

MATHÉMATIQUES LYCÉE

2de-Ire-Tles

 **Fomesoutra**.com
ça soutra !

Lycée du Luxembourg

edby0h

CHAPITRE 1

Systèmes d'équations

1. Définition et exemple

Définition. Un *système linéaire de 2 équations à 2 inconnues* est un ensemble (Σ) de deux équations de la forme :

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

où (x, y) est le **couple d'inconnues** et a, b, c, a', b' et c' sont des constantes appelées **coefficients** du système et vérifiant les conditions $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. **Résoudre** le système revient à trouver le ou les couples $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui satisfont **simultanément** les deux équations (1) et (2). Ces couples sont les **solutions** du système.

Exemple. Considérons le système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} 2x + 3y = 8 & (1) \\ 7x - 4y = -1 & (2) \end{cases}$$

Intéressons-nous d'abord aux solutions de l'équation (1). Le couple $(1, 2)$ est une solution de cette équation, car $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$. Mais c'est loin d'être l'unique solution ! En effet il est facile de vérifier que $(-2, 4)$, $(-5, 6)$, $(\frac{5}{2}, 1)$, ... sont d'autres couples de solution de cette équation. En fait l'équation (1) admet une **infinité de solutions**. La **forme générale** de ces solutions peut s'obtenir en calculant y **en fonction** de x :

$$2x + 3y = 8 \Leftrightarrow 3y = 8 - 2x \Leftrightarrow y = \frac{8 - 2x}{3}.$$

Les solutions de (1) sont donc les couples de la forme $\left(x, \frac{8 - 2x}{3}\right)$ où x est un réel quelconque.

Par exemple : si $x = -2$ alors $y = \frac{8 - 2 \cdot (-2)}{3} = \frac{12}{3} = 4$, d'où la solution $(-2, 4)$.

De même, l'équation (2) admet une infinité de solutions. On trouve facilement que ce sont les couples de la forme $\left(x, \frac{7x + 1}{4}\right)$, où x est un réel quelconque. Par exemple : $(1, 2)$, $(2, \frac{15}{4})$, $(-3, 5)$, ...

Remarquons que le couple $(1, 2)$ est à la fois solution de (1) et de (2). C'est donc une solution du système (Σ) . Le système (Σ) admet-il d'autres solutions ? Les méthodes de résolutions exposées ci-dessous vont prouver que $(1, 2)$ est l'**unique** solution de (Σ) .

2. Méthodes de résolution

Reprenons le système (Σ) de l'exemple précédent.

a) Résolution par substitution (=remplacement)

On calcule y en fonction de x à l'aide de l'équation (1) :

$$2x + 3y = 8 \Leftrightarrow 3y = 8 - 2x \Leftrightarrow y = \frac{8 - 2x}{3} \quad (3)$$

On substitue l'équation (3) dans l'équation (2) :

$$7x - 4\left(\frac{8-2x}{3}\right) = -1 \quad / \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow 21x - 4(8-2x) = -3$$

$$\Leftrightarrow 21x - 32 + 8x = -3$$

$$\Leftrightarrow 29x = 29$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad (4)$$

Finalement on substitue (4) dans (3) :

$$y = \frac{8-2 \cdot 1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Le système admet donc une solution unique : $S = \{(1,2)\}$.

b) Résolution par combinaison linéaire

Combinons d'abord les équations (1) et (2) pour éliminer y :

$$4 \cdot (1) : \quad 8x + 12y = 32 \quad (1')$$

$$3 \cdot (2) : \quad 21x - 12y = -3 \quad (2')$$

$$(1') + (2') : \quad 29x = 29 \Leftrightarrow x = 1$$

Combinons maintenant les équations (1) et (2) pour éliminer x :

$$7 \cdot (1) : \quad 14x + 21y = 56 \quad (1'')$$

$$-2 \cdot (2) : \quad -14x + 8y = 2 \quad (2'')$$

$$(1'') + (2'') : \quad 29y = 58 \Leftrightarrow y = 2$$

On retrouve que $S = \{(1,2)\}$.

c) Méthode graphique

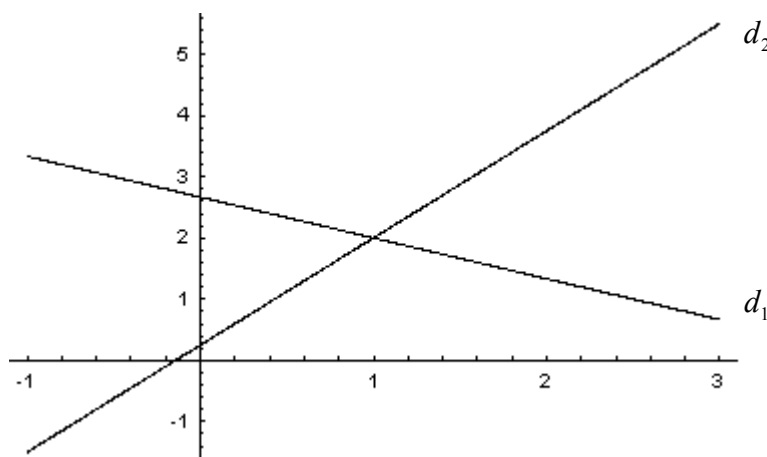
Si l'on rapporte le plan à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les équations (1) et (2) sont en fait les équations cartésiennes de deux droites, que nous notons d_1 et d_2 . Résoudre le système (Σ) revient à déterminer le point d'intersection de ces deux droites. Représentons graphiquement les deux droites.

$$d_1: 2x + 3y = 8$$

$$d_2: 7x - 4y = -1$$

x	-2	1	4
y	4	2	0

x	-3	1	5
y	-5	2	9



$$d_1 \cap d_2 = \{I(1,2)\}$$

3. Résolution générale par la méthode de Cramer

C'est le mathématicien suisse Gabriel Cramer (1704-1752) qui a introduit l'expression générale de la solution d'un système linéaire de n équations à n inconnues. Voici sa méthode dans le cas $n = 2$.

$$(\Sigma) \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

- Eliminons d'abord y :

$$b' \cdot (1) : \quad ab'x + bb'y = cb' \quad (1')$$

$$-b \cdot (2) : \quad -a'bx - bb'y = -c'b \quad (2')$$

$$(1') + (2') : \quad (ab' - a'b)x = cb' - c'b$$

On peut en déduire l'expression de x , à condition que $ab' - a'b \neq 0$. Alors :

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \quad (1.1)$$

- Eliminons de la même façon x :

$$a' \cdot (1) : \quad aa'x + a'by = a'c \quad (1'')$$

$$-a \cdot (2) : \quad -aa'x - ab'y = -ac' \quad (2'')$$

$$(1'') + (2'') : \quad (a'b - ab')y = a'c - ac' \quad / \cdot (-1)$$

$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c$$

Nous avons multiplié la dernière équation par -1 afin de faire précéder l'inconnue y du même coefficient que x (cf. ligne $(1') + (2')$). Donc si $ab' - a'b \neq 0$, on a :

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \quad (1.2)$$

Le système (Σ) admet donc une solution unique, à condition que l'expression $\Delta = ab' - a'b$ soit non nulle. Δ est appelé **déterminant du système** (Σ) , pour la simple raison que :

$$\Delta = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

Remarquons maintenant que les numérateurs de x et de y peuvent aussi être écrits sous forme d'un déterminant. En effet :

$$\Delta_x = cb' - c'b = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

Et de même :

$$\Delta_y = ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

Les déterminants Δ , Δ_x et Δ_y sont appelés **déterminants de Cramer**. En résumé, *si le déterminant du système Δ est non nul*, alors (Σ) admet la **solution unique** :

$$(x, y) = \left(\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \right) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \quad (1.6)$$

Règles mnémotechniques :

- Δ est formé des colonnes $\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$ des coefficients de x et de y du système (Σ) .
- Δ_x est obtenu en remplaçant dans Δ la colonne $\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$ par la colonne $\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$.
- Δ_y est obtenu en remplaçant dans Δ la colonne $\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$ par la colonne $\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$.

Exemple. Reprenons notre système du paragraphe 1.

$$(\Sigma) \begin{cases} 2x + 3y = 8 & (1) \\ 7x - 4y = -1 & (2) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 21 = -29 \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -32 + 3 = -29 \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 56 = -58 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{-29}{-29} = 1 \text{ et } y = \frac{-58}{-29} = 2 \\ S &= \{(1, 2)\} \end{aligned}$$

On peut se demander ce qui se passe lorsque le déterminant du système s'annule. Raisonnons géométriquement : soient d et d' les deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$. Le système (Σ) admet une **solution unique** si et seulement si d et d' sont **sécantes**, i.e. se coupent en un seul point. Pour cela il faut et il suffit que les deux **vecteurs directeurs** de d et d' soient **non colinéaires** i.e. que leur déterminant soit non nul. Or :

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } d \\ \vec{u}' \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } d' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \det(\vec{u}, \vec{u}') = \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -a'b + ab' = ab' - a'b = \Delta \quad !!$$

Donc : (Σ) admet une **solution unique**

$$\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ sont non colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{u}') \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta \neq 0$$

Si par contre $\Delta = 0$ c'est-à-dire $\det(\vec{u}, \vec{u}') = 0$, alors les deux droites d et d' sont **parallèles**.

- Si d et d' sont **strictement parallèles** alors (Σ) n'admet aucune solution : $S = \emptyset$.
- Si d et d' sont **confondues** ($d \cap d' = d = d'$) alors (Σ) admet une infinité de solutions ; ce sont tous les couples (x, y) vérifiant (1) ou (2) :

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / ax + by = c\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / a'x + b'y = c'\} \end{aligned}$$

Exemples.

- Soit le système de deux équations à deux inconnues

$$(\Sigma_1) \begin{cases} x - 2y = 1 & (1) \\ -2x + 4y = 3 & (2) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est nul : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - (-2) \cdot (-2) = 0$.

Il faut alors trancher la question si le système (Σ_1) admet une **infinité de solutions** ou **aucune solution**. Multiplions la 2^e équation par $-\frac{1}{2}$: $x - 2y = -\frac{3}{2}$ (2'). Nous voyons alors que les deux droites d'équations (1) et (2) sont **strictement parallèles**. Donc : $S = \emptyset$.

- Soit le système de deux équations à deux inconnues

$$(\Sigma_2) \begin{cases} 3x - 4y = 2 & (1) \\ -\frac{3}{2}x + 2y = -1 & (2) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est nul : $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-\frac{3}{2}) \cdot (-4) = 0$.

Multiplions la 2^e équation par -2 : $3x - 4y = 2$ (2'). Nous voyons alors que les deux équations (1) et (2) sont **équivalentes**, i.e. que les droites d'équations (1) et (2) sont **confondues**. Donc :

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 3x - 4y = 2\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 4y = 3x - 2\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{3x - 2}{4} \right\} \\ &= \left\{ \left(x, \frac{3x - 2}{4} \right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Le théorème suivant résume l'étude que nous venons de faire.

Théorème. Soit le système linéaire de 2 équations à 2 inconnues :

$$(\Sigma) \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

1. Si $\Delta \neq 0$ alors (Σ) admet une **solution unique** : $S = \left\{ \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \right\}$

2. Si $\Delta = 0$ alors (Σ) admet soit une **infinité de solutions**, soit **aucune** solution.

(a) Si les droites d'équations (1) et (2) sont **strictement parallèles** alors $S = \emptyset$

(b) Si les droites d'équations (1) et (2) sont **confondues** alors $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = c\}$

4. Systèmes linéaires de n équations à n inconnues

Définition. Un *système linéaire de 3 équations à 3 inconnues* est un ensemble (Σ) de trois équations de la forme :

$$(\Sigma) \begin{cases} ax + by + cz = d & (1) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (2) \\ a''x + b''y + c''z = d'' & (3) \end{cases}$$

où (x, y, z) est le *triplet d'inconnues* et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ et $(a'', b'', c'') \neq (0, 0, 0)$.

La méthode de Cramer pour les systèmes d'ordre 3 ne figure pas au programme de la 3^e. Dans l'exemple suivant, nous exposons toutefois un principe de résolution général.

Exemple et principe de résolution. Considérons le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$(\Sigma) \begin{cases} 2x - y - 3z = -6 & (1) \\ x + 3y + 4z = 10 & (2) \\ 3x - 2y - z = 2 & (3) \end{cases}$$

L'idée maîtresse de la résolution consiste à remplacer (Σ) par un système *équivalent*¹ plus simple : on retient une seule des trois équations formant (Σ) et on remplace les deux autres par des équations renfermant seulement 2 inconnues.

Ici nous choisissons de garder l'équation (2) et d'éliminer à l'aide de cette équation l'inconnue x dans les équations (1) et (3). Éliminons d'abord x dans l'équation (1) :

$$\begin{aligned} 2x - y - 3z &= -6 & (1) \\ -2 \cdot (2) : & -2x - 6y - 8z = -20 & (2') \\ (1) + (2') : & -7y - 11z = -26 \Leftrightarrow 7y + 11z = 26 & (1') \end{aligned}$$

Éliminons de même x dans l'équation (3) :

$$\begin{aligned} 3x - 2y - z &= 2 & (3) \\ -3 \cdot (2) : & -3x - 9y - 12z = -30 & (2'') \\ (3) + (2'') : & -11y - 13z = -28 \Leftrightarrow 11y + 13z = 28 & (3') \end{aligned}$$

Le système (Σ) est donc équivalent au système :

$$(\Sigma') \begin{cases} 7y + 11z = 26 & (1') \\ x + 3y + 4z = 10 & (2) \\ 11y + 13z = 28 & (3') \end{cases}$$

L'étape suivante consiste à résoudre le sous-système de (Σ') formé par les équations (1') et (3') :

$$(\Sigma'') \begin{cases} 7y + 11z = 26 & (1') \\ 11y + 13z = 28 & (3') \end{cases}$$

Utilisons la méthode de Cramer :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 11 & 13 \end{vmatrix} = 91 - 121 = -30 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 26 & 11 \\ 28 & 13 \end{vmatrix} = 338 - 308 = 30 \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 7 & 26 \\ 11 & 28 \end{vmatrix} = 196 - 286 = -90$$

¹ Deux systèmes sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

D'où : $y = \frac{30}{-30} = -1$ et $z = \frac{-90}{-30} = 3$.

Finalement on remplace ces valeurs dans l'équation (2) afin de déterminer x :

$$x + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 10 \Leftrightarrow x = 10 + 3 - 12 = 1$$

Le système (Σ) admet donc une solution unique : $S = \{(1, -1, 3)\}$.

Remarque. Trois cas particuliers de nature différente peuvent se présenter lors de la résolution d'un système linéaire d'ordre 3.

- a) Les 3 équations formant (Σ) sont toutes équivalentes.
- b) Le sous-système (Σ'') admet une infinité de solutions.
- c) Le sous-système (Σ'') n'admet aucune solution.

On verra dans les exercices comment il faut se débrouiller dans chacun de ces cas.

Pour un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues le principe de résolution est semblable : on conserve l'une des équations du système et on remplace les trois autres par des équations renfermant seulement 3 inconnues. On est ainsi ramené à la résolution d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues. On procède de façon semblable dans le cas général d'un système linéaire de n équations à n inconnues.

Exemple. Soit le système linéaire de 4 équations à 4 inconnues suivant :

$$(\Sigma) \begin{cases} x - y + z + t = 1 & (1) \\ 2x + y - 2z - 3t = -3 & (2) \\ -x + 2y + z - 3t = -7 & (3) \\ 3x + 2y - z + t = 11 & (4) \end{cases}$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 1 & (1) \\ 3y - 4z - 5t = -5 & (2') \\ y + 2z - 2t = -6 & (3') \\ 5y - 4z - 2t = 8 & (4') \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{On conserve (1) et on élimine } x \text{ dans (2), (3) et (4).} \\ \text{Remarquer que :} \end{array} \quad \begin{array}{l} (2') \Leftrightarrow -2 \cdot (1) + (2) \\ (3') \Leftrightarrow (1) + (3) \\ (4') \Leftrightarrow -3 \cdot (1) + (4) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 1 & (1) \\ y + 2z - 2t = -6 & (3') \\ 3y - 4z - 5t = -5 & (2') \\ 5y - 4z - 2t = 8 & (4') \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Le système formé par (2'), (3') et (4') a trois équations et} \\ \text{trois inconnues : } y, z \text{ et } t. \text{ On conserve (3') et on élimine} \\ y \text{ dans (2') et (4').} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 1 & (1) \\ y + 2z - 2t = -6 & (3') \\ -10z + t = 13 & (2'') \\ -14z + 8t = 38 & (4'') \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Remarquer que :} \\ (2'') \Leftrightarrow -3 \cdot (3') + (2') \\ (4'') \Leftrightarrow -5 \cdot (3') + (4') \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 1 & (1) \\ y + 2z - 2t = -6 & (3') \\ -10z + t = 13 & (2'') \\ -7z + 4t = 19 & (4''') \end{cases} \quad \text{On a divisé l'équation (4'') par 2.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 1 & (1) \\ y + 2z - 2t = -6 & (3') \\ -10z + t = 13 & (2'') \\ 33z = -33 & (4''') \end{cases}$$

On pourrait résoudre le système formé par (2'') et (4''') par la méthode de Cramer. On préfère ici éliminer t dans (4''') pour obtenir un système triangulaire : $(4''') \Leftrightarrow -4 \cdot (2'') + (4''')$

Le système ainsi obtenu est **triangulaire** : il y a 4 inconnues dans la première équation, 3 dans la 2^e, 2 dans la 3^e et une seule inconnue dans la dernière équation. Ce système se résout facilement "en cascade" : la dernière équation donne $z = -1$, (2'') donne ensuite $t = 3$, puis (3') donne $y - 2 - 6 = -6 \Leftrightarrow y = 2$ et finalement (1) donne $x - 2 - 1 + 3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

D'où : $S = \{(1, 2, -1, 3)\}$

Remarque. La méthode présentée ci-dessus est appelée **méthode du pivot de Gauss**². Le pivot est par définition le **coefficient non nul** de l'inconnue qu'on veut éliminer, dans l'équation que l'on conserve. Pour le système de l'exemple ci-dessus, le pivot est toujours 1 : c'est d'abord le coefficient de x dans (1), puis le coefficient de y dans (3') et enfin le coefficient de t dans (2'').

² Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fut l'un des mathématiciens les plus brillants de tous les temps.

CHAPITRE 2 : EQUATIONS ET INEQUATIONS

Partie A : Equations

1. Equations polynomiales

Définition. Une **équation polynomiale** d'inconnue x est une équation de la forme $p(x) = 0$, où p est un polynôme de degré ≥ 1 . Le degré de l'équation polynomiale est par définition le degré du polynôme p . Une solution de l'équation $p(x) = 0$ est appelée **racine du polynôme** p .

Retenons : **résoudre** l'équation $p(x) = 0$ revient à **rechercher les racines** du polynôme p .

Exemples.

- Voici une équation polynomiale de degré 2 :

$$x^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-3 = 0 \text{ ou } x+3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Règle du produit nul :
 $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$

L'**ensemble de solutions** de cette équation est : $S = \{-3, 3\}$

Les solutions -3 et 3 sont les racines du polynôme $p(x) = x^2 - 9$.

