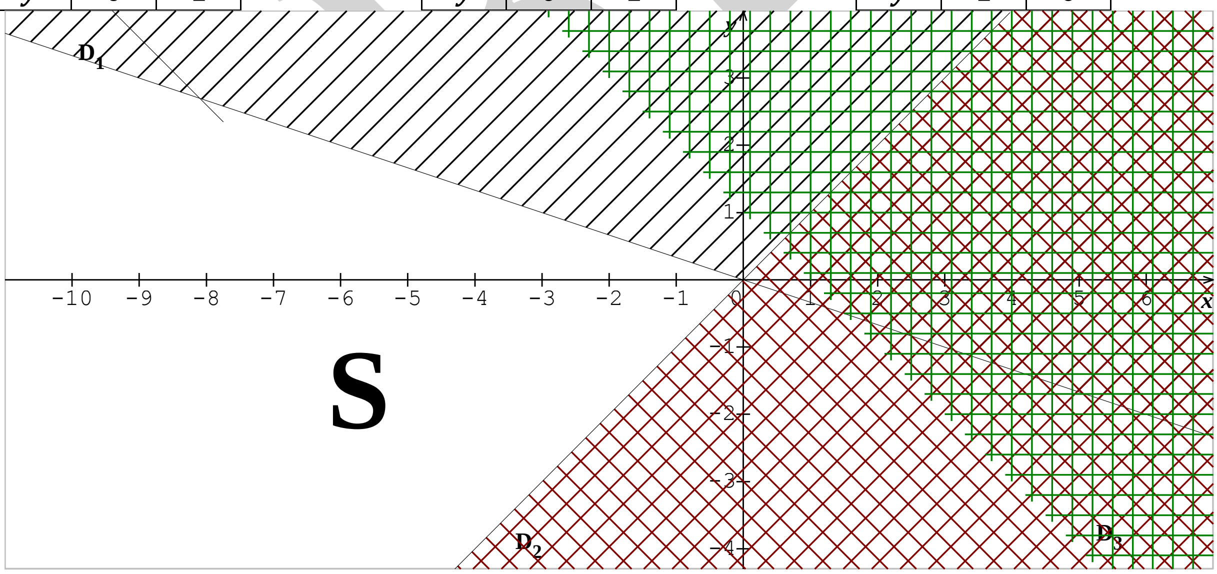
x	0	-3
y	0	1

$D_2 : -x + y = 0$

x	0	1
y	0	1

$D_3 : x + y - 1 = 0$

x	0	1
y	1	0



$$\begin{cases} x - 4y - 3 \geq 0 \\ 2x + y \geq 5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$D_1 : x - 4y - 3 = 0$

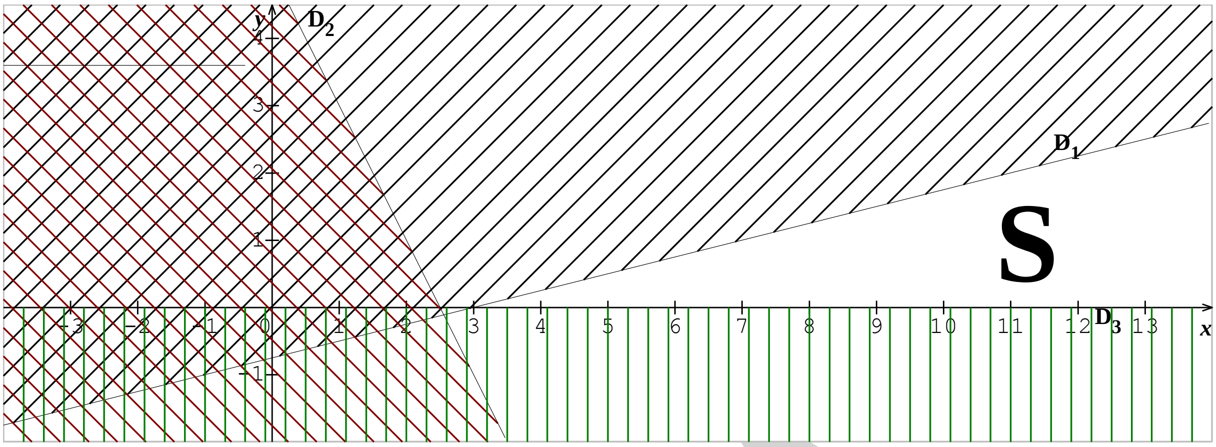
x	0	-1
y	3	-1

$D_2 : 2x + y = 5$

x	0	1
y	5	3

$D_3 : y = 0$

x	0	2
y	0	0



$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \\ -2x - 3y + 4 \geq 0 \end{cases}$$

D1 : $x = 0$

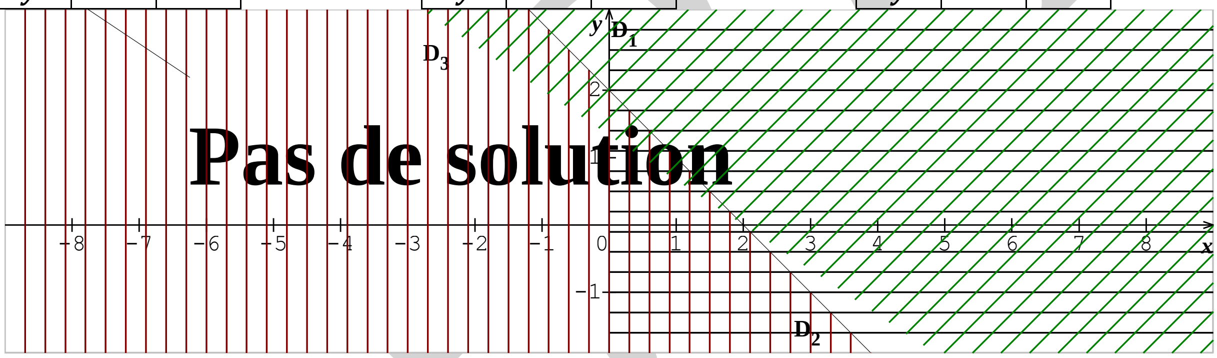
x	0	0
y	0	3

D2 : $x + y - 2 = 0$

x	0	2
y	2	0

D3 : $-2x - 3y + 4 = 0$

x	-1	2
y	2	0



QUELQUES SUJETS DE RÉVISION

Sujet 1 :

Algèbre :

$$f(x) = (x-3) - x^2 + 9 + (x-3)(2x-1) + (3x-9)(x+1)\ ;\ \ g(x) = x^2 - 9$$

1) **Factorisons $f(x)$ et $g(x)$**

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-3) - x^2 + 9 + (x-3)(2x-1) + (3x-9)(x+1) \\ &= (x-3) - \left(x^2 - 9\right) + (x-3)(2x-1) + (3x-9)(x+1) \\ &= (x-3) - (x-3)(x+3) + (x-3)(2x-1) + 3(x-3)(x+1) \\ &= (x-3)[1 - (x+3) + (2x-1) + 3(x+1)] \\ &= (x-3)(1 - x - 3 + 2x - 1 + 3x + 3) \\ &= (x-3)(4x) = 4x(x-3)\ ;\ \ f(x) = 4x(x-3) \end{aligned}$$

$g(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)\ ;\ \ g(x) = (x-3)(x+3)$

2) **Calculons :**

$f(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}(\sqrt{2} - 3)$

$g(-\sqrt{2}) = (\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 3) = (\sqrt{2})^2 - 3^2 = 2 - 9 = -7\ ;\ \ g(-\sqrt{2}) = -7$

3) **Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :**

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4x(x-3) = (x-3)(x+3) \Leftrightarrow 4x = x + 3 \Leftrightarrow 4x - x = 3 \Leftrightarrow x = 1\ ;\ \ S = \{1\}$

4) **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation**

$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow 4x(x-3) \geq (x-3)(x+3) \Leftrightarrow 4x \geq x + 3 \Leftrightarrow x \geq 1$

$$S = \{x / x \in \mathbb{R}; x \geq 1\}$$

Géométrie :

1) **Déterminons les composantes de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$:**

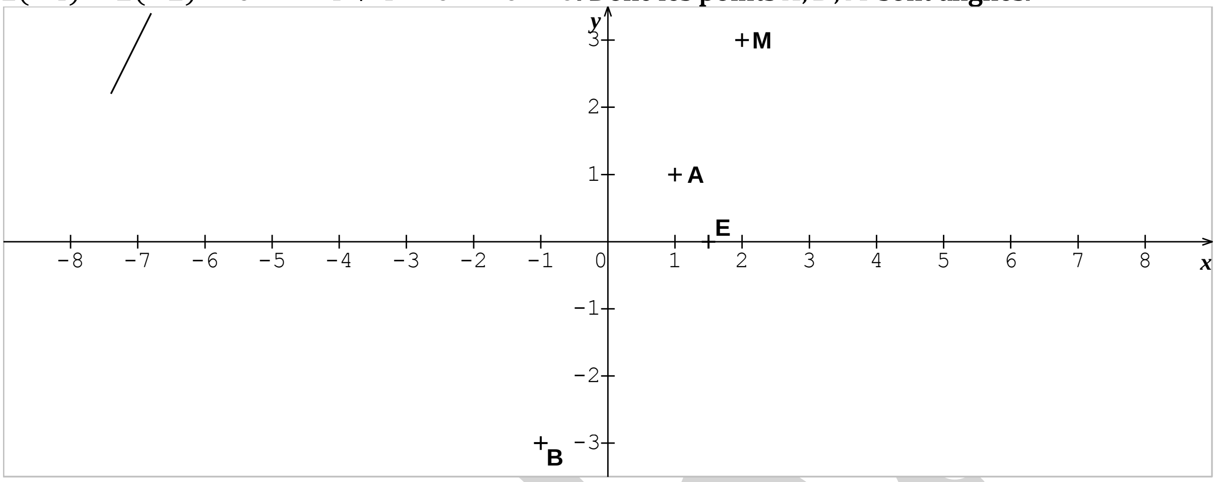
$$\overrightarrow{AM}\binom{x_M - x_A}{y_M - y_A} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\binom{2-1}{3-1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\binom{1}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\binom{-1-1}{-3-1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\binom{-2}{-4} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = -2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$$

Déduisons que les points A, B, M sont alignés :

$\overrightarrow{AB}\binom{X}{Y}; \overrightarrow{AM}\binom{X'}{Y'}$ **les points A, B, M sont alignés ssi : $XY' - X'Y = 0$ c'est-à-dire,**

$1(-4) - 2(-2) = 0 \Leftrightarrow -4 + 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$. **Donc les points A, B, M sont alignés.**



2) **Déterminons une équation de la droite (AB) :**

$$(AB): x_{\overrightarrow{AB}}(y - y_A) - y_{\overrightarrow{AB}}(x - x_A) = 0 \Leftrightarrow (-2)(y-1) - (-4)(x-1) = 0$$

$\Leftrightarrow -2y + 2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y - 2 = 0$ $\quad (AB): 2x - y - 1 = 0$

Déterminons une équation de la droite Δ passant par E et parallèle à (AB) :

$$\Delta: x_{\overrightarrow{AB}}(y - y_E) - y_{\overrightarrow{AB}}(x - x_E) = 0 \Leftrightarrow (-2)(y-0) - 4\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -2y + 4x - 6 = 0$$

$\Leftrightarrow 4x - 2y - 6 = 0$ $\quad \Delta: 2x - y - 3 = 0$

<u>Sujet 2</u> :

<u>Algèbre</u> :

1) **Soit x ce nombre :**

$x + \frac{1}{3}x = 1 \Leftrightarrow 3x + x = 3 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$. **Ce nombre est :** $\frac{3}{4}$

2) **Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système :**

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y = 1 \\ x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 3y = 12 & (1) \\ 2x + y = 6 & (2) \end{cases}$$

Eliminons y en multipliant l'équation (2) par 3 et en ajoutant membre à membre les deux nouvelles équations obtenues on a : $14x = 30 \Leftrightarrow x = \frac{30}{14} \Leftrightarrow x = \frac{15}{7}$

Eliminons x en multipliant l'équation (2) par -4 et en ajoutant membre à membre les deux nouvelles équations obtenues on a : $-7y = 12 - 24 \Leftrightarrow -7y = -12 \Leftrightarrow y = \frac{12}{7}$

$$S = \left\{\left(\frac{15}{7}; \frac{12}{7}\right)\right\}$$

3) **a°) Calculons a et b :**

$\begin{cases} 2a = 18b \\ b - a = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9b & (1) \\ b - a = 36 & (2) \end{cases}$ **Remplaçons a par $9b$ dans l'équation (2) on a :**

$$b - 9b = 36 \Leftrightarrow -8b = 36 \Leftrightarrow b = -\frac{36}{8} \Leftrightarrow b = -\frac{9}{2}$$

Remplaçons b par $-\frac{9}{2}$ dans l'équation (1) : $a = 9\left(-\frac{9}{2}\right) \Leftrightarrow a = -\frac{81}{2}$; $a = -\frac{81}{2}$

b°) Calculons a et b

$\begin{cases} 2a = 18b \\ a + b = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9b & (1) \\ a + b = 30 & (2) \end{cases}$ Remplaçons a par $9b$ dans l'équation (2) on a :

$$9b + b = 30 \Leftrightarrow 10b = 30 \Leftrightarrow b = 3 \ ; \ b = 3$$

Remplaçons b par 3 dans l'équation (1) : $a = 9(3) \Leftrightarrow a = 27 \ ; \ a = 27$

4) Calculons ces deux entiers :

$$\begin{cases} x + y - 3 = 2y \\ 2(x - y) = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2y = 3 \\ 2x - x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 & (1) \\ x = 2y + 1 & (2) \end{cases}$$

Remplaçons y par $x + 3$ dans l'équation (2) : $x = 2(x + 3) + 1 \Leftrightarrow x = 2x + 6 + 1 \Leftrightarrow x = -7$

Remplaçons x par -7 dans l'équation (1) : $y = -7 + 3 \Leftrightarrow y = -4$

Ces deux entiers sont : -7 et -4

5) Soit x ce nombre : $3x + 2 = 2x + 4 \Leftrightarrow 3x - 2x = 4 - 2 \Leftrightarrow x = 2$

6) Soit x le nombre d'oiseaux du groupe d'en bas et y celui d'en haut :

$$\begin{cases} x + 1 = 2(y - 1) \\ x - 1 = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 2y - 2 \\ x = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 3 & (1) \\ x = y + 2 & (2) \end{cases}$$

Replaçons x par $2y - 3$ dans l'équation (2) : $2y - 3 = y + 2 \Leftrightarrow 2y - y = 2 + 3 \Leftrightarrow y = 5$

Remplaçons y par 5 dans l'équation (1) : $x = 2(5) - 3 \Leftrightarrow x = 10 - 3 \Leftrightarrow x = 7$

Donc il y a 7 oiseaux en bas et 5 en haut.

7) Trouvons x et y :

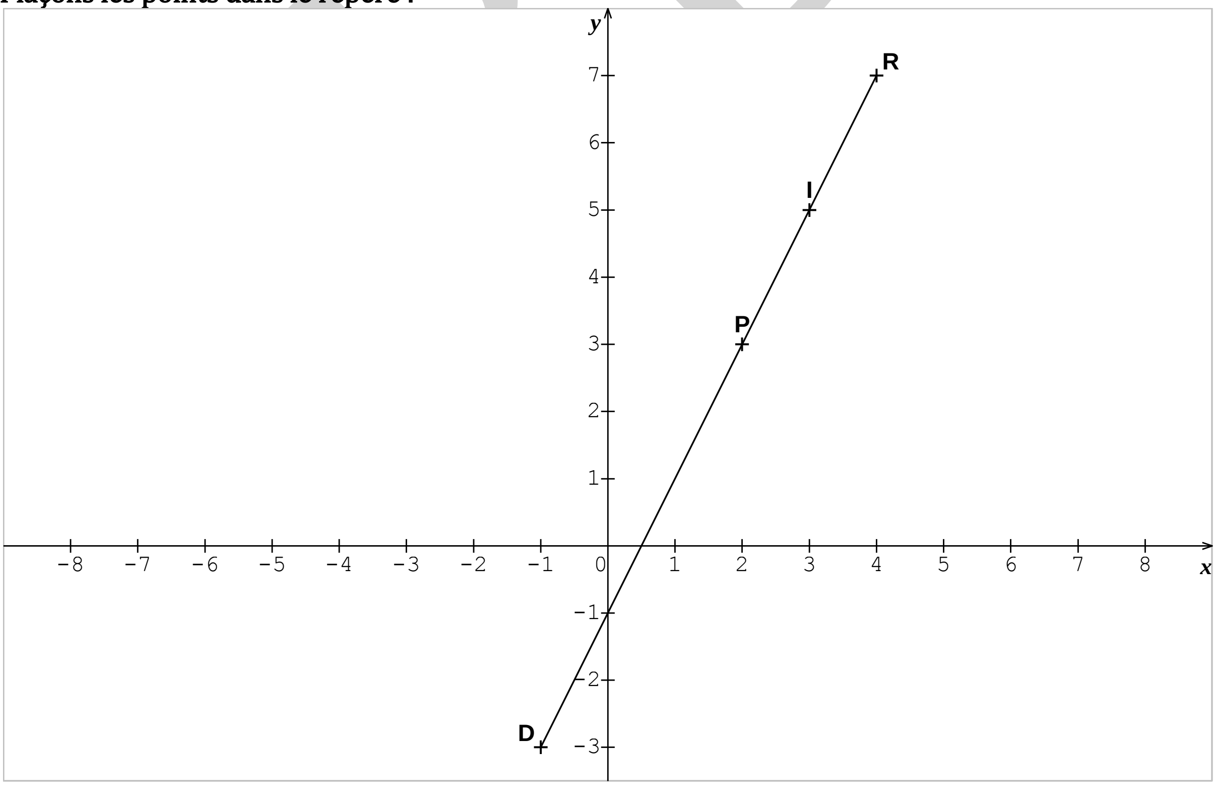
$\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$ Eliminons x en multipliant l'équation (1) par -3 et en ajoutant membre à membre les deux nouvelles équations obtenues : $-y = -5 \Leftrightarrow y = 5$

Eliminons y en multipliant l'équation (1) par -2 et en ajoutant membre à membre les deux nouvelles équations obtenues : $x = 3$

Ces deux nombres sont : 3 et 5

Géométrie :

1) Plaçons les points dans le repère :



2) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RD}$ et $\overrightarrow{RP}$:

$$\overrightarrow{RD}\begin{pmatrix} x_D - x_R \\ y_D - y_R \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{RD}\begin{pmatrix} -1 - 4 \\ -3 - 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{RD}\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix} \ ; \ \overrightarrow{RP}\begin{pmatrix} x_P - x_R \\ y_P - y_R \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{RP}\begin{pmatrix} 2 - 4 \\ 3 - 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{RP}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Les points R, D, P sont alignés car on a : $\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -10 & -4 \end{vmatrix} = (-5)(-4) - (-10)(-2) = 20 - 20 = 0$

3) Déterminons les coordonnées du point I milieu de $[RP]$

$$I\begin{pmatrix} \dfrac{x_R + x_P}{2} \\ \dfrac{y_R + y_P}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} \dfrac{4+2}{2} \\ \dfrac{7+3}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

<u>Sujet 3</u> :

<u>Algèbre</u> :

<u>EXERCICE 1</u> : a) Les couples de E qui sont éléments de A sont :

Pour le couple $\left(\frac{5}{3};0\right)$ on a : $3\left(\frac{5}{3}\right) - 4(0) = 5 \Leftrightarrow 5 = 5$ vrai donc $\left(\frac{5}{3};0\right) \in A$

Pour le couple (2 ; -4) on a : $3(2) - 4(-4) = 5 \Leftrightarrow 6 + 16 = 5 \Leftrightarrow 22 = 5$ faux, donc $(2;-4) \notin A$

Pour le couple (3 ; 1) on a : $3(3) - 4(1) = 5 \Leftrightarrow 9 - 4 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5$ vrai, donc $(3;1) \in A$

$$A = \left\{\left(\frac{5}{3};0\right);(3;1)\right\}$$

b°) Calculons x : $3x - 4\left(\frac{1}{4}\right) = 5 \Leftrightarrow 3x - 1 = 5 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

<u>EXERCICE 2</u> : $f(x) = -3x + 1$ et $g(x) = ax + b$

1. Déterminons a et b :

$$g(-3) = 17 \Leftrightarrow -3a + b = 17 \ \ (1); \ \ g(1) = -3 \Leftrightarrow a + b = -3 \ \ (2)$$

En résolvant le système formé par les équations (1) et (2) on trouve : $a = -5$ et $b = 2$

Donc $g(x) = -5x + 2$

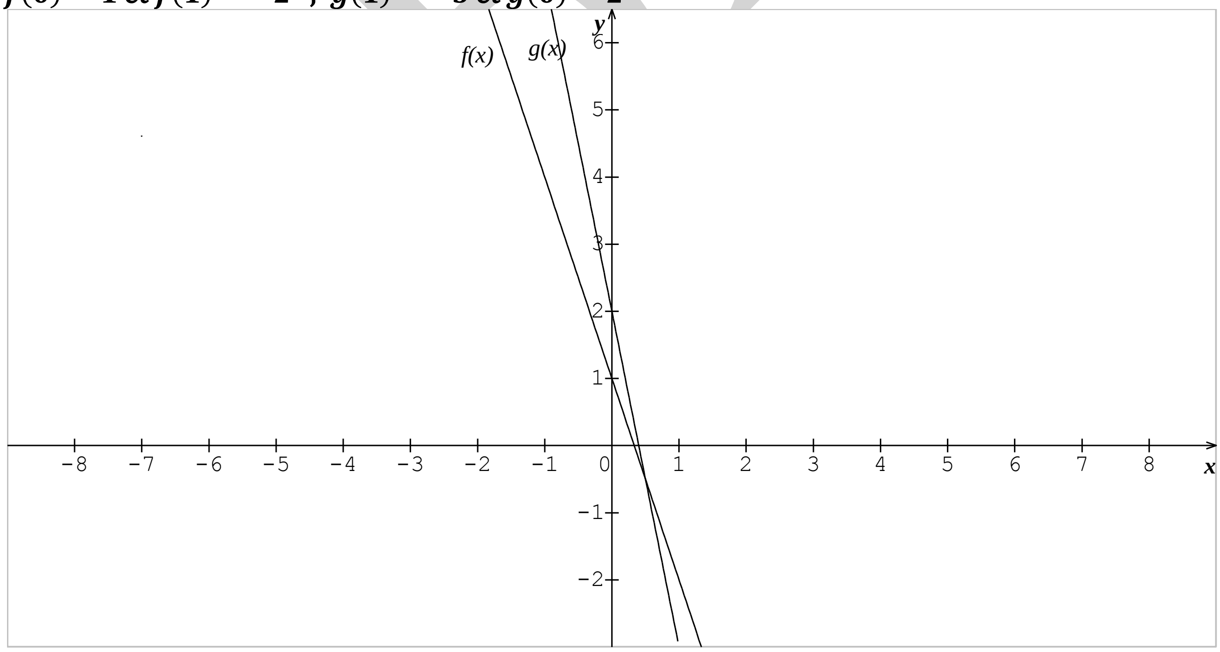
2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $g(x) = 3f(x) \Leftrightarrow -5x + 2 = 3(-3x + 1)$

$$\Leftrightarrow -5x + 2 = -9x + 3 \Leftrightarrow 9x - 5x = 3 - 2 \Leftrightarrow 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \ ; \ S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

$$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow -3x + 1 \leq -5x + 2 \Leftrightarrow 5x - 3x \leq 2 - 1 \Leftrightarrow 2x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

3. Représentons graphiquement les applications f et g.

$f(0) = 1$ et $f(1) = -2$; $g(1) = -3$ et $g(0) = 2$



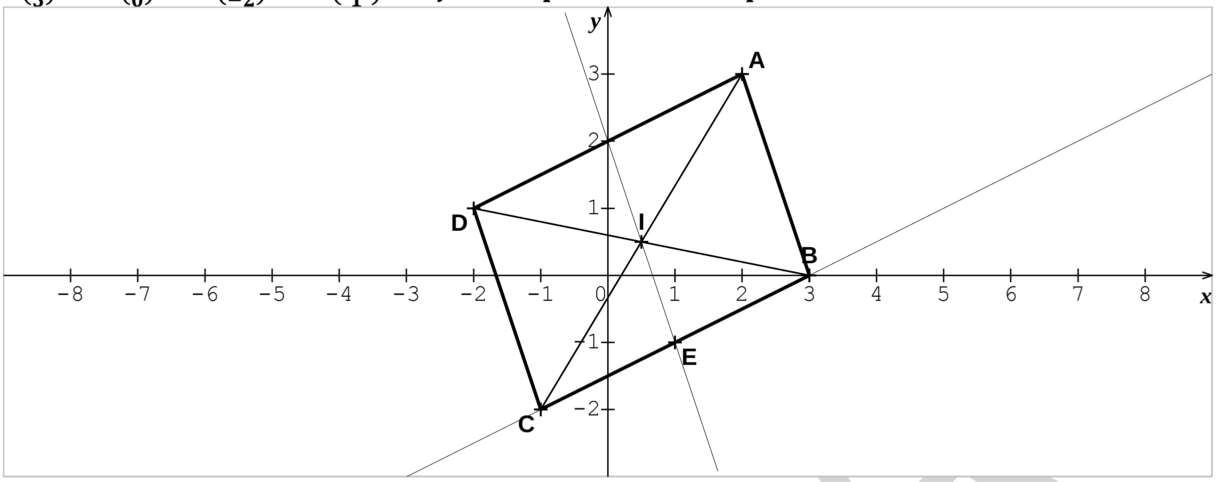
<u>EXERCICE 3</u> : Soit x le prix d'un lot d'orange et y celui d'un paquet de carottes :

$$\begin{cases} \dfrac{24}{6}x + \dfrac{15}{5}y = 275 \\ \dfrac{42}{6}x + \dfrac{20}{5}y = 450 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 275 \\ 7x + 4y = 450 \end{cases}$$

En résolvant ce système on trouve $x = 50F$ et $y = 25F$

Géométrie :

1. $A\binom{2}{3}$; $B\binom{3}{0}$; $C\binom{-1}{-2}$; $D\binom{-2}{1}$. Plaçons ces points dans le repère.



2. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -1+2 \\ -2-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$).

3. Calculons les coordonnées de I.
I est le milieu des segments $[AC]$ et $[BD]$ donc on a :

$$I\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} \dfrac{2-1}{2} \\ \dfrac{3-2}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. Trouvons une équation de la droite (BC)

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1-3 \\ -2-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Une équation de la droite (BC) est :

$$(BC): x_{\overrightarrow{BC}}(y - y_B) - y_{\overrightarrow{BC}}(x - x_B) = 0 \Leftrightarrow (BC): (-4)(y-0) - (-2)(x-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow -4y + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow (BC): 2x - 4y - 6 = 0 \Leftrightarrow (BC): x - 2y - 3 = 0$$

Une équation de Δ parallèle à (AB) et passant par I :

$$\Delta: x_{\overrightarrow{AB}}(y - y_I) - y_{\overrightarrow{AB}}(x - x_I) = 0 \Leftrightarrow \Delta: 1\left(y - \frac{1}{2}\right) — 3\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \Delta: y - \frac{1}{2} + 3x - \frac{3}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta: 3x + y - 2 = 0$$

5. Les coordonnées de $E = \Delta \cap (BC)$:
$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases}$ En résolvant ce système on aura $x = 1$ et $y = -1$, donc $E(1; -1)$

Sujet 4 :

Algèbre :

EXERCICE 1 : Les éléments de E qui sont éléments de A sont :

Pour le couple $(\frac{4}{3}; \frac{8}{9})$ on a :$5\left(\frac{4}{3}\right) - 3\left(\frac{8}{9}\right) = 4 \Leftrightarrow \frac{20}{3} - \frac{8}{3} = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$ vrai donc $\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{9}\right) \in A$

Pour le couple $(0; 5)$ on a :$5(0) - 3(5) = 4 \Leftrightarrow -15 = 4$ faux donc $(0; 5) \notin A$

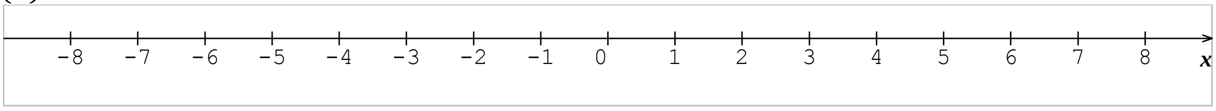
Pour le couple $(-1; -3)$ on a :$5(-1) - 3(-3) = 4 \Leftrightarrow -5 + 9 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$ vrai donc $(-1; -3) \in A$.

$$A = \left\{\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{9}\right); (-1; -3)\right\}$$

EXERCICE 2 : Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} 3x - 3 \leq 7(x+3) & (1) \\ 8x - (2x - 3) \leq 5x + 3 & (2) \end{cases}$

$(1) \Longrightarrow 3x - 3 \leq 7x + 21 \Leftrightarrow 3x - 7x \leq 21 + 3 \Leftrightarrow -4x \leq 24 \Leftrightarrow 4x \geq -24 \Leftrightarrow x \geq -6$

$(2) \Longrightarrow 8x - 2x + 3 \leq 5x + 3 \Leftrightarrow 8x - 2x - 5x \leq 3 - 3 \Leftrightarrow x \leq 0$



$$S = [-6; 0]$$

<u>EXERCICE 3</u> : $f(x) = -2x + 3$ et $g(x) = ax + b$

1. Déterminons a et b sachant que : $g(-2) = 7$ et $g(5) = -14$

$$a = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{7 - (-14)}{-2 - 5} = -\frac{21}{7} = -3 \ ; \ a = -3 \Leftrightarrow g(x) = -3x + b$$

$g(-2) = 7 \Leftrightarrow -3(-2) + b = 7 \Leftrightarrow 6 + b = 7 \Leftrightarrow b = 1 \ ; \ b = 1$. Donc $g(x) = -3x + 1$

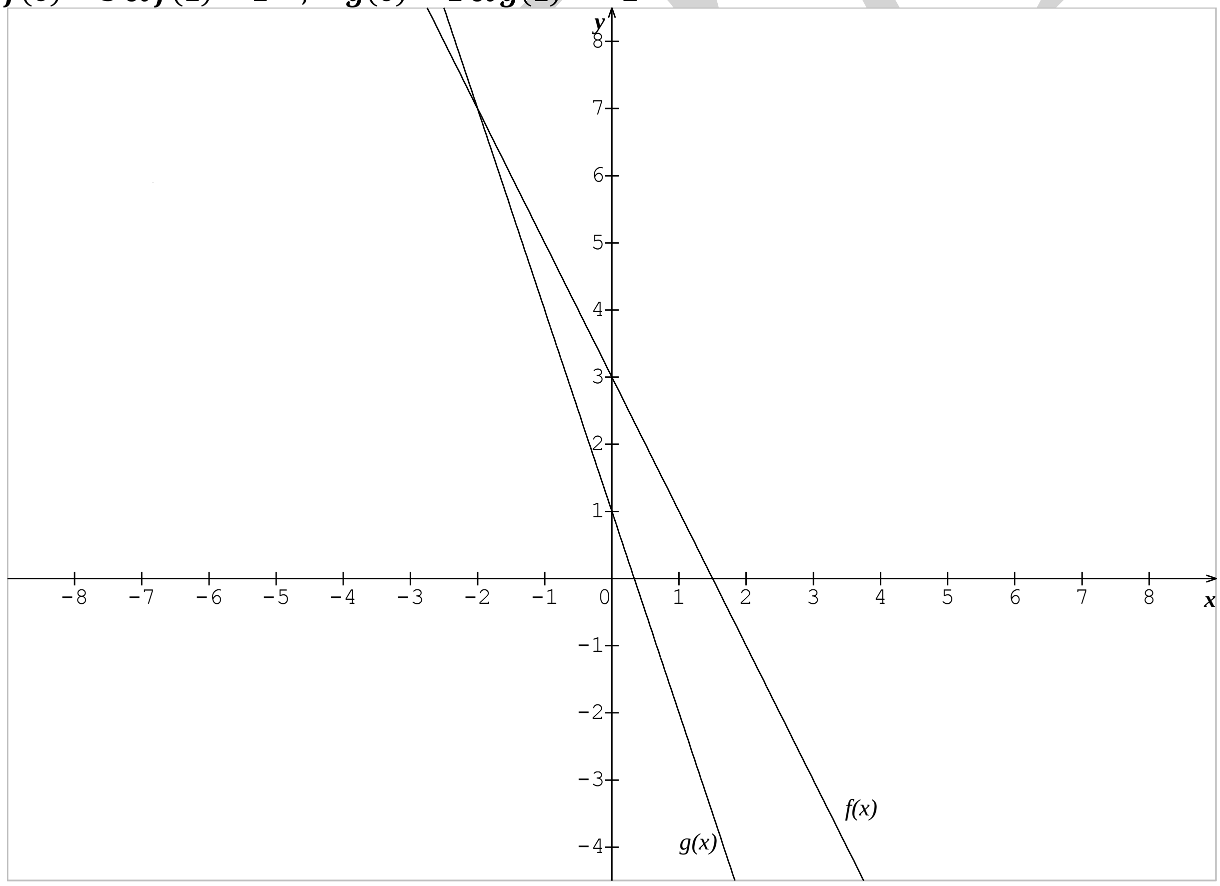
2. Résolvons dans $\mathbb{R}$:

$$g(x) = 2f(x) \Leftrightarrow -3x + 1 = 2(-2x + 3) \Leftrightarrow -3x + 1 = -4x + 6 \Leftrightarrow -3x + 4x = 6 - 1$$
$$\Leftrightarrow x = 5 \ ; \ S = \{5\}$$

$$f(x) \leq -g(x) \Leftrightarrow -2x + 3 \leq -(-3x + 1) \Leftrightarrow -2x + 3 \leq 3x - 1 \Leftrightarrow -2x - 3x \leq -1 - 3$$
$$\Leftrightarrow -5x \leq -4 \Leftrightarrow 5x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{5} \ ; \ S = \left\{x/x \in \mathbb{R} \ et \ x \geq \frac{4}{5}\right\}$$

