

# MATHÉMATIQUES

## PREMIÈRES S ET E

 **Fomesoutra.com**  
*ça soutra !*

# Géométrie

C. GAUTIER

C. THIERCÉ



HACHETTE  
*Classiques*

POINTS ET VECTEURS  
DU PLAN

## I - VECTEURS DU PLAN

La notion de vecteur, en mathématique, est relativement récente puisqu'elle est apparue au 19<sup>e</sup> siècle. En 1832, Herman Günther Grassmann constate qu'en raison de leur sens les distances  $AB$  et  $BA$  sont opposées et arrive à la notion de « somme géométrique » qui permet d'étendre la formule  $AB + BC = AC$  à trois points quelconques.

Dégagées par Grassmann, Hamilton et Möbius, les opérations et règles du calcul vectoriel furent précisées par l'Anglais William Clifford (1845-1879), à qui l'on doit leur formulation moderne.

A l'origine un vecteur était un segment orienté libre, c'est-à-dire pouvant occuper, dans le plan ou l'espace, toutes les positions qui ne modifient ni sa direction, ni son sens, ni sa longueur.

Aujourd'hui on le définit à partir des notions de bipoint, de milieu d'un bipoint, d'équipollence de deux bipoints.

## RAPPELS

a) Dans le plan  $\mathcal{F}$ , à tout bipoint  $(A, B)$  est associé un **vecteur**  $\vec{u}$  (figure 1). Le bipoint  $(A, B)$  est un **représentant** du vecteur  $\vec{u}$ ; on écrit :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .

L'ensemble des vecteurs du plan  $\mathcal{F}$  est noté  $\mathcal{U}$ , et est appelé **plan vectoriel**  $\mathcal{U}$ .

b) Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{A'B'}$  associés à deux bipoints  $(A, B)$  et  $(A', B')$  sont égaux si, et seulement si, ces bipoints sont **équipollents**.

Autrement dit :

L'égalité  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$  signifie que les bipoints  $(A, B)$  et  $(A', B')$  ont même milieu, ou encore que  $ABB'A'$  est un parallélogramme (figures 2 et 3).

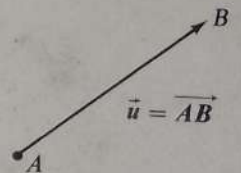
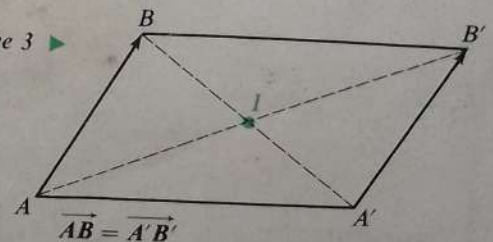


Figure 1

Figure 2



Figure 3



c) Le **vecteur nul** est le vecteur ayant pour représentants les bipoints  $(A, B)$  tels que  $A = B$ ; il est noté  $\vec{0}$ .

L'égalité  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$  signifie donc que les points  $A$  et  $B$  sont confondus.

d) Pour tout point  $O$  du plan  $\mathcal{F}$  et pour tout vecteur  $\vec{u}$ , il existe un unique point  $M$  de  $\mathcal{F}$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ . Si  $(A, B)$  est un représentant de  $\vec{u}$ ,  $M$  est le symétrique de  $A$  par rapport au milieu  $I$  de  $[O, B]$  (figure 4).

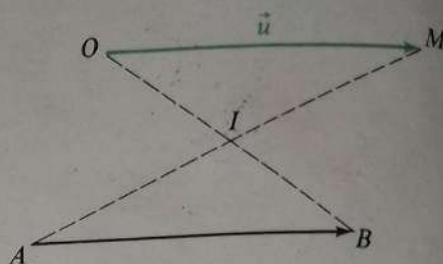


Figure 4

## REMARQUE :

Un point  $O$  du plan étant choisi, l'application qui, à tout point  $M$ , associe le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est une bijection de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{U}$ . En effet, la propriété rappelée ci-dessus signifie que tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathcal{U}$  possède un antécédent unique.

e) La **direction** d'un vecteur  $\vec{u}$  non nul de représentant  $(A, B)$  est la direction de la droite  $(AB)$ . Son **sens** est le sens de la demi-droite  $[AB)$ .

f) La **norme** d'un vecteur  $\vec{u}$  de représentant  $(A, B)$  est la distance  $AB$ .  
La norme de  $\vec{u}$ , aussi appelée **longueur** de  $\vec{u}$ , est notée  $\|\vec{u}\|$ .

Pour tout bipoint  $(A, B)$ , on a :  $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$ .

La norme du vecteur nul est nulle, et, réciproquement, tout vecteur de norme nulle est nul. Tout vecteur de norme égale à 1 est dit **unitaire**.

## ADDITION DES VECTEURS

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan  $\mathcal{F}$ . A partir d'un point  $A$  quelconque de  $\mathcal{F}$ , construisons les points  $B$  et  $C$ , tels que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  et  $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$  (figure 5). Le vecteur  $\overrightarrow{AC}$  ainsi obtenu ne dépend pas du choix du point  $A$ ; ce vecteur, qui ne dépend que des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , est appelé **somme** des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , et est noté  $\vec{u} + \vec{v}$ .

Il résulte de cette définition, qu'étant donnés trois points quelconques  $A, B, C$  du plan :

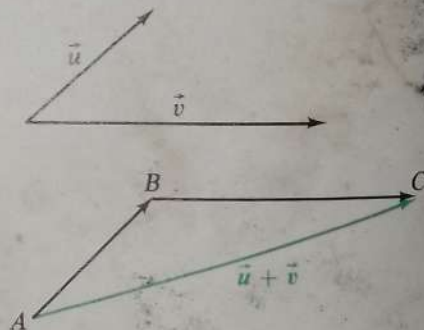


Figure 5

$$\text{Relation de Chasles : } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

De plus, comme  $AC \leq AB + BC$  (figure 5), il s'ensuit :  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .

L'application qui, à deux vecteurs quelconques  $\vec{u}, \vec{v}$  associe leur somme  $\vec{u} + \vec{v}$ , est appelée **addition vectorielle**.

Cette addition vérifie les propriétés suivantes :

## PROPRIÉTÉS

1° Elle est **associative** :  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ .

2° Elle est **commutative** :  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .

3° Le vecteur nul est **élément neutre** :  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ .

4° Pour tout vecteur  $\vec{u}$ , il existe un vecteur  $\vec{u}'$ , unique, tel que  $\vec{u} + \vec{u}' = \vec{u}' + \vec{u} = \vec{0}$ .  
Le vecteur  $\vec{u}'$  est appelé **opposé** du vecteur  $\vec{u}$ , et est noté  $-\vec{u}$ .

L'opposé d'un vecteur  $\vec{u}$  de représentant  $(A, B)$  est le vecteur de représentant  $(B, A)$  :

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

La somme de deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  s'obtient aussi en construisant un parallélogramme  $ABDC$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  et  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$  ( $D$  est le symétrique de  $A$  par rapport au milieu  $I$  de  $[B, C]$ ). On a alors (figure 6) :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}.$$

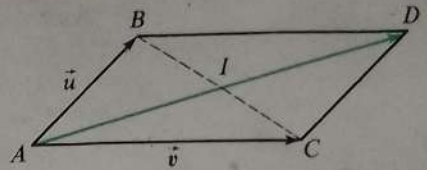


Figure 6

### DIFFÉRENCE DE DEUX VECTEURS

On appelle **différence** de deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  le vecteur, noté  $\vec{u} - \vec{v}$ , défini par :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

Trois points quelconques  $A, B, C$ , du plan  $\mathcal{F}$ , vérifient la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.}$$

Cette égalité permet de faire jouer à un point donné,  $A$ , du plan un rôle privilégié.

### ★ Activité : Translation

Un vecteur  $\vec{u}$  du plan  $\mathcal{F}$  étant donné, la **translation de vecteur  $\vec{u}$**  est l'application  $t$  de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$  qui, à tout point  $M$  associe le point  $M'$  tel que  $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$  ( $M'$  est l'**image** de  $M$  par  $t$ ). On note  $M' = t(M)$ .

1° Construire sur une même figure un losange  $ABCD$  tel que  $AC = 6$  cm et  $BD = 4$  cm, et les images des sommets  $A, B, C, D$  par la translation de vecteur  $\vec{u}$ , dans les cas suivants :

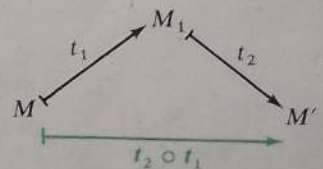
a)  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ;    b)  $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ ;    c)  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ;    d)  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .

2° Soit  $t$  une translation de vecteur  $\vec{u}$ . Démontrer que tout point  $M'$  du plan possède un unique **antécédent**,  $M$ , par  $t$  ( $M$  est un antécédent de  $M'$  par  $t$  si  $t(M) = M'$ ).

On exprime cette propriété en disant que  $t$  est une **bijection**, ou **transformation**, du plan  $\mathcal{F}$ . L'application qui, à tout point  $M'$  associe son unique antécédent  $M$  par  $t$  est l'**application réciproque** de  $t$ . On la note  $t^{-1}$ .

Reconnaitre  $t^{-1}$  et énoncer un théorème.

3° Soit  $t_1$  et  $t_2$  deux translations de vecteurs respectifs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ . Pour tout point  $M$  du plan, on note  $M_1 = t_1(M)$  et  $M' = t_2(M_1)$ . L'application qui à  $M$  associe  $M'$  est la **composée** ou **produit**  $t_2 \circ t_1$ . La définition de  $t_2 \circ t_1$  est illustrée par le schéma ci-contre.



Reconnaitre l'application  $t_2 \circ t_1$ . Énoncer un théorème.

Reconnaitre de même  $t_1 \circ t_2$ .

4° Soit  $t$  une translation de vecteur  $\vec{u}$ .

a) On donne deux points quelconques  $M$  et  $N$  et leurs images  $M' = t(M)$  et  $N' = t(N)$ . Démontrer que  $M'N' = MN$ .

On exprime cette propriété en disant que la translation  $t$  conserve les distances; on dit aussi que  $t$  est une **isométrie**.

b) On considère une droite  $\mathcal{D}$ . Construire deux points  $A$  et  $B$  tels que  $\mathcal{D}$  soit la médiatrice de  $[A, B]$ , leurs images  $A' = t(A)$  et  $B' = t(B)$ , et la médiatrice  $\mathcal{D}'$  de  $[A', B']$ . Que peut-on dire des droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  ?

L'ensemble des images de tous les points de  $\mathcal{D}$  est appelé l'image de  $\mathcal{D}$  par  $t$  et est noté  $t\langle\mathcal{D}\rangle$ .

Démontrer que l'image  $M'$  de tout point  $M$  de  $\mathcal{D}$  appartient à  $\mathcal{D}'$ . En déduire une inclusion entre les ensembles  $t\langle\mathcal{D}\rangle$  et  $\mathcal{D}'$ . Démontrer l'inclusion réciproque. Conclure.

On retiendra :

**L'image d'une droite  $\mathcal{D}$  par une translation est une droite  $\mathcal{D}'$  parallèle à  $\mathcal{D}$ .**

c) On considère un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon  $r$ . L'image de  $\mathcal{C}$  par la translation  $t$  est l'ensemble, noté  $t\langle\mathcal{C}\rangle$ , des images de tous les points de  $\mathcal{C}$ .

Démontrer que tout point de  $t\langle\mathcal{C}\rangle$  est situé sur un cercle fixe  $\mathcal{C}'$  dont on précisera le centre et le rayon. Tout point de  $\mathcal{C}'$  est-il un point de  $t\langle\mathcal{C}\rangle$  ? Conclure.

On retiendra :

**L'image d'un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon  $r$  par une translation  $t$  est le cercle de centre  $O' = t(O)$  et de rayon  $r$ .**

5° On considère deux droites sécantes  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$  et un vecteur  $\vec{u}$ . Construire deux points  $A$  et  $B$  appartenant respectivement à  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$  et tels que  $\overline{AB} = \vec{u}$ .

(Utiliser l'image de  $\mathcal{D}$  par la translation de vecteur  $\vec{u}$ .)

6° Dans le plan  $\mathcal{P}$  on considère deux points distincts  $A$  et  $B$  et un cercle  $\mathcal{C}$ . A tout point  $M$  de  $\mathcal{C}$  on associe le point  $M'$ , symétrique de  $A$  par rapport au milieu de  $[M, B]$ . Quel est le lieu géométrique du point  $M'$  lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{C}$  ?

## MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

### Définition

• Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul de représentant  $(A, B)$  et soit  $a$  un réel (figure 7). Considérons le point  $M$  de la droite  $(AB)$  d'abscisse  $a$  dans le repère  $(A, B)$  :

$$\overline{AM} = a\overline{AB}.$$

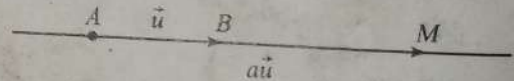


Figure 7

Le vecteur  $\overline{AM}$  ne dépend pas du choix du représentant  $(A, B)$  de  $\vec{u}$ . Ce vecteur, qui ne dépend que de  $a$  et de  $\vec{u}$ , est appelé **produit** du vecteur  $\vec{u}$  par le réel  $a$  et est noté  $a\vec{u}$ .

• Lorsque le vecteur  $\vec{u}$  est nul, son produit par un réel  $a$  est, par définition, le vecteur nul :

$$a\vec{0} = \vec{0}.$$

REMARQUE :

Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts. Pour tout point  $M$  de la droite  $(AB)$  les égalités  $\overline{AM} = a\overline{AB}$  et  $\overline{AM} = a'\overline{AB}$  sont équivalentes : l'une, comme l'autre, signifie que  $M$  est le point d'abscisse  $a$  dans le repère  $(A, B)$ .

### Propriétés

Quels que soient les réels  $a, b$  et les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  :

$$(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u} \quad (1)$$

$$a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u} \quad (2)$$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v} \quad (3)$$

$$1\vec{u} = \vec{u} \quad (4)$$

## 1/ Points et vecteurs du plan

**Direction, sens et norme du vecteur  $a\vec{u}$** 

Le produit d'un vecteur  $\vec{u}$  non nul par un réel  $a$  est un vecteur :

- de même direction et de même sens que  $\vec{u}$ , si  $a > 0$ ,
- de même direction que  $\vec{u}$  et de sens contraire à  $\vec{u}$ , si  $a < 0$ .

De plus, quels que soient  $a$  et  $\vec{u}$  :  $\|a\vec{u}\| = |a| \times \|\vec{u}\|$ .

En particulier, pour tout vecteur  $\vec{u}$  non nul, le vecteur  $-\vec{u}$ , égal à  $(-1)\vec{u}$ , est de même direction que  $\vec{u}$ , de sens contraire, et de même norme.

A noter que pour tout vecteur  $\vec{u}$  non nul, le vecteur  $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$  est unitaire.

**★ Activité 1**

L'objectif de cette activité est d'établir, à partir des propriétés (1), (2), (3), (4) ci-dessus, d'autres propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel.

1° Démontrer que la somme de  $n$  vecteurs égaux à  $\vec{u}$  est le vecteur  $n\vec{u}$ .

2° Justifier l'égalité  $(a - b)\vec{u} + b\vec{u} = a\vec{u}$ , en précisant la propriété utilisée.

En déduire :

$$(a - b)\vec{u} = a\vec{u} - b\vec{u} \quad (1')$$

Que devient l'égalité (1') dans les cas suivants :  $a = b$ ,  $a = 0$ ,  $a = 0$  et  $b = 1$  ?

3° Justifier l'égalité  $a(\vec{u} - \vec{v}) + a\vec{v} = a\vec{u}$ , en précisant la propriété utilisée.

En déduire :

$$a(\vec{u} - \vec{v}) = a\vec{u} - a\vec{v} \quad (3')$$

Que devient l'égalité (3') dans les cas suivants :  $\vec{u} = \vec{v}$ ,  $\vec{u} = \vec{0}$  ?

4° a) Calculer  $(a + 0)\vec{u}$  de deux façons différentes. En déduire que  $0\vec{u} = \vec{0}$ .

b) Procéder de même avec  $a(\vec{u} + \vec{0})$ . En déduire que  $a\vec{0} = \vec{0}$ .

c) Il résulte de a) et b) que : si  $a = 0$  ou  $\vec{u} = \vec{0}$ , alors  $a\vec{u} = \vec{0}$ .

Écrire et démontrer la propriété réciproque. (Si  $a = 0$  le résultat est évident ; si  $a \neq 0$ ,

multiplier les deux membres de l'égalité  $a\vec{u} = \vec{0}$  par  $\frac{1}{a}$ .)

On retiendra :

$$\begin{aligned} (a - b)\vec{u} &= a\vec{u} - b\vec{u} \\ a(\vec{u} - \vec{v}) &= a\vec{u} - a\vec{v} \\ 0\vec{u} &= a\vec{0} = \vec{0} \\ \text{si } a\vec{u} &= \vec{0}, \text{ alors } a = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0} \end{aligned}$$

5° Applications :

a) Soit deux points  $A$  et  $B$  et un réel  $a$ . A quelle condition le vecteur  $a\overrightarrow{AB}$  est-il nul ? non nul ?

b) Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul. Que peut-on déduire de l'égalité  $a\vec{u} = b\vec{u}$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels ?

c) Soit  $a$  un réel non nul. Que peut-on déduire de l'égalité  $a\vec{u} = a\vec{v}$ , où  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs ?

**★ Activité 2 : Milieu d'un bipoint**

1° On donne un bipoint  $(A, B)$  et son milieu  $I$ .

**Direction, sens et norme du vecteur  $a\vec{u}$** 

Le produit d'un vecteur  $\vec{u}$  non nul par un réel  $a$  est un vecteur :

- de même direction et de même sens que  $\vec{u}$ , si  $a > 0$ ,
- de même direction que  $\vec{u}$  et de sens contraire à  $\vec{u}$ , si  $a < 0$ .

De plus, quels que soient  $a$  et  $\vec{u}$  :  $\|a\vec{u}\| = |a| \times \|\vec{u}\|$ .

En particulier, pour tout vecteur  $\vec{u}$  non nul, le vecteur  $-\vec{u}$ , égal à  $(-1)\vec{u}$ , est de même direction que  $\vec{u}$ , de sens contraire, et de même norme.

A noter que pour tout vecteur  $\vec{u}$  non nul, le vecteur  $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$  est unitaire.

**★ Activité 1**

L'objectif de cette activité est d'établir, à partir des propriétés (1), (2), (3), (4) ci-dessus, d'autres propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel.

1° Démontrer que la somme de  $n$  vecteurs égaux à  $\vec{u}$  est le vecteur  $n\vec{u}$ .

2° Justifier l'égalité  $(a - b)\vec{u} + b\vec{u} = a\vec{u}$ , en précisant la propriété utilisée.

En déduire :

$$(a - b)\vec{u} = a\vec{u} - b\vec{u} \quad (1')$$

Que devient l'égalité (1') dans les cas suivants :  $a = b$ ,  $a = 0$ ,  $a = 0$  et  $b = 1$  ?

3° Justifier l'égalité  $a(\vec{u} - \vec{v}) + a\vec{v} = a\vec{u}$ , en précisant la propriété utilisée.

En déduire :

$$a(\vec{u} - \vec{v}) = a\vec{u} - a\vec{v} \quad (3')$$

Que devient l'égalité (3') dans les cas suivants :  $\vec{u} = \vec{v}$ ,  $\vec{u} = \vec{0}$  ?

4° a) Calculer  $(a + 0)\vec{u}$  de deux façons différentes. En déduire que  $0\vec{u} = \vec{0}$ .

b) Procéder de même avec  $a(\vec{u} + \vec{0})$ . En déduire que  $a\vec{0} = \vec{0}$ .

c) Il résulte de a) et b) que : si  $a = 0$  ou  $\vec{u} = \vec{0}$ , alors  $a\vec{u} = \vec{0}$ .

Écrire et démontrer la propriété réciproque. (Si  $a = 0$  le résultat est évident ; si  $a \neq 0$ , multiplier les deux membres de l'égalité  $a\vec{u} = \vec{0}$  par  $\frac{1}{a}$ .)

On retiendra :

$$\begin{aligned} (a - b)\vec{u} &= a\vec{u} - b\vec{u} \\ a(\vec{u} - \vec{v}) &= a\vec{u} - a\vec{v} \\ 0\vec{u} &= a\vec{0} = \vec{0} \\ \text{si } a\vec{u} &= \vec{0}, \text{ alors } a = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0} \end{aligned}$$

**5° Applications :**

a) Soit deux points  $A$  et  $B$  et un réel  $a$ . A quelle condition le vecteur  $a\overrightarrow{AB}$  est-il nul ? non nul ?

b) Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul. Que peut-on déduire de l'égalité  $a\vec{u} = b\vec{u}$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels ?

c) Soit  $a$  un réel non nul. Que peut-on déduire de l'égalité  $a\vec{u} = a\vec{v}$ , où  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs ?

**★ Activité 2 : Milieu d'un bipoint**

1° On donne un bipoint  $(A, B)$  et son milieu  $I$ .

a) Dédurre de l'équipollence des bipoints  $(A, I)$  et  $(I, B)$ , que  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ , puis que :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

b) Réciproquement, démontrer que tout point  $I'$ , tel que  $\overrightarrow{I'A} + \overrightarrow{I'B} = \vec{0}$  est le milieu de  $(A, B)$ .

2° Soit un bipoint  $(A, B)$  de milieu  $I$ . Démontrer que :

a)  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ ;

b) pour tout point  $M$  du plan :  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ .

3° On donne un triangle  $ABC$ , le milieu  $E$  de  $(A, B)$  et le milieu  $F$  de  $(A, C)$ . Démontrer que  $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ . En déduire, en particulier, que  $EF = \frac{1}{2} BC$ .

4° On donne quatre points  $A, B, C, D$ , le milieu  $I$  de  $(A, C)$  et le milieu  $J$  de  $(B, D)$ . Démontrer que  $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ .

Comment choisir le quadrilatère  $ABCD$  pour que les points  $I$  et  $J$  soient confondus?

5° On considère un triangle  $ABC$  et le milieu  $I$  de  $(A, B)$ .

Utiliser la forme réduite,  $2\overrightarrow{MI}$ , de  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$  pour résoudre les questions suivantes.

a) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$ .

b) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 2MC$ .

c) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan pour lesquels le vecteur  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$  a même direction que  $\overrightarrow{BC}$ .

6° Soit un triangle  $ABC$  et les milieux  $A', B'$  et  $C'$  des côtés  $[B, C]$ ,  $[C, A]$  et  $[A, B]$ .

a) Construire le point  $G$  tel que  $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3} \overrightarrow{A'A}$ . Démontrer que  $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$ .

En déduire que  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$  (1).

b) Utiliser (1) pour montrer que  $\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB'} = \vec{0}$ . En déduire l'alignement des points  $B, G, B'$ .

c) Démontrer de même l'alignement des points  $C, G, C'$ . Les trois médianes du triangle  $ABC$  sont donc concourantes au point  $G$ .

d) Préciser la position du point  $G$  sur les segments  $[A, A']$ ,  $[B, B']$ ,  $[C, C']$  en montrant que :

$$\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3} \overrightarrow{A'A}, \quad \overrightarrow{B'G} = \frac{1}{3} \overrightarrow{B'B}, \quad \overrightarrow{C'G} = \frac{1}{3} \overrightarrow{C'C}.$$

### ★ Activité 3 : Homothétie

Un point  $O$  du plan  $\mathcal{F}$  et un réel  $k$  non nul étant donnés, l'**homothétie** de **centre**  $O$  et de **rapport**  $k$  est l'application  $h$  de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$  qui, à tout point  $M$ , associe le point  $M'$  tel que  $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$  ( $M'$  est l'image de  $M$  par  $h$ ). On note  $M' = h(M)$ .

1° Construire sur une même figure un rectangle  $ABCD$  tel que  $AB = 3$  cm et  $AC = 5$  cm, le point  $O$  défini par  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$ , et les images des sommets  $A, B, C, D$  par les homothéties  $h_1$  et  $h_2$  de centre  $O$  et de rapports respectifs :

$$k_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{3}{2}.$$

- 2° a) Que peut-on dire d'une homothétie de rapport 1? de rapport  $-1$ ?
- b) Déterminer l'ensemble des points invariants par une homothétie  $h$  de rapport  $k$  différent de 1 ( $M$  est **invariant**, ou **fixe**, par  $h$  si  $M = h(M)$ ).
- 3° Soit  $h$  une homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$ . Démontrer que  $h$  est une transformation du plan  $\mathcal{F}$ ; c'est-à-dire que tout point  $M'$  de  $\mathcal{F}$  possède un unique antécédent,  $M$ , par  $h$ . Définir et reconnaître l'application réciproque  $h^{-1}$ . Énoncer un théorème.
- 4° Soit  $h$  une homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$ .
- a) On donne deux points quelconques  $M$  et  $N$  et leurs images  $M' = h(M)$  et  $N' = h(N)$ . Démontrer que  $M'N' = |k| \times MN$ . L'homothétie  $h$  est-elle une isométrie?
- b) On considère une droite  $\mathcal{D}$ . Construire deux points  $A$  et  $B$  tels que  $\mathcal{D}$  soit la médiatrice de  $[A, B]$ , leurs images  $A' = h(A)$ ,  $B' = h(B)$ , et la médiatrice  $\mathcal{D}'$  de  $[A', B']$ . Démontrer que  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont parallèles. Démontrer que l'image,  $M'$ , de tout point  $M$  de  $\mathcal{D}$  appartient à  $\mathcal{D}'$ . Tout point de  $\mathcal{D}'$  est-il l'image d'un point de  $\mathcal{D}$ ? Quelle est l'image  $h(\mathcal{D})$  de  $\mathcal{D}$  par  $h$ ?

On retiendra :

**L'image d'une droite  $\mathcal{D}$  par une homothétie est une droite  $\mathcal{D}'$  parallèle à  $\mathcal{D}$ .**

- c) On considère un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  et l'image  $\Omega'$  de  $\Omega$  par  $h$ . Démontrer que l'image  $M'$  de tout point  $M$  de  $\mathcal{C}$  est située sur un cercle  $\mathcal{C}'$  de centre  $\Omega'$  dont on précisera le rayon. Tout point de  $\mathcal{C}'$  est-il l'image d'un point de  $\mathcal{C}$ ? Quelle est l'image  $h(\mathcal{C})$  de  $\mathcal{C}$  par  $h$ ?

On retiendra :

**L'image d'un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  par une homothétie  $h$  de centre  $O$  et de rapport  $k$  est le cercle  $\mathcal{C}'$  de centre  $\Omega' = h(\Omega)$  et de rayon  $r' = |k|r$ .**

- 5° On considère deux droites sécantes  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$  et un point  $O$  n'appartenant ni à  $\mathcal{D}$ , ni à  $\Delta$ . Construire deux points  $A$  et  $B$  appartenant respectivement à  $\mathcal{D}$  et à  $\Delta$  et tels que  $\overrightarrow{OB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ . (On remarquera que le point  $B$ , s'il existe, appartient à la droite  $\Delta$  et à l'image de  $\mathcal{D}$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $-\frac{3}{2}$ .)

- 6° On considère deux points distincts  $A$  et  $B$  et une droite  $\mathcal{D}$ . A tout point  $M$  de la droite  $\mathcal{D}$  on associe le centre de gravité,  $M'$ , du triangle  $ABM$ . Quel est le lieu géométrique de  $M'$  lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{D}$ ?

### ● Exercices d'application

1. On considère un parallélogramme  $ABCD$ , et on pose  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ . Démontrer :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{DB}.$$

En déduire une construction de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dont on connaît la somme  $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$  et la différence  $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$ .

2. Soit un triangle  $OAB$ . On pose  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ .

Démontrer qu'il existe deux vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  uniques tels que :

$$\begin{cases} 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{a} \\ -\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{b} \end{cases}$$

(On exprimera  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  en fonction de  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  et on construira des représentants de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .)

3. On donne un triangle  $ABC$ . Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :

a)  $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$ ;

$$b) \|\vec{MA} + \vec{MB}\| = AC;$$

$$c) \|\vec{MA} + \vec{MB}\| = 2MC.$$

4. On donne un triangle  $ABC$ .

1° Démontrer que lorsque  $M$  varie dans le plan  $\mathcal{P}$ , le vecteur :

$$\vec{v}_M = 3\vec{MA} - 5\vec{MB} + 2\vec{MC}$$

reste constant.

2° En est-il de même du vecteur :

$$\vec{w}_M = 3\vec{MA} + 2\vec{MB} - 4\vec{MC}?$$

5. On donne deux points  $A$  et  $B$  du plan  $\mathcal{P}$ . A tout point  $M$  on associe le point  $M'$  tel que :

$$\vec{MM'} = \vec{MA} + \vec{MB}.$$

Reconnaitre l'application de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  qui, à  $M$ , associe  $M'$ .

6. On considère un triangle  $ABC$ . Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan pour lesquels le vecteur  $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}$  a même direction et même sens que le vecteur  $\vec{AB}$ .

(Utiliser les milieux  $C'$  de  $[A, B]$  et  $D$  de  $[C, C']$ .)

## II — PROJECTION PARALLÈLE SUR UNE DROITE

Rappelons que la *direction* d'une droite  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des droites parallèles à  $\mathcal{D}$  et qu'en conséquence, deux droites ont, ou n'ont pas, la même direction si elles sont, ou ne sont pas, parallèles.

Soit une droite  $\mathcal{D}$  du plan  $\mathcal{P}$ , de direction  $d$ , et une direction de droite  $\delta$ , *distincte* de  $d$ . Pour tout point  $M$  du plan  $\mathcal{P}$  la droite de direction  $\delta$  passant par  $M$  coupe  $\mathcal{D}$  en un point  $M'$  appelé **projeté** de  $M$  sur  $\mathcal{D}$  suivant la direction  $\delta$  (figure 8).

L'application de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{D}$  qui à tout point  $M$  associe son projeté  $M'$  est la **projection** sur  $\mathcal{D}$  suivant la direction  $\delta$ .

La projection sur une droite  $\mathcal{D}$  suivant la direction orthogonale à  $\mathcal{D}$  est la **projection orthogonale** sur  $\mathcal{D}$ .

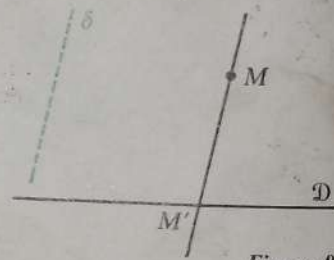


Figure 8

### PROPRIÉTÉS DES PROJECTIONS PARALLÈLES

Rappelons les propriétés suivantes étudiées dans les classes antérieures :

1° Lorsque deux points *distincts*  $A$  et  $B$  se projettent sur une droite  $\mathcal{D}$  en deux points *distincts*  $A'$  et  $B'$  (figure 9), tout point  $M$  de  $(AB)$  et tout point  $M'$  de  $\mathcal{D}$  vérifient les énoncés :

a) **Théorème de Thalès :**

si  $M'$  est le projeté de  $M$ , alors  $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$ .

b) **Réciproque du Théorème de Thalès :**

si  $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$ , alors  $M'$  est le projeté de  $M$ .

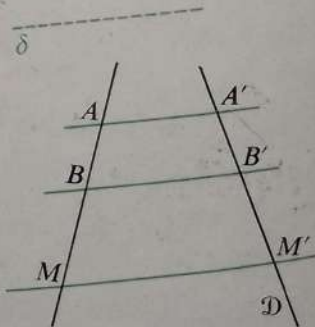


Figure 9

**Attention :** l'égalité  $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}}$  ne permet d'affirmer que  $M'$  est le projeté de  $M$  que si  $A'$  et  $B'$  sont les projetés respectifs de  $A$  et  $B$ .

Le grec Thalès de Milet (fin du 6<sup>e</sup> siècle, début du 5<sup>e</sup> siècle avant J.-C.) est le premier mathématicien connu à qui l'on attribue des découvertes mathématiques précises.

Il n'est cependant pas certain que la paternité du théorème qui porte son nom lui revienne.

C'est en effet dans le livre VI des *Éléments* d'Euclide que l'on trouve démontré, pour la première fois, le résultat relatif à la figure formée par un triangle et une parallèle à l'un de ses côtés (figure 10) :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

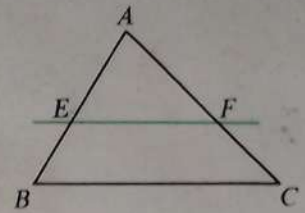


Figure 10

2<sup>o</sup> Trois points alignés  $A, B, C$  tels que  $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$  se projettent sur une droite  $\mathcal{D}$  en trois points  $A', B', C'$  tels que  $\overrightarrow{A'C'} = t\overrightarrow{A'B'}$ .

En particulier le projeté  $I'$  du milieu  $I$  d'un bipoint  $(A, B)$  est le milieu du bipoint  $(A', B')$ , projeté de  $(A, B)$  (figure 11).

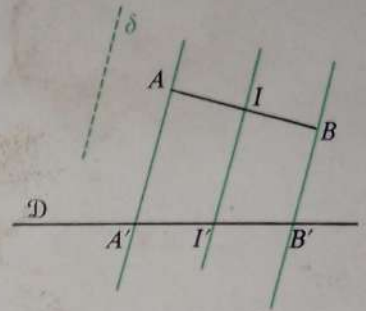


Figure 11

3<sup>o</sup> Le projeté d'un parallélogramme  $ABCD$  sur une droite  $\mathcal{D}$  est un parallélogramme aplati  $A'B'C'D'$  (figure 12).

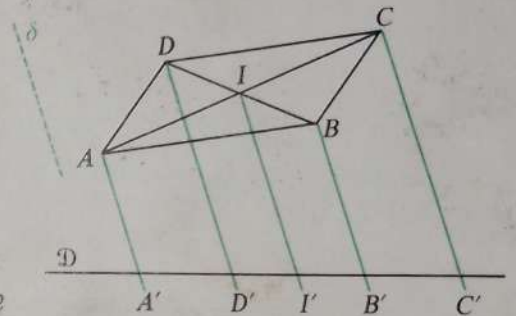


Figure 12

### ■ Exercice résolu

On considère deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sécantes en  $O$  et un point  $A$  n'appartenant ni à  $\mathcal{D}$ , ni à  $\mathcal{D}'$ . Soit  $B$  le projeté de  $A$  sur  $\mathcal{D}$  parallèlement à  $\mathcal{D}'$  et  $C$  le projeté de  $A$  sur  $\mathcal{D}'$  parallèlement à  $\mathcal{D}$ .

1<sup>o</sup> Une droite  $\Delta$  passant par  $A$ , non parallèle à  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  et distincte de  $(OA)$  coupe  $\mathcal{D}$  en  $E$  et  $\mathcal{D}'$  en  $F$  (figure 13).

Démontrer que  $\frac{OB}{OE} + \frac{OC}{OF} = 1$ . (1)

2<sup>o</sup> Soit  $E$  et  $F$  deux points appartenant respectivement aux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  et vérifiant la relation (1). Démontrer que la droite  $(EF)$  passe par  $A$ .

1<sup>o</sup> Les points  $O, B, E$  se projettent sur  $\Delta$  parallèlement à  $\mathcal{D}'$ , en  $F, A, E$ . D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{OB}{OE} = \frac{FA}{FE} \quad (2)$$

Les points  $O, C, F$  se projettent sur  $\Delta$  parallèlement à  $\mathcal{D}$ , en  $E, A, F$ . D'où :

$$\frac{OC}{OF} = \frac{EA}{EF} \quad (3)$$

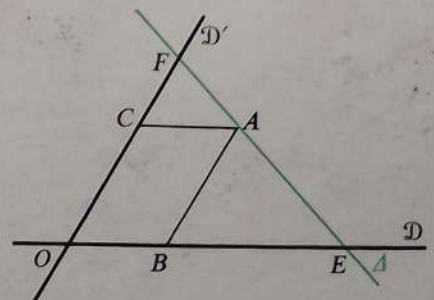


Figure 13

De (2) et (3) il résulte :

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OE}} + \frac{\overline{OC}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FE}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{FA} + \overline{AE}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{FE}} = 1.$$

2° Le point  $E$  est distinct de  $O$ , sinon, dans la relation (1) le quotient  $\frac{\overline{OB}}{\overline{OE}}$  ne serait pas défini.

Le point  $E$  est également distinct de  $B$ , sinon

la relation (1) donnerait  $\frac{\overline{OC}}{\overline{OF}} = 0$ , d'où  $O = C$ , ce qui n'est pas le cas.

La droite  $(AE)$  coupe donc  $\mathcal{D}'$  en un point  $F'$  (figure 14), qui, d'après la question 1°, vérifie :

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OE}} + \frac{\overline{OC}}{\overline{OF'}} = 1 \quad (4).$$

La comparaison de (1) et (4) donne  $\frac{\overline{OC}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OF'}}$ , d'où  $\overline{OF} = \overline{OF'}$ , soit  $F = F'$ .

Il en résulte que la droite  $(EF)$  passe par  $A$ .

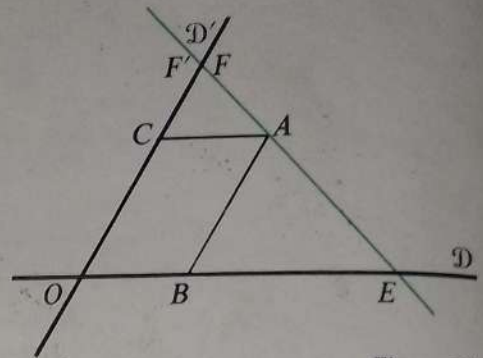


Figure 14

### Exercices d'application

7. Soit un parallélogramme  $ABCD$ . Une droite variable  $\mathcal{A}$ , passant par  $C$ , coupe  $(AB)$  en  $E$ ,  $(AD)$  en  $F$ . Démontrer que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = 1$ .

8. Soit  $p$  la projection sur une droite  $\mathcal{D}$  suivant la direction  $\delta$ .

a) Deux points distincts peuvent-ils avoir le même projeté. Si oui, à quelle condition?

b) Quel est l'ensemble des antécédents d'un point de la droite  $\mathcal{D}$ ?

c) La projection  $p$  admet-elle des points invariants? Quel est l'ensemble de ces points?

d) Reconnaitre l'application composée  $p \circ p$ .

9. Les diagonales d'un quadrilatère convexe  $ABCD$  se coupent en  $O$ .

Les parallèles à  $(BC)$  et  $(CD)$  menées par  $O$  coupent respectivement  $(AB)$  en  $M$  et  $(AD)$  en  $N$ .

Démontrer que  $(MN)$  est parallèle à  $(BD)$ .

10. On considère trois droites  $(OA)$ ,  $(OB)$ ,  $(OC)$ , concourantes en  $O$ , et un point  $A'$  de la droite  $(OA)$  distinct de  $O$  et de  $A$ . La parallèle à  $(AB)$  passant par  $A'$  coupe  $(OB)$  en  $B'$  et la parallèle à  $(BC)$  passant par  $B'$  coupe  $(OC)$  en  $C'$ .

Démontrer que les droites  $(AC)$  et  $(A'C')$  sont parallèles.

11. On considère un triangle  $ABC$ . Une droite  $\mathcal{D}$  parallèle à  $(BC)$  coupe  $(AB)$  en  $E$  et  $(AC)$  en  $F$ . Soit  $t$  l'abscisse de  $E$  dans le repère  $(A, B)$ .

1° Démontrer que :

$$\overline{AE} = t\overline{AB}, \quad \overline{AF} = t\overline{AC}, \quad \overline{EF} = t\overline{BC}.$$

2° En déduire :  $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$ .