- L'équation $x^3 + 4x^2 - 4x + 5 = 0$ est polynomiale de degré 3.
- Attention :** l'équation $x(x+1) = x^2 + 3x + 2$ n'est pas, comme on pourrait le croire **à priori**, du 2^e degré. En effet, après réduction des termes semblables, on constate qu'elle est du 1^{er} degré :

$$x(x+1) = x^2 + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + x = \cancel{x^2} + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow x = 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

Avant de déterminer le degré d'une équation polynomiale, il faut **réduire les termes semblables**.



Remarque. Il est important d'identifier le degré d'une équation polynomiale avant de la résoudre. En effet, la méthode de résolution en dépend considérablement.

Le théorème suivant, que nous admettons, constitue un résultat important sur le **nombre de solutions** d'une équation polynomiale.

Théorème. Une équation polynomiale de degré $n \geq 1$ a **au plus** n solutions.

Exemples. Une équation du 2^e degré a donc soit 2 solutions, soit 1 solution, soit aucune solution. Montrons que toutes les situations sont possibles.

- $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$. Cette équation a 2 solutions distinctes.
- $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Cette équation a 1 solution.
- $x^2 = -1$ est impossible car un **carré est toujours positif**. Cette équation n'a donc pas de solution.



2. Equations du 1er degré

Définition. Une **équation du 1^{er} degré** d'inconnue x est une équation de la forme (ou équivalente à) $ax + b = 0$, où a et b sont des constantes réelles avec $a \neq 0$.

Remarque. Si $a = 0$ alors le terme ax s'annule et l'équation n'est pas du 1^{er} degré.

Théorème. Toute équation du 1^{er} degré a **exactement une solution**.

Démonstration. Soit $ax + b = 0$ une équation du 1^{er} degré, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Cette équation a donc une solution unique : $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$.

Exemples et contre-exemples.

▪ $2x + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x = -6$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

▪ $\frac{x}{2} - 3 = 2(x + 1) / \cdot 2$

$$\Leftrightarrow x - 6 = 4(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x - 6 = 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow x - 4x = 6 + 4$$

$$\Leftrightarrow -3x = 10 / \div (-3) \leftarrow \text{A partir de cette ligne, on est sûr qu'il s'agit d'une équation du 1^{er} degré.}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{10}{3}$$

▪ $\frac{x}{2} - \frac{x+1}{3} = \frac{x+5}{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{6} - \frac{2x+2}{6} = \frac{x+5}{6} / \cdot 6$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2x - 2 = x + 5$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = x + 5$$

$$\Leftrightarrow x - x = 5 + 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot x = 7$$

$$\Leftrightarrow 0 = 7$$

$$S = \emptyset$$

▪ $(x-1)^2 + 2(x-1) = x^2 - 1$

$$(x-1)^2 + 2(x-1) = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - \cancel{2x} + \cancel{2x} - 1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

$$S = \mathbb{R}$$

Est-ce une équation du 1^{er} degré ?

Non, car les monômes du 1^{er} degré disparaissent au cours de la réduction !

Est-ce une équation du 2^e degré ?

Non, car les carrés disparaissent ; mais l'équation n'est pas non plus du 1^{er} degré car les termes du 1^{er} degré se détruisent aussi !



3. Equations du 2e degré

A) Forme canonique, factorisation et racines d'un trinôme du second degré

Définition. Une **équation du 2^e degré** d'inconnue x est une équation de la forme (ou équivalente à) $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$.

Remarque. Si $a = 0$ alors le terme ax^2 s'annule et l'équation n'est pas du 2^e degré.

Exemples.

▪ $x^2 = 4$ (1)

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow x-2 = 0$ ou $x+2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

$S = \{2, -2\}$

$p(x) = x^2 - 4$ est un produit remarquable.

- Dans le cas particulier $c = 0$ on peut toujours résoudre l'équation en mettant x en évidence. Par exemple : $2x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(2x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $2x+6 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -3$

$S = \{0, -3\}$

▪ $x^2 = 3 + 2x$ (2)

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1-2)(x-1+2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x-3 = 0$ ou $x+1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -1$

$S = \{3, -1\}$

$p(x) = x^2 - 2x - 3$ n'est pas un produit remarquable.

Mais $x^2 - 2x$ est le **début d'un trinôme carré parfait**. D'où l'idée d'ajouter le carré manquant (+1) et de le retrancher ensuite (-1) ; dans la ligne suivante, on regroupe convenablement les termes, ce qui conduit à une **différence de 2 carrés**. Cette méthode est appelée **méthode du complément quadratique**.

▪ $4x^2 - 4x + 3 = 0$ (3)

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 - 1 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(2x-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2}_{> 0} = 0$

$S = \emptyset$

$p(x) = 4x^2 - 4x + 3$ ne peut pas être factorisé car c'est une **somme de 2 carrés**. ($2 = \sqrt{2}^2$)

$a^2 + b^2$ ne se factorise pas !

La méthode du complément quadratique, appliquée dans les deux derniers exemples aboutit à deux résultats totalement différents. L'équation (2) admet 2 solutions distinctes tandis que l'équation (3) n'admet aucune solution. En effet le polynôme dans l'équation (2) peut être factorisé en deux facteurs du premier degré contrairement au polynôme dans l'équation (3).

A quelle condition le polynôme $p(x) = ax^2 + bx + c$ peut-il être factorisé ? Le théorème suivant permettra de donner une réponse précise à cette question.

Proposition et définition. Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme (trinôme) du second degré. Il existe deux constantes u et v telles que : $(\forall x \in \mathbb{R}) p(x) = a(x-u)^2 + v$. Cette écriture est appelée **forme canonique** de $p(x)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 (\forall x \in \mathbb{R}) \quad p(x) &= ax^2 + bx + c \\
 &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \quad (a \neq 0) \\
 &= a \left(\underbrace{x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{grouper}} - \frac{b^2}{4a^2} + \underbrace{\frac{4ac}{4a^2}}_{\text{grouper}} \right) \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac \\
 &= a(x-u)^2 + v \quad \text{avec } u = -\frac{b}{2a} \text{ et } v = -\frac{\Delta}{4a}
 \end{aligned}$$



Définition. Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme $p(x)$.

Pour **factoriser** $p(x)$, remettons a en évidence : $p(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

1^{er} cas : $\Delta > 0$

Alors :

$$\begin{aligned}
 p(x) &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\
 &= a \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)
 \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, le polynôme p admet **deux racines distinctes**, à savoir :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

La factorisation de $p(x)$ est donc :

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

2^e cas : $\Delta = 0$

Alors on a :

$$p(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

Il en résulte que le polynôme p admet **une racine unique** (appelée encore **racine double**), à savoir :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \quad (= x_1 = x_2)$$

La factorisation de $p(x)$ est :

$$p(x) = a(x - x_0)^2$$

3^e cas : $\Delta < 0$

Alors :

$$p(x) = a \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\frac{-\Delta}{4a^2} \right)}_{> 0} \right] \neq 0.$$

Il en résulte que **l'équation** $p(x) = 0$ **n'admet pas de solution** et qu'il est impossible d'écrire $p(x)$ comme produit de deux polynômes du premier degré.

Le théorème suivant résume notre étude.

Théorème du second degré. Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré ($a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$ alors p admet deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

La factorisation de $p(x)$ est : $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

- Si $\Delta = 0$ alors p admet une racine double : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

La factorisation de $p(x)$ est : $p(x) = a(x - x_0)^2$

- Si $\Delta < 0$ alors p n'admet pas de racine et $p(x)$ ne se factorise pas.

Exemples :

- Reprenons le polynôme de l'équation (2) : $p(x) = x^2 - 2x - 3$. ($a = 1$, $b = -2$ et $c = -3$)

Le discriminant est : $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$.

Les racines sont : $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$.

- Reprenons le polynôme de l'équation (3) : $p(x) = 4x^2 - 4x + 3$. ($a = 4$, $b = -4$ et $c = 3$)

Le discriminant est : $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -32 < 0$. Ce polynôme n'a donc pas de racine.

Remarque : Lorsque $ac < 0$, c.-à-d. lorsque **a et c sont de signes contraires**, alors $4ac < 0$ et donc $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. On peut alors affirmer immédiatement que l'équation a deux racines distinctes.

B) Propriétés des racines de $ax^2 + bx + c$

Théorème de Viète¹ : somme et produit des racines d'un polynôme du second degré.

Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$) admet deux racines x_1 et x_2 (distinctes ou confondues, c.-à-d. $\Delta \geq 0$),

- leur **somme** $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- leur **produit** $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

De plus : $ax^2 + bx + c = a(x^2 - Sx + P)$

Remarque : Lorsque $\Delta = 0$, la somme des racines S est par définition : $S = x_0 + x_0 = 2x_0$ et le produit est $P = x_0 \cdot x_0 = x_0^2$.

Démonstration :

Soient $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ les racines de $ax^2 + bx + c$. Nous obtenons :

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} P &= x_1 \cdot x_2 \\ &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Il en résulte que : $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 - Sx + P)$

Exemple : Soit le trinôme $4x^2 + 5x + 1$ ($a = 4$, $b = 5$, $c = 1$). D'après le théorème de Viète :

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{4} \text{ et } P = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}.$$

Comme $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 > 0$, le trinôme admet deux racines, à savoir $x_1 = \frac{-5-3}{2 \cdot 4} = -1$

et $x_2 = \frac{-5+3}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{4}$. Donc effectivement $x_1 + x_2 = -\frac{5}{4}$ et $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{4}$

¹ François Viète : mathématicien français (1540-1603)

Remarque importante :

Si on arrive à trouver une racine évidente d'une équation du second degré, le théorème de Viète permet de **calculer rapidement l'autre sans passer par le discriminant**.

Exemple. Résoudre l'équation suivante sans passer par le discriminant : $2x^2 - 5x + 3 = 0$

_____ est racine évidente car _____

Pour trouver la 2^e racine, on utilise la formule $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ ou $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

C) Recherche de deux nombres dont on connaît la somme et le produit

Théorème : Soient S et P des réels donnés.

1) Deux réels u et v vérifient le système

$$\begin{cases} u + v = S \\ u \cdot v = P \end{cases} \quad (*)$$

si et seulement s'ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

2) Le système $(*)$ possède une solution si et seulement si $S^2 - 4P \geq 0$.

Démonstration :

1) $\Rightarrow$ Hypothèse : u et v vérifient $(*)$. Thèse : u et v sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$.

Preuve : u et v sont solutions de l'équation $(x - u)(x - v) = 0$

$\Rightarrow u$ et v sont solutions de l'équation $x^2 - vx - ux + uv = 0$

$\Rightarrow u$ et v sont solutions de l'équation $x^2 - (u + v)x + uv = 0$

$\Rightarrow u$ et v sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

(puisque par hypothèse $u + v = S$ et $uv = P$)

$\Leftarrow$ Hypothèse : u et v sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$. Thèse : u et v vérifient $(*)$.

Preuve : Comme u et v sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$, nous avons, d'après le théorème de

Viète : $u + v = -\frac{-S}{1} = S$ et $uv = \frac{P}{1} = P$. Les réels u et v vérifient ainsi le système $(*)$.

2) Le système $(*)$ possède une solution

$\Leftrightarrow$ l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ possède une solution, d'après 1)

$\Leftrightarrow \Delta = S^2 - 4P \geq 0$, d'après le théorème du second degré.

Exemples :

- 1) Chercher deux réels u et v tels que : $\begin{cases} u + v = 12,5 \\ u \cdot v = 25 \end{cases}$

- 2) Chercher deux réels u et v tels que : $\begin{cases} u + v = 1 \\ u \cdot v = 2 \end{cases}$

D) Signe des racines de $ax^2 + bx + c$

Théorème : Soit $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$) un polynôme du second degré admettant au moins une racine (c.-à-d. avec $\Delta \geq 0$). Soit S la somme et P le produit des racines.

Cas 1 : Si $P > 0$, alors les racines ont même signe (et sont non nulles).

a) Si $S > 0$, alors les racines sont positives.

b) Si $S < 0$, alors les racines sont négatives.

c) $S = 0$ est impossible dans ce cas.

Cas 2 : Si $P = 0$, alors au moins une des racines est 0 et l'autre a le signe de S .

Cas 3 : Si $P < 0$, alors les racines ont des signes opposés (et sont non nulles).

Exemple :

Etudier le signe des racines (s'il en existe) du trinôme $3x^2 + 5x - 14$, sans calculer ces racines.

4. Equations de degré ≥ 3

Si $p(x)$ est un polynôme de degré $n \geq 3$, alors on commence par chercher une **racine évidente (entière)** du polynôme. Pour cela on rappelle le résultat suivant, vu en 4^e :

Théorème 1. Soit $p(x)$ un polynôme de degré $n \geq 1$ **à coefficients entiers** :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ avec } a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$$

Si $u \in \mathbb{Z}$ est une racine entière de $p(x)$, alors u divise a_0 (terme constant).

Démonstration.

$u \in \mathbb{Z}$ est racine de $p(x)$

$$\Rightarrow p(u) = 0$$

$$\Rightarrow a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow u(a_n u^{n-1} + a_{n-1} u^{n-2} + \dots + a_1) = -a_0$$

$$\Rightarrow u \text{ est un diviseur de } a_0.$$

Exemple. Soit à résoudre l'équation

$$x^3 - 2x^2 + x - 12 = 0 \quad (*)$$

On doit chercher une racine évidente du polynôme $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 12$.

Ici : $a_3 = 1, a_2 = -2, a_1 = 1, a_0 = -12$.

- $\text{Div}(-12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$
- $p(1) = 1 - 2 + 1 - 12 \neq 0$
- $p(2) = 8 - 8 + 2 - 12 \neq 0$
- $p(3) = 27 - 18 + 3 - 12 = 0$

Donc 3 est racine évidente de $p(x)$ et solution de l'équation. On sait alors que $p(x)$ est divisible par $x - 3$. En effet, on vu en 4^e le théorème suivant (corollaire de la loi du reste) :

Théorème 2. Soit $p(x)$ un polynôme et a un nombre réel.

$$a \text{ est racine de } p(x) \Leftrightarrow p(x) \text{ est divisible par } (x - a)$$

Poursuivons la résolution de l'équation (*). Il faut diviser $p(x)$ par $x - 3$.

Schéma de Horner :

	1	-2	1	-12
3		3	3	12
	1	1	4	0

Donc : $p(x) = (x - 3)(x^2 + x + 4)$. Pour trouver les autres solutions de (2.8), il reste à déterminer les racines du trinôme $q(x) = x^2 + x + 4$. Or $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15 < 0$, donc $q(x)$ n'admet pas de racine. Ainsi l'ensemble de solutions de (*) se réduit à $S = \{3\}$.

5. Equation $x^n = a$

a) **Cas** $n=2$:

Nous savons depuis la 4^e que :

- Si $a > 0$ alors : $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
- Si $a = 0$ alors : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Si $a < 0$ alors : $x^2 = a$ est impossible car un carré est toujours ≥ 0

Exemples :

- $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$, donc $S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$
- $x^2 = -7$ est impossible : $S = \emptyset$
- $-2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = -8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$, donc $S = \{\pm 2\}$

b) **Cas** $n=3$

Nous admettons que pour tout réel a (donc **aussi pour les réels** < 0), l'équation $x^3 = a$ admet une **solution unique**, appelée **racine cubique de a** et notée $\sqrt[3]{a}$. Donc :

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad x^3 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a}$$

Exemples :

- $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$, donc $S = \{2\}$
- $x^3 = -125 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-125} = -5$, donc $S = \{-5\}$
- $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{0} = 0$, donc $S = \{0\}$
- $x^3 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{6} \approx 1.817120592832139...$ (nombre irrationnel), donc $S = \{\sqrt[3]{6}\}$
- $64x^3 = 27 \Leftrightarrow x^3 = \frac{27}{64} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$, donc $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

c) **Cas** $n \text{ pair} \geq 4$, analogue au cas $n=2$: pour tout réel $a > 0$, l'équation $x^n = a$ admet **deux solutions opposées**, la solution positive étant appelée **racine n^e de a** et notée $\sqrt[n]{a}$.

$(\forall n \geq 2 \text{ pair} \in \mathbb{N}) :$

- Si $a > 0$ alors : $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = -\sqrt[n]{a}$
- Si $a = 0$ alors : $x^n = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{0} = 0$
- Si $a < 0$ alors : $x^n = a$ est impossible car si n est pair alors x^n est toujours ≥ 0

Exemples :

- $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{16} = 2$ ou $x = -\sqrt[4]{16} = -2$, donc $S = \{-2, 2\}$
- $x^6 = 3^{12} \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{3^{12}} = 3^2 = 9$ ou $x = -\sqrt[6]{3^{12}} = -9$, donc $S = \{-9, 9\}$
- $x^8 = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt[8]{10} \approx 1.33352143216...$ ou $x = -\sqrt[8]{10}$, donc $S = \{\pm \sqrt[8]{10}\}$
- $x^4 = -12$ est impossible, $S = \emptyset$

d) **Cas** n impair ≥ 5 , analogue au cas $n = 3$: pour tout réel a (donc **aussi pour les réels** < 0), l'équation $x^n = a$ admet une **solution unique**, appelée **racine n^e de a** et notée $\sqrt[n]{a}$.

$$(\forall n \geq 3 \text{ entier impair})(\forall a \in \mathbb{R}) \quad x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$$

Exemples :

- $x^5 = 32 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2$, donc $S = \{2\}$
- $x^7 = 3^{42} \Leftrightarrow x = \sqrt[7]{3^{42}} = 3^6$ car $(3^6)^7 = 3^{42}$, donc $S = \{3^6\}$
- $x^9 = -40 \Leftrightarrow x = \sqrt[9]{-40} \approx 1.33352143216... \text{ ou } x = -\sqrt[9]{40}$, donc $S = \{\pm \sqrt[9]{40}\}$
- $x^4 = -12$ est impossible, $S = \emptyset$

Remarque :

- Si n est impair alors $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, par exemple : $\sqrt[9]{-40} = -\sqrt[9]{40}$
- Si n est pair, alors $\sqrt[n]{a}$ existe uniquement si $a \geq 0$ et dans ce cas $\sqrt[n]{a} \geq 0$, par exemple $\sqrt[4]{-6}$ n'existe pas !

6. Equations rationnelles (c.-à-d. contenant l'inconnue au dénominateur)

Méthode :

1. Ecrire les **conditions d'existence** : une fraction existe si et seulement si son dénominateur ne s'annule pas. Le **domaine de l'équation** est l'ensemble des réels pour lesquels l'équation a un sens.
2. Mettre toutes les fractions sur un dénominateur commun.
3. Multiplier l'équation par ce dénominateur commun pour se ramener à une équation polynomiale.
4. Résoudre l'équation polynomiale. **Attention** : une solution de l'équation polynomiale est solution de l'équation rationnelle donnée si et seulement si elle appartient au domaine de celle-ci.

Exemple.

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{4x}{x^2-4}$$

$$\frac{a}{b} \text{ existe} \Leftrightarrow b \neq 0$$

Conditions d'existence :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \\ x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x \neq -2 \end{cases}$$

Attention :

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

$$a \cdot b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ et } b \neq 0$$

$$\text{Domaine : } D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2, -2\}$$

$$(\forall x \in D)$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{4x}{x^2-4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{x(x+2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{4x^2}{x(x-2)(x+2)} \quad / \cdot x(x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2-4) + x^2 + 2x = 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 12 + x^2 + 2x = 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 12$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \in D$$

$$S = \{6\}$$

La solution est bien dans le domaine de l'équation initiale.