3. Représentons graphiquement $f(x)$ et $g(x)$:

$f(0) = 3$ et $f(1) = 1$; $g(0) = 1$ et $g(1) = -2$



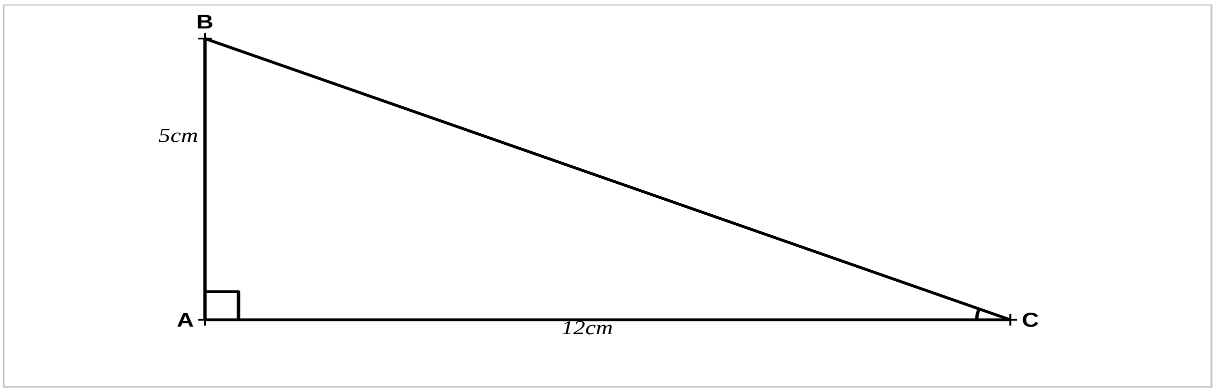
<u>Géométrie</u> :

<u>EXERCICE 1</u> : Construisons ce triangle :

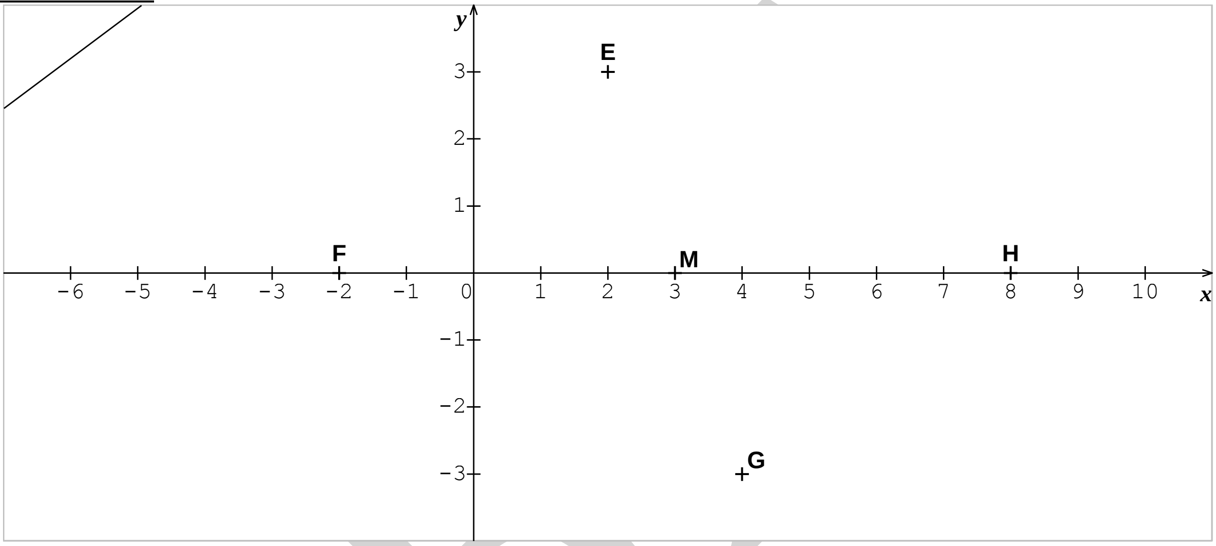
Calculons BC et $\cos \widehat{B}$. Utilisons le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \Leftrightarrow BC = \sqrt{169} = 13 \ ; \ BC = 13cm$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13} = 0,3846 \ ; \ \cos \widehat{B} = 0,3846$$



EXERCICE 2 :



1. **Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{GE}$**

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -2-2 \\ 0-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \;;\; \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} x_G - x_F \\ y_G - y_F \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} 4+2 \\ 0-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix} x_E - x_G \\ y_E - y_G \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{GE}\begin{pmatrix} 2-4 \\ 3+3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{GE}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. **Calculons les coordonnées de M milieu de $[EG]$**

$$M\begin{pmatrix} \frac{x_E + x_G}{2} \\ \frac{y_E + y_G}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} \frac{2+4}{2} \\ \frac{3-3}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons les coordonnées de H tel que : $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$

$$x_H - x_F = (x_E - x_F) + (x_G - x_F) \Leftrightarrow x_H + 2 = 4 + 6 \Leftrightarrow x_H = 4 + 6 - 2 = 8 \;;\; x_H = 8$$

$$y_H - y_F = (y_E - y_F) + (y_G - y_F) \Leftrightarrow y_H = 3 - 3 \Leftrightarrow y_H = 0 \;;\; y_H = 0 \;;\; H\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. **Trouvons une équation de la droite (EF) :**

$$(EF): x_{\overrightarrow{EF}}(y - y_E) - y_{\overrightarrow{EF}}(x - x_E) = 0 \Leftrightarrow (EF): -4(y-3) — 3(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (EF): -4y + 12 + 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow (EF): 3x - 4y + 6 = 0$$

Sujet 5 :

Algèbre :

EXERCICE 1 : Soit a et b ces deux entiers $(a > b)$:

$$\begin{cases} a + b = 320 & (1) \\ a = 3b + 8 & (2) \end{cases}$$ **En résolvant ce système on aura : $a = 242$ et $b = 78$**

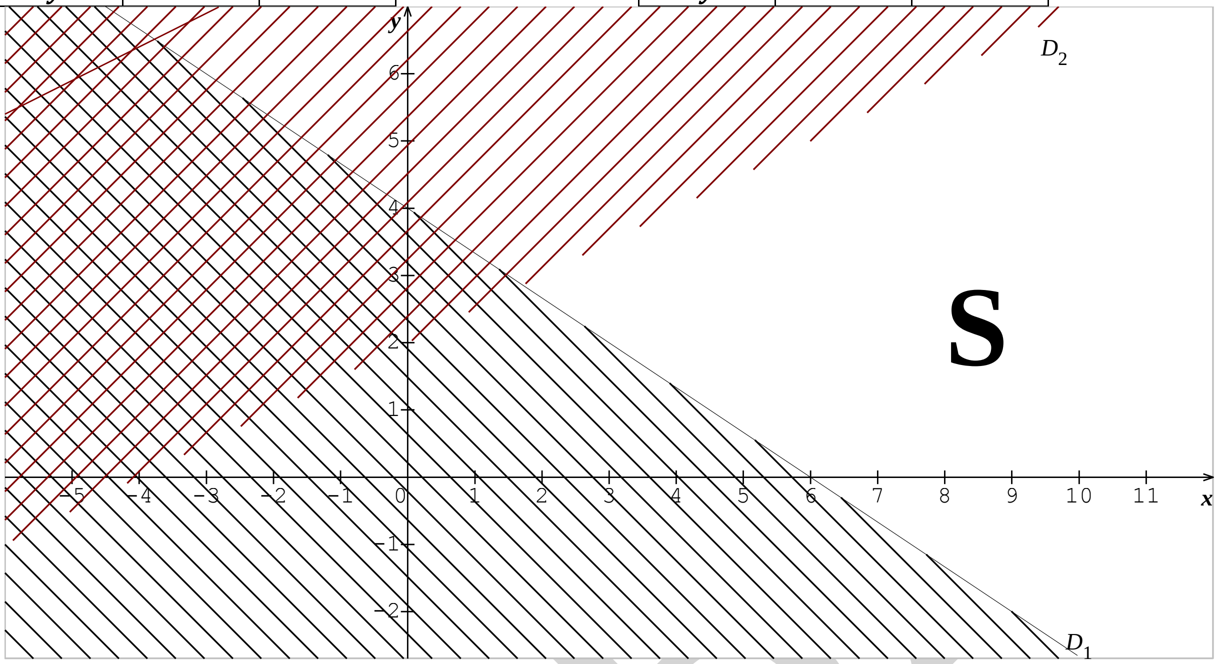
EXERCICE 2 :

$D_1 : 2x + 3y - 12 = 0$

x	0	6
y	4	0

$D_2 : x - 2y + 4 = 0$

x	0	-4
y	2	0



EXERCICE 3 : Déterminons l'application affine du type $y = ax + b$:

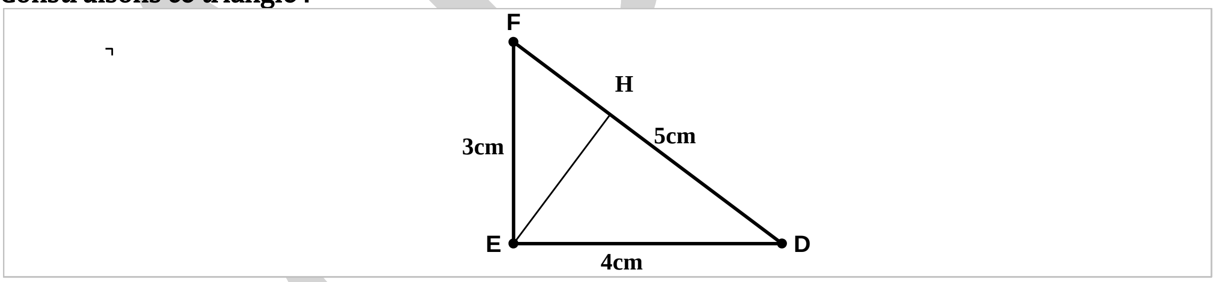
$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{9-1}{2-(-2)} = \frac{8}{4} = 2 \ ; \ a = 2$$

$y = 2x + b$, pour $x = 2$ alors $y = 9$ c'est-à-dire $4 + b = 9 \Leftrightarrow b = 9 - 4 \Leftrightarrow b = 5$ donc $y = 2x + 5$

Géométrie :

EXERCICE 1 :

a. Construisons ce triangle :



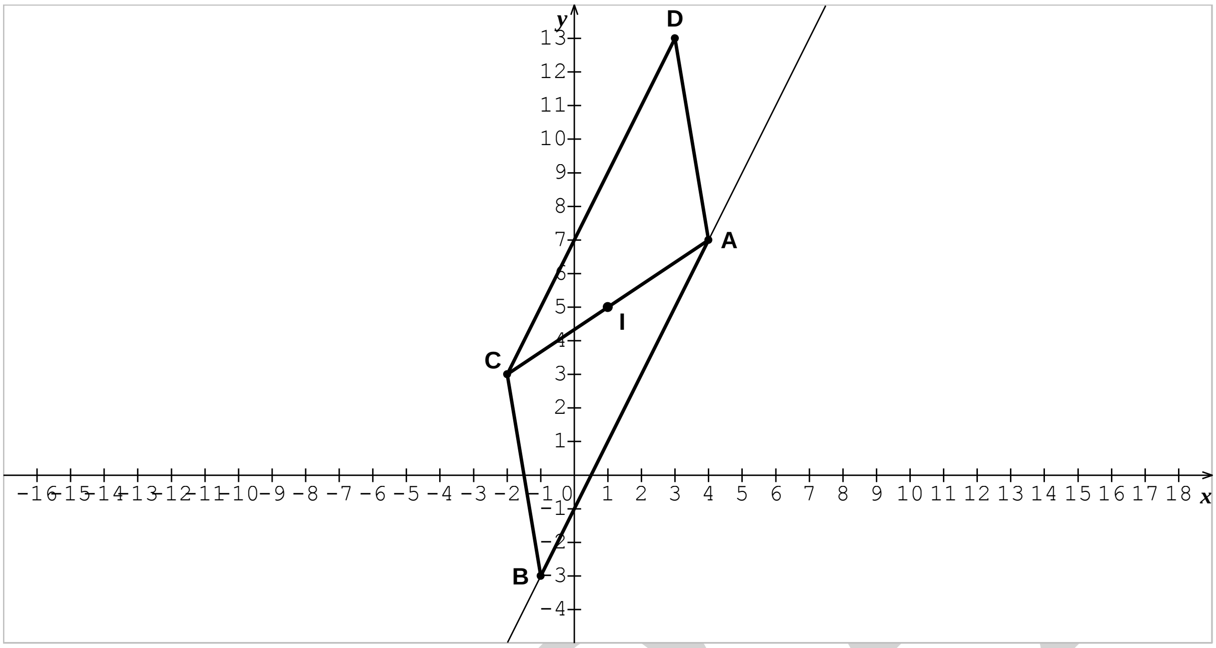
Montrons que ce triangle est rectangle :
D'après la réciproque du théorème de Pythagore on a :
$DF^2 = EF^2 + DE^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + 16 \Leftrightarrow 25 = 25$. Donc DEF est un triangle rectangle en E.

b. Calculons DH et HF :
D'après les relations métriques dans le triangle DEF rectangle en E on a :

$$DE^2 = DF \times DH \Leftrightarrow DH = \frac{DE^2}{DF} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5} = 3,2 \ ; \ DH = 3,2cm$$

$$EF^2 = DF \times FH \Leftrightarrow FH = \frac{EF^2}{DF} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5} = 1,8 \ ; \ HF = 1,8cm$$

EXERCICE 2 : 1°) Plaçons ces points dans le repère (voir figure).



2°) Calculons les coordonnées de I milieu de $[AC]$.

$$I\begin{pmatrix}\dfrac{x_A + x_C}{2}\\ \dfrac{y_A + y_C}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix}\dfrac{4+(-2)}{2}\\ \dfrac{7+3}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

3°) Trouvons les coordonnées du point D :

$ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c'est-à-dire :

$$x_B - x_A = x_C - x_D \; et \; y_B - y_A = y_C - y_D \Leftrightarrow -1 - 4 = -2 - x_D \; et \; -3 - 7 = 3 - y_D$$

$\Leftrightarrow x_D = 3 \; et \; y_D = 13$. Donc $D(3; 13)$

4°) Trouvons une équation de la droite (AB) :

$$(AB): x_{\overrightarrow{AB}}(y - y_A) - y_{\overrightarrow{AB}}(x - x_A) = 0 \Leftrightarrow (AB): -5(y-7) - (-10)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (AB): -5y + 35 + 10x - 40 = 0 \Leftrightarrow (AB): 10x - 5y - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (AB): 2x - y - 1 = 0$$

Sujet 6 :

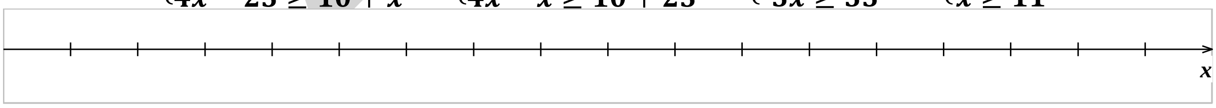
Algèbre :

EXERCICE 1: Soit x le nombre de livres dont l'épaisseur fait 5cm et y ceux dont l'épaisseur fait 3cm

$\begin{cases} x + y = 20 \\ 5x + 3y = 76 \end{cases}$ En résolvant ce système on a : $x = 8$ et $y = 12$

EXERCICE 2 : Résolvons les systèmes :

$$\begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5x \leq 13 + 8 \\ 4x - x \geq 10 + 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x \leq 21 \\ 3x \geq 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x \geq 11 \end{cases}$$



$$S = [11; +\infty[$$

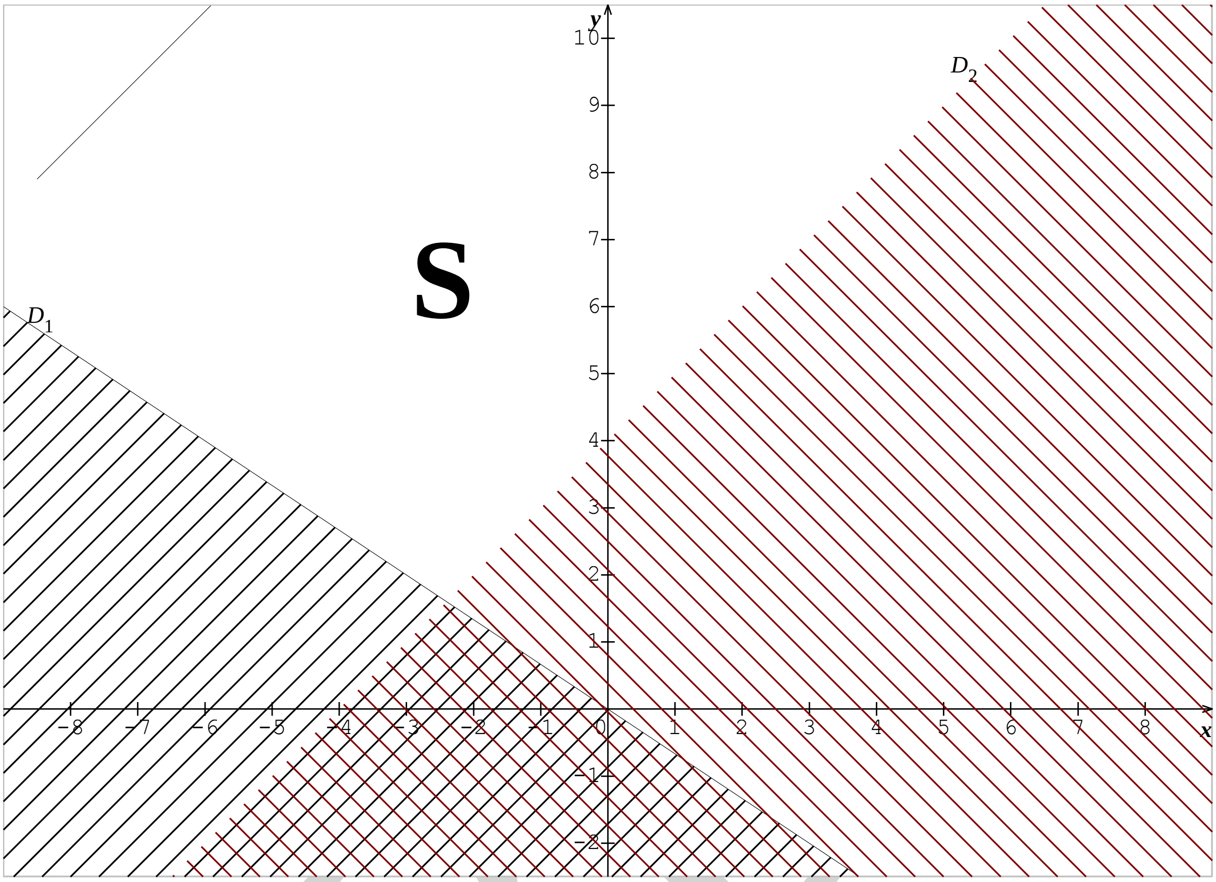
$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 0 \\ x - 2y + 4 \leq 0 \end{cases}$$

D1 : $2x + 3y = 0$

x	0	-3
y	0	2

D2 : $x - 2y + 4 = 0$

x	0	-4
y	2	0



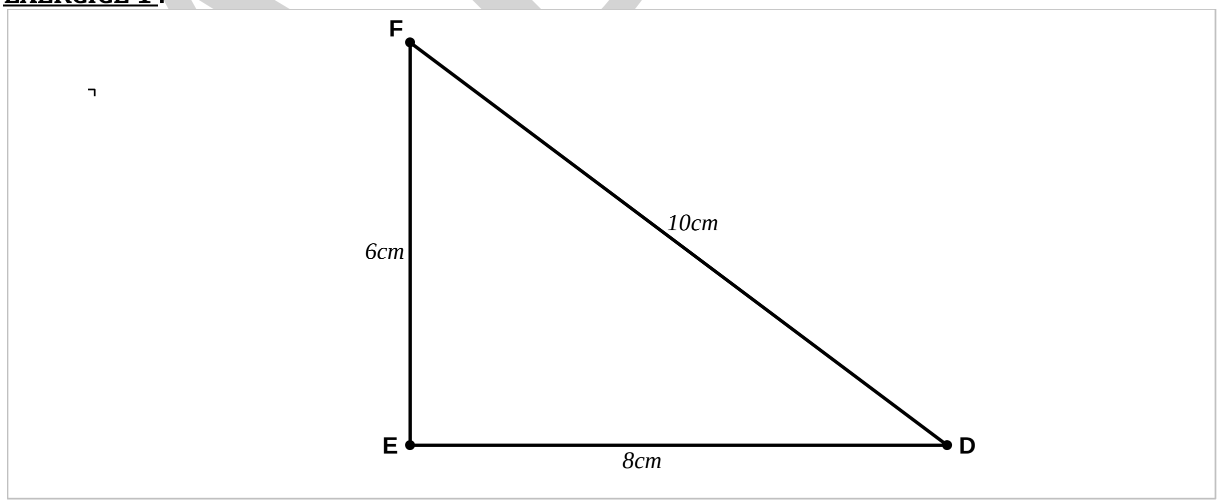
<u>EXERCICE 3</u> : Déterminons $f(x) = ax + b$:

$$f(-2) = 7 \Leftrightarrow -2a + b = 7 \quad (1); \quad f(5) = -14 \Leftrightarrow 5a + b = -14 \quad (2)$$

En résolvant le système formé par les équations (1) et (2) on a : $a = -3$ et $b = 1$. Donc $f(x) = -3x + 1$

Géométrie :

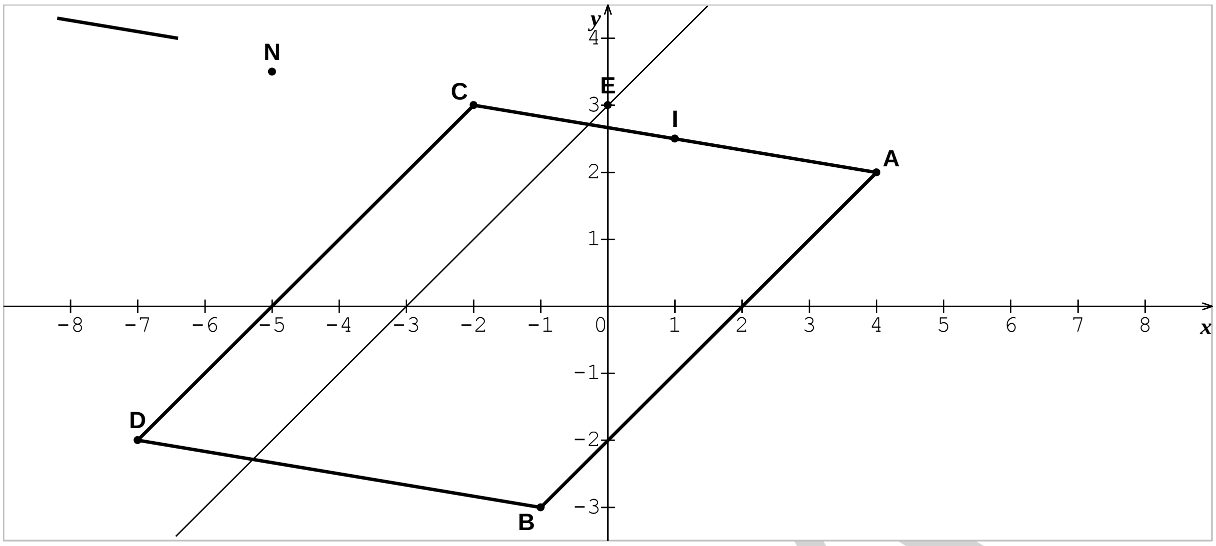
<u>EXERCICE 1</u> :



D'après la réciproque du théorème de Pythagore :
$DF^2 = EF^2 + DE^2 \Leftrightarrow 10^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow 100 = 36 + 64 \Leftrightarrow 100 = 100$. Donc le triangle DEF est un triangle rectangle en E.

$$\cos \widehat{D} = \frac{DE}{DF} = \frac{8}{10} = 0,8 \ ; \ \sin \widehat{D} = \frac{EF}{DF} = \frac{6}{10} = 0,6$$

<u>EXERCICE 2</u> : 1°) Calculons les coordonnées des vecteurs :



$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-4 \\ -3-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} \ ; \ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2-4 \\ 3-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2-(-1) \\ 3-(-3) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2°) Calculons les coordonnées de I milieu de $[AC]$

$$I\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} \dfrac{4+(-2)}{2} \\ \dfrac{2+3}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de N symétrique de I par rapport C, c'est dire : $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{CN}$

$$x_C - x_I = x_N - x_C \Leftrightarrow -2-1 = x_N-(-2) \Leftrightarrow x_N = -2-1-2 \Leftrightarrow x_C = -5$$

$$y_C - y_N = y_N - y_C \Leftrightarrow 3 - \frac{5}{2} = y_N - 3 \Leftrightarrow y_N = 3 - \frac{5}{2} + 3 \Leftrightarrow y_N = \frac{7}{2}.\ Donc\ N\begin{pmatrix} -5 \\ \dfrac{7}{2} \end{pmatrix}$$

3°) Trouvons les coordonnées de D : $ABDC$ est un parallélogramme ssi : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$$x_B - x_A = x_D - x_C \Leftrightarrow -5 = x_D — 2 \Leftrightarrow x_D = -7$$

$$y_B - y_A = y_D - y_C \Leftrightarrow -5 = y_D - 3 \Leftrightarrow y_D = -2.\ Donc\ D\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4°) Déterminons une équation de la droite Δ :

$$\Delta: x_{AB}(y - y_E) - y_{AB}(x - x_E) = 0 \Leftrightarrow \Delta: -5(y-3) — 5(x-0) = 0 \Leftrightarrow \Delta: -5y + 15 + 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta: x - y + 3 = 0$$

5°) Montrons par les calculs que les points A, C, I sont alignés :

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \quad ; \quad \overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} -3 \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{matrix} X' \\ Y' \end{matrix}$$

Ces points sont alignés ssi : $XY' = X'Y \Leftrightarrow (-6)\left(\frac{1}{2}\right) = (-3)(1) \Leftrightarrow -3 = -3$. Donc les points A, C, I sont alignés.

<u>Sujet 7</u> :

<u>Algèbre</u> :

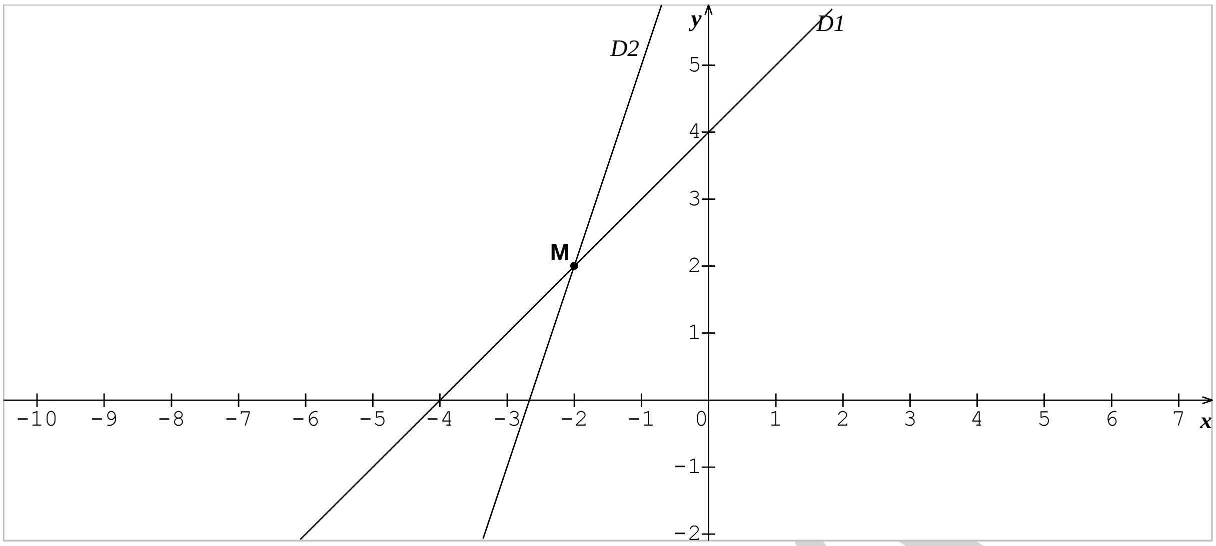
<u>EXERCICE 1</u> : Les coordonnées du point $M = D1 \cap D2$:

$$\begin{cases} y = x + 4 & (1) \\ y = 3x + 8 & (2) \end{cases}$$ Remplaçons y par $x + 8$ dans l'équation (2) :

$$x + 4 = 3x + 8 \Leftrightarrow 3x - x = 4 - 8 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$$

Remplaçons x par -2 dans l'équation (1) :

$$y = -2 + 4 \Leftrightarrow y = 2.\ Donc\ M\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



EXERCICE 2 :

D₁ : $x = 2$

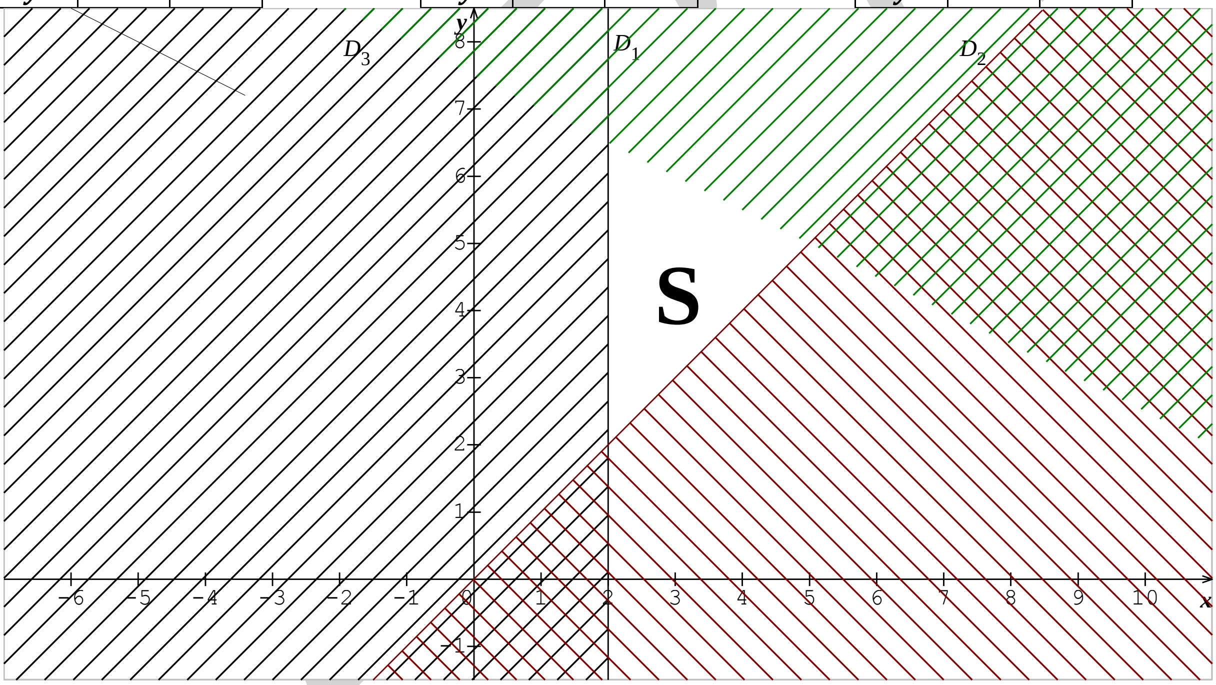
x	2	2
y	0	2

D₂ : $y = x$

x	0	1
y	0	1

D₃ : $2y = -x + 15$

x	1	3
y	7	6



EXERCICE 3 : Soit x l'âge actuel du père et y celui du fils :

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + 15 = 2(y + 15) \end{cases}$$

En résolvant ce système on trouve : $x = 45$ et $y = 15$. Donc le père a 45 ans et le fils 15 ans.