3° Comment choisir le réel  $t$  pour que :

$$\overline{EF} = \frac{3}{2}\overline{BC}?$$

12. Soit un triangle  $ABC$  et un point  $M$  du côté  $[B, C]$ . On désigne par  $N$  et  $P$  les projetés respectifs de  $B$  et  $C$  sur  $(AC)$  et  $(AB)$ , parallèlement à  $(AM)$ .

1° Démontrer que :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CB}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{MA}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}.$$

En déduire :  $\frac{1}{\overline{MA}} = \frac{1}{\overline{BN}} + \frac{1}{\overline{CP}}$ .

2° Utiliser l'étude précédente pour construire

un segment de longueur  $h$  telle que  $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ,

où  $a$  et  $b$  sont des longueurs données.

## TRAVAUX PRATIQUES

### RÉVISION DU BARYCENTRE

#### A — Activité préliminaire

Soit deux points distincts  $A$  et  $B$  tels que  $AB = 4$ .

A tout point  $M$  du plan on associe le vecteur  $\vec{v}_M$  défini par :

$$\vec{v}_M = 3\vec{MA} - 5\vec{MB}.$$

1° Exprimer, en fonction du vecteur  $\vec{AB}$ , les vecteurs  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$  et  $\vec{v}_I$  respectivement associés aux points  $A$ ,  $B$  et  $I$  milieu de  $[A, B]$ .  
Construire le vecteur  $\vec{v}_C$  associé à un point  $C$  non situé sur la droite  $(AB)$ .

2° Pour tout point  $M$ , démontrer que  $\vec{v}_M = 2\vec{AM} - 5\vec{AB}$ .

En déduire l'existence et l'unicité d'un point  $G$  tel que  $\vec{v}_G = \vec{0}$ .

Construire  $G$ .

3° Montrer que le vecteur  $\vec{v}_M$ , initialement défini à l'aide des points  $A$  et  $B$  et des coefficients 3 et  $-5$ , peut s'écrire sous la forme réduite  $\vec{v}_M = -2\vec{MG}$ , à l'aide du seul point  $G$  et du seul coefficient  $-2$ .

4° Utiliser la forme réduite de  $\vec{v}_M$  pour traiter les questions suivantes :

a) Reconnaître l'application qui, à tout point  $M$ , associe le point  $M'$  tel que  $\vec{MM}' = \vec{v}_M$ .

b) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\|\vec{v}_M\| = 6$ .

c) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan pour lesquels le vecteur  $\vec{v}_M$  a une direction donnée.

L'activité ci-dessus montre qu'il peut être utile, pour traiter certains problèmes, de réduire des expressions vectorielles de la forme  $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}$ , où  $M, A, B$  sont des points et  $\alpha, \beta$  des coefficients réels.

Pour réaliser une telle réduction on cherche un point  $G$  tel que  $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$ .

En effet, si un tel point existe, il s'ensuit, pour tout point  $M$  :

$$\begin{aligned} \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} &= \alpha(\vec{MG} + \vec{GA}) + \beta(\vec{MG} + \vec{GB}) \\ &= (\alpha + \beta)\vec{MG} + \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} \\ &= (\alpha + \beta)\vec{MG}. \end{aligned}$$

Le vecteur  $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}$  s'écrit alors sous la forme  $(\alpha + \beta)\vec{MG}$ , dite réduite, dans la mesure où il est maintenant défini à l'aide du seul point  $G$  et du seul coefficient  $\alpha + \beta$ .

#### B — Barycentre de deux points

Soit deux points  $A$  et  $B$  et deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\alpha + \beta \neq 0$ .

1°  $G$  désignant un point du plan, démontrer l'équivalence des égalités :

$$\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}, \quad (1)$$

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}. \quad (2)$$

En déduire l'existence et l'unicité d'un point  $G$  vérifiant (1).

On dit que  $G$  est le **barycentre** des points  $A$  et  $B$  affectés des **coefficients** respectifs  $\alpha$  et  $\beta$ , ou le barycentre des **points pondérés**  $(A, \alpha)$  et  $(B, \beta)$ .

Montrer que si  $A = B$ , alors  $G = A = B$  et que si  $A \neq B$ , alors  $G$  appartient à la droite  $(AB)$ .

2° On suppose  $A \neq B$ . Construire le barycentre des points pondérés suivants :

$$\begin{aligned} (A, 0) \text{ et } (B, 1) &; (A, 1) \text{ et } (B, 0) &; (A, 1) \text{ et } (B, 1); \\ (A, 2) \text{ et } (B, 3) &; (A, -1) \text{ et } (B, 3) &; (A, -3) \text{ et } (B, 5). \end{aligned}$$

3° Soit  $G$  le barycentre de deux points pondérés  $(A, \alpha)$  et  $(B, \beta)$  ( $\alpha + \beta \neq 0$ ).  
Pour tout point  $M$  du plan, démontrer que :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}.$$

4° On donne deux points distincts  $A$  et  $B$  et un point  $M$  de la droite  $(AB)$ , d'abscisse  $t$  dans le repère  $(A, B)$ . Démontrer que  $M$  est le barycentre des points  $A$  et  $B$  affectés de coefficients que l'on exprimera en fonction de  $t$ .

5° On considère deux points distincts  $A$  et  $B$  et l'application  $f$  du plan  $\mathcal{P}$  dans lui-même qui, à tout point  $M$ , associe le point  $M'$  défini par :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}.$$

- Construire les images  $A'$  et  $B'$  des points  $A$  et  $B$ .
- Démontrer qu'il existe un point  $G$ , et un seul, invariant par  $f$ .
- Pour tout point  $M$ , d'image  $M'$ , démontrer que la droite  $(MM')$  passe par un point fixe.
- Pour tout point  $M$ , d'image  $M'$ , démontrer que  $\overrightarrow{GM'} = 4\overrightarrow{GM}$ . Reconnaître l'application  $f$ .

### C - Barycentre de trois points

Soit trois points  $A, B, C$  et trois réels  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ .

1°  $G$  désignant un point du plan, démontrer l'équivalence des égalités :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC}. \quad (2)$$

En déduire l'existence et l'unicité d'un point  $G$  du plan vérifiant (1).

On dit que  $G$  est le **barycentre** des **points pondérés**  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$  et  $(C, \gamma)$ .

2° Construire le barycentre des points pondérés  $(A, -2)$ ,  $(B, 1)$  et  $(C, 3)$  :

- lorsque  $A, B, C$  sont alignés et que  $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2} \overrightarrow{AB}$ ;
- lorsque  $A, B, C$  ne sont pas alignés.

3° Soit  $G$  le barycentre des points pondérés  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$ ,  $(C, \gamma)$  ( $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ ).

Pour tout point  $M$  du plan, démontrer que :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}.$$

4° On donne un triangle  $ABC$  :

a) Construire les barycentres :

- $G$  des points pondérés  $(A, 1)$ ,  $(B, -2)$ ,  $(C, 3)$ ;
- $A'$  des points pondérés  $(B, -2)$ ,  $(C, 3)$ ;
- $B'$  des points pondérés  $(C, 3)$ ,  $(A, 1)$ ;
- $C'$  des points pondérés  $(A, 1)$ ,  $(B, -2)$ .

Constater graphiquement que les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  semblent concourantes en  $G$ .

b) En écrivant l'égalité  $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$  sous la forme :

$$(\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB}) + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0},$$

puis en remplaçant  $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB}$  par une expression où figure le point  $C'$ , démontrer que  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(C', -1)$ ,  $(C, 3)$ .

En déduire que  $G$  appartient à la droite  $(CC')$ .

c) Démontrer de même que  $G$  appartient aux droites  $(AA')$  et  $(BB')$ .

5° En procédant comme à la question 4° pour le barycentre  $G$  des points pondérés  $(A, 1)$ ,  $(B, 1)$ ,  $(C, 1)$ , démontrer que les médianes  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  d'un triangle  $ABC$  concourent en  $G$ .

6° Trois points  $A, B, C$  non alignés étant donnés, on se propose de déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :

$$\| -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \|.$$

- Donner une forme réduite du vecteur  $-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}$ .

- b) Donner de même une forme réduite du vecteur  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ .  
 c) En déduire l'ensemble cherché. Construire soigneusement cet ensemble.

## THÉORÈMES DE MENELAÛS ET DE CEVA

### A - Théorème de Menelaüs

On appelle **transversale** d'un triangle toute droite sécante avec les côtés du triangle en des points distincts des sommets.

1° Soit un triangle  $ABC$  et une transversale  $\Delta$  qui coupe les côtés  $(BC)$ ,  $(CA)$  et  $(AB)$  respectivement en  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  (figure 1). En considérant le point  $B''$ , projeté de  $B$  sur  $(AC)$  parallèlement à  $\Delta$ , démontrer que :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1. \quad (1)$$

2° Réciproquement, soit trois points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  appartenant respectivement aux côtés  $(BC)$ ,  $(CA)$  et  $(AB)$  d'un triangle  $ABC$ , distincts des sommets du triangle, et vérifiant la relation (1).

- a) Démontrer par l'absurde que la droite  $(B'C')$  coupe le côté  $(BC)$  en un point  $A''$ .  
 b) En utilisant la question 1°, démontrer que  $A' = A''$ . En déduire que les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  sont alignés.

On peut conclure par le **théorème de Menelaüs** :

Une condition nécessaire et suffisante pour que trois points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  appartenant respectivement aux côtés  $(BC)$ ,  $(CA)$ ,  $(AB)$  d'un triangle  $ABC$  et distincts des sommets du triangle, soient alignés est :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Mathématicien et astronome, le grec Menelaüs d'Alexandrie vécut vers la fin du premier siècle après Jésus-Christ. Il est l'auteur d'un ouvrage contenant les fondements de la géométrie et de la trigonométrie sphérique. C'est dans cet ouvrage que l'on trouve, énoncé sous la forme métrique :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1,$$

le théorème, relatif aux transversales d'un triangle, auquel son nom reste attaché.

### B - Applications du théorème de Menelaüs

- Une transversale  $\Delta$  coupe les côtés du triangle  $ABC$  en  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Soit  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  les points respectivement symétriques de  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  par rapport au milieu du côté correspondant (figure 2). Démontrer que les points  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  sont alignés.
- Soit un triangle  $ABC$  et une transversale  $A'B'C'$ . On désigne par  $I$ ,  $J$ ,  $K$  les milieux respectifs des bipoints  $(A, A')$ ,  $(B, B')$ ,  $(C, C')$  et par  $E$ ,  $F$ ,  $G$  les milieux respectifs des bipoints  $(B', C')$ ,  $(C', A)$  et  $(A, B')$  (figure 3).  
 a) Démontrer que les points  $F$ ,  $G$ ,  $I$  sont alignés. Même question pour les points  $G$ ,  $E$ ,  $J$  et pour les points  $E$ ,  $F$ ,  $K$ .  
 b) Démontrer que :

$$\frac{IF}{IG} = \frac{A'C'}{A'B'}, \quad \frac{JG}{JE} = \frac{BA}{BC'}, \quad \frac{KE}{KF} = \frac{CB'}{CA}$$

En déduire que les points  $I$ ,  $J$ ,  $K$  sont alignés.

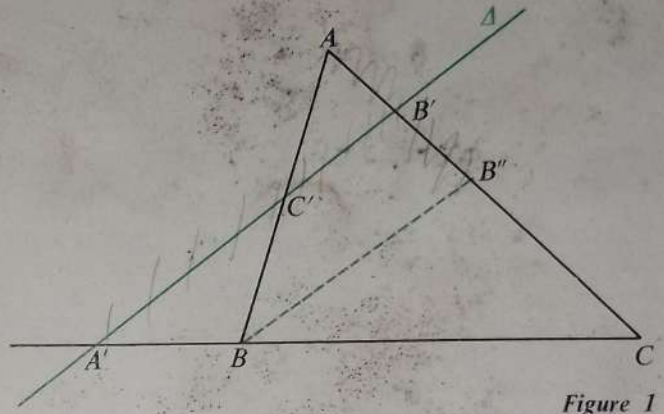


Figure 1

Figure 2

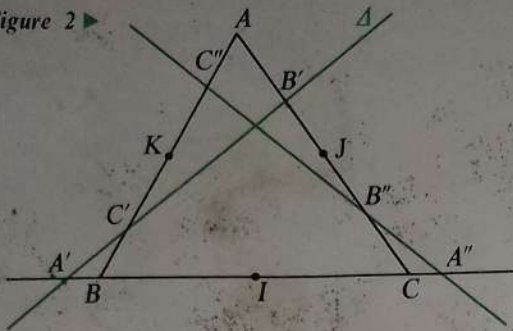
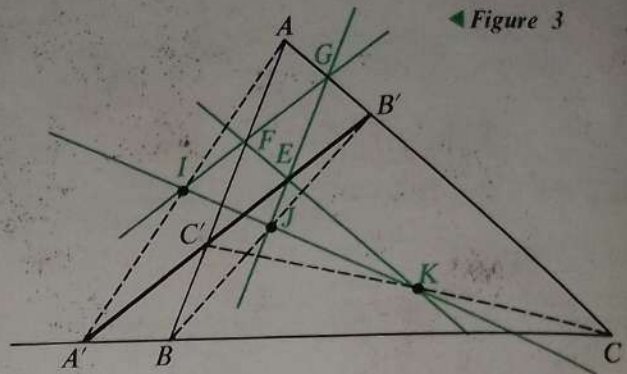


Figure 3



La figure formée par les trois côtés d'un triangle  $ABC$  et une transversale  $A'B'C'$  est un **quadrilatère complet**. Les segments  $[A, A']$ ,  $[B, B']$ ,  $[C, C']$  sont dits **diagonaux**. Le résultat de la question b) peut s'énoncer :

**Les milieux des segments diagonaux d'un quadrilatère complet sont alignés.**

3. Dans un triangle  $ABC$  deux transversales  $A'B'C'$  et  $A''B''C''$  sont telles que  $(A'B'') \parallel (AB)$  et  $(A''C') \parallel (AC)$  (figure 4). Démontrer que  $(B'C'') \parallel (BC)$ .

4. Soit, dans un triangle  $ABC$ , deux transversales  $A'B'C'$  et  $A''B''C''$ . On considère les transversales  $A'B''C_1$ ,  $A''B_1C'$  et  $A_1B'C''$  (figure 5). Démontrer que les points  $A_1, B_1, C_1$  sont alignés.

Figure 4

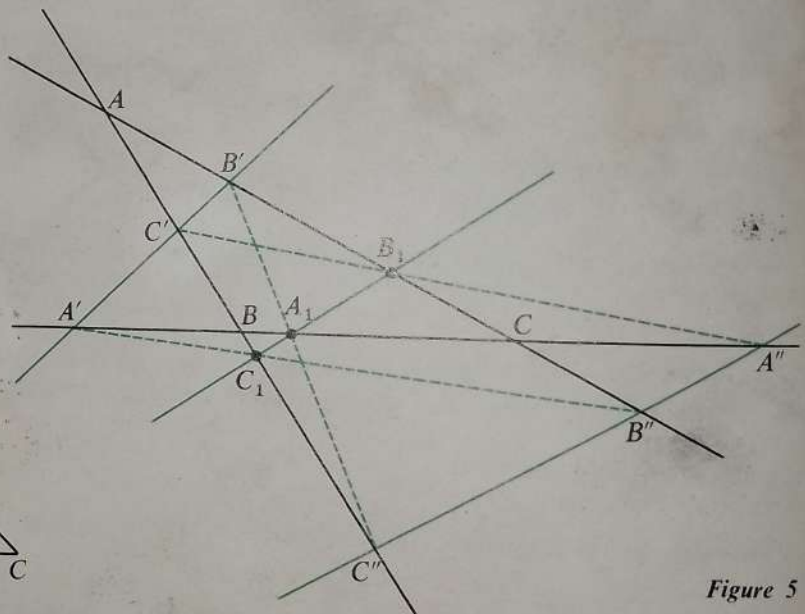
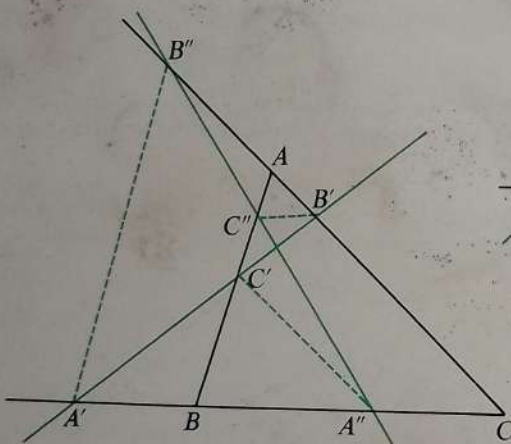


Figure 5

**5. Triangles homologiques.**

On considère dans le plan  $\mathcal{P}$  la situation suivante :

- $ABC$  et  $A'B'C'$  sont deux triangles.
- leurs côtés  $(BC)$  et  $(B'C')$  se coupent en  $E$ ,  $(CA)$  et  $(C'A')$  en  $F$  et  $(AB)$  et  $(A'B')$  en  $G$ ;
- les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont deux à deux sécantes.

a) On suppose que les points  $E, F, G$  sont alignés (figure 6). Démontrer que les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes. (Considérer les points d'intersection  $O_1$  et  $O_2$  de  $(AA')$  avec  $(BB')$  et  $(CC')$  et montrer, en appliquant le théorème de Menelaüs, que  $\frac{O_1A'}{O_1A} = \frac{O_2A'}{O_2A}$ .)

b) On suppose que les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont concourantes en  $O$  (figure 7). Démontrer que les points  $E, F, G$  sont alignés. (Appliquer a) aux triangles  $GBB'$  et  $FCC'$ .)

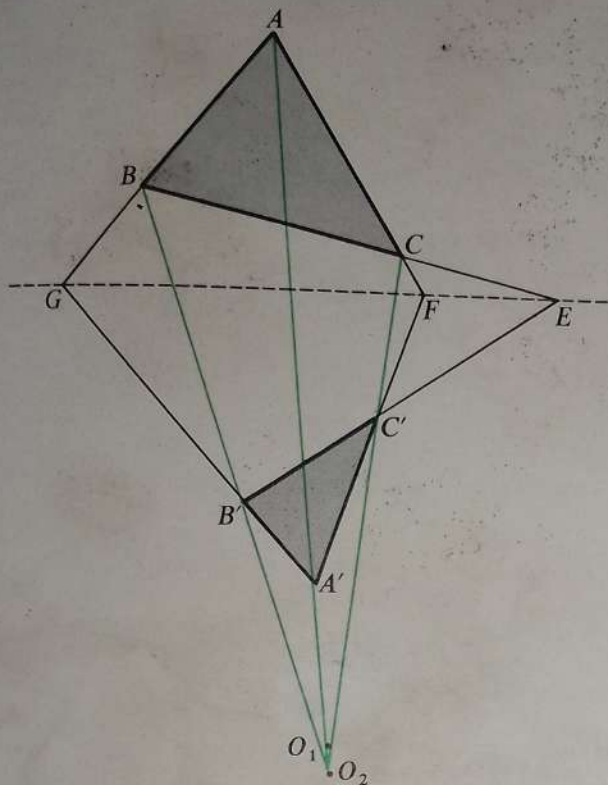


Figure 6

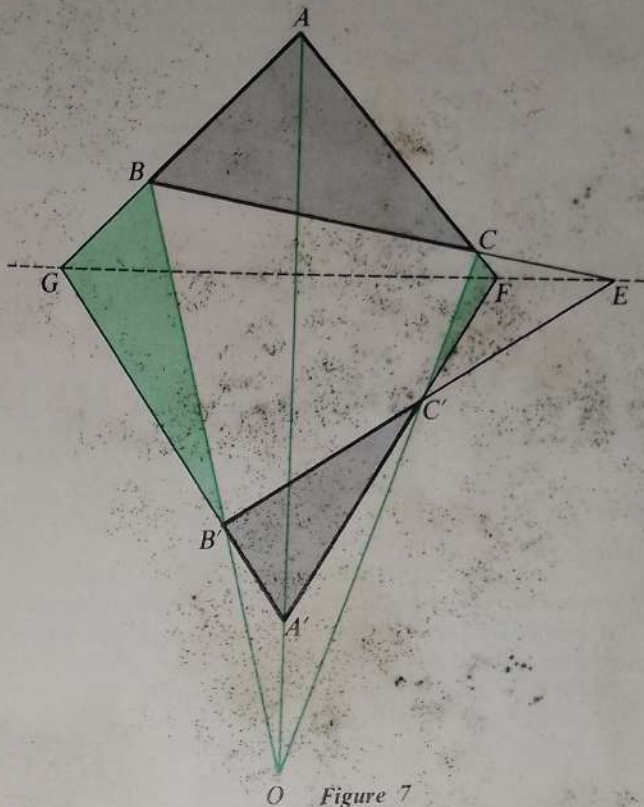


Figure 7

C — Théorème de Ceva

D'une famille de mathématiciens italiens (son frère Tommaso inventa un appareil pour tracer la bissectrice d'un angle), Giovanni Ceva (1648-1734) découvrit le théorème qui porte son nom et d'importants résultats sur les transversales. Comme on peut le constater dans la première des démonstrations proposées, le théorème de Ceva est étroitement lié à celui de Menelaüs.

Première démonstration

On considère un triangle  $ABC$  et un point  $M$  n'appartenant à aucune des trois droites passant par un sommet du triangle et parallèle au côté opposé. Les droites  $(AM)$  et  $(BC)$  se coupent alors en  $A'$ , distinct de  $B$  et  $C$ ,  $(BM)$  et  $(CA)$  en  $B'$ , distinct de  $A$  et  $C$  et  $(CM)$  et  $(AB)$  en  $C'$  distinct de  $A$  et  $B$  (figure 8).

1° Appliquer le théorème de Menelaüs au triangle  $BCC'$  et à la transversale  $AA'M$ .

Même question pour le triangle  $ACC'$  et la transversale  $BB'M$ . En déduire :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = -1. \quad (2)$$

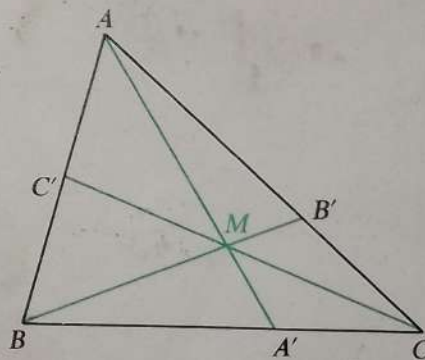


Figure 8

2° Réciproquement, soit  $A', B', C'$  trois points appartenant respectivement aux côtés  $(BC), (CA), (AB)$  du triangle  $ABC$  et vérifiant l'égalité (2).

a) On suppose que les droites  $(BB')$  et  $(CC')$  sont parallèles. Que peut-on dire de la droite  $(AA')$ ?

b) On suppose que les droites  $(BB')$  et  $(CC')$  sont sécantes en  $M$ . Démontrer que le point  $M$  n'appartient pas à la droite passant par  $A$  et parallèle à  $(BC)$ . Les droites  $(AM)$  et  $(BC)$  sont alors sécantes en un point  $A_1$ . Utiliser le théorème de Ceva pour montrer que  $A_1 = A'$ .

D'où la réciproque du théorème de Ceva :

Si trois points  $A, B, C$  distincts des sommets d'un triangle  $ABC$  et appartenant respectivement aux côtés  $(BC), (CA)$  et  $(AB)$  sont

tels que  $\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = -1$ , alors les trois droites  $(AA'), (BB')$  et  $(CC')$  sont soit parallèles, soit concourantes.

**Deuxième démonstration**

On donne dans le plan  $\mathcal{P}$  un triangle  $ABC$  et un point  $M$ .

1° Soit  $(x, y)$  les coordonnées de  $M$  dans le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  du plan :  $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ .

En utilisant cette égalité, démontrer que  $M$  est le barycentre des points  $A, B, C$  affectés de coefficients que l'on exprimera en fonction de  $x$  et  $y$ .

2° On suppose que le point  $M$  n'appartient à aucune des trois droites passant par un sommet du triangle et parallèle au côté opposé.

Les droites  $(AM)$  et  $(BC)$  se coupent alors en  $A_1$ , distinct de  $B$  et  $C$ ,  $(BM)$  et  $(CA)$  en  $B_1$ , distinct de  $A$  et  $C$ , et  $(CM)$  et  $(AB)$  en  $C_1$ , distinct de  $A$  et  $B$ . On a montré à la question 1° que  $M$  est le barycentre des points  $A, B, C$  affectés de coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

a) Démontrer par l'absurde que  $\beta + \gamma \neq 0$ .

b) Soit  $A_1$  le barycentre des points  $(B, \beta)$  et  $(C, \gamma)$ . Démontrer que les points  $A, M, A_1$  sont alignés. En déduire que  $A_1 = A'$ , puis

$$\text{que } \frac{A'B}{A'C} = -\frac{\gamma}{\beta}.$$

c) Exprimer de même  $\frac{B'C}{B'A}$  et  $\frac{C'A}{C'B}$  en fonction de  $\alpha, \beta, \gamma$ . Vérifier que :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = -1. \quad (1)$$

**Applications**

1° Démontrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.

2° a) Une droite  $\mathcal{D}$  parallèle au côté  $(BC)$  d'un triangle  $ABC$  coupe  $(AB)$  en  $E$  et  $(AC)$  en  $F$ . Lorsque les droites  $(BF)$  et  $(CF)$  se coupent en un point  $M$  distinct de  $A$ , démontrer que la droite  $(AM)$  est une médiane du triangle  $ABC$ .

b) Soit  $M$  un point de la médiane  $(AA')$  d'un triangle  $ABC$ . Les droites  $(BM)$  et  $(AC)$  se coupent en  $B'$  et les droites  $(CM)$  et  $(AB)$  en  $C'$ . Démontrer que les droites  $(BC)$  et  $(B'C')$  sont parallèles.

3° On donne un triangle  $ABC$  du plan  $\mathcal{P}$ , et un réel  $k$  différent de 1. A tout point  $M$  de la droite  $(AB)$ , distinct de  $A$ , on associe le point

$$N \text{ de la droite } (AC) \text{ défini par } \frac{NC}{NA} = k \frac{MB}{MA}.$$

a) Démontrer que la droite  $(MN)$  passe par un point fixe.

b) Démontrer que le point d'intersection,  $R$ , des droites  $(BN)$  et  $(CM)$  appartient à une droite fixe.

## EXERCICES ET PROBLÈMES

## POINTS ET VECTEURS

13. On donne un triangle  $ABC$ . Soit  $I$  le milieu de  $(B, C)$  et soit  $P$  et  $Q$  deux points tels que :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}. \quad (1)$$

1° Démontrer que  $I$  est le milieu de  $(P, Q)$ . Quelle est la nature du quadrilatère  $BPCQ$ ?

2° Dédurre de l'égalité (1) une relation entre  $\overrightarrow{PB}$  et  $\overrightarrow{CQ}$ , et retrouver la nature du quadrilatère  $BPCQ$ .

14. On considère un triangle  $ABC$  et les milieux respectifs  $A', B', C'$  des bipoints  $(B, C), (C, A), (A, B)$ . Un point  $I$ , quelconque, étant donné, soit  $J$  et  $K$  les points définis par  $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CC'}$  et  $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{BB'}$ .

1° Démontrer que les droites  $(JK)$  et  $(AA')$  sont parallèles.

2° Soit  $E$  le milieu de  $(J, K)$ . Démontrer qu'il existe un réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{IE} = k\overrightarrow{BC}$ . Que peut-on dire des droites  $(IE)$  et  $(BC)$ ?

15. On rappelle que les médianes d'un triangle  $ABC$  sont concourantes en un point  $G$ , centre de gravité du triangle, tel que :  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

On considère deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  et leurs centres de gravité respectifs  $G$  et  $G'$ .

1° Démontrer que  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$ . En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  aient même centre de gravité.

2° Examiner les cas suivants :

a) Les points  $A', B', C'$  sont les milieux respectifs des bipoints  $(B, C), (C, A)$  et  $(A, B)$ .

b) Un réel  $k$  étant donné, les points  $A', B', C'$  sont définis par :

$$\overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CB'} = k\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB}.$$

16. Soit un triangle  $ABC$  et  $A', B', C'$  les milieux respectifs de  $(B, C), (C, A)$  et  $(A, B)$ . Soit  $M$  un point quelconque du plan et  $I, J, K$  les symétriques respectifs de  $M$ , par rapport à  $A', B', C'$ . Démontrer que :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{KI} = \overrightarrow{AC}.$$

En déduire que les triangles  $ABC$  et  $IJK$  sont associés dans une symétrie centrale dont on précisera le centre.

17. Soit deux points distincts  $A$  et  $B$  et un réel  $k \neq 1$ .

1° Démontrer qu'il existe deux points  $C$  et  $D$ , uniques,

tels que :  $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$  et  $\overrightarrow{DA} = -k\overrightarrow{DB}$ .

2° Soit  $I$  le milieu de  $(C, D)$ . Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{IA}$  et  $\overrightarrow{IB}$  en fonction du réel  $k$  et du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ . En déduire

$\overrightarrow{IA} = k^2\overrightarrow{IB}$ .

18. Soit  $A, A', D, D'$  quatre points du plan,  $I$  et  $J$  les milieux respectifs de  $(A, A')$  et  $(D, D')$ .

1° Démontrer que :  $\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A'D'}$ ;

2° A quelle condition, nécessaire et suffisante, a-t-on  $I = J$ ?

3° Démontrer que, si  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$  sont deux parallélogrammes, les milieux respectifs  $I, L, K, J$  des bipoints  $(A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D')$  sont les sommets d'un parallélogramme.

19. Soit quatre points  $A, B, C, D$  du plan et un réel  $k \neq 1$ .

1° Démontrer qu'il existe deux points  $M$  et  $M'$ , uniques, tels que  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$  et  $\overrightarrow{M'C} = k\overrightarrow{M'D}$ .

2° Démontrer que  $\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD} = (1-k)\overrightarrow{MM'}$ .

3° Lorsque  $ABCD$  est un trapèze convexe de bases  $[A, C]$  et  $[B, D]$ , que peut-on dire de la droite  $(MM')$ ? Étudier le cas  $k = -1$ .

20. On considère un parallélogramme  $ABCD$ , un réel  $k$  différent de 1, et les points  $P, Q, R, S$  définis par :

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{\overrightarrow{QB}}{\overrightarrow{QC}} = \frac{\overrightarrow{RC}}{\overrightarrow{RD}} = \frac{\overrightarrow{SD}}{\overrightarrow{SA}} = k.$$

Démontrer que le quadrilatère  $PQRS$  est un parallélogramme.

21. Soit quatre points  $A, B, C, D$ .

A tout réel  $t$  on associe les points  $M$  et  $N$  tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DN} = t\overrightarrow{DC}.$$

1° Démontrer que :  $\overrightarrow{MN} = t\overrightarrow{BC} + (1-t)\overrightarrow{AD}$ .

(Écrire  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$

et  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ ; multiplier ces deux égalités respectivement par  $t$  et  $1-t$  et ajouter.)

2° On suppose désormais que  $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$ . (Le quadrilatère  $ABCD$  est alors un trapèze convexe de bases  $[A, D]$  et  $[B, C]$ .)

Calculer  $\overrightarrow{MN}$  en fonction de  $t$  et  $\overrightarrow{BC}$ , puis  $MN$  en fonction de  $t$  et  $BC$ .

3° L'unité de longueur est le centimètre.

a) Pour quelle valeur de  $t$  a-t-on  $M = N$ ?

b) Calculer  $MN$  lorsque  $t = \frac{1}{2}$ , lorsque  $t = -\frac{1}{2}$ , lorsque  $t = 4$ .

c) Pour quelles valeurs de  $t$  a-t-on  $MN = \frac{7}{2}$ ?

22. Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan  $\mathcal{F}$ .

1° A tout point  $M$  du plan, on associe le point  $M'$ , barycentre des points pondérés  $(A, 1), (B, -1), (M, 2)$ . Démontrer que l'application  $t : M \mapsto M'$ , est une translation dont on déterminera le vecteur.

2° A tout point  $M$  du plan, on associe le point  $M''$ , barycentre des points pondérés  $(A, 1), (B, -2), (M, -2)$ . Démontrer que l'application  $h : M \mapsto M''$ , est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

3° Soit  $a, b, c$  trois réels dont la somme n'est pas nulle. A tout point  $M$  on associe le barycentre  $M_1$  des points pondérés  $(A, a), (B, b), (M, c)$ . On désigne par  $f$  l'application définie par  $f(M) = M_1$ .

a) Lorsque  $a + b = 0$ , démontrer que  $f$  est une translation. Déterminer son vecteur.

b) Lorsque  $a + b \neq 0$ , démontrer que  $f$  est une homothétie. Déterminer son centre et son rapport.

## FONCTIONS VECTORIELLES

23. On considère trois points  $A, B, C$  du plan  $\mathcal{P}$ , trois réels  $a, b, c$  et l'application  $f$  qui, à tout point  $M$ , associe le vecteur  $f(M)$  défini par :

$$\overrightarrow{f(M)} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}.$$

1° On suppose  $a = 1, b = -4, c = 3$ . Démontrer que, lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{P}$ , le vecteur  $f(M)$  reste constant.

2° Les réels  $a, b, c$  sont quelconques. Pour tout bipoint  $(M, M')$ , exprimer simplement la différence  $f(M) - f(M')$ . En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction  $f$  soit constante.

24. On considère deux points distincts  $A$  et  $B$ , et l'application  $f$  qui, à tout point  $M$  associe le vecteur :

$$\overrightarrow{f(M)} = -2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}.$$

1° Démontrer qu'il existe un point  $G$ , et un seul, tel que  $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$ . Construire  $G$ .

2° Pour tout point  $M$ , exprimer le vecteur  $\overrightarrow{f(M)}$  en fonction du vecteur  $\overrightarrow{MG}$ .

En déduire que pour tout vecteur  $\vec{u}$ , il existe un point  $M$ , et un seul, tel que  $\overrightarrow{f(M)} = \vec{u}$ . Que peut-on dire de l'application  $f$ ?

25. On considère un triangle  $ABC$  et l'application  $f$  qui, à tout point  $M$  associe le vecteur :

$$\overrightarrow{f(M)} = -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}.$$

1° Démontrer qu'il existe un point  $G$ , unique, tel que  $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$ . Construire  $G$ .

2° Pour tout point  $M$ , exprimer le vecteur  $\overrightarrow{f(M)}$  en fonction du vecteur  $\overrightarrow{MG}$ .

En déduire que pour tout vecteur  $\vec{u}$ , il existe un point  $M$ , et un seul, tel que  $\overrightarrow{f(M)} = \vec{u}$ .

3° A tout point  $M$ , on associe le point  $M'$  tel que  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{f(M)}$ .

a) Peut-on avoir  $M = M'$ ?

b) Lorsque  $M'$  est distinct de  $M$ , démontrer que la droite  $(MM')$  passe par un point fixe.

c) Quel est l'ensemble des points  $M$  tels que  $(MM')$  passe par  $A$ ?

## THÉORÈME DE THALÈS

26. On donne un triangle  $ABC$  et un point  $A' \in ]B, C[$ . Soit  $B'$  le projeté de  $A'$  sur  $(AC)$  parallèlement à  $(AB)$ ,  $C'$  le projeté de  $B'$  sur  $(AB)$  parallèlement à  $(BC)$ ,  $A''$  le projeté de  $C'$  sur  $(BC)$  parallèlement à  $(AC)$ , etc.

1° Si  $A'$  est le milieu de  $(B, C)$ , que peut-on dire de la ligne polygonale  $A'B'C'A'' \dots$ ?

2° Si  $A'$  n'est pas le milieu de  $(B, C)$ , on pose :

$$\overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC} \quad \left( k \neq \frac{1}{2} \right).$$

Démontrer que  $\overrightarrow{BA''} = (1-k)\overrightarrow{BC}$ . En déduire que la ligne polygonale  $A'B'C'A'' \dots$  est fermée.

27. On considère un quadrilatère convexe  $ABCD$  et un point  $A_1 \in ]A, B[$ . Soit  $B_1$  le projeté de  $A_1$  sur  $(BC)$  parallèlement à  $(AC)$ ,  $C_1$  le projeté de  $B_1$  sur  $(CD)$  parallèlement à  $(BD)$ ,  $D_1$  le projeté de  $C_1$  sur  $(DA)$  parallèlement à  $(AC)$ .

Démontrer que la quadrilatère  $A_1B_1C_1D_1$  est un parallélogramme.

28. Soit  $ABCD$  un trapèze convexe. Les côtés non parallèles  $(AD)$  et  $(BC)$  se coupent en  $E$  et les diagonales  $(AC)$  et  $(BD)$  en  $F$ .

1° On pose  $k = \frac{EA}{ED}$  et  $k' = \frac{FA}{FC}$ .

Démontrer que  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{AB} = k'\overrightarrow{CD}$ .

En déduire  $k' = -k$ .

2° La droite  $(EF)$  coupe  $(AB)$  en  $M$  et  $(DC)$  en  $N$ .

Démontrer que  $\frac{EM}{EN} = -\frac{FM}{FN}$ .

29. On considère un triangle  $ABC$  et son centre de gravité  $G$ . Une droite  $\Delta$ , ne passant pas par  $G$ , coupe respectivement les droites  $(GA)$ ,  $(GB)$ ,  $(GC)$  en  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ .

1° En utilisant la projection sur  $(GA)$  parallèlement à  $\Delta$ , démontrer que :

$$\frac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{GA'}} + \frac{\overrightarrow{GB}}{\overrightarrow{GB'}} + \frac{\overrightarrow{GC}}{\overrightarrow{GC'}} = 0.$$

2° Étudier la réciproque.

30. On considère deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ , sécantes en  $O$ , un point  $A$  de  $\mathcal{D}$  distinct de  $O$  et un point  $B$  de  $\mathcal{D}'$  distinct de  $O$ .

1° Un point  $M$  de la droite  $(AB)$  se projette en  $P$  sur  $\mathcal{D}$  parallèlement à  $\mathcal{D}'$  et en  $Q$  sur  $\mathcal{D}'$  parallèlement à  $\mathcal{D}$ .

Démontrer que :  $\frac{OP}{OA} + \frac{OQ}{OB} = 1$ . (1)

2° Soit  $P$  et  $Q$  deux points pris respectivement sur  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  et vérifiant (1). Démontrer que le point  $M$ , quatrième sommet du parallélogramme dont les trois premiers sont  $P, O, Q$ , appartient à  $(AB)$ .

31. Soit un quadrilatère convexe  $ABCD$ ,  $I$  un point de  $(AC)$  distinct de  $A$  et  $C$ .

Les parallèles menées par  $I$  à  $(AB)$  et  $(CD)$  coupent respectivement  $(BC)$  en  $M$ ,  $(AD)$  en  $N$ .

Soit  $k$  le réel tel que  $\overrightarrow{CI} = k\overrightarrow{CA}$ .

A - 1° Démontrer que  $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{IM} = k\overrightarrow{AB}$ .

2° En déduire que  $IM = AB \times \frac{CI}{CA}$ .

3° Démontrer que  $IN = CD \times \frac{AI}{CA}$ .

B - 1° On se propose de construire un point  $I$  de  $[A, C]$  tel que  $IM = IN$ .

En utilisant les résultats précédents, construire  $I$  à la règle et à l'équerre.

2° Le point  $I$  appartient à  $(AC)$ . Combien existe-il de points  $I$  tels que  $IM = IN$ ?

3° Le quadrilatère  $ABCD$  est un trapèze de bases  $[A, B]$  et  $[C, D]$ . Qu'en résulte-t-il?

# PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

C'est en 1839, dans un ouvrage sur la théorie des marées que Hermann Grassmann jette les bases de l'analyse vectorielle et introduit notamment le **produit linéaire** de deux vecteurs, qu'il définit comme « le produit algébrique d'un vecteur multiplié par la projection du second vecteur sur le premier ». Ce produit linéaire est l'actuel **produit scalaire**.