7. Equations irrationnelles (i.e. contenant des radicaux)

Exemple. Soit à résoudre l'équation

$$\sqrt{1-x} = 2x+1$$

On commence par déterminer le domaine de l'équation.

Conditions d'existence :

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \\ 2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{a} \text{ existe } \Leftrightarrow a \geq 0$$

$$\sqrt{a} = b \Rightarrow b \geq 0$$

$$\text{Donc : } D = \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$(\forall x \in D)$$

$$\sqrt{1-x} = 2x+1 \quad / \quad ()^2$$

$$\Leftrightarrow 1-x = (2x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 1-x = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(4x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4x+5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{5}{4}$$

$$S = \{0\}$$

On a le droit d'élever au carré les deux membres d'une équation **à condition qu'ils soient de même signe**. En particulier :

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}_+) \quad \sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2$$

La solution $x = -\frac{5}{4}$ est à exclure car elle n'est pas dans le domaine de l'équation.

Partie B : Inéquations

1. Rappel : Etude du signe d'un binôme du 1^{er} degré

Tableau du signe du binôme $ax + b$ lorsque $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b, a > 0$	$-$	0	$+$

Tableau du signe du binôme $ax + b$ lorsque $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b, a < 0$	$+$	0	$-$

Remarque. Il faut bien distinguer entre les cas $a > 0$ et $a < 0$. Retenons que **le signe de a se trouve toujours à droite dans le tableau.**

Exemple : Etude du signe de $-\frac{x}{2} + 3$.

Ce binôme s'annule pour $x = 6$. La constante a est égale à $-\frac{1}{2} < 0$, d'où le tableau du signe :

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-\frac{x}{2} + 3$	$+$	0	$-$

2. Inéquations du 2^e degré

Exemple. Soit l'inéquation du 2^e degré : $4x^2 \geq 9$. Comme dans le cas des équations, on commence par transporter tous les termes dans un membre, puis on factorise le membre non nul.

$$\begin{aligned}
 4x^2 &\geq 9 \\
 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow (2x - 3)(2x + 3) &\geq 0 \quad (*)
 \end{aligned}$$

Il faut ensuite étudier le **signe du produit** $(2x - 3)(2x + 3)$. Rappelons à cette occasion que :

Un produit de deux facteurs est **positif** ssi les deux facteurs ont **même signe**.

$$a \cdot b \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$$

Un produit de deux facteurs est **négatif** ssi les deux facteurs ont des **signes opposés**.

$$a \cdot b \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

En particulier :

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad a^2 \geq 0$$

Revenons à notre exemple. Etudions d'abord le signe des deux binômes $2x - 3$ et $2x + 3$.

▪ $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x - 3$		-	0		+

▪ $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x + 3$		-	0		+

D'où le **signe du produit** $(2x-3)(2x+3)$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x - 3$		-	-	-	0	+	
$2x + 3$		-	0	+	+	+	
$(2x - 3)(2x + 3)$		+	0	-	0	+	

D'après (*), on cherche les x tels que le produit $(2x - 3)(2x + 3)$ soit positif ou nul.

Donc : $S =]-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[$.

Remarque : Le tableau du signe précédent permet de résoudre d'autres inéquations. Par exemple :

- $4x^2 > 9 \Leftrightarrow (2x - 3)(2x + 3) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$
- $4x^2 \leq 9 \Leftrightarrow (2x - 3)(2x + 3) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$
- $4x^2 < 9 \Leftrightarrow (2x - 3)(2x + 3) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}[$

Généralisons : Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré. Pour résoudre une inéquation du type $p(x) \geq 0$ ou $p(x) \leq 0$, il faut étudier le signe de $p(x)$.

1^{er} cas : $\Delta > 0$

Alors on a : $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les deux racines distinctes de $p(x)$. Dans la suite nous supposons que $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$x - x_1$	—	0	+	+	+
$x - x_2$	—	—	—	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	—	0	+
$p(x)$ si $a > 0$	+	0	—	0	+
$p(x)$ si $a < 0$	—	0	+	0	—

En résumé :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$p(x)$	$\text{sgn}(a)$	0	$-\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(a)$

On retiendra la règle générale :

$ax^2 + bx + c$ a le signe de a sauf entre les racines	(i)
--	-----

Exemple. Soit à résoudre l'inéquation $2x^2 - 3x - 5 > 0$. Etudions le signe de $p(x) = 2x^2 - 3x - 5$.
On a : $\Delta = 9 + 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49$. Donc $p(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{3-7}{4} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}$$

Voici le tableau du signe de $p(x)$:

x	$-\infty$	-1		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x^2 - 3x - 5$	+	0	—	0	+

L'ensemble de solutions de l'inéquation est : $S =]-\infty, -1[\cup]\frac{5}{2}, +\infty[$.

2^e cas : $\Delta = 0$

Alors on a $p(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine double de $p(x)$.

Le carré $(x - x_0)^2$ est toujours positif. D'où le tableau du signe :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$(x - x_0)^2$	+	0	+
$p(x)$ si $a > 0$	+	0	+
$p(x)$ si $a < 0$	-	0	-

En résumé :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$(x - x_0)^2$	+	0	+
$p(x)$	$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(a)$

Remarquons que **la règle (i) est toujours valable**. En effet, comme il y a une seule racine, la région « entre les racines » n'existe pas. Voilà pourquoi $p(x)$ a toujours le signe de a , sauf pour $x = x_0$ où $p(x)$ s'annule.

Exemple. Etudions le signe du trinôme $p(x) = -9x^2 + 12x - 4$.

On a : $\Delta = 144 - 4 \cdot (-9) \cdot (-4) = 0$ et $x_0 = \frac{-12}{-18} = \frac{2}{3}$.

D'où le tableau du signe de $p(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$-9x^2 + 12x - 4$	-	0	-

Remarque. On aurait pu déduire ce tableau du fait (élémentaire) que $p(x) = -(3x - 2)^2$.

D'où :

- L'inéquation $-9x^2 + 12x - 4 < 0$ admet comme solutions : $S =]-\infty, \frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$.
- L'inéquation $-9x^2 + 12x - 4 \leq 0$ est toujours vraie : $S = \mathbb{R}$.
- L'inéquation $-9x^2 + 12x - 4 > 0$ n'a pas de solution : $S = \emptyset$.
- L'inéquation $-9x^2 + 12x - 4 \geq 0$ a une solution unique : $S = \{\frac{2}{3}\}$.

3^e cas : $\Delta < 0$

D'après le résultat de la page 5 :

$$p(x) = a \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)}_{> 0} \right].$$

Il en résulte que $p(x)$ a toujours le signe de a .

x	$-\infty$	$+\infty$
$p(x)$	$\text{sgn}(a)$	

Exemple. Le trinôme $x^2 + x + 5$ est toujours > 0 . En effet : $\Delta = 1 - 20 = -19 < 0$ et $a = 1 > 0$. D'où :

- L'inéquation $x^2 + x + 5 > 0$ est toujours vraie : $S = \mathbb{R}$.
- L'inéquation $x^2 + x + 5 \geq 0$ est toujours vraie : $S = \mathbb{R}$.
- Les inéquations $x^2 + x + 5 < 0$ et $x^2 + x + 5 \leq 0$ n'ont pas de solution : $S = \emptyset$.

Règle générale :

Le **signe d'un trinôme** $ax^2 + bx + c$ du second degré est partout le signe de a , sauf entre les racines (si elles existent).



3. Inéquations de degré ≥ 3

Méthode :

1. Transporter tous les termes dans un membre.
2. Factoriser le membre non nul en facteurs du 1^{er} ou du 2^e degré.
3. Etablir le tableau du signe du produit.
4. Ecrire l'ensemble de solutions de l'inéquation.

Exemples.

$$x^3 + x^2 + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) + (x+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) \geq 0 \quad (*)$$

Remarquons que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 + 1 > 0$. D'où le tableau du signe suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$
$(x+1)(x^2+1)$	$-$	0	$+$

L'ensemble de solutions de l'inéquation est donc : $S = [-1, +\infty[$.

- Il arrive qu'un facteur soit présent avec un exposant supérieur à 1. Par exemple :

$$4x^3 - 4x^2 - x > 0$$

$$\Leftrightarrow x(4x^2 - 4x - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow x(2x - 1)^2 > 0$$

Remarquons que le **carré** $(2x - 1)^2$ est toujours ≥ 0 . Il s'annule lorsque $2x - 1 = 0$, c.-à-d. lorsque $x = \frac{1}{2}$. D'où le tableau du signe :

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(2x - 1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$x(2x - 1)^2$	$-$	0	$+$	0	$+$

L'ensemble de solutions est : $S =]0, +\infty[\setminus \{\frac{1}{2}\}$.

Dans d'autres exemples des facteurs peuvent apparaître avec l'exposant 3, 4 ou plus. On pourra donc réfléchir à la question importante : quel est le signe de a^3 , de a^4 , de a^5 etc. Quelle est la règle générale ?

4. Inéquations rationnelles (avec l'inconnue au dénominateur)

- Finalement, nous traitons un exemple où l'inconnue figure au dénominateur.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2} \leq \frac{1}{x}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Tous les termes sont transportés dans le premier membre.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2(x-1)} - \frac{2(x-1)}{x^2(x-1)} - \frac{x(x-1)}{x^2(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x}{x^2(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x + 2}{x^2(x-1)} \leq 0$$

Le premier membre est factorisé !

Attention. La méthode diffère fondamentalement de la résolution d'une équation quant au point suivant : **on ne peut pas ici éliminer le dénominateur commun** par multiplication. En effet nous savons que si l'on multiplie une inéquation par un réel, le sens de l'inéquation change ou se conserve, suivant le signe de ce réel. Or : le signe de $x^2(x-1)$ **n'est pas constant**, car $x-1$ change de signe en $x=1$.

Voilà pourquoi les facteurs du dénominateur apparaissent également dans le tableau du signe.

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$-x+2$	+	+	+	+	+	0	-
x^2	+	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{-x+2}{x^2(x-1)}$	-		-		+	0	-

$$S =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup [2, +\infty[.$$

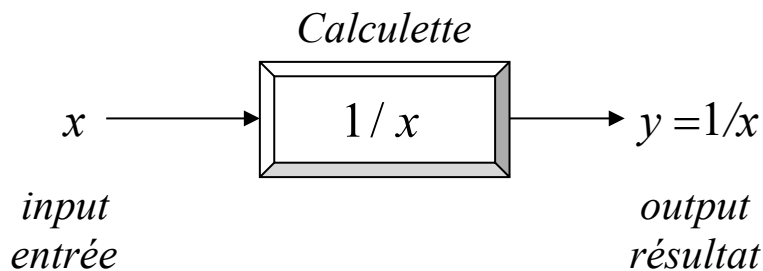
Les **doubles barres** dans la dernière ligne du tableau signifient que pour $x = 0$ et $x = 1$ la fraction n'existe pas.

CHAPITRE 3

Fonctions numérique d'une variable réelle

1. Introduction. Définition.

Déterminons à l'aide d'une calculette les inverses de quelques nombres réels. On peut schématiser cette opération de la manière suivante :

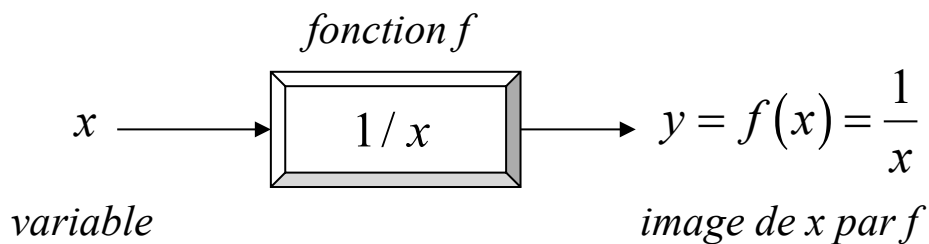


Le résultat y dépend de l'entrée x . On dit que y **est fonction de** x .

Exemples :

- $x = 2 \Rightarrow y = 0,5$
- $x = 0,25 \Rightarrow y = 4$
- $x = -5 \Rightarrow y = -0,2$
- $x = 0 \Rightarrow \text{ERROR}$ car l'inverse de 0 n'existe pas.

En mathématiques, on utilise une terminologie différente :



x est appelé **variable** puisque x peut prendre n'importe quelle valeur (sauf 0 dans l'exemple).

Exemples :

- | | |
|-----------------|-------------------------|
| ▪ $f(2) = 0,5$ | ▪ $f(-5) = -0,2$ |
| ▪ $f(0,25) = 4$ | ▪ $f(0)$ n'existe pas ! |

On note la fonction f de la manière suivante :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Remarquer les flèches différentes entre les ensembles ($\rightarrow$) et leurs éléments ($\mapsto$) !

Souvent on ne précise pas les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction, c'est toujours $\mathbb{R}$ dans notre cours. On écrit simplement :

$$f: x \mapsto \frac{1}{x}$$

Une fonction f est donc comparable à une calculatrice qui, à chaque fois qu'on lui passe un nombre x , nous fournit **au plus** un résultat $f(x)$. Plus précisément :

Définitions.

a) Une **fonction numérique** d'une variable réelle f est une **relation** qui associe à tout nombre réel x **au plus un** réel $y = f(x)$.

b) Lorsque $f(x) = y$, on dit que :

a) y est l'**image** de x par f .

b) x est un **antécédent** de y par f .

Remarque importante : Ne pas confondre entre f (fonction) et $f(x)$ (nombre réel).

Exemples. Soit $f: x \mapsto x^2$.

L'image de 3 par f est $3^2 = 9$: $f(3) = 9$

L'image de -5 par f est $(-5)^2 = 25$: $f(-5) = 25$

L'image de 0 par f est :

Les antécédents de 4 par f sont 2 et -2 car : $f(2) = 4$ et $f(-2) = 4$

Quels sont les antécédents de 7 par f ?

.....

Est-ce que -9 a un antécédent par f ?

.....

Retenons :

- Un réel x a **au plus 1 image** par une fonction **mais** :
- Un réel y peut avoir **plusieurs antécédents** par une fonction.

Exercice 1

On considère les fonctions $f: x \mapsto x^2 - x$ et $g: x \mapsto \frac{1}{x+1}$.

(1) Calculer : $f(3)$, $-f(-5)$, $f(\frac{1}{2}) - f(-\frac{4}{3})$.

(2) Calculer si possible : $g(-3)$, $g(1) - g(0)$, $g(-1)$.

(3) Déterminer les antécédents a) de 5 et b) de 0 par g .

Exercice 2

Déterminer par le calcul les antécédents a) de 3 b) de 0 par la fonction $f: x \mapsto x^2 - 2x$

2. Domaine d'une fonction

Définition. Soit f une fonction numérique d'une variable réelle. Le **domaine** de f ou **ensemble de définition** de f , noté $\text{dom } f$, est l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe.

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe}\}$$

Exemples :

- Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x}$. On a :

$$x \in \text{dom } f \Leftrightarrow x \neq 0, \text{ car } \textbf{on n'a pas le droit de diviser par 0 !}$$

Donc : $\text{dom } f = \mathbb{R}^*$.

- Soit la fonction $g: x \mapsto \sqrt{x+2}$. On a :

$$x \in \text{dom } g \Leftrightarrow x+2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2$$

Donc : $\text{dom } g = [-2, +\infty[$. Réviser les **intervalles** : voir manuel p. 51 !

- Soit la fonction $h: x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}$. On a les **conditions d'existence** :

$$\text{C.E. : 1) } x \geq 0 \text{ et } x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x \neq -2$$

Donc : $\text{dom } h = \mathbb{R}_+ \setminus \{2\}$

Voici quelques **conditions d'existence** à retenir :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \text{ existe} &\Leftrightarrow b \neq 0 \\ \sqrt{a} \text{ existe} &\Leftrightarrow a \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ existe} &\Leftrightarrow a > 0 \\ \frac{\sqrt{a}}{b} \text{ existe} &\Leftrightarrow a \geq 0 \text{ et } b \neq 0 \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ existe} &\Leftrightarrow a \geq 0 \text{ et } b > 0 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Exercice 3

Déterminer le domaine des fonctions suivantes :

(1) $f: x \mapsto \frac{3x-2}{4x+7}$

(5) $l: x \mapsto \sqrt{x^2+2x}$

(2) $g: x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{8-3x}$

(6) $m: x \mapsto \sqrt{\frac{2x-1}{3x+5}}$

(3) $h: x \mapsto \sqrt{x^2-9}$

(7) $n: x \mapsto \frac{x}{x+1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3}{1-2x^2}$

(4) $k: x \mapsto \frac{x^2+1}{\sqrt{25-4x^2}}$

(8) $p: x \mapsto \frac{3}{\sqrt{x+4}} - \frac{\sqrt{4-2x}}{5}$

Exercice 4 (plus difficile)

Déterminer le domaine des la fonctions suivantes :

$$(1) \quad f: x \mapsto \frac{12}{x^3 - 3x^2 - 2x + 6} + \sqrt{\frac{5-2x}{x-1}}$$

$$(2) \quad g: x \mapsto \frac{\sqrt{2x^2 - x - 3}}{x^3 - 2x}$$

$$(3) \quad h: x \mapsto \frac{3x^7 - 5x}{\sqrt{1 - 3x - 4x^2}}$$

$$(4) \quad k: x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x^2 + 1}$$

$$(5) \quad l: x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 - 4}{2x^2 - x - 1}}$$

$$(6) \quad m: x \mapsto \sqrt{24 - 2x - x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$(7) \quad n: x \mapsto \frac{\sqrt{3-x}}{x^2 + 5x - 6}$$

3. Représentation graphique d'une fonction

Représenter graphiquement une fonction f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan signifie : dessiner tous les points aux coordonnées (x, y) tels que $x \in \text{dom } f$ et $y = f(x)$.