Géométrie :

1°) Ecrivons les équations des droites supports des côtés du triangle ABC.

$$(AB): (x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

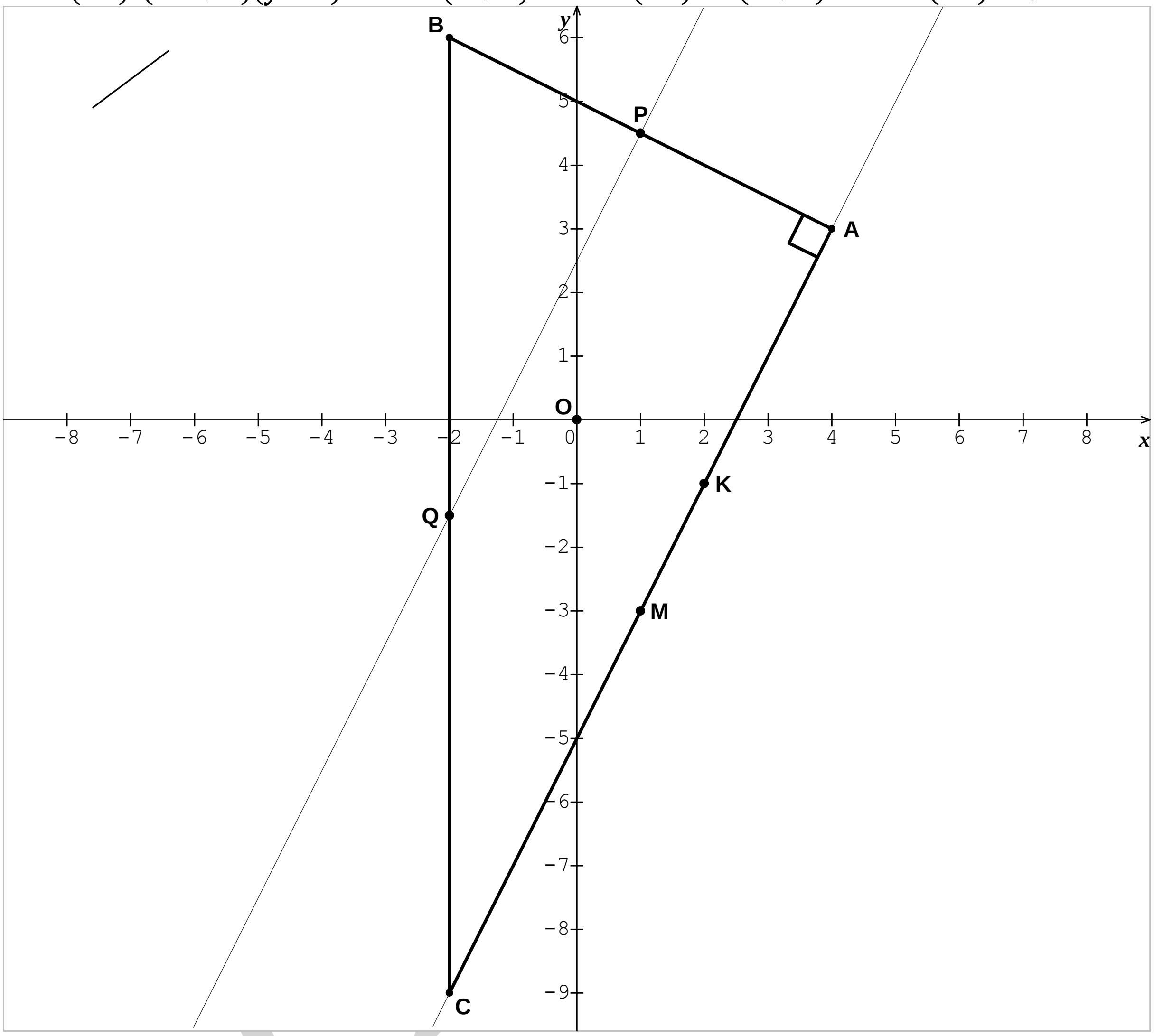
$$\Leftrightarrow (AB): (-2 - 4)(y - 3) - (6 - 3)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow (AB): -6(y - 3) - 3(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (AB): -2(y - 3) - (x - 4) = 0 \Leftrightarrow (AB): -x - 2y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (AB): x + 2y - 10 = 0$$

$$(AC): (x_C - x_A)(y - y_A) - (y_C - y_A)(x - x_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow (AC): (-2-4)(y-3)-(-9-3)(x-4)=0 \Leftrightarrow (AC): -6(y-3)+12(x-4)=0$$
$$\Leftrightarrow (AC): -(y-3)+2(x-4)=0 \Leftrightarrow (AC): -y+3+2x-8=0$$
$$\Leftrightarrow (AC): 2x-y-5=0$$
$$(BC): (x_C-x_B)(y-y_B)-(y_C-y_B)(x-x_B)=0$$
$$\Leftrightarrow (BC): (-2+2)(y-6)—9-6(x+2)=0 \Leftrightarrow (BC): 15(x+2)=0 \Leftrightarrow (BC): x+2=0$$



2°) Calculons AB, AC, BC :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-6)^2+3^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}\ ;\ AB=\sqrt{45}$$
$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(-6)^2+(-12)^2}=\sqrt{36+144}=\sqrt{180}\ ;\ AC=\sqrt{180}$$
$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(0)^2+(-15)^2}=\sqrt{15^2}=15\ ;\ BC=15$$

En déduisons la nature du triangle ABC. D'après la réciproque du théorème de Pythagore on a :

$$BC^2=AB^2+AC^2 \Leftrightarrow 15^2=\sqrt{45}^2+\sqrt{180}^2 \Leftrightarrow 225=45+180 \Leftrightarrow 225=225.$$

Donc ABC est un triangle rectangle en A.

3°) Vérifions :

Pour $K(2;-1)$ on a : $2(2)-(-1)-5=0 \Leftrightarrow 4+1-5=0 \Leftrightarrow 0=0$. Donc $K\in(AC)$

Pour $M(1;-3)$ on a : $2(1)-(-3)-5=0 \Leftrightarrow 2+3-5=0 \Leftrightarrow 0=0$. Donc $M\in(AC)$

4°) Calculons les coordonnées des points P et Q

$$P\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\ \frac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow P\begin{pmatrix}\frac{4-2}{2}\\ \frac{3+6}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow P\begin{pmatrix}1\\ \frac{9}{2}\end{pmatrix}\ ;\ Q\begin{pmatrix}\frac{x_B+x_C}{2}\\ \frac{y_B+y_C}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow Q\begin{pmatrix}\frac{-2-2}{2}\\ \frac{6-9}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow Q\begin{pmatrix}-2\\ \frac{-3}{2}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} -2-1 \\ \frac{-3}{2} - \frac{9}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Ecrivons l'équation de la droite qui contient P et Q

$$(PQ): x_{\overrightarrow{PQ}}(y - y_Q) - y_{\overrightarrow{PQ}}(x - x_Q) = 0 \Leftrightarrow (PQ): (-3)\left(y + \frac{3}{2}\right) - 6(x+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (PQ): -\left(y + \frac{3}{2}\right) + 2(x+2) = 0 \Leftrightarrow (PQ): 2x - y + 4 - \frac{3}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow (PQ): 2x - y + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow (PQ): y = 2x + \frac{5}{2}$$

La droite (PQ) et la droite (AC) : y=2x-5 ont même coefficient directeur (2=2).

5°) Démontrons que les points A, O, Q sont alignés :

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \quad ; \quad \overrightarrow{OQ}\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{-3}{2} \end{pmatrix}\begin{matrix} X' \\ Y' \end{matrix}$$

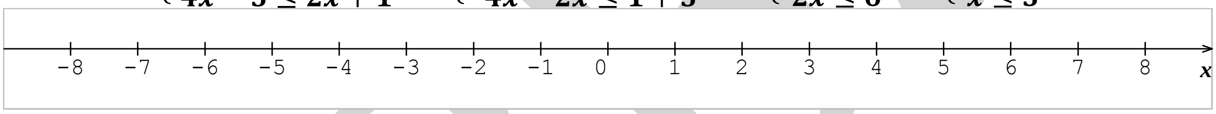
Ces points sont alignés ssi : $XY' = X'Y \Leftrightarrow 4\left(-\frac{3}{2}\right) = (-2)(3) \Leftrightarrow -6 = -6$. Donc les points A, O et Q sont alignés.

<u>Sujet 8</u> :

<u>Algèbre</u> :

<u>EXERCICE 1</u> : Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} 12x + 3 \geq 8x - 5 \\ 4x - 5 \leq 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 8x \geq -5 - 3 \\ 4x - 2x \leq 1 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq -8 \\ 2x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 3 \end{cases}$$



$$S = [-2; 3]$$

<u>EXERCICE 2</u> : Construisons les droites $d1, d2, d2$:

$d1 : 3x - 2y + 2 = 0$

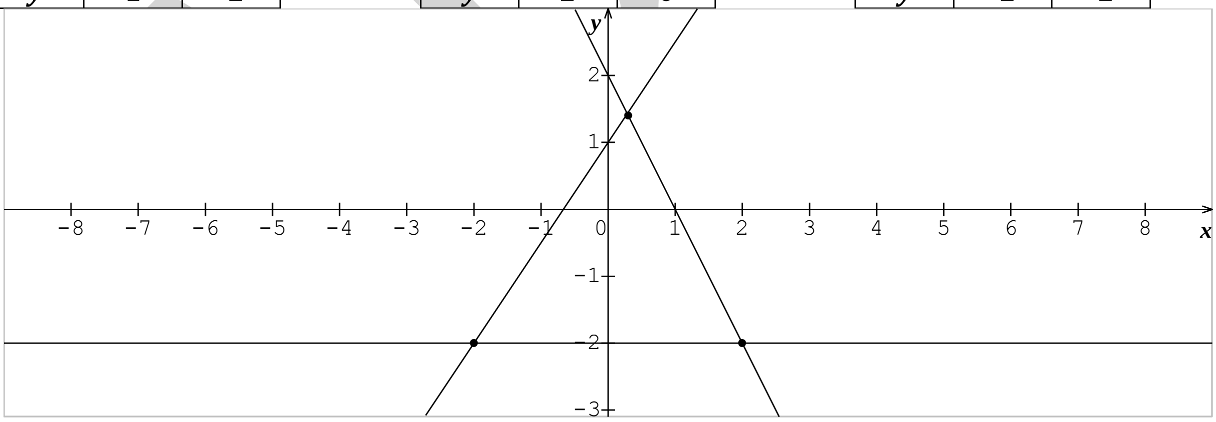
x	0	-2
y	1	-2

$d2 : y = -2x + 2$

x	0	1
y	2	0

$d3 : y = -2$

x	0	3
y	-2	-2



Trouvons un système d'inéquation définissant la surface triangulaire déterminée par ces droites :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2 \geq 0 \\ y \leq -2x + 2 \\ y \geq -2 \end{cases}$$

<u>EXERCICE 3</u> : 1°) Exprimons l'aire $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x : $\mathcal{A}(x) = 3x$

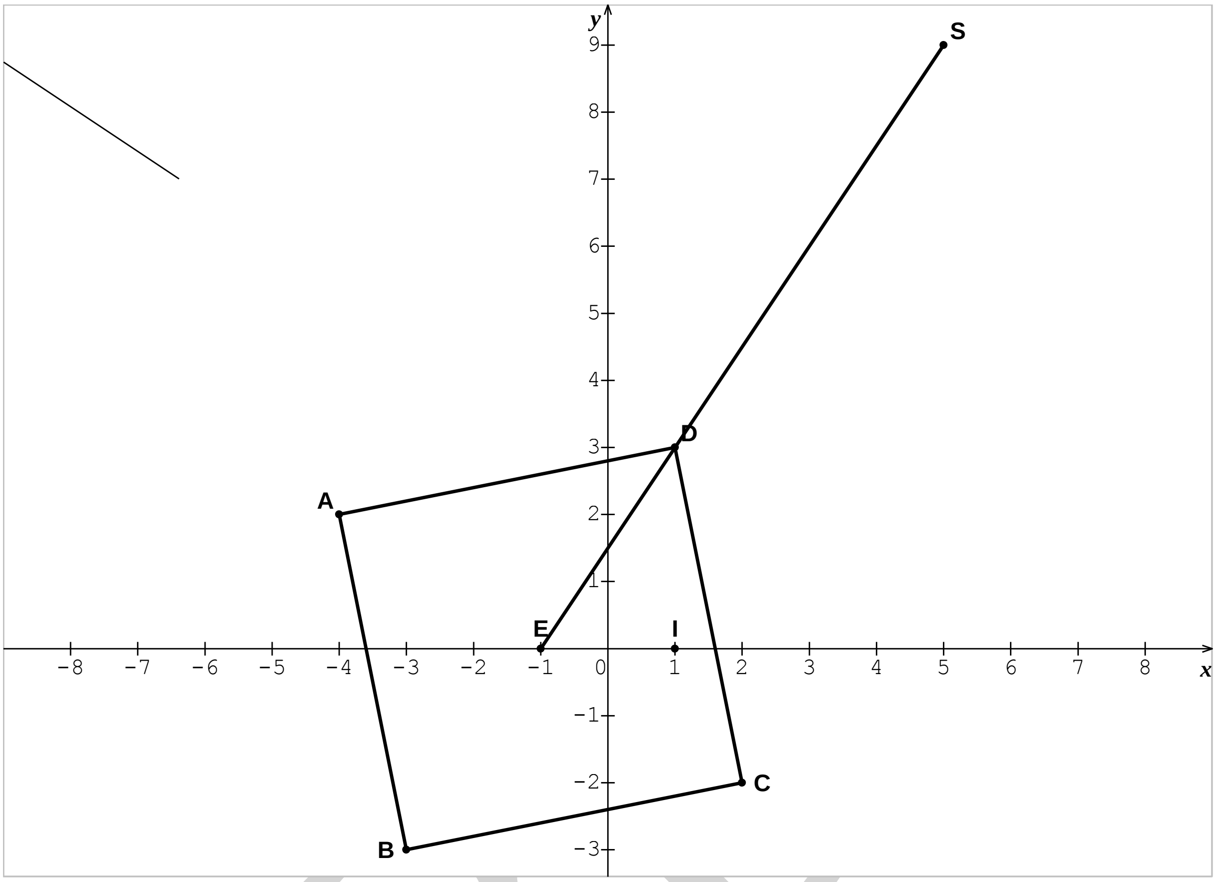
2°) a) Exprimons $\mathcal{A}'(x)$ en fonction de x : $\mathcal{A}'(x) = 5(x+2)$

b°) Calculons x sachant que : $\mathcal{A}'(x) = \mathcal{A}(x) + 20$:

$$5(x+2) = 3x + 20 \Leftrightarrow 5x + 10 = 3x + 20 \Leftrightarrow 5x - 3x = 20 - 10 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$$

<u>Géométrie</u> :

1°) Plaçons ces points dans le repère (voir figure) :



2°) Calculons les coordonnées puis les composantes des vecteurs :

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2-(-4) \\ -2-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 1-(-4) \\ 3-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2-1 \\ -2-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Les composantes sont : $\overrightarrow{AC} = 6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{AD} = 5\vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $\overrightarrow{DC} = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$

3°) Les coordonnées du point E milieu de $[AC]$:

$$E\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow E\begin{pmatrix} \dfrac{-4+2}{2} \\ \dfrac{2+(-2)}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow E\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons les coordonnées de B symétrique de D par rapport à E c'est-à-dire $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EB}$

$$x_E - x_D = x_B - x_E \Leftrightarrow -1 - 1 = x_B - 1 \Leftrightarrow x_B = -1 - 1 - 1 \Leftrightarrow x_B = -3$$

$y_E - y_D = y_B - y_E \Leftrightarrow 0 - 3 = y_B - 0 \Leftrightarrow y_B = -3$. Donc $B(-3;-3)$.

Le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

4°) Trouvons les coordonnées du point S tel que : $\overrightarrow{ES} = 3\overrightarrow{ED}$:

$$x_S - x_E = 3(x_D - x_E) \Leftrightarrow x_S + 1 = 3(1+1)) \Leftrightarrow x_S = 6 - 1 \Leftrightarrow x_S = 5$$

$y_S - y_E = 3(y_D - y_E) \Leftrightarrow y_S - 0 = 3(3-0) \Leftrightarrow y_S = 9$. Donc on a $S(5;9)$.

5°) Trouvons une équation de la droite (EC) :

$$(EC): (x_C - x_E)(y - y_E) - (y_C - y_E)(x - x_E) = 0$$

$$\Leftrightarrow (EC): (2+1)(y-0) - (-2-0)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (EC): 3y + 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (EC): 2x + 3y + 2 = 0$$

<u>Sujet 9</u> :

<u>Algèbre</u> :

<u>EXERCICE 1</u> : a°) Résolvons graphiquement les systèmes suivants :

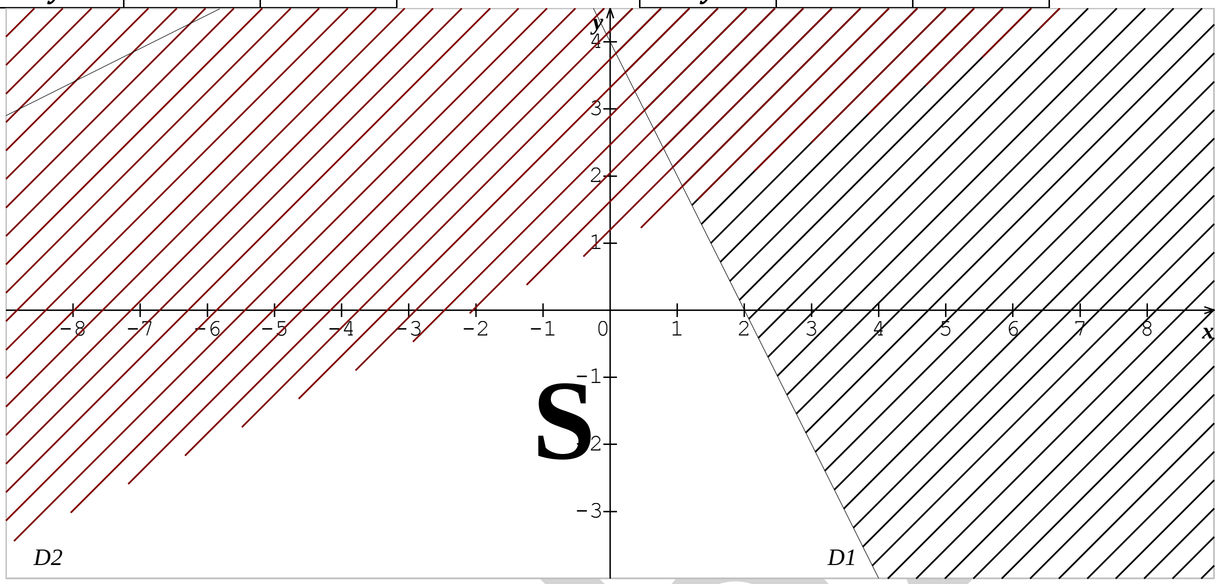
$$\begin{cases} 4x+2y-8\leq 0 \\ x-2y+2\geq 0 \end{cases}$$

D1 : $4x+2y-8=0$

x	2	0
y	0	4

D2 : $x-2y+2=0$

x	0	-2
y	1	0



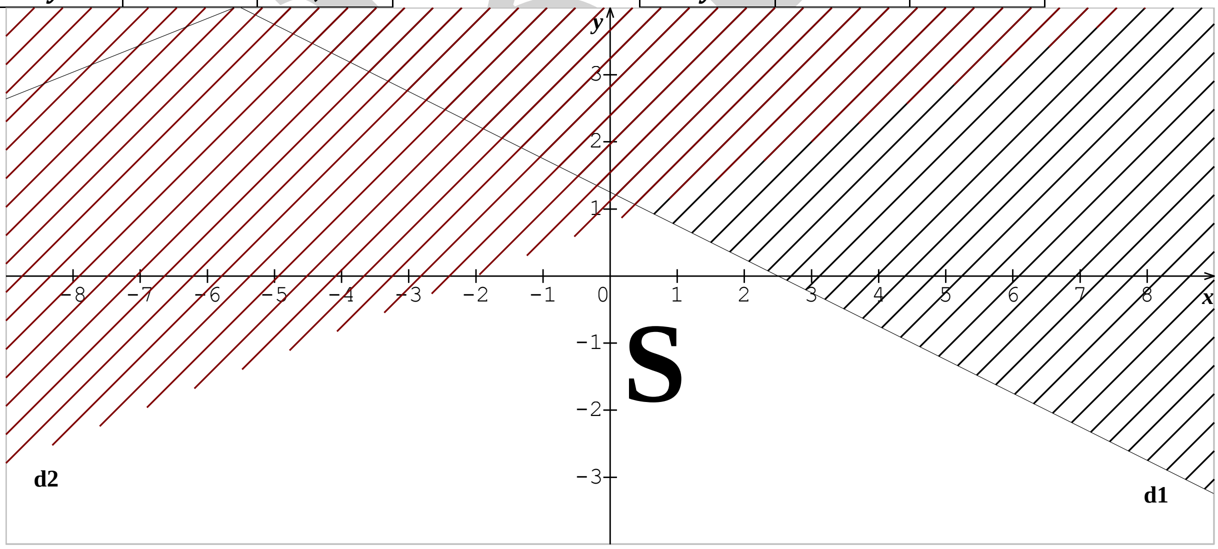
$$\begin{cases} 2x+4y\leq 5 \\ 2x-5y\geq -4 \end{cases}$$

d1 : $2x+4y=5$

x	2,5	1
y	0	0,75

d2 : $2x-5y=-4$

x	-2	3
y	0	2



b°) Résolvons les systèmes suivants :

$\begin{cases} x-3y=7 \\ 2x+5y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+7 & (1) \\ 2x+5y=25 & (2) \end{cases}$ **En remplaçant x par $3y+7$ dans l'équation (2) on a :**

$$2(3y+7)+5y=25 \Leftrightarrow 6y+14+5y=25 \Leftrightarrow 11y=11 \Leftrightarrow y=1$$

En remplaçant y par 1 dans l'équation (1) on a : $x=3(1)+7 \Leftrightarrow x=10$; $S=\{(10;1)\}$

$$\begin{cases} x-2y=-6 & (1) \\ 3x+y=-4 & (2) \end{cases}$$

Eliminons y en multipliant l'équation (2) par 2 et en ajoutant les deux nouvelles équations obtenues on a : $7x=-14 \Leftrightarrow x=-2$

Remplaçons x par -2 dans l'équation (1) on a : $-2-2y=-6 \Leftrightarrow 2y=4 \Leftrightarrow y=2$

$$S = \{(-2; 2)\}$$

<u>EXERCICE 2</u> : Soit x l'âge actuel de Salma et y celui de Amadou :

$$\begin{cases} 5(x-4) = y-4 \\ 3(x+2) = y+2 \end{cases}$$

En résolvant ce système on trouve $x = 10$ et $y = 34$. Donc Salma a 10 ans et Amadou 34ans.

<u>EXERCICE 3</u> : Déterminons l'application affine $f(x)$:

a°) $f(0)) = 1$ et $f(2) = 4$ $\quad f(x) = ax + b$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow b = 1$ donc $f(x) = ax + 1$; $f(2) = 4 \Leftrightarrow 2a + 1 = 4 \Leftrightarrow 2a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$. Donc $f(x) = \frac{3}{2}x + 1$. f n'est pas une application linéaire.

b°) $f(-5) = 10$ et $f(4) = -8$ c'est-à-dire $-5a + b = 10$ et $4a + b = -8$

$\begin{cases} -5a + b = 10 \\ 4a + b = -8 \end{cases}$ En résolvant ce système on trouve $a = -2$ et $b = 0$ donc $f(x) = -2x$.

f est une application linéaire.

c°) $f(3) = 5$ et $f(5) = 3$ c'est-à-dire $3a + b = 5$ et $5a + b = 3$

$\begin{cases} 3a + b = 5 \\ 5a + b = 3 \end{cases}$ En résolvons ce système on trouve $a = -1$ et $b = 8$ donc $f(x) = -x + 8$.

f n'est pas une application linéaire.

d°) $f(2) = 5$ et $f(-2) = 7$ c'est-à-dire $2a + b = 5$ et $-2a + b = 7$

$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ -2a + b = 7 \end{cases}$ En résolvant ce système on trouve $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 6$ donc $f(x) = -\frac{1}{2}x + 6$.

f n'est pas une application linéaire.

<u>Géométrie</u> :

<u>EXERCICE 1</u> : Démontrons :

$$(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = \sin^2\alpha \Leftrightarrow 1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

$$Donc\ (1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = \sin^2\alpha$$

$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} \Leftrightarrow (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha) = \cos^2\alpha \Leftrightarrow 1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \cos^2\alpha\,.\,Donc\ \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$$

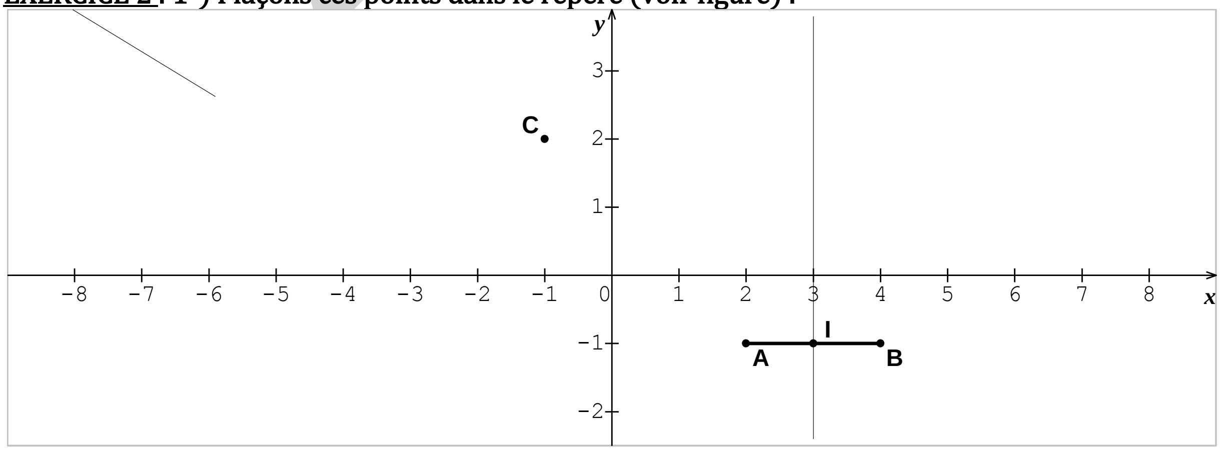
$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

$$Donc\ 1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1+\frac{1}{\tan^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Leftrightarrow 1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}\ .\ Donc\ 1+\frac{1}{\tan^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

<u>EXERCICE 2</u> : 1°) Plaçons ces points dans le repère (voir figure) :



2°) Calculons les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-2 \\ -1+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;;\; \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1-4 \\ 2+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1-2 \\ 2+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En déduisons leurs composantes : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\imath}$; $\overrightarrow{BC} = -5\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{AC} = -3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

3°) Calculons les coordonnées du point I milieu de $[AB]$

$$I\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} \frac{2+4}{2} \\ \frac{-1-1}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4°) Trouvons une équation de la droite (BC) :

$$(BC): x_{\overrightarrow{BC}}(y - y_C) - y_{\overrightarrow{BC}}(x - x_C) = 0 \Leftrightarrow (BC): -5(y-2) - 3(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (BC): -5y + 10 - 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow (BC): 3x + 5y - 7 = 0$$

Trouvons une équation de la médiatrice du segment $[AB]$:

$$\Delta: x_{\overrightarrow{AB}}(x - x_I) + y_{\overrightarrow{AB}}(y - y_I) = 0 \Leftrightarrow \Delta: 2(x-3) + 0(y+1) = 0 \Leftrightarrow \Delta: x - 3 = 0$$

Sujet 10 :

Algèbre :

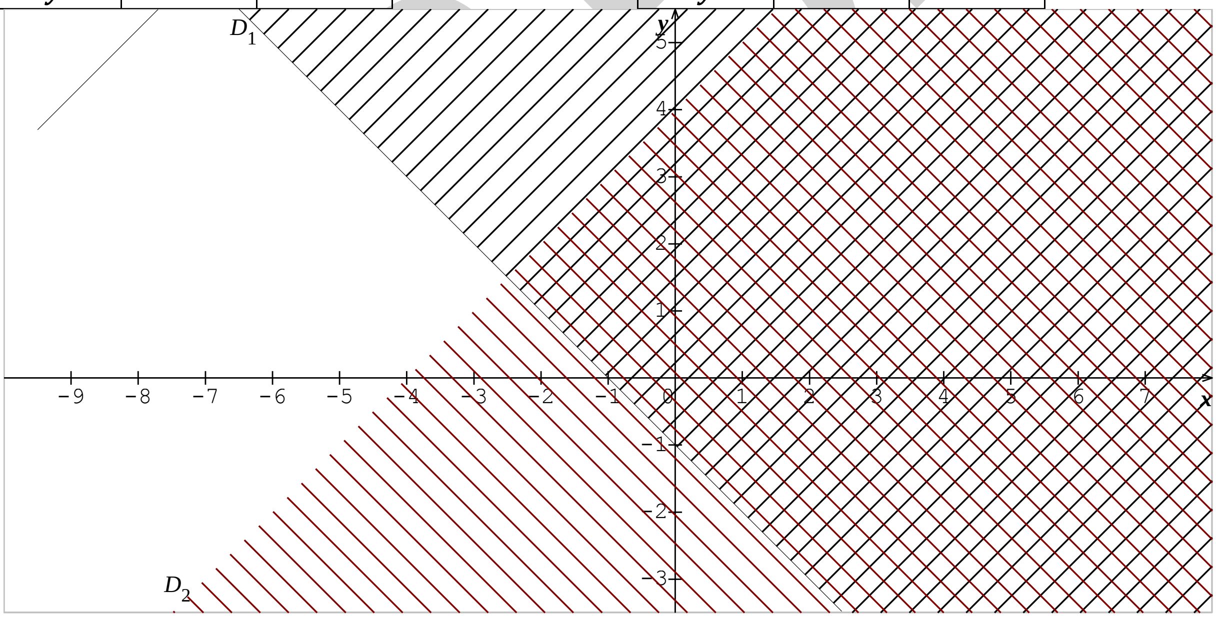
EXERCICE 1 : Résolvons le système : $\begin{cases} x + y + 1 \le 0 \\ -x + y - 4 \ge 0 \end{cases}$

$D_1 : x + y + 1 = 0$

x	0	-1
y	-1	0

$D_2 : -x + y - 4 = 0$

x	0	-4
y	4	0



EXERCICE 2 : Soit x le nombre d'enfant du groupe et y la valeur du cadeau :

$\begin{cases} y = 775x + 375 & (1) \\ y = 830x - 450 & (2) \end{cases}$ Remplaçons y par $830x - 450$ dans l'équation (1) :

$$830x - 450 = 775x + 375 \Leftrightarrow 830x - 775x = 375 + 450 \Leftrightarrow 55x = 825 \Leftrightarrow x = 15$$

Remplaçons x par 15 dans l'équation (2) : $y = 830(15) - 450 \Leftrightarrow y = 12000$

Donc il y a 15 enfants et la valeur du cadeau est 12000F.