## I – PRODUIT SCALAIRE : RAPPELS

### ANGLES ASSOCIÉS A DEUX VECTEURS NON NULS

Rappelons que tout angle *non orienté*  $\widehat{xOy}$  possède une mesure, exprimée en radians, degrés ou grades, et que le cosinus et le sinus de l'angle  $\widehat{xOy}$  sont respectivement le cosinus et le sinus de sa mesure en radians :

$$\text{si } \widehat{xOy} = \theta \text{ rad, } \cos \widehat{xOy} = \cos \theta \text{ et } \sin \widehat{xOy} = \sin \theta.$$

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs *non nuls*. Tout point  $A$  du plan  $\mathcal{P}$  est le sommet d'un angle non orienté  $\widehat{BAC}$  tel que (figure 1) :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{AC} = \vec{v}.$$

Un tel angle est dit **associé** aux deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$ .

Soit  $\widehat{BAC}$  et  $\widehat{B'A'C'}$  deux angles associés aux vecteurs *non nuls*  $\vec{u}, \vec{v}$  (figure 2).

Ces deux angles ont leurs côtés parallèles et de même sens et ont donc même mesure en radians,  $\theta$ .

Il s'ensuit que *tous* les angles associés à  $\vec{u}, \vec{v}$  mesurent  $\theta$  rad.

On dit que les vecteurs *non nuls*  $\vec{u}, \vec{v}$  sont **d'angle  $\theta$  rad**.

REMARQUE :

La mesure des angles associés à  $\vec{u}, \vec{v}$  peut évidemment être exprimée en degrés ou en grades. On dit alors que les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  sont d'angle  $\alpha^\circ$  ou  $\beta$  gr.

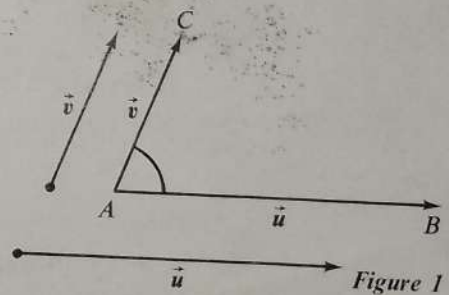


Figure 1

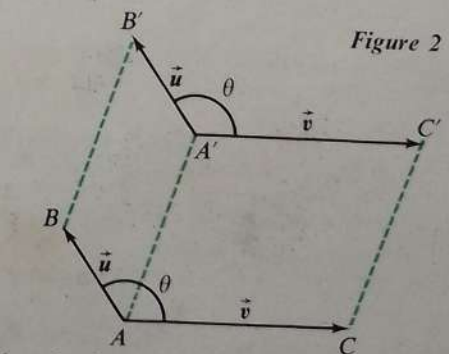


Figure 2

## PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

## DÉFINITION 1

On appelle *produit scalaire* de deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  le réel  $p$  ainsi défini :

1° lorsque  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls et d'angle  $\theta$  rad :

$$p = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta;$$

2° lorsque l'un au moins des deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  est nul,  $p = 0$ .

Le produit scalaire des vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  est noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  (lire :  $\vec{u}$  scalaire  $\vec{v}$ ).

Étant donnés trois points  $A, B, C$  tels que  $A \neq B$  et  $A \neq C$ , les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont non nuls et  $\widehat{BAC}$  est un de leurs angles associés. D'où :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

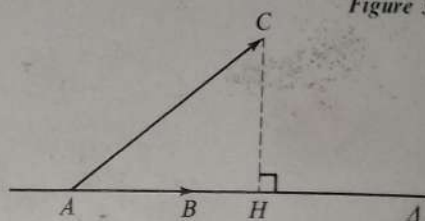


Figure 3

On retiendra également le résultat, illustré par la figure 3 et démontré dans le cours de Seconde, que l'on rapprochera de la définition du *produit linéaire* de Grassmann donnée au début du chapitre :

## THÉORÈME 1

Trois points,  $A, B, C$  du plan et le projeté orthogonal  $H$  de  $C$  sur un axe  $\Delta$  passant par  $A$  et  $B$  sont tels que :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \times \vec{AH}.$$

## PROPRIÉTÉS

Rappelons les propriétés suivantes, étudiées en classe de Seconde :

1° Quels que soient deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2° Quels que soient trois vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

3° Quels que soient deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et un réel  $a$  :

$$\vec{u} \cdot (a\vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

4° On appelle *carré scalaire* d'un vecteur  $\vec{u}$ , et l'on note  $(\vec{u})^2$ , le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{u}$ .

a) Pour tout vecteur  $\vec{u}$  :

$$(\vec{u})^2 = \|\vec{u}\|^2$$

b) Pour tout bipoint  $(A, B)$  :

$$(\vec{AB})^2 = AB^2$$

c) Quels que soient deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  :

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v})^2 &= (\vec{u})^2 + (\vec{v})^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\(\vec{u} - \vec{v})^2 &= (\vec{u})^2 + (\vec{v})^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= (\vec{u})^2 - (\vec{v})^2\end{aligned}$$

REMARQUE :

Le carré scalaire d'un vecteur est un réel positif ou nul. Ce réel est nul si, et seulement si, le vecteur est nul.

5° On dit que deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  sont **orthogonaux**, et l'on note  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , lorsque l'un au moins est nul ou lorsqu'ils sont non nuls et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  rad. Il en résulte immédiatement :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \text{ si, et seulement si, } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

### ■ Exercice résolu.

Soit  $\vec{a}$  un vecteur non nul de norme égale à 2 et soit  $f$  l'application de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout vecteur  $\vec{u}$  associe le réel  $f(\vec{u}) = \vec{a} \cdot \vec{u}$ .

1° Calculer  $f(\vec{0})$ ,  $f(\vec{a})$ ,  $f(-2\vec{a})$  et  $f(\vec{b})$  pour un vecteur  $\vec{b}$  de norme 3 et tel que la mesure de l'angle associé aux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  soit  $\frac{5\pi}{6}$  (figure 4).

2° Soit deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et un réel  $t$ . Comparer  $f(\vec{u} + \vec{v})$  et  $f(\vec{u}) + f(\vec{v})$  d'une part,  $f(t\vec{u})$  et  $tf(\vec{u})$  d'autre part.

3° Soit un réel  $k$ ; déterminer le réel  $t$  de manière que  $f(t\vec{a}) = k$ . L'application  $f$  est-elle bijective?

$$1^\circ f(\vec{0}) = \vec{a} \cdot \vec{0} = 0; \quad f(\vec{a}) = (\vec{a})^2 = \|\vec{a}\|^2 = 4;$$

$$f(-2\vec{a}) = \vec{a} \cdot (-2\vec{a}) = -2(\vec{a})^2 = -2\|\vec{a}\|^2 = -8;$$

$$\begin{aligned}f(\vec{b}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\| \times \cos \frac{5\pi}{6} \\ &= 2 \times 3 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

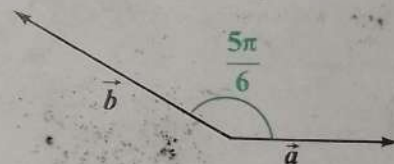


Figure 4

2° a) Quels que soient les deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  :

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{a} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{a} \cdot \vec{u} + \vec{a} \cdot \vec{v} = f(\vec{u}) + f(\vec{v}).$$

b) Quels que soient le réel  $t$  et le vecteur  $\vec{u}$  :

$$f(t\vec{u}) = \vec{a} \cdot (t\vec{u}) = t(\vec{a} \cdot \vec{u}) = tf(\vec{u}).$$

3° On a  $f(t\vec{a}) = tf(\vec{a}) = 4t$ . La condition  $f(t\vec{a}) = k$  est donc équivalente à  $4t = k$ , soit  $t = \frac{k}{4}$ .

Pour tout réel  $k$ , il existe au moins un vecteur  $\vec{u}_0$ , à savoir  $\vec{u}_0 = \frac{k}{4}\vec{a}$  tel que  $f(\vec{u}_0) = k$ .

Tout réel  $k$  possède donc au moins un antécédent  $\vec{u}_0$  par  $f$ . Mais  $\vec{u}_0$  n'est pas le seul antécédent de  $k$  : pour tout vecteur  $\vec{v}$  orthogonal à  $\vec{a}$ , le vecteur  $\vec{u}_0 + \vec{v}$  en est un autre; en effet :

$$f(\vec{u}_0 + \vec{v}) = f(\vec{u}_0) + f(\vec{v}) = k + \vec{a} \cdot \vec{v} = k.$$

L'application  $f$  n'est pas bijective. On dit qu'elle est **surjective** pour exprimer que tout réel  $k$  possède au moins un antécédent.

### ★ Activité : Inégalité de Cauchy-Schwarz

1° Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls d'angle  $\theta$  rad. Démontrer que  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .  
Montrer que cette inégalité, dite de **Cauchy-Schwarz**, reste vraie lorsque l'un au moins des deux vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  est nul. Dans quels cas a-t-on  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$  ?

2° Démontrer que  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ ; utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour en déduire l'inégalité, dite triangulaire :  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .

Dans quels cas a-t-on :  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  ?

Interpréter l'inégalité triangulaire dans les cas suivants :

a) ABC est un triangle,  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ ;

b) ABCD est un parallélogramme,  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ .

3° Une autre démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On note :  $\|\vec{u}\|^2 = a$ ,  $\|\vec{v}\|^2 = c$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = b$ , et l'on suppose  $a \neq 0$ , c'est-à-dire  $\vec{u} \neq \vec{0}$ .  
Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = (x\vec{u} + \vec{v})^2.$$

a) Démontrer que  $f(x) = ax^2 + 2bx + c$  et calculer  $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ .

b) Démontrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x)$  est positif ou nul. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

### ● Exercices d'application

1. Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  deux vecteurs d'angle  $\theta$  et soit  $p$  leur produit scalaire.

1° Calculer  $p$ , dans les cas suivants :

a)  $\|\vec{u}\| = 2$ ,  $\|\vec{v}\| = 3$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  rad;

b)  $\|\vec{u}\| = \frac{5}{3}$ ,  $\|\vec{v}\| = \frac{4}{5}$ ,  $\theta = 120^\circ$ ;

c)  $\|\vec{u}\| = 5$ ,  $\|\vec{v}\| = \frac{3}{10}$ ,  $\theta = \frac{5\pi}{6}$  rad;

d)  $\|\vec{u}\| = 1$ ,  $\|\vec{v}\| = \frac{3}{2}$ ,  $\theta = 30^\circ$ .

e)  $\|\vec{u}\| = 3$ ,  $\|\vec{v}\| = 5$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  rad;

f)  $\|\vec{u}\| = \frac{4}{3}$ ,  $\|\vec{v}\| = \frac{6}{5}$ ,  $\theta = 150^\circ$ .

2° Calculer  $\theta$  en radians et en degrés, dans les cas suivants :

a)  $\|\vec{u}\| = 7$ ,  $\|\vec{v}\| = 8$ ,  $p = 25$ ;

b)  $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$ ,  $\|\vec{v}\| = 6$ ,  $p = -18$ ;

c)  $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{2}$ ,  $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{3}$ ,  $p = -9\sqrt{2}$ .

3° Calculer  $\|\vec{u}\|$  lorsque :

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|, \theta = \frac{5\pi}{6}, p = \frac{-2\sqrt{2}}{3}.$$

2. On donne deux vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  de normes respectives 2 et 3 et de produit scalaire  $-4$ .

1° Calculer les produits scalaires :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2; (\vec{u} - \vec{v})^2; (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v});$$

$$(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}); (2\vec{u} - 3\vec{v})^2;$$

$$(3\vec{u} - 5\vec{v}) \cdot (-2\vec{u} + \vec{v}).$$

2° Déterminer le réel  $x$  de manière que :

a)  $(x\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$ ;

b)  $(2\vec{u} - x\vec{v}) \cdot (x\vec{u} + \vec{v}) = 25$ ;

c)  $(x\vec{u} + \vec{v})^2 = 5$ ;

d)  $(x\vec{u} + 3\vec{v})^2 = 49$ .

3° Déterminer les réels  $x$  et  $y$  de manière que :

$$(x\vec{u} + y\vec{v}) \cdot \vec{u} = -2 \text{ et } (x\vec{u} + y\vec{v}) \cdot \vec{v} = 5.$$

3. Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs orthogonaux de normes respectives 4 et 5.

Déterminer le réel  $x$  pour que :

a)  $(x\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 13$ ;

b)  $(x\vec{u} + \vec{v})^2 = 34$ ;

c)  $(x\vec{u} - \vec{v}) \cdot (x\vec{u} + \vec{v}) = 23$ .

4. On donne deux points  $A$  et  $B$ , tels que  $AB = 3$ .

Construire les points  $M_i$  tels que :

a)  $AM = 4$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 6$ ;

b)  $AM = \frac{7}{2}$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -9$ ;

c)  $AM = 2$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 8$ ;

d)  $AM = 2$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -6$ .

5. On donne un triangle rectangle  $ABC$ , tel que  $AB = AC = a$ .

Construire un point  $M$ , tel que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2a^2 \text{ et } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = a^2.$$

## 2/ Produit scalaire dans le plan

6. On considère un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$ . Exprimer de deux façons différentes le produit scalaire  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

En déduire  $\cos \widehat{B} = \frac{BA}{BC}$ .

7. Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs. Démontrer que :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2).$$

En déduire une relation entre les longueurs des côtés et des diagonales d'un parallélogramme.

8. On donne deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et l'on pose :

$$\|\vec{u}\| = c, \quad \|\vec{v}\| = b \quad \text{et} \quad \|\vec{u} - \vec{v}\| = a.$$

a) Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et  $\|\vec{u} + \vec{v}\|$  en fonction de  $a, b, c$ .

b) Étant donné un triangle  $ABC$ , interpréter les résultats précédents lorsque  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

9. Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs.

a) Démontrer que :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.$$

b) En déduire que  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$  si, et seulement si,  $(\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v})$ .

c) On donne un triangle  $ABC$  et le milieu  $A'$  de  $(B, C)$ . On pose  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ . Déduire de b) que, si  $AB = AC$ , alors la médiane  $(AA')$  est hauteur du triangle  $ABC$ . Étudier la réciproque. Conclure par un théorème.

## II - LIGNES DE NIVEAU

Considérons une application  $f$  du plan  $\mathcal{F}$  dans l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels :

$$f : M \in \mathcal{F} \mapsto f(M) \in \mathbb{R}.$$

Un réel  $k$  étant donné, tout point  $M$  de  $\mathcal{F}$  tel que  $f(M) = k$  est un **antécédent** de  $k$  par  $f$ . Désignons par  $\mathcal{E}_k$  l'ensemble des antécédents de  $k$ ; cet ensemble est aussi appelé **ligne de niveau  $k$**  de l'application  $f$ .

Nous allons étudier les lignes de niveau de quelques applications de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$ .

LIGNES DE NIVEAU DE L'APPLICATION  $M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$ 

Un point  $O$  du plan  $\mathcal{F}$  et un vecteur  $\vec{u}$  non nul étant donnés, on considère l'application  $f$  de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout point  $M$  de  $\mathcal{F}$ , associe le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$  :

$$f(M) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Soit  $A$  le point défini par  $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$  et soit  $\Delta$  un axe passant par  $O$  et  $A$  (figure 5).

Pour tout point  $M$  du plan, de projeté orthogonal  $H$  sur  $\Delta$ , on a :

$$f(M) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OH}.$$

Un réel  $k$  étant donné, étudions la ligne  $\mathcal{E}_k$  de niveau  $k$  de  $f$ .

1° Pour tout point  $M$  appartenant à  $\mathcal{E}_k$ , s'il en existe, on a  $f(M) = k$ , soit :

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OH} = k,$$

$H$  étant toujours le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\Delta$ .

D'où  $\overrightarrow{OH} = \frac{k}{\overrightarrow{OA}}$  (car  $\overrightarrow{OA} \neq 0$ ).

Cette égalité détermine le point  $H$ , à partir des données  $O, \vec{u}$  et  $k$ .

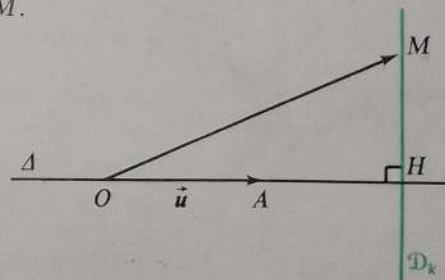


Figure 5

Le point  $M$  appartient donc à la droite  $\mathcal{D}_k$ , passant par le point fixe  $H$  et orthogonale à  $\Delta$ .  
Par suite :

$$\mathcal{E}_k \subset \mathcal{D}_k. \quad (1)$$

2° Réciproquement, pour tout point  $N$  de la droite  $\mathcal{D}_k$ , on a :

$$f(N) = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} \times \frac{k}{\overrightarrow{OA}} = k,$$

ce qui montre que  $N$  appartient à  $\mathcal{E}_k$ . D'où :

$$\mathcal{D}_k \subset \mathcal{E}_k. \quad (2)$$

Il résulte de (1) et (2) que  $\mathcal{E}_k = \mathcal{D}_k$ .

### THÉORÈME 2

Un point  $O$  du plan et un vecteur  $\vec{u}$  non nul étant donnés, la ligne de niveau  $k$  de l'application  $M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$  est une droite orthogonale à la direction du vecteur  $\vec{u}$ .

#### Propriétés des lignes de niveau

1° Soit  $B$  un point du plan (figure 6).

Désignons par  $k$  le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OB}$ , égal à  $f(B)$ . La ligne de niveau  $k$  de  $f$  passe par  $B$  puisque  $f(B) = k$ ; cette ligne de niveau est donc la droite  $\mathcal{D}_k$  passant par  $B$  et orthogonale à  $\Delta$ .

De plus, pour toute ligne de niveau  $\mathcal{D}_{k'}$  passant par  $B$ , on a  $k' = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OB}$ , d'où  $k' = k$  et par suite  $\mathcal{D}_{k'} = \mathcal{D}_k$ .

Il existe une ligne de niveau, et une seule, passant par un point donné du plan.

2° Lorsque  $B$  est confondu avec  $O$ , on a :

$$k = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0.$$

La ligne de niveau 0 est donc la droite passant par  $O$  et orthogonale à  $\Delta$  (figure 7).

Autrement dit :

Un point  $O$  du plan et un vecteur  $\vec{u}$  non nul étant donnés, l'ensemble des points  $M$  du plan, tels que  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$ , est la droite passant par  $O$  et orthogonale à  $\vec{u}$ .

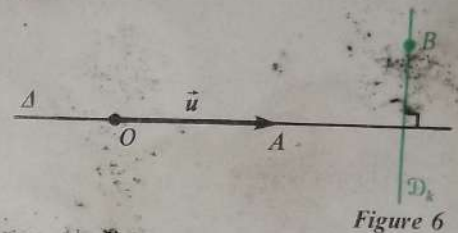


Figure 6

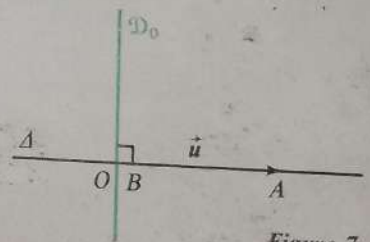


Figure 7

### Exercices d'application

10. On donne deux points  $A$  et  $B$  tels que  $AB = \frac{3}{2}$ , et l'on considère l'application  $f$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f : M \mapsto \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ .

1° Construire les lignes de niveau associées aux réels  $-6, -3, 0, 3, 6, 9$ .

2° Quel est l'ensemble des points  $M$  tels que :

- a)  $f(M) > 0$ ?  
b)  $f(M) < 0$ ?  
c)  $-3 < f(M) \leq 6$ ?  
d)  $f(M) \geq 9$ ?

3° Soit  $C$  un point tel que :

$$AC = 5 \text{ et } \widehat{BAC} = 60^\circ.$$

Déterminer le réel  $k$  pour que la ligne de niveau  $k$  passe par  $C$ .

Même question pour un point  $D$  tel que :

$$AD = 4 \text{ et } \widehat{BAD} = 135^\circ;$$

pour un point  $E$  tel que  $AE = 3$  et  $BE = 4$ .

## 2/ Produit scalaire dans le plan

11. On donne deux points  $A$  et  $B$  tels que  $AB = 3$ , et l'on considère l'application  $f$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(M) = \overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).$$

Construire les lignes de niveau  $-3, 0, 3, 6$  de l'application  $f$ .

(Utiliser le barycentre des points pondérés  $(A, 2)$  et  $(B, 1)$ .)

LIGNES DE NIVEAU DE L'APPLICATION  $M \mapsto MA^2 - MB^2$ Réduction de  $MA^2 - MB^2$ 

Pour tout bipoint  $(A, B)$  de milieu  $I$  et pour tout point  $M$  du plan (figure 8), on a :

$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 &= (\overrightarrow{MA})^2 - (\overrightarrow{MB})^2 \\ &= (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

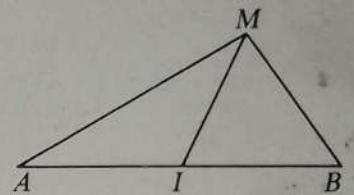


Figure 8

## THÉORÈME 3

La différence des carrés des distances d'un point  $M$  à deux points  $A$  et  $B$  s'exprime sous la forme :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM},$$

où  $I$  désigne le milieu de  $(A, B)$ .

## Application

On considère deux points distincts  $A$  et  $B$ , leur milieu  $I$ , et l'application  $f$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout point  $M$ , associe le réel :  $f(M) = MA^2 - MB^2$ .

Le théorème 3 ci-dessus permet d'exprimer  $f(M)$  sous la forme :

$$f(M) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM},$$

soit, en posant  $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$  :

$$f(M) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{IM}.$$

Il en résulte que, pour tout réel  $k$ , l'ensemble des points  $M$  tels que  $f(M) = k$ , ou ligne de niveau  $k$  de l'application  $f$ , est une droite orthogonale à la droite  $(AB)$  (théorème 2, page 28).

## THÉORÈME 4

Deux points distincts  $A$  et  $B$  du plan et un réel  $k$  étant donnés, l'ensemble des points  $M$  tels que  $MA^2 - MB^2 = k$  est une droite orthogonale à la droite  $(AB)$ .

Pour déterminer la droite  $\mathcal{D}_k$ , ligne de niveau  $k$  de l'application  $f$ , il suffit de déterminer son point d'intersection,  $H$ , avec la droite  $(AB)$  (figure 9).

Le point  $H$  est tel que :

$$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH} = 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{IH} = k, \text{ d'où } \overrightarrow{IH} = \frac{k}{2\overrightarrow{AB}}.$$

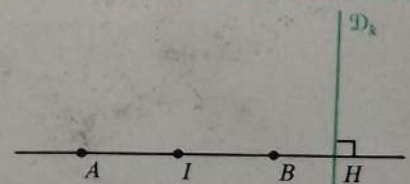


Figure 9

### ■ Exercice résolu

On donne un triangle  $ABC$  et l'on pose  $a = BC$ ,  $b = CA$  et  $c = AB$ .

1° Déterminer le réel  $k$  pour que l'ensemble des points  $M$  tels que  $MA^2 - MB^2 = k$ , soit la hauteur  $\mathcal{D}_C$  passant par  $C$ .

Définir de la même façon les hauteurs  $\mathcal{D}_A$  et  $\mathcal{D}_B$  passant par  $A$  et  $B$ .

2° Soit  $H$  le point d'intersection de  $\mathcal{D}_A$  et  $\mathcal{D}_B$  (figure 10).

Déduire du 1° que  $H$  appartient à  $\mathcal{D}_C$ . Conclure.

1° L'ensemble des points  $M$  tels que :

$$MA^2 - MB^2 = k$$

est une droite orthogonale à  $(AB)$ .

Pour que cette droite soit  $\mathcal{D}_C$  il faut et il suffit que :

$CA^2 - CB^2 = k$ , c'est-à-dire que :

$$k = b^2 - a^2.$$

Il en résulte que :

$$\mathcal{D}_C = \{ M \in \mathcal{F} / MA^2 - MB^2 = b^2 - a^2 \}.$$

On obtient de même :

$$\mathcal{D}_A = \{ M \in \mathcal{F} / MB^2 - MC^2 = c^2 - b^2 \}$$

$$\text{et } \mathcal{D}_B = \{ M \in \mathcal{F} / MC^2 - MA^2 = a^2 - c^2 \}.$$

2° Le point  $H$  appartient à  $\mathcal{D}_A$  et  $\mathcal{D}_B$ ; donc :

$$HB^2 - HC^2 = c^2 - b^2$$

$$\text{et } HC^2 - HA^2 = a^2 - c^2.$$

Par addition de ces deux égalités, on obtient :

$$HB^2 - HA^2 = a^2 - b^2,$$

soit :

$$HA^2 - HB^2 = b^2 - a^2.$$

Il en résulte que  $H$  appartient à la hauteur  $\mathcal{D}_C$ .

Les trois hauteurs du triangle  $ABC$  sont donc concourantes.

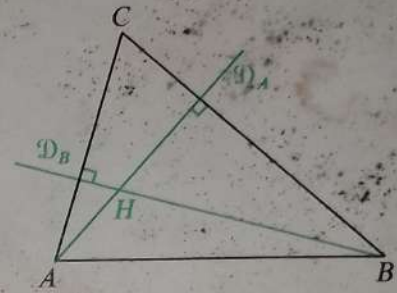


Figure 10

### ● Exercices d'application

12. On donne dans le plan  $\mathcal{F}$ , deux points  $A$  et  $B$  tels que  $AB = 4$ . Soit  $f$  l'application de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$f(M) = MA^2 - MB^2.$$

a) Déterminer et construire les lignes de niveau  $-6, -4, -2, 0, 4, 8, 10$  de l'application  $f$ .

b) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  $-6 \leq f(M) < -2$ .

c) On donne un point  $C$  tel que :

$$AC = 3 \text{ et } \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

Pour quelle valeur de  $k$  la ligne de niveau  $k$  passe-t-elle par  $C$  ?

13. On donne deux points distincts  $A$  et  $B$  et on note  $a = AB$ .

Soit  $f$  l'application de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$M \mapsto MA^2 - MB^2.$$

1° Construire les lignes de niveau de l'application  $f$  associées aux valeurs  $-2a^2$ ,

$$-a^2, 0, \frac{a^2}{2}, 3a^2.$$

2° Déterminer le réel  $k$  pour que la ligne de niveau  $k$  passe par le barycentre des points  $A$  et  $B$  affectés des coefficients respectifs 7 et  $-3$ .

LIGNES DE NIVEAU DE L'APPLICATION  $M \mapsto MA^2 + MB^2$ Réduction de  $MA^2 + MB^2$ 

Pour tout bipoint  $(A, B)$  de milieu  $I$  et pour tout point  $M$  du plan (figure 11), on a :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MA})^2 + (\overrightarrow{MB})^2 \\ &= (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM})^2 + (\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM})^2 \\ &= (\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IM}^2 - 2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IM}) + (\overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IM}^2 - 2\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IM}) \\ &= 2IM^2 + IA^2 + IB^2 - 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{IM}. \end{aligned}$$

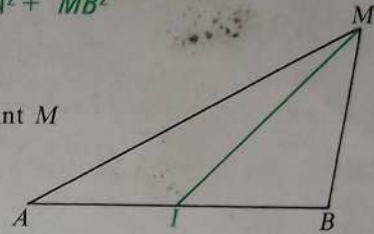


Figure 11

Comme  $I$  est le milieu de  $(A, B)$ , on a :  $IA = IB = \frac{1}{2} AB$  et  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

D'où :

$$MA^2 + MB^2 = 2IM^2 + \frac{1}{2} AB^2.$$

## THÉORÈME 5

La somme des carrés des distances d'un point  $M$  à deux points  $A$  et  $B$  s'exprime sous la forme :

$$MA^2 + MB^2 = 2IM^2 + \frac{1}{2} AB^2,$$

où  $I$  est le milieu de  $(A, B)$ .

## Applications

1° Ce résultat permet de calculer les longueurs des médianes d'un triangle  $ABC$  en fonction des longueurs des côtés : on l'appelle le **théorème de la médiane**.

Soit  $A'$  le milieu de  $(B, C)$ ; les notations étant celles de la figure 12, on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2A'A^2 + \frac{1}{2} BC^2,$$

$$\text{d'où : } m_a^2 = \frac{1}{4} (2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

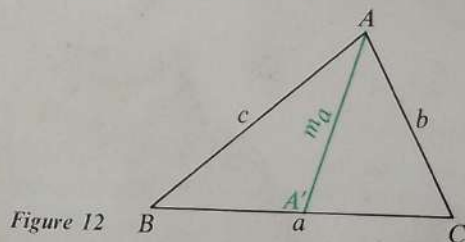


Figure 12

2° On considère deux points  $A$  et  $B$ , leur milieu  $I$  et l'application  $f$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout point  $M$ , associe le réel :  $f(M) = MA^2 + MB^2$ .

Le théorème de la médiane permet d'exprimer  $f(M)$  sous la forme :

$$f(M) = 2IM^2 + \frac{1}{2} AB^2.$$

Un réel  $k$  étant donné, la ligne de niveau  $k$  de  $f$ ,  $\delta_k$ , est définie par :

$$\delta_k = \{ M \in \mathcal{E} / f(M) = k \},$$

soit :

$$\delta_k = \left\{ M \in \mathcal{E} / 2IM^2 + \frac{1}{2} AB^2 = k \right\},$$

soit encore :

$$\delta_k = \left\{ M \in \mathcal{E} / IM^2 = \frac{1}{4} (2k - AB^2) \right\}.$$

Il en résulte,  $h$  désignant la quantité  $\frac{1}{4}(2k - AB^2)$  :

- a) si  $h < 0$ ,  $\mathcal{E}_k$  est vide;
- b) si  $h = 0$ ,  $\mathcal{E}_k$  est réduit au cercle-point  $\{I\}$ ;
- c) si  $h > 0$ ,  $\mathcal{E}_k$  est le cercle de centre  $I$  et de rayon  $\sqrt{h}$ .

### THÉORÈME 6

Un bipoint  $(A, B)$  et un réel  $k$  étant donnés, l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $MA^2 + MB^2 = k$ , s'il n'est pas vide, est un cercle centré au milieu de  $(A, B)$ .

#### ● Exercices d'application

14. On donne, dans le plan  $\mathcal{F}$ , deux points  $A$  et  $B$  tels que  $AB = 4$ .

Soit  $f$  l'application de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par :

$$f(M) = MA^2 + MB^2.$$

1° Déterminer les lignes de niveau de l'application  $f$ , associées aux réels 5, 8, 12.

2° Discuter, suivant les valeurs du réel  $k$ , la nature de la ligne de niveau  $k$ .

3° Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :

$$10 < MA^2 + MB^2 \leq 16.$$

4° Soit  $C$  un point du plan, tel que  $AC = 2$  et  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ .

Pour quelle valeur de  $k$  la ligne de niveau  $k$  passe-t-elle par  $C$ ?

15. Soit un triangle  $ABC$  et soit  $f$  l'application de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(M) = MA^2 + MB^2 - 2MC^2.$$

1° Démontrer que  $f(M)$  peut s'exprimer sous la forme :

$$f(M) = 4\overrightarrow{RC} \cdot \overrightarrow{SM} + \frac{AB^2}{2},$$

où  $R$  est le milieu de  $(A, B)$  et  $S$  le milieu de  $(R, C)$ .

2° En déduire les lignes de niveau de l'application  $f$ .

3° On suppose que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ . Construire la ligne de niveau 0 de  $f$ .

#### APPLICATIONS $M \mapsto \alpha MA^2 + \beta MB^2$

#### ★ Activité

On considère deux points distincts  $A$  et  $B$  et l'application  $f$  de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout point  $M$ , associe le réel  $f(M) = 2MA^2 - 5MB^2$ .

1° Pour tout bipoint  $(M, M')$  de milieu  $I$  démontrer que :

$$f(M) - f(M') = 2\overrightarrow{MM'} \cdot (2\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IB}).$$

2° Soit  $G$  le barycentre des points pondérés  $(A, 2)$  et  $(B, -5)$ . Démontrer que :

$$2\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{IG},$$

et en déduire que  $f(M) - f(M') = -6\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{IG}$ , puis que :

$$f(M) - f(M') = -3(GM^2 - GM'^2). \quad (1)$$

3° a) Le point  $M$  étant fixé, quel est l'ensemble des points  $M'$  tels que  $f(M') = f(M)$ . (Utiliser la relation (1).)

b) En déduire que les lignes de niveau non vides de  $f$  sont les cercles de centre  $G$ .

4° Que devient l'égalité (1) lorsque  $M' = G$ . Retrouver ainsi le résultat de la question 3° b).

**Réduction de  $\alpha MA^2 + \beta MB^2$** 

On considère deux points  $A$  et  $B$  et deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\alpha + \beta \neq 0$ .  
Soit  $f$  l'application de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout point  $M$ , associe le réel :

$$f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2.$$

Pour réduire l'expression  $MA^2 + MB^2$ , on a utilisé, page 31, le milieu  $I$  du bipoint  $(A, B)$ , c'est-à-dire le barycentre des points pondérés  $(A, 1)$  et  $(B, 1)$ .

D'où l'idée d'utiliser, pour réduire  $\alpha MA^2 + \beta MB^2$ , le barycentre des points pondérés  $(A, \alpha)$  et  $(B, \beta)$ . Ce barycentre,  $G$ , existe puisque  $\alpha + \beta \neq 0$ . On a :

$$MA^2 = (\overrightarrow{MA})^2 = (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM})^2 = GA^2 + GM^2 - 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GM};$$

$$MB^2 = (\overrightarrow{MB})^2 = (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM})^2 = GB^2 + GM^2 - 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GM}.$$

Il en résulte :

$$f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 = \alpha GA^2 + \beta GB^2 + (\alpha + \beta)GM^2 - 2(\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB}) \cdot \overrightarrow{GM}.$$

Or :  $\alpha GA^2 + \beta GB^2 = f(G)$  et  $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ .

D'où :  $f(M) = f(G) + (\alpha + \beta)GM^2$ . (1)

**Application**

Un réel  $k$  étant donné, étudions  $\mathcal{E}_k$  la ligne de niveau  $k$  de l'application  $f$ .

On a :  $\mathcal{E}_k = \{ M \in \mathcal{F}; f(M) = k \}$ , soit, compte tenu de (1) :

$$\mathcal{E}_k = \left\{ M \in \mathcal{F}; GM^2 = \frac{k - f(G)}{\alpha + \beta} \right\}$$

Le réel  $\frac{k - f(G)}{\alpha + \beta}$  ne dépend que des données  $A, B, \alpha, \beta$  et  $k$ . Désignons par  $h$  ce réel fixe :

- a) si  $h > 0$ ,  $\mathcal{E}_k$  est le cercle de centre  $G$  et de rayon  $\sqrt{h}$ ;  
b) si  $h = 0$ ,  $\mathcal{E}_k$  est réduit au *cercle-point*  $\{G\}$ ;  
c) si  $h < 0$ ,  $\mathcal{E}_k$  est vide.

**THÉORÈME 7**

Étant donnés deux points  $A$  et  $B$  et deux réels  $\alpha, \beta$  tels que  $\alpha + \beta \neq 0$ , la *ligne de niveau  $k$*  de l'application  $f : M \rightarrow \alpha MA^2 + \beta MB^2$ , si elle n'est pas vide, est un cercle centré au point  $G$ , barycentre des points pondérés  $(A, \alpha)$  et  $(B, \beta)$ .

**Exercices d'application**

16. On donne deux points  $A$  et  $B$  tels que  $AB = 6$  et l'on considère l'application  $f$  de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(M) = 2MA^2 + MB^2$ .

a) Déterminer les lignes de niveau 8, 12, 15, 18 de l'application  $f$ .

b) Quel est l'ensemble des points  $M$  tels que :

$$15 < f(M) \leq 18?$$

c) Soit  $C$  un point tel que :

$$AC = 4 \text{ et } \widehat{BAC} = 45^\circ.$$

Pour quelle valeur de  $k$  la ligne de niveau  $k$  passe-t-elle par  $C$ ?

17. On donne deux points  $A$  et  $B$  tels que  $AB = 3$  et l'on considère l'application  $f$  de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout point  $M$  du plan, associe le réel :  $f(M) = MA^2 + 2MB^2$ .

Démontrer que  $f(M)$  est minimum lorsque  $M$  est en  $G$ , barycentre des points pondérés  $(A, 1)$  et  $(B, 2)$ . Calculer la valeur minimum,  $f(G)$ , de l'application  $f$ .

18. On considère deux points distincts  $A$  et  $B$  et l'application  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(M) = -5MA^2 + 3MB^2.$$

Démontrer que  $f(M)$  est maximum pour un point  $G$  du plan que l'on déterminera. Lorsque  $AB = 4$ , calculer la valeur maximum  $f(G)$  de l'application  $f$ .

### LIGNES DE NIVEAU DE L'APPLICATION $M \mapsto \overline{MA} \cdot \overline{MB}$

#### ★ Activité

On donne dans le plan  $\mathcal{P}$  un bipoint  $(A, B)$  de milieu  $O$  et l'on considère l'application  $f$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout point  $M$ , associe le réel  $f(M)$ , défini par :

$$f(M) = \overline{MA} \cdot \overline{MB}.$$

1° On pose  $a = AB$ . Calculer  $f(A)$ ,  $f(B)$ ,  $f(O)$ .

Calculer de même  $f(C)$  et  $f(D)$ , le point  $C$  étant le troisième sommet d'un triangle équilatéral dont les deux premiers sommets sont  $A$  et  $B$ , et le point  $D$  étant le barycentre des points pondérés  $(A, -3)$  et  $(B, 5)$ .

2° Pour tout point  $M$  du plan, démontrer que :

$$f(M) = OM^2 - \frac{a^2}{4}.$$

En déduire que la ligne de niveau  $k$  de  $f$  est, soit l'ensemble vide, soit un cercle de centre  $O$  dont on déterminera le rayon en fonction de  $a$  et de  $k$ .

3° Démontrer que la ligne de niveau  $0$  de l'application  $f$  est le cercle de diamètre  $[A, B]$ .

#### Applications

1. On donne un triangle  $ABC$ . Déterminer l'ensemble  $\mathcal{C}$  des points  $M$  du plan tels que :

a)  $\overline{MA} \cdot (\overline{MB} + \overline{MC}) = 0$ ;

b)  $\overline{MA} \cdot (3\overline{MB} - 5\overline{MC}) = 0$ ;

c)  $(\overline{MA} + 2\overline{MB}) \cdot (\overline{MB} + \overline{MC}) = 0$ ;

d)  $(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) \cdot (\overline{MB} + \overline{MC}) = 0$ .

2. Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  et soit  $A$  un point du plan. On pose  $d = OA$ .

a) Pour tout diamètre  $[M, M']$  du cercle  $\mathcal{C}$ , démontrer que le produit scalaire  $p = \overline{AM} \cdot \overline{AM'}$  est constant. Exprimer  $p$  en fonction de  $d$  et  $r$ .

b) Une droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A$  coupe  $\mathcal{C}$  en  $B$  et  $C$ . Démontrer que  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = p$ . (Utiliser le point  $B'$  diamétralement opposé à  $B$  sur  $\mathcal{C}$ .)

c) On suppose que  $A$  est extérieur à  $\mathcal{C}$ .

Une droite  $\Delta$  passant par  $A$  est tangente à  $\mathcal{C}$  en  $T$ .

Démontrer que :  $AT^2 = p$ . (Utiliser le point  $T'$  diamétralement opposé à  $T$ .)