Définition. La **courbe représentative** ou **graphe** d'une fonction f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, notée $\mathcal{C}_f$ ou $\mathcal{G}_f$, est l'ensemble des points (x, y) tels que $x \in \text{dom } f$ et $y = f(x)$. L'équation $y = f(x)$ est appelée **équation (cartésienne) de la courbe** dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$\mathcal{G}_f = \left\{ (x, y) / x \in \text{dom } f \text{ et } y = f(x) \right\}$$

Exercice 4

Représenter graphiquement dans un repère orthonormé du plan les fonctions suivantes après en avoir dressé un **tableau des images** et donner une équation de chaque courbe :

$$f: x \mapsto x, \quad g: x \mapsto x^2, \quad h: x \mapsto |x|, \quad c: x \mapsto x^3, \quad i: x \mapsto \frac{1}{x}$$

Exercice 5

Représenter graphiquement les fonctions suivantes (**fonctions affines**) :

$$f: x \mapsto 2x - 1$$

$$h: x \mapsto \frac{x}{2} - 3$$

$$j: x \mapsto 3 - 2x$$

$$g: x \mapsto -x + 4$$

$$i: x \mapsto \frac{2x}{3}$$

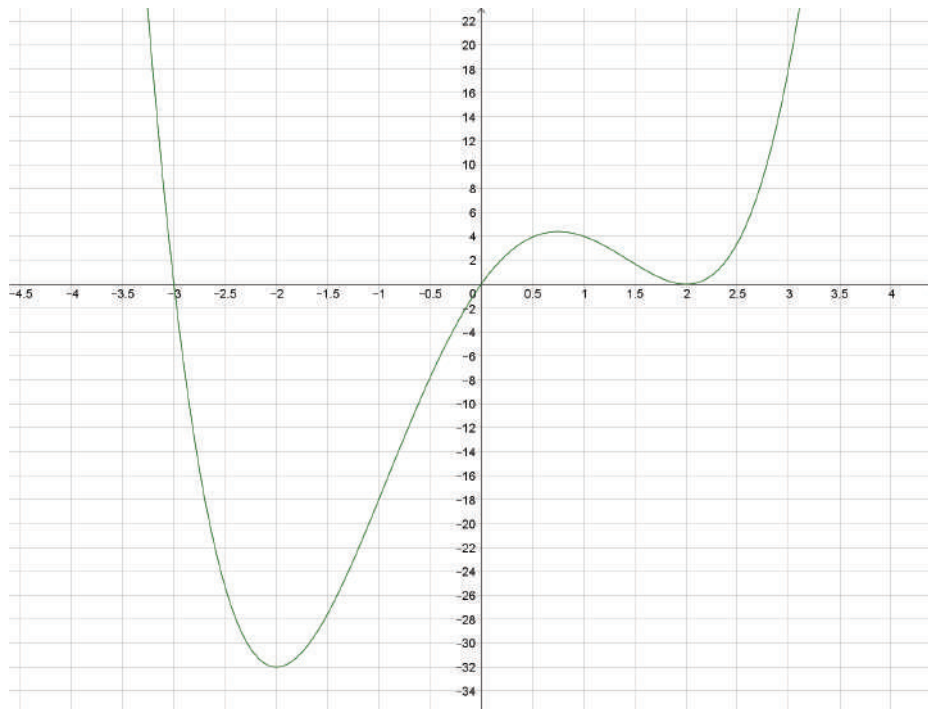
$$k: x \mapsto -\frac{7}{5}x + 1$$

$$l: x \mapsto -3$$

Définition. Une **fonction affine** est une fonction de la forme $f: x \mapsto ax + b$, où a et b sont des constantes réelles. Le graphe de f dans un repère du plan est alors la **droite** d'équation $y = ax + b$. a est la **pente (coefficient directeur)** et b est l'**ordonnée à l'origine** de cette droite. Si $a = 0$ alors on dit que la fonction est

Exercice 6

Voici la représentation graphique d'une fonction f .



- (1) Déterminer graphiquement les images par f de $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.
- (2) Déterminer graphiquement les réels x solutions de l'équation $f(x) = 4$. (Ce sont les **antécédents** de 4.)
- (3) Déterminer graphiquement les réels x solutions de l'équation $f(x) = 0$ (Ce sont les **racines** de f , voir définition ci-dessous.)
- (4) Donner un exemple d'un réel n'ayant a) aucun antécédent, b) exactement 2 antécédents et c) exactement 1 antécédent par f .

Définition.

- a) **Rappel** : Un **antécédent** d'un réel y par une fonction f est une solution x de l'équation $f(x) = y$.
- b) **En particulier** : une **racine** de f est une solution de l'équation $f(x) = 0$. **Graphiquement**, les racines d'une fonction sont les **abscisses** des points d'intersection du graphe de f avec l'axe des abscisse.

Exercice 7

On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x + 2}$.

- (1) Quel est le domaine de f ?
- (2) Simplifier l'expression de $f(x)$ pour tout x appartenant au domaine.
- (3) Faire un tableau des images de f .
- (4) Représenter graphiquement f .

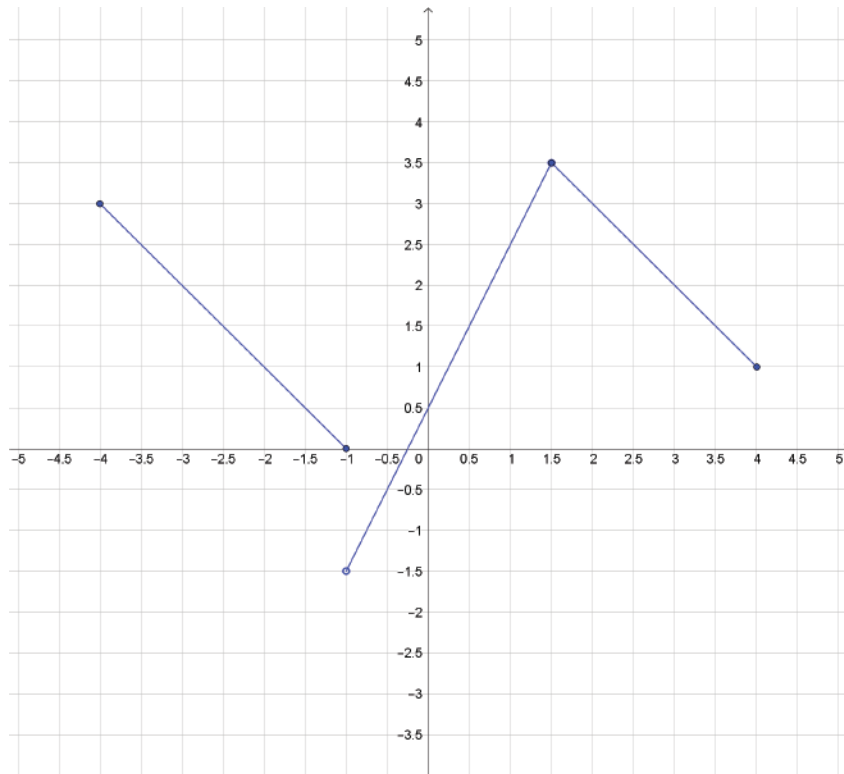
Exercice 8

Pour chacune des fonctions suivantes du 2^e degré, déterminer le domaine et en tracer le graphe (version « manuelle » + version Geogebra) dans un repère orthonormé du plan :

- (1) $f: x \mapsto x^2 - 1$
- (2) $g: x \mapsto 2x - x^2$
- (3) Compléter : Le graphe d'une fonction du second degré est une
- (4) Déterminer **algébriquement** et **graphiquement**
 - a) les antécédents de 3 et par f et par g .
 - b) les antécédents de -1 et par f et par g .

Exercice 9

Voici le graphe (complet) d'une fonction f définie « *par morceaux* » :



- (1) Quel est le domaine de f ?
- (2) Quelles sont les racines de f ?
- (3) Compléter le tableau des images suivant de f :

x	-4	-2.5	-1	-0.5	0	1	1.5	2	3
$f(x)$									

- (4) Résoudre graphiquement (donner l'ensemble de solutions !) :

a) $f(x) = 2.5$	f) $f(x) > 0$
b) $f(x) > 2.5$	g) $f(x) \leq 0$
c) $f(x) < 2.5$	h) $f(x) < 5$
d) $f(x) \geq 2$	i) $f(x) \geq 7$
e) $1 \leq f(x) \leq 2$	j) $1 < f(x) \leq 2$
- (5) Donner une expression de $f(x)$ sur les différents sous-intervalles du domaine.

5. Parité d'une fonction.

Définition. Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit **symétrique par rapport à 0**, si
 $(\forall x) \quad x \in E \Leftrightarrow -x \in E$

Exemples :

- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ sont symétriques par rapport à 0.
- $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ et $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ sont symétriques par rapport à 0.
- $[-3, 3]$ est symétrique par rapport à 0.
- $\mathbb{R}_+$ n'est pas symétrique par rapport à 0.

Définition. Soit f une fonction telle que $\text{dom } f$ soit symétrique par rapport à 0.

- f est **paire** ssi $(\forall x \in \text{dom } f) \quad f(-x) = f(x)$
- f est **impaire** ssi $(\forall x \in \text{dom } f) \quad f(-x) = -f(x)$

Remarque : L'égalité $f(-x) = f(x)$ a un sens si et seulement si x et $-x$ appartiennent simultanément à $\text{dom } f$. Voilà pourquoi il faut que $\text{dom } f$ soit symétrique par rapport à 0.

Exemples :

- $f: x \mapsto x^2$ est paire car $\text{dom } f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

- $g: x \mapsto x^3$ est impaire car $\text{dom } g = \mathbb{R}$ et : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.
- $h: x \mapsto 3 \cdot |x| - 2$ est paire car $\text{dom } h = \mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) \quad h(-x) &= 3 \cdot |-x| - 2 \\ &= 3 \cdot |x| - 2 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

- $k: x \mapsto x^{-5} = \frac{1}{x^5}$ est impaire car $\text{dom } k = \mathbb{R}^*$ et :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad k(-x) = (-x)^{-5} = -x^{-5} = -k(x).$$

- $r: x \mapsto \sqrt{x}$ n'est ni paire ni impaire car $\text{dom } k = \mathbb{R}_+$ n'est pas symétrique par rapport à 0.
- $u: x \mapsto 4x^2 + 3x$ n'est ni paire ni impaire. En effet :

$$u(1) = 7 \text{ et } u(-1) = 1 \text{ donc : } u(-1) \neq u(1) \text{ et } u(-1) \neq -u(1).$$

Pour démontrer qu'une fonction n'est ni paire ni impaire, il suffit de donner un **contre-exemple** !

Exercice 10

Etudier la parité des fonctions suivantes :

(1) $f: x \mapsto -3x^4 + 2x^2 + \frac{1}{2x^6}$

(5) $l: x \mapsto \frac{x}{|x| - 3}$

(2) $g: x \mapsto x^2(x + 2x^5)$

(6) $m: x \mapsto |1 + x| + |1 - x|$

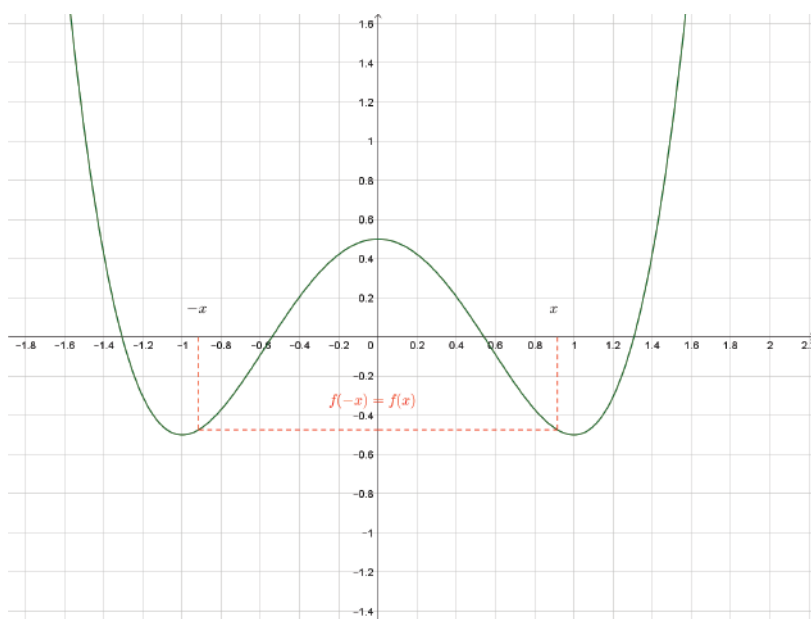
(3) $h: x \mapsto \frac{x}{x^3 - 4x}$

(7) $n: x \mapsto \sqrt{2x + 3}$

(4) $k: x \mapsto \sqrt{4x^2 - 9}$

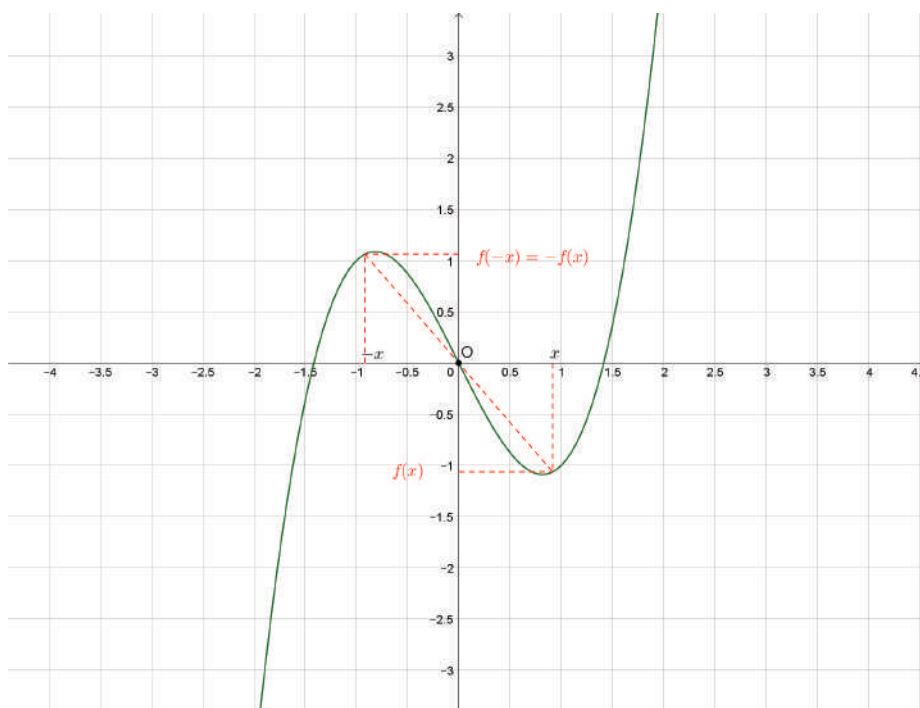
(8) $p: x \mapsto |x| + x$

Représentation graphique d'une *fonction paire*



f est paire $\Leftrightarrow \mathcal{G}_f$ est symétrique par rapport à (Oy) .

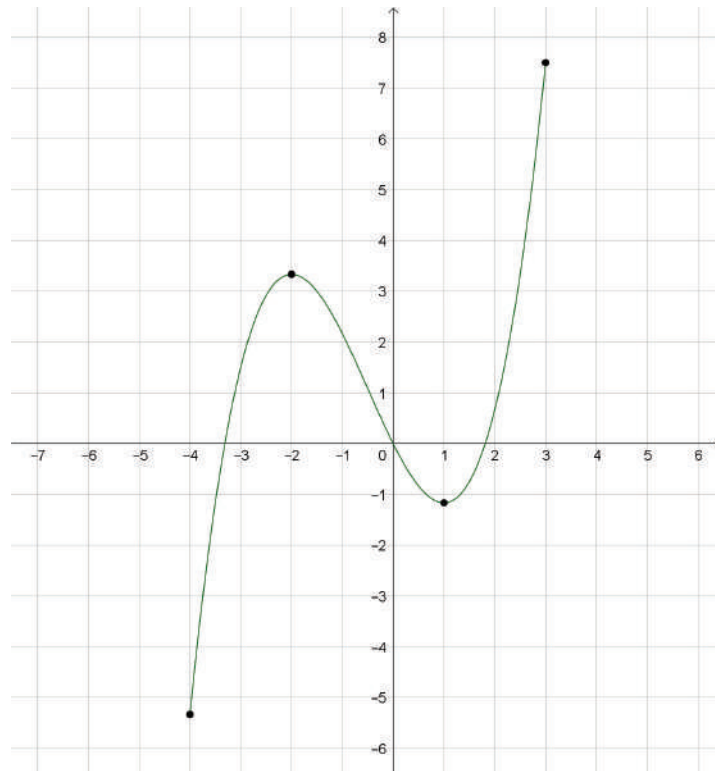
Représentation graphique d'une *fonction impaire*



f est impaire $\Leftrightarrow \mathcal{G}_f$ est symétrique par rapport à O .

6. Sens de variation d'une fonction.

Voici le graphe de la fonction f définie sur $[-4,3]$ par $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$.



On observe que :

- Si x varie de -4 à -2, alors $f(x)$ croît. On dit que f est **croissante** sur $[-4, -2]$.
- Si x varie de -2 à 1, alors $f(x)$ décroît. On dit que f est **décroissante** sur $[-2, 1]$.
- Si x varie de 1 à 3, alors $f(x)$ croît à nouveau. f est **croissante** sur $[1, 3]$.

On résume les variations de f dans un **tableau des variations** :

x	-4	-2	1	3
$f(x)$				

Calculs :

$f(-4) = \dots\dots\dots$

$f(-2) = \dots\dots\dots$

$f(1) = \dots\dots\dots$

$f(3) = \dots\dots\dots$

Définition. Soit f une fonction numérique et E un sous-ensemble de son domaine.

- f est **croissante** sur E ssi $(\forall x, x' \in E) \quad x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$.
- f est **strictement croissante** sur E ssi $(\forall x, x' \in E) \quad x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$.
- f est **décroissante** sur E ssi $(\forall x, x' \in E) \quad x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$.
- f est **strictement décroissante** sur E ssi $(\forall x, x' \in E) \quad x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$.
- f est **monotone** sur E ssi f est croissante ou décroissante sur E .
- f est **strictement monotone** sur E ssi f est str. croissante ou str. décroissante sur E .

Dans l'exemple ci-dessus on a donc :

- f est strict. croissante sur $[-4, -2]$ et sur $[1, 3]$.
- f est strict. décroissante sur $[-2, 1]$.
- f est (strictement) monotone sur $[-4, -2]$, sur $[-2, 1]$ et sur $[1, 3]$.
- f n'est pas monotone sur $[-4, 1]$.

Remarques :

- Si f est paire et croissante sur $[a, b]$, alors elle est décroissante sur $[-b, -a]$.
- Si f est paire et décroissante sur $[a, b]$, alors elle est croissante sur $[-b, -a]$.
- Si f est impaire et croissante sur $[a, b]$, alors elle est croissante sur $[-b, -a]$.
- Si f est impaire et décroissante sur $[a, b]$, alors elle est décroissante sur $[-b, -a]$.

Pour comprendre ces remarques, faire une figure !!!

Il résulte de ces remarques que si une fonction f est paire ou impaire, alors il suffit d'étudier son sens de variation sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_-$ par symétrie.

Exercice 11

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes et résumer votre étude dans un tableau de variation. Utiliser la parité de la fonction si possible.

(1) $f: x \mapsto x^2 - 1$

(4) $k: x \mapsto -\frac{x}{3} + 1$

(2) $g: x \mapsto \frac{1}{x}$

(5) $r: x \mapsto 3 \cdot |x| - 2$

(3) $h: x \mapsto 2x - 4$

Exercice 12

Etudier le sens de variation de la fonction d'une fonction affine $f: x \mapsto ax + b$, a et b étant des constantes.