La cotisation versée par chaque enfant est : 800F.

EXERCICE 3 : $f(x) = 7 - (5x - 4)$ et $g(x) = ax + b$

1°) Déterminons a et b : $(g(2) = 5$ et $g(-2) = 7) \Leftrightarrow (2a + b = 5$ et $-2a + b = 7)$

$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ -2a + b = 7 \end{cases}$ En résolvant ce système on trouve : $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 6$. Donc $g(x) = -\frac{1}{2}x + 6$

2°) Résolvons dans $\mathbb{R}$:

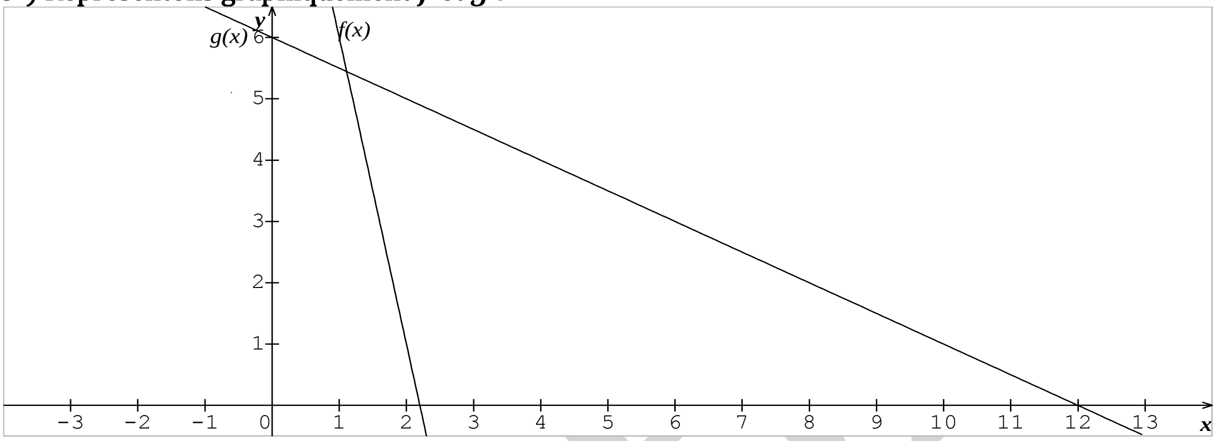
$$g(x) = -f(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + 6 = -7 + (5x - 4) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + 6 = -7 + 5x - 4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x - 5x = -7 - 4 - 6 \Leftrightarrow -\frac{11}{2}x = -17 \Leftrightarrow x = \frac{34}{11} \;\; ; \;\; S = \left\{\frac{34}{11}\right\}$$

$$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow 7 - 5x + 4 \leq -\frac{1}{2}x + 6 \Leftrightarrow -5x + \frac{1}{2}x \leq 6 - 7 - 4 \Leftrightarrow -\frac{9}{2}x \leq -5 \Leftrightarrow \frac{9}{2}x \geq 5$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{10}{9} \;\; ; \;\; S = \left\{x/x \in \mathbb{R} \; et \; x \geq \frac{10}{9}\right\}$$

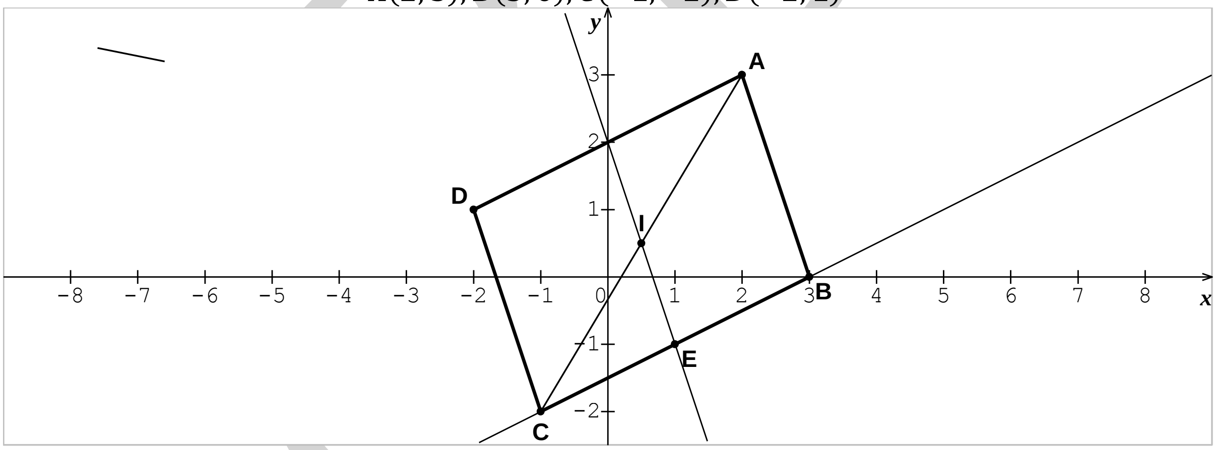
3°) Représentons graphiquement f et g :



Géométrie :

1°) Déterminons les coordonnées de ces points et plaçons-les dans le repère :

$$A(2;3); B(3;0); C(-1;-2); D(-2;1)$$



2°) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -2+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le quadrilatère $ABCD$ est parallélogramme ($\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$).

3°) Calculons les coordonnées de I centre du quadrilatère. I est le milieu de $[AC]$ ou de $[BD]$.

$$I\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} \dfrac{2-1}{2} \\ \dfrac{3-2}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4°) Trouvons une équation de la droite Δ:

$$\Delta : x_{\overrightarrow{AB}}(y - y_I) - y_{\overrightarrow{AB}}(x - x_I) = 0 \Leftrightarrow \Delta : 1\left(y - \frac{1}{2}\right) + 3\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \Delta : 3x + y - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta : 3x + y - 2 = 0$$

5°) L'équation de la droite (BC) :

$$(BC): x_{\overrightarrow{BC}}(y - y_B) - y_{\overrightarrow{BC}}(x - x_B) = 0 \Leftrightarrow (BC): -4(y - 0) + 2(x - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow (BC): 2x - 4y - 6 = 0 \Leftrightarrow (BC): x - 2y - 3 = 0$$

Les coordonnées du point $E = \Delta \cap (BC)$:

$\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$ **En résolvant ce système on trouve $x = 1$ et $y = -1$. Donc on a $E(1; -1)$**

Sujet 11 :

Algèbre :

EXERCICE 1 : Soit x le nombre de poules et y celui de lapins :

$\begin{cases} x + y = 96 \\ 2x + 4y = 280 \end{cases}$ **En résolvant ce système on trouve $x = 52$ et $y = 44$**

Donc il y a 52 poules et 44 lapins dans cette cour.

EXERCICE 2 : 1°) Calculons :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$
$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$
$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(3 + 3)^2 + (-4 - 2)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$$

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A.

2°) Les équations des droites supports des côtés du triangle :

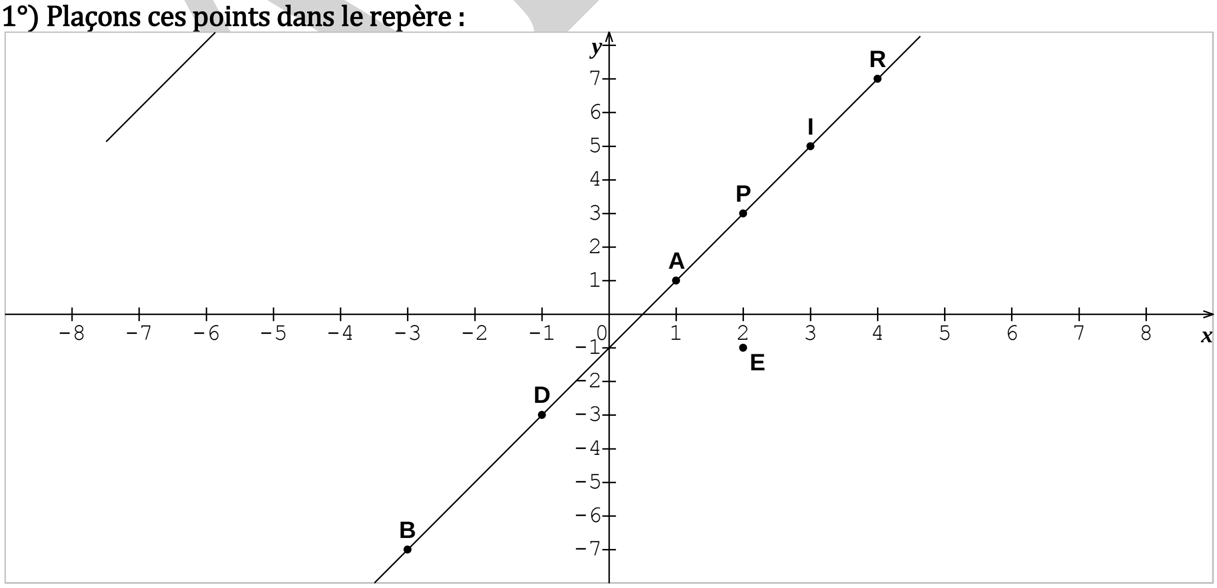
$$(AB): (x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$
$$\Leftrightarrow (AB): (-3 - 1)(y - 0) - (2 - 0)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (AB): -4y - 2x + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (AB): x + 2y - 1 = 0$$
$$(AC): (x_C - x_A)(y - y_A) - (y_C - y_A)(x - x_A) = 0$$
$$\Leftrightarrow (AC): (3 - 1)(y - 0) — 4 - 0(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (AC): 2y + 4x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (AC): 2x + y - 2 = 0$$
$$(BC): (x_C - x_B)(y - y_B) - (y_C - y_B)(x - x_B) = 0$$
$$\Leftrightarrow (BC): (3 + 3)(y - 2) - (-4 - 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow (BC): 6(y - 2) + 6(x + 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow (BC): x + y + 1 = 0$$

3°) L'équation de la médiane relative au côté $[BC]$; $I(0; -1)$ est le milieu du segment $[BC]$

$$\Delta: (x_I - x_A)(y - y_I) - (y_I - y_A)(x - x_I) = 0 \Leftrightarrow \Delta: (0 - 1)(y + 1) - (-1 - 0)(x - 0) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta: -y - 1 + x = 0 \Leftrightarrow \Delta: x - y - 1 = 0$$

Géométrie :

1°) Plaçons ces points dans le repère :



2°) Calculons les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{RD}\begin{pmatrix} x_D - x_R \\ y_D - y_R \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{RD}\begin{pmatrix} -1 - 4 \\ -3 - 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{RD}\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix} \; ; \; \overrightarrow{RP}\begin{pmatrix} x_P - x_R \\ y_P - y_R \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{RP}\begin{pmatrix} 2 - 4 \\ 3 - 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{RP}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$det(\overrightarrow{RD},\overrightarrow{RP}) = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -10 & -4 \end{vmatrix} = (-5)(-4) - 10(-2) = 20 - 20 = 0$$

Les points R, D, P sont alignés.

3°) Calculons les coordonnées du point I milieu de $[RP]$:

$$I\begin{pmatrix} \frac{x_R + x_P}{2} \\ \frac{y_R + y_P}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} \frac{4+2}{2} \\ \frac{7+3}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calculons les coordonnées du point A : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PI}$

$x_P - x_A = x_I - x_P \Leftrightarrow 2 - x_A = 3 - 2 \Leftrightarrow x_A = 2 - 3 + 2 \Leftrightarrow x_A = 1$

$y_P - y_A = y_I - y_P \Leftrightarrow 3 - y_A = 5 - 3 \Leftrightarrow y_A = 3 - 5 + 3 \Leftrightarrow y_A = 1$. Donc on a $A(1; 1)$

4°) Calculons les coordonnées du point B : $\overrightarrow{RD} = \overrightarrow{PB}$

$x_{\overrightarrow{RD}} = x_B - x_P \Leftrightarrow -5 = x_B - 2 \Leftrightarrow x_B = -5 + 2 \Leftrightarrow x_B = -3$

$y_{\overrightarrow{RD}} = y_B - y_P \Leftrightarrow -10 = y_B - 3 \Leftrightarrow y_B = -10 + 3 \Leftrightarrow y_B = -7$. Donc $B(-3; -7)$

5°) Déterminons une équation de la droite (AB) :

$$(AB): (x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow (AB): (-3 - 1)(y - 1) - (-7 - 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (AB): -4y + 4 + 8x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (AB): 2x - y - 1 = 0$$

6°) L'équation de la droite Δ passant par E et parallèle à (AB)

$$\Delta: (x_B - x_A)(y - y_E) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

$$\Delta: \Leftrightarrow (-3 - 1)(y + 1) - (-7 - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \Delta: -4y - 4 + 8x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta: 2x - y - 5 = 0$$

Sujet 12 :

Algèbre :

EXERCICE 1 :

$f(x) = (4x + 5)^2 - (2x - 3)^2$ et $g(x) = (3x + 1)(3x + 2) - (x - 8)(3x + 1) + 9x^2 - 1$

1°) Développons, réduisons et ordonnons $f(x)$ et $g(x)$

$f(x) = (4x + 5)^2 - (2x - 3)^2 = (16x^2 + 40x + 25) - (4x^2 - 12x + 9)$

$= 16x^2 + 40x + 25 - 4x^2 + 12x - 9 = 12x^2 + 52x + 16$

$f(x) = 12x^2 + 52x + 16$

$g(x) = (3x + 1)(3x + 2) - (x - 8)(3x + 1) + 9x^2 - 1$

$= (9x^2 + 6x + 3x + 2) - (3x^2 + x - 24x - 8) + 9x^2 - 1$

$= 9x^2 + 6x + 3x + 2 - 3x^2 - x + 24x + 8 + 9x^2 - 1 = 15x^2 + 32x + 9$

$g(x) = 15x^2 + 32x + 9$

2°) Factorisons $f(x)$ et $g(x)$

$f(x) = (4x + 5)^2 - (2x - 3)^2 = [(4x + 5) - (2x - 3)][(4x + 5) + (2x - 3)]$

$= (4x + 5 - 2x + 3)(4x + 5 + 2x - 3) = (2x + 8)(6x + 2)$

$f(x) = 4(x + 4)(3x + 1)$

$g(x) = (3x + 1)(3x + 2) - (x - 8)(3x + 1) + 9x^2 - 1$

$= (3x + 1)(3x + 2) - (x - 8)(3x + 1) + (3x + 1)(3x - 1)$

$= (3x + 1)[(3x + 2) - (x - 8) + (3x - 1)] = (3x + 1)(3x + 2 - x + 8 + 3x - 1)$

$g(x) = (3x + 1)(5x + 9)$

3°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x + 4)(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow 4 \neq 0; x + 4 = 0$ ou $3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = -\frac{1}{3}$

$$S = \left\{-4; -\frac{1}{3}\right\}$$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow (3x + 1)(5x + 9) = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0$ ou $5x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{9}{5}$

$$S = \left\{-\frac{9}{5}; -\frac{1}{3}\right\}$$

4°) Donnons l'ensemble de définition D_h de $h(x)$ puis simplifions $h(x)$

$$h(x) = \frac{12x^2 + 52x + 16}{(3x+1)(5x-5)}$$

$$D_h = \{x/x \in \mathbb{R}; (3x+1)(5x-5) \neq 0\} \Leftrightarrow D_h = \left\{x/x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{1}{3}\ et\ x \neq 1\right\}$$

$$\Leftrightarrow D_h = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$$

$$h(x) = \frac{12x^2 + 52x + 16}{(3x+1)(5x-5)} = \frac{4(x+4)(3x+1)}{(3x+1)(5x-5)} = \frac{4(x+4)}{5x-5}\ ;\ h(x) = \frac{4x+16}{5x-5}$$

Calculons :

$$h\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4\left(-\frac{2}{3}\right) + 16}{5\left(-\frac{2}{3}\right) - 5} = \frac{\frac{40}{3}}{-\frac{25}{3}} = -\frac{40}{25} = -\frac{8}{5}\ ;\ h\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{5}$$

$$h(\sqrt{3}-2) = \frac{4(\sqrt{3}-2)+16}{5(\sqrt{3}-2)-5} = \frac{4\sqrt{3}-8+16}{5\sqrt{3}-10-5} = \frac{4\sqrt{3}+8}{5\sqrt{3}-15}\ ; h(\sqrt{3}-2) = \frac{4\sqrt{3}+8}{5\sqrt{3}-15} = -2,34$$

EXERCICE 2 : soit x le nombre de moutons et y celui de poules

$\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 2y = 54 \end{cases}$ En résolvant ce système on trouve $x = 7$ et $y = 13$.

Donc il y a 7 moutons et 13 poules dans cette école.

Géométrie :

EXERCICE : D'après a réciproque du théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 10^2 = (4\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow 100 = 80 + 20 \Leftrightarrow 100 = 100$$

Donc le triangle ABC est rectangle en A.

$$\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{4\sqrt{5}}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\ ;\ \sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Démontrons que : $\sin^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B} = 1$

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{20}{25} + \frac{5}{25} = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{25} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$$

Donc $\sin^2\widehat{B} + \cos^2\widehat{B} = 1$

D'après les relations métriques dans le triangle ABC rectangle en A on a :

$$AB^2 = BC \times BH \Leftrightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{80}{10} = 8\ ;\ BH = 8$$

$$AC^2 = BC \times CH \Leftrightarrow CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{20}{10} = 2\ ;\ CH = 2$$

$$AB \times AC = BC \times AH \Leftrightarrow AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{(4\sqrt{5})(2\sqrt{5})}{10} = \frac{40}{10} = 4\ ;\ AH = 4$$

EXERCICE 2 : 1°) Trouvons les équations des droites :

$$(AB): (x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$
$$\Leftrightarrow (AB): (-2-4)(y-3) - (5-3)(x-4) = 0 \Leftrightarrow (AB): -6(y-3) - 2(x-4) = 0$$
$$\Leftrightarrow (AB): 3(y-3) + (x-4) = 0 \Leftrightarrow (AB): 3y - 9 + x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (AB): x + 3y - 13 = 0$$
$$(AC): (x_C - x_A)(y - y_A) - (y_C - y_A)(x - x_A) = 0$$
$$\Leftrightarrow (AC): (-2-4)(y-3) - (-15-3)(x-4) = 0 \Leftrightarrow (AC): -6(y-3) + 18(x-4) = 0$$
$$\Leftrightarrow (AC): -(y-3) + 3(x-4) = 0 \Leftrightarrow (AC): -y + 3 + 3x - 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow (AC): 3x - y - 9 = 0$$
$$(BC): (x_C - x_B)(y - y_B) - (y_C - y_B)(x - x_B) = 0$$
$$\Leftrightarrow (BC): (-2+2)(y-5) - -15 - 5(x+2) = 0 \Leftrightarrow (BC): 20(x+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (BC): x + 2 = 0$$

2°) Calculons les normes des vecteurs :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2-4)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}\ ;\ \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{40}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-2-4)^2 + (-15-3)^2} = \sqrt{36+324} = \sqrt{360}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{360}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-2+2)^2 + (-15-5)^2} = \sqrt{20^2} = 20\ ;\ \|\overrightarrow{BC}\| = 20$$

ABC est un triangle rectangle car on : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

3°) Les coordonnées des points P et Q :

$$P\begin{pmatrix}\frac{x_A + x_B}{2}\\ \frac{y_A + y_B}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow P\begin{pmatrix}\frac{4-2}{2}\\ \frac{3+5}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow P\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\ ;\ Q\begin{pmatrix}\frac{x_B + x_C}{2}\\ \frac{y_B + y_C}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow Q\begin{pmatrix}\frac{-2-2}{2}\\ \frac{5-15}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow Q\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$$

L'équation de la droite (PQ) :

$$(PQ): (x_Q - x_P)(y - y_P) - (y_Q - y_P)(x - x_P) = 0$$

$$\Leftrightarrow (PQ): (-2-1)(y-4) - (-5-4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (PQ): -3(y-4) + 9(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (PQ): -(y-4) + 3(x-1) = 0 \Leftrightarrow (PQ): -y + 4 + 3x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (PQ): 3x - y + 1 = 0$$

Les droites (PD) et (AC) sont parallèles car elles ont le même vecteur directeur.

4°) Pour le point $K(2;-3)$ on a : $3(2) - (-3) - 9 = 0 \Leftrightarrow 6 + 3 - 9 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ vrai.

Donc $K \in (AC)$

Pour le point $M(-1;-2)$ on a : $3(-1) - (-2) - 9 = 0 \Leftrightarrow -3 + 2 - 9 = 0 \Leftrightarrow -10 = 0$ faux.

Donc $M \notin (AC)$

5°) Démontrons que les points P, M, Q sont alignés :

$$\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}\begin{matrix}X\\Y\end{matrix}\ ;\ \overrightarrow{QM}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\begin{matrix}X'\\Y'\end{matrix}$$

Ces points sont alignés ssi : $XY' = X'Y \Leftrightarrow (-2)(3) = (1)(-6) \Leftrightarrow -6 = -6$. Donc les points P, M, Q sont alignés.

Sujet 13 :

Algèbre :

EXERCICE 1 : Soit a et b ces deux nombres $(a > b)$:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 112 \\ a + b = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(a+b) = 112 \\ a + b = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 56(a-b) = 112 \\ a + b = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 2 & (1) \\ a + b = 56 & (2) \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre ces deux équations on a : $2a = 58 \Leftrightarrow a = 29$.

En remplaçant a par 29 dans l'une des équations on trouve : $b = 27$.

Ces deux nombres sont : 29 et 27

EERCICE 2 : 1°) Factorisons les expressions suivantes :

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 = (2x-1)(2x-1)\ ;\ x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = (x-3)(x-3)$$

$$x^2 - 1 + x(x+1) = (x+1)(x-1) + x(x+1) = (x+1)(x-1+x) = (x+1)(2x-1)$$

$$(x-1)^2 - 4 = (x-1-2)(x-x+2) = (x-3)(x+1)$$

2°) a°) Trouvons le domaine de définitions D_f de la fonction $f(x)$.

$$f(x) = \frac{(4x^2 - 4x + 1)[(x-1)^2 - 4]}{(x^2 - 6x + 9)[(x^2 - 1) + x(x+1)]}$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; (x^2 - 6x + 9)[(x^2 - 1) + x(x+1)] \neq 0\}\ ;\quad D_f = \mathbb{R} - \left\{-3; -1; \frac{1}{2}\right\}$$

b°) Simplifions $f(x)$:

$$f(x) = \frac{(4x^2 - 4x + 1)[(x-1)^2 - 4]}{(x^2 - 6x + 9)[(x^2 - 1) + x(x+1)]} = \frac{(2x-1)(2x-1)(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-3)((x+1)(2x-1)} = \frac{2x-1}{x-3}$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

c°) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-3} = 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = x - 3 \Leftrightarrow 2x - x = 1 - 3 \Leftrightarrow x = -2$; $S = \{-2\}$

EXERCICE 3 : 1°) Résolvons le système : $\begin{cases} 5x + 2y = 70 \\ 3y - 5x = 55 \end{cases}$ En ajoutant membre à membre ces deux équations on a : $5y = 125 \Leftrightarrow y = 25$.

En remplaçant y par 25 dans une des équations on trouve : $x = 4$. Donc $S = \{(4; 25)\}$

2°) En déduisons les solutions des systèmes suivants :

$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 = 70 \\ 3y^2 - 5x^2 = 55 \end{cases}$ D'après le système de 1°) on a : $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$ et $y^2 = 25$ $\Leftrightarrow y = 5$ ou $y = -5$. Donc $S = \{(-2; -5), (-2; 5), (2; -5), (2; 5)\}$

$$\begin{cases} \frac{5}{5x-1} + \frac{2}{y+1} = 70 \\ \frac{3}{y+1} - \frac{5}{5x-1} = 55 \end{cases}$$

D'après le système de 1°) on a :

$$\frac{1}{5x-1} = 4 \Leftrightarrow 4(5x-1) = 1 \Leftrightarrow 20x - 4 = 1 \Leftrightarrow 20x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{20} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{y+1} = 25 \Leftrightarrow 25(y+1) = 1 \Leftrightarrow 25y + 25 = 1 \Leftrightarrow 25y = -24 \Leftrightarrow y = -\frac{24}{25}$$

$$S = \left\{\left(\frac{1}{4}; -\frac{24}{25}\right)\right\}$$

Géométrie :

1°) Montrons que les bipoints (A, B) et (C, D) sont équipollents :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3+2 \\ 6-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \ ; \ \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -4-1 \\ -5+2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc on a : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow AB = DC$ les bipoints (A, B) et (C, D) sont équipollents, et le quadruplet (A, B, C, D) est un parallélogramme.

2°) Calculons les coordonnées du point E tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$

$$x_{\overrightarrow{AB}} = x_E - x_B \Leftrightarrow 5 = x_E - 3 \Leftrightarrow x_E = 8 \ ; \ y_{\overrightarrow{AB}} = y_E - y_B \Leftrightarrow 3 = y_E - 6 \Leftrightarrow y_E = 9 \ ; \ E\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

3°) Calculons les coordonnées du point F tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DF}$

$$x_E - x_A = x_F - x_D \Leftrightarrow 8 + 2 = x_F + 4 \Leftrightarrow x_F = 8 + 2 - 4 \Leftrightarrow x_F = 6$$

$$y_E - y_A = y_F - y_D \Leftrightarrow 9 - 3 = y_F + 5 \Leftrightarrow y_F = 9 - 3 - 5 \Leftrightarrow y_F = 1 \ ; \ F\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4°) Montrons que les droites (DF) et (AC) sont perpendiculaires :

$$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \ ; \ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}\begin{matrix} X' \\ Y' \end{matrix}$$

Ces droites sont perpendiculaires ssi :

$$XX' + YY' = 0 \Leftrightarrow (10)(3) + (6)(-5) = 0 \Leftrightarrow 30 - 30 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Comparons les distances AC à celle de CF :

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

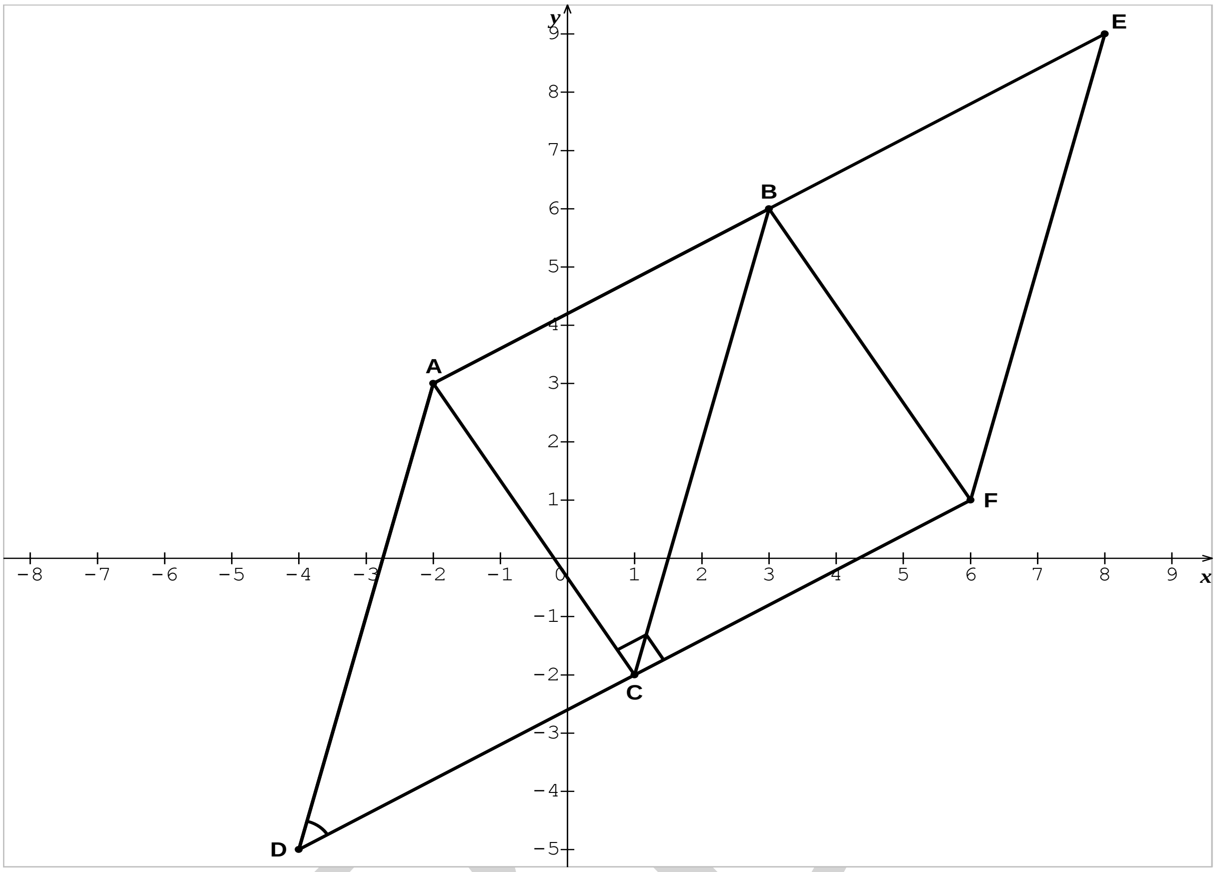
$$CF = \sqrt{(x_F - x_C)^2 + (y_F - y_C)^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} \ ; \ AC = CF$$

Le quadruplet (A, B, C, F) est un carré.