3. On considère deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sécantes en  $A$ , deux points  $B$  et  $C$  de  $\mathcal{D}$  et deux points  $B'$  et  $C'$  de  $\mathcal{D}'$ . Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

•  $B, C, B', C'$  sont cocycliques,

•  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB'} \cdot \overline{AC'}$ .

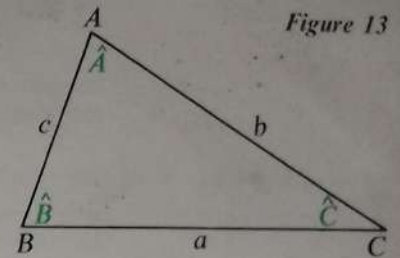
4. On considère trois points alignés  $A, B, C$  et un point  $T$  non situé sur la droite  $(AB)$ . Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

• la droite  $(AT)$  est tangente au cercle  $BCT$ ;

•  $AT^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ .

### III – RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE

Dans un triangle  $ABC$  on désigne habituellement les angles par  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  et les longueurs des côtés respectivement opposés aux sommets  $A, B, C$  par  $a, b, c$  (figure 13).



**FORMULE**  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

L'égalité vectorielle  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$  donne :

$$(\overrightarrow{BC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = (\overrightarrow{AC})^2 + (\overrightarrow{AB})^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB},$$

soit :  $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB.$

Or :  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \times AB \times \cos \widehat{BAC}.$

D'où :  $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \cos \hat{A}$ , soit :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Dans cette formule, le sommet  $A$  joue un rôle particulier. En faisant jouer ce rôle à  $B$ , puis à  $C$ , on obtient deux autres relations qui se déduisent de la première par *permutation circulaire*, c'est-à-dire en remplaçant  $a$  par  $b$ ,  $b$  par  $c$  et  $c$  par  $a$ , ainsi que  $\hat{A}$  par  $\hat{B}$  et  $\hat{B}$  par  $\hat{C}$  :

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Ces formules permettent de calculer la longueur d'un côté à partir des longueurs des deux autres côtés et de la mesure de l'angle opposé. Elles permettent également d'exprimer les cosinus des angles d'un triangle en fonction des longueurs des côtés. Par exemple :

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Il est alors possible, avec des tables trigonométriques ou une machine à calculer, d'obtenir la mesure en radians, degrés ou grades, de l'angle  $\hat{A}$ .

#### ■ Exercice résolu

Un triangle  $ABC$  est tel que  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 2$ .  
Calculer les mesures en degrés des angles de ce triangle.

La formule  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$  donne :

$$\cos \hat{A} = -0,25, \text{ d'où } \hat{A} \approx 104,48^\circ.$$

On obtient de même :  $\cos \hat{B} = 0,6875$ , d'où  $\hat{B} \approx 46,57^\circ$ ;

$$\cos \hat{C} = 0,875, \text{ d'où } \hat{C} \approx 28,95^\circ.$$

### ● Exercices d'application

19. En utilisant la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A},$$

démontrer le théorème de Pythagore et sa réciproque.

20. On rappelle que pour tout angle  $\widehat{xOy}$  non nul et non plat, on a :  $-1 < \cos \widehat{xOy} < 1$ .  
En utilisant cette propriété et la formule :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A},$$

démontrer que  $|b - c| < a < b + c$ .  
Énoncer un théorème exprimant ce résultat.

21. Soit un triangle  $ABC$ . Démontrer que :

$$b^2 - c^2 = a(b \cos \hat{C} - c \cos \hat{B}).$$

En déduire :

$$b = c \text{ si, et seulement si, } \cos \hat{B} = \cos \hat{C}.$$

(Pour démontrer que  $\cos \hat{B} = \cos \hat{C}$  entraîne  $b = c$ , on sera amené à montrer, en utilisant le résultat de l'exercice précédent, que :

$$b + c - a \cos \hat{B} > 0.)$$

Énoncer un théorème exprimant cette propriété.

22. Soit un triangle  $ABC$ . On rappelle que :

$$\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1 \text{ et } \sin \hat{A} > 0.$$

a) Démontrer que  $\sin^2 \hat{A}$  est égal à :

$$\frac{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)}{4b^2c^2}$$

b) On pose  $2p = a + b + c$  ( $p$  est le demi-périmètre du triangle  $ABC$ ).  
Démontrer que :

$$\sin \hat{A} = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

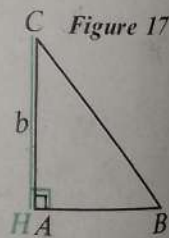
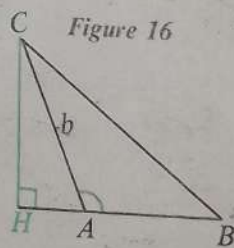
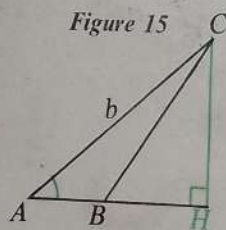
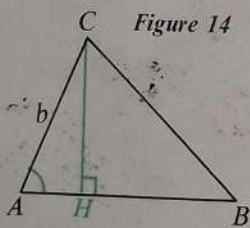
### FORMULES

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2S}$$

On considère un triangle  $ABC$  et sa hauteur  $(CH)$ .

Suivant que l'angle  $\hat{A}$  est aigu, obtus ou droit, le point  $H$  se trouve :

- sur la demi-droite d'origine  $A$  contenant  $B$  (figures 14 et 15);
- sur la demi-droite opposée (figure 16);
- en  $A$  (figure 17).



Dans le cas a), l'angle  $\widehat{HAC}$  est l'angle  $\hat{A}$  du triangle  $ABC$ , et dans le triangle  $AHC$ , rectangle en  $H$ , on a :

$$\sin \hat{A} = \frac{HC}{AC}, \text{ soit } HC = b \sin \hat{A}.$$

Dans le cas b), l'angle  $\widehat{HAC}$  et l'angle  $\hat{A}$  du triangle  $ABC$  sont supplémentaires et ont donc le même sinus :

$$\sin \hat{A} = \sin \widehat{HAC} = \frac{HC}{AC}, \text{ soit } HC = b \sin \hat{A}.$$

Dans le cas c),  $HC = AC = b \sin \hat{A}$ , puisque l'angle  $\hat{A}$  est droit.

Dans tous les cas, on a :  $HC = b \sin \hat{A}$ .

**Aire d'un triangle**

L'aire  $S$  du triangle  $ABC$  est donné par la formule  $S = \frac{AB \times HC}{2}$

Par suite :  $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$ .

**THÉORÈME 8**

L'aire d'un triangle est égale au demi-produit des longueurs de deux côtés et du sinus de l'angle formé par ces côtés.

En faisant jouer aux sommets  $B$  et  $C$  le rôle joué ci-dessus par le sommet  $A$ , on obtient :

$$S = \frac{1}{2} ca \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}.$$

Il en résulte :  $2S = bc \sin \hat{A} = ca \sin \hat{B} = ab \sin \hat{C}$ , d'où, en divisant par le produit  $abc$  :

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c},$$

soit finalement :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2S}$$

**Exercice résolu**

Dans un triangle  $ABC$ , on connaît  $a = 41,25$  m,  $\hat{B} = 40$  gr,  $\hat{C} = 75$  gr.  
Calculer  $\hat{A}$ ,  $b$ ,  $c$ .

Les mesures des angles du triangle étant exprimées en grades, on a :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 200, \text{ d'où : } \hat{A} = 200 - 40 - 75 = 85.$$

Par suite,  $\sin \hat{A} \approx 0,9724$  et  $\frac{a}{\sin \hat{A}} \approx 42,422$ .

Il en résulte :  $\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \approx 42,422$ , d'où :

$$b \approx 42,422 \times \sin \hat{B} \approx 24,94 \quad \text{et} \quad c = 42,422 \times \sin \hat{C} \approx 39,19.$$

**Exercices d'application**

23. Dans un triangle  $ABC$ , on connaît :

$$\hat{A} = 112,15^\circ, \quad \hat{B} = 35,8^\circ, \\ c = 128,5 \text{ m.}$$

Calculer l'aire du triangle et son périmètre.

24. Dans un triangle  $ABC$ , on a, entre les longueurs des côtés, la relation :

$$2a = b + c.$$

Démontrer que les sinus des angles vérifient la relation :  $2 \sin \hat{A} = \sin \hat{B} + \sin \hat{C}$ . Étudier la réciproque.

25. Utiliser le résultat de l'exercice 22 pour montrer que l'aire  $S$  d'un triangle  $ABC$  s'exprime sous la forme :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

où  $p$  désigne le demi-périmètre du triangle.

FORMULES  $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$

On considère un triangle  $ABC$  et son cercle circonscrit  $\mathcal{C}$ . On note  $R$  le rayon de  $\mathcal{C}$ . Lorsque l'angle  $\hat{A}$  est droit, le côté  $[B, C]$  est un diamètre du cercle  $\mathcal{C}$  (figure 18) et on a :  $a = 2R$  et  $\sin \hat{A} = 1$ ; d'où :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R.$$

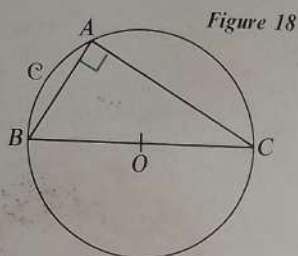


Figure 18

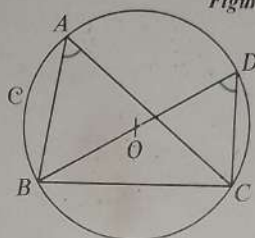


Figure 19

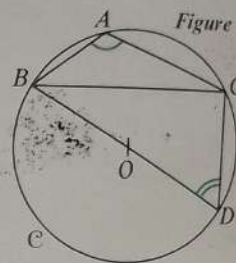


Figure 20

Lorsque l'angle  $\hat{A}$  n'est pas droit, considérons le point  $D$  diamétralement opposé à  $B$ . Dans le quadrangle inscriptible  $ABDC$ , les angles opposés  $\hat{A}$  et  $\hat{D}$  ont même mesure lorsque  $ABDC$  est **croisé** (figure 19), ou sont supplémentaires lorsque  $ABDC$  est **convexe** (figure 20). Dans les deux cas  $\sin \hat{A} = \sin \hat{D}$ .

Comme  $[B, D]$  est un diamètre du cercle  $\mathcal{C}$ , le triangle  $BCD$  est rectangle en  $C$  et :

$$\sin \hat{D} = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}.$$

Il en résulte :  $\sin \hat{A} = \frac{a}{2R}$ , d'où  $\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R$ .

En appliquant ce résultat aux angles  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$ , on obtient :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R.$$

### ● Exercices d'application

26. Démontrer que le rayon  $R$  du cercle circonscrit d'un triangle  $ABC$  est donné par :

$$R = \frac{abc}{4S}$$

où  $S$  désigne l'aire du triangle.

27. Démontrer que l'aire  $S$  d'un triangle  $ABC$  est donnée par :

$$S = \frac{a^2 \sin \hat{B} \sin \hat{C}}{2 \sin \hat{A}}$$

On considère deux points du plan tels que  $\frac{MA}{MB} = k$

1<sup>re</sup> méthode :  
1<sup>re</sup> Démontrer que l'ensemble En déduire que  $\mathcal{C}$  est un cercle

2<sup>e</sup> Démontrer que le centre de

2<sup>e</sup> méthode :

1<sup>re</sup> Démontrer que  $\mathcal{C}$  est l'ensem  
2<sup>e</sup> En déduire que  $\mathcal{C}$  est le cercle

$\overline{CA} +$

3<sup>e</sup> Construire les points  $C$  et  $D$

a)  $AB = 6$  cm,  $k = \frac{1}{2}$ ; b)  $AB$

On retiendra :

Soit deux points distincts  $A$  et  $B$  et un

cercle de diamètre  $[C, D]$ ,  $C$  et  $D$  ét

Applications :

1. Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts du pl

a)  $|\overline{MA} + \overline{MB}| = MA$ , b)  $|\overline{MA} + \overline{M}$

2. On donne deux points distincts  $A$  et  $B$ . Que

raisons du rapport  $(M, A)$ .

3. On donne un triangle  $ABC$ .

1<sup>re</sup> Démontrer l'ensemble des points  $M$  tels que :

a)  $|\overline{MA} - \overline{MB}| = |\overline{MA} + \overline{2MC}|$ , b)  $|\overline{MA} -$

c)  $|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| = |\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC}|$

2<sup>e</sup> Soit  $k$  un réel donné. Démontrer, suivant les valeurs

3<sup>e</sup> Représente le 2<sup>e</sup> que l'ensemble des points  $M$  tels que

TRIANGLES ISOMÉTRIQUES

On dit que deux triangles sont isométriques si, aux trian

angles  $A, B, C$  du second de façon que l'angle

$\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$ ,  $\hat{C} = \hat{C}'$ ,  $CA = C'A'$

Les côtés correspondants  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$ ,  $CA = C'A'$

Les angles correspondants  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$ ,  $\hat{C} = \hat{C}'$

# TRAVAUX PRATIQUES

ENSEMBLE DES POINTS  $M$  TELS QUE  $\frac{MA}{MB} = k$ .

On considère deux points distincts  $A$  et  $B$  dans le plan  $\mathcal{P}$  et un réel  $k$  strictement positif. Lorsque  $k = 1$ , l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\frac{MA}{MB} = k$  est la médiatrice du segment  $[A, B]$ . Étudions cet ensemble lorsque  $k$  est différent de 1.

1<sup>re</sup> méthode :

1<sup>o</sup> Démontrer que l'ensemble  $\mathcal{C}$  est la ligne de niveau 0 de l'application  $f : M \mapsto MA^2 - k^2 MB^2$ .

En déduire que  $\mathcal{C}$  est un cercle, centré sur la droite  $(AB)$ , dont on déterminera le rayon en fonction de  $a = AB$  et de  $k$ .

2<sup>o</sup> Démontrer que le centre de  $\mathcal{C}$  est le point  $I$  de la droite  $(AB)$  défini par  $\frac{IA}{IB} = k^2$ .

2<sup>e</sup> méthode :

1<sup>o</sup> Démontrer que  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des points  $M$  du plan  $\mathcal{P}$  tels que :  $(\vec{MA} + k\vec{MB}) \cdot (\vec{MA} - k\vec{MB}) = 0$ .

2<sup>o</sup> En déduire que  $\mathcal{C}$  est le cercle de diamètre  $[C, D]$ ,  $C$  et  $D$  étant les points définis par :

$$\vec{CA} + k\vec{CB} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{DA} - k\vec{DB} = \vec{0}, \quad \text{soit} \quad \frac{\vec{CA}}{\vec{CB}} = -k \quad \text{et} \quad \frac{\vec{DA}}{\vec{DB}} = k.$$

3<sup>o</sup> Construire les points  $C$  et  $D$  et le cercle  $\mathcal{C}$  dans les cas suivants :

a)  $AB = 6$  cm,  $k = \frac{1}{2}$ ;    b)  $AB = 5$  cm,  $k = \frac{3}{2}$ ;    c)  $AB = 5$  cm,  $k = \sqrt{2}$ .

On retiendra :

Soit deux points distincts  $A$  et  $B$  et un réel positif  $k$ , différent de 0 et de 1. L'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\frac{MA}{MB} = k$ , est le cercle de diamètre  $[C, D]$ ,  $C$  et  $D$  étant les points définis par :

$$\frac{\vec{CA}}{\vec{CB}} = -k \quad \text{et} \quad \frac{\vec{DA}}{\vec{DB}} = k$$

Applications :

1. Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan  $\mathcal{P}$ . Déterminer l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{P}$  tels que :

a)  $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = MA$ ;    b)  $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|2\vec{MA} + \vec{MB}\|$ ;    c)  $\|3\vec{MA} - \vec{MB}\| = \|-5\vec{MA} + 2\vec{MB}\|$ .

2. On donne deux points distincts  $A$  et  $B$ . Quels sont les ensembles des points  $M$  et  $N$  tels que  $MB = MN$  et tels que  $A$  soit le milieu du bipoint  $(M, N)$ .

3. On donne un triangle  $ABC$ .

1<sup>o</sup> Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que :

a)  $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MA} + 2\vec{MC}\|$ ;    b)  $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MB} + \vec{MC}\|$ ;

c)  $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{2MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$ .

2<sup>o</sup> Soit  $k$  un réel donné. Déterminer, suivant les valeurs de  $k$ , l'ensemble des points  $M$  tels que  $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MA} + k\vec{MC}\|$ .

3<sup>o</sup> Reprendre le 2<sup>o</sup> pour l'ensemble des points  $M$  tels que  $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + k\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB}\|$ .

## TRIANGLES ISOMÉTRIQUES

On dit que deux triangles sont **isométriques** si, aux trois sommets  $A, B, C$  du premier, on peut respectivement associer trois sommets  $A', B', C'$  du second de façon que (figure 1) :

$$\begin{cases} AB = A'B', & BC = B'C', & CA = C'A' \\ \hat{A} = \hat{A}', & \hat{B} = \hat{B}', & \hat{C} = \hat{C}'. \end{cases}$$

Les sommets associés :  $A$  et  $A'$ ,  $B$  et  $B'$ ,  $C$  et  $C'$  sont dits **homologues**.

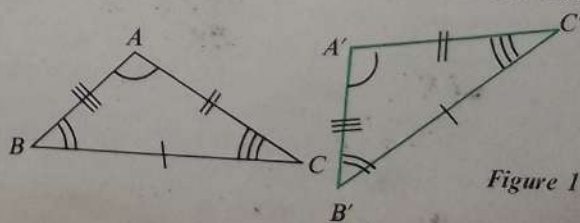


Figure 1

## REMARQUE :

Quand deux triangles sont isométriques il est intéressant d'énoncer dans le même ordre les sommets homologues. Avec cette règle si, par exemple, les triangles  $ABC$  et  $FDE$  sont égaux,

en écrivant  $\begin{cases} ABC \\ FDE \end{cases}$  on obtient, sans figure, les six égalités :  $\begin{cases} AB = FD & , & BC = DE & , & CA = EF \\ \widehat{A} = \widehat{F} & , & \widehat{B} = \widehat{D} & , & \widehat{C} = \widehat{E} \end{cases}$

## Cas d'isométrie des triangles.

Les relations métriques dans un triangle (pages 35 et 36) permettent d'établir trois conditions suffisantes d'isométrie de deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$ , connues sous le nom de cas d'isométrie.

1<sup>er</sup> cas : Si  $BC = B'C'$ ,  $\widehat{B} = \widehat{B}'$ ,  $\widehat{C} = \widehat{C}'$ , les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont isométriques.

2<sup>e</sup> cas : Si  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ ,  $\widehat{A} = \widehat{A}'$ , les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont isométriques.

3<sup>e</sup> cas : Si  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$ ,  $CA = C'A'$ , les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont isométriques.

Illustrer par une figure et démontrer ces conditions dans l'ordre 1<sup>er</sup> cas, 3<sup>e</sup> cas, 2<sup>e</sup> cas.

Outre les relations métriques des pages 35 et 36, on utilisera les propriétés suivantes :

- la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à  $180^\circ$  (ou  $\pi$  rad, ou  $200$  gr);
- deux angles non orientés qui ont même cosinus ont même mesure :

$$\text{si } \cos \widehat{A} = \cos \widehat{A}' \text{, alors } \widehat{A} = \widehat{A}'.$$

Attention : Si deux angles non orientés ont même sinus, leurs mesures sont égales ou supplémentaires :

$$\text{si } \sin \widehat{A} = \sin \widehat{A}' \text{, alors } \widehat{A} = \widehat{A}' \text{ ou } \widehat{A} + \widehat{A}' = 180^\circ.$$

## Cas d'isométrie des triangles rectangles.

Démontrer les deux conditions suffisantes d'isométrie des triangles rectangles :

1<sup>er</sup> cas : Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse de même longueur et un angle aigu de même mesure, ils sont isométriques.

2<sup>e</sup> cas : Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse de même longueur et un côté de l'angle droit de même longueur, ils sont isométriques.

## Applications

Les cas d'isométrie permettent, à partir de l'égalité des mesures de trois éléments (dont au moins un côté), de conclure à l'égalité des mesures des trois autres.

Ainsi pour démontrer l'égalité des longueurs de deux segments, ou l'égalité des mesures de deux angles, il suffit de trouver deux triangles dont ces segments ou ces angles sont éléments, et de démontrer que les deux triangles sont isométriques.

1. On considère deux triangles isométriques  $ABC$  et  $A'B'C'$ , les hauteurs ( $AH$ ) et ( $A'H'$ ), les médianes ( $AM$ ) et ( $A'M'$ ), les bissectrices intérieures ( $AE$ ) et ( $A'E'$ ). (Les points  $H, M, E$  et les points  $H', M', E'$  appartiennent respectivement aux droites  $(BC)$  et  $(B'C')$ .)

Démontrer que  $AH = A'H'$ ,  $AM = A'M'$ ,  $AE = A'E'$ .

2. On considère un triangle  $ABC$ . Démontrer, en utilisant le milieu  $A'$  de  $[B, C]$ , l'équivalence des deux conditions  $AB = AC$  et  $\widehat{B} = \widehat{C}$ . (Lorsque ces conditions sont vérifiées on dit que le triangle  $ABC$  est isocèle en  $A$ .)

3. On considère un triangle  $ABC$  et les milieux respectifs  $B'$  et  $C'$  des côtés  $[A, C]$  et  $[A, B]$ . Démontrer l'équivalence des deux conditions :

- $ABC$  est isocèle en  $A$ ,
- $BB' = CC'$ .

(Pour l'une des implications penser à utiliser le point d'intersection  $G$  des deux médianes  $(BB')$  et  $(CC')$ .)

4. On considère deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  et les milieux respectifs  $M$  et  $M'$  des côtés  $[B, C]$  et  $[B', C']$ . Démontrer que si  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$  et  $AM = A'M'$  les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont isométriques. (Utiliser le point  $D$  symétrique de  $A$  par rapport à  $M$  et le point  $D'$  symétrique de  $A'$  par rapport à  $M'$ .)

5. Démontrer que l'image d'un triangle  $ABC$  par une translation est un triangle  $A'B'C'$  isométrique au premier.

6. Soit un angle  $\widehat{xOy}$  ni nul, ni plat et deux points  $A$  et  $B$  appartenant respectivement à  $Ox$  et  $Oy$  et tels que  $OA = OB$ . Les perpendiculaires à  $Ox$  en  $A$  et à  $Oy$  en  $B$  se coupent en  $I$ .

a) Démontrer que  $IA = IB$  et que  $\widehat{AOI} = \widehat{BOI}$ . (La droite  $(OI)$  est donc la bissectrice de  $\widehat{xOy}$ .)

b) A tout point  $M$  du segment  $[O, A]$ , on associe le point  $N$  de la demi-droite  $By$  tel que  $BN = AM$ . Démontrer que la médiatrice de  $[M, N]$  passe par un point fixe.

c) Les segments  $[A, B]$  et  $[M, N]$  se coupent en  $R$ . Démontrer que les points  $O, M, I, N$  sont cocycliques, ainsi que  $N, R, B, I$ .

d) Démontrer que le milieu de  $(M, N)$  se déplace sur une droite fixe.

## TRIANGLES SEMBLABLES

On dit que deux triangles sont **semblables** si, aux trois sommets  $A, B, C$  du premier on peut respectivement associer trois sommets  $A', B', C'$  du second de façon que :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}, \quad \widehat{A} = \widehat{A'}, \quad \widehat{B} = \widehat{B'}, \quad \widehat{C} = \widehat{C'}$$

Les sommets associés  $A$  et  $A'$ ,  $B$  et  $B'$ ,  $C$  et  $C'$  sont dits **homologues**.

Le **rapport de similitude** de deux triangles semblables est le rapport de deux côtés homologues.

1. Démontrer que l'image d'un triangle  $ABC$  par une homothétie  $h$  de centre  $O$  et de rapport  $k$  est un triangle  $A'B'C'$  semblable au premier. Quel est le rapport de similitude? (Distinguer les cas :  $k > 0$  et  $k < 0$  et utiliser les propriétés :

- deux angles à côtés parallèles et de même sens ont même mesure;
- deux angles à côtés parallèles et de sens contraires ont même mesure.)

Illustrer cette question en dessinant un triangle  $ABC$ , le point  $O$  tel que  $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ , et les images  $A'B'C'$  et  $A''B''C''$  de  $ABC$  par les homothéties  $h_1$  et  $h_2$  de même centre  $O$  et de rapports respectifs  $\frac{5}{2}$  et  $-\frac{2}{3}$ .

2. Utiliser les relations métriques dans un triangle pour démontrer les théorèmes suivants, connus sous le nom de **cas de similitude**. (Faire les démonstrations dans l'ordre 1<sup>er</sup> cas, 3<sup>e</sup> cas, 2<sup>e</sup> cas.)

1<sup>er</sup> cas : Lorsque deux triangles ont deux angles dont les mesures sont respectivement égales, ils sont semblables :

$$\text{si } \widehat{A} = \widehat{A'} \text{ et } \widehat{B} = \widehat{B'}, \text{ les triangles } ABC \text{ et } A'B'C' \text{ sont semblables.}$$

2<sup>e</sup> cas : Lorsque deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés dont les longueurs sont proportionnelles, ils sont semblables :

$$\text{si } \widehat{A} = \widehat{A'} \text{ et } \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}, \text{ les triangles } ABC \text{ et } A'B'C' \text{ sont semblables.}$$

3<sup>e</sup> cas : Lorsque deux triangles ont les longueurs de leurs trois côtés proportionnelles, ils sont semblables :

$$\text{si } \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}, \text{ les triangles } ABC \text{ et } A'B'C' \text{ sont semblables.}$$

3. Dédire des cas de similitude les propriétés suivantes :

- Deux triangles équilatéraux sont semblables.
- Deux triangles rectangles qui ont un angle aigu de même mesure sont semblables.
- Deux triangles rectangles dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont proportionnelles sont semblables :

$$\text{si } \widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ \text{ et } \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}, \text{ les triangles } ABC \text{ et } A'B'C' \text{ sont semblables.}$$

d) Deux triangles rectangles dont les longueurs de l'hypoténuse et d'un côté de l'angle droit sont proportionnelles sont semblables :

$$\text{si } \widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ \text{ et } \frac{BC}{BC'} = \frac{AB}{AB'}, \text{ les triangles } ABC \text{ et } A'B'C' \text{ sont semblables.}$$

## Applications :

Les cas de similitude permettent de démontrer que deux angles ont même mesure (angles homologues de deux triangles semblables). Ils permettent aussi d'établir des relations entre les longueurs de segments.

1. Deux cercles  $C$  et  $C'$  se coupent en  $A$  et  $B$ . La tangente en  $B$  à  $C$  recoupe  $C'$  en  $C'$  et la tangente en  $B$  à  $C'$  recoupe  $C$  en  $C$ .

1<sup>o</sup> Comparer les triangles  $ABC$  et  $AC'B$ . Que représente la droite  $(AB)$  pour l'angle  $\widehat{CAC'}$ ?

2<sup>o</sup> Démontrer les relations  $AB^2 = AC \cdot AC'$  et  $\frac{BC^2}{BC'^2} = \frac{AC}{AC'}$ .

2. Soit un triangle  $ABC$  et son cercle circonscrit  $C$ . Désignons par  $D$  le point diamétralement opposé à  $A$ , et par  $H$  le point d'intersection de la hauteur issue de  $A$  et de la droite  $(BC)$ . On pose  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $2R = AD$  et  $h = AH$ .

1<sup>o</sup> On suppose que l'angle  $\widehat{B}$  est aigu. Comparer les triangles  $ABH$  et  $ADC$  et en déduire que  $bc = 2Rh$ .

2° Même question lorsque  $\widehat{B}$  est obtus et lorsque  $\widehat{B}$  est droit.

3. Soit  $ABC$  et  $A'B'C'$  deux triangles semblables de rapport de similitude  $k$  ( $\frac{A'B'}{AB} = k$ ). Calculer le rapport des aires de ces triangles.

4. On considère un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$  et la hauteur  $[A, H]$  relative à l'hypoténuse. Le cercle de centre  $H$  et de rayon  $AH$  recoupe  $(AB)$  en  $D$  et  $(AC)$  en  $E$ .

1° Démontrer que les points  $D, H, E$  sont alignés.

2° Démontrer que les triangles  $ABC$  et  $AED$  sont semblables et que le quadrilatère  $BDCE$  est inscriptible.

3° Établir la relation :  $HB \cdot HC = \frac{DE^2}{4}$ .

5. On considère un segment  $[A, B]$  et les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  passant respectivement par  $A$  et  $B$  et perpendiculaires à  $(AB)$ . A tout point  $M$  de la droite  $\mathcal{D}$ , distinct de  $A$ , on associe le point  $M'$  de  $\mathcal{D}'$ , situé du même côté que  $M$  par rapport à  $(AB)$  et tel que  $AM \cdot BM' = AB^2$ . Les droites  $(BM)$  et  $(AM')$  se coupent en  $P$ .

1° Montrer que les triangles  $AMB$  et  $BAM'$  sont semblables.

2° En déduire la mesure en degrés de l'angle  $\widehat{APB}$ . Quel est le lieu géométrique de  $P$  lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{D}$  ( $M \neq A$ )?

6. On considère un segment  $[A, B]$  de longueur  $2a$  et deux demi-droites  $Ax$  et  $By$  orthogonales à  $(AB)$  et situées d'un même côté de  $(AB)$ . A tout point  $M$  de  $Ax$ , distinct de  $A$ , on associe le point  $N$  de  $By$  tel que  $AM \cdot BN = a^2$ .

1°  $O$  étant le milieu de  $[A, B]$ , démontrer que les triangles  $AOM$  et  $BNO$  sont semblables.

En déduire que l'angle  $\widehat{MON}$  est droit.

2° Démontrer que la droite  $(AB)$  est tangente en  $O$  au cercle de diamètre  $[M, N]$ .

3° Soit  $I$  le milieu de  $[M, N]$ . Démontrer que  $IO = \frac{1}{2}(AM + BN)$ .

En déduire que  $MN = AM + BN$ .

4° Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $O$  sur  $(MN)$ . Démontrer que  $\widehat{AMO} = \widehat{OMH}$ . En déduire que le cercle de diamètre  $[A, B]$  est tangent à  $(MN)$  en  $H$ .

## INTERSECTION DE DEUX CERCLES

Soit  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux cercles de rayons respectifs  $r$  et  $r'$  et de centres respectifs,  $O$  et  $O'$ , distincts. On se propose d'étudier, en fonction de la distance  $d = OO'$  ( $d > 0$ ), le nombre de points communs à  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .

Un des deux réels  $r, r'$  est supérieur ou égal à l'autre; supposons, par exemple,  $r \geq r'$ .

1° Pour tout point  $M$  du plan, démontrer l'équivalence des conditions :

$$(M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}') \text{ et } (M \in \mathcal{C} \text{ et } MO^2 - MO'^2 = r^2 - r'^2).$$

2° Quel est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $MO^2 - MO'^2 = r^2 - r'^2$ ? En déduire que les points communs à  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont les points communs à  $\mathcal{C}$  et à une droite  $\mathcal{A}$  orthogonale à  $(OO')$  en un point  $H$  (figure 2).

3° Démontrer que  $\widehat{OH} = \frac{r^2 - r'^2 + d^2}{2d}$ , factoriser la différence

$OH - r$  et étudier son signe en fonction de  $d$  ( $d > 0$ ). En déduire que :

- si  $d < r - r'$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  n'ont pas de point commun;
- si  $d = r - r'$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  ont un point commun;
- si  $r - r' < d < r + r'$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  ont deux points communs;
- si  $d = r + r'$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  ont un point commun;
- si  $d > r + r'$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  n'ont pas de point commun.

Illustrer chacun de ces cas par une figure sur laquelle on dessinera, outre les cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ , la droite  $\mathcal{A}$ .

4° On considère un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et un point  $A$  extérieur à  $\mathcal{C}$ . Démontrer que le cercle  $\mathcal{C}$  et le cercle  $\mathcal{C}'$  de diamètre  $[A, O]$  se coupent en deux points, notés  $B$  et  $C$ . Démontrer que les droites  $(AB)$  et  $(AC)$  sont tangentes à  $\mathcal{C}$ , que  $AB = AC$  et que  $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$ .

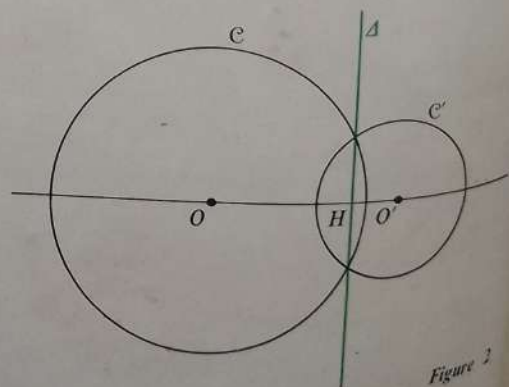


Figure 2

**POLYGONES RÉGULIERS**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Sur un cercle  $C$  de centre  $O$ , considérons  $n$  points  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , deux à deux distincts, tels que (figure 3) :

$$\widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OA_3} = \widehat{A_3OA_4} = \dots = \widehat{A_{n-1}OA_n} = \frac{2\pi}{n} \text{ rad.}$$

1° Démontrer que les  $n$  côtés du polygone  $A_1A_2 \dots A_n$  ont même longueur :

$$c = R \sqrt{2 \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{n} \right)}$$

2° Démontrer que les angles  $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}, \dots, \widehat{A_n}$  du polygone ont même mesure en radians :  $\frac{n-2}{n} \pi$ . On dit que le polygone  $A_1A_2 \dots A_n$  dont les côtés ont même

longueur et les angles même mesure, est **régulier**. Ce polygone, convexe, est inscrit dans le cercle  $C$ .

3° Démontrer que la distance du centre  $O$  de  $C$  à chaque côté du polygone est égale à  $R \cos \frac{\pi}{n}$ . Cette longueur est l'**apothème** du polygone.

4° Calculer en fonction de  $R$  et de  $n$ , l'aire du polygone  $A_1A_2 \dots A_n$ .

**Application.**

Calculer, en fonction du rayon  $R$  du cercle circonscrit, la longueur des côtés, l'apothème et l'aire des polygones réguliers suivants : triangle équilatéral ( $n = 3$ ), carré ( $n = 4$ ), hexagone régulier ( $n = 6$ ), octogone régulier ( $n = 8$ ).

Indiquer comment construire, à la règle et au compas, un carré et un octogone régulier inscrits dans un cercle donné. Même question pour un hexagone régulier et un triangle équilatéral.

**Pentagone et décagone réguliers**

Soit  $ABCDEF \dots$  un polygone convexe régulier de 10 côtés (décagone régulier) inscrit dans un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  (figure 4). On note  $x = CD$  et  $y = CF$ .

1° Les segments  $[C, F]$  et  $[O, D]$  se coupent en  $S$ .

Calculer les mesures en degrés des angles des triangles  $CDS$  et  $FOS$ . En déduire :

$$CS = x, \quad FS = R, \quad y - x = R.$$

(On rappelle :

- qu'un angle inscrit dans un cercle de centre  $O$  est un angle dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés coupent le cercle;
- que la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure du secteur angulaire de sommet  $O$  qui intercepte le même arc; par exemple :

$$\widehat{DCF} = \frac{1}{2} [\widehat{DOF}] = \frac{1}{2} \widehat{DOF} ; \quad \widehat{DEF} = \frac{1}{2} [\widehat{DOF}] = \frac{1}{2} (360^\circ - \widehat{DOF}).$$

2° Démontrer que les triangles  $COF$  et  $CSO$  sont semblables. En déduire :  $xy = R^2$ .

3° Utiliser l'identité  $(x + y)^2 = (y - x)^2 + 4xy$  pour calculer  $x + y$ . En déduire  $x$  et  $y$  en fonction de  $R$ . Donner une expression de  $\cos \frac{\pi}{5}$ .

4° Les points  $ACEGI$  sont les sommets d'un polygone convexe régulier de 5 côtés (pentagone régulier), inscrit dans un cercle de rayon  $R$ .

Calculer la longueur de ses côtés en fonction de  $R$ . En déduire la valeur de  $\cos \frac{2\pi}{5}$ .

5° On se propose de construire, à la règle et au compas, un décagone régulier inscrit dans un cercle  $C$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

Soit  $A$  et  $P$  deux points de  $C$  tels que  $\widehat{AOP} = 90^\circ$  et soit  $Q$  le milieu de  $[O, P]$  (figure 5). La droite  $(AQ)$  coupe le cercle de diamètre  $(O, P)$  en  $M$  et  $M'$  ( $M$  entre  $A$  et  $Q$ ).

Démontrer que :  $AM' - AM = R$  et  $AM \times AM' = R^2$ .

En déduire que les côtés d'un décagone régulier inscrit dans le cercle  $C$  ont pour longueur  $AM$ . Construire le décagone régulier inscrit en  $C$  dont un sommet est  $A$ . A noter que cette construction peut être utilisée pour obtenir un pentagone régulier.

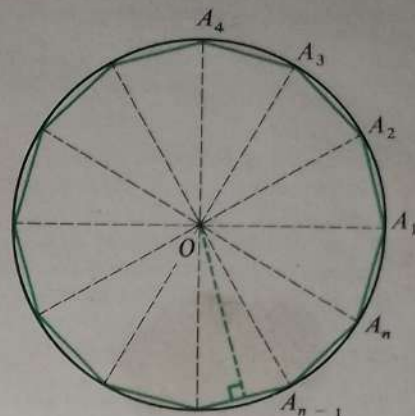


Figure 3

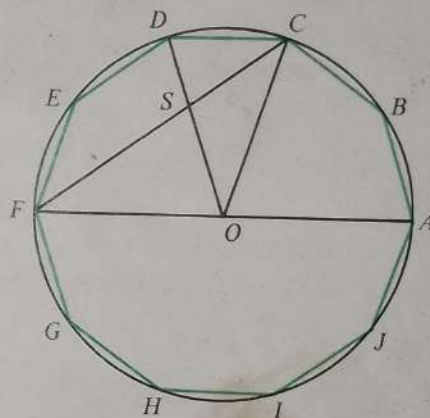


Figure 4

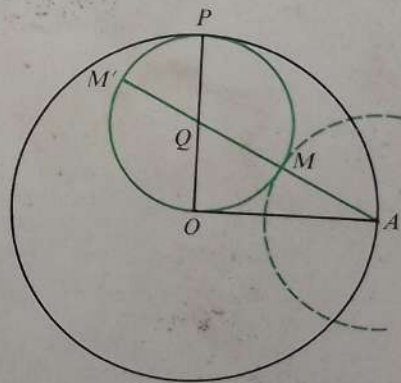


Figure 5

**POLYGONES RÉGULIERS**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Sur un cercle  $C$  de centre  $O$ , considérons  $n$  points  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , deux à deux distincts, tels que (figure 3) :

$$\widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OA_3} = \widehat{A_3OA_4} = \dots = \widehat{A_{n-1}OA_n} = \frac{2\pi}{n} \text{ rad.}$$

1° Démontrer que les  $n$  côtés du polygone  $A_1A_2 \dots A_n$  ont même longueur :

$$c = R \sqrt{2 \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{n} \right)}$$

2° Démontrer que les angles  $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}, \dots, \widehat{A_n}$  du polygone ont même mesure en radians :  $\frac{n-2}{n} \pi$ . On dit que le polygone  $A_1A_2 \dots A_n$  dont les côtés ont même

longueur et les angles même mesure, est **régulier**. Ce polygone, convexe, est inscrit dans le cercle  $C$ .

3° Démontrer que la distance du centre  $O$  de  $C$  à chaque côté du polygone est égale à  $R \cos \frac{\pi}{n}$ . Cette longueur est l'**apothème** du polygone.

4° Calculer en fonction de  $R$  et de  $n$ , l'aire du polygone  $A_1A_2 \dots A_n$ .