Exercice 13

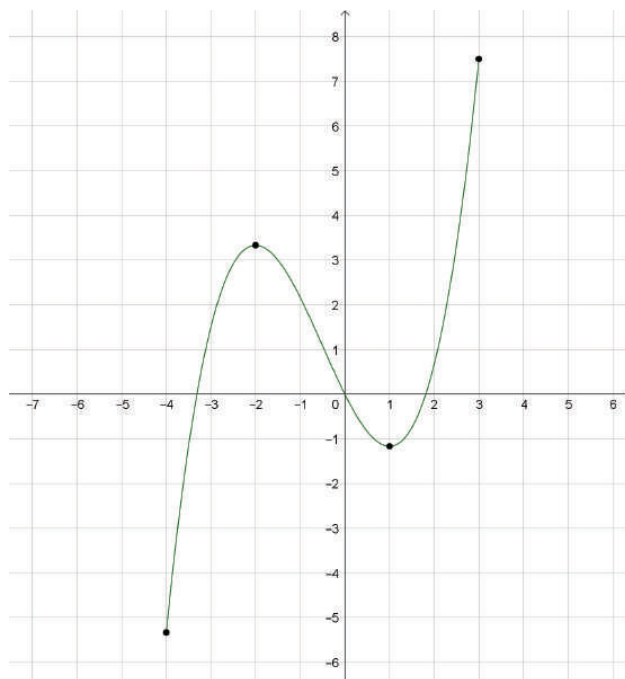
Etude complète de la fonction $f: x \mapsto \frac{4}{1+x^2}$ (domaine, parité, sens de variation, tableau des variations et représentation graphique).

Exercice 14

Dessiner le graphe d'une fonction croissante sur $[-3, 3]$, mais qui n'est pas strictement croissante sur cet intervalle.

7. Maximum, minimum d'une fonction

Reprenons la fonction f du §6 définie sur $[-4,3]$.



Si x varie dans un **voisinage** de -2 , p. ex. si $x \in]-3, -1[$, alors on a : $f(x) \leq f(-2)$.

On dit que f a un **maximum (local)** égal à au point d'abscisse -2 .

Si x varie dans un **voisinage** de 1 , p. ex. si $x \in]0, 2[$, alors on a : $f(x) \geq f(1)$.

On dit que f a un **minimum (local)** égal à au point d'abscisse 1 .

Remarquons que : $(\forall x \in [-4, 3]) \quad f(x) \leq f(3)$. On dit que f admet un **maximum absolu** égal à au point d'abscisse 3 est la plus grande valeur possible pour $f(x)$.

De même : $(\forall x \in [-4, 3]) \quad f(x) \geq f(-4)$. On dit que f admet un **minimum absolu** égal à au point d'abscisse -4 est la plus petite valeur possible pour $f(x)$.

Définition. Un **voisinage** d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert I contenant x_0 .

Définition. Soit f une fonction numérique et $x_0 \in \text{dom } f$.

- On dit que f admet un **maximum (local)** en x_0 s'il existe un voisinage I de x_0 tel que $(\forall x \in I \cap \text{dom } f) \quad f(x) \leq f(x_0)$.
- On dit que f admet un **minimum (local)** en x_0 s'il existe un voisinage I de x_0 tel que $(\forall x \in I \cap \text{dom } f) \quad f(x) \geq f(x_0)$.
- On dit que f admet un **maximum absolu** en x_0 si $(\forall x \in \text{dom } f) \quad f(x) \leq f(x_0)$.
- On dit que f admet un **minimum absolu** en x_0 si $(\forall x \in \text{dom } f) \quad f(x) \geq f(x_0)$.
- On dit que f admet un **extrémum** en x_0 si f admet un maximum ou un minimum en x_0 .

8. Manipulations de graphes

Voir manuel, p. 60-64

CHAPITRE 4

Fonctions affines

1. Définitions et exemples

Définition. Une fonction f est dite **affine** s'il existe deux réels a et b tels que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = ax + b$$

Cas particuliers :

- Si $b = 0$, on dit que la fonction affine est **linéaire** : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = ax$.
- Si $a = 0$, on dit que la fonction affine est **constante** : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = b$.

Remarques.

- Le domaine d'une fonction affine est égal à l'ensemble $\mathbb{R}$.
- Les fonctions affines sont en fait les fonctions du **premier degré**.
- a est appelé **coefficient de linéarité** de la fonction affine $f: x \mapsto ax + b$.
- La représentation graphique d'une fonction affine $f: x \mapsto ax + b$ admet pour équation : $y = ax + b$. On reconnaît l'équation d'une **droite** de coefficient directeur a et d'ordonnée à l'origine b .

Exemples.

- $f: x \mapsto 2x - 3$ est affine avec $a = 2$ et $b = -3$.
- $g: x \mapsto \frac{x}{2}$ est affine avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$. C'est donc une fonction linéaire.
- $h: x \mapsto \frac{3}{5}$ est affine avec $a = 0$ et $b = \frac{3}{5}$. C'est donc une fonction constante.
- $k: x \mapsto \frac{1-4x}{3}$ est affine avec $a = -\frac{4}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$.

Contre-exemples.

- $f': x \mapsto \frac{1}{2x} + 3$ n'est pas affine (variable au dénominateur).
- $g': x \mapsto 3\sqrt{x} - 8$ n'est pas affine (variable sous le radical).
- $h': x \mapsto 2x^2 - 5$ n'est pas affine (variable élevée au carré, fonction du second degré).

2. Sens de variation et représentation graphique

Proposition. Soit $f: x \mapsto ax + b$ une fonction affine.

- La **courbe représentative** de f est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(1, a)$ et passant par le point aux coordonnées $(0, b)$. En particulier, si $b = 0$, c.-à-d. si f est **linéaire**, alors cette droite passe par l'origine.
- Le **sens de variation** de f dépend du signe de a :
 - Si $a > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 - Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
 - Si $a = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Evidente.

A titre de curiosité, calculons le taux de variation de la fonction affine $f: x \mapsto ax + b$.

$$\begin{aligned}
 (\forall x \neq x' \in \mathbb{R}) \quad T_f(x, x') &= \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \\
 &= \frac{ax' + b - ax - b}{x' - x} \\
 &= \frac{a(x' - x)}{x' - x} \\
 &= a
 \end{aligned}$$

Ce résultat conduit évidemment à la même proposition que ci-dessus.

3. Fonctions affines par morceaux

Définition. Une fonction f est **affine par morceaux** (ou **affine par intervalles**), si sa représentation graphique est une réunion de segments ou de demi-droites.

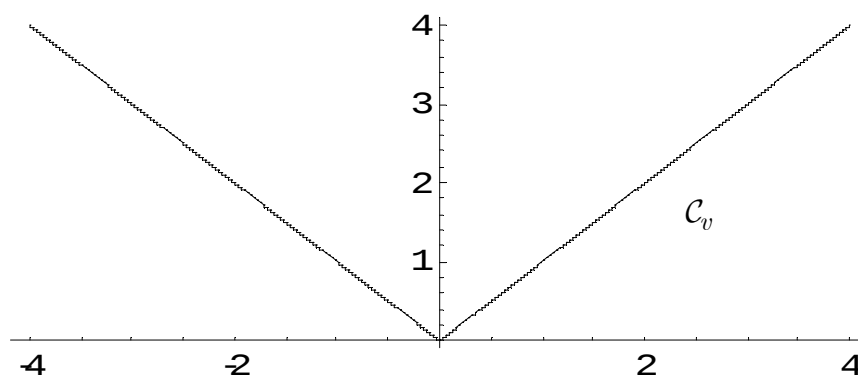
Exemple 1.

Considérons la fonction valeur absolue $v: x \mapsto |x|$.

- Le domaine de cette fonction est $\mathbb{R}$.
- De plus la fonction est paire. En effet : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad v(-x) = |-x| = |x| = v(x)$. La représentation graphique de v est donc symétrique par rapport à (Oy) .
- Or : $(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad v(x) = |x| = x$. La fonction v coïncide donc sur $\mathbb{R}_+$ avec la fonction $x \mapsto x$, qui est affine et strictement croissante (coefficient directeur 1).
- De même : $(\forall x \in \mathbb{R}_-) \quad v(x) = |x| = -x$. La fonction v coïncide donc sur $\mathbb{R}_-$ avec la fonction $x \mapsto -x$, qui est affine et strictement décroissante (coefficient directeur -1).
- D'où le tableau de variation de v :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$v(x)$	↘	0	↗

- La fonction v est affine par morceaux, puisque sa représentation graphique est réunion de deux demi-droites :



Exemple 2. On définit la *partie entière* d'un réel x de la façon suivante : c'est l'unique nombre entier n tel que $n \leq x < n+1$. On note $\text{Ent}(x)$ la partie entière de x . Par exemple :

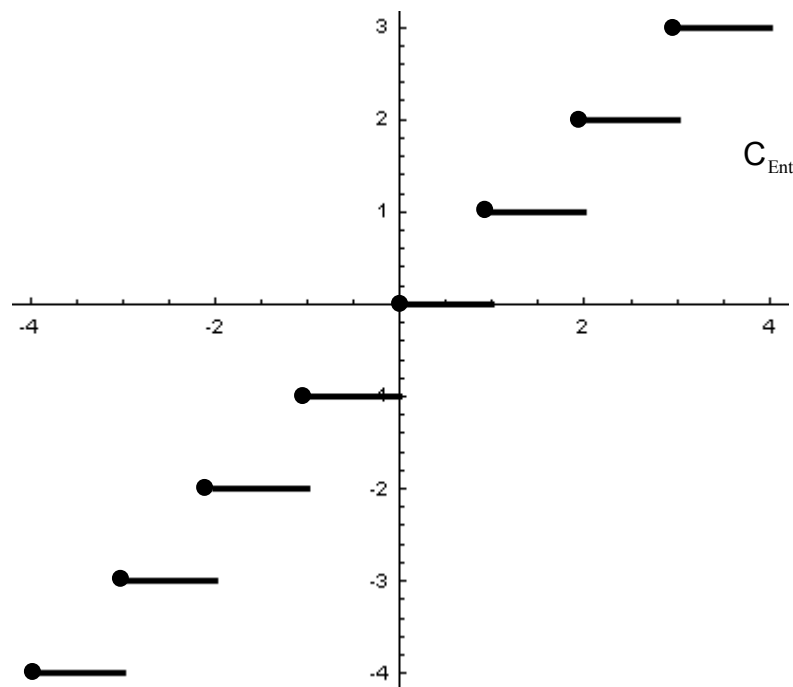
- $\text{Ent}(6,342) = 6$ car $6 \leq 6,342 < 7$
- $\text{Ent}(6) = 6$ car $6 \leq 6 < 7$
- $\text{Ent}(0,82) = 0$ car $0 \leq 0,82 < 1$
- $\text{Ent}(-3,5) = -4$ car $-4 \leq -3,5 < -3$
- $\text{Ent}(-3) = -3$ car $-3 \leq -3 < -2$

En général, $\text{Ent}(x)$ est le plus grand entier qui est $\leq x$.

Considérons maintenant la *fonction partie entière* $\text{Ent} : x \mapsto \text{Ent}(x)$. Quelle est la représentation graphique de cette fonction ? Remarquons que si n est un entier quelconque, alors :

$$(\forall x \in [n, n+1[) \text{Ent}(x) = n \quad (4.1)$$

Cette relation montre que la fonction Ent est constante sur tous les intervalles de la forme $[n, n+1[$. Non seulement, Ent est une fonction affine par morceaux, mais une *fonction constante par morceaux*. Voici le graphique de cette fonction :



On dit souvent que Ent est une fonction en escalier. La raison devrait être claire...

CHAPITRE 5

Fonctions trinômes du 2^e degré

1. Trinômes du second degré

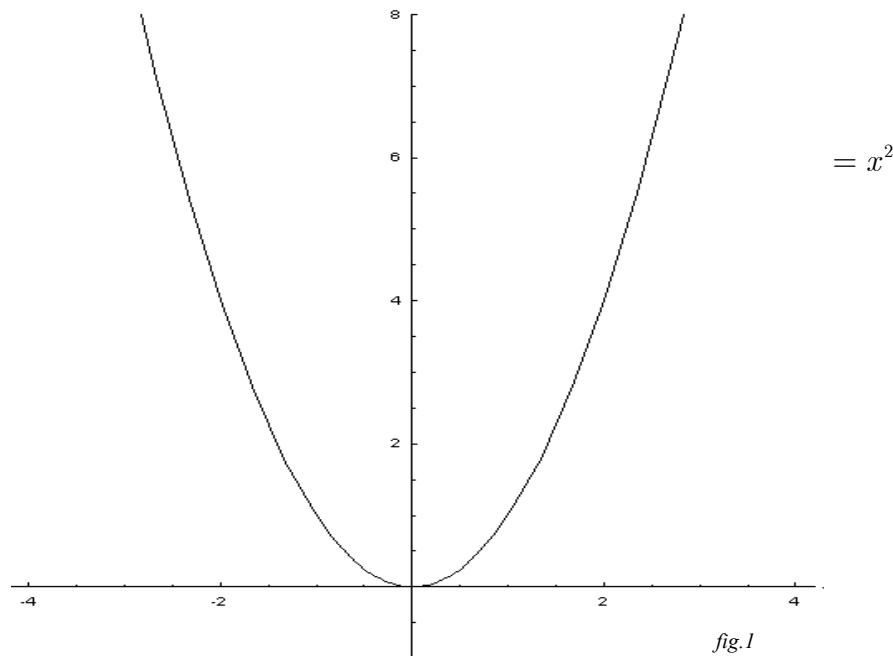
Définition. On appelle trinôme du second degré toute fonction du type $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$.

Remarque. On doit imposer que $a \neq 0$ pour que f soit bien du second degré.

Exemples.

- $f: x \mapsto 3x^2 - 2x + 7$ $a = 3, b = -2, c = 0$
- $g: x \mapsto 4 - x^2$ $a = -1, b = 0, c = 4$
- $h: x \mapsto x(1 - x)$ $a = -1, b = 1, c = 0$
- $k: x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - 5$ $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = -5$

Le trinôme du second degré le plus simple est $p_1: x \mapsto x^2$. La représentation graphique de ce trinôme est la **parabole** d'équation $y = x^2$. Voici cette courbe, tracée dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

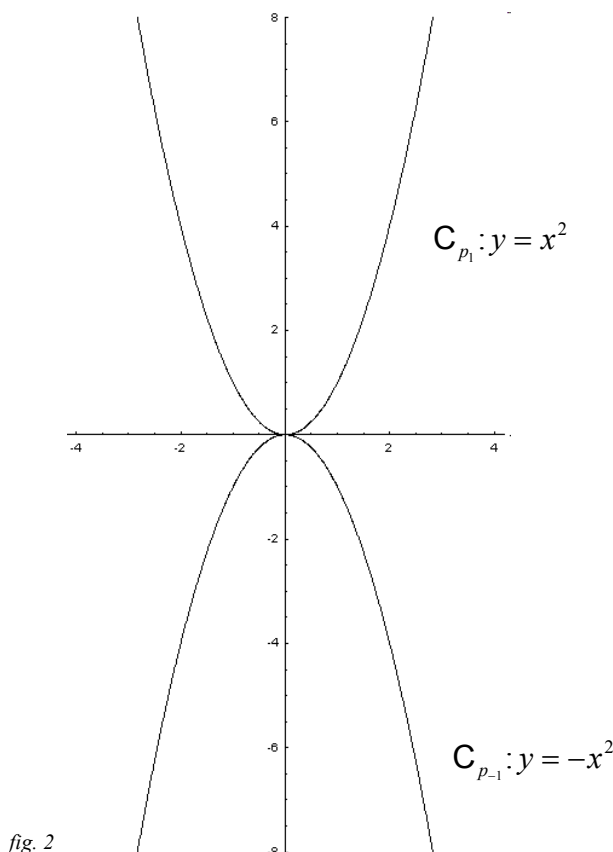


Le but de ce chapitre est de prouver que la courbe représentative de toute fonction trinôme du second degré est une parabole. Donnons à ce terme un sens précis.

Définition. Une parabole est une courbe d'équation $Y = X^2$ dans un repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ du plan cartésien.

2. Etude des fonctions $p_a: x \mapsto ax^2$ avec $a \neq 0$

- Au paragraphe précédent, on a représenté la fonction $p_1: x \mapsto x^2$.
- Remarquons que la courbe représentative de $p_{-1}: x \mapsto -x^2$ s'obtient à partir de celle de p_1 par la symétrie orthogonale d'axe (Ox) .



Ce résultat se généralise aisément :

Proposition. Les courbes $C_{p_a}: y = ax^2$ et $C_{p_{-a}}: y = -ax^2$ sont symétriques par rapport à (Ox) .

Démonstration. Les deux points $M(x, ax^2)$ et $M'(x, -ax^2)$, appartenant respectivement à C_{p_a} et $C_{p_{-a}}$ sont symétriques par rapport à (Ox) puisque leurs ordonnées sont opposées.

- Pour obtenir la représentation graphique de $p_2: x \mapsto 2x^2$, on observe que :

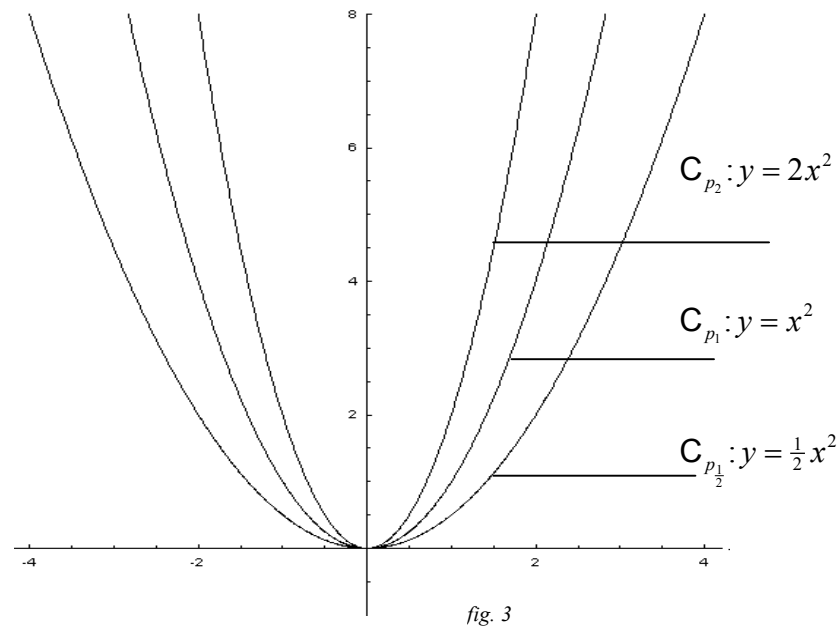
$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad p_2(x) = 2p_1(x)$$

Il suffit donc de multiplier par 2 l'ordonnée de chaque point $M(x, x^2) \in C_{p_1}$ pour trouver le point $M'(x, 2x^2) \in C_{p_2}$. Remarquons que cette opération ne change pas le sens de variation de la courbe (cf. figure ci-dessous).

- De même, pour obtenir la représentation graphique de $p_{\frac{1}{2}}: x \mapsto \frac{1}{2}x^2$, on observe que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad p_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}p_1(x)$$

Il suffit donc de multiplier par $\frac{1}{2}$ l'ordonnée de chaque point $M(x, x^2) \in C_{p_1}$ pour trouver le point $M'(x; \frac{1}{2}x^2) \in C_{p_{1/2}}$. Remarquons que cette opération ne change pas le sens de variation de la courbe (cf. figure ci-dessous).