5°) Déterminons le cosinus, sinus et tangente de $\widehat{ADF}$:

On sait que : $DC = CF = AC = \sqrt{34}$; $AD = \sqrt{68}$. Dans le triangle ADC rectangle en C on a :

$$\cos\widehat{ADF} = \frac{DC}{AD} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{68}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ \sin\widehat{ADF} = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{68}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \ \tan\widehat{ADF} = \frac{\sin\widehat{ADF}}{\cos\widehat{ADF}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$



Sujet14 :

Algèbre :

EXERCICE 1 : $p(x) = ax^2 + bx + c$

a°) Déterminons les réels a, b, c :

$$p(0) = -4 \Leftrightarrow a(0)^2 + b(0) + c = -4 \Leftrightarrow c = -4$$

$$p(2) = 0 \Leftrightarrow a(2)^2 + b(2) - 4 = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b = 4 \Leftrightarrow 2a + b = 2 \quad (1)$$

$$p(-2) = -16 \Leftrightarrow a(-2)^2 + b(-2) - 4 = -16 \Leftrightarrow 4a - 2b = -12 \Leftrightarrow 2a - b = -6 \quad (2)$$

En résolvant le système formé par les équations (1) et (2) on trouve : $a = -1$ et $b = 4$. Donc $p(x) = -x^2 + 4x - 4$

b°) $p(x) = -x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x + 4) = -(x-2)^2 = -(x-2)(x-2)$

$$p(x) = -(x-2)(x-2)$$

EXERCICE 2 : $f(x) = 3(x-2)^2 - 4 + x^2 + (x+5)(x-2)$

1°) Développons $f(x)$:

$$f(x) = 3(x-2)^2 - 4 + x^2 + (x+5)(x-2) = 3(x^2 - 4x + 4) - 4 + x^2 + x^2 - 2x + 5x - 10$$
$$= 3x^2 - 12x + 12 - 4 + x^2 + x^2 - 2x + 5x - 10 = 5x^2 - 9x - 2\ ;\ f(x) = 5x^2 - 9x - 2$$

2°) Factorisons $f(x)$:

$$f(x) = 3(x-2)^2 - 4 + x^2 + (x+5)(x-2) = 3(x-2)^2 + (x-2)(x+2) + (x+5)(x-2)$$
$$= (x-2)[3(x-2) + (x+2) + (x+5)] = (x-2)(3x - 6 + x + 2 + x + 5) = (x-2)(5x+1)$$
$$f(x) = (x-2)(5x+1)$$

Résolvons : $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(5x+1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -\frac{1}{5}$

$$S = \left\{-\frac{1}{5}\,;2\right\}$$

$f(x) = -2 \Leftrightarrow 5x^2 - 9x - 2 = -2 \Leftrightarrow 5x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(5x - 9) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $5x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{9}{5}$

$$S=\left\{0;\frac{9}{5}\right\}$$

3°) $h(x)=\frac{5x^2-9x-2}{3x^2-12}$

$$D_h=\left\{x/x\in\mathbb{R};3x^2-12\neq 0\right\}\Leftrightarrow D_h=\mathbb{R}-\{-2;2\}$$

a°) Simplifions $h(x)$

$$h(x)=\frac{5x^2-9x-2}{3x^2-12}=\frac{(x-2)(5x+1)}{3(x-2)(x+2)}=\frac{5x+1}{3x+6}\ ;\ h(x)=\frac{5x+1}{3x+6}$$

b°) Résolvons dans D_h :

$$h(x)=0\Leftrightarrow 5x+1=0\Leftrightarrow 5x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}\ ;\ S=\left\{-\frac{1}{5}\right\}$$

$$h(x)=1\Leftrightarrow\frac{5x+1}{3x+6}=1\Leftrightarrow 5x+1=3x+6\Leftrightarrow 5x-3x=6-1\Leftrightarrow 2x=5\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$$

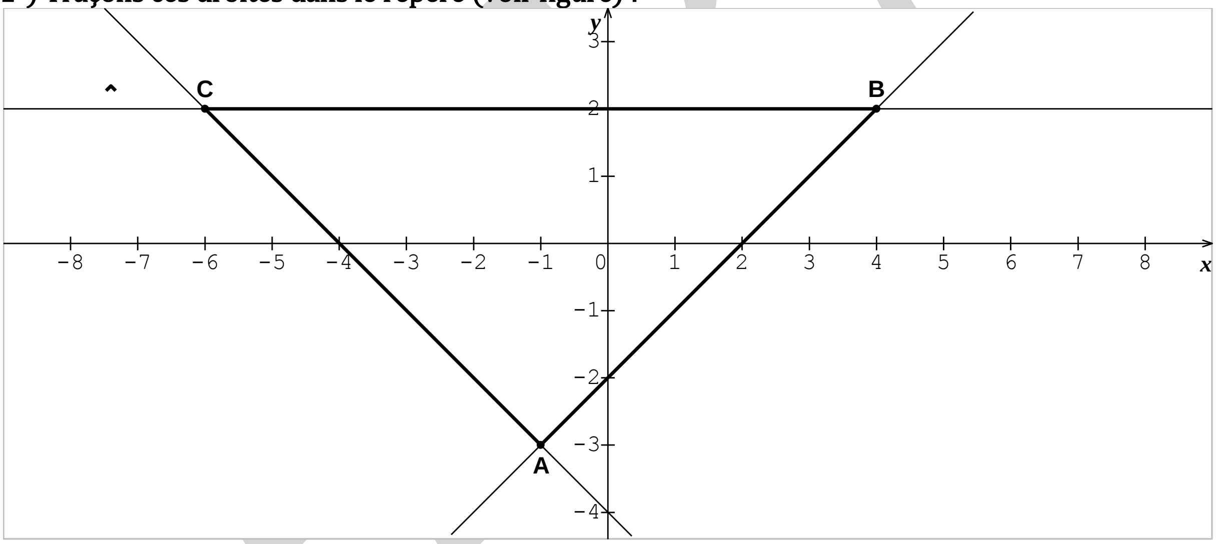
$$S=\left\{\frac{5}{2}\right\}$$

c°) Calculons $h(\sqrt{3})$:

$$h(\sqrt{3})=\frac{5\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}+6}$$

<u>Géométrie</u> :

1°) Traçons ces droites dans le repère (voir figure) :



2°) Calculons les coordonnées des points A,B,C :

$D1\cap D2=\{A\}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-2=0\\x+y+4=0\end{cases}$ En résolvant ce système on trouve $A(-1;-3)$.

$D1\cap D3=\{B\}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-2=0\\y=2\end{cases}$ En résolvant ce système on trouve $B(4;2)$.

$D2\cap D3=\{C\}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+4=0\\y=2\end{cases}$ En résolvant ce système on trouve $C(-6;2)$.

3°) Calculons :

$$d(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4+1)^2+(2+3)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$$

$$d(B,C)=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(-6-4)^2+(2-2)^2}=\sqrt{100}=10$$

$$d(A,C)=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(-6+1)^2+(2+3)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$$

4°) Montrons que le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle :

ABC est un triangle isocèle car on a : $AB=AC=\sqrt{50}$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore : $BC^2=AB^2+AC^2\Leftrightarrow 10^2=\sqrt{50}^2+\sqrt{50}^2\Leftrightarrow 100=50+50\Leftrightarrow 100=100$ Donc ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

5°) Calculons :

$$\cos\widehat{B}=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{50}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}\;;\quad \cos\widehat{C}=\cos\widehat{B}=\frac{\sqrt{2}}{2}\;;\quad \tan\widehat{B}=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{50}}=1$$

$$\sin\widehat{B}=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{50}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

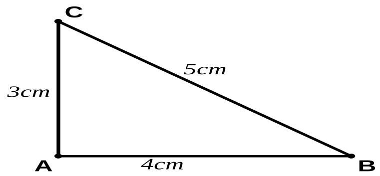
TROISIÈME PARTIE

QUELQUES SUJETS DU DEF (2017-2002):

DEF 2017:

I. ALGEBRE :

EXERCICE 1 :



1. Montrons que ABC est un triangle rectangle en A :

D'après la réciproque du théorème de Pythagore on a :
$BC^2=AB^2+AC^2 \Longrightarrow 5^2=4^2+3^2 \Longrightarrow 25=16+9 \Longrightarrow 25=25$. D'où ABC est un triangle rectangle en A.

2. Calculons les valeurs suivantes :

$$\sin(\widehat{B})=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{5}=0.6 \qquad \cos(\widehat{B})=\frac{AB}{BC}=\frac{4}{5}=0.8 \qquad \tan(\widehat{B})=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{4}=0.75$$

EXERCICE 2 :

$f(x)=(4x+5)^2-(2x-3)^2$ et $g(x)=(3x+1)(3x+2)-(x-8)(3x+1)+9x^2-1$

1°) Développons, réduisons et ordonnons $f(x)$ et $g(x)$

$f(x)=(4x+5)^2-(2x-3)^2=\left(16x^2+40x+25\right)-\left(4x^2-12x+9\right)$
$=16x^2+40x+25-4x^2+12x-9=12x^2+52x+16$
$f(x)=16+52x+12x^2$
$g(x)=(3x+1)(3x+2)-(x-8)(3x+1)+9x^2-1$
$=\left(9x^2+6x+3x+2\right)-\left(3x^2+x-24x-8\right)+9x^2-1$
$=9x^2+6x+3x+2-3x^2-x+24x+8+9x^2-1=15x^2+32x+9$
$g(x)=9+32x+15x^2$

2°) Factorisons $f(x)$ et $g(x)$

$f(x)=(4x+5)^2-(2x-3)^2=[(4x+5)-(2x-3)][(4x+5)+(2x-3)]$
$=(4x+5-2x+3)(4x+5+2x-3)=(2x+8)(6x+2)$
$f(x)=4(x+4)(3x+1)$
$g(x)=(3x+1)(3x+2)-(x-8)(3x+1)+9x^2-1$
$=(3x+1)(3x+2)-(x-8)(3x+1)+(3x+1)(3x-1)$
$=(3x+1)[(3x+2)-(x-8)+(3x-1)]=(3x+1)(3x+2-x+8+3x-1)$
$g(x)=(3x+1)(5x+9)$

3°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$f(x)=0 \Leftrightarrow 4(x+4)(3x+1)=0 \Leftrightarrow 4\neq 0; x+4=0$ ou $3x+1=0 \Leftrightarrow x=-4$ ou $x=-\frac{1}{3}$

$$S=\left\{-4;-\frac{1}{3}\right\}$$

$g(x)=0 \Leftrightarrow (3x+1)(5x+9)=0 \Leftrightarrow 3x+1=0$ ou $5x+9=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$ ou $x=-\frac{9}{5}$

$$S=\left\{-\frac{9}{5};-\frac{1}{3}\right\}$$

PROBLEME :

1. Soient x le prix du spectacle pour un adulte et y celui du spectacle pour n enfant :
   - La famille Niaré : $4x + 3y = 165$
   - La famille Diarra : $2x + 2y = 90$

   Formons le système

$$\begin{cases} 4x + 3y = 165 \\ 2x + 2y = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 165 \\ x + y = 45 \end{cases}$$

   En résolvant ce système on trouve $x = 30$ et $y = 15$. Donc le prix du spectacle est de 30 Euros pour un adulte et 15 Euros pour un enfant.
2. La famille Diallo : $3x + 2y = 3 \times 30 + 2 \times 15 = 90 + 30 = 120$

La famille Diallo paiera 120 Euros.

II. GEOMETRIE : 1. a) Plaçons ces points : (voir figure)

b. Calculons les coordonnées du point K :

$$K\begin{cases} x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow K(2;4)$$

2) Cherchons les coordonnées du point D :

$ABCD$ est un parallélogramme ssi : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 - 3 = 1 - x_D \\ 5 - 2 = 6 - y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 1 - 9 + 3 \\ y_D = 6 - 5 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -5 \\ y_D = 3 \end{cases} \Rightarrow D(-5;3)$$

a) Le point $K(2;4)$ est le milieu de la diagonale $[AC]$ du parallélogramme $ABCD$, il est aussi le milieu de la diagonale $[BD]$ c'est-à-dire :

$$K\begin{cases} x_K = \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ y_K = \dfrac{y_B + y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow K\begin{cases} 2 = \dfrac{9 + x_D}{2} \\ 4 = \dfrac{5 + y_D}{2} \end{cases}$$

Donc les coordonnées de D vérifient ces deux égalités.

b) Déduisons les coordonnées du point D à partir de ces égalités :

$$\frac{9 + x_D}{2} = 2 \Rightarrow 9 + x_D = 4 \Rightarrow x_D = -5 \qquad \frac{5 + y_D}{2} = 4 \Rightarrow 5 + y_D = 8 \Rightarrow y_D = 3.\ D(-5;3)$$

3) Le quadrilatère $ABEC$ est un rectangle ssi on a : $(AB) \perp (AC)$ et $AE = BC$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{matrix} X' \\ Y' \end{matrix}$$

$XX' + YY' = 0 \Rightarrow 6(-2) + 3(4) = 0 \Rightarrow -12 + 12 = 0 \Rightarrow 0 = 0$. Donc $(AB) \perp (AC)$.

$$AE = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2} = \sqrt{(7-3)^2 + (9-2)^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1-9)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}$$

Donc le quadrilatère $ABEC$ est un rectangle.

4) le polygone $ABED$ est un trapèze rectangle.

Calculons les distances :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(9-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$$

$$ED = \sqrt{(x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2} = \sqrt{(-5-7)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180}$$

$$AC = \sqrt{(x_c - x_A)^2 + (y_c - y_A)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

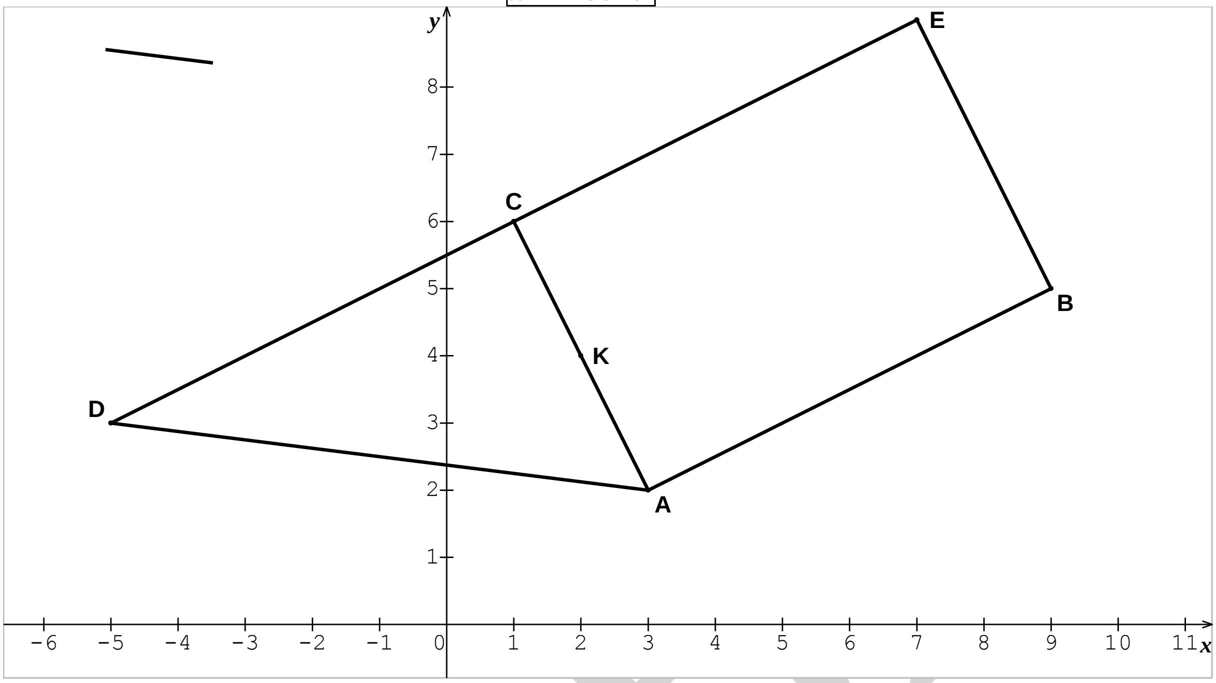
5) Déterminons l'aire a du polygone ABED :

$$a = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

Avec : $B = ED = \sqrt{180}$; $b = AB = \sqrt{45}$ et $h = AC = \sqrt{20}$ on a :

$$a = \frac{\left(\sqrt{180} + \sqrt{45}\right) \times \sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}(\sqrt{180} + \sqrt{45}) = 30 + 15 = 45cm^2$$

$$\boxed{a = 45cm^2}$$



DEF 2016 :

I. **ALGEBRE :**

EXERCICE 1 : Calculons et simplifions :

$$A = 2 + \left(2+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) = 2 + \left(2+\sqrt{2}\right)\left(4-2-\sqrt{2}\right)$$

$$= 2 + \left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right) = 2 + 4 - 2 = 4 \ ; \ A = 4$$

$$B = 2\sqrt{\frac{2}{27}} \times \sqrt{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{\frac{2\times 3}{27\times 8}} = 2\sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{3} \ ; \ B = \frac{1}{3}$$

$$C = 4\sqrt{\frac{26}{5}} \times \sqrt{\frac{65}{8}} = 4\sqrt{\frac{26\times 65}{5\times 8}} = 4\sqrt{\frac{13^2}{4}} = 26 \ ; \ C = 26$$

EXERCICE 2 :

$A(x) = \left(9x^2-1\right)(2x+3) - \left(4x^2-9\right)(3x+1)$; $B(x) = \left(x^2-4\right)(3x-1) - \left(9x^2-1\right)(x+2)$

1°) Factorisons $A(x)$ et $B(x)$:

$$\begin{aligned}
A(x) &= \left(9x^2-1\right)(2x+3) - \left(4x^2-9\right)(3x+1)\\
&= (3x-1)(3x+1)(2x+3) - (2x-3)(2x+3)(3x+1)\\
&= (3x+1)(2x+3)[(3x-1)-(2x-3)]\\
&= (3x+1)(2x+3)(3x-1-2x+3)
\end{aligned}$$

$$A(x) = (3x+1)(2x+3)(x+2)$$

$$\begin{aligned}
B(x) &= \left(x^2-4\right)(3x-1) - \left(9x^2-1\right)(x+2)\\
&= (x+2)(x-2)(3x-1) - (3x+1)(3x-1)(x+2)\\
&= (x+2)(3x-1)[(x-2)-(3x+1)]\\
&= (x+2)(3x-1)(x-2-3x-1)\\
&= (x+2)(3x-1)(-2x-3)
\end{aligned}$$

$$B(x) = -(x+2)(3x-1)(2x+3)$$

2°) Montrons que $P(x)$ peut s'écrire sous la forme $P'(x) = \frac{1+3x}{1-3x}$:

$$P(x)=\frac{A(x)}{b(x)}=\frac{(3x+1)(2x+3)(x+2)}{-(x+2)(3x-1)(2x+3)}=\frac{3x+1}{-3x+1}=\frac{1+3x}{1-3x}=P'(x)\ ;\ \ P'(x)=\frac{1+3x}{1-3x}$$

$$D_{P'}=\{x/x\in\mathbb{R};1-3x\neq 0\}\Leftrightarrow D_{P'}=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

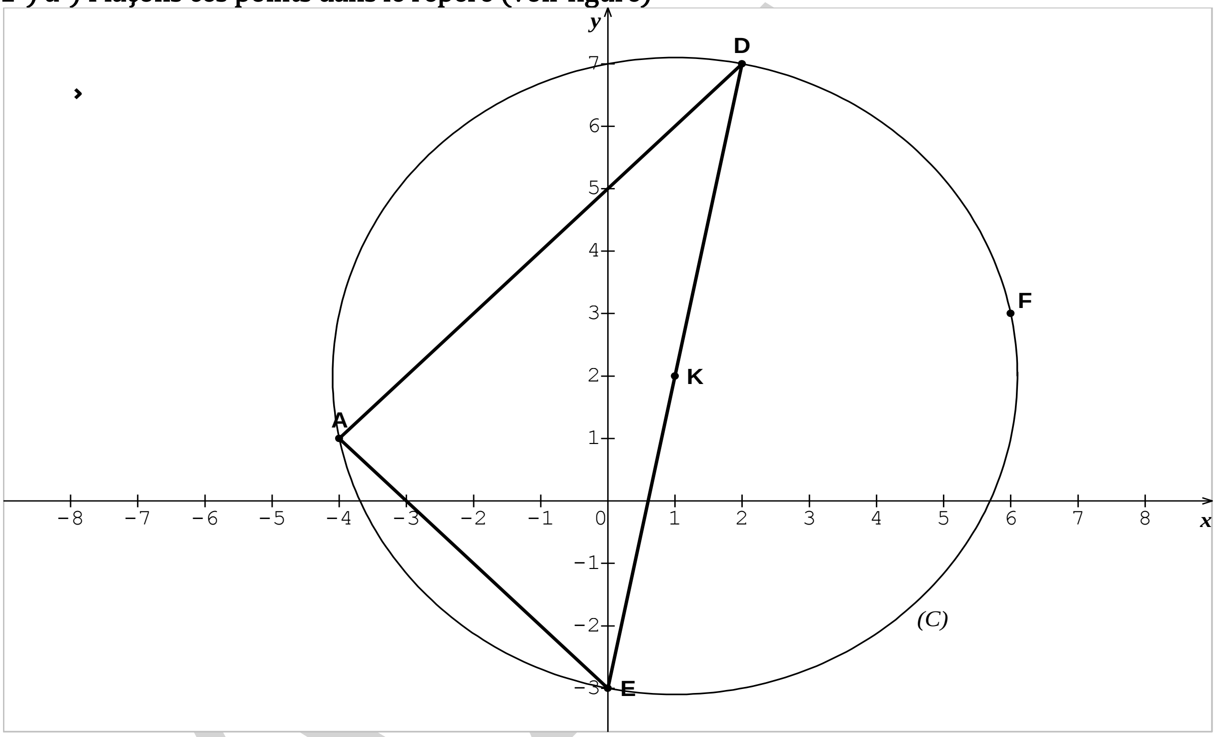
PROBLEME : Soit x l'âge actuel de Ali et y celui de Boubacar :

$$\begin{cases}x=3[y-(x-y)]\\ [y+(x-y)]+[x+(x-y)]=98\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y-3x+3y\\ y+x-y+x+x-y=98\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-6y=0\\ 3x-y=98\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=0\\ 3x-y=98\end{cases}$ En résolvant ce système on trouve $x=42$ et $y=28$. Donc Ali a 42 ans et Boubacar 28 ans.

II. **GEOMETRIE :**

1°) a°) Plaçons ces points dans le repère (voir figure)



b°) Calculons :

$$AD=\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2}=\sqrt{(2+4)^2+(7-1)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}$$

$$AE=\sqrt{(x_E-x_A)^2+(y_E-y_A)^2}=\sqrt{(0+4)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$$

$$DE=\sqrt{(x_E-x_D)^2+(y_E-y_D)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(-3-7)^2}=\sqrt{4+100}=\sqrt{104}$$

En déduisons la nature du triangle EAD :

D'après la réciproque du théorème de Pythagore : $DE^2=AD^2+AE^2\Leftrightarrow\sqrt{104^2}=\sqrt{72^2}+\sqrt{32^2}$ $\Leftrightarrow 104=72+32\Leftrightarrow 104=104$. Donc le triangle EAD est un triangle rectangle en A.

2°) Déterminons les coordonnées du point F ($\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AE}$) :

$$x_F-x_D=x_E-x_A\Leftrightarrow x_F-2=0+4\Leftrightarrow x_F=4+2\Leftrightarrow x_F=6\ ;\ \ x_F=6$$

$y_F-y_D=y_E-y_A\Leftrightarrow y_F-7=-3-1\Leftrightarrow y_F=7-3-1\Leftrightarrow y_F=3\ ;\ \ y_F=3$. Donc $F(6;3)$

3°) a°) Déterminons les coordonnées du point K. Le point K est le milieu du segment $[DE]$:

$$K\begin{pmatrix}\dfrac{x_D+x_E}{2}\\ \dfrac{y_D+y_E}{2}\end{pmatrix}\Leftrightarrow K\begin{pmatrix}\dfrac{2+0}{2}\\ \dfrac{7-3}{2}\end{pmatrix}\Leftrightarrow K\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Calculons le rayon de ce cercle : $r=\frac{DE}{2}=\frac{\sqrt{104}}{2}=\frac{2\sqrt{26}}{2}=\sqrt{26}\ ;\ \ r=\sqrt{26}$

b°) Montrons que F appartient au cercle :

F appartient au cercle ssi $KF = r$:

$$KF = \sqrt{(x_F - x_K)^2 + (y_F - y_K)^2} = \sqrt{(6-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} = r$$

Donc le point F appartient au cercle (C).

4°) $\overrightarrow{AD}\binom{6}{6}$; $\overrightarrow{AE}\binom{4}{-4}$

L'équation de la droite (AD) et de la droite (AE) :

$$(AD): x_{\overrightarrow{AD}}(y - y_A) - y_{\overrightarrow{AD}}(x - x_A) = 0 \Leftrightarrow (AD): 6(y-1) - 6(x+4) = 0$$
$$\Leftrightarrow (AD): y - 1 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow (AD): x - y + 5 = 0$$
$$(AE): x_{\overrightarrow{AE}}(y - y_E) - y_{\overrightarrow{AE}}(x - x_E) = 0 \Leftrightarrow (AE): 4(y+3) + 4(x-0) = 0$$
$$\Leftrightarrow (AE): y + 3 + x = 0 \Leftrightarrow (AE): x + y + 3 = 0$$

5°) Montrons que les droites (AD) et (AE) sont perpendiculaires :

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}\begin{matrix}X\\Y\end{matrix} \quad ; \quad \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}\begin{matrix}X'\\Y'\end{matrix}$$

Ces droites sont perpendiculaires ssi :

$XX' + YY' = 0 \Leftrightarrow (6)(4) + (6)(-4) = 0 \Leftrightarrow 26 - 26 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$. Donc les droites (AD) et (AE) sont perpendiculaires.

DEF 2015 :

I. **ALGEBRE :**

A°) $P(x) = x^2 + (a - b + 3)x + 2a - 3b$

1°) Calculons a et b sachant que :

$$P(0) = 9 \Leftrightarrow 0^2 + (a-b+3)(0) + 2a - 3b = 9 \Leftrightarrow 2a - 3b = 9 \qquad (1)$$
$$P(1) = 4 \Leftrightarrow 1^2 + (a-b+3)(1) + 2a - 3b = 4 \Leftrightarrow 3a - 4b = 0 \qquad (2)$$

En résolvant le système formé par les équations (1) et (2) on trouve $a = -36$ et $b = -27$.

2°) Factorisons $P(x)$:

$$P(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = (x-3)(x-3) \;\; ; \;\; P(x) = (x-3)(x-3)$$

B°) $A(x) = (x-5)(3x-8) + (x-5)^2 + 2x^2 - 50$; $B(x) = (3x - 15)$

1°) Développons, réduisons et ordonnons ces polynômes :

$$A(x) = 3x^2 - 8x - 15x + 40 + x^2 - 10x + 25 + 2x^2 - 50 = 6x^2 - 33x + 15$$
$$A(x) = 6x^2 - 33x + 15 \;\; ; \;\; B(x) = 3x - 15$$

2°) Factorisons $A(x)$ et $B(x)$:

$A(x) = (x-5)(3x-8) + (x-5)(x-5) + 2(x-5)(x+5)$
$= (x-5)[(3x-8) + (x-5) + 2(x+5)] = (x-5)(3x - 8 + x - 5 + 2x + 10)$
$= (x-5)(6x-3) = 3(x-5)(2x-1)$; $A(x) = 3(x-5)(2x-1)$

$B(x) = 3x - 15 = 3(x-5)$; $B(x) = 3(x-5)$

3°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$A(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-5)(2x-1) = 0 \Leftrightarrow 3 \neq 0; x - 5 = 0$ ou $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = \frac{1}{2}$

$$S = \left\{\frac{1}{2}; 5\right\}$$

$B(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-5) = 0 \Leftrightarrow 3 \neq 0; x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$; $S = \{5\}$

$A(x) = B(x) \Leftrightarrow 3(x-5)(2x-1) = 3(x-5) \Leftrightarrow (x-5)(2x-1) - (x-5) = 0$
$\Leftrightarrow (x-5)(2x-2) = 0 \Leftrightarrow 2(x-5)(x-1) = 0 \Leftrightarrow 2 \neq 0;\; x - 5 = 0$ ou $x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 5$ ou $x = 1$; $S = \{1; 5\}$

4°) Déterminons l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$

$$f(x) = \frac{3(x-5)(2x-1)}{3(x-5)} = 2x - 1 \;\; ; \;\; f(x) = 2x - 1 \quad D_f = \mathbb{R}$$

5°) Calculons : $f(0) = 2(0) + 1 = 1$; $f(0) = 1$; $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 1$

II. **GEOMETRIE :** (non traité à cause de l'erreur contenue dans l'énoncé).

DEF 2014 :

I. **ALGEBRE :**

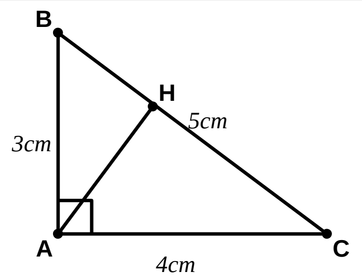
$f(x) = (2x+3)^2 - (x+6)^2$; $h(x) = ax^2 + bx + c - (x+6)^2$; $g(x) = (x+3)(5-x) - h(x)$

1. **Déterminons les réels a, b, c sachant que :**
   $h(0) = 18 \Leftrightarrow a(0)^2 + b(0) + c - (0+6)^2 = 18 \Leftrightarrow c - 36 = 18 \Leftrightarrow c = 54$
   $h(-3) = 0 \Leftrightarrow a(-3)^2 + b(-3) + 54 - (-3+6)^2 = 0 \Leftrightarrow 9a - 3b + 54 - 9 = 0$
   $\Leftrightarrow 9a - 3b + 45 = 0 \Leftrightarrow 3a - b + 15 = 0 \quad (1)$
   $h(-1) = -8 \Leftrightarrow a(-1)^2 + b(-1) + 54 - (-1+6)^2 = -8 \Leftrightarrow a - b + 54 - 25 = -8$
   $\Leftrightarrow a - b + 37 = 0 \quad (2)$
   En résolvant le système formé par les équations (1) et (2) on trouve : $a = 11$ et $b = 48$.
   $h(x) = 11x^2 + 48x + 54 - (x+6)^2 = 11x^2 + 48x + 54 - x^2 - 12x - 36 = 10x^2 + 36x + 18$
   $h(x) = 10x^2 + 36x + 18$
2. **Développons, réduisons et ordonnons $f(x)$ et $g(x)$:**
   $f(x) = (2x+3)^2 - (x+6)^2 = 4x^2 + 12x + 9 - x^2 - 12x - 36 = 3x^2 - 27$; $f(x) = 3x^2 - 27$
   $g(x) = (x+3)(5-x) - (10x^2 + 36x + 18) = 5x - x^2 + 15 - 3x - 10x^2 - 36x - 18$
   $g(x) = -11x^2 - 34x - 3$
3. **Factorisons $f(x)$ et $g(x)$**
   $f(x) = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x-3)(x+3)$; $f(x) = 3(x-3)(x+3)$
   $g(x) = -11x^2 - 34x - 3 = -(11x^2 + 33x + x + 3) = -[11x(x+3) + (x+3)]$
   $g(x) = -(x+3)(11x+1)$
4. $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

   a°) Déterminons l'ensemble de définition D_q de q puis simplifions $q(x)$:
   $$q(x) = \frac{3(x-3)(x+3)}{-(x+3)(11x+1)} \quad D_q = \{x / x \in \mathbb{R};\ -(x+3)(11x+1) \neq 0\}$$
   $$\Leftrightarrow D_q = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{11}; -3\right\}$$
   Simplifions $q(x)$:
   $$q(x) = \frac{3(x-3)(x+3)}{-(x+3)(11x+1)} = \frac{-3(x-3)}{11x+1} = \frac{9-3x}{11x+1} \quad ; \quad q(x) = \frac{9-3x}{11x+1}$$
   b°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   $q(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$; $S = \{3\}$
   $$q(x) = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{9-3x}{11x+1} = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow 4(9-3x) = -9(11x+1) \Leftrightarrow 36 - 12x = -99x - 9$$
   $$\Leftrightarrow 99x - 12x = -9 - 36 \Leftrightarrow 87x = -45 \Leftrightarrow x = -\frac{45}{87} = -\frac{15}{29} \quad ; \quad S = \left\{-\frac{15}{29}\right\}$$
   $$q(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{9-3x}{11x+1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 9 - 3x = \sqrt{3}(11x+1) \Leftrightarrow 9 - 3x = 11\sqrt{3}x + \sqrt{3}$$
   $$\Leftrightarrow 11\sqrt{3}x + 3x = 9 - \sqrt{3} \Leftrightarrow (11\sqrt{3} + 3)x = 9 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{9-\sqrt{3}}{11\sqrt{3}+3} \quad ; \quad S = \left\{\frac{9-\sqrt{3}}{11\sqrt{3}+3}\right\}$$

II. GEOMETRIE :

EXERCICE 1 : 1°) Construisons ce triangle :



2°) Déterminons la nature de ce triangle : D'après la réciproque du théorème de Pythagore :
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + 16 \Leftrightarrow 25 = 25$$
Donc ABC est un triangle rectangle en A.

3°) Calculons :

$$\cos\widehat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8 \;;\; \cos\widehat{C} = 0,8 \qquad \cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6 \;;\; \cos\widehat{B} = 0,6$$

4°) Construisons le point H projeté orthogonal de A sur (BC) (voir figure).

EXERCICE 2 : 1°) Plaçons ces points dans le repère (voir figure).