**Application.**

Calculer, en fonction du rayon  $R$  du cercle circonscrit, la longueur des côtés, l'apothème et l'aire des polygones réguliers suivants : triangle équilatéral ( $n = 3$ ), carré ( $n = 4$ ), hexagone régulier ( $n = 6$ ), octogone régulier ( $n = 8$ ).

Indiquer comment construire, à la règle et au compas, un carré et un octogone régulier inscrits dans un cercle donné. Même question pour un hexagone régulier et un triangle équilatéral.

**Pentagone et décagone réguliers**

Soit  $ABCDEF \dots$  un polygone convexe régulier de 10 côtés (décagone régulier) inscrit dans un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  (figure 4). On note  $x = CD$  et  $y = CF$ .

1° Les segments  $[C, F]$  et  $[O, D]$  se coupent en  $S$ .

Calculer les mesures en degrés des angles des triangles  $CDS$  et  $FOS$ . En déduire :

$$CS = x, \quad FS = R, \quad y - x = R.$$

(On rappelle :

- qu'un angle inscrit dans un cercle de centre  $O$  est un angle dont le sommet est sur le cercle et dont les côtés coupent le cercle;
- que la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure du secteur angulaire de sommet  $O$  qui intercepte le même arc; par exemple :

$$\widehat{DCF} = \frac{1}{2} [\widehat{DOF}] = \frac{1}{2} \widehat{DOF} \quad ; \quad \widehat{DEF} = \frac{1}{2} [\widehat{DOF}] = \frac{1}{2} (360^\circ - \widehat{DOF}).$$

2° Démontrer que les triangles  $COF$  et  $CSO$  sont semblables. En déduire :  $xy = R^2$ .

3° Utiliser l'identité  $(x + y)^2 = (y - x)^2 + 4xy$  pour calculer  $x + y$ . En déduire  $x$  et  $y$  en fonction de  $R$ . Donner une expression de  $\cos \frac{\pi}{5}$ .

4° Les points  $ACEGI$  sont les sommets d'un polygone convexe régulier de 5 côtés (pentagone régulier), inscrit dans un cercle de rayon  $R$ .

Calculer la longueur de ses côtés en fonction de  $R$ . En déduire la valeur de  $\cos \frac{2\pi}{5}$ .

5° On se propose de construire, à la règle et au compas, un décagone régulier inscrit dans un cercle  $C$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

Soit  $A$  et  $P$  deux points de  $C$  tels que  $\widehat{AOP} = 90^\circ$  et soit  $Q$  le milieu de  $[O, P]$  (figure 5). La droite  $(AQ)$  coupe le cercle de diamètre  $(O, P)$  en  $M$  et  $M'$  ( $M$  entre  $A$  et  $Q$ ).

Démontrer que :  $AM' - AM = R$  et  $AM \times AM' = R^2$ .

En déduire que les côtés d'un décagone régulier inscrit dans le cercle  $C$  ont pour longueur  $AM$ . Construire le décagone régulier inscrit en  $C$  dont un sommet est  $A$ .

A noter que cette construction peut être utilisée pour obtenir un pentagone régulier.

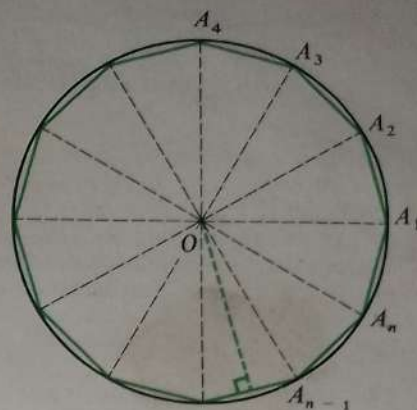


Figure 3

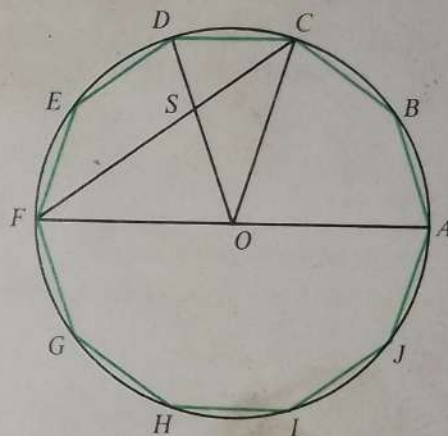


Figure 4

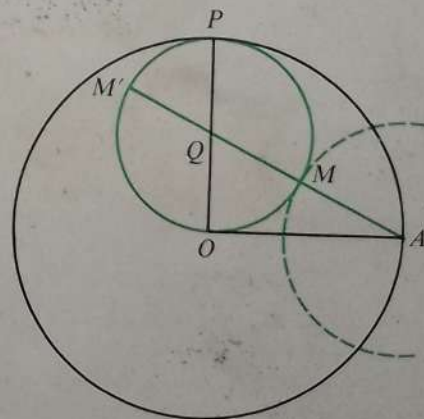


Figure 5

## EXERCICES ET PROBLÈMES

28. Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs.

1° Démontrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si, et seulement si,  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ .

2° On donne un triangle  $ABC$  et sa médiane  $(AA')$ . Déduire du 1° une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle  $ABC$  soit rectangle en  $A$ .

3° Déduire du 1° une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parallélogramme  $ABCD$  soit un rectangle.

29. On donne un angle droit  $xOy$  et quatre points  $A, B, C, D$  tels que :  $A \in Ox, B \in Oy, C \in Oy, D \in Oy$ ,  
 $OA = OC, OB = OD$ .

Soit  $E$  le milieu du segment  $[A, D]$ . Démontrer que :

$$\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC} \quad \text{et} \quad \vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OD}).$$

En déduire que les droites  $(OE)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires.

30. On donne un triangle  $ABC$ .

1° Démontrer que pour tout point  $M$  du plan, on a :

$$\vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} = 0.$$

2° Démontrer que les hauteurs issues des sommets  $B$  et  $C$  se coupent en un point  $H$  tel que :

$$\vec{HB} \cdot \vec{CA} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{HC} \cdot \vec{AB} = 0$$

3° Déduire des 1° et 2° que :  $\vec{HA} \cdot \vec{BC} = 0$ , puis que le point  $H$  appartient à la hauteur issue de  $A$ . (Le point  $H$  commun aux trois hauteurs du triangle est appelé **orthocentre** du triangle.)

31. On donne un triangle  $ABC$  et ses trois hauteurs  $(AA'), (BB')$  et  $(CC')$ .

1° Démontrer que :

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BA}' \cdot \vec{BC} = \vec{BC}' \cdot \vec{BA}.$$

Établir deux résultats analogues.

2° Déduire du 1°, en appliquant le *théorème de Ceva*, que les trois hauteurs sont concourantes.

32. On donne un triangle  $ABC$ , ses médianes  $(AA'), (BB'), (CC')$ , ses hauteurs  $(AA''), (BB''), (CC'')$  et ses médiatrices. (On rappelle que les médianes sont concourantes en  $G$ , équilibre centre des points  $A, B, C$ , les hauteurs en  $H$ , orthocentre du triangle, et les médiatrices en  $O$ , centre du cercle circonscrit au triangle.)

1° Démontrer que :

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG} = \vec{OH} + \vec{HA} + 2\vec{OA}.$$

En déduire que le vecteur  $3\vec{OG} - \vec{OH}$  est orthogonal au vecteur  $\vec{BC}$ .

2° Démontrer de même que le vecteur  $3\vec{OG} - \vec{OH}$  est orthogonal au vecteur  $\vec{CA}$ .

3° Démontrer que :  $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ .

En déduire :

a) l'alignement des points  $O, G, H$  sur une droite  $A$ , la droite d'Euler du triangle,

b) l'égalité  $\vec{AH} = 2\vec{OA}'$  et deux autres égalités analogues.

## PROJECTION ORTHOGONALE SUR UNE DROITE

33. On donne, dans le plan  $\mathcal{P}$ , un point  $O$ , un vecteur unitaire  $\vec{k}$  et la droite  $\mathcal{D}$  de repère  $(O, \vec{k})$ . Soit  $f$  l'application de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$ , qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$ , tel que :

$$\vec{OM}' = (\vec{OM} \cdot \vec{k})\vec{k}.$$

1° Quelle est l'image par  $f$  :

a) du point  $O$ ?

b) du point  $A$  tel que  $\vec{OA} = \vec{k}$ ?

c) d'un point  $B$  de la droite passant par  $O$  et orthogonale à  $\mathcal{D}$ ?

2° Pour tout point  $M$  de la droite  $\mathcal{D}$ , il existe un réel  $t$  tel que  $\vec{OM} = t\vec{k}$ .

$M'$  étant l'image de  $M$ , démontrer que  $\vec{OM}' = \vec{OM}$ .

En déduire que tout point de la droite  $\mathcal{D}$  est invariant par  $f$ .

3° Démontrer que, pour tout point  $M$  du plan d'image  $M'$  par  $f$ , on a  $M' \in \mathcal{D}$  et  $\vec{MM}' \perp \vec{k}$ .

(Pour démontrer l'orthogonalité des vecteurs  $\vec{MM}'$  et  $\vec{k}$ , on écrira le vecteur  $\vec{MM}'$  sous la forme  $\vec{OM}' - \vec{OM}$  et on calculera  $\vec{MM}' \cdot \vec{k}$ .)

En déduire que  $f$  est la projection orthogonale sur la droite  $\mathcal{D}$ .

## SYMÉTRIE ORTHOGONALE PAR RAPPORT À UNE DROITE

34. On donne, dans le plan  $\mathcal{P}$ , une droite  $\mathcal{D}$  de repère  $(O, \vec{k})$ , le vecteur  $\vec{k}$  étant unitaire. Soit  $f$  l'application de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$ , qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$ , tel que :

$$\vec{OM}' = 2(\vec{OM} \cdot \vec{k})\vec{k} - \vec{OM}.$$

1° Quelle est l'image par  $f$  du point  $O$ ? du point  $A$  tel que  $\vec{OA} = \vec{k}$ ? d'un point  $B$  de la droite passant par  $O$  et orthogonale à  $\mathcal{D}$ ?

2° Pour tout point  $M$  de la droite  $\mathcal{D}$ , il existe un réel  $t$  tel que  $\vec{OM} = t\vec{k}$ .

$M'$  étant l'image de  $M$ , démontrer que  $\vec{OM}' = \vec{OM}$ .

En déduire que tout point de la droite  $\mathcal{D}$  est invariant par  $f$ .

3° Soit un point  $M$  du plan, son image  $M'$  et le milieu  $H$  de  $(M, M')$ .

a) Démontrer que  $H$  appartient à  $\mathcal{D}$ .

(Utiliser la relation  $\vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{OM} + \vec{OM}')$ .)

b) Démontrer que les vecteurs  $\vec{MM}'$  et  $\vec{k}$  sont orthogonaux.

(Écrire  $\vec{MM}'$  sous la forme  $\vec{OM}' - \vec{OM}$  et calculer  $\vec{MM}' \cdot \vec{k}$ .)

Déduire de a) et b) que  $f$  est la symétrie orthogonale d'axe  $\mathcal{D}$ .

### LIGNES DE NIVEAU ET ENSEMBLES DE POINTS

#### Applications $\vec{u} \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$

35. On considère un point  $O$  du plan  $\mathcal{P}$ , un vecteur  $\vec{u}$  de norme 2 et l'application  $f$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(M) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}.$$

1° Construire les lignes de niveau associées aux valeurs  $-5, -3, 0, 1, 3, 7$ .

2° Quel est l'ensemble des points  $M$ , tels que :

a)  $f(M) > 0$ ?

b)  $f(M) < 0$ ?

c)  $1 \leq f(M) \leq 3$ ?

d)  $-3 \leq f(M) < 1$ ?

3° Soit  $A$  le point tel que  $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$  et  $B$  un point tel que  $OB = 3$  et  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ .

Pour quelle valeur de  $k$  la ligne de niveau  $k$  passe-t-elle par  $B$ ?

36. On donne deux points  $A$  et  $B$  tels que  $AB = \frac{3}{2}$  et

l'on considère l'application  $f$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout point  $M$ , associe le réel :

$$f(M) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).$$

Déterminer les lignes de niveau de l'application  $f$  associées aux valeurs  $-5, -2, 0, 3, 7$ .

37. On donne deux points distincts  $A$  et  $B$ .

Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que :

a)  $(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ;

b)  $(5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ;

c)  $(3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .

38. On donne un triangle  $ABC$ .

1° Démontrer qu'il existe un point  $G$ , et un seul, tel que :

$$\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

et que, pour tout point  $M$  du plan :

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}.$$

En déduire l'ensemble des points  $M$ , tels que :

$$(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

2° Déterminer, de la même manière, l'ensemble des points  $M$ , tels que :

$$(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

39. On donne un triangle  $ABC$ .

1° Démontrer que, pour tout point  $M$  du plan, le vecteur  $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$  est constant.

En déduire l'ensemble des points  $M$ , tels que :

$$(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0.$$

2° Déterminer, de la même manière, l'ensemble des points  $M$ , tels que :

$$(3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{BM} = 0.$$

40. On donne un triangle  $ABC$ .

Déterminer l'ensemble des points  $M$ , tels que :

$$1^\circ (2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{BC}.$$

$$2^\circ (3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AB}.$$

41. On donne un triangle  $ABC$ . Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que :

a)  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0$ ;

b)  $(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$ .

#### Applications $M \mapsto \alpha MA^2 + \beta MB^2$

42. On donne un triangle  $ABC$ , tel que  $BC = 4$ ,

$$\widehat{B} = \frac{\pi}{6}, \widehat{C} = \frac{3\pi}{4} \text{ et l'on considère l'application } f \text{ de } \mathcal{P}$$

dans  $\mathbb{R}$ , définie par  $f : M \mapsto MB^2 - MC^2$ .

1° Calculer  $f(A)$ ,  $f(B)$  et  $f(C)$ .

2° Pour quelles valeurs de  $k$  la ligne de niveau  $k$  de  $f$  passe-t-elle par le milieu de  $[B, C]$ , le milieu de  $[C, A]$ , le milieu de  $[A, B]$ ?

3° Reprendre les 1° et 2° pour l'application :

$$g : M \mapsto MB^2 + MC^2.$$

43. On donne un triangle  $ABC$ , tel que

$$AB = 2, AC = \sqrt{3}, \widehat{A} = \frac{5\pi}{6}, \text{ et l'on considère}$$

l'application  $f$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par :

$$f : M \mapsto MB^2 - MC^2.$$

1° Calculer  $f(A)$ ,  $f(B)$  et  $f(C)$ .

2° Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que

$$\sqrt{13} < f(M) \leq 13.$$

3° Reprendre les 1° et 2° pour l'application :

$$g : M \mapsto MB^2 + MC^2.$$

44. On donne un rectangle  $ABCD$  tel que  $AB = a$  et

$AD = b$  et l'on considère l'application  $f$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}$ ,

définie par :  $f : M \mapsto MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ .

1° Pour tout point  $M$ , démontrer que :

$$f(M) = 4 OM^2 + h,$$

où  $O$  est le centre du rectangle et  $h$  un réel que l'on exprimera en fonction de  $a$  et  $b$ .

2° En déduire les lignes de niveau de l'application  $f$ . Comment choisir le réel  $k$  pour que la ligne de niveau  $k$  soit le cercle circonscrit du rectangle.

45. On donne un quadrilatère  $ABCD$ . Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les diagonales  $(AC)$  et  $(BD)$  soient perpendiculaires est :

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + CB^2.$$

(On pourra considérer les lignes de niveau de l'application  $M \mapsto MB^2 - MD^2$ .)

46. On donne deux points distincts  $A$  et  $B$  tels que  $AB = a$ .

Discuter suivant les valeurs du réel  $k$ , la nature des lignes de niveau  $k$  des applications suivantes :

a)  $f : M \mapsto 5MA^2 - 3MB^2$ ;

b)  $f : M \mapsto -5MA^2 + 3MB^2$ ;

c)  $f : M \mapsto -3MA^2 + 4MB^2$ ;

d)  $f : M \mapsto -MA^2 - 3MB^2$ .

### RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE

47. On donne un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$  et tel que  $BC = 6$  et  $\widehat{B} = \frac{3}{5}$ . Un point  $M$  mobile sur le segment

$[B, C]$  se projette orthogonalement en  $R$  sur  $(AB)$  et en  $S$  sur  $(AC)$ . On pose  $x = BM$ .

1° Calculer en fonction de  $x$  la somme  $s = MR + MS$ . Pour quelle position de  $M$  est-elle maximum? minimum?

2° Calculer en fonction de  $x$  le produit  $p = MR \times MS$ . Pour quelle position de  $M$  est-il maximum? minimum?

48. Reprendre le problème précédent lorsque le point  $M$  se déplace sur le côté  $[B, C]$  d'un triangle équilatéral  $ABC$ .

49. Dans un triangle  $ABC$ , on note  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$  les mesures des angles (en degrés ou radians) et l'on pose  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ .

Calculer les longueurs des côtés, les mesures des angles et l'aire du triangle  $ABC$ , sachant que :

1°  $a = 1912$  m,  $\widehat{B} = 70^\circ$ ,  $\widehat{C} = 52^\circ$ ;

2°  $b = 1825$  m,  $c = 1550$  m,  $\widehat{A} = 75^\circ$ ;

3°  $a = 1900$  m,  $b = 800$  m,  $c = 1250$  m (calculer  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$  en rad).

50. Démontrer qu'un triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  si, et seulement si,  $\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC}$ .

51. Démontrer qu'un triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  si, et seulement si,  $\cos \widehat{B} = \frac{BA}{BC}$ .

52. Démontrer qu'un triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  si, et seulement si,  $\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}$ .

53. On donne un triangle  $ABC$ .

1° Démontrer que  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = BC^2$ .

2° En déduire que :  $a = b \cos \widehat{C} + c \cos \widehat{B}$ , puis deux autres formules analogues.

3° Démontrer que  $\sin \widehat{A} = \sin \widehat{B} \cos \widehat{C} + \sin \widehat{C} \cos \widehat{B}$ .

En déduire que :

$$\sin(\widehat{B} + \widehat{C}) = \sin \widehat{B} \cos \widehat{C} + \sin \widehat{C} \cos \widehat{B}.$$

54. Si dans un triangle  $ABC$ , on a, entre les longueurs des côtés, la relation  $2a = b + c$ , démontrer que les angles satisfont à la relation  $2 \sin \widehat{A} = \sin \widehat{B} + \sin \widehat{C}$ . Étudier la réciproque.

55. On suppose qu'un triangle  $ABC$  est, tel que  $\sin \widehat{B} = 2 \sin \widehat{C} \cos \widehat{A}$ .

1° Démontrer que  $b = 2c \cos \widehat{A}$ .

2° En déduire que le triangle  $ABC$  est isocèle en  $B$ .

56. Démontrer pour un triangle  $ABC$ , les formules suivantes :

$$a) \sin \widehat{A} \cos \widehat{A} + \sin \widehat{B} \cos \widehat{B} + \sin \widehat{C} \cos \widehat{C} = 2 \sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}.$$

$$b) a \cos \widehat{A} + b \cos \widehat{B} + c \cos \widehat{C} = 4R \sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}$$

( $R$  est le rayon du cercle circonscrit).

$$c) \cos \widehat{A} = \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} - \cos \widehat{B} \cos \widehat{C};$$

en déduire que :

$$\cos(\widehat{B} + \widehat{C}) = \cos \widehat{B} \cos \widehat{C} - \sin \widehat{B} \sin \widehat{C}.$$

57. Les diagonales  $[A, C]$  et  $[B, D]$  d'un quadrilatère convexe  $ABCD$  se coupent en un point  $S$  en formant quatre angles de sommet  $S$ . Soit  $\alpha$  la mesure de l'un de ces quatre angles.

Démontrer que l'aire du quadrilatère s'exprime par la formule :  $S = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin \alpha$ .

58. 1° Construire un triangle  $ABC$  tel que  $\widehat{A} - \widehat{C} = \frac{\pi}{2}$ .

Exprimer  $\widehat{C}$  en fonction  $\widehat{B}$  et démontrer que :

$$0 < \widehat{C} < \frac{\pi}{4}.$$

2° Calculer en fonction de  $\widehat{C}$  et de la longueur  $a = BC$  :

a) le rayon  $R$  du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ ;

b) les longueurs  $b = AC$  et  $c = AB$ ;

d) l'aire du triangle  $ABC$ .

BASES ET REPERES  
DU PLAN

La **géométrie analytique** peut être définie comme l'ensemble des activités et méthodes qui font appel à l'utilisation des coordonnées, à la représentation graphique, à la définition d'un objet géométrique par une ou plusieurs relations entre les coordonnées.

*On présente habituellement René Descartes (1596-1650) comme l'inventeur de la géométrie analytique. En réalité, on peut observer, bien avant lui, des exemples de calculs portant sur deux variables et permettant d'établir des propriétés géométriques. C'est ainsi que le grec Apollonios (vers 260-200 av. J.-C.) écrit explicitement des équations de la **parabole**, de l'**ellipse** et de l'**hyperbole**. Le mérite de Descartes et de Pierre de Fermat (1601-1665) est d'avoir systématisé l'utilisation des équations algébriques pour représenter des courbes. L'importance et la qualité de leurs découvertes ont suscité, dans la seconde moitié du 17<sup>e</sup> siècle, de nombreux travaux sur les **tangentes** et les **normales** aux courbes planes.*

*Il faut attendre la seconde moitié du 18<sup>e</sup> siècle pour voir la géométrie analytique prendre véritablement son essor. Vers 1770, Louis de Lagrange introduit pour l'espace les trois axes de coordonnées et établit les équations de la droite et du plan. En 1795, dans ses « Feuilles d'Analyse appliquée à la géométrie », Gaspard Monge donne à la géométrie analytique sa forme moderne. Notons pour terminer que cette branche de la géométrie contribua pour beaucoup au développement de la notion de vecteur et d'espace vectoriel, au 19<sup>e</sup> siècle.*

## I – VECTEURS COLINÉAIRES

Rappelons que deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  du plan vectoriel  $\mathcal{V}$  sont dits **colinéaires** lorsque l'un au moins est nul, ou lorsqu'ils sont non nuls et de même direction (figure 1).

Il en résulte que deux vecteurs **non colinéaires** sont deux vecteurs non nuls, de directions distinctes (figure 2).

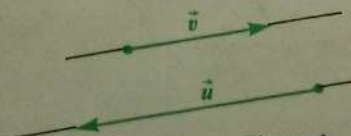


Figure 1

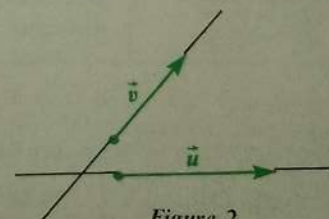


Figure 2

Démontré en Seconde, le théorème ci-dessous met en évidence la liaison entre colinéarité et produit par un réel :

**THÉORÈME 1**

Soit  $\vec{u}$  un vecteur *non nul* et  $\vec{v}$  un vecteur quelconque.

- 1° Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, il existe un réel  $t$ , *unique*, tel que  $\vec{v} = t\vec{u}$ .  
 2° S'il existe un réel  $t$  tel que  $\vec{v} = t\vec{u}$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

**REMARQUE :**

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs colinéaires *non nuls*. Il existe un réel  $t$ , *non nul*, tel que  $\vec{v} = t\vec{u}$ ; de plus :

- a) si  $t > 0$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de même sens;  
 b) si  $t < 0$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de sens contraires.

**Application :**

La colinéarité de deux vecteurs peut être utilisée pour prouver l'alignement de trois points, ou le parallélisme de deux droites :

a) Soit deux points distincts  $A$  et  $B$ . Une façon de démontrer qu'un autre point,  $C$ , est aligné avec  $A$  et  $B$  consiste à établir la colinéarité des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ , c'est-à-dire à montrer l'existence d'un réel  $t$  tel que  $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$ .

b) Soit  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites de repères  $(A, B)$  et  $(A', B')$  (figure 3). Une façon de démontrer que  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont parallèles consiste à montrer la colinéarité des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{A'B'}$  : s'il existe un réel  $t$  tel que  $\overrightarrow{A'B'} = t\overrightarrow{AB}$ , alors  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont parallèles.

Les exercices d'application 8 et 9 illustrent ces méthodes de démonstration.

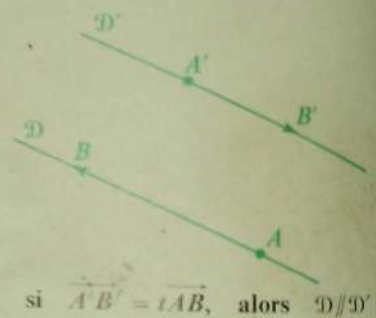


Figure 3

**REPÈRE D'UNE DROITE**

Une droite  $\mathcal{D}$  du plan est déterminée par un de ses points,  $A$  par exemple, et par sa direction  $d$ , ou, ce qui revient au même, par le point  $A$  et par un vecteur  $\vec{u}$  non nul et de direction  $d$  (figure 4). Un tel vecteur est appelé un **vecteur directeur** de  $\mathcal{D}$ .

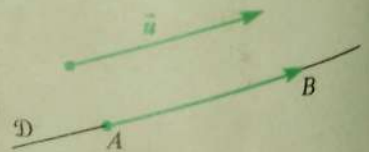


Figure 4

Au couple  $(A, \vec{u})$  correspond le repère  $(A, B)$  de  $\mathcal{D}$ , où  $B$  est le point tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  (figure 4).

Tout comme le bipoint  $(A, B)$ , on dit que le couple  $(A, \vec{u})$  est un **repère** de la droite  $\mathcal{D}$ .

**DÉFINITION 1**

On appelle **repère** d'une droite  $\mathcal{D}$  tout couple  $(A, \vec{u})$ , où  $A$  est un point de  $\mathcal{D}$  et  $\vec{u}$  un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

**REMARQUES :**

- 1° Une droite  $\mathcal{D}$  possède une infinité de repères.  
 2° Un repère de la droite passant par deux points distincts  $A$  et  $B$  est  $(A, \overrightarrow{AB})$

## REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE DROITE

Tout repère  $(A, \vec{u})$  d'une droite  $\mathcal{D}$  définit  $\mathcal{D}$  par un de ses points et sa direction. Mais le repère  $(A, \vec{u})$  permet aussi de définir la droite  $\mathcal{D}$ , *point par point*, comme le montre ce résultat établi en Seconde :

## THÉORÈME 2

Étant donnée une droite  $\mathcal{D}$  de repère  $(A, \vec{u})$  :

1°  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ , lorsque le réel  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ .

2° Pour tout point  $M$  de  $\mathcal{D}$ , il existe un réel  $t$ , *unique*, tel que  $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ .

L'application de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathcal{D}$  qui, à tout réel  $t$ , associe le point  $M$  de  $\mathcal{D}$  tel que  $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$  est une **représentation paramétrique** de la droite  $\mathcal{D}$ , que l'on note :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le réel  $t$  est le **paramètre** du point  $M$ , ou **abscisse** de  $M$ , dans le repère  $(A, \vec{u})$ .

Par exemple, 0 est le paramètre de  $A$ , 1 celui du point  $B$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ ,  $\frac{1}{2}$  celui du milieu de  $(A, B)$ .

## REMARQUE :

Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts.

Le segment  $[A, B]$  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ , lorsque le réel  $t$  décrit  $[0, 1]$ .

La demi-droite  $[AB)$  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ , lorsque le réel  $t$  décrit  $\mathbb{R}_+$ . Lorsque  $t$  décrit  $\mathbb{R}_-$ , on obtient la demi-droite opposée à  $[AB)$ .

## ● Exercices d'application

1. Soit  $\vec{u}, \vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires. Démontrer que deux réels  $x, y$  tels que :

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0}$$

sont nuls. En déduire que toute égalité :

$$a\vec{u} + b\vec{v} = a'\vec{u} + b'\vec{v},$$

où  $a, b, a', b'$  sont des réels, entraîne  $a = a'$  et  $b = b'$ .

2. Soit  $\vec{u}, \vec{v}$  deux vecteurs. Démontrer que s'il existe deux réels  $x, y$ , non nuls tous les deux, tels que  $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0}$ , alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

3. On considère deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{u}'$  non colinéaires, un point  $A$  et le point  $A'$  défini par  $\overrightarrow{AA'} = 2\vec{u} - 3\vec{u}'$ .

1° Démontrer que la droite  $\mathcal{D}$  de repère  $(A, \vec{u})$  et la droite  $\mathcal{D}'$  de repère  $(A', \vec{u}')$  sont concourantes.

2° On note  $B$  le point d'intersection de  $\mathcal{D}$  et de  $\mathcal{D}'$ . Calculer les paramètres du point  $B$  dans les repères respectifs  $(A, \vec{u})$  et  $(A', \vec{u}')$ .

4. On donne une droite  $\mathcal{D}$  de repère  $(A, \vec{u})$ . On considère le point  $A'$  de paramètre  $-2$  dans le repère  $(A, \vec{u})$  et le vecteur  $\vec{u}' = -3\vec{u}$ .

Soit  $M$  un point de  $\mathcal{D}$  de paramètre  $t$  dans le repère  $(A, \vec{u})$  et de paramètre  $t'$  dans le repère  $(A', \vec{u}')$ . Exprimer  $t'$  en fonction de  $t$ .

Déterminer un point de  $\mathcal{D}$  ayant même paramètre dans les deux repères.

5. Construire, sur une droite  $\mathcal{D}$  de repère  $(A, \vec{u})$ , les points  $C$  et  $D$  de paramètres respectifs  $-\frac{3}{2}$  et 3.

Calculer le paramètre du milieu  $I$  de  $(C, D)$  et celui du barycentre  $G$  des points pondérés  $(C, 5), (D, -3)$ .

6. Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts.

Démontrer que le barycentre des points pondérés  $(A, 3), (B, 4)$  est un point du segment  $[A, B]$ .

En est-il de même du barycentre des points pondérés  $(A, -2), (B, 5)$ ?

7. On considère un triangle  $ABC$ .
- Quel est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\vec{AM} = t\vec{BC}$ , lorsque  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ ?
  - Quel est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\vec{AM} = t\vec{AB} + t\vec{AC}$ , lorsque  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ ?
  - Quel est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\vec{AM} = t\vec{AB} + \vec{AC}$ , lorsque  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ ?

8. On considère un quadrilatère  $ABCD$  et les milieux  $I$  et  $J$  de  $[A, B]$  et  $[C, D]$ . A tout réel  $t$  on associe les points  $M$  et  $N$  tels que  $\vec{AM} = t\vec{AD}$  et  $\vec{BN} = t\vec{BC}$ , et le point  $E$  milieu de  $[M, N]$ .

- Quels sont les points associés aux réels  $t = 0$  et  $t = 1$ ?
- Construire les points  $E_1$  et  $E_2$  associés aux réels  $t_1 = \frac{3}{2}$  et  $t_2 = -2$ . Constaté à la règle que les points  $E_1$  et  $E_2$  semblent appartenir à la droite  $(IJ)$ .

3° On se propose de montrer que, lorsque  $t$  varie, le point  $E$  se déplace sur une droite fixe.

- Démontrer que  $\vec{IJ} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$ .
- Démontrer que  $\vec{IE} = \frac{t}{2}(\vec{AD} + \vec{BC})$ .
- Conclure.

9. On considère un parallélogramme  $ABCD$ , et on pose  $\vec{i} = \vec{AB}$  et  $\vec{j} = \vec{AD}$ . Soit  $E$  le milieu de  $(A, D)$ ,  $R$  et  $S$  les points définis par  $\vec{CS} = \frac{1}{3}\vec{CB}$  et

$$\vec{DR} = \frac{1}{3}\vec{DC}.$$

- Exprimer les vecteurs  $\vec{BE}$  et  $\vec{RS}$  en fonction de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
- Montrer que  $\vec{BE}$  et  $\vec{RS}$  sont colinéaires. En déduire que les droites  $(BE)$  et  $(RS)$  sont parallèles.

## II - REPÈRES, BASES, COORDONNÉES

### REPÈRES DU PLAN

#### DÉFINITION 2

Tout triplet  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $O$  est un point du plan, et  $\vec{i}, \vec{j}$  deux vecteurs *non colinéaires* est un *repère cartésien* du plan.

Le point  $O$  est l'*origine* du repère.

La droite  $\mathcal{D}$  de repère  $(O, \vec{i})$ , orientée par le vecteur  $\vec{i}$ , est l'*axe  $x'x$  des abscisses*.

La droite  $\mathcal{A}$  de repère  $(O, \vec{j})$ , orientée par le vecteur  $\vec{j}$ , est l'*axe  $y'y$  des ordonnées* (figure 5).

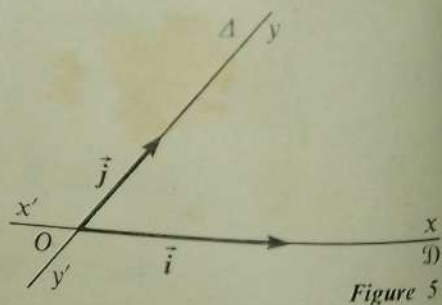


Figure 5

$$\vec{OI} = \vec{i}$$

$$\vec{OJ} = \vec{j}$$

### COORDONNÉES D'UN POINT

Soit  $M$  un point quelconque du plan,  $P$  son projeté sur  $\mathcal{D}$  parallèlement à  $\mathcal{A}$ ,  $Q$  son projeté sur  $\mathcal{A}$  parallèlement à  $\mathcal{D}$ .

Dans le parallélogramme  $OPMQ$ , on a  $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OQ}$  (figure 6).

De plus, il existe deux réels  $x$  et  $y$  tels que :

$$\vec{OP} = x\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{OQ} = y\vec{j}.$$

Il en résulte  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

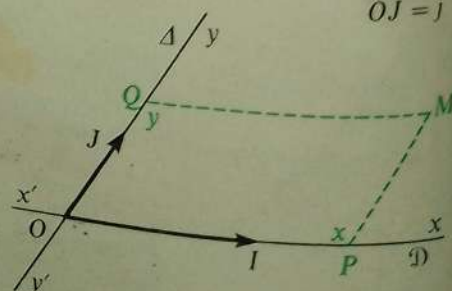


Figure 6

S'il existe un autre couple  $(x', y')$  de réels vérifiant l'égalité  $\overrightarrow{OM} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ , on a alors :

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j},$$

d'où  $(x - x')\vec{i} = (y' - y)\vec{j}$ .

Le point  $R$  défini par  $\overrightarrow{OR} = (x - x')\vec{i}$  est tel que  $\overrightarrow{OR} = (y' - y)\vec{j}$ .

Ce point appartient donc aux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{A}$  et est confondu avec  $O$ .

Il en résulte :  $\overrightarrow{OR} = \vec{0}$ ; d'où  $x - x' = y' - y = 0$ , soit  $x = x'$  et  $y = y'$ .

### THÉORÈME 3

Le plan  $\mathcal{F}$  étant muni d'un repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ , pour tout point  $M$  de  $\mathcal{F}$ , il existe un couple  $(x, y)$  de réels, et un seul, tel que  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

Pour tout point  $M$  de  $\mathcal{F}$ , l'unique couple  $(x, y)$  de réels tel que  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$  est le couple des **coordonnées** de  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}$ ; on note  $M(x, y)$ .

Le réel  $x$  est l'**abscisse** de  $M$ , le réel  $y$  est l'**ordonnée** de  $M$ .

REMARQUE :

*Contrairement à ce que pourrait laisser entendre l'expression « repère cartésien », Descartes n'a introduit ni les repères, puisque la notion de vecteur est apparue au 19<sup>e</sup> siècle, ni même les axes de coordonnées. S'il choisit parfois un point origine sur une droite pour mesurer une variable, il ne fait pas intervenir un autre axe, mais une direction, pour mesurer l'autre variable.*

## BASES DU PLAN VECTORIEL

### DÉFINITION 3

On appelle **base** du plan vectoriel  $\mathcal{V}$  tout couple  $(\vec{i}, \vec{j})$  de vecteurs de  $\mathcal{V}$  non colinéaires.

Soit  $O$  un point du plan  $\mathcal{F}$ ; le triplet  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère de  $\mathcal{F}$  (figure 7).

A tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathcal{V}$  est associé l'unique point

$M$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ .

Les coordonnées  $x, y$  de  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}$  vérifient l'égalité  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

Supposons qu'il existe deux autres réels  $x', y'$  vérifiant l'égalité  $\vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ .

On a alors  $\overrightarrow{OM} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ , ce qui prouve que  $(x', y')$  est le couple des coordonnées de  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}$ ; par suite  $(x', y') = (x, y)$ .

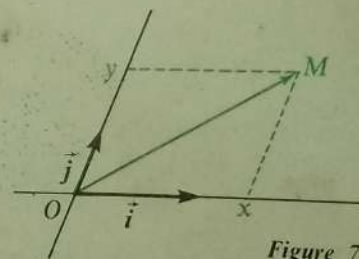


Figure 7

### THÉORÈME 4

Le plan vectoriel  $\mathcal{V}$  étant muni d'une base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ , pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathcal{V}$ , il existe un couple  $(x, y)$  de réels, et un seul, tel que :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

Les réels  $x, y$  sont respectivement la **première** et la **deuxième coordonnées** de  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On note  $\vec{u}(x, y)$  le vecteur de coordonnées  $x, y$ .

**RAPPELS**

Les résultats suivants ont été démontrés dans les classes antérieures :

1° Dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan  $\mathcal{P}$ , étant donnés deux points  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  :

a) le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $(x_B - x_A, y_B - y_A)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ ;

b) le milieu du bipoint  $(A, B)$  a pour coordonnées  $\left(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B)\right)$ .

2° Dans une base du plan vectoriel  $\mathcal{U}$ , étant donnés deux vecteurs  $\vec{u}(a, b)$  et  $\vec{u}'(a', b')$  :

a) le vecteur  $\vec{u} + \vec{u}'$  a pour coordonnées  $(a + a', b + b')$ ;

b) pour tout réel  $t$ , le vecteur  $t\vec{u}$  a pour coordonnées  $(ta, tb)$ ;

c) les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont colinéaires si, et seulement si,  $ab' - ba' = 0$ .

Le réel  $ab' - ba'$  associé à deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{u}'$  de coordonnées respectives  $(a, b)$  et  $(a', b')$  dans une base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  est appelée **déterminant** du couple  $(\vec{u}, \vec{u}')$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

On écrit :

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}') = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'.$$

A noter que si le déterminant du couple  $(\vec{u}, \vec{u}')$  n'est pas nul, les vecteurs  $\vec{u}, \vec{u}'$  ne sont pas colinéaires : ils forment alors une base du plan vectoriel  $\mathcal{U}$ .

★ **Activité 1 : Formules analytiques d'une translation**

1° Dans le plan  $\mathcal{P}$  muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère la translation  $t$  de vecteur  $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ .

a) Construire les points  $A(1, 3), B(-2, 2), C(3, -2)$  et leurs images respectives  $A', B', C'$  par  $t$ . Calculer les coordonnées des points  $A', B', C'$ .

b) Soit  $M(x, y)$  un point quelconque du plan d'image  $M'(x', y')$  par  $t$ . Démontrer :

$$(I) \quad \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

Les égalités (I) ci-dessus constituent une définition analytique de la translation  $t$  : un point  $M$  étant donné par ses coordonnées  $x, y$ , elles permettent de calculer les coordonnées  $x', y'$  de son image  $M'$ .

2° Définir analytiquement la translation de vecteur  $\vec{u}(-4, 3)$ .

3° Reconnaître l'application qui, à tout point  $M(x, y)$  associe le point  $M'(x', y')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = x - 5 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

★ **Activité 2 : Formules analytiques d'une symétrie centrale**

La **symétrie** de centre  $A$  est l'application  $s$  qui, à tout point  $M$  du plan, associe le point  $M'$  tel que  $A$  soit le milieu de  $(M, M')$ .