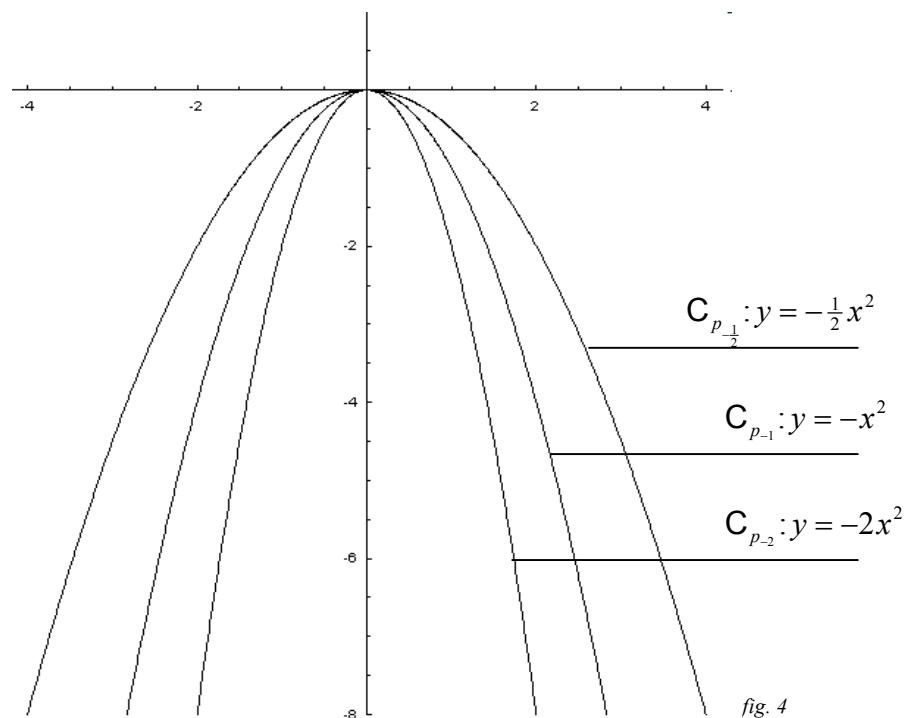


- En général, il est clair que :

Proposition. Si $a > 0$ alors p_a a même sens de variation que p_1 , c.-à-d. p_a est str. décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et str. croissante sur $\mathbb{R}_+$.

- Et de même :

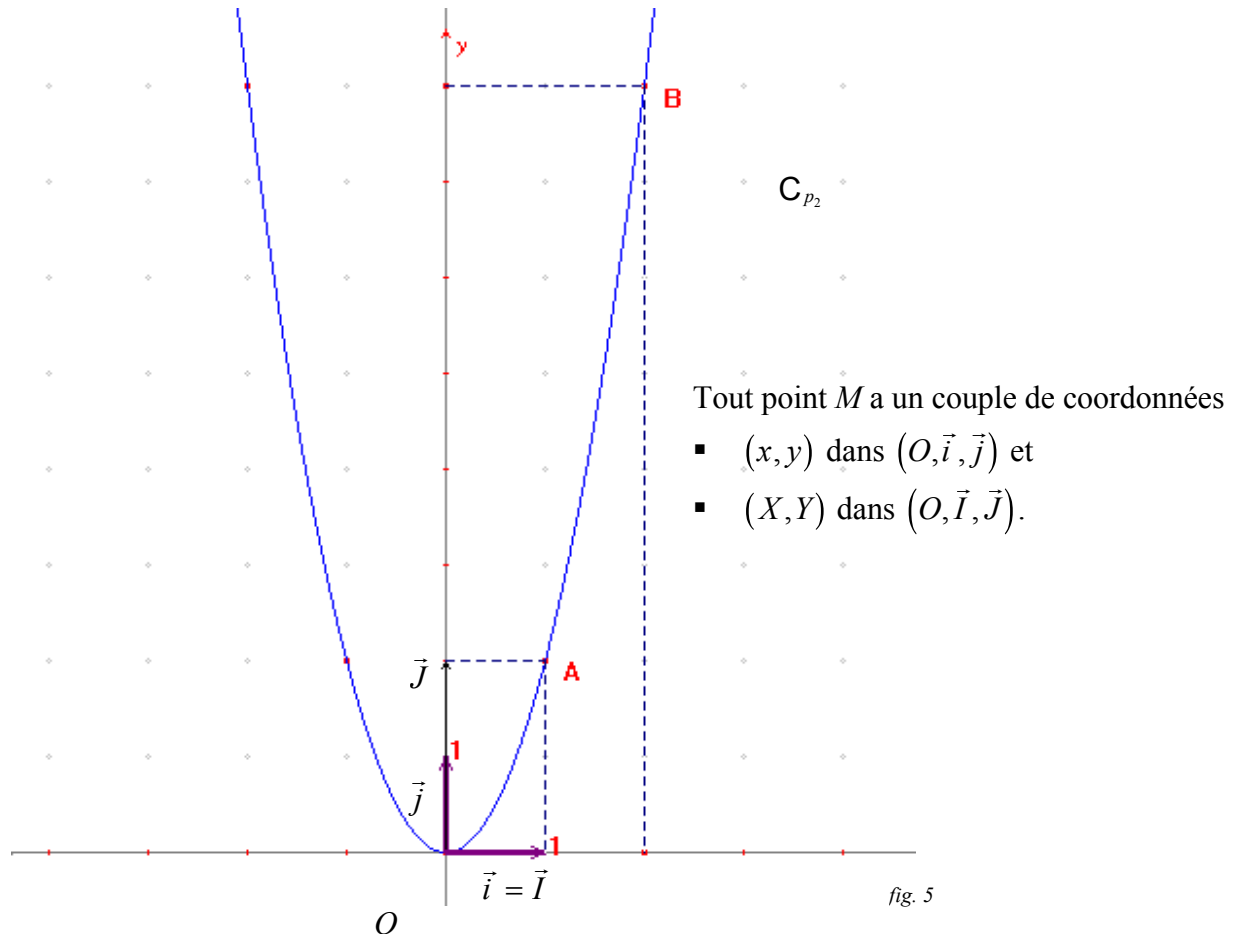
Proposition. Si $a < 0$ alors p_a a même sens de variation que p_{-1} , c.-à-d. p_a est str. croissante sur $\mathbb{R}_-$ et str. décroissante sur $\mathbb{R}_+$.



- Le coefficient a détermine donc l'**orientation** et la « **largeur** » de $\mathcal{C}_{p_a}$:

➤ Si $a > 0$, alors $\mathcal{C}_{p_a}$ est tournée vers le haut et si $a < 0$ alors $\mathcal{C}_{p_a}$ est tournée vers le bas.
 ➤ Si $|a|$ est petite, alors $\mathcal{C}_{p_a}$ est large, et si $|a|$ est grande alors $\mathcal{C}_{p_a}$ est mince.

- Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la figure ci-dessous, l'équation de $\mathcal{C}_{p_2}$ est : $y = 2x^2$. Pour montrer que $\mathcal{C}_{p_2}$ est une **parabole**, il faut, d'après la définition du §1, trouver un repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ dans lequel cette courbe a comme équation : $Y = X^2$.



- Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A et B ont les coordonnées $(1, 2)$ et $(2, 8)$ respectivement. En effet, l'équation de $\mathcal{C}_{p_2}$ est $y = 2x^2$ dans ce repère.
 Dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, A et B auront les coordonnées $(1, 1)$ et $(2, 4)$ respectivement. En effet, l'équation de $\mathcal{C}_{p_2}$ devra s'écrire $Y = X^2$ dans ce repère.
- D'où l'idée de poser : $\vec{I} = \vec{i}$ et $\vec{J} = 2\vec{j}$. Le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ n'est pas orthonormé, mais il est toujours orthogonal. Montrons que c'est le repère cherché :

$$M(x, y) \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (1)$$

$$M(X, Y) \text{ dans } (O, \vec{I}, \vec{J}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} = X\vec{i} + 2Y\vec{j} \quad (2)$$

Comme tout vecteur admet une décomposition unique dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on en déduit les **formules du changement de repère** :

$$\begin{cases} x = X \\ y = 2Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x \\ Y = \frac{y}{2} \end{cases}$$

Or : $M(x, y) \in C_{p_2} \Leftrightarrow y = 2x^2 \Leftrightarrow \frac{y}{2} = x^2 \Leftrightarrow Y = X^2$ dans $(O, \vec{I}, \vec{J})$. C.Q.F.D.

- En général, on peut démontrer que C_{p_a} admet comme équation $Y = X^2$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ avec $\vec{I} = \vec{i}$ et $\vec{J} = a\vec{j}$. Ce résultat est aussi bien valable dans le cas $a > 0$ que dans le cas $a < 0$.
Toutes les courbes C_{p_a} sont donc des paraboles !

3. Exemples de translations de courbes et de repères

Avant de faire l'étude générale des trinômes du second degré, nous allons étudier quelques exemples pour approfondir l'idée du changement de repère.

a) Etude de $f: x \mapsto 2x^2 - 3$

On remarque que $f(x) = p_2(x) - 3$. Il suffit donc de retrancher 3 à l'ordonnée de chaque point $M(x, 2x^2) \in C_{p_2}$ pour trouver le point $M'(x; 2x^2 - 3) \in C_f$. C_f est donc l'image de C_{p_2} par la translation de vecteur $\vec{u}(0, -3)$. Remarquons que cette opération ne change pas le sens de variation de la courbe.

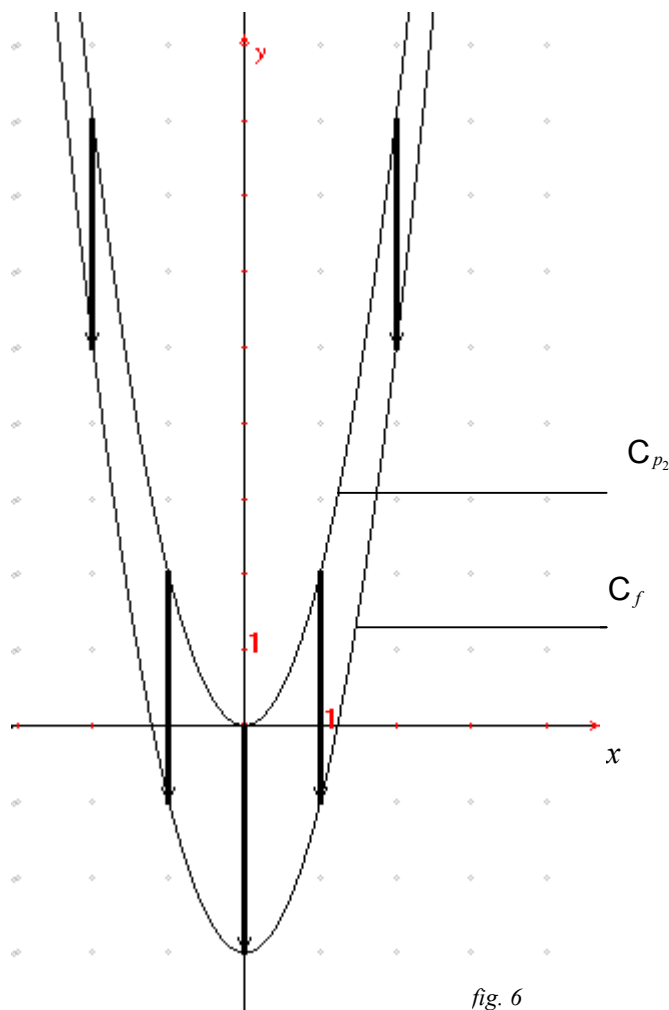


fig. 6

Un autre point de vue permettant d'obtenir $\mathcal{C}_f$ est celui du **changement de repère**. Contrairement à la méthode précédente, ce n'est pas la courbe $\mathcal{C}_{p_2}$ qui est translatée, mais l'origine O du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Précisons : l'équation de $\mathcal{C}_f$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $y = 2x^2 - 3$ ou encore :

$$y + 3 = 2x^2.$$

Choisissons une nouvelle abscisse X et une nouvelle ordonnée Y en posant :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + 3 \end{cases}$$

Ce changement de coordonnées **simplifie** l'équation de $\mathcal{C}_f$ en : $Y = 2X^2$. Mais quel repère est associé à ces nouvelles coordonnées (X, Y) . Remarquons que l'abscisse ne change pas alors que l'ordonnée augmente de 3 :

y	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4	-5
Y	3	4	5	6	7	2	1	0	-1	-2

L'origine du nouveau repère se situe au point où : $X = 0$ et $Y = 0$, c.-à-d. au point O' d'abscisse $x = 0$ et $y = -3$. Remarquons finalement que les vecteurs de base associés au nouveau repère restent les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$: en effet, si x ou y augmente de 1, alors X respectivement Y augmente également de 1. On a affaire à une **translation du repère** $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

Nous avons déjà précisé que l'équation de $\mathcal{C}_f$ dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$ est : $Y = 2X^2 = p_2(X)$. Cela signifie que pour représenter graphiquement f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, il revient au même de représenter p_2 dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

$$\mathcal{C}_f \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}) = \mathcal{C}_{p_2} \text{ dans } (O', \vec{i}, \vec{j})$$

Pour clarifier davantage, le lecteur est invité à tracer les nouveaux axes de coordonnées et la nouvelle origine sur la figure 6.

b) Etude de $g: x \mapsto 2(x-2)^2$

Appliquons la méthode du **changement de repère** :

- Equation de $\mathcal{C}_g$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $y = 2(x-2)^2$

- Changement de repère :

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y \end{cases}$$

- Nouvelle origine : $O'(2, 0)$
- Nouveau repère : $(O', \vec{i}, \vec{j})$
- Equation de $\mathcal{C}_g$ dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$: $Y = 2X^2$

Donc :

$$\mathcal{C}_g \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}) = \mathcal{C}_{p_2} \text{ dans } (O', \vec{i}, \vec{j})$$

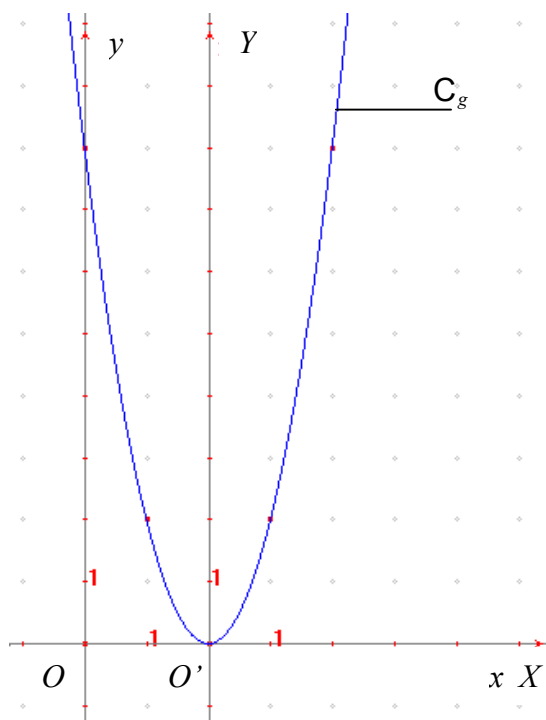


fig. 7

c) **Etude de $h: x \mapsto 2(x-2)^2 + 3$**

Appliquons la méthode du **changement de repère** :

- Equation de C_h dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$y = 2(x-2)^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow y - 3 = 2(x-2)^2$$

- Changement de repère :

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 3 \end{cases}$$

- Nouvelle origine : $O'(2, 3)$

- Nouveau repère : $(O', \vec{i}, \vec{j})$

- Equation de C_h dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$: $Y = 2X^2$

Donc :

$$C_h \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}) = C_{p_2} \text{ dans } (O', \vec{i}, \vec{j})$$

d) **Etude de $k: x \mapsto 2x^2 - 8x + 11$**

Il suffit de remarquer que $k = h$.

En effet :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) \quad k(x) &= 2x^2 - 8x + 11 \\ &= 2\left(x^2 - 4x + \frac{11}{2}\right) \\ &= 2\left(x^2 - 4x + 4 - 4 + \frac{11}{2}\right) \\ &= 2\left[(x-2)^2 + \frac{3}{2}\right] \\ &= 2(x-2)^2 + 3 = h(x) \end{aligned}$$

On dit que $k(x)$ a été mis sous **forme canonique** (voir chapitre 2, §3). C'est donc sous forme canonique qu'il faut mettre un trinôme avant d'opérer un changement de repère !

4. Représentation graphique du trinôme le plus général

Soit $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ le trinôme du second degré le plus général. Nous avons vu au chapitre 2, §3, la forme canonique de $f(x)$:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad (5.1)$$

- D'où l'équation de C_f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{aligned} y &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \\ \Leftrightarrow y + \frac{\Delta}{4a} &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \end{aligned}$$

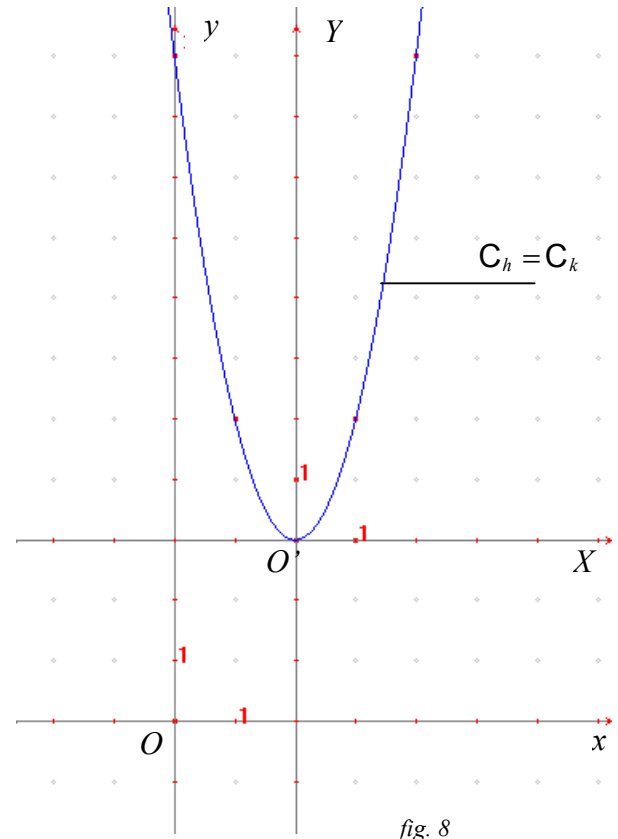


fig. 8

- Changement de repère :

$$\begin{cases} X = x + \frac{b}{2a} \\ Y = y + \frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

- Nouvelle origine : $O' \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$
- Equation de $\mathcal{C}_f$ dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$: $Y = aX^2$

Donc :

$$\mathcal{C}_f \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}) = \mathcal{C}_{p_a} \text{ dans } (O', \vec{i}, \vec{j})$$

Ce résultat prouve d'une part que $\mathcal{C}_f$ est une parabole (puisque nous avons prouvé au § 2 que $\mathcal{C}_{p_a}$ en est une) et d'autre part que l'**orientation** et la **largeur** de $\mathcal{C}_f$ dépendent toujours du paramètre a (voir à ce sujet page 5.4 en haut). Nous avons donc prouvé le théorème fondamental de ce chapitre :

Théorème. Soit $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ le trinôme du second degré le plus général. La courbe représentative de $\mathcal{C}_f$ est une **parabole** de sommet $O' \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$ et d'équation $Y = aX^2$ dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

Nous terminons ce paragraphe avec une application du résultat précédent à l'étude de l'équation du second degré.