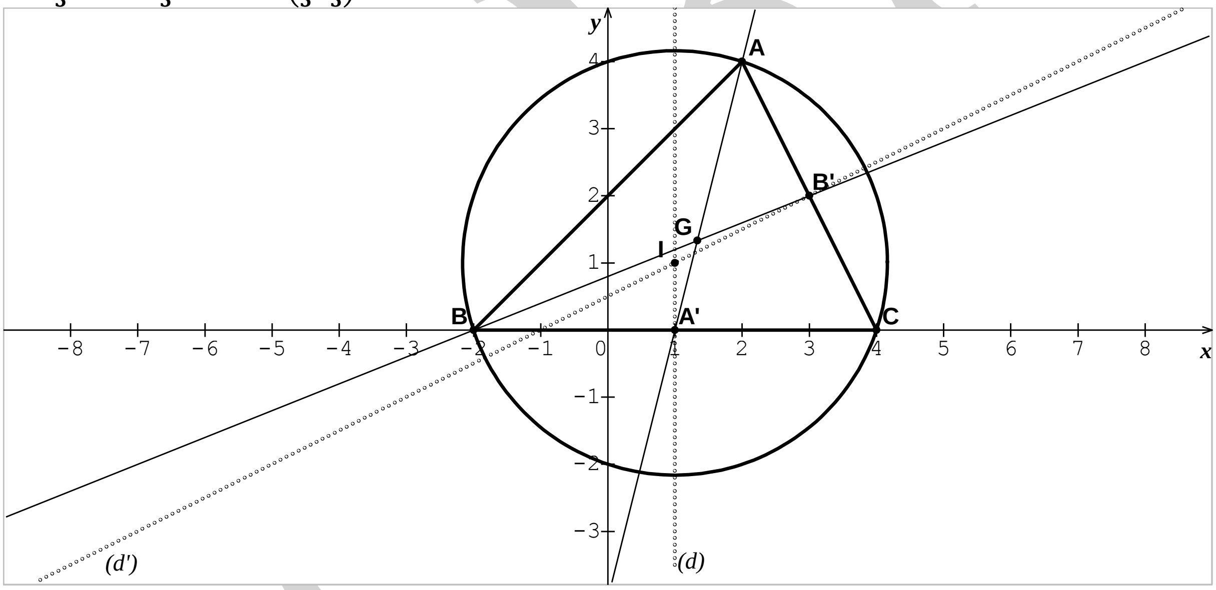
2°) Calculons les coordonnées des points A' et B' :

$$A'\begin{pmatrix}\frac{x_B + x_C}{2}\\ \frac{y_B + y_C}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow A'\begin{pmatrix}\frac{-2+4}{2}\\ \frac{0+0}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow A'\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \;;\; B'\begin{pmatrix}\frac{x_A + x_C}{2}\\ \frac{y_A + y_C}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow B'\begin{pmatrix}\frac{2+4}{2}\\ \frac{4+0}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow B'\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

3°) Trouvons une équation de la droite (AA') et une équation de la droite (BB') :

$$(AA'): (x_{A'} - x_A)(y - y_{A'}) - (y_{A'} - y_A)(x - x_{A'}) = 0$$
$$\Leftrightarrow (AA'): (1-2)(y-0) - (0-4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (AA'): -y + 4x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (AA'): 4x - y - 4 = 0$$
$$(BB'): (x_{B'} - x_B)(y - y_B) - (y_{B'} - y_B)(x - x_B) = 0$$
$$\Leftrightarrow (BB'): (3+2)(y-0) - (2-0)(x+2) = 0 \Leftrightarrow (BB'): 5y - 2x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (BB'): 2x - 5y + 4 = 0$$

Les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC sont les solutions du système formé par les équations des droites (AA') et (BB') : $\begin{cases}4x - y - 4 = 0\\ 2x - 5y + 4 = 0\end{cases}$ En résolvant ce système on trouve : $x = \frac{4}{3}$ et $y = \frac{4}{3}$. Donc $G\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$



4°) Trouvons une équation de la médiatrice (d) de la droite (BC) :

$$(d): (x_C - x_B)(x - x_{A'}) + (y_C - y_B)(y - y_{A'}) = 0$$
$$\Leftrightarrow (d): (4+2)(x-1) + (0-0)(y-4) = 0 \Leftrightarrow (d): 6(x-1) = 0 \Leftrightarrow (d): x - 1 = 0$$

Trouvons une équation de la médiatrice (d') de la droite (AC) :

$$(d'): (x_C - x_A)(x - x_{B'}) + (y_C - y_A)(y - y_{B'}) = 0$$
$$\Leftrightarrow (d'): (4-2)(x-3) + (0-4)(y-2) = 0 \Leftrightarrow (d'): 2x - 6 - 4y + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow (d'): 2x - 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow (d'): x - 2y + 1 = 0$$

Les coordonnées du centre I du cercle circonscrit au triangle ABC sont les solutions du système formé par les équations des droites (d) et (d') : $\begin{cases}x - 1 = 0\\ x - 2y + 1 = 0\end{cases}$ En résolvant ce système on trouve : $x = 1$ et $y = 1$. Donc $I(1;1)$.

Calculons le rayon de ce cercle :

$$r = AI = \sqrt{(x_I - x_A)^2 + (y_I - y_A)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \;;\; r = \sqrt{10}$$

DEF 2013 :

A. ALGEBRE :

EXERCICE 1 : Déterminons les trois nombres $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$:

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{2a}{6}=\frac{-3b}{-12}=\frac{4c}{20}=\frac{2a-3b+4c}{6-12+20}=\frac{1400}{14}=100$$

$$\frac{a}{3}=100 \Leftrightarrow a=3\times100=300 \quad ; \quad \frac{b}{4}=100 \Leftrightarrow b=4\times100=400$$

$$\frac{c}{5}=100 \Leftrightarrow c=5\times100=500$$

Ces trois nombres sont : $a=300, b=400$ et $c=500$.

EXERCICE 2 : $A=\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ et $B=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

a°) Calculons :

$$A^2=\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2$$
$$=\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2$$
$$=3+2\sqrt{2}+2\left(3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2\right)+3-\sqrt{2}=6+2=8 \quad ; \quad A^2=8$$

$$B^2=\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2$$
$$=\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2-2\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2$$
$$=3+2\sqrt{2}-2\left(3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2\right)+3-\sqrt{2}=6-2=4 \quad ; \quad B^2=4$$

En déduisons une expression simple de A et B

$$A^2=8 \Leftrightarrow A=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \quad ; \quad A=2\sqrt{2} \qquad B^2=4 \Leftrightarrow B=\sqrt{4}=2 \quad ; \quad B=2$$

b°) En déduisons que : $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$ et $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}+1$$
$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$$

EXERCICE 3 :

a°) Montrons que les longueurs sont inversement proportionnelles aux largeurs (voir tableau).

b°) Les surfaces de ces rectangles sont toutes égales à 8,64.

Longueur (cm) (L)	3 ,6	14,4	7,2	4,8
Largeur (cm) (l)	2,4	0,6	1 ,2	1,8
$\dfrac{L}{\frac{1}{l}}=L\times l=S$	8,64	8,64	8,64	8,64

PROBLEME : Soit x le nombre d'enfant du groupe et y la valeur du cadeau :

$$\begin{cases} y=775x+375 & (1) \\ y=830x-450 & (2) \end{cases}$$ Remplaçons y par $830x-450$ dans l'équation (1) :

$$830x-450=775x+375 \Leftrightarrow 830x-775x=375+450 \Leftrightarrow 55x=825 \Leftrightarrow x=15$$

Remplaçons x par 15 dans l'équation (2) : $y=830(15)-450 \Leftrightarrow y=12000$

Donc il y a 15 enfants et la valeur du cadeau est 12000F.

La cotisation versée par chaque enfant est : 800F.

B. GEOMETRIE :

I. Partie A :

a°) Calculons les coordonnées de Q : $\overrightarrow{PQ}=\vec{u}$

$$x_Q-x_P=x_{\vec{u}} \Leftrightarrow x_Q+2=2 \Leftrightarrow x_Q=0 \quad ; \quad y_Q-y_P=y_{\vec{u}} \Leftrightarrow y_Q+1=3 \Leftrightarrow y_Q=2 \qquad Q\binom{0}{2}$$

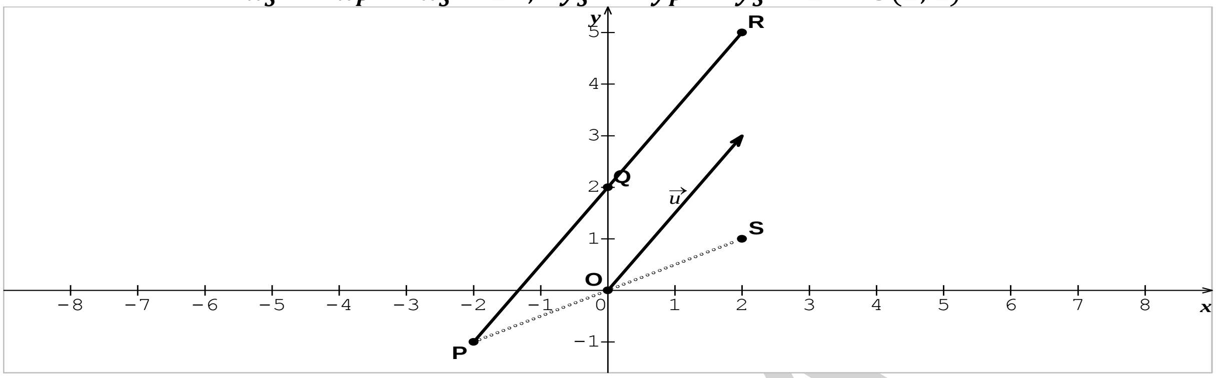
b°) Calculons les coordonnées du point R : $\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{QP}$

$$x_Q-x_R=x_P-x_Q \Leftrightarrow 0-x_R=-2-0 \Leftrightarrow x_R=2$$

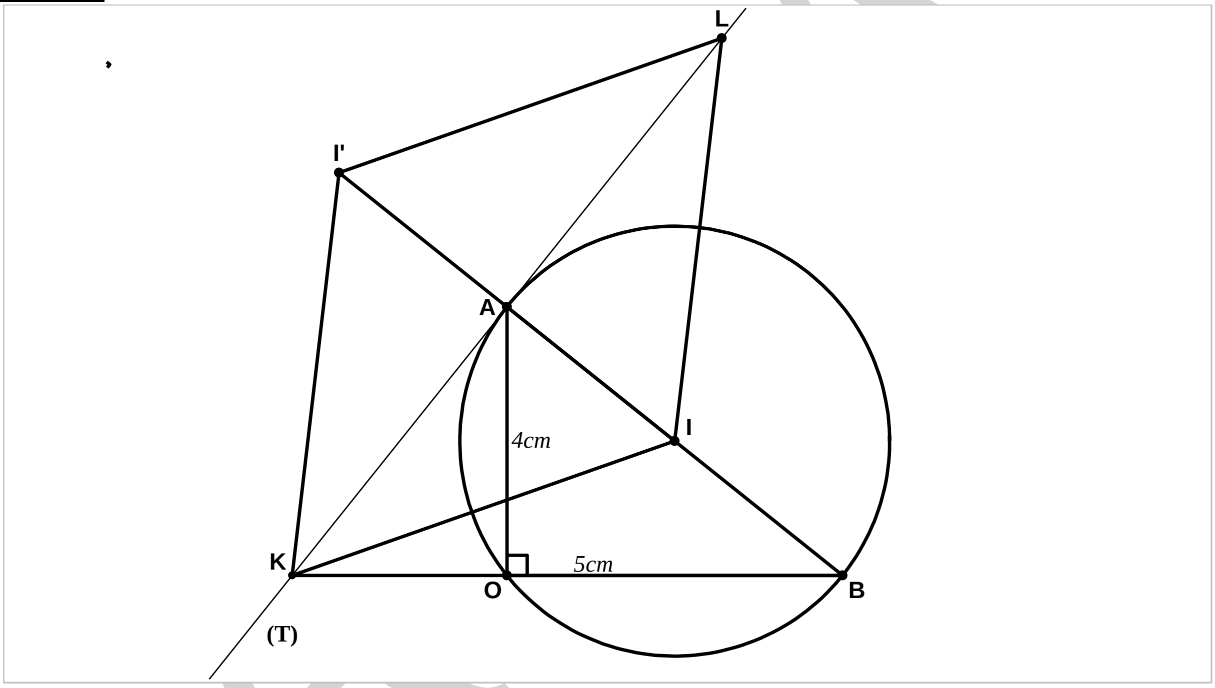
$y_Q - y_R = y_P - y_Q \Leftrightarrow 2 - y_R = -1 - 2 \Leftrightarrow y_R = 5$. Donc $R(2;5)$.

c°) Calculons les coordonnées du point S : $\overrightarrow{OS} = -\overrightarrow{OP}$

$$x_S = -x_P \Leftrightarrow x_S = 2 \;\; ; \;\; y_S = -y_P \Leftrightarrow y_S = 1 \qquad S(2;1)$$



II. Partie B :



a°) Voir figure b°) Calculons : AB, BK, OK, AK

Appliquons le théorème de Pythagore au triangle OAB rectangle en O : $AB^2 = OB^2 + OA^2$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \Leftrightarrow AB = \sqrt{41}cm$$

Dans le triangle OAB rectangle en O on a : $\cos\widehat{B} = \frac{OB}{AB}$ (1)

Dans le triangle ABK rectangle en A on a : $\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BK}$ (2)

$$(1) = (2) \Leftrightarrow \frac{OB}{AB} = \frac{AB}{BK} \Leftrightarrow BK = \frac{AB^2}{OB} = \frac{41}{5} = 8,2 \;\; ; \;\; BK = 8,2cm$$

$$OK = BK - OB = 8,2 - 5 = 3;2 \qquad OK = 3,2cm$$

Dans le triangle ABK rectangle en A on a : $BK^2 = AB^2 + AK^2 \Leftrightarrow AK^2 = BK^2 - AB^2$

$$\Leftrightarrow AK^2 = (8,2)^2 - 41 = 67,24 - 41 = 26,24 \Leftrightarrow AK = \sqrt{26,24} = 5,12 \;\; ; \;\; AK = 5,12cm$$

c°) Voir figure

d°) Montrons que le quadrilatère KILI' est un parallélogramme :

L est l'image de I' par la translation de vecteur $\overrightarrow{KI}$, donc le quadruplet (K, I, L, I') est un parallélogramme.

DEF 2012 :

I. ALGEBRE :

EXERCICE 1 : Trouvons $a \in \mathbb{N}$ tel que :

$$2^{4-a} = 1 \Leftrightarrow 2^{4-a} = 2^0 \Leftrightarrow 4 - a = 0 \Leftrightarrow a = 4$$

$$(3^a)^5 = 1 \Leftrightarrow 3^{5a} = 3^0 \Leftrightarrow 5a = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$9^{3a} = 3^{12} \Leftrightarrow (3^2)^{3a} = 3^{12} \Leftrightarrow 3^{6a} = 3^{12} \Leftrightarrow 6a = 12 \Leftrightarrow a = 2$$

$$(2^2)^{3a} = 4^6 \Leftrightarrow 2^{6a} = (2^2)^6 \Leftrightarrow 2^{6a} = 2^{12} \Leftrightarrow 6a = 12 \Leftrightarrow a = 2$$

$$5 \times 5^{a-3} = 25 \Leftrightarrow 5^{a-2} = 5^2 \Leftrightarrow a - 2 = 2 \Leftrightarrow a = 4$$

EXERCICE 2 : a°) Développons :

$$(3\sqrt{2}+5)(3\sqrt{2}-5) = (3\sqrt{2})^2 - 5^2 = 18 - 25 = -7 \;\; ; \;\; (3\sqrt{2}+5)(3\sqrt{2}-5) = -7$$

En déduisons une écriture simplifiée du nombre :

$$\frac{-7\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+5} = \frac{-7\sqrt{2}(3\sqrt{2}-5)}{-7} = \sqrt{2}(3\sqrt{2}-5) = 6 - 5\sqrt{2}$$

b°) Donnons un encadrement à 0,01 près du nombre $6 - 5\sqrt{2}$:

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \Leftrightarrow -7,075 < -5\sqrt{2} < -7,070 \Leftrightarrow 6 - 7,075 < 6 - 5\sqrt{2} < 6 - 7,070$$

$$\Leftrightarrow -1,075 < 6 - 5\sqrt{2} < -1,070 \Leftrightarrow \boxed{-1,08 < 6 - 5\sqrt{2} < -1,07}$$

EXERCICE 3 : On donne $a = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$. On pose $u = a + b$.

1°) Calculons :

$$a \times b = \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right) = \sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{49-48} = \sqrt{1} = 1 \;\; ; \;\; a \times b = 1$$

2°) Calculons u^2 :

$$u^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2a \times b + b^2 = 7 - 4\sqrt{3} + 2 \times 1 + 7 + 4\sqrt{3} = 16 \;\; ; \;\; u^2 = 16$$

PROBLEME : Soit x l'âge du père, y, z, t les âges de ses trois enfants :

$$x + 3 = y + z + t \Leftrightarrow -x + y + z + t = 3$$

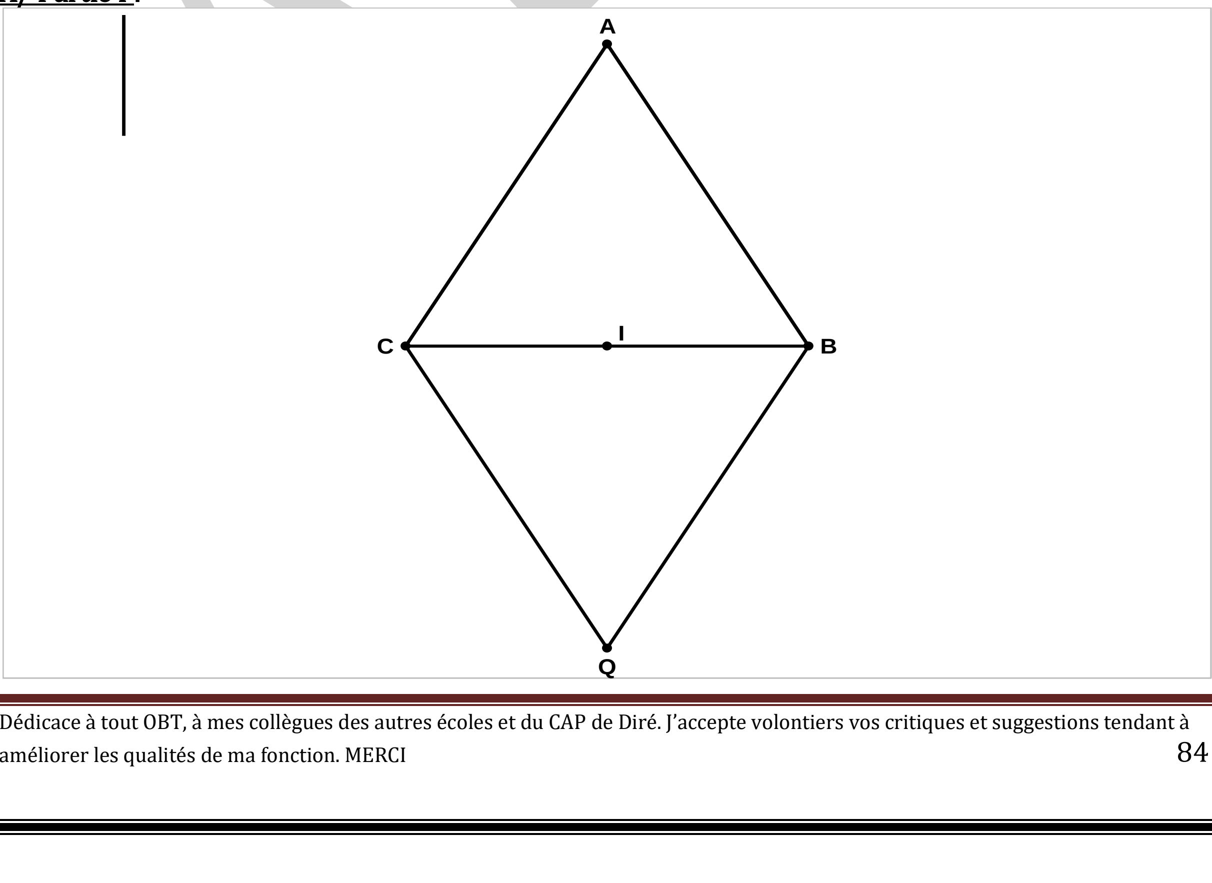
$$(x, y, z, t)\,proportionnels \text{ à } (15, 7, 5, 4) \Leftrightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5} = \frac{t}{4} = \frac{-x+y+z+t}{-15+7+5+4} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{x}{15} = 3 \Leftrightarrow x = 3 \times 15 = 45 \;\; ; \;\; \frac{y}{7} = 3 \Leftrightarrow y = 3 \times 7 = 21$$

$$\frac{z}{5} = 3 \Leftrightarrow z = 3 \times 5 = 15 \;\; ; \;\; \frac{t}{4} = 3 \Leftrightarrow t = 3 \times 4 = 12$$

II. GEOMETRIE :

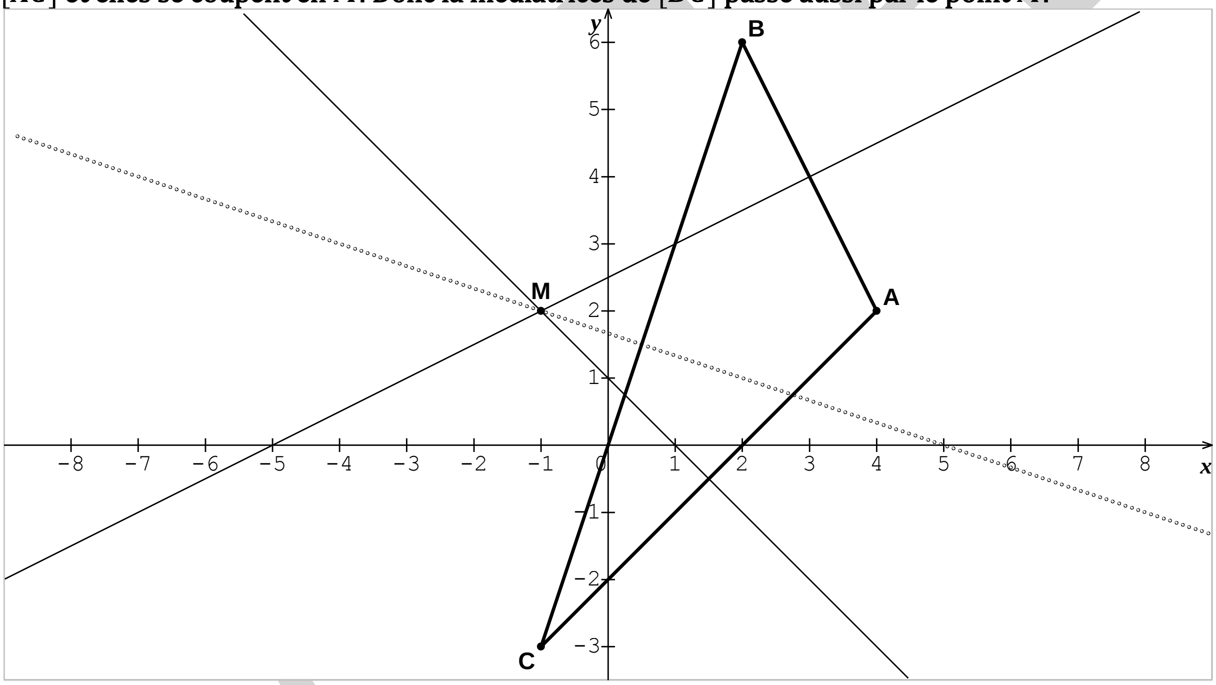
A/ Partie I :



Le quadrilatère $ACQB$ est un parallélogramme parce que les diagonales se coupent en leur milieu I ($AI = IQ$ et $BI = IC$).
Ce quadrilatère un losange car il a deux côtés consécutifs de même longueurs (AB=AC).
B/ Partie II : 1°) Voir figure.
2°) Trouvons une équation de la droite Δ et une équation de la droite Δ' :
Soit N et T les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$, on a : $N(3; 4)$ et $T(1,5; -0,5)$

$$\Delta: (x_B - x_A)(x - x_N) + (y_B - y_A)(y - y_N) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta: (2-4)(x-3) + (6-2)(y-4) = 0 \Leftrightarrow \Delta: -2(x-3) + 4(y-4) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta: x - 3 - 2(y-4) = 0 \Leftrightarrow \Delta: x - 2y - 3 + 8 = 0 \Leftrightarrow \Delta: x - 2y + 5 = 0$$
$$\Delta': (x_C - x_A)(x - x_T) + (y_C - y_A)(y - y_T) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta': (-1-4)(x-1,5) + (-3-2)(y+0,5) = 0 \Leftrightarrow \Delta': -5(x-1,5) - 5(y+0,5) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta': x - 1,5 + y + 0,5 = 0 \Leftrightarrow \Delta': x + y - 1 = 0$$

Les coordonnées du point M sont les solutions du système : $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ En résolvant ce système on trouve $x = -1$ et $y = 2$. Donc $M(-1; 2)$.
3°) Montrons que M appartient à la médiatrice de $[BC]$:
Les médiatrices d'un triangle sont concourantes. Δ et Δ' sont les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ et elles se coupent en M. Donc la médiatrices de $[BC]$ passe aussi par le point M.



DEF 2011 :

I. **ALGEBRE :**

EXERCICE 1 : Soit a et b ces deux entiers ($a > b$) :
$\begin{cases} a + b = 320 & (1) \\ a = 3b + 8 & (2) \end{cases}$ En résolvant ce système on aura : $a = 242$ et $b = 78$

EXERCICE 2 : Calculons le nombre réel m pour que :
a°) a et b soient opposés c'est-à-dire :

$$a = -b \Leftrightarrow \frac{m-1}{2} = -\frac{m-4}{2} \Leftrightarrow 2m - 2 = -2m + 8 \Leftrightarrow 2m + 2m = 8 + 2 \Leftrightarrow 4m = 10$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \quad ; \quad m = \frac{5}{2}$$

b°) a et b soient inverses c'est-à-dire :

$$a \times b = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m-4}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow (m-1)(m-4) = 4 \Leftrightarrow m^2 - 4m - m + 4 = 4$$
$$\Leftrightarrow m^2 - 5m = 0 \Leftrightarrow m(m-5) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = 5$$

PROBLEME : On donne les deux applications f et g définies dans $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :
$f(x) = \frac{x-2}{9} - x^3 + 2x^2$ et $g(x) = (7x-3)^2 - 5^2$

1°) Factorisons $f(x)$ et $g(x)$:

$$f(x) = \frac{x-2}{9} - x^3 + 2x^2 = \frac{1}{9}(x-2) - x^2(x-2) = (x-2)\left(\frac{1}{9} - x^2\right)$$

$$f(x) = (x-2)\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(\frac{1}{3} + x\right)$$

$$g(x) = (7x-3)^2 - 5^2 = (7x-3-5)(7x-3+5) = (7x-8)(7x+2)$$

$$g(x) = (7x-8)(7x+2)$$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(\frac{1}{3} + x\right) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \; ou \; \frac{1}{3} - x = 0 \; ou \; \frac{1}{3} + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \; ou \; x = \frac{1}{3} \; ou \; x = -\frac{1}{3} \quad ; \quad S = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 2\right\}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow (7x-8)(7x+2) = 0 \Leftrightarrow 7x - 8 = 0 \; ou \; 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{7} \; ou \; x = -\frac{2}{7}$$

$$S = \left\{-\frac{2}{7}; \frac{8}{7}\right\}$$

2°) $h(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{9}}{f(x)}$

a°) Déterminons le domaine de définition D_h de h puis simplifions $h(x)$:

$$D_h = \{x / x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\} \Leftrightarrow D_h = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 2\right\}$$

$$h(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{9}}{f(x)} = \frac{-\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(\frac{1}{3} + x\right)}{(x-2)\left(\frac{1}{3} - x\right)\left(\frac{1}{3} + x\right)} = \frac{-1}{x-2} = \frac{1}{2-x} \;\; ; \;\; h(x) = \frac{1}{2-x}$$

b°) Calculons :

$$h(\sqrt{3}) = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2 + \sqrt{3} \quad h(\sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}$$

c°) Résolvons :

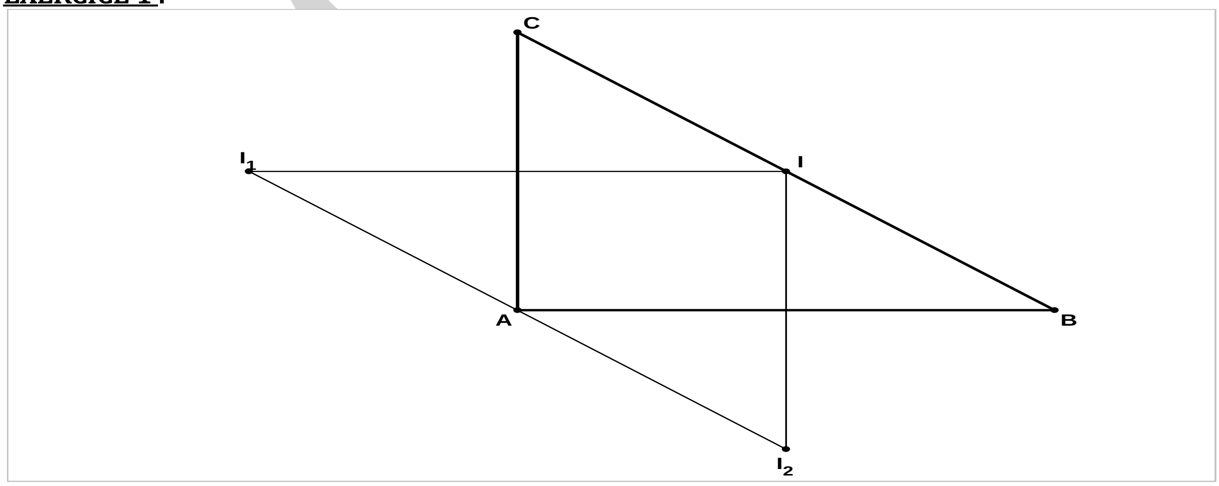
$$g(x) = -16 \Leftrightarrow (7x-8)(7x+2) = -16 \Leftrightarrow 49x^2 + 14x - 56x - 16 = -16$$

$$\Leftrightarrow 49x^2 - 42x = 0 \Leftrightarrow 7x(7x-6) = 0 \Leftrightarrow 7x = 0 \; ou \; 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = \frac{6}{7}$$

$$S = \left\{0; \frac{6}{7}\right\}$$

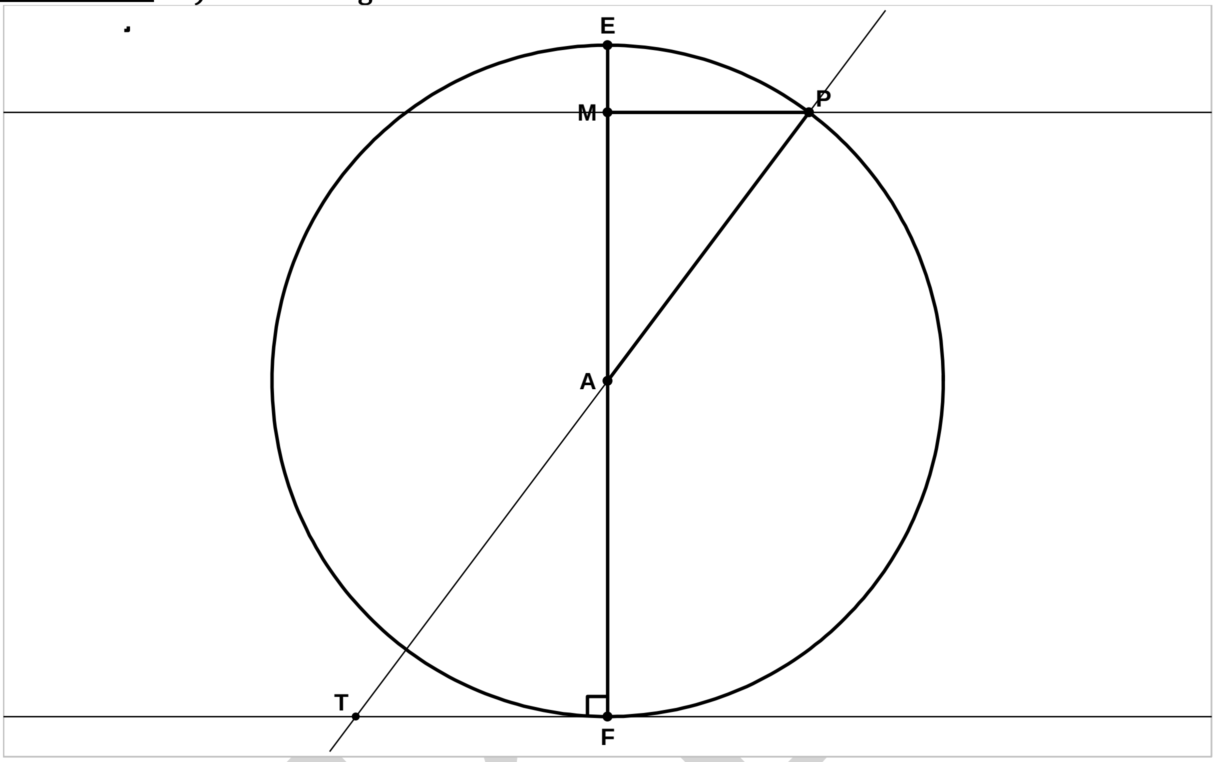
II. GEOMETRIE

EXERCICE 1 :



Montrons que les points I_1, A, I_2 sont alignés :
Les triangles ABC et II_1I_2 sont isométriques car on a : $II_1 = AB$, $II_2 = AC$ donc $BC = I_1I_2$ de plus I milieu de $[BC]$ donc A est le milieu de $[I_1I_2]$ d'où les points I_1, A, I_2 sont alignés.