1° On considère la symétrie  $s$  de centre  $A(-2, 3)$ .

a) Construire les points  $B(1, 2), C(-2, 1), D(2, -2)$  et leurs images respectives  $B', C', D'$  par  $s$ . Calculer les coordonnées des points  $B', C', D'$ .

b) Soit  $M(x, y)$  un point d'image  $M'(x', y')$ . Exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x, y$ .

2° Reconnaître l'application qui, à tout point  $M(x, y)$  associe le point  $M'(x', y')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = -x + 5 \\ y' = -y - 2 \end{cases}$$

(Montrer que pour tout point  $M$  d'image  $M'$  le milieu de  $(M, M')$  est un point fixe.)

### ★ Activité 3 : Formules analytiques d'une homothétie

1° On considère l'homothétie  $h$  de centre  $\Omega(-3, 2)$  et de rapport  $-\frac{3}{2}$ .

a) Construire les points  $A(0, -2)$ ,  $B(1, -3)$ ,  $C(5, 2)$  et leurs images respectives  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  par  $h$ . Calculer les coordonnées des points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ .

b) Définir analytiquement l'homothétie  $h$ .

2° Soit  $f$  l'application qui, à tout point  $M(x, y)$ , associe le point  $M'(x', y')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x + 2 \\ y' = -\frac{1}{3}y - 6 \end{cases}$$

a) Démontrer qu'il existe un point  $I$  invariant par  $f$ , dont on calculera les coordonnées.

b) Pour tout point  $M$  d'image  $M'$ , comparer les vecteurs  $\overrightarrow{IM}$  et  $\overrightarrow{IM'}$ . En déduire que  $f$  est une homothétie.

### ● Exercices d'application

10. On considère les trois points  $A(2, -3)$ ,  $B(4, -2)$  et  $C(-4, 6)$ . Calculer les coordonnées du point  $D$  tel que  $ABCD$  soit un parallélogramme :

a) à partir de l'égalité  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ;

b) en utilisant le fait que  $(A, C)$  et  $(B, D)$  ont même milieu.

11. Dans le plan  $\mathcal{F}$  rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on donne les points :  $A(-1, 2)$ ,  $B(3, 1)$ ,  $C(2, -3)$ . Déterminer les coordonnées du barycentre  $G$  des points pondérés  $(A, -2)$ ,  $(B, 3)$  et  $(C, 1)$ .

12. Calculer les coordonnées du point  $M$  tel que  $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MA}$ , dans les cas suivants :

a)  $A(-5, 8)$ ,  $B(4, -1)$ ,  $k = \frac{2}{5}$ ;

b)  $A(-2, 5)$ ,  $B(6, 4)$ ,  $k = -\frac{3}{2}$ .

13. On considère un triangle  $ABC$  et les milieux respectifs  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  des côtés  $[B, C]$ ,  $[C, A]$ ,  $[A, B]$ .

1° Quelles sont les coordonnées dans le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  des points  $A, B, C, A', B', C'$ .

2° Déterminer les coordonnées du point d'intersection,  $G$ , des médianes  $(BB')$  et  $(CC')$ . (Traduire la colinéarité des vecteurs  $\overrightarrow{BG}$  et  $\overrightarrow{BB'}$  d'une part,  $\overrightarrow{CG}$  et  $\overrightarrow{CC'}$  d'autre part.)

3° Démontrer que la médiane  $(AA')$  passe par  $G$ . (Montrer la colinéarité des vecteurs  $\overrightarrow{AG}$  et  $\overrightarrow{AA'}$ .)

14. On considère un parallélogramme  $ABCD$  et le milieu  $E$  de  $[A, B]$ . Les droites  $(AC)$  et  $(DE)$  se coupent en  $G$ . Démontrer que  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .

(Utiliser le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  en calculant, dans ce repère, les coordonnées de  $G$ .)

15. On considère un parallélogramme  $ABCD$  non aplati.

Soit  $A', B', C', D'$  les points définis par :

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DD'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}.$$

1° On rapporte le plan au repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ . Calculer les coordonnées des points  $A, B, C, D, A', B', C', D'$ .

2° Démontrer que  $A'B'C'D'$  est un parallélogramme :

a) en montrant que  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$ ;

b) en montrant que les bipoles  $(A', C')$  et  $(B', D')$  ont même milieu.

3° Démontrer que  $A'B'C'D'$  est un parallélogramme par une voie non analytique.

16. On considère un triangle  $ABC$ , le milieu  $E$  de  $(B, C)$  et le milieu  $F$  de  $(A, E)$ . Les droites  $(BF)$  et  $(AC)$  se coupent en  $G$ .

a) Calculer les coordonnées, dans le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ , des points  $E, F, G$ .

b) En déduire le réel  $t$  tel que  $\overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{AC}$ .

### III - SYSTÈME D'ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES D'UNE DROITE

#### EXEMPLE

Dans le plan  $\mathcal{P}$  rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A(-1, 4)$  et dont un vecteur directeur est  $\vec{u}(2, -3)$  (figure 8). Au repère  $(A, \vec{u})$  correspond la représentation paramétrique de  $\mathcal{D}$  :  $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . (1)  
 Désignons par  $x, y$  les coordonnées du point  $M$ . Les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $t\vec{u}$  ont pour coordonnées respectives  $(x+1, y-4)$  et  $(2t, -3t)$ , et on peut exprimer (1) sous la forme :

$$\begin{cases} x+1 = 2t \\ y-4 = -3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{soit : (I)} \quad \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le système (I) constitue un **système d'équations paramétriques** de la droite  $\mathcal{D}$ .  
 A chaque valeur du paramètre  $t$  est associé un point  $M$  de la droite  $\mathcal{D}$ .

Par exemple, aux valeurs 0, 1, -1, 3 sont respectivement associés les points  $A(-1, 4)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(-3, 7)$ ,  $D(5, -5)$ .

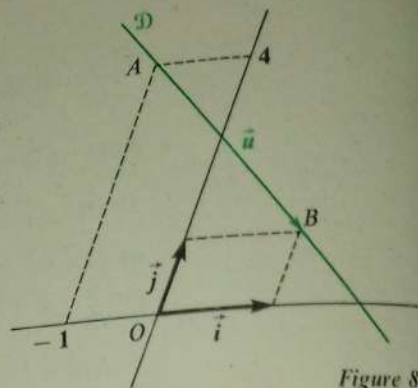


Figure 8

#### CAS GÉNÉRAL

Dans le cas d'une droite  $\mathcal{D}$  déterminée par le point  $M_0(x_0, y_0)$  et le vecteur directeur  $\vec{u}(\alpha, \beta)$  (figure 9), on obtient, à partir de la représentation paramétrique

$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , le système d'équations paramétriques : (I)  $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

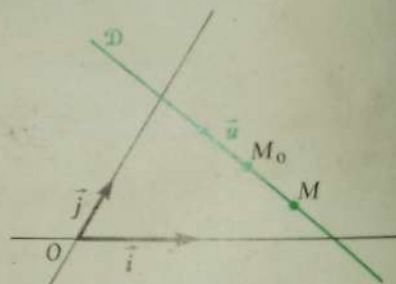


Figure 9

#### THÉORÈME

Dans un repère du plan, un **système d'équations paramétriques** de la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $M_0(x_0, y_0)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(\alpha, \beta)$  est :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lorsque la droite  $\mathcal{D}$  est déterminée par deux points distincts  $A$  et  $B$ , on obtient un système d'équations paramétriques à partir du repère  $(A, \overrightarrow{AB})$ .

#### ● Exercices d'application

17. Le plan  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $\mathcal{D}$  la droite passant par  $A(1, -2)$  et  $B(3, 1)$ .  
 a) Donner un système d'équations paramétriques de  $\mathcal{D}$ . Dessiner  $\mathcal{D}$  et placer les points  $E$  et  $F$  de paramètres respectifs  $-1, \frac{3}{2}$ .

b) Les points  $R\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{2}\right)$  et  $S\left(\frac{13}{7}, -\frac{6}{7}\right)$  sont-ils des points de  $\mathcal{D}$ ?  
 c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{D}$  avec les axes de coordonnées.

18. Étudier l'intersection des droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  de repères respectifs  $(A, \vec{u})$  et  $(A', \vec{u}')$ , dans les cas suivants :

a)  $A(2, 1), \vec{u}(-1, 1), A'(1, 3), \vec{u}'(2, -1)$ ;

b)  $A(5, 3), \vec{u}(-3, 4), A'(0, -2), \vec{u}'\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ ;

c)  $A(1, -5), \vec{u}(-1, 2), A'(-2, 1), \vec{u}'(2, -4)$ .  
(Lorsque  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont sécantes, on calculera les coordonnées de leur point d'intersection.)

19. Soit  $\mathcal{D}$  la droite dont un système d'équations paramétriques, dans un repère

$$(O, \vec{i}, \vec{j}) \text{ du plan, est : } \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -\frac{3}{2} + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Définir  $\mathcal{D}$  par un point  $A$  et un vecteur directeur  $\vec{u}$ ; par deux points distincts  $A$  et  $B$ .

20. Soit  $\mathcal{D}$  la droite passant par  $A(1, 2)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(-1, 2)$  et soit  $\delta$  la direction du vecteur  $\vec{v}(3, 2)$ .

1° Écrire un système d'équations paramétriques de la droite  $\Delta_B$ , de direction  $\delta$  et passant par  $B(-1, 1)$ . Calculer les coordonnées du point d'intersection  $B'$  des droites  $\mathcal{D}$  et  $\Delta_B$  ( $B'$  est le projeté de  $B$  sur  $\mathcal{D}$  suivant la direction  $\delta$ ).

2° Soit  $M_0(x_0, y_0)$  un point du plan et  $M'_0(x'_0, y'_0)$  son projeté sur  $\mathcal{D}$  suivant la direction  $\delta$ . Calculer  $x'_0$  et  $y'_0$  en fonction de  $x_0$  et  $y_0$ .

21. Soit  $\mathcal{D}$  la droite passant par  $A(-1, 1)$  et de vecteur  $\vec{u}(-1, 2)$  et  $\mathcal{D}'$  la droite passant par  $A'(1, 2)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}'(1, 3)$ .

1° Démontrer qu'il existe un bipoint  $(M, M')$ , et un seul, tel que  $M$  et  $M'$  appartiennent respectivement à  $\mathcal{D}$  et à  $\mathcal{D}'$  et que le milieu de  $(M, M')$  soit le point  $B(-1, 5)$ .

2° Soit  $\vec{v}$  le vecteur de coordonnées  $3, -2$ . Démontrer qu'il existe un bipoint  $(M, M')$ , et un seul, tel que :  $M \in \mathcal{D}, M' \in \mathcal{D}', \overline{MM'} = \vec{v}$ .

## IV - ÉQUATIONS CARTÉSIENNES D'UNE DROITE

Le plan  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Considérons la droite  $\mathcal{D}$  passant par le point  $M_0(x_0, y_0)$  et dont un vecteur directeur est  $\vec{u}(\alpha, \beta)$  (figure 10).

Un point  $M(x, y)$  du plan appartient à  $\mathcal{D}$  si, et seulement si, les vecteurs :

$$\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0) \text{ et } \vec{u}(\alpha, \beta)$$

sont colinéaires.

Or  $\overline{M_0M}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires si, et seulement si, le déterminant du couple  $(\overline{M_0M}, \vec{u})$  est nul :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0, \text{ soit } \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0.$$

Finalement :  $M(x, y) \in \mathcal{D}$  si, et seulement si,  $\beta x - \alpha y + (\alpha y_0 - \beta x_0) = 0$  (1)

On dit que la relation (1) est une **équation cartésienne** ou simplement une **équation** de  $\mathcal{D}$ . En posant  $a = \beta, b = -\alpha$  et  $c = \alpha y_0 - \beta x_0$ , l'équation (1) s'écrit  $ax + by + c = 0$ , où  $(a, b) \neq (0, 0)$ , puisque le vecteur directeur  $\vec{u}(-b, a)$  n'est pas nul.

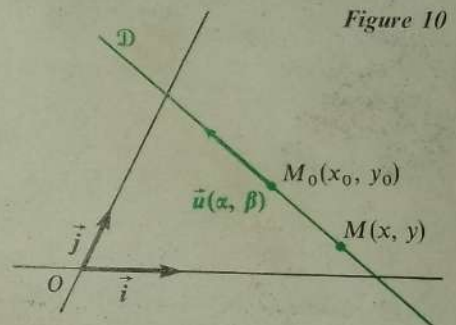


Figure 10

### THÉORÈME 6

Une **équation** de la droite passant par le point  $M_0(x_0, y_0)$ , et dont un vecteur directeur est  $\vec{u}(\alpha, \beta)$ , s'obtient en considérant un point  $M(x, y)$  du plan et en annulant le déterminant du couple de vecteurs  $(\overline{M_0M}, \vec{u})$  :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

**EXEMPLE**

Une droite  $\mathcal{D}$  coupe l'axe  $x'x$  en  $A(a, 0)$  et l'axe  $y'y$  en  $B(0, b)$ ,  $A$  et  $B$  étant distincts de l'origine  $O$  (figure 11).

Soit  $M(x, y)$  un point du plan. Une équation de  $\mathcal{D}$  s'obtient en écrivant que le déterminant du couple de vecteurs :

$$\overrightarrow{AM}(x-a, y) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB}(-a, b)$$

est nul :  $b(x-a) + ay = 0$ ,

soit  $bx + ay - ab = 0$ , soit encore, en divisant par le réel non nul  $ab$  :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

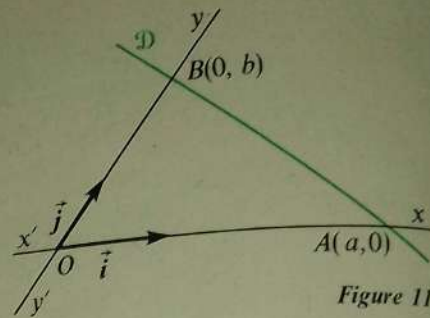


Figure 11

**ENSEMBLE D'ÉQUATION  $ax + by + c = 0$** 

Un repère du plan étant donné, toute droite  $\mathcal{D}$  possède une équation de la forme  $ax + by + c = 0$ , où  $a, b, c$  sont trois réels, l'un au moins des deux premiers  $a, b$  n'étant pas nul (ce que l'on peut exprimer par  $(a, b) \neq (0, 0)$  ou par  $|a| + |b| \neq 0$ ).

Réciproquement, une telle équation étant donnée, on peut se demander si l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points du plan dont les coordonnées  $x, y$  vérifient la relation  $ax + by + c = 0$  est une droite.

L'ensemble  $\mathcal{E}$  n'est pas vide; en effet si, par exemple,  $a$  n'est pas nul, le point de coordonnées  $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$  appartient à  $\mathcal{E}$ .

Soit  $M(x_0, y_0)$  un point de  $\mathcal{E}$ ; on a :  $ax_0 + by_0 + c = 0$ , d'où  $c = -ax_0 - by_0$ .  $\mathcal{E}$  est donc l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient la relation  $ax + by - ax_0 - by_0 = 0$ , soit :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \quad (1)$$

Or (1) s'écrit aussi  $\begin{vmatrix} x - x_0 & -b \\ y - y_0 & a \end{vmatrix} = 0$ , équation de la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $M_0(x_0, y_0)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(-b, a)$ .

Par conséquent :  $\mathcal{E} = \mathcal{D}$ .

**THÉORÈME 7**

Le plan  $\mathcal{P}$  étant rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{P}$ , dont les coordonnées  $x, y$  vérifient l'équation :

$$ax + by + c = 0,$$

où  $(a, b) \neq (0, 0)$ , est une droite de vecteur directeur  $\vec{u}(-b, a)$ .

**PARALLÉLISME DE DEUX DROITES**

Soit  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites d'équations respectives :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c' = 0.$$

La droite  $\mathcal{D}$  a la direction du vecteur  $\vec{u}(-b, a)$  et la droite  $\mathcal{D}'$  celle du vecteur  $\vec{u}'(-b', a')$ .

Les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont parallèles si, et seulement si,  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont colinéaires, c'est-à-dire si, et seulement si,  $\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = 0$ , soit  $ab' - ba' = 0$ .

**THÉORÈME 8**

Dans un repère du plan, deux droites d'équations respectives  $ax + by + c = 0$  et  $a'x + b'y + c' = 0$  sont parallèles si, et seulement si,  $ab' - ba' = 0$ .

Il en résulte que les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont sécantes si, et seulement si,  $ab' - ba' \neq 0$ . Dans ce cas les coordonnées de leur point d'intersection s'obtiennent en résolvant le système formé par leurs équations :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

**COEFFICIENT DIRECTEUR D'UNE DROITE**

Soit  $\mathcal{D}$  la droite dont une équation est :

$$ax + by + c = 0. \quad (1)$$

Un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  est  $\vec{u} = -b\vec{i} + a\vec{j}$ .

a) Si  $b = 0$ , on a  $\vec{u} = a\vec{j}$  et la droite  $\mathcal{D}$  est parallèle à l'axe des ordonnées  $y'y$ .

b) Si  $b \neq 0$ , les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{j}$  ne sont pas colinéaires et  $\mathcal{D}$  n'est pas parallèle à  $y'y$ . Dans ce cas on peut écrire l'équation (1) sous la forme :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

soit, en posant  $m = -\frac{a}{b}$  et  $p = -\frac{c}{b}$  :  $y = mx + p$ . (2)

Le réel  $m$  est appelé le **coefficient directeur** de la droite  $\mathcal{D}$ .

Le réel  $p$  est l'ordonnée du point d'intersection de  $\mathcal{D}$  avec l'axe des ordonnées : on dit que  $p$  est l'**ordonnée à l'origine** de  $\mathcal{D}$ .

On notera que le vecteur  $\vec{u}(1, m)$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

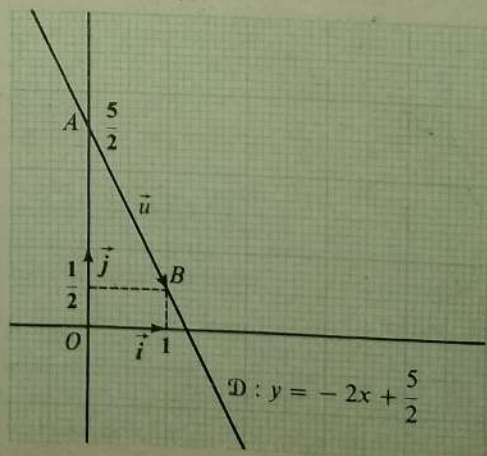
**Exemple :**

Soit  $\mathcal{D}$  la droite dont une équation est :

$$4x + 2y - 5 = 0. \quad (1)$$

L'équation (1) s'écrit  $y = -2x + \frac{5}{2}$ . La droite  $\mathcal{D}$  a pour coefficient directeur  $-2$  et pour ordonnée à l'origine  $\frac{5}{2}$ . Elle passe par

$A\left(0, \frac{5}{2}\right)$  et un de ses vecteurs directeurs est  $\vec{u}(1, -2)$  (figure 12).



### ■ Exercice résolu

A tout réel  $m$ , on associe la droite  $\mathcal{D}_m$  d'équation  $mx + (2m - 1)y + 2 - m = 0$ .  
 1° Construire les droites  $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{-1}$  associées respectivement aux réels 0, 1, -1.  
 2° Démontrer que toutes les droites  $\mathcal{D}_m$  passent par un point fixe  $A$ .

1° Les droites  $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_{-1}$  ont pour équations :

$$\mathcal{D}_0 : y = 2;$$

$$\mathcal{D}_1 : x + y + 1 = 0;$$

$$\mathcal{D}_{-1} : x + 3y - 3 = 0.$$

La figure 13 montre ces droites, tracées par rapport à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

2° On obtient facilement les coordonnées du point d'intersection,  $A$ , de  $\mathcal{D}_0$  et  $\mathcal{D}_1$  :

$$\begin{cases} x_A = -3 \\ y_A = 2 \end{cases}$$

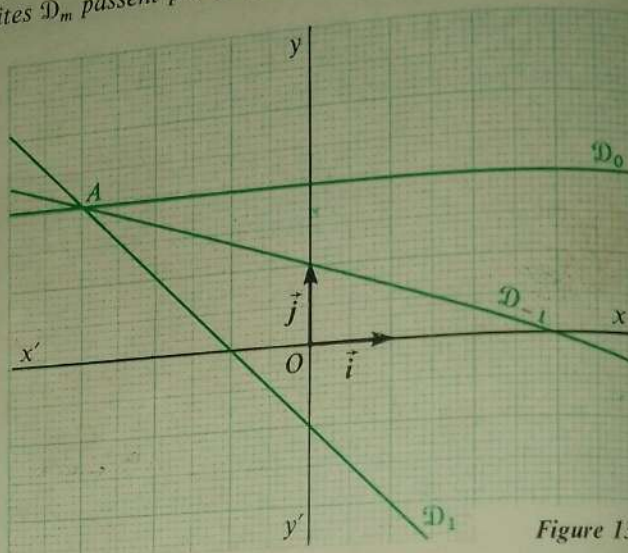


Figure 13

Il est alors immédiat de vérifier que le point  $A$  appartient à toute droite  $\mathcal{D}_m$ , en constatant que les coordonnées de  $A$  vérifient l'équation de  $\mathcal{D}_m$  :

$$m(-3) + (2m - 1)(2) + 2 - m = -3m + 4m - m - 2 + 2 = 0.$$

Pour démontrer que toutes les droites  $\mathcal{D}_m$  passent par un point fixe, on peut aussi utiliser le résultat suivant, que vous démontrerez :

Étant donnés deux réels  $a$  et  $b$ , une condition *nécessaire et suffisante* pour que, quel que soit  $m$ ,  $am + b = 0$ , est  $a = b = 0$ .

On procède alors de la façon suivante :

Un point  $A(x_A, y_A)$  appartient à toute droite  $\mathcal{D}_m$  si, et seulement si, quel que soit  $m$ ,  $mx_A + (2m - 1)y_A + 2 - m = 0$ , c'est-à-dire si, et seulement si :

$$\text{quel que soit } m, \quad m(x_A + 2y_A - 1) - y_A + 2 = 0.$$

Or pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} x_A + 2y_A - 1 = 0 \\ -y_A + 2 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne  $\begin{cases} x_A = -3 \\ y_A = 2. \end{cases}$

### ★ Activité : Formules analytiques d'une projection

1° Dans le plan muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $2x - y + 3 = 0$  et la direction  $\delta$  du vecteur  $\vec{u}(3, -2)$ . On note  $p$  la projection sur  $\mathcal{D}$  suivant la direction  $\delta$ .

a) Soit  $A$  le point de coordonnées  $(4, 2)$ . Écrire un système d'équations paramétriques de la droite  $\Delta_A$  de direction  $\delta$  et passant par  $A$ . Calculer les coordonnées du point d'intersection  $A'$  des droites  $\mathcal{D}$  et  $\Delta_A$  ( $A'$  est le projeté de  $A$  sur  $\mathcal{D}$  suivant la direction  $\delta$ ).

b) Soit un point  $M(X, Y)$  et son projeté  $M'(X', Y')$ . Exprimer  $X'$  et  $Y'$  en fonction de  $X$  et  $Y$ . (On obtient ainsi la définition analytique de la projection  $p$ .)

2° Soit  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$  les droites d'équations respectives :

$$x + y - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x + 3y = 0.$$

Définir analytiquement la projection sur  $\mathcal{D}$  parallèlement à  $\Delta$ .

3° Soit  $f$  l'application du plan  $\mathcal{F}$  dans lui-même qui, à tout point  $M(x, y)$ , associe le point  $M'(x', y')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = 3x + y - 2 \\ y' = -4x - y + 4 \end{cases}$$

a) Dessiner soigneusement, sur du papier millimétré, les points  $A(-2, 3)$ ,  $B(2, -1)$ ,  $C(4, 3)$ ,  $D(3, -4)$  et leurs images  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ . Quelle hypothèse peut-on formuler quant à la nature de l'application  $f$ ?

b) Démontrer que l'ensemble des points invariants par  $f$  est une droite  $\mathcal{D}$  dont on donnera une équation.

c) Pour tout point  $M$  d'image  $M' = f(M)$ , démontrer que :

- $M'$  appartient à  $\mathcal{D}$ ;
- le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$ , s'il n'est pas nul, a une direction fixe.

Reconnaître l'application  $f$ .

## ● Exercices d'application

22. Déterminer une équation de la droite  $\mathcal{D}$  de repère  $(A, \vec{u})$ , dans les cas suivants :

- a)  $A(-3, 2)$ ,  $\vec{u}(3, -2)$ ;
- b)  $A(0, 0)$ ,  $\vec{u}(3, -5)$ ;
- c)  $A(0, -2)$ ,  $\vec{u}(-1, 3)$ .

23. Déterminer une équation de la droite  $(AB)$ , dans les cas suivants :

- a)  $A(1, 3)$ ,  $B(-1, 2)$ ;
- b)  $A(2, 0)$ ,  $B(0, -4)$ ;
- c)  $A(0, 0)$ ,  $B(-2, 3)$ .

24. 1° Construire la droite  $\mathcal{D}$  d'équation :

$$2x - 5y + 8 = 0.$$

Déterminer un repère de  $\mathcal{D}$  et écrire un système d'équations paramétriques de  $\mathcal{D}$ . Calculer, s'ils existent, le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de  $\mathcal{D}$ .

2° Même question pour les droites d'équations :

- a)  $2x - y = 4$ ;
- b)  $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1 = 0$ ;
- c)  $3x + 4y = 0$ ;
- d)  $2x + 3 = 0$ ;
- e)  $3y - 5 = 0$ .

25. Le plan  $\mathcal{F}$  est rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A(3, 4)$  et  $B(6, -2)$ .

b) Les points  $C\left(2, \frac{10}{3}\right)$  et  $D\left(\frac{11}{3}, \frac{41}{9}\right)$

appartiennent-ils à  $\mathcal{D}$ ?

c) Déterminer les points d'intersection  $P$  et  $Q$  de la droite  $\mathcal{D}$  avec les axes de coordonnées.

d) Quelle est l'ordonnée du point  $E$  de  $\mathcal{D}$  d'abscisse  $-3$ ? Quelle est l'abscisse du point  $F$  de  $\mathcal{D}$  d'ordonnée  $-4$ ?

26. Démontrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation :

$$2x + 5y - 10 = 0$$

et la droite  $\mathcal{D}'$  passant par  $A(-1, 2)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(3, 2)$  sont sécantes.

Calculer les coordonnées de leur point d'intersection, de deux façons :

- a) en utilisant un système d'équations paramétriques de  $\mathcal{D}'$ ;
- b) en utilisant une équation cartésienne de  $\mathcal{D}'$ .

27. On donne un triangle  $ABC$ . Déterminer, dans le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ , des équations cartésiennes des médianes du triangle. Démontrer que les trois médianes sont concourantes.

28. Trouver une équation cartésienne de l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :

$$\overrightarrow{OM} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + t(\vec{i} - 2\vec{j}),$$

lorsque  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ .

## 3/ Bases et repères du plan

b) Soit un point  $M(X, Y)$  et son projeté  $M'(X', Y')$ . Exprimer  $X'$  et  $Y'$  en fonction de  $X$  et  $Y$ . (On obtient ainsi la définition analytique de la projection  $p$ .)

2° Soit  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$  les droites d'équations respectives :

$$x + y - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x + 3y = 0.$$

Définir analytiquement la projection sur  $\mathcal{D}$  parallèlement à  $\Delta$ .

3° Soit  $f$  l'application du plan  $\mathcal{P}$  dans lui-même qui, à tout point  $M(x, y)$ , associe le point  $M'(x', y')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = 3x + y - 2 \\ y' = -4x - y + 4 \end{cases}$$

a) Dessiner soigneusement, sur du papier millimétré, les points  $A(-2, 3)$ ,  $B(2, -1)$ ,  $C(4, 3)$ ,  $D(3, -4)$  et leurs images  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ . Quelle hypothèse peut-on formuler quant à la nature de l'application  $f$ ?

b) Démontrer que l'ensemble des points invariants par  $f$  est une droite  $\mathcal{D}$  dont on donnera une équation.

c) Pour tout point  $M$  d'image  $M' = f(M)$ , démontrer que :

- $M'$  appartient à  $\mathcal{D}$ ;
- le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$ , s'il n'est pas nul, a une direction fixe.

Reconnaître l'application  $f$ .

### ● Exercices d'application

22. Déterminer une équation de la droite  $\mathcal{D}$  de repère  $(A, \vec{u})$ , dans les cas suivants :

- a)  $A(-3, 2)$ ,  $\vec{u}(3, -2)$ ;
- b)  $A(0, 0)$ ,  $\vec{u}(3, -5)$ ;
- c)  $A(0, -2)$ ,  $\vec{u}(-1, 3)$ .

23. Déterminer une équation de la droite  $(AB)$ , dans les cas suivants :

- a)  $A(1, 3)$ ,  $B(-1, 2)$ ;
- b)  $A(2, 0)$ ,  $B(0, -4)$ ;
- c)  $A(0, 0)$ ,  $B(-2, 3)$ .

24. 1° Construire la droite  $\mathcal{D}$  d'équation :

$$2x - 5y + 8 = 0.$$

Déterminer un repère de  $\mathcal{D}$  et écrire un système d'équations paramétriques de  $\mathcal{D}$ . Calculer, s'ils existent, le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de  $\mathcal{D}$ .

2° Même question pour les droites d'équations :

- a)  $2x - y = 4$ ;
- b)  $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1 = 0$ ;
- c)  $3x + 4y = 0$ ;
- d)  $2x + 3 = 0$ ;
- e)  $3y - 5 = 0$ .

25. Le plan  $\mathcal{P}$  est rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . a) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A(3, 4)$  et  $B(6, -2)$ .

b) Les points  $C\left(2, \frac{10}{3}\right)$  et  $D\left(\frac{11}{3}, \frac{41}{9}\right)$

appartiennent-ils à  $\mathcal{D}$ ?

c) Déterminer les points d'intersection  $P$  et  $Q$  de la droite  $\mathcal{D}$  avec les axes de coordonnées.

d) Quelle est l'ordonnée du point  $E$  de  $\mathcal{D}$  d'abscisse  $-3$ ? Quelle est l'abscisse du point  $F$  de  $\mathcal{D}$  d'ordonnée  $-4$ ?

26. Démontrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation :

$$2x + 5y - 10 = 0$$

et la droite  $\mathcal{D}'$  passant par  $A(-1, 2)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(3, 2)$  sont sécantes.

Calculer les coordonnées de leur point d'intersection, de deux façons :

- a) en utilisant un système d'équations paramétriques de  $\mathcal{D}'$ ;
- b) en utilisant une équation cartésienne de  $\mathcal{D}'$ .

27. On donne un triangle  $ABC$ . Déterminer, dans le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ , des équations cartésiennes des médianes du triangle. Démontrer que les trois médianes sont concourantes.

28. Trouver une équation cartésienne de l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :

$$\overrightarrow{OM} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + t(\vec{i} - 2\vec{j}),$$

lorsque  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ .

## V - BASES ET REPÈRES ORTHONORMAUX

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  une base du plan vectoriel  $\mathcal{U}$ .

Désignons par  $a$  et  $b$  les normes, non nulles, des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et par  $p$  le produit scalaire  $\vec{i} \cdot \vec{j}$ .

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  étant définis par leurs coordonnées respectives  $(x, y)$  et  $(x', y')$  dans la base  $\mathcal{B}$ , exprimons leur produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx'(\vec{i} \cdot \vec{i}) + (xy' + yx')(\vec{i} \cdot \vec{j}) + yy'(\vec{j} \cdot \vec{j}),$$

soit :  $\vec{u} \cdot \vec{u}' = a^2xx' + p(xy' + yx') + b^2yy'$ .

Comment choisir  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ , pour simplifier au maximum l'expression obtenue?

Les réels  $a^2$  et  $b^2$ , carrés des normes des vecteurs non nuls  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ , ne sont jamais nuls. Par contre, ils sont égaux à 1, lorsque  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont des vecteurs unitaires.

Quant au réel  $p = \vec{i} \cdot \vec{j}$ , il est nul lorsque  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont orthogonaux.

En résumé, si  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont des vecteurs *unitaires* et *orthogonaux*, le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{u}'$  s'exprime sous la forme simplifiée :  $xx' + yy'$ .

### DÉFINITION 4

On dit qu'une base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  du plan vectoriel  $\mathcal{U}$  est *orthonormale* lorsque les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont *unitaires* et *orthogonaux* :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0.$$

Deux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  unitaires et orthogonaux (figure 14) sont non nuls et non colinéaires; ils forment donc une base, orthonormale par définition.

L'intérêt de telles bases a été mis en évidence au début du paragraphe : elles permettent d'exprimer le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}(x, y)$  et  $\vec{u}'(x', y')$  sous la forme simple  $xx' + yy'$ .

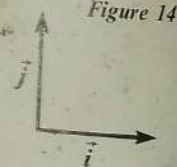


Figure 14

### THÉORÈME 9

Dans une base orthonormale du plan vectoriel, le *produit scalaire* de deux vecteurs  $\vec{u}(x, y)$  et  $\vec{u}'(x', y')$  est donné par la formule :

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy'.$$

En particulier, pour tout vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $x, y$  dans une base orthonormale  $(\vec{i}, \vec{j})$ , on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = x \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{j} = y.$$

### COROLLAIRES

Le plan vectoriel  $\mathcal{U}$  est muni d'une base orthonormale.

1° Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$ , de coordonnées respectives  $(x, y)$  et  $(x', y')$ , sont orthogonaux si, et seulement si,  $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$ ; par suite :

$$\vec{u} \perp \vec{u}' \quad \text{si, et seulement si,} \quad xx' + yy' = 0$$

## 3/ Bases et repères du plan

En particulier, pour tout vecteur  $\vec{u}(a, b)$ , le vecteur  $\vec{u}'(-b, a)$  est orthogonal à  $\vec{u}$ ; en effet :

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = a \times (-b) + b \times a = 0.$$

2° Le carré scalaire et la norme d'un vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(x, y)$  sont donnés par :

$$(\vec{u})^2 = x^2 + y^2; \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3° Rappelons l'expression du produit scalaire de deux vecteurs non nuls  $\vec{u}, \vec{u}'$  d'angle  $\theta$ :

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}'\| \times \cos \theta.$$

Lorsque les vecteurs  $\vec{u}, \vec{u}'$  sont définis par leurs coordonnées  $(x, y)$  et  $(x', y')$  dans une base orthonormale, on peut calculer  $\|\vec{u}\|, \|\vec{u}'\|, \vec{u} \cdot \vec{u}'$ , et en déduire :

$$\cos \theta = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Il est alors possible de déterminer  $\theta$  en radians, degrés ou grades, à l'aide d'une calculatrice.

**Exemple :**

Pour  $\vec{u}(-3, 4)$  et  $\vec{u}'(2, -1)$ , on a  $\|\vec{u}\| = 5, \|\vec{u}'\| = \sqrt{5}, \vec{u} \cdot \vec{u}' = -10$ ; d'où :

$$\cos \theta = \frac{-10}{5\sqrt{5}} \approx -0,8944; \text{ par suite } \theta \approx 2,6779 \text{ rad ou } \theta \approx 153^\circ,43 \text{ ou } \theta = 170,48 \text{ gr.}$$

**REPÈRE ORTHONORMAL ET DISTANCE DE DEUX POINTS**

Soit  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan  $\mathcal{P}$ .

Par définition, on dit que le repère  $\mathcal{R}$  est **orthonormal** lorsque la base  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  est orthonormale (figure 15).

Étant donnés deux points  $M_0$  et  $M_1$  de coordonnées respectives  $(x_0, y_0)$  et  $(x_1, y_1)$  dans un repère orthonormal

$\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ , le vecteur  $\overrightarrow{M_0M_1}$  a pour coordonnées  $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$  dans la base orthonormale  $(\vec{i}, \vec{j})$  et l'on a :

$$M_0M_1 = \|\overrightarrow{M_0M_1}\|$$

$$\text{et : } \|\overrightarrow{M_0M_1}\| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2};$$

d'où :

$$M_0M_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

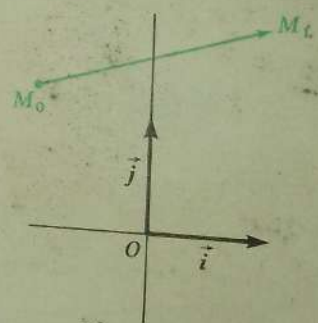


Figure 15

**★ Activité : Équations de cercles**

Le plan  $\mathcal{P}$  est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1° Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $\Omega(-2, 3)$  et de rayon  $r = 2$ . Pour tout point  $M$  du plan,  $M$  appartient à  $\mathcal{C}$ , si, et seulement si,  $\Omega M^2 = 2^2$ . Traduire analytiquement cette condition (en utilisant les coordonnées  $x, y$  de  $M$ ) pour obtenir une équation du cercle  $\mathcal{C}$ .

2° Trouver de même une équation du cercle  $C$  dans les cas suivants :

- a)  $\Omega(2, 0)$ ,  $r = \frac{3}{2}$ ;  
 b)  $\Omega(0, 0)$ ,  $r = \sqrt{3}$ ;  
 c)  $\Omega(0, -3)$ ,  $r = \frac{4}{3}$ ;  
 d)  $\Omega(3, -4)$ ,  $r = 5$ .

3° a) Quelle est l'équation du cercle  $C$  de centre  $\Omega(x_0, y_0)$  et de rayon  $r$ ? Montrer que cette équation est de la forme  $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ , où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont trois réels.  
 b) Soit  $\Gamma$  l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0 \quad (1).$$

En utilisant les identités :

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \quad \text{et} \quad y^2 + 3y = \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

montrer que l'équation (1) s'écrit :

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 2^2.$$

Reconnaître l'ensemble  $\Gamma$ .

c) Reconnaître de même les ensembles d'équations :

$$x^2 + y^2 - x + 4y + \frac{1}{4} = 0, \quad x^2 + y^2 - 2x + 6y + 11 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - x - 3y + \frac{5}{2} = 0, \quad 2x^2 + 2y^2 - 5x = 0.$$

4° On donne les points  $A(1, 3)$  et  $B(5, -1)$ .

a) Donner une équation de l'ensemble  $C_1$  des points  $M$  du plan tels que

$$MA^2 + MB^2 = 24.$$

(On montrera que  $C_1$  est un cercle centré au milieu de  $[A, B]$  et dont on précisera le rayon.)

b) Même question pour l'ensemble  $C_2$  des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -5$ .

c) Déterminer analytiquement l'ensemble  $C_3$  des points  $M$  du plan tels que  $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}$ .

### Exercices d'application

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

29. On donne les points  $A(1, -2)$ ,  $B(2, 2)$ ,  $C(-1, -3)$ . Calculer les cosinus, puis les mesures en degrés des angles du triangle  $ABC$ .

30. On donne les trois points  $A(0, -1)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(-2, 3)$ .  
 1° Démontrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

2° Calculer les longueurs des côtés,  $\cos \hat{B}$ ,  $\cos \hat{C}$  et les mesures en degrés des angles  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$ .

3° Écrire un système d'équations paramétriques de la droite  $(BC)$ . En déduire les coordonnées du projeté orthogonal,  $H$ , de  $A$  sur  $(BC)$ . ( $H$  est le point de  $(BC)$  tel que  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .)

4° Vérifier les relations :

$$AH \times BC = AB \times AC \quad \text{et} \quad \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

31. On considère le triangle de sommets  $A(-2, -1)$ ,  $B(-4, 3)$ ,  $C(-3, 6)$ .

1° Déterminer l'équation de son cercle circonscrit. En déduire son rayon  $R$ .