5. Etude graphique de l'équation du second degré

Les racines de $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ sont les solutions de l'équation générale du second degré :

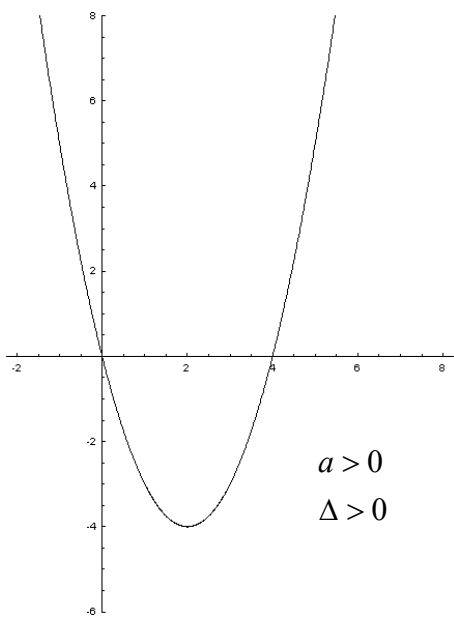
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (5.2)$$

Graphiquement, ce sont les abscisses des point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses de $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Etudions donc la position de $\mathcal{C}_f$ en fonction de a , b et c . A cette fin, il convient d'étudier le signe de l'ordonnée $y_{O'} = -\frac{\Delta}{4a}$ de O' : or le signe de cette ordonnée dépend des signes de a et de Δ . Le tableau suivant résume les 6 cas possibles :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$	$y_{O'} < 0$	$y_{O'} = 0$	$y_{O'} > 0$
$a < 0$	$y_{O'} > 0$	$y_{O'} = 0$	$y_{O'} < 0$

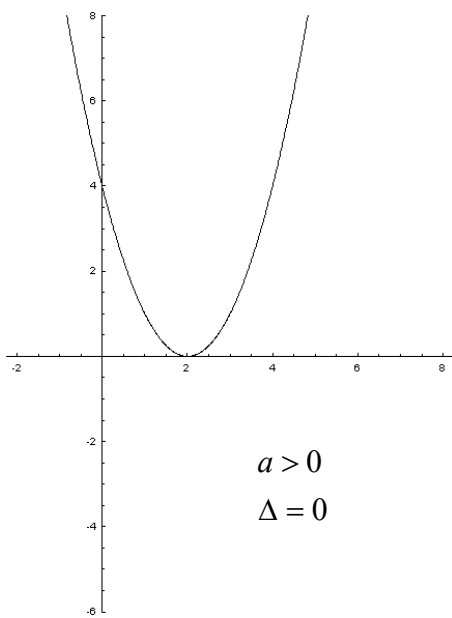
Chaque cas correspond à une des figures de la page suivante. Nous retrouvons ainsi graphiquement le fait bien connu que :

- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet 2 racines distinctes si et seulement si $\Delta > 0$.
- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet 1 racine si et seulement si $\Delta = 0$.
- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de racine si et seulement si $\Delta < 0$.



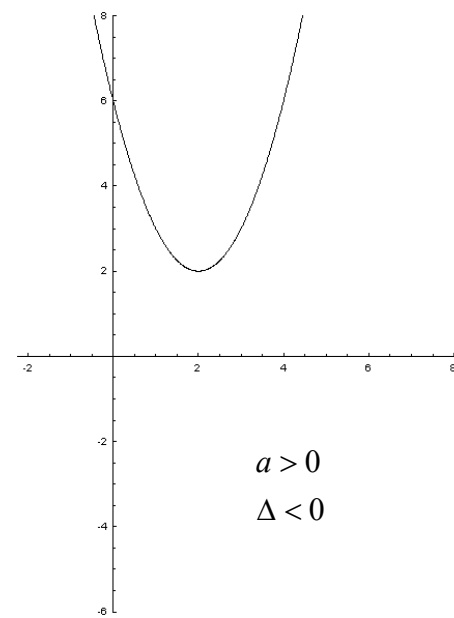
$$a > 0$$

$$\Delta > 0$$



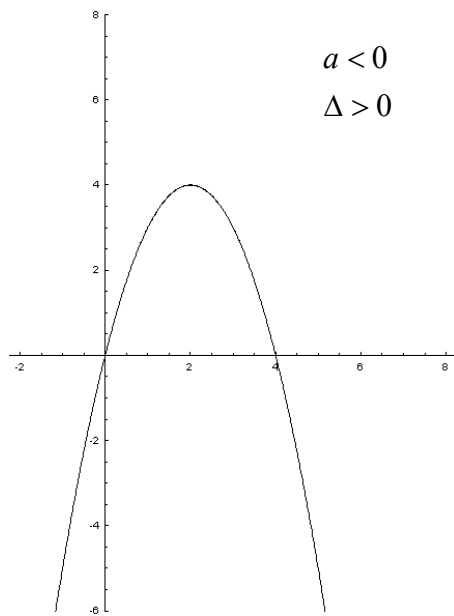
$$a > 0$$

$$\Delta = 0$$



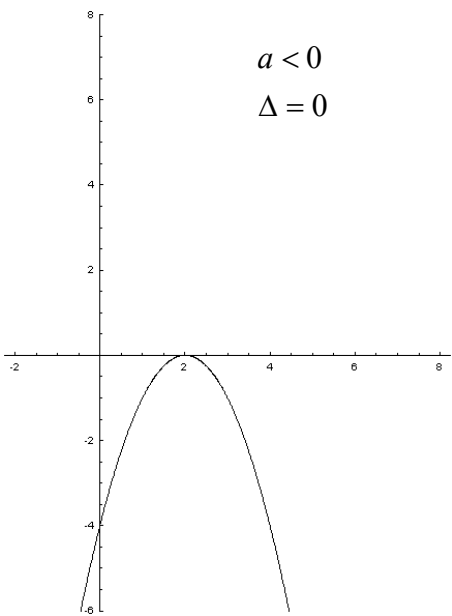
$$a > 0$$

$$\Delta < 0$$



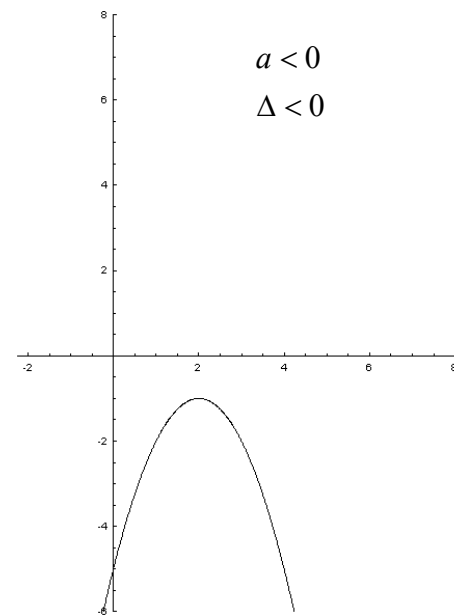
$$a < 0$$

$$\Delta > 0$$



$$a < 0$$

$$\Delta = 0$$



$$a < 0$$

$$\Delta < 0$$

CHAPITRE 6

Fonctions homographiques

1. Fonctions homographiques

Définition. On appelle *fonction homographique* toute fonction du type $f: x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des constantes réelles vérifiant :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad (6.1)$$

Remarques.

- Si $c = 0$, alors $a \neq 0$ et $d \neq 0$ (sinon l'hypothèse (6.1) ne serait pas vérifiée) et :
 $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$. f est donc une **fonction affine non constante** dans ce cas.
- L'hypothèse (6.1) assure que f ne soit pas une fonction **constante**. En effet, soit par exemple $f: x \mapsto \frac{2x-1}{4x-8}$. Alors le déterminant des coefficients est $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$ et on a :
 $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}) \quad f(x) = \frac{2x-1}{2(2x-1)} = \frac{1}{2} = \text{constante}.$

Exemples de fonctions homographiques.

- $f: x \mapsto 3x - 2$ $a = 3, b = -2, c = 0, d = 1$ (fonction affine)
- $g: x \mapsto \frac{-x}{4x+1}$ $a = -1, b = 0, c = 4, d = 1$
- $h: x \mapsto \frac{3}{5x}$ $a = 3, b = 0, c = 5, d = 0$
- $k: x \mapsto \frac{3-x}{4+x}$ $a = -1, b = 3, c = 1, d = 4$

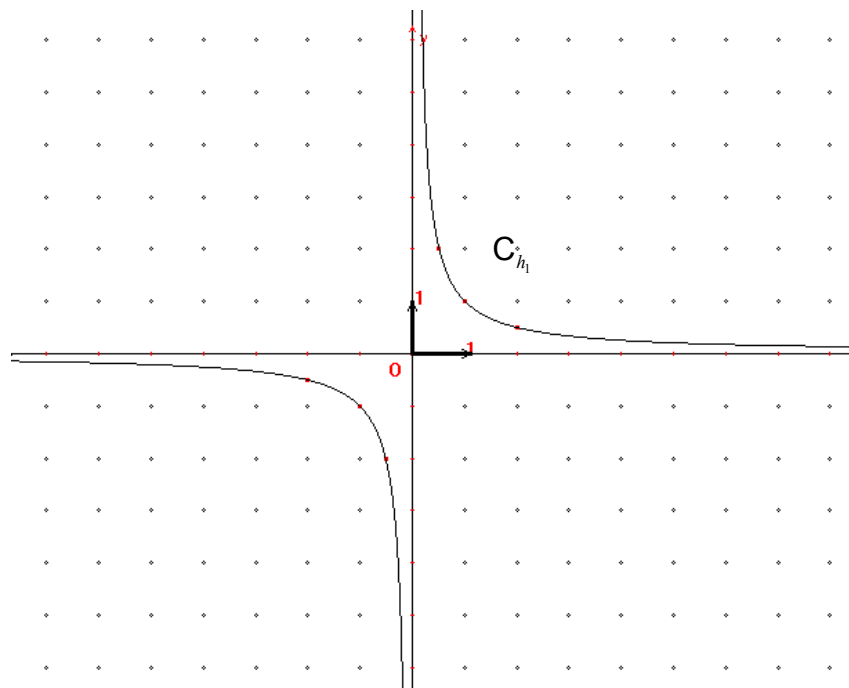
Nous écartérons dans la suite le cas $c = 0$ qui correspond aux fonctions affines : ces fonctions ont été étudiées au chapitre 4. La fonction homographique la plus simple (qui n'est pas affine) est :

$$h_1: x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{avec} \quad a = 1, b = 0, c = 1, d = 0$$

La représentation graphique de h_1 est l'**hyperbole** d'équation

$$y = \frac{1}{x}.$$

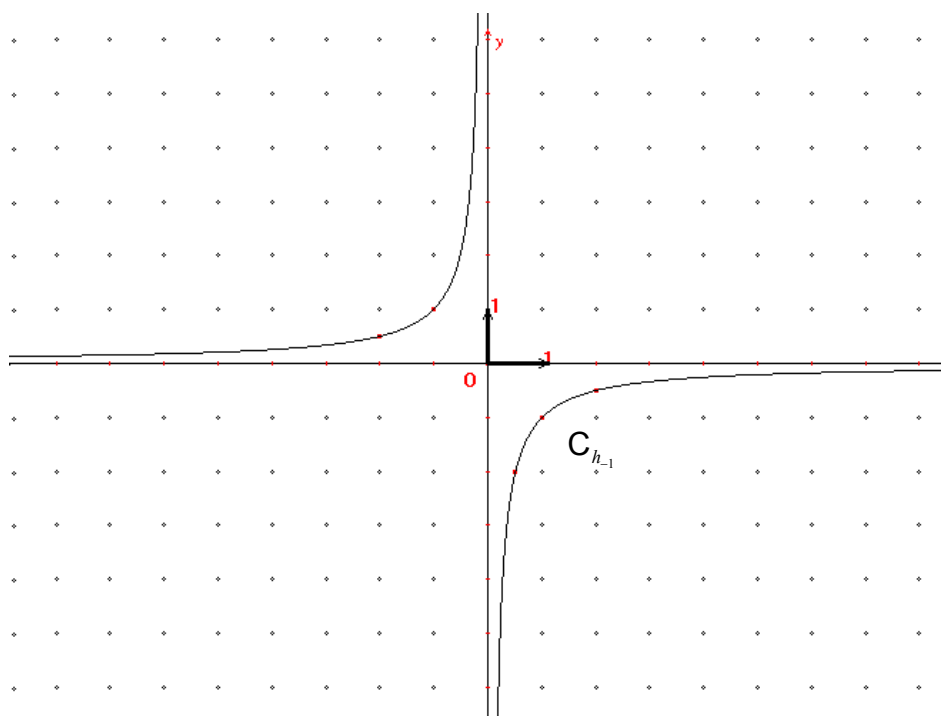
La figure suivante montre la courbe représentative de h_1 , tracée dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Définition. Une hyperbole est une courbe d'équation $Y = \frac{1}{X}$ dans un repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ bien choisi du plan cartésien.

2. Etude des fonctions $h_a: x \mapsto \frac{a}{x}$ avec $a \neq 0$

- Au paragraphe précédent, on a représenté la fonction $h_1: x \mapsto \frac{1}{x}$. Remarquons que cette fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
- La courbe représentative de $h_{-1}: x \mapsto -\frac{1}{x}$ s'obtient à partir de celle de h_1 par la symétrie orthogonale d'axe (Ox) . Voici la courbe représentative de h_{-1} :



Remarquons que la fonction h_{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
Généralisons :

Proposition.

- Les courbes $C_{h_a} : y = -\frac{a}{x}$ et $C_{h_{-a}} : y = -\frac{a}{x}$ sont symétriques par rapport à (Ox) .
- Si $a > 0$ alors h_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
- Si $a < 0$ alors h_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

Démonstration. Les deux points $M(x, \frac{a}{x})$ et $M'(x, -\frac{a}{x})$, appartenant respectivement à C_{h_a} et $C_{h_{-a}}$ sont symétriques par rapport à (Ox) puisque leurs ordonnées sont opposées. Donc $C_{h_a} : y = -\frac{a}{x}$ et $C_{h_{-a}} : y = -\frac{a}{x}$ sont symétriques par rapport à (Ox) .

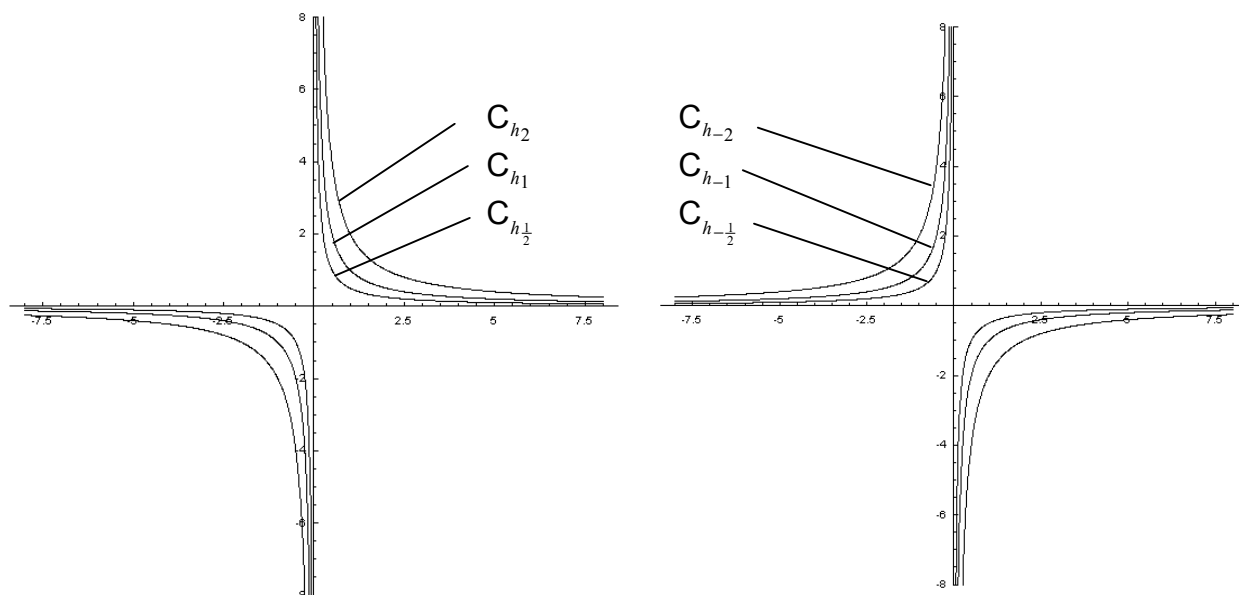
Etudions maintenant le sens de variation de h_a , $a \neq 0$. Remarquons que h_a est impaire : il suffit donc de calculer le taux de variation de h_a sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} (\forall x \neq x' \in \mathbb{R}_+^*) \quad T_{h_a}(x, x') &= \frac{h_a(x') - h_a(x)}{x' - x} \\ &= \frac{\frac{a}{x'} - \frac{a}{x}}{x' - x} \\ &= \frac{a(x - x')}{xx'(x' - x)} \\ &= -\frac{a}{xx'} \end{aligned}$$

→ > 0

- Si $a > 0$ alors ce taux de variation est strictement négatif sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc h_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et par symétrie, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ dans ce cas.
- Si $a < 0$ alors ce taux de variation est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc h_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et par symétrie, strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ dans ce cas.

Voici quelques courbes représentatives de fonctions h_a :



Remarquons que la courbe représentative de h_a est bien une **hyperbole** suivant notre définition page 2. En effet, on montre comme au chapitre précédent que C_{h_a} admet comme équation $Y = \frac{1}{X}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La petite démonstration de ce fait est laissée comme exercice au lecteur.

3. Etude de quelques fonctions homographiques plus compliquées

a) **Etude de la fonction** $f: x \mapsto \frac{2}{x-1} + 3$

- Tout d'abord : s'agit-il bien d'une fonction homographique ? Oui, car :

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) \quad f(x) = \frac{2}{x-1} + 3 = \frac{2 + 3(x-1)}{x-1} = \frac{3x-1}{x-1}.$$

La définition s'applique avec $a = 3$, $b = -1$, $c = 1$, $d = -1$ et on vérifie que le déterminant des coefficients n'est pas nul !