EXERCICE 2 : 1°) Faisons la figure :



2°) Démontrons que le triangle AMP est rectangle en M :
Ce triangle est rectangle en M ssi :

$$AP^2 = AM^2 + MP^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + 16 \Leftrightarrow 25 = 25$$

Donc le triangle AMP est rectangle en M.

3°) Démontrons que les droites (FT) et (MP) sont parallèles :
On sait que $(FT) \perp (EF)$ et $(MP) \perp (EF)$, donc $(FT) \parallel (MP)$ car si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles.

4°) Calculons la longueur AT :
D'après le théorème de Thales : $\frac{AM}{AF} = \frac{AP}{AT} = \frac{MP}{FT}$

$$\frac{AM}{AF} = \frac{AP}{AT} \Leftrightarrow AT = \frac{AP \times AF}{AM} = \frac{5 \times 5}{4} = \frac{25}{4} = 6,25 \quad AT = 6,25cm$$

DEF 2010 :

I. ALGEBRE :

EXERCICE 1 : 1°) a- Décomposons en produit des facteurs premiers :

$$320 = 2^6 \times 5 \ ; \ 48 = 2^4 \times 3 \ ; \ \sqrt{320} = 8\sqrt{5} \ ; \ \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

b°) Vérifions que le réel $5 - 2\sqrt{5} \geq 0$

$$5^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 25 - 20 = 5 > 0 \Leftrightarrow 5^2 \geq \left(2\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 5 \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 5 - 2\sqrt{5} \geq 0$$

2°) Simplifions :

$$E = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}}}{2\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{6}{4}}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}}}{2\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)} = \frac{1}{2} \ ; \ E = \frac{1}{2}$$

$$T = \frac{\sqrt{20-\sqrt{320}} - \sqrt{12+\sqrt{48}}}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{4\left(5-2\sqrt{5}\right)} - \sqrt{4\left(3+\sqrt{3}\right)}}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{5-2\sqrt{5}} - 2\sqrt{3+\sqrt{3}}}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$
$$= \frac{-2\left(\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}} = -2\ ;\ T = -2$$

EXERCICE 2 : a°) Développons :

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2$$
$$= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$
$$(a+b+c)^3 = (a+b+c)^2(a+b+c) = \left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)(a+b+c)$$
$$= a^3+a^2b+a^2c+ab^2+b^3+b^2c+ac^2+bc^2+c^3+2a^2b+2ab^2+2abc$$
$$+2a^2c+2abc+2ac^2+2abc+2b^2c+2bc^2$$
$$\underline{= a^3+b^3+c^3+6abc+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3b^2c+3ac^2+3bc^2}$$

b°) Démontrons que si $a+b+c=0$ alors $a^3+b^3+c^3=3abc$

$a+b+c=0 \iff a=-b-c$; $b=-a-c$ et $c=-a-b$

$$a+b+c=0 \iff (a+b+c)^3=0$$

c'est-à-dire $a^3+b^3+c^3+6abc+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3b^2c+3ac^2+3bc^2=0$

Dans cette relation remplaçons a, b, c par leurs valeurs tirées plus haut, on a :

$$a^3+b^3+c^3+6abc+3a^2(-a-c)+3a^2(-a-b)+3(-b-c)b^2+3b^2(-a-b)$$
$$+3(-b-c)c^2+3(-a-c)c^2=0$$
$$\iff a^3+b^3+c^3+6abc-3a^3-3a^2c-3a^3-3a^2b-3b^3-3b^2c-3ab^2-3b^3-3bc^2$$
$$-3c^3-3ac^2-3c^3=0$$
$$\iff a^3+b^3+c^3+6abc-3a^3-3b^3-3c^3-3a^3-3a^2b-3a^2c-3b^3-3ab^2-3b^2c$$
$$-3c^3-3ac^2-3bc^2=0$$
$$\iff a^3+b^3+c^3+6abc-3a^3-3b^3-3c^3-3a^2(a+b+c)-3b^2(a+b+c)$$
$$-3c^2(a+b+c)=0$$
$$\iff -2a^3-2b^3-2c^3+6abc=0 \iff 2\left(a^3+b^3+c^3\right)=6abc \iff a^3+b^3+c^3=3abc$$

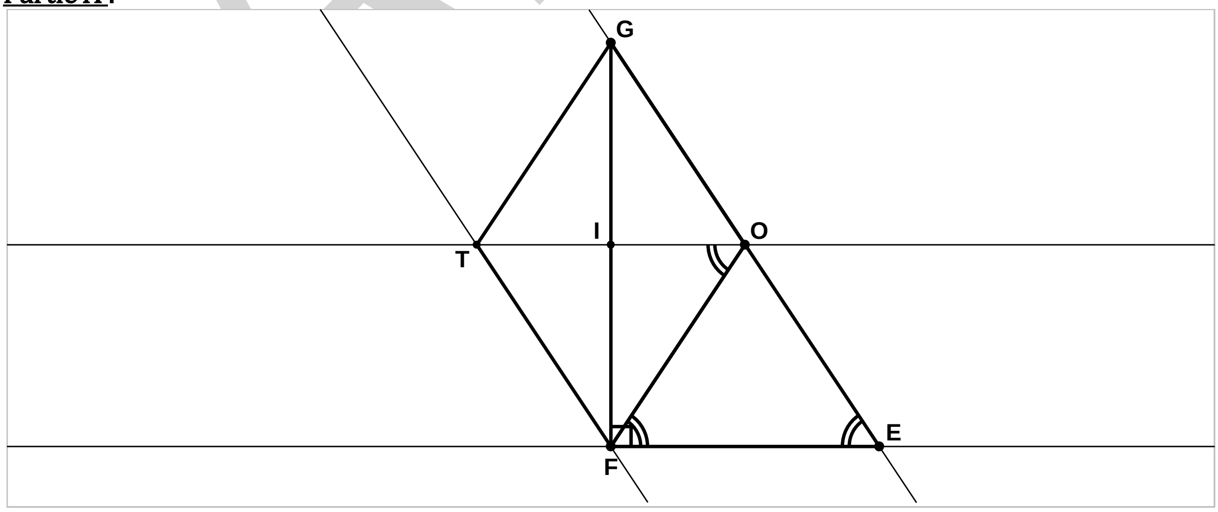
PROBLEME : Soit x la longueur d'une locomotive et y celle d'un wagon-citerne :

$\begin{cases}2x+10y=152\\ x+12y=160\end{cases} \iff \begin{cases}x+5y=76\\ x+12y=160\end{cases}$ **En résolvant ce système on trouve $x=16$ et $y=12$.**

Donc une locomotive mesure 16m et un wagon-citerne mesure 12m.

II. GEOMETRIE :

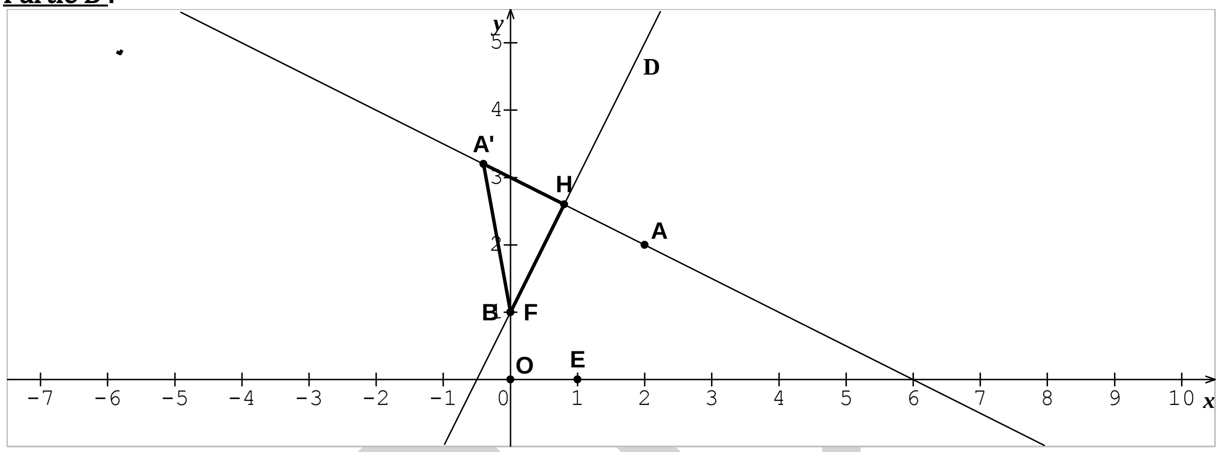
Partie A :



1°) Démontrons que les droites (OI) et (EF) sont parallèles :

Le triangle FOG est un triangle isocèle de base [FG], donc le point I est le milieu du segment [FG], de plus O est le milieu de [GE]. Dans le triangle EFG, la droite (OI) est la droite qui passe par les

milieux des deux côtés ([GF] et [GE]). Elle est donc parallèle à (EF) car dans un triangle, la droite qui relie les milieux des deux côtés est parallèle au troisième côté.
2°) Démontrons que les angles $\widehat{FOI}$ et $\widehat{FEO}$ ont même mesure :
On sait que $\widehat{FOI} = \widehat{OFE}$ (angles alternes internes). On sait aussi que $\widehat{OFE} = \widehat{FEO}$ (triangle isocèle de base [FE]). Donc $\widehat{FOI} = \widehat{FEO}$.
3°) Démontrons que les droites (FT) et (EG) sont parallèles :
La droite (GF) est la médiatrice du segment [OT]. Donc OF=OG=GT=TF (tout point situé sur la médiatrice d'un segment est à égale distance de ses extrémités). Par conséquent les droites (FT) et (EG) sont parallèles.
Le quadrilatère OGTF est un losange.
Partie B :



1°) Voir figure. 2°) Voir figure. 3°) Calculons les coordonnées du point H
Le vecteur $\vec{V}\binom{1}{2}$ est un vecteur directeur de la droite D. Cherchons l'équation de la droite (AA') :

$$(AA'): x_{\vec{V}}(x - x_A) + y_{\vec{V}}(y - y_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow (AA'): x - 2 + 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow (AA'): x - 2 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow (AA'): x + 2y - 6 = 0$$

Les coordonnées du point H sont les solutions du système $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$ En résolvant ce système on trouve $x = 0,8$ et $y = 2,6$. Donc $H\binom{0,8}{2,6}$.
Calculons :

$$A'B = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$A'B = \sqrt{5} = 2,23$$

$$BH = \sqrt{(x_H - x_B)^2 + (y_H - y_B)^2} = \sqrt{(0,8 - 0)^2 + (2,6 - 1)^2} = \sqrt{0,64 + 2,56} = \sqrt{3,2}$$

$$BH = 1,78$$

DEF 2009

I. ALGEBRE :

EXERCICE 1 : Soit x le prix d'une boule et y celui d'une guirlande :

$$\begin{cases} 6x + y = 1840 \\ 5(x - 20\%x) + 5(y - 20\%y) = 2560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + y = 1840 \\ 5x - x + 5y - y = 2560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + y = 1840 \\ 4x + 4y = 2560 \end{cases}$$

En résolvant ce système on trouve $x = 240$ et $y = 400$. Donc une boule coûte 240 FCFA et une guirlande 400 FCFA.
EXERCICE 2 : 1°) Déterminons ces trois nombres entiers positifs :

$$(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = 1325 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 = 1325$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2 = 1325 \Leftrightarrow 3x^2 = 1323 \Leftrightarrow x^2 = 441 \Leftrightarrow x = 21$$

Ces trois entiers sont : 20, 21 et 22.
2°) Déterminons les deux nombres relatifs :

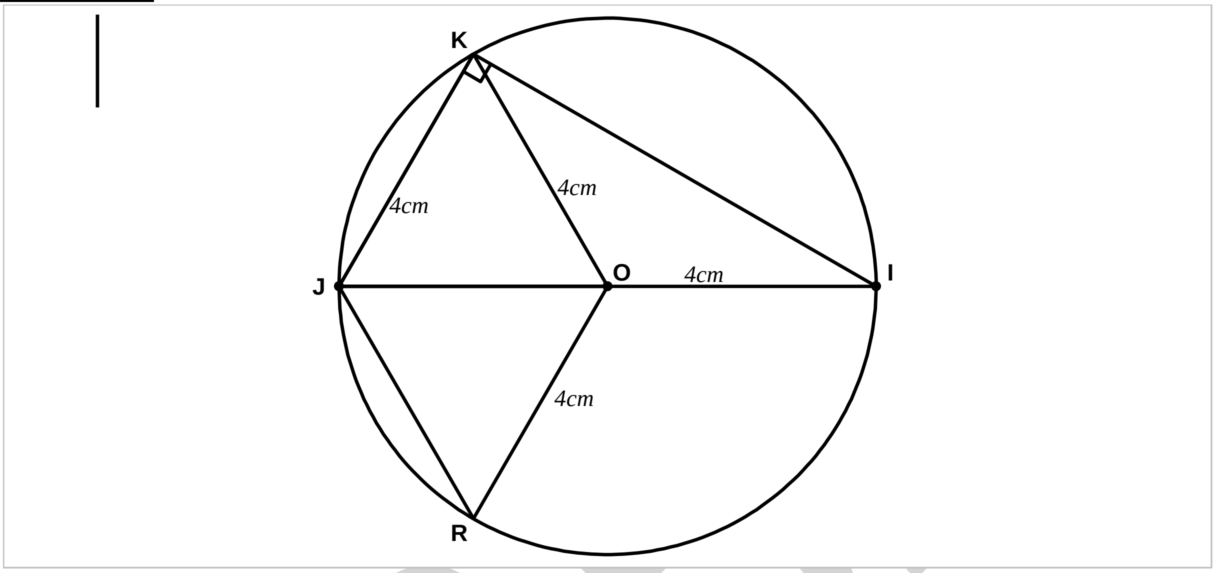
$$(3x)^2 = 64 \Leftrightarrow 9x^2 = 64 \Leftrightarrow x^2 = \frac{64}{9} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \; ou \; x = -\frac{8}{3}$$

Ces deux nombres relatifs sont : $-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}$

EXERCICE 3 : Venus : $105 \times 10^6 = 105\ 000\ 000km$; Mars : $225 \times 10^5 = 22\ 500\ 000km$
Terre : $1,5 \times 10^8 = 150\ 000\ 000km$. La terre est donc la planète la plus éloignée du soleil parmi ces planètes.

II. GEOMETRIE :

EXERCICE 1 :



1°) Le triangle IJK est un triangle rectangle en K, car O est le milieu de l'hypoténuse [IJ], c'est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle IJK. Donc IJK est un triangle rectangle.

2°) Calculons IK : D'après le théorème de Pythagore on a :

$$IJ^2 = JK^2 + IK^2 \Leftrightarrow IK^2 = IJ^2 - JK^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48 \Leftrightarrow IK = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$IK = 4\sqrt{3}$$

3°) Le triangle OJK est un triangle équilatéral (OJ=JK=OK=4cm).

4°) Le quadrilatère ROKJ est un losange car les diagonales sont perpendiculaires, puis deux côtés consécutifs ont la même longueur (JK=OK=4cm).

EXERCICE 2 : 1°) a°) A l'aide du rapporteur on construit un angle de 90° de sommet A et dont l'autre côté est [AB]. Avec le compas on prend un écartement de 8cm, on pique le compas en A et on trace un arc de cercle qui coupe la demi-droite qu'on vient de dessiner en un point : c'est le point C. On trace enfin le triangle dont les sommets sont les points A, B et C.
(Voir figure ci-dessous)

b°) Montrons que BC=10cm :
En appliquant le théorème de Pythagore au triangle ABC rectangle en A on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Leftrightarrow BC = \sqrt{100} = 10\ ;\ BC = 10cm$$

2°) a°) Voir figure

b°) Montrons que les droites (AC) et (EF) sont parallèles :
D'après Thalès ces droites sont parallèles ssi :

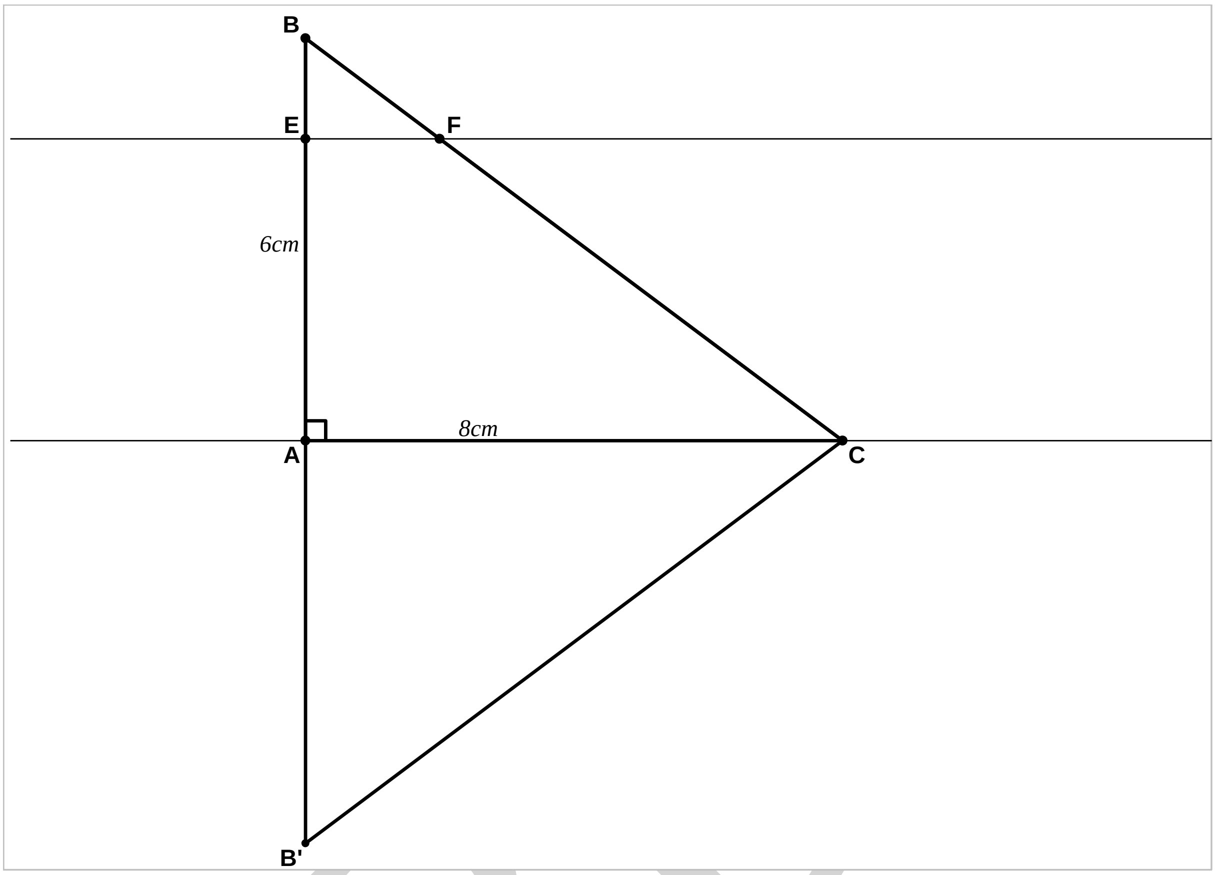
$$\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BF} \Leftrightarrow AB \times BF = BC \times BE \Leftrightarrow 6 \times 2,5 = 10 \times 1,5 \Leftrightarrow 15 = 15$$

Donc les droites (EF) et (AC) sont parallèles.

c°) Montrons que EF=2cm :
D'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BF} = \frac{AC}{EF} \Leftrightarrow \frac{AC}{EF} = \frac{AB}{BE} \Leftrightarrow EF = \frac{AC \times BE}{AB} = \frac{8 \times 1,5}{6} = 2\ ;\ EF = 2cm$$

3°) Montrons que le triangle BB'C est isocèle en C :
Le point C est situé sur la médiatrice du segment [BB'], il est donc à égale distance de ses deux extrémités (BC=B'C). Donc le triangle BB'C est isocèle en C.



DEF 2008 :

A. **ALGEBRE :**

EXERCICE 1 : a°) $320 = 2^6 \times 5$ et $\sqrt{320} = \sqrt{2^6 \times 5} = \sqrt{2^6} \times \sqrt{5} = 2^3\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$; $\sqrt{320} = 8\sqrt{5}$

b°) Vérifions que $4x - y = 0$

$$x = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \;;\; x = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{20-\sqrt{320}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{4(5-2\sqrt{5})}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \sqrt{4} = 2 \;;\; y = 2$$

$4x - y = 4 \times \frac{1}{2} - 2 = 2 - 2 = 0$ donc $4x - y = 0$

EXERCICE 2 : a°) Soit G le nombre de garçons du centre et F celui de filles :

$$G = \frac{910 \times 60}{100} = 546 \;;\; G = 546\ garçons \quad F = \frac{910 \times 40}{100} = 364 \;;\; F = 364\ filles$$

b°) Soit g le nombre de garçons admis et f celui de filles admises :

$\begin{cases} 910 = 2g + \frac{1}{2}f \\ g = 3f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4g + f = 182 & (1) \\ g = 3f & (2) \end{cases}$ En remplaçant g par $3f$ dans l'équation (1) on a :

$$12f + f = 1820 \Leftrightarrow 13f = 1820 \Leftrightarrow f = 140$$

En remplaçant f par 140 dans l'équation (2) on a : $g = 3(140) = 420$; $g = 420$

Soit X le pourcentage de garçons admis et Y celui de filles admises :

$$X = \frac{g \times 100}{G} = \frac{420 \times 100}{546} = 76,92\% \quad Y = \frac{f \times 100}{F} = \frac{140 \times 100}{364} = 38,46\%$$

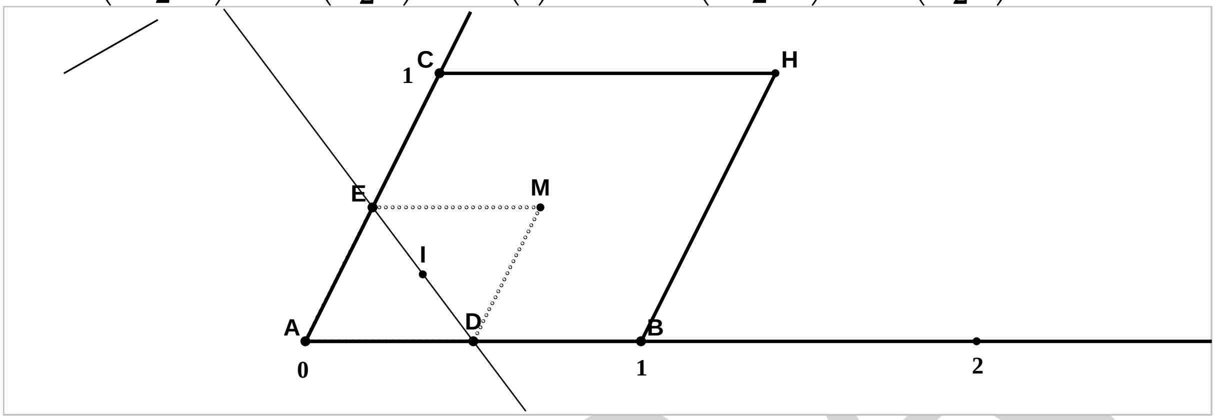
c°) Soit E le pourcentage d'élèves qui ont échoués :

$$E = \frac{350 \times 100}{910} = 38,46\%$$

B. <u>GEOMETRIE</u> :

1°) Trouvons les coordonnées du point D et du point E :

$$D\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\ \frac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow D\begin{pmatrix}\frac{0+1}{2}\\ \frac{0+0}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow D\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix} \qquad E\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_E}{2}\\ \frac{y_A+y_E}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow E\begin{pmatrix}\frac{0+0}{2}\\ \frac{0+1}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow E\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$



2°) Trouvons les coordonnées de M tel que : $\overrightarrow{BM} = h.\overrightarrow{BC}$

$$x_M - x_B = h(x_C - x_B) \Leftrightarrow x_M - 1 = h(0-1) \Leftrightarrow x_M - 1 = -h \Leftrightarrow x_M = -h+1$$

$$y_M - y_B = h(y_C - y_B) \Leftrightarrow y_M - 0 = h(1-0) \Leftrightarrow y_M = h \;;\; M\begin{pmatrix}-h+1\\ h\end{pmatrix}$$

Trouvons les coordonnées du point I milieu de $[AM]$:

$$I\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_M}{2}\\ \frac{y_A+y_M}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix}\frac{0-h+1}{2}\\ \frac{0+h}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix}\frac{-h+1}{2}\\ \frac{h}{2}\end{pmatrix}$$

3°) Trouvons une équation de la droite (DE) :

$$(DE): (x_E - x_D)(y - y_E) - (y_E - y_D)(x - x_E) = 0$$

$$\Leftrightarrow (DE): \left(0-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}-0\right)(x-0) = 0 \Leftrightarrow (DE): -\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}x = 0$$

$$\Leftrightarrow (DE): x + y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (DE): 2x + 2y - 1 = 0$$

4°) Vérifions que I appartient à (DE) :

$$2\left(\frac{-h+1}{2}\right) + 2\left(\frac{h}{2}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow -h + 1 + h - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Donc le point I appartient à la droite (DE).

5°) Reprenons les coordonnées de M et de I pour $h = \frac{1}{2}$:

$$M\begin{pmatrix}-h+1\\ h\end{pmatrix} \Leftrightarrow M\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad I\begin{pmatrix}\frac{-h+1}{2}\\ \frac{h}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

Calculons au moins de deux manières différentes les coordonnées de H :

<u>1ère manière</u> : Comme ABHC est un parallélogramme on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CH}$

$$x_B - x_A = x_H - x_C \Leftrightarrow 1 - 0 = x_H - 0 \Leftrightarrow x_H = 1 \;;\; y_B - y_A = y_H - y_C \Leftrightarrow 0 - 0 = y_H - 1$$
$$\Leftrightarrow y_H = 1. \textit{Donc on a } H(1;1)$$

<u>2ème manière :</u> M est le milieu du segment [AH] ($\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AM}$) :

$$x_H = 2x_M \Leftrightarrow x_H = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \qquad y_H = 2y_M \Leftrightarrow y_H = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \textit{Donc on a } H(1;1)$$

<u>DEF 2007</u> :

A. <u>ALGEBRE</u> :

<u>EXERCICE 1</u> : Soit x le prix d'un lot d'orange et y celui d'un paquet de carottes :

$$\begin{cases} \frac{24}{6}x + \frac{15}{5}y = 275 \\ \frac{42}{6}x + \frac{20}{5}y = 450 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 275 \\ 7x + 4y = 450 \end{cases}$$

En résolvant ce système on trouve $x = 50F$ et $y = 25F$

<u>EXERCICE 2</u> : Soient a, b, c les parts respectifs du premier, deuxième et troisième dans 180000F :

$$\frac{a}{400000} = \frac{b}{300000} = \frac{c}{200000} = \frac{a+b+c}{400000+300000+200000} = \frac{180000}{900000} = 0,2$$

$$\frac{a}{400000} = 0,2 \Leftrightarrow a = 400000 \times 0,2 = 80000 \;;\; a = 80000$$

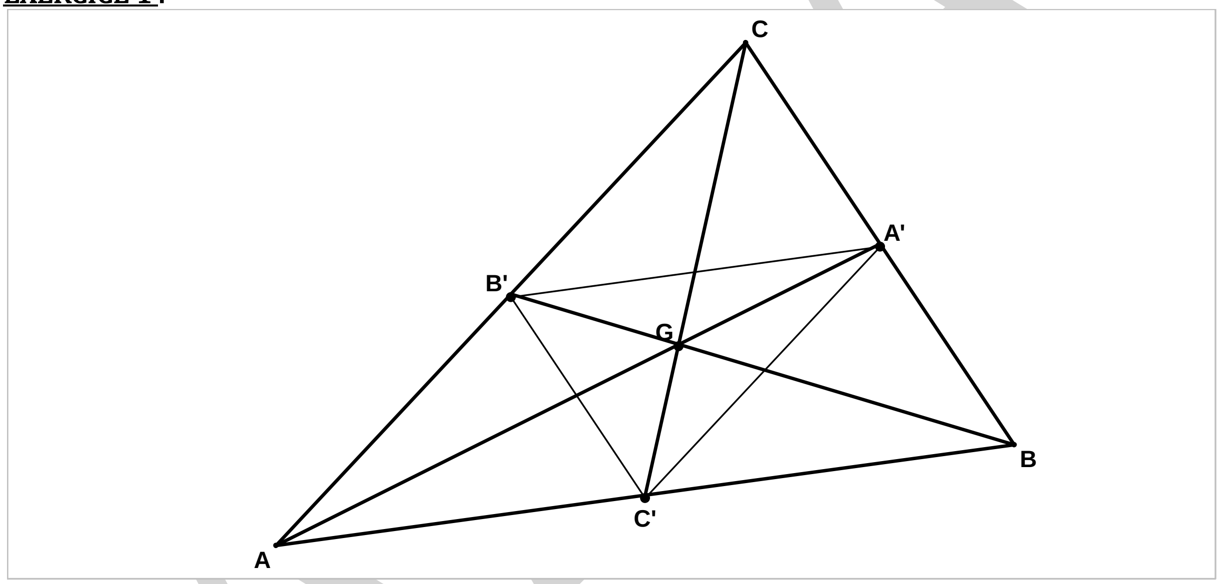
$$\frac{b}{300000} = 0,2 \Leftrightarrow b = 300000 \times 0,2 = 60000 \;;\; b = 60000$$

$$\frac{c}{200000} = 0,2 \Leftrightarrow c = 200000 \times 0,2 = 40000 \;;\; c = 40000$$

Donc le 1er aura 80.000F, le 2ème 60.000F et le 3ème 40.000F.

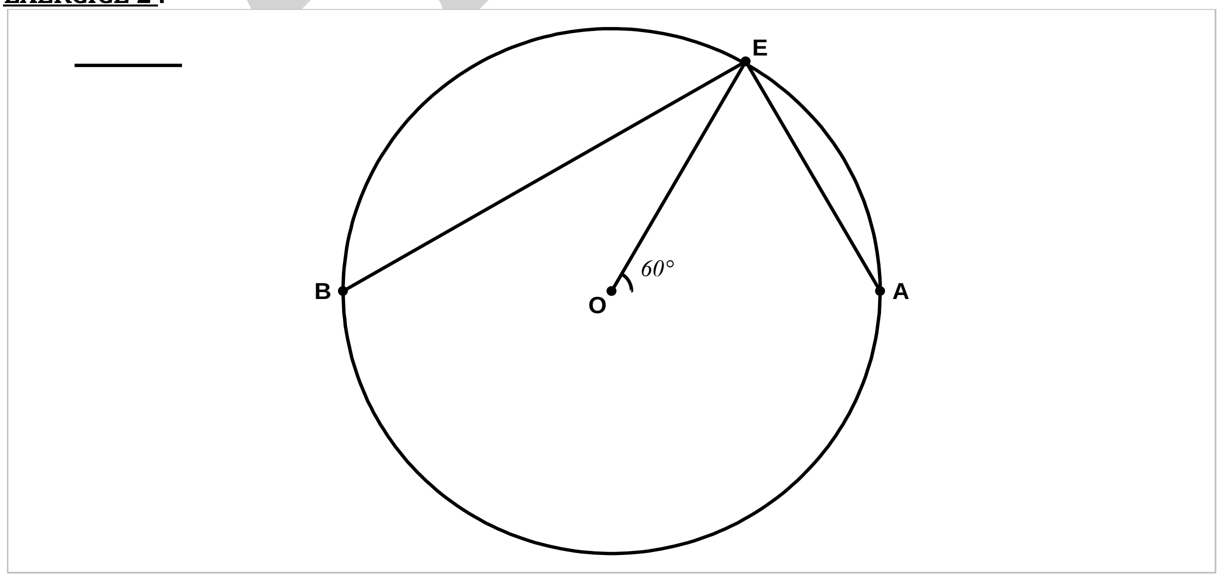
B. <u>GEOMETRIE</u> :

<u>EXERCICE 1</u> :



Le centre de gravité du nouveau triangle et le point G car dans une homothétie, la nature des triangles est conservée.