2° Calculer les longueurs de ses côtés, les cosinus et les sinus de ses angles.

3° Vérifier la formule :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R.$$

32. On donne les points  $A(-1, 2)$  et  $B(1, -1)$ . Déterminer analytiquement l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3}{4}$ .

Retrouver ce résultat par une méthode non analytique.

33. On donne les points  $A(2, 3)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(-2, 5)$ .

1° Déterminer une équation de la médiatrice  $\mathcal{D}_1$  du segment  $[B, C]$  en utilisant la propriété :

$$M \in \mathcal{D}_1 \text{ si, et seulement si, } MB^2 = MC^2.$$

Déterminer de même une équation de la

médiatrice  $\mathcal{D}_2$  de  $[C, A]$  et  $\mathcal{D}_3$  de  $[A, B]$ .

2° Vérifier que les trois médiatrices sont concourantes en un point  $\Omega$  dont on calculera les coordonnées.

3° Écrire l'équation du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

## VI – DROITE DÉFINIE PAR UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

### DÉFINITION 5

On appelle **vecteur normal** d'une droite  $\mathcal{D}$  du plan, tout vecteur **non nul** dont la direction est orthogonale à celle de  $\mathcal{D}$ .

Une droite possède une infinité de vecteurs normaux.

Soit une droite  $\mathcal{D}$ , un point  $M_0$  de  $\mathcal{D}$  et un vecteur normal  $\vec{u}$  de  $\mathcal{D}$  (figure 16).

Pour tout point  $M$  de la droite  $\mathcal{D}$ , les vecteurs  $\overrightarrow{M_0M}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux; donc  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ .

Réciproquement, pour tout point  $M$  du plan tel que  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ , les vecteurs  $\overrightarrow{M_0M}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux et  $M \in \mathcal{D}$ .

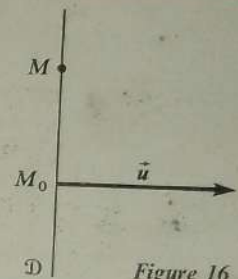


Figure 16

### THÉORÈME 10

Étant donné un point  $M_0$  et un vecteur normal  $\vec{u}$  d'une droite  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ .

### ÉQUATION D'UNE DROITE DÉFINIE PAR UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

Dans le plan  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ , considérons une droite  $\mathcal{D}$  passant par  $M_0(x_0, y_0)$  et de vecteur normal  $\vec{u}(a, b)$  (figure 17).

Un point  $M(x, y)$  du plan  $\mathcal{P}$  appartient à  $\mathcal{D}$  si, et seulement si,  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ , c'est-à-dire si, et seulement si,  $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ . (1)  
La relation (1), vérifiée par les coordonnées  $x, y$  d'un point  $M$  du plan si, et seulement si, ce point appartient à  $\mathcal{D}$  est une **équation** de  $\mathcal{D}$ .

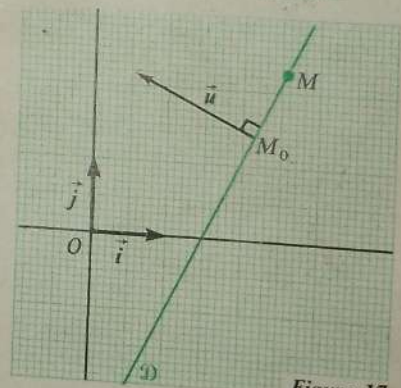


Figure 17

### THÉORÈME 11

Dans un repère orthonormal du plan, la droite  $\mathcal{D}$  passant par le point  $M_0(x_0, y_0)$  et dont un vecteur normal est  $\vec{u}(a, b)$ , a pour **équation cartésienne** :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

A partir d'une équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  d'une droite  $\mathcal{D}$  dans un repère orthonormal, on peut obtenir les coordonnées d'un vecteur directeur et d'un vecteur normal d'une droite  $\mathcal{D}$ .

On sait que le vecteur  $\vec{v}(-b, a)$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ . D'autre part, le vecteur  $\vec{u}(a, b)$  est non nul, car un au moins des deux réels  $a, b$  est non nul, et orthogonal à  $\vec{v}$ , car :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a(-b) + ba = 0;$$

c'est donc un vecteur normal de  $\mathcal{D}$ .

### THÉORÈME 12

Étant donnée une droite  $\mathcal{D}$  d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  dans un repère orthonormal :

- 1° un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  est  $\vec{v}(-b, a)$ ;
- 2° un vecteur normal de  $\mathcal{D}$  est  $\vec{u}(a, b)$ .

### CONDITION D'ORTHOGONALITÉ DE DEUX DROITES

Soit  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites d'équations respectives dans un repère orthonormal :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c' = 0.$$

Les vecteurs  $\vec{v}(-b, a)$  et  $\vec{v}'(-b', a')$  sont des vecteurs directeurs respectifs de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ . Pour que les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  soient orthogonales, il faut et il suffit que les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  soient orthogonaux, c'est-à-dire que  $\vec{v} \cdot \vec{v}' = (-b)(-b') + aa' = aa' + bb' = 0$ .

### THÉORÈME 13

Pour que deux droites d'équations  $ax + by + c = 0$  et  $a'x + b'y + c' = 0$  dans un repère orthonormal, soient *orthogonales*, il faut et il suffit que  $aa' + bb' = 0$ .

Pour deux droites d'équations  $y = mx + p$  et  $y = m'x + p'$  la condition d'orthogonalité s'écrit :  $mm' + 1 = 0$ .

### ■ Exercice résolu

Le plan  $\mathcal{P}$  étant rapporté à un repère orthonormal, définir analytiquement la projection orthogonale sur la droite  $\mathcal{D}$  d'équation :  $2x - y + 6 = 0$ .

Le projeté orthogonal  $M'(x', y')$  d'un point  $M(x, y)$  du plan est le point d'intersection de la droite  $\mathcal{D}$  et de la droite  $\Delta_M$  passant par  $M$  et orthogonale à  $\mathcal{D}$  (figure 18).

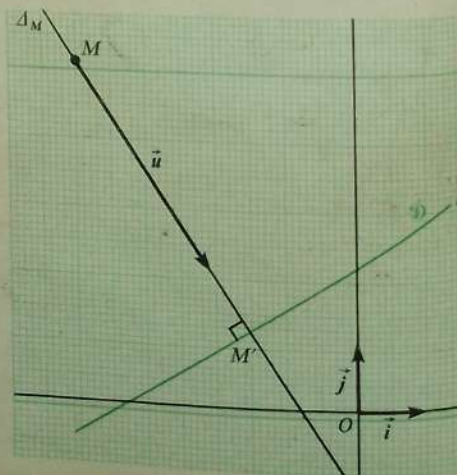
Le vecteur  $\vec{u}(2, -3)$ , normal à  $\mathcal{D}$ , est un vecteur directeur de  $\Delta_M$ .

Comme le point  $M'$  appartient à la droite  $\Delta_M$ , de repère  $(M, \vec{u})$ , il existe un réel  $t$  tel que  $\overrightarrow{MM'} = t\vec{u}$ .

$$\text{D'où : } \begin{cases} x' - x = 2t \\ y' - y = -3t \end{cases}$$

$$\text{soit : (I) } \begin{cases} x' = x + 2t \\ y' = y - 3t \end{cases}$$

Figure 18



De plus le point  $M'$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ ; ses coordonnées vérifient donc l'équation de  $\mathcal{D}$  :

$$2x' - 3y' + 6 = 0, \text{ soit } 2(x + 2t) - 3(y - 3t) + 6 = 0. \quad (1)$$

L'égalité (1) donne  $t = \frac{1}{13}(-2x + 3y - 6)$ . En reportant cette valeur de  $t$  dans (I), on

obtient les formules analytiques cherchées :

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{13}(3x + 2y - 4) \\ y' = \frac{2}{13}(3x + 2y + 9) \end{cases}$$

### ● Exercices d'application

Le plan  $\mathcal{P}$  est rapporté à un repère orthonormal.

34. On donne les points  $A(3, 2)$  et  $B(-1, 1)$ .

1° Démontrer analytiquement que l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -6$  est une droite orthogonale à la droite  $(AB)$ .

2° Même question pour l'ensemble des points  $M$  tels que  $MA^2 - MB^2 = 11$ .

35. On donne les trois points  $A(-1, -2)$ ,  $B(2, -1)$ ,  $C(-1, 3)$  et un réel  $k$ . Démontrer analytiquement que l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = k$  est une droite. Choisir le réel  $k$  de façon que cette droite passe par l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$ .

36. Le plan est muni d'un repère orthonormal. On donne les points  $A(2, -3)$ ,  $B(0, -1)$ ,  $C(-2, -5)$ .

Calculer les coordonnées de l'orthocentre  $H$ , du centre du cercle circonscrit  $\Omega$ , et du centre de gravité  $G$ , du triangle  $ABC$ .

Vérifier que les points  $\Omega$ ,  $G$ ,  $H$  sont alignés et que :

$$\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{3} \overrightarrow{\Omega H}.$$

37. Définir analytiquement la projection orthogonale sur la droite  $\mathcal{D}$  dont une équation cartésienne est :

- a)  $x + y = 0$ ;  
b)  $3x + 4y - 12 = 0$ ;  
c)  $2x - y + 3 = 0$ .

38. On désigne par  $f$  l'application de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  qui, à tout point  $M(x, y)$ , associe le point  $M'(x', y')$  défini par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(x + 2y + 2) \\ y' = \frac{1}{5}(2x + 4y - 1) \end{cases}$$

1° Calculer les coordonnées du point  $A'$ , image de  $A(-2, 1)$ . Déterminer l'ensemble des antécédents de  $A'$ .

2° Démontrer que l'ensemble des points invariants par  $f$  est une droite  $\mathcal{D}$ , dont on déterminera une équation.

3° Démontrer que, pour tout point  $M$  du plan, d'image  $M'$  :

- a) le point  $M'$  appartient à  $\mathcal{D}$ ;  
b) le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  est orthogonal à  $\mathcal{D}$ .

En déduire que  $f$  est la projection orthogonale sur  $\mathcal{D}$ .

## VII - DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

Le plan  $\mathcal{P}$  est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### ★ Activité 1

Soit le point  $A(1, -2)$  et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $3x + 4y - 1 = 0$ .

1° Construire  $A$  et  $\mathcal{D}$ .

2° Déterminer une équation de la droite  $\mathcal{D}'$  passant par  $A$  et orthogonale à  $\mathcal{D}$ .

3° Calculer les coordonnées du point d'intersection,  $H$ , des droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .

4° Calculer la distance des points  $A$  et  $H$ .

On rappelle que la distance du point  $A$  à son projeté orthogonal  $H$  sur la droite  $\mathcal{D}$  est, par définition, la distance de  $A$  à  $\mathcal{D}$ ; on la note  $d(A, \mathcal{D})$ .

### ★ Activité 2

Cette activité propose une autre méthode de calcul de la distance  $d(A, \mathcal{D})$ .

1° Définir, par ses coordonnées, un vecteur  $\vec{u}$  normal à la droite  $\mathcal{D}$ . Calculer  $\|\vec{u}\|$ .

2° A partir du repère  $(A, \vec{u})$  de la droite  $\mathcal{D}'$ , donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

3° Soit  $t_H$  le paramètre du point  $H$  ( $t_H$  est le réel tel que  $\overrightarrow{AH} = t_H \vec{u}$ ). Calculer  $t_H$  en exprimant que le point  $H$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ .

4° Calculer la distance des points  $A$  et  $H$ , en utilisant l'égalité vectorielle  $\overrightarrow{AH} = t_H \vec{u}$ .

### ★ Activité 3

On peut aussi calculer la distance  $AH$  en utilisant la propriété suivante, que l'on démontrera : la distance  $AM$ , et donc son carré  $AM^2$ , du point  $A$  à un point  $M$  de la droite  $\mathcal{D}$  est minimum lorsque  $M$  est en  $H$ .

1° Écrire un système d'équations paramétriques de la droite  $\mathcal{D}$  et exprimer  $AM^2$  en fonction du paramètre  $t$  de  $M$ .

2° La fonction qui à tout réel  $t$  associe  $AM^2$  est une fonction polynôme du second degré. Pour quelle valeur de  $t$  est-elle minimum? En déduire les coordonnées de  $H$ .

## ÉTUDE DU CAS GÉNÉRAL

On considère une droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $ax + by + c = 0$  et un point  $M_0(x_0, y_0)$  n'appartenant pas à  $\mathcal{D}$ .

On se propose de calculer la distance  $d(M_0, \mathcal{D})$ , c'est-à-dire la distance  $M_0H$  du point  $M_0$  à son projeté orthogonal  $H$  sur  $\mathcal{D}$  (figure 19).

Le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(a, b)$  est un vecteur normal de  $\mathcal{D}$ .

Le point  $M_1$ , défini par  $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{u}$ , est tel que :

$$M_0M_1 = \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Désignons par  $x_H$  et  $y_H$  les coordonnées du point  $H$ ; comme  $H$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ , on a :

$$ax_H + by_H + c = 0,$$

$$ax_H + by_H = -c.$$

soit :

(1)

Les vecteurs  $\overrightarrow{M_0M_1}$  et  $\overrightarrow{M_0H}$  ont respectivement pour coordonnées  $(a, b)$  et  $(x_H - x_0, y_H - y_0)$ .

D'où  $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0H} = a(x_H - x_0) + b(y_H - y_0)$ , soit, en tenant compte de (1) :

$$\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0H} = -(ax_0 + by_0 + c).$$

Par ailleurs  $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0H}$  s'écrit aussi :  $M_0M_1 \times M_0H \times \cos \widehat{M_1M_0H}$ .

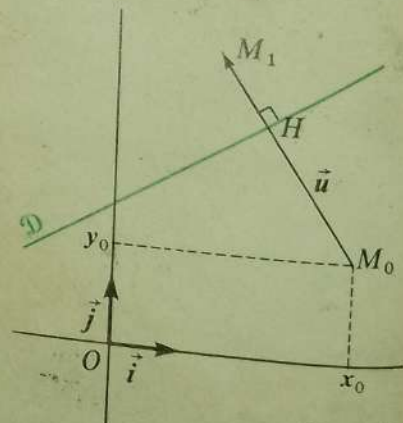


Figure 19

Il en résulte :  $M_0M_1 \times M_0H \times \cos \widehat{M_1M_0H} = -(ax_0 + by_0 + c)$ , d'où :

$$M_0H = \frac{-(ax_0 + by_0 + c)}{M_0M_1 \times \cos \widehat{M_1M_0H}}$$

Dans cette égalité le premier membre  $M_0H$  est une distance, donc un réel positif; il en est de même du second membre qui est donc égal à sa valeur absolue. Par conséquent :

$$M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2} \times |\cos \widehat{M_1M_0H}|}$$

Les points  $M_1, M_0, H$  étant alignés, l'angle  $\widehat{M_1M_0H}$  est soit nul, soit plat; son cosinus est donc égal soit à 1, soit à  $-1$ . Dans les deux cas :  $|\cos \widehat{M_1M_0H}| = 1$ .

Finalement :

$$M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Cette formule, établie lorsque le point  $M_0$  n'appartient pas à la droite  $\mathcal{D}$ , reste valable lorsque  $M_0$  appartient à  $\mathcal{D}$ ; en effet dans ce cas :  $ax_0 + by_0 + c = 0$  et  $M_0H = 0$ .

### THÉORÈME 14

Dans un repère orthonormal du plan, la **distance** du point  $M_0(x_0, y_0)$  à la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $ax + by + c = 0$ , est donnée par :

$$d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

### EXEMPLES

1° La distance de l'origine  $O$  du repère à la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $ax + by + c = 0$  est :

$$d(O, \mathcal{D}) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2° La distance du point  $A(-2, 3)$  à la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $x - 3y + 5 = 0$  est :

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{|-2 - 3(3) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

### Exercices d'application

Le plan  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

39. Reprendre les méthodes utilisées dans les activités 1, 2, 3, page 66, pour calculer la distance du point  $A(-2, 3)$  à la droite d'équation  $-x + 3y + 12 = 0$

40. On donne les points  $A(1, 3)$ ,  $B(3, 1)$ ,  $C(4, 8)$ . Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .

41. Soit une droite  $\mathcal{D}$ , et un point  $A$  de  $\mathcal{D}$ . En choisissant un repère orthonormal du plan, déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $MA = 2MM'$ , où  $M'$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ .

42. Reprendre l'exercice précédent avec :

a)  $MA = \sqrt{2}MM'$ ; b)  $MA = MM'$ ;

c)  $MA = \frac{1}{2}MM'$ .

43. A tout réel  $m$ , on associe la droite  $\mathcal{D}_m$  d'équation :

$$(m-1)x - (2m-3)y - 4m + 1 = 0.$$

1° Construire les droites  $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  et calculer les distances du point  $A(4, 6)$  à ces droites.

2° Déterminer le réel  $m$ , pour que la distance du point  $A$  à la droite  $\mathcal{D}_m$  soit égale à  $\frac{12}{\sqrt{5}}$ ; à 3.

44. On considère les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  d'équations respectives  $y = 0$  et  $3x - 4y = 0$ . Démontrer que l'ensemble des joints  $M$  équidistants de  $\mathcal{D}$  et de  $\mathcal{D}'$  est la réunion de deux droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  orthogonales et passant par le point d'intersection de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .

## TRAVAUX PRATIQUES

### FAMILLES DE DROITES

#### A - DROITES PASSANT PAR UN POINT FIXE

Le plan  $\mathcal{F}$  est rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. A tout réel  $m$ , on associe la droite  $\mathcal{D}_m$  d'équation :  $(m+2)x + (2m-1)y - m + 3 = 0$ .

1° Construire les droites  $\mathcal{D}_0$  et  $\mathcal{D}_1$  respectivement associées aux réels 0 et 1.

2° Démontrer qu'il existe un point  $A$ , dont on calculera les coordonnées, appartenant à toute droite  $\mathcal{D}_m$ .

3° Déterminer le réel  $m$  de manière que :

a) la droite  $\mathcal{D}_m$  passe par le point  $B(3, 2)$ .

b) la droite  $\mathcal{D}_m$  soit parallèle à la droite  $\Delta$  d'équation  $x + 3y = 0$ .

2. A tout réel  $m$ , on associe la droite  $\mathcal{D}_m$  d'équation  $(2m-1)x + (m+1)y + 2m + 5 = 0$ .

1° Déterminer le réel  $m$  de manière que :

a)  $\mathcal{D}_m$  soit parallèle à l'axe des abscisses.

b)  $\mathcal{D}_m$  soit parallèle à l'axe des ordonnées.

c)  $\mathcal{D}_m$  contienne l'origine du repère.

d)  $\mathcal{D}_m$  ait son coefficient directeur égal à 2.

e)  $\mathcal{D}_m$  ait son ordonnée à l'origine égale à  $-3$ .

Construire sur un même graphique les droites  $\mathcal{D}_m$  associées aux valeurs de  $m$  trouvées.

2° Démontrer que toutes les droites  $\mathcal{D}_m$  passent par un point fixe  $A$ , dont on calculera les coordonnées.

3° Déterminer  $m$  de manière que la droite  $\mathcal{D}_m$  ait son coefficient directeur égal à  $a$ .

Discuter suivant les valeurs de  $a$ . Toute droite passant par  $A$  est-elle une droite  $\mathcal{D}_m$ ?

3. Reprendre le n° 2 pour les droites  $\mathcal{D}_m$  d'équations  $(2m-1)x + (3-m)y - 7m + 6 = 0$ .

4. A tout réel  $m$ , on associe les droites  $\mathcal{D}_m$  et  $\Delta_m$  d'équations respectives :

$$(m+1)x + (2-m)y + 2m - 1 = 0, \quad (m+1)x + (5m+2)y + 6m - 1 = 0.$$

1° Démontrer que toutes les droites  $\mathcal{D}_m$  passent par un point fixe  $A$  et que toutes les droites  $\Delta_m$  passent par un point fixe  $B$ . Calculer les coordonnées de  $A$  et de  $B$ .

2° Peut-on déterminer  $m$  de manière que  $\mathcal{D}_m = \Delta_m$ ?

3° Étudier, suivant les valeurs de  $m$ , l'intersection des droites  $\mathcal{D}_m$  et  $\Delta_m$ . Lorsque  $\mathcal{D}_m$  et  $\Delta_m$  sont sécantes, calculer, en fonction de  $m$ , les coordonnées de leur point d'intersection  $I_m$ .

4° Déterminer et construire l'ensemble des points  $I_m$ .

5. Reprendre le n° 4 pour les droites  $\mathcal{D}_m$  et  $\Delta_m$  d'équations respectives :

$$(m+2)x + (3-2m)y + 3m - 8 = 0, \quad (9m-3)x + (10m-8)y - 8m - 2 = 0.$$

B - On suppose dans cette partie que le plan  $\mathcal{F}$  est rapporté à un repère orthonormal.

6. A tout réel  $m$ , on associe la droite  $\mathcal{D}_m$  d'équation  $(1-m^2)x + 2my - 2(2m+1) = 0$ .

1° Soit  $M_0$  un point de coordonnées  $x_0, y_0$ . Discuter suivant la position du point  $M_0$  dans le plan  $\mathcal{F}$ , le nombre de droites  $\mathcal{D}_m$  passant par  $M_0$ . Préciser l'ensemble des points  $M_0(x_0, y_0)$  par lesquels il passe une seule droite  $\mathcal{D}_m$ .

2° Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul de coordonnées  $(a, b)$ . Déterminer les droites  $\mathcal{D}_m$  dont la direction est celle du vecteur  $\vec{u}$ . Discuter.

3° Démontrer que toutes les droites  $\mathcal{D}_m$  sont tangentes à un cercle fixe  $\mathcal{C}$  dont on déterminera le centre et le rayon. Toute tangente à  $\mathcal{C}$  est-elle une droite  $\mathcal{D}_m$ ?

4° Déterminer l'ensemble des points  $M_0(x_0, y_0)$  par lesquels il passe deux droites  $\mathcal{D}_m$  orthogonales.

## TRAVAUX PRATIQUES

### FAMILLES DE DROITES

#### A - DROITES PASSANT PAR UN POINT FIXE

Le plan  $\mathcal{F}$  est rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. A tout réel  $m$ , on associe la droite  $\mathcal{D}_m$  d'équation :  $(m+2)x + (2m-1)y - m + 3 = 0$ .

1° Construire les droites  $\mathcal{D}_0$  et  $\mathcal{D}_1$  respectivement associées aux réels 0 et 1.

2° Démontrer qu'il existe un point  $A$ , dont on calculera les coordonnées, appartenant à toute droite  $\mathcal{D}_m$ .

3° Déterminer le réel  $m$  de manière que :

a) la droite  $\mathcal{D}_m$  passe par le point  $B(3, 2)$ .

b) la droite  $\mathcal{D}_m$  soit parallèle à la droite  $\Delta$  d'équation  $x + 3y = 0$ .

2. A tout réel  $m$ , on associe la droite  $\mathcal{D}_m$  d'équation  $(2m-1)x + (m+1)y + 2m + 5 = 0$ .

1° Déterminer le réel  $m$  de manière que :

a)  $\mathcal{D}_m$  soit parallèle à l'axe des abscisses.

b)  $\mathcal{D}_m$  soit parallèle à l'axe des ordonnées.

c)  $\mathcal{D}_m$  contienne l'origine du repère.

d)  $\mathcal{D}_m$  ait son coefficient directeur égal à 2.

e)  $\mathcal{D}_m$  ait son ordonnée à l'origine égale à  $-3$ .

Construire sur un même graphique les droites  $\mathcal{D}_m$  associées aux valeurs de  $m$  trouvées.

2° Démontrer que toutes les droites  $\mathcal{D}_m$  passent par un point fixe  $A$ , dont on calculera les coordonnées.

3° Déterminer  $m$  de manière que la droite  $\mathcal{D}_m$  ait son coefficient directeur égal à  $a$ .

Discuter suivant les valeurs de  $a$ . Toute droite passant par  $A$  est-elle une droite  $\mathcal{D}_m$ ?

3. Reprendre le n° 2 pour les droites  $\mathcal{D}_m$  d'équations  $(2m-1)x + (3-m)y - 7m + 6 = 0$ .

4. A tout réel  $m$ , on associe les droites  $\mathcal{D}_m$  et  $\Delta_m$  d'équations respectives :

$$(m+1)x + (2-m)y + 2m - 1 = 0, \quad (m+1)x + (5m+2)y + 6m - 1 = 0.$$

1° Démontrer que toutes les droites  $\mathcal{D}_m$  passent par un point fixe  $A$  et que toutes les droites  $\Delta_m$  passent par un point fixe  $B$ . Calculer les coordonnées de  $A$  et de  $B$ .

2° Peut-on déterminer  $m$  de manière que  $\mathcal{D}_m = \Delta_m$ ?

3° Étudier, suivant les valeurs de  $m$ , l'intersection des droites  $\mathcal{D}_m$  et  $\Delta_m$ . Lorsque  $\mathcal{D}_m$  et  $\Delta_m$  sont sécantes, calculer, en fonction de  $m$ , les coordonnées de leur point d'intersection  $I_m$ .

4° Déterminer et construire l'ensemble des points  $I_m$ .

5. Reprendre le n° 4 pour les droites  $\mathcal{D}_m$  et  $\Delta_m$  d'équations respectives :

$$(m+2)x + (3-2m)y + 3m - 8 = 0, \quad (9m-3)x + (10m-8)y - 8m - 2 = 0.$$

**B** - On suppose dans cette partie que le plan  $\mathcal{F}$  est rapporté à un repère orthonormal.

6. A tout réel  $m$ , on associe la droite  $\mathcal{D}_m$  d'équation  $(1-m^2)x + 2my - 2(2m+1) = 0$ .

1° Soit  $M_0$  un point de coordonnées  $x_0, y_0$ . Discuter suivant la position du point  $M_0$  dans le plan  $\mathcal{F}$ , le nombre de droites  $\mathcal{D}_m$  passant par  $M_0$ . Préciser l'ensemble des points  $M_0(x_0, y_0)$  par lesquels il passe une seule droite  $\mathcal{D}_m$ .

2° Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul de coordonnées  $(a, b)$ . Déterminer les droites  $\mathcal{D}_m$  dont la direction est celle du vecteur  $\vec{u}$ . Discuter. C'est-elle une droite  $\mathcal{D}_m$ ?

3° Démontrer que toutes les droites  $\mathcal{D}_m$  sont tangentes à un cercle fixe  $\mathcal{C}$  dont on déterminera le centre et le rayon. Toute tangente à  $\mathcal{C}$  est-elle une droite  $\mathcal{D}_m$ ?

4° Déterminer l'ensemble des points  $M_0(x_0, y_0)$  par lesquels il passe deux droites  $\mathcal{D}_m$  orthogonales.

### REFLEXIONS

Une droite  $\mathcal{D}$  du plan est la réflexion, d'axe  $\mathcal{D}$ , d'une droite  $\mathcal{D}'$  orthogonale à  $\mathcal{D}$ . On dit que  $\mathcal{D}$  est l'axe de réflexion de  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{D}'$ . On dira tel que  $H$  soit le milieu de  $MM'$ . Designons par  $s_{\mathcal{D}}$  la réflexion de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ .

1° Quel est l'ensemble des points  $M$  tels que  $s_{\mathcal{D}}(M) = M$ ?

2° Démontrer que  $s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'} = \text{Id}$ . (On exprime la propriété en termes de réflexion.)

3° Soit deux points  $M$  et  $M'$ . Soit  $\mathcal{D}$  l'axe de réflexion de  $M$  sur  $M'$ .

a) Démontrer que  $\mathcal{D}$  est l'axe de réflexion de  $M$  sur  $M'$ .

b) Calculer le produit scalaire  $\vec{MM}' \cdot \vec{u}$ , où  $\vec{u}$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

Toute réflexion est un déplacement.

c) Démontrer analytiquement que la réflexion de  $M$  sur  $\mathcal{D}$  est  $s_{\mathcal{D}}(M)$ . (On choisit de manière à faciliter le calcul.)

4° On considère une droite  $\mathcal{D}$  et un point  $M$ . Soit  $B'$  le point tel que  $\vec{MB} = \vec{MB}'$ .

a) Démontrer que l'axe de réflexion de  $M$  sur  $B'$  est  $\mathcal{D}$ .

b) Démontrer que tout point  $M'$  de  $\mathcal{D}$  est le milieu de  $MM'$ .

c) Dédire de a) et b) que  $\mathcal{D}$  est l'axe de réflexion de  $M$  sur  $B'$ .

L'image d'une droite par une réflexion est une droite.

Construire l'image par  $s_{\mathcal{D}}$  d'une droite  $\mathcal{D}'$ .

d) Quelles sont les droites  $\mathcal{D}'$  telles que  $s_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}') = \mathcal{D}'$ ?

5° Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère une droite  $\mathcal{D}$  d'axe  $\mathcal{D}$ .

Soit  $M(X, Y)$  un point de  $\mathcal{D}$ . Trouver deux relations entre  $X$  et  $Y$ .

• le milieu de  $(M, M')$  appartient à  $\mathcal{D}$ .

• le vecteur  $\vec{MM}'$  est orthogonal à  $\mathcal{D}$ .

En déduire  $X'$  et  $Y'$  en fonction de  $X$  et  $Y$ .

6° Le plan  $\mathcal{F}$  étant rapporté à un repère orthonormal, on considère une droite  $\mathcal{D}$  d'axe  $\mathcal{D}$ .

a) Démontrer que  $s_{\mathcal{D}}$  est une réflexion.

b) Démontrer que l'ensemble des points  $M$  tels que  $s_{\mathcal{D}}(M) = M$  est  $\mathcal{D}$ .

c) Pour tout point  $M$  d'images  $M'$  et  $M''$  par  $s_{\mathcal{D}}$ , on a  $\vec{MM}' \cdot \vec{MM}'' = 0$ .

• que le vecteur  $\vec{MM}'$  est orthogonal à  $\mathcal{D}$ .

• que le milieu de  $(M, M')$  appartient à  $\mathcal{D}$ .

Reconnaitre l'application  $f$ .

7° On considère dans le plan  $\mathcal{F}$  une droite  $\mathcal{D}$  et un point  $M$  de  $\mathcal{D}$ .

a) On donne une droite  $\mathcal{D}'$  et un point  $M'$  de  $\mathcal{D}'$ . Soit  $\mathcal{D}$  l'axe de réflexion de  $M$  sur  $M'$ .

b) Soit  $\vec{u}$  un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ . Soit  $\vec{v}$  un vecteur directeur de  $\mathcal{D}'$ . Soit  $\vec{w}$  un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et  $\vec{u} \cdot \vec{w}$ .

8° On donne une droite  $\mathcal{D}$  et un point  $M$  de  $\mathcal{D}$ . Soit  $M'$  le point tel que  $\vec{MM}' = \vec{u}$ .

a) Démontrer que  $\mathcal{D}$  est l'axe de réflexion de  $M$  sur  $M'$ .

b) Soit  $\vec{v}$  un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ . Soit  $\vec{w}$  un vecteur directeur de  $\mathcal{D}'$ . Soit  $\vec{u}$  un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et  $\vec{u} \cdot \vec{w}$ .

## RÉFLEXIONS

Une droite  $\mathcal{D}$  du plan  $\mathcal{F}$  étant donnée, on appelle **symétrie orthogonale**, ou **réflexion, d'axe  $\mathcal{D}$** , l'application de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$  qui, à tout point  $M$  de projeté orthogonal  $H$  sur  $\mathcal{D}$ , associe le point  $M'$  tel que  $\overrightarrow{HM'} = -\overrightarrow{HM}$ , c'est-à-dire tel que  $H$  soit le milieu de  $[M, M']$  (figure 1). Désignons par  $s_{\mathcal{D}}$  la réflexion d'axe  $\mathcal{D}$ .

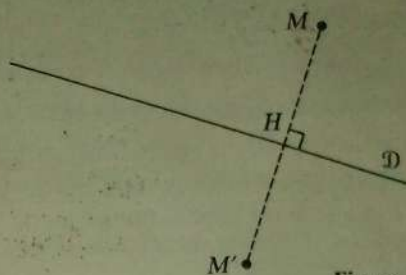


Figure 1

1° Quel est l'ensemble des points invariants par  $s_{\mathcal{D}}$ ?

2° Démontrer que  $s_{\mathcal{D}}$  est une bijection du plan  $\mathcal{F}$ , égale à sa bijection réciproque. (On exprime la propriété  $s_{\mathcal{D}} = s_{\mathcal{D}}^{-1}$  en disant que  $s_{\mathcal{D}}$  est **involutive**.)

3° Soit deux points  $M$  et  $N$  de projetés orthogonaux respectifs  $H$  et  $K$  sur  $\mathcal{D}$  et d'images respectives  $M'$  et  $N'$  par  $s_{\mathcal{D}}$ .

a) Démontrer que  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'} = 2\overrightarrow{HK}$  et que  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MM'} - \overrightarrow{NN'}$ .

b) Calculer le produit scalaire  $(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'}) \cdot (\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'})$ . En déduire  $MN = M'N'$ .

## Toute réflexion est une isométrie.

c) Démontrer analytiquement que  $s_{\mathcal{D}}$  est une isométrie. (On commencera par définir analytiquement  $s_{\mathcal{D}}$  dans un repère orthonormal choisi de manière à faciliter les calculs.)

4° On considère une droite  $\Delta$  et deux points distincts  $A$  et  $B$  tels que  $\Delta$  soit la médiatrice de  $[A, B]$ . On note  $A' = s_{\mathcal{D}}(A)$  et  $B' = s_{\mathcal{D}}(B)$ .

a) Démontrer que l'image  $M'$  de tout point  $M$  de  $\Delta$  appartient à la médiatrice  $\Delta'$  de  $[A', B']$ .

b) Démontrer que tout point  $M'$  de  $\Delta'$  est l'image par  $s_{\mathcal{D}}$  d'un point  $M$  de  $\Delta$ .

c) Déduire de a) et b) que  $\Delta'$  est l'image de  $\Delta$  par  $s_{\mathcal{D}}$ :  $s_{\mathcal{D}}(\Delta) = \Delta'$ .

## L'image d'une droite par une réflexion, est une droite.

Construire l'image par  $s_{\mathcal{D}}$  d'une droite sécante avec  $\mathcal{D}$  et d'une droite parallèle à  $\mathcal{D}$ .

d) Quelles sont les droites  $\Delta$  telles que  $s_{\mathcal{D}}(\Delta) = \Delta$ ?

5° Dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on considère la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $2x - y + 3 = 0$  et la réflexion  $s_{\mathcal{D}}$  d'axe  $\mathcal{D}$ .

Soit  $M(X, Y)$  un point du plan et son image  $M'(X', Y')$  par  $s_{\mathcal{D}}$ .

Trouver deux relations entre  $X, Y, X', Y'$  en traduisant analytiquement les deux propriétés :

- le milieu de  $(M, M')$  appartient à  $\mathcal{D}$ ;
- le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  est orthogonal à un vecteur directeur  $\vec{u}$  de  $\mathcal{D}$ .

En déduire  $X'$  et  $Y'$  en fonction de  $X$  et  $Y$ .

6° Le plan  $\mathcal{F}$  étant rapporté à un repère orthonormal, on considère l'application  $f$  de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$ , définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$$

a) Démontrer que  $f$  est une isométrie.

b) Démontrer que l'ensemble des points invariants par  $f$  est une droite  $\mathcal{D}$  dont on déterminera une équation et un vecteur directeur  $\vec{u}$ .

c) Pour tout point  $M$  d'image  $M'$  par  $f$ , démontrer :

- que le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  est orthogonal à  $\vec{u}$ ;
- que le milieu de  $(M, M')$  appartient à  $\mathcal{D}$ .

Reconnaître l'application  $f$ .

7° On considère dans le plan  $\mathcal{F}$  deux points fixes  $A$  et  $B$  distincts et une droite variable  $\mathcal{D}$  passant par  $A$ . Quel est le lieu du symétrique orthogonal de  $B$  par rapport à  $\mathcal{D}$ ?

8° On donne une droite  $\mathcal{D}$  et deux points distincts  $A$  et  $B$  n'appartenant pas à  $\mathcal{D}$  et situés d'un même côté de  $\mathcal{D}$ .

a) Déterminer un point  $M$  de la droite  $\mathcal{D}$  de manière que  $MA + MB$  soit minimum. (Utiliser le symétrique orthogonal de  $A$  par rapport à  $\mathcal{D}$ .)

b) Soit  $\vec{u}$  un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ . A tout point  $C$  de  $\mathcal{D}$  on associe le point  $D$  tel que  $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$ . Déterminer  $C$  de manière que  $AC + CD + DB$  soit minimum. (Utiliser le point  $E$  tel que  $\overrightarrow{AE} = \vec{u}$ .)

**BISSECTRICES**

**Rappels.**

Un angle  $\widehat{xOy}$  étant donné, il existe une droite  $\mathcal{D}$ , unique, axe d'une réflexion qui transforme  $Ox$  en  $Oy$  et  $Oy$  en  $Ox$  :

- si l'angle  $\widehat{xOy}$  est nul,  $\mathcal{D}$  est la droite  $(Ox)$ ,
- si l'angle  $\widehat{xOy}$  n'est pas nul,  $\mathcal{D}$  est la médiatrice du segment ayant pour extrémités les points  $I$  et  $J$  appartenant respectivement à  $Ox$  et  $Oy$  et tels que  $OI = OJ = 1$ .

La droite  $\mathcal{D}$  est appelée **bissectrice** de l'angle  $\widehat{xOy}$ .

Pour tout point  $M$  de la bissectrice  $\mathcal{D}$ , distinct de  $O$ , les angles  $\widehat{MOx}$  et  $\widehat{MOy}$  ont même mesure.

1° On considère un angle  $\widehat{xOy}$  non nul et non plat, et les points  $I$  et  $J$  tels que (figure 1) :

$$I \in Ox, J \in Oy, OI = OJ = 1.$$

On pose  $\vec{i} = \vec{OI}$  et  $\vec{j} = \vec{OJ}$  ( $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont les vecteurs directeurs unitaires des demi-droites  $Ox$  et  $Oy$ ).

a) Démontrer que la bissectrice,  $\mathcal{D}$ , de l'angle  $\widehat{xOy}$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\vec{i} \cdot \vec{OM} = \vec{j} \cdot \vec{OM}$ .

b) Démontrer que tout point  $M$  de  $\mathcal{D}$  est équidistant des droites  $(Ox)$  et  $(Oy)$ .

c) Démontrer qu'un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  est  $\vec{i} + \vec{j}$ .

2° Démontrer que deux angles opposés par le sommet ont même bissectrice (figure 2).

3° On donne deux angles **adjacents** et **supplémentaires**  $\widehat{xOy}$  et  $\widehat{yOz}$  (figure 3).

Soit  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  les vecteurs directeurs unitaires respectifs des demi-droites  $Ox$  et  $Oy$ .

Déterminer des vecteurs directeurs des bissectrices respectives,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ , des angles  $\widehat{xOy}$  et  $\widehat{yOz}$ .

En déduire que ces bissectrices sont orthogonales.

On dit que la droite  $\mathcal{D}$  est la **bissectrice intérieure** de l'angle  $\widehat{xOy}$  et que la droite  $\mathcal{D}'$  est sa **bissectrice extérieure**.

Ces deux bissectrices sont orthogonales.