<u>EXERCICE 2</u> :



1°) Calculons en degrés la mesure des angles :
$\widehat{AEB} = 90°$ Car le point E appartient au cercle.
L'angle $\widehat{ABE}$ est un angle inscrit dans le cercle, elle est donc la moitié de l'angle au centre correspondant ($\widehat{AOE}$).

$$\widehat{ABE} = \frac{\widehat{AOE}}{2} = \frac{60}{2} = 30°$$

La somme des angles d'un triangle est égale à 180°, donc on a :

$$\widehat{AEB} + \widehat{ABE} + \widehat{BAE} = 180° \Leftrightarrow \widehat{BAE} = 180° - \left(\widehat{AEB} + \widehat{ABE}\right) = 180° - (90° + 30°) = 60°$$

Le triangle EAB est un triangle rectangle en E.
2°) Démontrons que le triangle OAE est un triangle équilatéral :
Les deux angles ($\widehat{O}$ et $\widehat{A}$) mesurent 60° chacun, alors le troisième angle ($\widehat{E}$) aussi mesure 60°. Donc le triangle OAE est un triangle équilatéral.

DEF 2006 :

A. ALGEBRE :

EXERCICE 1 : a°) Exprimons $\frac{1}{n}$ sous la forme $\frac{a+b\sqrt{5}}{c}$:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{1^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{2-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad \frac{1}{n} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

b°) Démontrons que $n^2 - n - 1 = 0$

$$n^2 - n - 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1 = \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1$$

$$= \frac{1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}-4}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Donc $n^2 - n - 1 = 0$
c°) Démontrons que $\frac{1}{n} = n - 1$:

$$n - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}-2}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{n} \; ; \; \frac{1}{n} = n - 1$$

d°) Retrouvons le résultat établit en b°) :

$$\frac{1}{n} = n - 1 \Leftrightarrow n(n-1) = 1 \Leftrightarrow n^2 - n = 1 \Leftrightarrow n^2 - n - 1 = 0$$

EXERCICE 2 : 1°) Déterminons l'ensemble A des nombres réels qui vérifient l'inégalité :

$$\frac{x+3}{2} + \frac{x-5}{2} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x + 3 + x - 5 \leq 3 \Leftrightarrow 2x - 2 \leq 3 \Leftrightarrow 2x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

$$S = \left\{x/x \in \mathbb{R}; x \leq \frac{5}{2}\right\}$$

2°) Déterminons l'ensemble B des nombres naturels qui vérifient l'inégalité :

$$B = \{x/x \in \mathbb{N}; x \leq 2\}$$

3°) Déterminer l'ensemble C des nombres rationnels qui sont strictement compris entre -9 et -6 et qui ont 2 comme dénominateur et qui vérifient l'inégalité :

$$C = \left\{-\frac{13}{2}; -\frac{14}{2}; -\frac{15}{2}; -\frac{16}{2}; -\frac{17}{2}\right\}$$

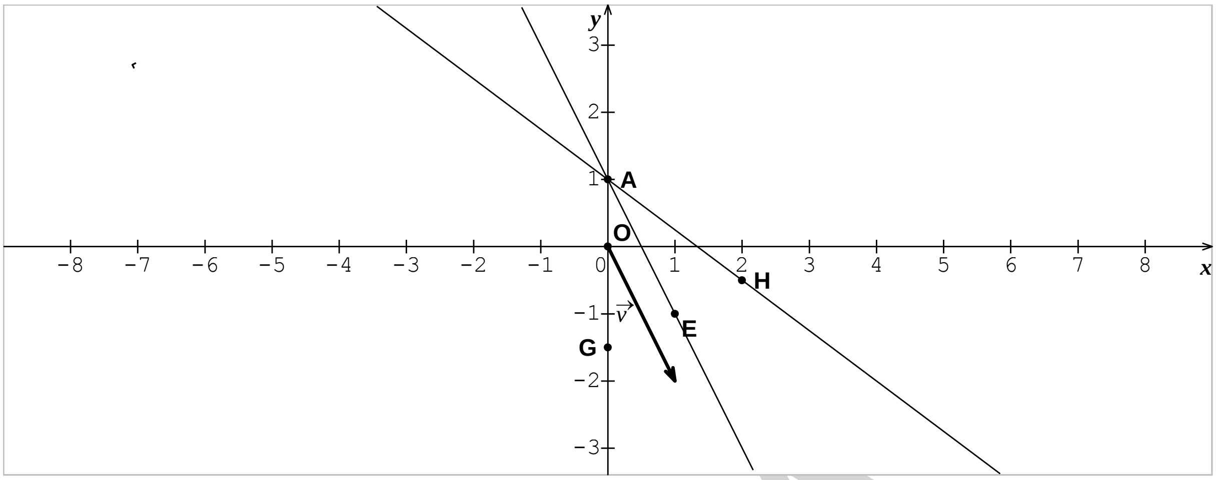
B. GEOMETRIE :

1°) Trouvons une équation de la droite Δ:

$$\Delta: x_{\vec{V}}(y - y_E) - y_{\vec{V}}(x - x_E) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta: 1(y+1) + 2(x-1) \Leftrightarrow \Delta: y + 1 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \Delta: 2x + y - 1 = 0$$

2°) On trace la perpendiculaire passant par E à la droite Δ qui coupe l'axe des ordonnées en un point. On trace deux arcs de cercle centré en ce point qui coupent Δ en deux point, on trace ensuite de l'autre côté de Δ deux arcs de cercle de centre respectifs les deux nouveaux points. Ces arcs se coupent en un nouveau point. On trace enfin la droite D passant par A et ce dernier point.



3°) Calculons les coordonnées de G. G a pour abscisse 0 car il est sur l'axe des ordonnées.
Calculons l'ordonnée de G. on sait que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux :

$$x_{\vec{V}}(x_G - x_E) + y_{\vec{V}}(y_G - y_E) = 0 \Leftrightarrow 1(0-1) - 2(y_G + 1) = 0 \Leftrightarrow -1 - 2y_G - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2y_G - 3 = 0 \Leftrightarrow y_G = -\frac{3}{2} \text{ . Donc on a } G\left(0; -\frac{3}{2}\right).$$

H appartient à D car c'est le symétrique de G par rapport à la bissectrice Δ.
Calculons les coordonnées de H : $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{EH}$

$$x_E - x_G = x_H - x_E \Leftrightarrow x_H = 2x_E - x_G = 2(1) - 0 = 2$$

$$y_H = 2y_E - y_G = 2(-1) - \left(-\frac{3}{2}\right) = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \text{ . Don on a } H\left(2; -\frac{1}{2}\right).$$

Trouvons une équation de la droite D :

$$D: (x_H - x_A)(y - y_A) - (y_H - y_A)(x - x_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow D: (2-0)(y-1) - \left(-\frac{1}{2} - 1\right)(x - 0) = 0 \Leftrightarrow D: 2y - 2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow D: 3x + 4y - 4 - 3 = 0 \Leftrightarrow D: 3x + 4y - 7 = 0$$

DEF 2005 :

A. ALGEBRE :

EXERCICE 1 : a°) La diagonale d'un carré partage ce carré en deux triangles rectangles. En considérant l'un de ce triangle et en appliquant le théorème de Pythagore on a :

$$d^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 8^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 64$$

b°) Donnons une valeur approchée de x :

$$2x^2 = 64 \Leftrightarrow x^2 = 32 \Leftrightarrow x = \sqrt{32} = 5,65 \quad ; \quad x = 5,65cm$$

EXERCICE 2 : On sait que $B = PV - PA$
a°) Soit x le nombre des œufs que Binta a acheté :

$$60(x-10) - 50x = \frac{50x}{10} \Leftrightarrow 60x - 600 - 50x = 5x \Leftrightarrow 10x - 5x = 600 \Leftrightarrow 5x = 600$$

$$\Leftrightarrow x = 120$$

b°) Soit Ble bénéfice réalisé est :

$$B = \frac{50 \times 120}{10} = 600 \text{ ; } B = 600F$$

EXERCICE 3 : 1°) a°) Mettons A sous la forme $a + b\sqrt{2}$:

$$A = 4\sqrt{8} - 3\sqrt{18} + \sqrt{121} = 4\sqrt{4 \times 2} - 3\sqrt{9 \times 2} + 11 = 4\sqrt{4} \times \sqrt{2} - 3\sqrt{9} \times \sqrt{2} + 11$$

$$= 8\sqrt{2} - 9\sqrt{2} + 11 = 11 - \sqrt{2} \text{ ; } A = 11 - \sqrt{2}$$

b°) Donnons un encadrement de A :

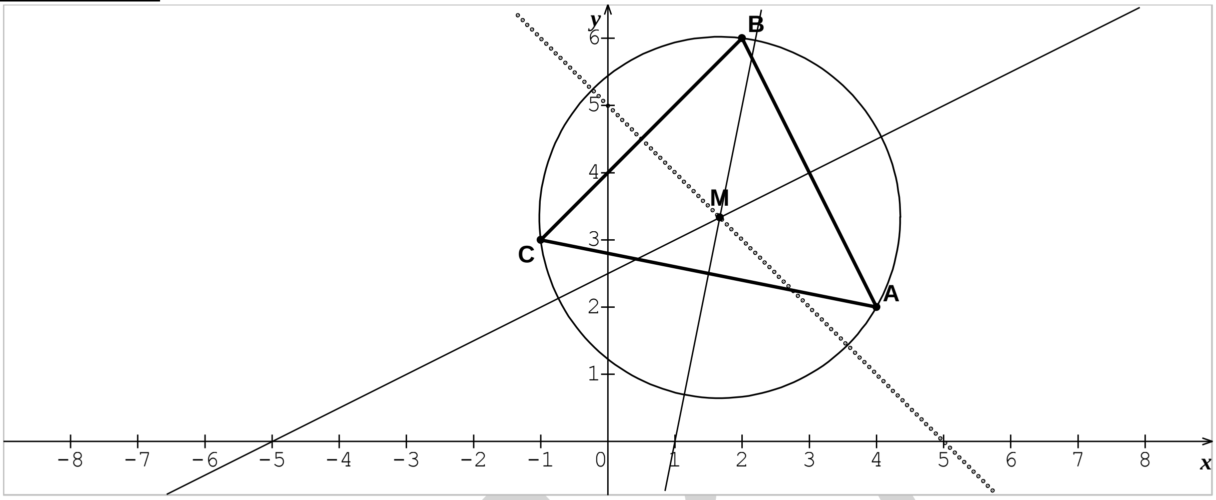
$$1,41 \leq \sqrt{2} < 1,42 \Leftrightarrow -1,42 \leq -\sqrt{2} < 1,41 \Leftrightarrow 11 - 1,42 \leq 11 - \sqrt{2} < 11 - 1,41$$

$$\Leftrightarrow 9,58 \leq A < 9,59 \qquad 9,58 \leq A < 9,59$$

2°) Résolvons :

$$\sqrt{x+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = 5 \Leftrightarrow x+4 = 25 \Leftrightarrow x = 21\ ; S = \{21\}$$

B. **GEOMETRIE :**



1°) Voir figure.

2°) Trouvons une équation de la droite Δ et une équation de la droite Δ' :

Soit N et T les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$, on a : $N(3;4)$ et $T(1,5;2,5)$

$$\Delta: (x_B - x_A)(x - x_N) + (y_B - y_A)(y - y_N) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta: (2-4)(x-3) + (6-2)(y-4) = 0 \Leftrightarrow \Delta:\ -2(x-3) + 4(y-4) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta: x - 3 - 2(y-4) = 0 \Leftrightarrow \Delta: x - 2y - 3 + 8 = 0 \Leftrightarrow \Delta: x - 2y + 5 = 0$$
$$\Delta': (x_C - x_A)(x - x_T) + (y_C - y_A)(y - y_T) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta': (-1-4)(x-1,5) + (3-2)(y-2,5) = 0 \Leftrightarrow \Delta': -5(x-1,5) + 2(y-2,5) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta': 5x - 7,5 - y + 2,5 = 0 \Leftrightarrow \Delta': 5x - y - 5 = 0$$

Les coordonnées du point M sont les solutions du système : $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ 5x - y - 5 = 0 \end{cases}$ En résolvant ce système on trouve $x = \frac{5}{3}$ et $y = \frac{10}{3}$. Donc $M\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3}\right)$.

3°) Montrons que M appartient à la médiatrice de $[BC]$:

Les médiatrices d'un triangle sont concourantes. Δ et Δ' sont les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ et elles se coupent en M. Donc la médiatrices de $[BC]$ passe aussi par le point M.

4°) Traçons le cercle circonscrit au triangle (voir figure) et calculons son rayon :

$$r = AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{10}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{65}{9}}$$
$$r = \frac{1}{3}\sqrt{65}$$

DEF 2004 :

A. **ALGEBRE :**

EXERCICE 1 : On donne $a = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$. On pose $u = a + b$.

1°) Calculons :

$$a \times b = \left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right) = \sqrt{7^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{49 - 48} = \sqrt{1} = 1 \quad ; \quad a \times b = 1$$

2°) Calculons u^2 :

$$u^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2a \times b + b^2 = 7 - 4\sqrt{3} + 2 \times 1 + 7 + 4\sqrt{3} = 16 \quad ; \quad u^2 = 16$$

EXERCICE 2 : $f(x) = 3 - 2x$ et $g(x) = x + 2$

1°) Comparons $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$:

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = 3 - 2(x+2) = 3 - 2x - 4 = -2x - 1 \ ; \ f \circ g(x) = -2x - 1$$
$$g \circ f(x) = g[f(x)] = 3 - 2x + 2 = -2x + 5 \ ; \ g \circ f(x) = -2x + 5$$
$$f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$$

2°) Calculons le réel a

$$a = f(\sqrt{2}) \times g(\sqrt{2}) = (3 - 2\sqrt{2})(\sqrt{2} + 2) = 3\sqrt{2} + 6 - 4 - 4\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} \ ; \ a = 2 - \sqrt{2}$$

a est un nombre positif car $2 > \sqrt{2}$

3°) Donnons un encadrement de a :

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \Leftrightarrow -1,42 < -\sqrt{2} < -1,41 \Leftrightarrow 2 - 1,42 < 2 - \sqrt{2} < 2 - 1,41$$
$$\Leftrightarrow 0,58 < a < 0,59$$

4°) Résolvons :

a°) $\frac{3}{2}f(x) - \frac{1}{2}g(x) = -\frac{1-2x}{6} \Leftrightarrow 9f(x) - 3g(x) = -1 + 2x \Leftrightarrow 9(3 - 2x) - 3(x+2) = 2x - 1$

$$\Leftrightarrow 27 - 18x - 3x - 6 = 2x - 1 \Leftrightarrow -18x - 3x - 2x = -27 + 6 - 1$$
$$\Leftrightarrow -23x = -22 \Leftrightarrow x = \frac{22}{23} \ ; \ S = \left\{\frac{22}{23}\right\}$$

b°) $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow 3 - 2x \geq x + 2 \Leftrightarrow -2x - x \geq 2 - 3 \Leftrightarrow -3x \geq -1 \Leftrightarrow 3x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$

$$S = \left\{x / x \in \mathbb{R}; x \leq \frac{1}{3}\right\}$$

B. **GEOMETRIE :**

1°) Déterminons les coordonnées du point C milieu de $[AB]$:

$$C\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{x_A + x_B}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow C\begin{pmatrix} \frac{-1+5}{2} \\ \frac{0+6}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow C\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Déterminons l'équation la médiatrice de [AB] :

$$\Delta: (x_B - x_A)(x - x_C) + (y_B - y_A)(y - y_C) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta: (5+1)(x-2) + (6-0)(y-3) = 0 \Leftrightarrow \Delta: 6(x-2) + 6(y-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta: x - 2 + y - 3 = 0 \Leftrightarrow \Delta: x + y - 5 = 0$$

2°) Vérifions que le point P appartient à Δ :

$$x + y - 5 = 0 \ , \qquad P(-3; 8) \Leftrightarrow -3 + 8 - 5 = 0 \Leftrightarrow 5 - 5 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0. Donc\ P \in \Delta$$

Le triangle ACP est un triangle rectangle en C.

3°) Déterminons les coordonnées du point I : (I est le milieu de l'hypoténuse [AP])

$$I\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_P}{2} \\ \frac{y_A + y_P}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} \frac{-1-3}{2} \\ \frac{0-8}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Calculons le rayon du cercle circonscrit au triangle ACP :

$$r = AI = \sqrt{(x_I - x_A)^2 + (y_I - y_A)^2} = \sqrt{(-2+1)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17} \ ; \ r = \sqrt{17}$$

4°) a°) Déterminons les coordonnées du point Q ($\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{CP}$) :

$$x_Q - x_A = x_P - x_C \Leftrightarrow x_Q = x_P - x_C + x_A = -3 - 2 - 1 = -6$$
$$y_Q = y_P - y_C + y_A = 8 - 3 + 0 = 5. Donc\ Q(-6; 5)$$

b°) Vérifions que Q appartient au cercle :

Q appartient au cercle ssi : $r = QI$

$$QI = \sqrt{(x_I - x_Q)^2 + (y_I - y_Q)^2} = \sqrt{(-2+6)^2 + (-4+5)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17} = r$$

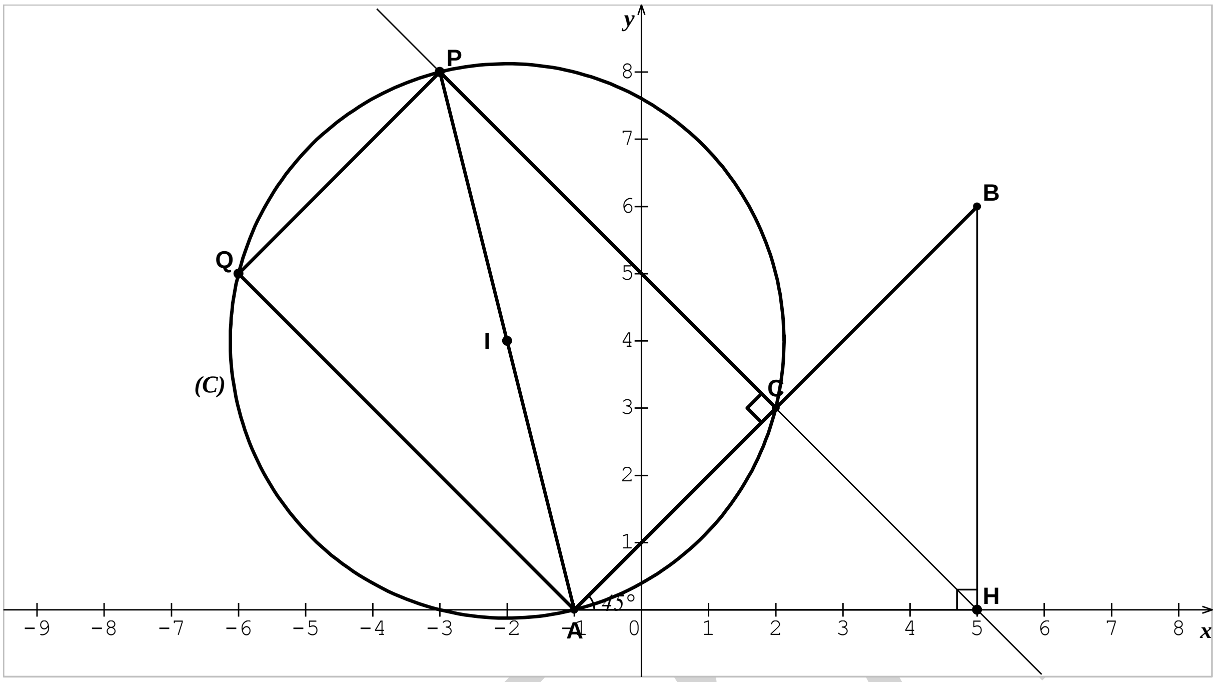
Donc le point Q appartient au cercle.

c°) Le quadruplet de points ACPQ est un rectangle :

5°) a°) Calculons les coordonnées de H (H a pour ordonnée 0 car il est sur l'axe des abscisses).

$$H(x; 0) \in \Delta \Leftrightarrow x + 0 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5. Donc\ H(0; 5)$$

b°) la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAH}$ est : 45° car BAH est un triangle isocèle rectangle en H.



DEF 2003 :

A. ALGEBRE :

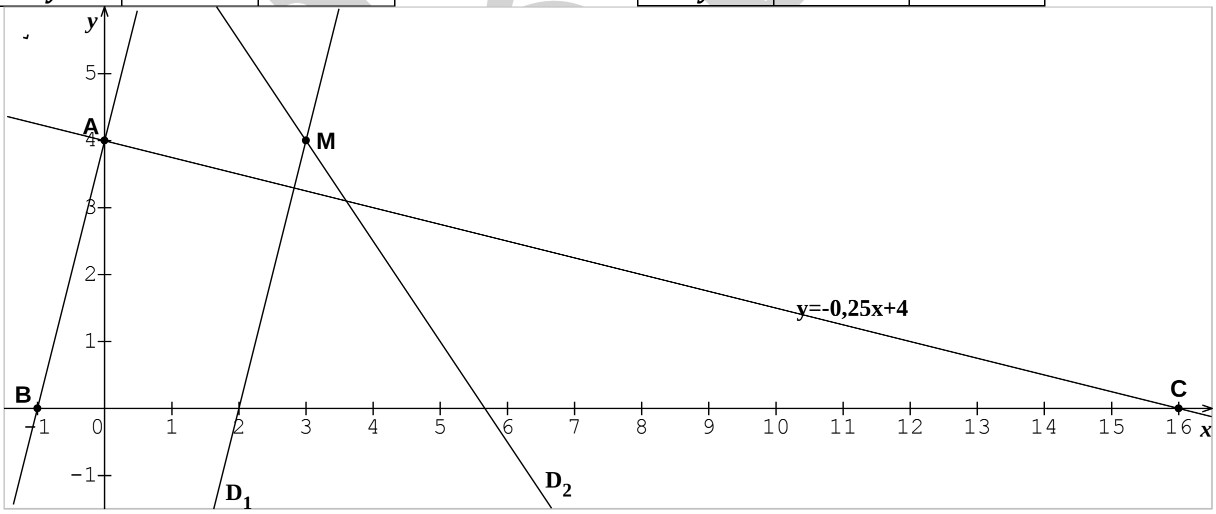
1°) Résolvons graphiquement ce système (Les solutions de ce système sont les coordonnées du point d'intersection des droites représentée par les équations du système) :

$D_1 : 4x - y = 8$

x	2	1
y	0	-4

$D_2 : 3x + 2y = 17$

x	3	5
y	4	1



$$S = \{(3; 4)\}$$

2°) En résolvant algébriquement le même système on trouve la même solution : $S = \{(3; 4)\}$

3°) Soit D la droite passant par A et parallèle à la droite d'équation (1) :

Le vecteur $\vec{V}(1; 4)$ est un vecteur directeur de cette droite. Cherchons l'équation de la droite D :

$$D: x_{\vec{V}}(y - y_A) - y_{\vec{V}}(x - x_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow D: 1(y - 4) - 4(x - 0) = 0 \Leftrightarrow D: y - 4 - 4x = 0 \Leftrightarrow D: 4x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow D: y = 4x + 4$$

Montrons que la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x + 4$ la rencontre au point A :

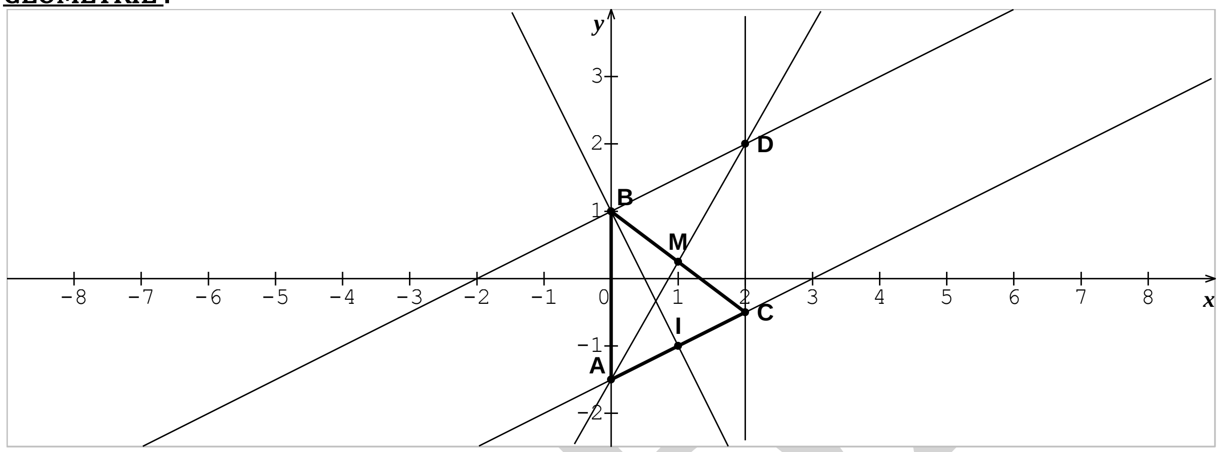
En résolvant le système $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + 4 \\ y = 4x + 4 \end{cases}$ on trouve $x = 0$ et $y = 4$. Donc ces droites se rencontrent au point A.

4°) Prouvons que ABC est un triangle rectangle :
Le réel $a = -\frac{1}{4}$ est le coefficient directeur de la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x + 4$ et $a' = 4$ est le coefficient directeur de D. Ces droites sont perpendiculaires car : $aa' = 4\left(-\frac{1}{4}\right) = -1$; $aa' = -1$.
Donc le triangle ABC est rectangle en A.
Calculons les mesures des côtés de l'angle droit :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1+0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \quad ; \quad AB = \sqrt{17}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(16-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{256+16} = \sqrt{272} \ ; \ AC = 4\sqrt{17}$$

B. GEOMETRIE :



1°) Calculons l'abscisse du pont I pour $y = -1$:

$$y + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow -1 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \quad ; \quad I(1; -1)$$

Calculons l'ordonnée du point B pour $x = 0$:

$$y + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow y + 2(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \quad ; \quad B(0; 1)$$

2°) Ecrivons une équation de la droite (Δ) :
Le vecteur $\vec{U}(-1; 2)$ est un vecteur directeur de la droite (d).

$$(\Delta): x_{\vec{U}}(x - x_I) + y_{\vec{U}}(y - y_I) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\Delta): -1(x-1) + 2(y+1) = 0 \Leftrightarrow (\Delta): x - 1 - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow (\Delta): x - 2y - 3 = 0$$

Calculons les coordonnées de A (x=0) :

$$x - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2y = -3 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}.\, Donc\ on\ a\ A(0; -1,5)$$

3°) Calculons les coordonnées du point C (symétrique de A par rapport à I ; $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$) :

$$x_I - x_A = x_C - x_I \Leftrightarrow x_C = 2x_I - x_A = 2(1) - 0 = 2 \ ; \ y_C = 2y_I - y_A = 2(-1) + 1,5 = -0,5$$

$$C\begin{pmatrix} 2 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

4°) Trouvons les valeurs du sinus et du cosinus de l'angle $\widehat{IAB}$:
IAB est un triangle rectangle en I dont AB est son hypoténuse, on a :

$$AB = 2,5 \ , \qquad AI = \sqrt{1,25} \ ; \ IB = \sqrt{3}$$

$$\sin \widehat{IAB} = \frac{IB}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2,5} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \qquad \cos \widehat{IAB} = \frac{AI}{AB} = \frac{\sqrt{1,25}}{2,5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

5°) Montrons que la droite (BD) est parallèle à la droite (Δ) :
$\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) et le quadrilatère ABCD est un parallélogramme, donc les côtés opposés sont parallèles. Donc les droites (BD) et (Δ) qui sont les supports respectifs des côtés [BD] et [CD] sont parallèles.
D appartient à la médiane (AM) du triangle ABC issue de A car (AM) est une diagonale du parallélogramme ABCD, elle relie donc deux sommets opposés (A et D).

DEF 2002 :

A. ALGEBRE :

On considère les applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :
$f(x) = (2x+3)^2 - (x+6)^2$ et $g(x) = (x+3)(5-x) + (2x+6)$

1°) Factorisons $f(x)$ et $g(x)$:

$f(x) = (2x+3)^2 - (x+6)^2$
$\quad = [(2x+3) - (x+6)][(2x+3) + (x+6)]$
$\quad = (2x+3-x-6)(2x+3+x+6) = (x-3)(3x+9)$

$f(x) = 3(x-3)(x+3)$

$g(x) = (x+3)(5-x) + (2x+6)$
$\quad = (x+3)(5-x) + 2(x+3) = (x+3)(5-x+2)$

$g(x) = (x+3)(7-x)$

2°) Développons $f(x)$ et $g(x)$:

$f(x) = 3(x-3)(x+3) = 3(x^2-9) = 3x^2 - 27 \qquad f(x) = 3x^2 - 27$

$g(x) = (x+3)(7-x) = 7x - x^2 + 21 - 3x = 21 + 4x - x^2 \qquad g(x) = 21 + 4x - x^2$

3°) Résolvons les équations :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow 3 \neq 0; x-3 = 0 \text{ ou } x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$$
$$S = \{-3; 3\}$$
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(7-x) = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0 \text{ ou } 7-x = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 7\ ;\ S = \{-3; 7\}$$
$$g(x) = 21 \Leftrightarrow 21 + 4x - x^2 = 21 \Leftrightarrow 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(4-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4 - x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4 \qquad S = \{0; 4\}$$
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3(x-3)(x+3) = (x+3)(7-x) \Leftrightarrow 3(x-3)(x+3) - (x+3)(7-x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+3)(3x-9-7+x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(4x-16) = 0$$
$$\Leftrightarrow x+3 = 0 \text{ ou } 4x-16 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 4 \qquad S = \{-3; 4\}$$

4°) Résolvons :

$$(x+3)(7-x) \geq 0 \Leftrightarrow x+3 \geq 0 \text{ et } 7-x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3 \text{ et } x \leq 7$$
$$S = \{x/x \in \mathbb{R};\ -3 \leq x \leq 7\}$$

$g(x)$ est positif ou nul ssi $x \in [-3; 7]$.

5°) a°) Déterminons le domaine de définition D_Q de $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$D_Q = \{x/x \in \mathbb{R}; g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-3; 7\}$$

Simplifions $Q(x)$:

$$Q(x) = \frac{3(x-3)(x+3)}{(x+3)(7-x)} = \frac{3x-9}{7-x} \qquad Q(x) = \frac{3x-9}{7-x}$$

Résolvons :

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3 \quad S = \{3\}$$
$$Q(x) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3x-9}{7-x} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(3x-9) = -2(7-x) \Leftrightarrow 9x - 27 = 2x - 14$$
$$\Leftrightarrow 9x - 2x = 27 - 14 \Leftrightarrow 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2 \qquad S = \{2\}$$

B. GEOMETRIE :

1°) Démontrons que le point C appartient à la droite $(\Delta 1)$: $y = \frac{1}{2}x + 3$

$$C\left(5; \frac{11}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{11}{2} = \frac{1}{2}(5) + 3 \Leftrightarrow \frac{11}{2} = \frac{5+6}{2} \Leftrightarrow \frac{11}{2} = \frac{11}{2}$$

Donc le point C appartient à cette droite :

2°) Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{matrix}X\\ Y\end{matrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{matrix}X'\\ Y'\end{matrix}$ sont respectivement des vecteurs directeurs des droites $(\Delta 1)$ et $(\Delta 2)$. Ces droites sont parallèles ssi :

$$XY' - X'Y = 0 \Leftrightarrow 1\left(\frac{3}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Donc ces droites sont parallèles.

3°) Calculons les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-3\\ 3-\frac{3}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\ y_C - y_A\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5-3\\ \frac{11}{2}-\frac{3}{2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{matrix}X\\Y\end{matrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\begin{matrix}X'\\Y'\end{matrix}$$

Le triangle ABC est rectangle en A ssi :

$$XX' + YY' = 0 \Leftrightarrow -3(2) + 4\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -6 + 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Donc ABC est triangle rectangle en A.

4°) Démontrons que le quadrilatère BACN est un rectangle :

Le point M est le milieu des segments [AN] et [BC] donc les diagonales se coupent en leur milieu, de plus l'angle $\widehat{BAC}$ est un angle droit. Donc le quadrilatère BACN est un rectangle.

5°) Démontrons que B est le milieu du segment [EN] :

- On sait que BN=AC car BACN est un rectangle et BE=AC car E est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$ donc BN=BE, d'où B est le milieu du segment [EN].

Démontrons que E appartient à $(\boldsymbol{\Delta 2})$:

- Etant donné que les droites $(\boldsymbol{\Delta 1})$ et $(\boldsymbol{\Delta 2})$ sont parallèles et les ponts A et C sont respectivement situés sur ces deux droites. Le point E est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$, donc les points B et E sont respectivement situés sur les droites $(\boldsymbol{\Delta 1})$ et $(\boldsymbol{\Delta 2})$ car la translation conserve la distance. D'où le point E appartient à la droite $(\boldsymbol{\Delta 2})$.