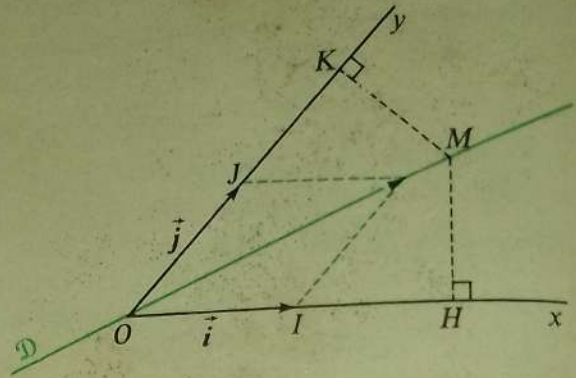


Figure 2

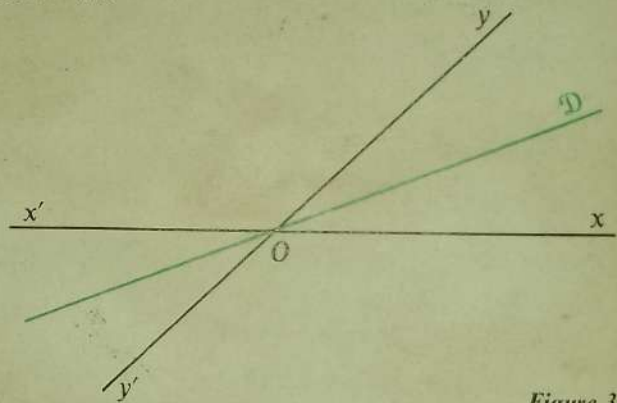


Figure 3

**Bissectrices des angles d'un triangle.**

On considère un triangle  $ABC$  et l'on pose  $BC = a, CA = b, AB = c$ .

Soit  $\mathcal{D}_A$  et  $\Delta_A$  les bissectrices, intérieure et extérieure, de l'angle  $A$ . La droite passant par  $B$  et parallèle à  $(AC)$  coupe  $\mathcal{D}_A$  en  $R$  et  $\Delta_A$  en  $S$  (figure 4).

1° a) Démontrer que les triangles  $ABR$  et  $ABS$  sont isocèles.

b) Soit  $A_1$  le point d'intersection des droites  $(BC)$  et  $\mathcal{D}_A$ . Démontrer que les triangles  $A_1BR$  et  $A_1CA$  sont semblables.

c) Déduire de a) et b) que :  $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC}$ .

2° a) On suppose  $AB \neq AC$ . Démontrer que les droites  $(BC)$  et  $\Delta_A$  sont sécantes. Soit  $A_2$  leur point d'intersection.

b) Démontrer que les triangles  $A_2BS$  et  $A_2CA$  sont semblables.

c) En déduire que :  $\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{AB}{AC}$ .

Nous retiendrons :

Pour tout triangle  $ABC$  tel que  $AB \neq AC$ , les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle  $\widehat{A}$  coupent respectivement le côté  $(BC)$  en deux points  $A_1$  et  $A_2$  tels que :  $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A_2B}{A_2C} = \frac{AB}{AC}$ .

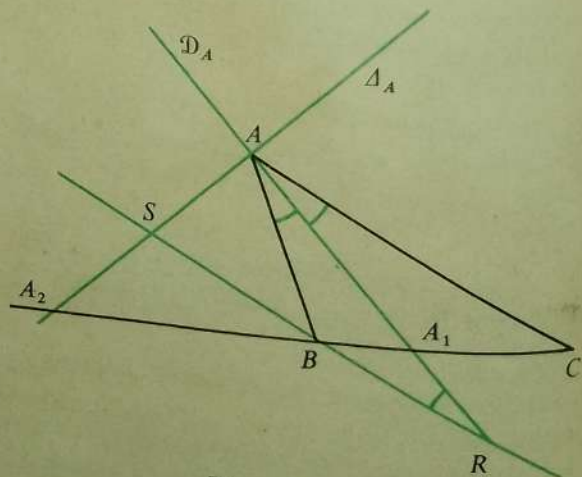


Figure 4

Remarque :

Le point  $A_1$  appartient au segment  $[B, C]$  et le point  $A_2$  est extérieur à ce segment. Il s'ensuit :  $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = -\frac{c}{b}$  et  $\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} = \frac{c}{b}$ .

3° Utiliser le théorème de Ceva pour montrer que les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes. Démontrer que leur point d'intersection  $I$  est centre d'un cercle tangent aux côtés du triangle : le cercle inscrit (figure 5).

4° On suppose que le triangle  $ABC$  n'est pas isocèle. Les bissectrices de l'angle  $\widehat{B}$ ,  $\mathcal{D}_B$  et  $\Delta_B$ , coupent alors le côté  $(CA)$  en  $B_1$  et  $B_2$  et les bissectrices de l'angle  $\widehat{C}$ ,  $\mathcal{D}_C$  et  $\Delta_C$ , coupent  $(AB)$  en  $C_1$  et  $C_2$ .

a) Démontrer que la bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{A}$  et les bissectrices extérieures des angles  $\widehat{B}$  et  $\widehat{C}$  sont concourantes en un point  $J$ , centre d'un cercle tangent aux côtés du triangle : le cercle exinscrit dans l'angle  $A$ . Mettre en évidence deux autres cercles exinscrits.

b) Démontrer que les points  $A_1, B_1, C_2$  sont alignés. Mettre en évidence d'autres ensembles de trois points alignés.

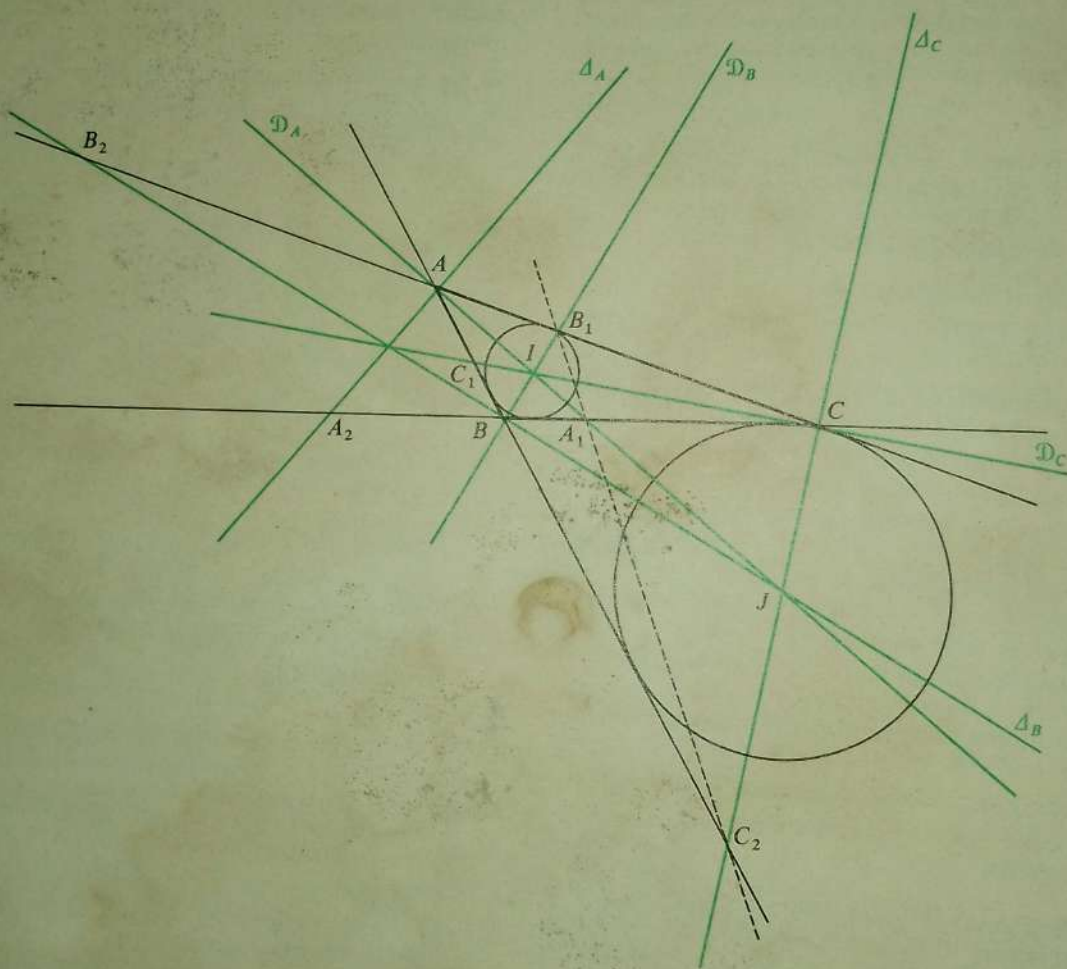


Figure 5

## EXERCICES ET PROBLÈMES

Le plan  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

45. Étudier, dans les cas suivants, l'intersection de deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  définies soit par un système d'équations paramétriques, soit par une équation cartésienne. Lorsque les droites sont sécantes, on calculera les coordonnées de leur point d'intersection, et lorsqu'elles sont parallèles, on précisera si elles sont confondues, ou non :

a)  $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$      $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = 2t' \\ y = 3 - 3t' \end{cases}$

b)  $\mathcal{D} : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 5t \end{cases}$      $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = -2 - t' \\ y = \frac{-3 + 5t'}{2} \end{cases}$

c)  $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$      $\mathcal{D}' : 2x - 5y + 10 = 0$

d)  $\mathcal{D} : 2x + 3y - 7 = 0$      $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -4 + 2t \end{cases}$

e)  $\mathcal{D} : 3x - 5y - 2 = 0$      $\mathcal{D}' : -x + 2y + 5 = 0$

f)  $\mathcal{D} : y = 2x - 5$      $\mathcal{D}' : 4x - 2y + 3 = 0$

46. A tout réel  $t$ , on associe le point  $M$  de coordonnées  $(1 + t^2, -2 + 3t^2)$ . Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble de tous les points  $M$  ainsi obtenus.

1° Démontrer qu'il existe une droite  $\mathcal{D}$  contenant  $\mathcal{F}$ .

2° A-t-on  $\mathcal{F} = \mathcal{D}$ ? Préciser l'ensemble  $\mathcal{F}$ .

47. Quel est l'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(2 - 2t, -3 + t)$  :

a) lorsque le réel  $t$  décrit  $\mathbb{R}_+$  ?

b) lorsque le réel  $t$  décrit l'intervalle  $[-1, 2]$  ?

48. On donne les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{A}$  d'équations respectives  $x + ay + a^2 = 0$  et  $x + by + b^2 = 0$ .

1° A quelle condition  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{A}$  sont-elles sécantes ?

2° Calculer alors les coordonnées de leur point d'intersection.

49. Représenter graphiquement l'ensemble des points  $M$  dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient l'équation :

a)  $2x + |y| - 1 = 0;$     d)  $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2};$

b)  $\sqrt{x^2} - y + 2 = 0;$     e)  $x + \frac{x}{|x|} - 2y = 0;$

c)  $x - \sqrt{x^2} + y = 0;$     f)  $4x^2 - (y + 1)^2 = 0.$

50. Représenter graphiquement l'ensemble des points  $M$  dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient l'équation :

a)  $|x| + |y| = 1;$

b)  $\max(|x|, |y|) = 1.$

(On rappelle que  $\max(a, b)$  désigne le plus grand des deux nombres  $a, b$ .)

51. On donne les deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  d'équations respectives :

$$93x - 17y + 144 = 0 \quad \text{et} \quad 137x + 29y = 0.$$

1° Démontrer que  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont sécantes, en  $A$ . (On ne calculera pas les coordonnées de  $A$ .)

2° Pour tout réel  $m$ , démontrer que la droite  $\mathcal{D}_m$  d'équation :

$$93x - 17y + 144 + m(137x + 29y) = 0,$$

passé par le point  $A$ .

3° Dédurre du 2° :

a) une équation de la droite passant par  $A$  et  $B(-1, 2)$ ;

b) une équation de la droite de coefficient directeur  $-1$  passant par  $A$ .

Le plan  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

52. On considère les trois points  $A(2, 1)$ ,  $B(1, -3)$ ,  $C(4, 2)$ .

Calculer les mesures en degrés des angles du triangle  $ABC$ .

53. On considère le triangle de sommets  $A(1, 0)$ ,  $B(4, 0)$ ,  $C(0, 3)$ .

Calculer les coordonnées de son centre de gravité  $G$ , de son orthocentre  $H$ , du centre  $\Omega$  de son cercle circonscrit. Démontrer que les points  $\Omega, G, H$  sont alignés et que  $\Omega H = 3\Omega G$ .

54. On considère le triangle de sommets  $A(-2, -1)$ ,  $B(-4, 3)$ ,  $C(-3, 6)$ .

1° Calculer les longueurs de ses côtés, le rayon  $R$  de son cercle circonscrit, les cosinus et les sinus de ses angles.

2° Vérifier la formule  $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$ .

55. On considère les deux points  $A(2, 2)$  et  $B(3, -4)$ .

1° Déterminer, par ses coordonnées, le vecteur unitaire  $\vec{u}$  de la demi-droite d'origine  $O$  contenant  $A$ . Déterminer de même le vecteur unitaire  $\vec{v}$  de la demi-droite d'origine  $O$  contenant  $B$ .

2° On rappelle que  $\vec{u} + \vec{v}$  est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle  $\widehat{AOB}$ . Déterminer une équation cartésienne de cette bissectrice.

56. On donne le point  $A(2a, 0)$ , où  $a$  est un réel strictement positif. A tout réel  $t$  on associe le point  $M$  de l'axe des abscisses défini par  $\overline{AM} = t$ , et le point  $N$  de l'axe des ordonnées défini par  $\overline{ON} = t$ .

1° Soit  $P$  le point de la droite  $(MN)$  défini par

$$\overline{PM} = -2\overline{PN}.$$

Quel est l'ensemble des points  $P$  lorsque  $t$  décrit  $\mathbb{R}$  ?

2° Soit  $\mathcal{D}$  la médiatrice du segment  $[M, N]$ . Démontrer que, lorsque  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ , les droites  $\mathcal{D}$  passent par un point fixe,  $R$ , dont on déterminera les coordonnées.

## DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

57. On donne les points  $A(1, 3)$ ,  $B(3, 1)$ ,  $C(4, 8)$ . Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .

58. A tout réel  $m$  on associe la droite  $\mathcal{D}_m$  d'équation :  
 $(1 - m^2)x + 2my - 2(m + 1) = 0$ .

Démontrer qu'il existe un point  $A$  dont on déterminera les coordonnées et dont la distance à ces droites est constante. En déduire que la droite  $\mathcal{D}_m$  reste tangente à un cercle fixe dont on précisera le centre et le rayon.

59. On considère les points  $A(0, 4)$ ,  $B(3, 0)$ ,  $C(-3, 0)$ .

1° Soit  $t$  l'abscisse d'un point  $M$  du segment  $[B, C]$  ( $|t| \leq 3$ ). Calculer les distances du point  $M$  aux droites  $(AB)$  et  $(AC)$ . Démontrer que la somme de ces distances est constante.

2° Soit  $\lambda$  abscisse d'un point  $P$  de la droite  $(BC)$  n'appartenant pas à  $[B, C]$ . Calculer les distances du point  $P$  aux droites  $(AB)$  et  $(AC)$ . Quelle relation existe-t-il entre ces distances?

60. Soit une droite  $\mathcal{D}$ , un point  $A$  de  $\mathcal{D}$  et un réel  $k$  strictement positif. En choisissant un repère orthonormal du plan, déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $MA = kMM'$ , où  $M'$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ . Discuter suivant les valeurs de  $k$ .

61. Soit  $A, B, C$  trois points de coordonnées respectives  $(0, a)$ ,  $(b, 0)$ ,  $(c, 0)$ , où  $a, b, c$  sont trois réels non nuls tels que  $b^2 \neq c^2$ .

1° L'ensemble des points du plan équidistants des droites  $(AB)$  et  $(AC)$  est la réunion des bissectrices de l'angle  $\hat{A}$  du triangle  $ABC$ . Déterminer une équation de cet ensemble.

2° Déduire du 1° une équation du second degré dont les racines sont les abscisses des points d'intersection  $I$  et  $J$  de la droite  $(BC)$  et des bissectrices de l'angle  $\hat{A}$ .

3° Démontrer que  $\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$ . (Ces égalités se déduisent de l'équation trouvée au 2°, sans qu'il soit nécessaire de calculer les racines de cette équation.)

62. Soit  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = 0$  et  $\mathcal{D}'$  la droite d'équation  $4x - 3y = 0$ . Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :

$$d(M, \mathcal{D}) = 2d(M, \mathcal{D}')$$

## DÉTERMINATION ANALYTIQUE D'UN ENSEMBLE DE POINTS

## DROITES

63. On donne deux points  $A$  et  $B$  et un réel  $k$ . Déterminer analytiquement l'ensemble des points  $M$ , tels que  $MA^2 - MB^2 = k$ , dans les cas suivants :

a)  $A(2, -1)$ ,  $B(3, 2)$ ,  $k = -\frac{3}{2}$

b)  $A(-4, 2)$ ,  $B(1, -1)$ ,  $k = 2$ ;

c)  $A(-3, 2)$ ,  $B(1, -2)$ ,  $k = 0$ .

Dans chaque cas, on vérifiera que l'ensemble est une droite orthogonale à la droite  $(AB)$ .

64. On donne les trois points  $A(-1, 2)$ ,  $B(2, 1)$ ,  $C(-1, -3)$ .

Déterminer analytiquement l'ensemble des points  $M$ , tels que  $MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = k$ , où  $k$  est un réel donné.

Donner une démonstration géométrique de ce résultat.

65. On donne les points  $A(1, 3)$ ,  $B(3, 2)$ ,  $C(2, -2)$ .

Déterminer analytiquement l'ensemble des points  $M$  tels que  $\|2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|3\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$ . Donner une démonstration géométrique de ce résultat. (Considérer le barycentre  $G_1$  des points pondérés  $(A, 2)$ ,  $(B, 1)$ ,  $(C, -1)$  et le barycentre  $G_2$  des points pondérés  $(A, 3)$ ,  $(B, 1)$ ,  $(C, -2)$ .)

66. On donne deux droites concourantes  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  et un réel  $k$  strictement positif. On se propose de déterminer analytiquement l'ensemble des points  $M$  du plan dont le rapport des distances à  $\mathcal{D}'$  et à  $\mathcal{D}$  est égale à  $k$  :

$$\mathcal{F} = \{ M \in \mathcal{P} \mid d(M, \mathcal{D}') = kd(M, \mathcal{D}) \}$$

Pour cela, on rapporte le plan  $\mathcal{P}$  à un repère orthonormal  $(O, i, j)$ , choisi de façon que  $O$  soit le point d'intersection des droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  et  $i$  un vecteur directeur unitaire de  $\mathcal{D}$ .

1° Soit  $i'(x, \beta)$  un vecteur directeur unitaire de  $\mathcal{D}'$ . Démontrer que  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  et donner une équation cartésienne de  $\mathcal{D}'$ .

2° Pour un point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  calculer  $d(M, \mathcal{D})$  et  $d(M, \mathcal{D}')$ . En déduire que l'ensemble  $\mathcal{F}$  est la réunion de deux droites passant par  $O$ .

3° On suppose  $k = 1$ . Démontrer que les deux droites de  $\mathcal{F}$  sont orthogonales, que l'une,  $\Delta$ , a pour vecteur directeur  $i + i'$ , et que l'autre,  $\Delta'$ , a pour vecteur directeur  $i - i'$ . En déduire que  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont les bissectrices des angles formés par les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ . Énoncer un théorème.

## CERCLES

67. Déterminer une équation du cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$ , dans les cas suivants :

a)  $\Omega(0, 0)$ ,  $r = 2$ ;

c)  $\Omega(0, -2)$ ,  $r = 3$ ;

b)  $\Omega(2, -1)$ ,  $r = 1$ ;

d)  $\Omega(3, 0)$ ,  $r = 1$ .

68. On définit un ensemble  $\mathcal{C}$  par une équation. Démontrer, dans les cas suivants, que l'ensemble  $\mathcal{C}$ , s'il n'est pas vide, est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

a)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ ;

b)  $x^2 + y^2 + 6x + 9 = 0$ ;

c)  $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 16 = 0$ ;

d)  $2(x^2 + y^2) - 2x + 4y + 1 = 0$ ;

e)  $3(x^2 + y^2) + 2x = 0$ .

69. On donne deux points  $A$  et  $B$  et un réel  $k$ . Déterminer analytiquement l'ensemble des points  $M$ , tels que  $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ , dans les cas suivants :

- a)  $A(1, 3)$ ,  $B(2, 1)$ ,  $\alpha = \beta = 1$ ,  $k = 4$ ;  
 b)  $A(1, -3)$ ,  $B(4, 0)$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $k = 87$ ;  
 c)  $A(1, -3)$ ,  $B(3, 4)$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$ ,  $k = 96$ .

Donner une démonstration géométrique de ces résultats.

70. Déterminer analytiquement l'ensemble des points  $M$ , tels que  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = k$ , dans les cas suivants :

- a)  $A(1, 2)$ ,  $B(-1, -1)$ ,  $k = \frac{3}{4}$ ;  
 b)  $A(-1, 3)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $k = -\frac{5}{2}$ ;  
 c)  $A(3, -2)$ ,  $B(1, 4)$ ,  $k = 0$ .

Donner une démonstration géométrique de ces résultats.

71. Déterminer analytiquement l'ensemble des points  $M$ , tels que  $\overline{MA} = k\overline{MB}$ , dans les cas suivants :

- a)  $A(-1, 1)$ ,  $B(3, 3)$ ,  $k = \frac{1}{3}$ ;  
 b)  $A(1, 3)$ ,  $B\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$ ,  $k = 4$ .

Donner une démonstration géométrique de ces résultats.

72. Soit un point  $A$  et une droite  $\mathcal{D}$  ne passant pas par  $A$ . A tout point  $M$  du plan, on associe son projeté orthogonal  $H$  sur la droite  $\mathcal{D}$ . Choisir un repère orthonormal du plan  $\mathcal{P}$  pour déterminer analytiquement l'ensemble des points  $M$  tels que

$$\overline{MA}^2 = 2\overline{MH}.$$

## I - DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Nous avons précisé, en classe de Seconde, les notions d'espace, de droites et de plans :

1° L'espace est l'ensemble, noté  $\mathcal{E}$ , de tous les points. Les droites et les plans de l'espace sont des parties de  $\mathcal{E}$  auxquelles s'appliquent les propriétés et théorèmes de géométrie plane.

2° Par deux points *distincts* quelconques  $A$  et  $B$  passe une droite, et une seule (figure 1), notée  $(AB)$ .

Autrement dit, deux points distincts **déterminent** une droite.



Figure 1

3° Par trois points *non alignés* quelconques  $A, B, C$  passe un plan, et un seul (figure 2), noté  $(ABC)$  : trois points non alignés déterminent un plan.

Il en résulte qu'un plan est aussi déterminé par :

a) une droite  $\mathcal{D}$  et un point  $A$  n'appartenant pas à  $\mathcal{D}$  (figure 3);

b) deux droites sécantes  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  (figure 4).

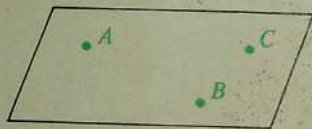


Figure 2

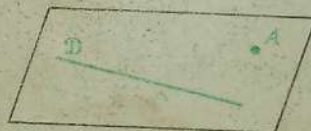


Figure 3

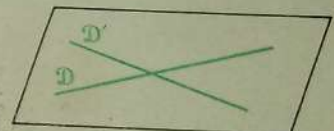


Figure 4

4° La droite  $\mathcal{D}$  passant par deux points distincts,  $A$  et  $B$ , d'un plan  $\mathcal{P}$  est contenue dans  $\mathcal{P}$  (figure 5).

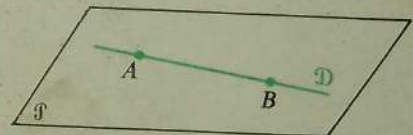


Figure 5

5° Tout plan  $\mathcal{P}$  partage l'ensemble  $\mathcal{E} - \mathcal{P}$  en deux **demi-espaces**  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  vérifiant les propriétés :

a) Tout segment ayant pour extrémités deux points d'un même demi-espace est inclus dans ce demi-espace (figure 6); autrement dit  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sont **convexes**.

b) Tout segment ayant pour extrémités un point de  $\mathcal{E}_1$  et un point de  $\mathcal{E}_2$  a, avec  $\mathcal{P}$ , un point commun unique (figure 6).

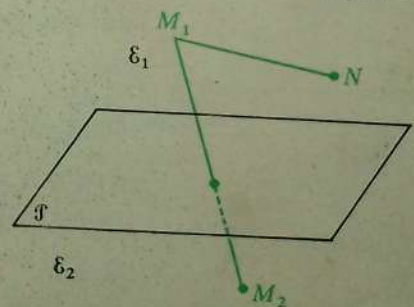


Figure 6

### POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES

Deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  de l'espace étant données, deux situations peuvent se présenter :

1°  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont **coplanaires**, c'est-à-dire incluses dans un même plan  $\mathcal{F}$ . Les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont alors, soit **sécantes** (figure 7), soit **parallèles** (figure 8).

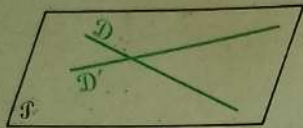


Figure 7

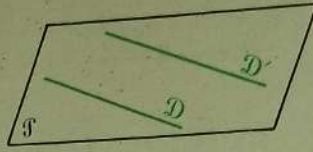


Figure 8

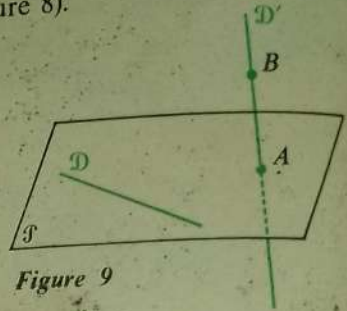


Figure 9

2°  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont **non coplanaires**, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun plan les contenant. C'est le cas, par exemple, d'une droite  $\mathcal{D}$  et d'une droite  $\mathcal{D}'$  passant par un point  $A$  n'appartenant pas à  $\mathcal{D}$  et par un point  $B$  n'appartenant pas au plan déterminé par  $A$  et  $\mathcal{D}$  (figure 9).

Deux droites non coplanaires n'ont aucun point commun.

### POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Une droite  $\mathcal{D}$  et un plan  $\mathcal{F}$  étant donnés, trois situations peuvent se présenter :

1°  $\mathcal{D}$  est incluse dans  $\mathcal{F}$  (figure 10).

2°  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{F}$  ont un point commun,  $A$ , et un seul (figure 11) : on dit alors que  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{F}$  sont **sécants** en  $A$ , ou se coupent en  $A$ .

3°  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{F}$  n'ont aucun point commun (figure 12).



Figure 10

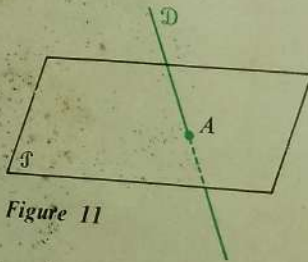


Figure 11

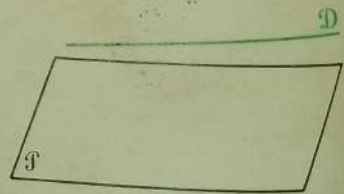


Figure 12

### POSITIONS RELATIVES DE DEUX PLANS

On démontre (voir l'exercice d'application 4) que deux plans distincts,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$ , ayant au moins un point commun,  $A$ , se coupent suivant une droite passant par  $A$ .

Deux plans  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  étant donnés, trois situations peuvent se présenter :

1°  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont **égaux** (on dit aussi **confondus**) : c'est le cas lorsqu'ils ont au moins trois points communs non alignés.

2°  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont **sécants** suivant une droite  $\mathcal{D}$  (figure 13).

3°  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  n'ont aucun point commun :  $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \emptyset$  (figure 14).

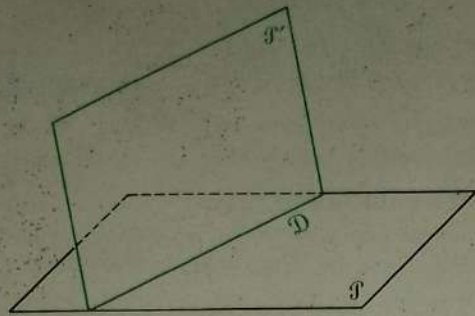


Figure 13

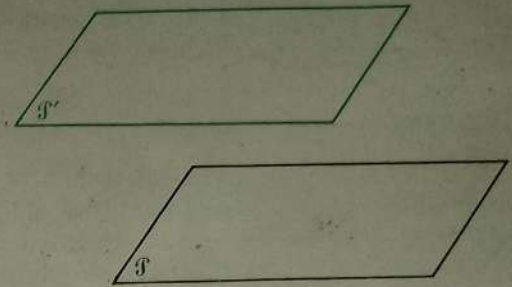


Figure 14

● Exercices d'application

1. Démontrer que trois droites, deux à deux sécantes, et non coplanaires, ont un point commun.

2. Soit dans un plan  $\mathcal{P}$ , deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sécantes en  $O$ . Une droite  $\Delta$  est sécante avec  $\mathcal{P}$  en un point  $A$  n'appartenant ni à  $\mathcal{D}$ , ni à  $\mathcal{D}'$ . Soit  $M$  un point de  $\Delta$  distinct de  $A$ .

1° Déterminer l'intersection,  $A'$ , des plans  $(M, \mathcal{D})$  et  $(M, \mathcal{D}')$ .

2° Lorsque  $M$  décrit  $\Delta$ , démontrer que les droites  $A'$  restent incluses dans un même plan fixe.

3. Soit  $Ox, Oy, Oz$  trois demi-droites non coplanaires, de même origine  $O$ . On marque deux points  $A$  et  $A'$  sur  $Ox$ , deux points  $B$  et  $B'$  sur  $Oy$  et deux points  $C$  et  $C'$  sur  $Oz$ . Les droites  $(BC)$  et  $(B'C')$ ,  $(CA)$  et  $(C'A')$ ,  $(AB)$  et  $(A'B')$  se coupent en général en  $\alpha, \beta, \gamma$ . Lorsque ces points existent, démontrer qu'ils sont alignés.

4. Soit deux plans distincts  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ , ayant au moins un point commun  $A$ . Le plan  $\mathcal{P}$  définit deux demi-espaces  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ . Soit  $\mathcal{D}$  une droite de  $\mathcal{P}'$  coupant  $\mathcal{P}$  en  $A, B$  un point de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{E}_1, C$  un point de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{E}_2$ . Soit  $D$  un point de  $\mathcal{P}'$  n'appartenant pas à  $\mathcal{D}$ .

1° Si  $D$  appartient à  $\mathcal{P}$ , que peut-on dire de l'intersection de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ ?

2° Si  $D$  n'appartient pas à  $\mathcal{P}$ ,  $D$  appartient à l'un des demi-espaces,  $\mathcal{E}_1$  par exemple. Qu'en résulte-t-il pour le segment  $[C, D]$ ?

3° Dédurre des questions 1° et 2° que deux plans distincts  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  ayant au moins un point commun sont sécants.

5. Soit un tétraèdre  $ABCD$  et  $E, F, G$  trois points pris respectivement sur  $]A, B[, ]A, C[$  et  $]A, D[$ . On suppose que  $(EF)$  n'est pas parallèle à  $(BC)$  et que  $(FG)$  n'est pas parallèle à  $(CD)$ . Construire l'intersection des plans  $(EFG)$  et  $(BCD)$ .

## II – PARALLÉLISME DANS L'ESPACE

### DROITES PARALLÈLES

#### Définition

On dit que deux droites de l'espace  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont **parallèles**, et on note  $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ , lorsqu'elles sont incluses dans un même plan et que dans ce plan elles sont parallèles.

Deux droites parallèles et distinctes n'ont pas de point commun. Deux telles droites, dites **strictement parallèles**, déterminent un plan (figure 15).

**Attention.** Dans l'espace il existe des droites d'intersection vide et non parallèles (les droites non coplanaires).

Deux droites d'intersection vide ne sont parallèles que si elles sont coplanaires.

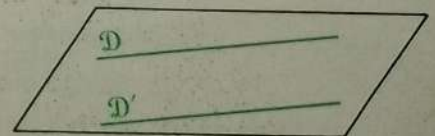


Figure 15

**Propriétés**

- 1° Il existe une droite, et une seule, passant par un point donné et parallèle à une droite donnée.
- 2° Lorsque deux droites sont parallèles tout plan qui coupe l'une coupe l'autre (figure 16).
- 3° Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles.

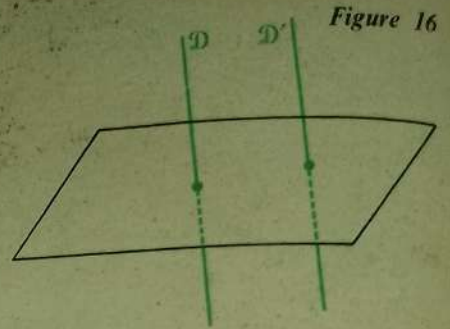


Figure 16

**Direction de droites**

Dans l'ensemble des droites de l'espace, la relation « est parallèle à » est appelée **relation de parallélisme de droites**. Elle est *réflexive* et *symétrique* par définition, *transitive* d'après la propriété 3°; c'est donc une relation d'équivalence.

L'ensemble des droites de l'espace parallèles à une droite donnée  $\mathcal{D}$  est la **direction** de  $\mathcal{D}$ ; notée  $d$ ; on dit aussi que  $\mathcal{D}$  a pour direction  $d$ .

D'après la propriété 1°, il existe une droite, et une seule, de direction donnée et passant par un point donné.

**DROITE ET PLAN PARALLÈLES**

**Définition**

On dit qu'une droite  $\mathcal{D}$  et un plan  $\mathcal{P}$  sont **parallèles**, et on note  $\mathcal{D} // \mathcal{P}$  :

- a) soit lorsque  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$  n'ont aucun point commun :  $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$ ;
- b) soit lorsque  $\mathcal{D}$  est incluse dans  $\mathcal{P}$  :  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ .

Lorsque  $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$ , la droite  $\mathcal{D}$  et le plan  $\mathcal{P}$  sont dits **strictement parallèles**. c'est le cas d'un plan  $\mathcal{P}$  et de la droite  $\mathcal{D}$  passant par un point  $A$  n'appartenant pas à  $\mathcal{P}$  et parallèle à une droite  $\Delta$  de  $\mathcal{P}$  (figure 17).

Une droite et un plan non parallèles sont **sécants**.

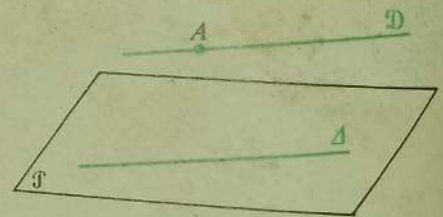
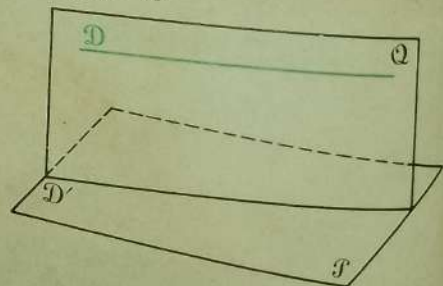


Figure 17

**Propriétés**

- 1° Lorsque deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre.
- 2° Lorsqu'une droite  $\mathcal{D}$  est parallèle à un plan  $\mathcal{P}$ , tout plan  $\mathcal{Q}$  contenant  $\mathcal{D}$  et sécant avec  $\mathcal{P}$  coupe  $\mathcal{P}$  suivant une droite  $\mathcal{D}'$  parallèle à  $\mathcal{D}$  (figure 18).

Figure 18



**PLANS PARALLÈLES**

**Définition**

On dit que deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont **parallèles**, et on note  $\mathcal{P} // \mathcal{P}'$  :

- a) soit lorsqu'ils n'ont aucun point commun :  $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$ ;
- b) soit lorsqu'ils sont égaux :  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ .

Lorsque  $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$ , les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont dits **strictement parallèles**. Deux plans non parallèles sont **sécants**.

**Propriétés**

1° Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à l'autre.

2° Lorsqu'un plan  $\mathcal{P}'$  contient deux droites respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan  $\mathcal{P}$ , il est parallèle à  $\mathcal{P}$  (figure 19).

3° Il existe un plan  $\mathcal{P}$ , et un seul, passant par un point donné et parallèle à un plan donné.

4° Lorsque deux plans sont parallèles :

- tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre;
- tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles (figure 20);
- toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre (figure 21);
- toute droite qui coupe l'un coupe l'autre (figure 22).

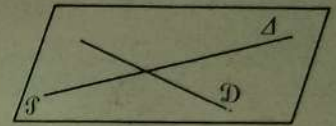
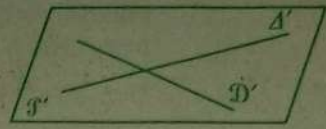


Figure 19

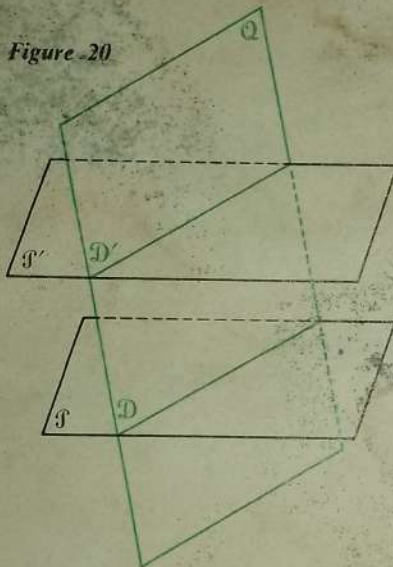


Figure 20

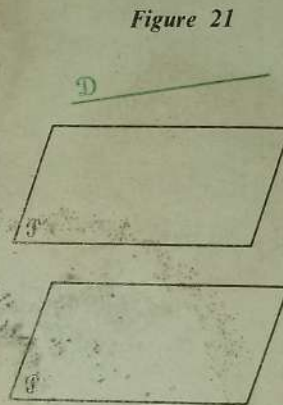


Figure 21

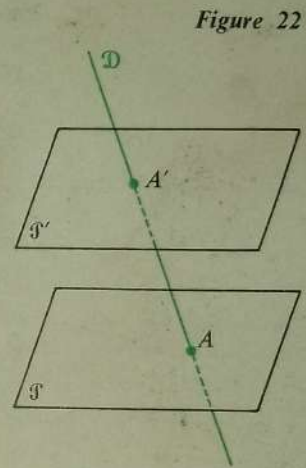


Figure 22

**Direction de plans**

Dans l'ensemble des plans de l'espace, la relation « est parallèle à » est appelée **relation de parallélisme de plans**. C'est une relation d'équivalence.

L'ensemble des plans de l'espace parallèles à un plan donné  $\mathcal{P}$  est la **direction** de  $\mathcal{P}$ , notée  $p$ ; on dit aussi que  $\mathcal{P}$  a pour direction  $p$ .

D'après la propriété 3°, il existe un plan unique de direction donnée et passant par un point donné.

Soit  $d$  une direction de droites et  $p$  une direction de plans.

Si une droite  $\mathcal{D}$  de direction  $d$  est parallèle à un plan  $\mathcal{P}$  de direction  $p$ , tout autre droite  $\mathcal{D}'$  de direction  $d$  est parallèle à tout autre plan  $\mathcal{P}'$  de direction  $p$  (figure 23).

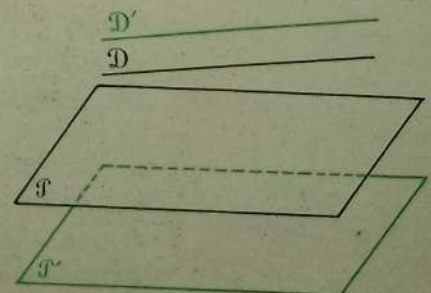


Figure 23