- Le domaine de f est évidemment $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Pour représenter graphiquement f , on utilise la **méthode du changement de repère**, vue au chapitre précédent :

➤ Equation de C_f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $y = \frac{2}{x-1} + 3 \Leftrightarrow y-3 = \frac{2}{x-1}$

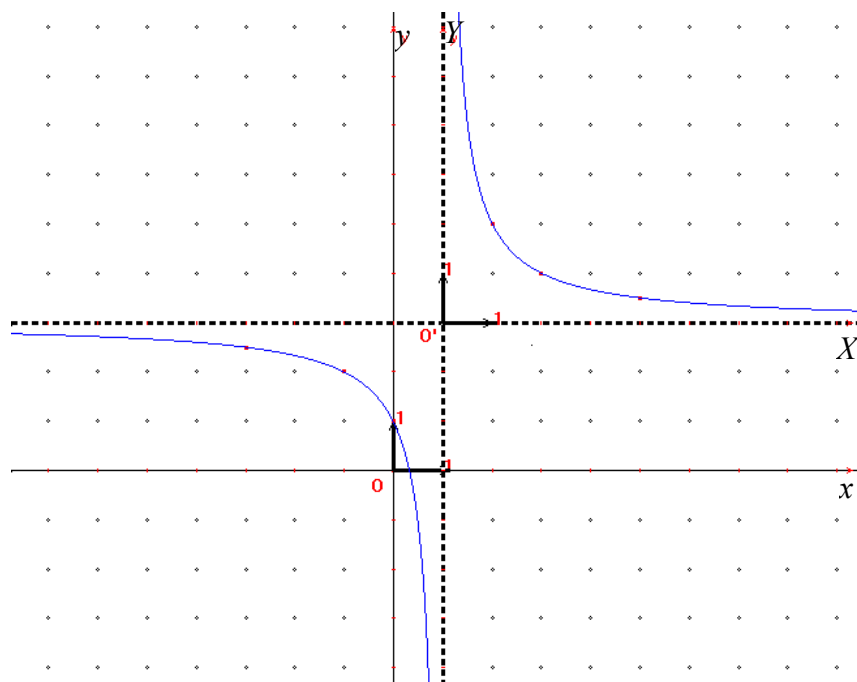
➤ Changement de repère :

$$\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y-3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Nouvelle origine : } O'(1,3) \\ \text{Nouveau repère : } (O', \vec{i}, \vec{j}) \end{array}$$

➤ Equation de C_f dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$: $Y = \frac{2}{X} = h_2(X)$

Donc : C_f dans $(O, \vec{i}, \vec{j}) = C_{h_2}$ dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

- Nous avons ainsi montré que la courbe représentative de la fonction homographique f est une hyperbole. Voici le graphique :



b) Etude de la fonction $g: x \mapsto \frac{3x-1}{2x-1}$

- Cette fonction est bien homographique. (Justifier !) Remarquons que son domaine est $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
- On ne peut pas tout de suite appliquer la méthode du changement de repère cette fois. D'abord il faut mettre $g(x)$ sous **forme canonique**. Pour cela, on effectue une division de polynômes :

$$\begin{array}{r|l} 3x-1 & 2x-1 \\ -3x+\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline " & \frac{1}{2} \end{array}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}) \quad 3x-1 &= (2x-1) \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \quad / \div (2x-1) \\ \Rightarrow \frac{3x-1}{2x-1} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2(2x-1)} \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{3}{2} + \frac{1}{4x-2} \end{aligned}$$

- Dans cette forme canonique, x intervient une seule fois dans l'expression de $g(x)$, à savoir au dénominateur. Ceci permet d'utiliser la méthode du changement de repère :

➤ Equation de $\mathcal{C}_g$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{4x-2} \Leftrightarrow y - \frac{3}{2} = \frac{1}{4(x-\frac{1}{2})}$

Attention ! Il faut mettre en évidence le coefficient de x avant de faire le changement de repère ! En effet, si l'on posait $X = 4x-2$, alors le coefficient 4 changerait le vecteur de base $\vec{i}$ dans le nouveau repère. Si l'on veut faire une **translation** de repère, il faut que le coefficient de x soit toujours égal à 1.

➤ Changement de repère :

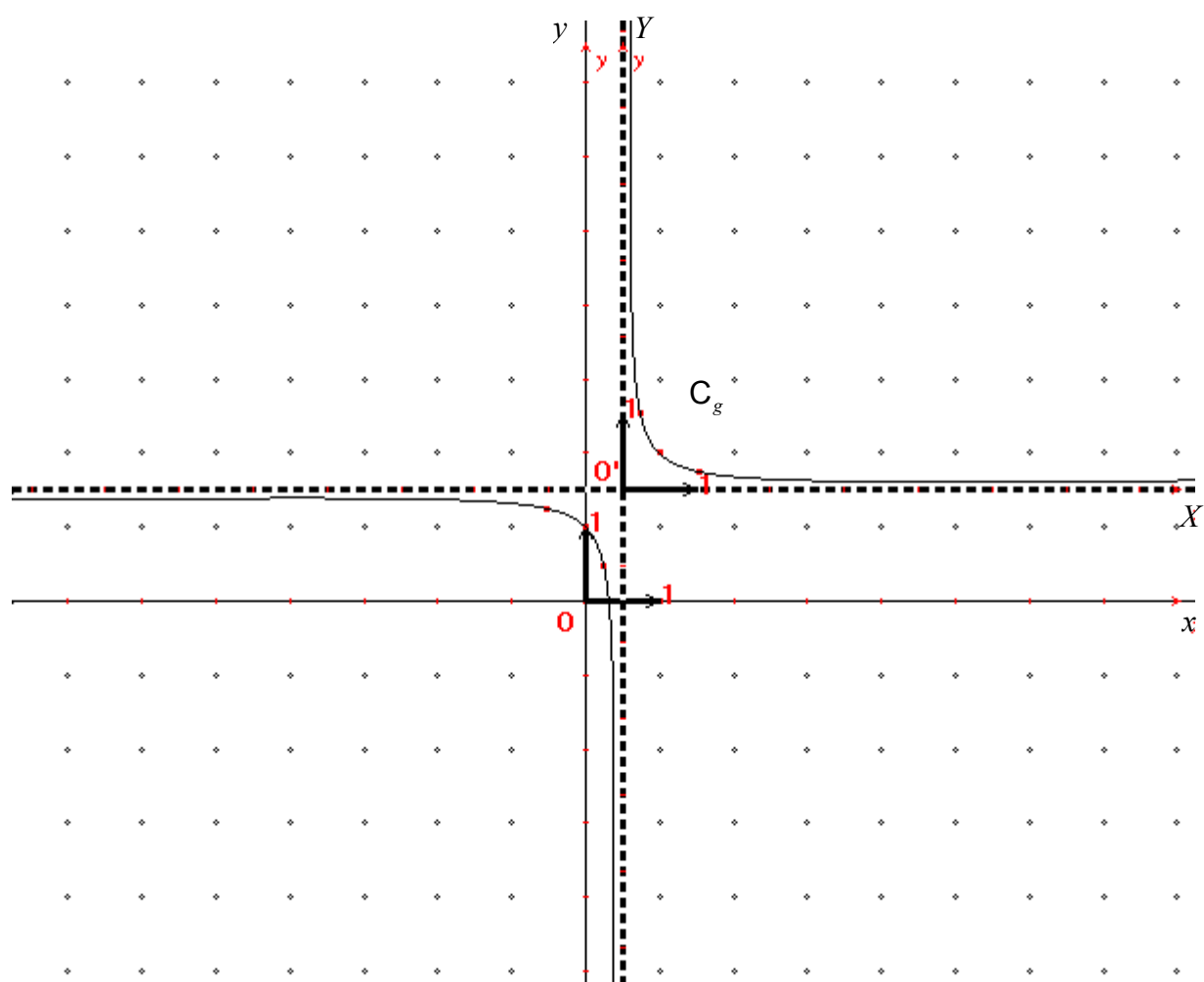
$$\begin{cases} X = x - \frac{1}{2} \\ Y = y - \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Nouvelle origine : } O'(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \\ \text{Nouveau repère : } (O', \vec{i}, \vec{j}) \end{array}$$

➤ Equation de $\mathcal{C}_g$ dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$: $Y = \frac{1}{4X} = h_{\frac{1}{4}}(X)$

Donc : $\mathcal{C}_g$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}) = \mathcal{C}_{h_{\frac{1}{4}}}$ dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

- Nous avons ainsi montré que la courbe représentative de la fonction homographique g est une encore une hyperbole. Le graphique de cette fonction se trouve à la page suivante.

Remarque finale. Nous terminons ce chapitre en observant que la méthode présentée ci-dessus s'applique à toute fonction homographique (non affine) $f: x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ telle que $c \neq 0$. Nous comprenons donc que la représentation d'une telle fonction homographique est toujours une **hyperbole**.



CHAPITRE 1 : Trigonométrie (EM4 : chapitre 2 et chapitre 6)

1 Rappels - classe de quatrième

Théorème de Pythagore :

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés

Rapports trigonométriques dans le triangle rectangle :

Dans un triangle rectangle, où α est un des deux angles aigus, on a :

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{(\text{longueur du}) \text{ côté adjacent à l'angle } \alpha}{(\text{longueur de l'}) \text{ hypoténuse}} \\ \sin \alpha &= \frac{(\text{longueur du}) \text{ côté opposé à l'angle } \alpha}{(\text{longueur de l'}) \text{ hypoténuse}} \\ \tan \alpha &= \frac{(\text{longueur du}) \text{ côté opposé à l'angle } \alpha}{(\text{longueur du}) \text{ côté adjacent à l'angle } \alpha} \\ \cot \alpha &= \frac{(\text{longueur du}) \text{ côté adjacent à l'angle } \alpha}{(\text{longueur du}) \text{ côté opposé à l'angle } \alpha}\end{aligned}$$

Valeurs remarquables :

Angle α en degrés	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Formules trigonométriques :

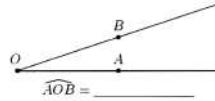
$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \qquad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \qquad \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$$

Exercices 1-10 sur les feuilles

2 Unités pour mesurer un angle

2.1 Les degrés

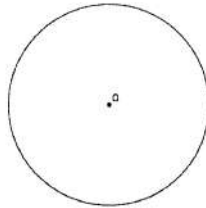
L'unité utilisée pour déterminer la mesure d'un angle est le **degré**.



2.2 Les radians

2.2.1 Introduction et définition

Toute partie de cercle comprise entre deux point distincts C et D de cercle est nommée arc de cercle.



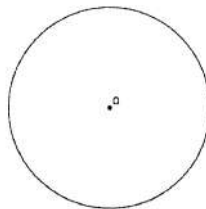
Deux points distincts C et D d'un cercle déterminent deux arcs de cercle.

Habituellement, le plus petit des arcs est noté

Définition :

On donne un angle géométrique $\widehat{AOB}$ et un cercle C de centre O et de rayon R .

L'angle coupe le cercle en deux points C et D .

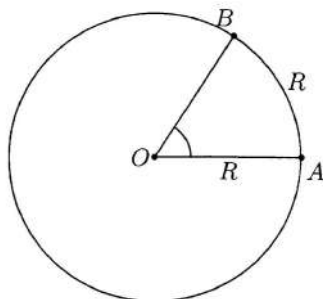


On dit que l'arc $\widehat{CD}$ est l'arc sur le cercle C par l'angle

Tout angle dont le sommet est le centre d'un cercle est appelé
de ce cercle.

Activité :

On donne un cercle C de centre O et de rayon R .



Sur la figure on détermine un arc $\widehat{AB}$ de longueur R .

Au lieu de mesurer l'angle au centre en degrés, on choisit une nouvelle manière de procéder :

l'angle au centre qui intercepte l'arc $\widehat{AB}$ de longueur R est l'angle de mesure 1 **radian**.

Dans ce nouveau système de mesure, complète le tableau suivant :

part de cercle	longueur de cette part	angle au centre (en radians)
$\widehat{AB}$	R	1
cercle entier		
$\frac{1}{2}$ de cercle		
$\frac{1}{4}$ de cercle		
$\frac{1}{8}$ de cercle		
$\frac{3}{4}$ de cercle		
$\frac{1}{7}$ de cercle		

Définition :

Un **angle d'un radian** (1 rad) est un angle

.....

.....

Remarque :

D'après le tableau de la page précédente on sait que l'angle au centre d'un cercle interceptant un demi-cercle mesure radians.

D'autre part on sait qu'un tel angle mesure

Conclusion : correspondent à radians.

2.2.2 Conversion

Activité :

1. On donne un angle $\hat{A}$ tel que $\hat{A} = 30^\circ$. On veut déterminer la mesure en radians α_r de l'angle $\hat{A}$.

Complète le tableau suivant :

angle	en degrés	en radians
$\hat{A}$		
angle plat		

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Cas général :

Soit α_r la mesure en radians d'un certain angle $\hat{C}$ donné et α_d sa mesure en degrés.

On s'intéresse à la relation qui existe entre ces deux unités de mesures.

Complète le tableau suivant :

angle	en degrés	en radians
$\hat{C}$		
angle plat		

.....
.....
.....
.....

Retenons :

Si les mesures en radians et en degrés d'un même angle sont respectivement r et d , elles se déduisent les unes des autres par la relation :

Exercice :

1) Détermine une mesure en radians
d'un angle de 270°

2) Détermine une mesure en radians
d'un angle de 120°

3) Détermine une mesure en degrés
d'un angle de $\frac{2\pi}{5}$

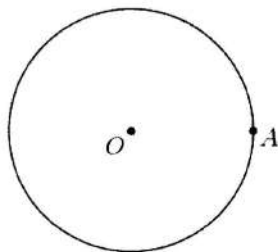
3) Détermine une mesure en degrés
d'un angle de $\frac{5\pi}{3}$ rad.

EM4 : exercices 52-54 page 244

3 Mesures d'un angle orienté

3.1 Le cercle trigonométrique

On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 et un point A appartenant à ce cercle. Place un point M sur le cercle $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{2}$.



Qu'est-ce que tu remarques ?

.....

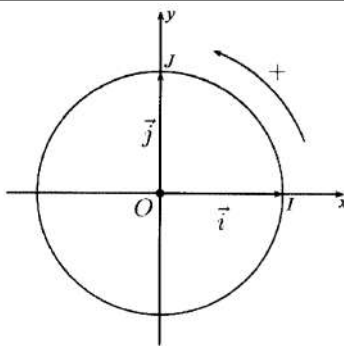
Qu'est-ce qu'il faut encore indiquer afin de déterminer la position de M de façon unique ?

.....

Définition :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le **cercle trigonométrique** est le cercle

-
-
-



Remarque :

On parle encore du sens

ou du sens

ou encore du sens

3.2 Angles orientés

Définition :

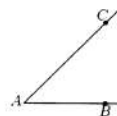
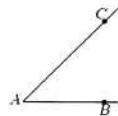
Un angle est un angle dont l'un des côtés est le côté et l'autre côté est le côté

Pour écrire un angle orienté on utilise les vecteurs.

Exemple :

Les deux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ déterminent

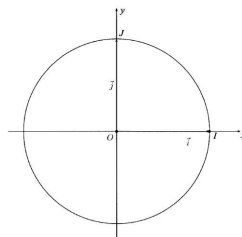
- un
- deux
-



Proposition :

Sur le cercle trigonométrique on donne $I(1;0)$ et $J(0;1)$. Soit M un point appartenant au cercle trigonométrique.

Alors le point M détermine un angle orienté :

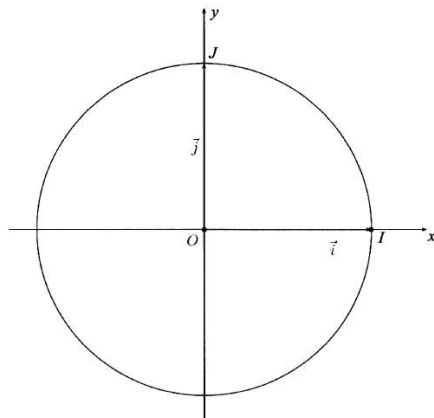


Dans le cercle trigonométrique, tout angle orienté a pour origine la demi-droite $[Ox)$.

3.3 Mesures d'un angle orienté

Activité 1 :

Sur le cercle trigonométrique on donne $I(1;0)$ et $J(0;1)$. Au départ du point I , un point mobile M parcourt sur le cercle une distance égale à $\frac{\pi}{4}$. indique par M_1 et M_2 les deux positions possibles du point M sur le cercle trigonométrique.

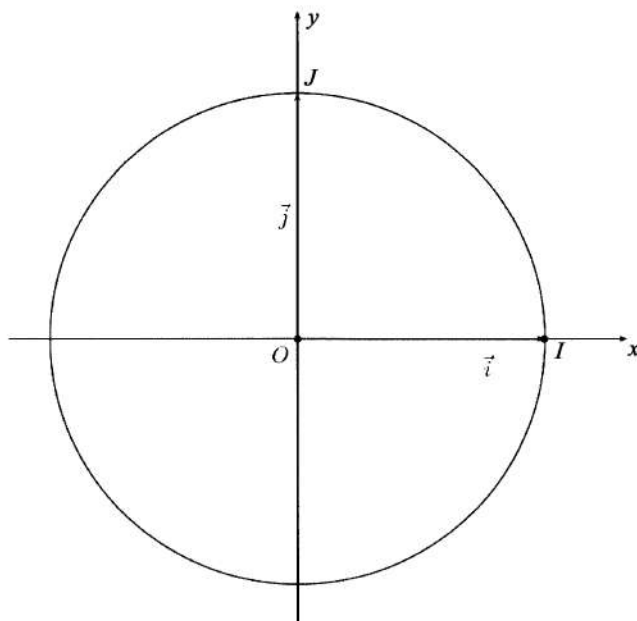


Si M a parcouru le cercle

- dans le sens positif, alors l'angle orienté a pour mesure
- dans le sens négatif, alors l'angle orienté a pour mesure

Activité 2 :

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, détermine



- le point A du cercle tel que $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}$
- le point B du cercle tel que $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}) = -\frac{2\pi}{3}$
- le point C du cercle tel que $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OC}) = \frac{3\pi}{4}$
- le point D du cercle tel que $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OD}) = \frac{11\pi}{4}$
- le point E du cercle tel que $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OE}) = \frac{5\pi}{6}$
- le point F du cercle tel que $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OF}) = -\frac{3\pi}{2}$
- le point G du cercle tel que $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OG}) = \frac{10\pi}{3}$

Qu'est-ce que tu constates ?

.....

Définition :

Sur le cercle trigonométrique on donne $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$.

Soit M un point appartenant au cercle trigonométrique

L'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$ a de mesures.

Si α est une mesure en radians, alors les autres sont de la forme

.....
 c'est-à-dire

Exemples :

Soit $\frac{\pi}{6}$ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$.

Donne quelques autres mesures de cet angle.

.....

Soit 65° une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$.

Donne quelques autres mesures de cet angle.

.....

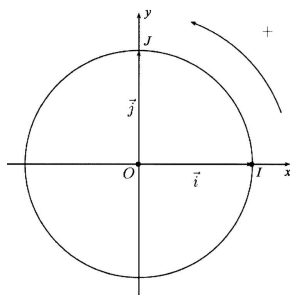
EM4 : exercice 61 page 244

3.4 Mesure principale d'un angle orienté

Activité :

Sur le cercle trigonométrique on donne $I(1;0)$ et $J(0;1)$.

- 1) a) Place le point A sur le cercle trigonométrique tel que $(\vec{OI}; \vec{OA}) = \frac{3\pi}{4}$.

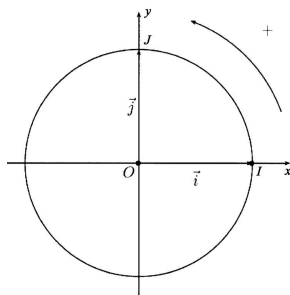


- b) Donne quelques autres mesures de l'angle orienté $(\vec{OI}; \vec{OA})$.

.....

- c) Quelle est la mesure de l'angle orienté $(\vec{OI}; \vec{OA})$ qui correspond au plus petit chemin de I vers A sur le cercle trigonométrique?

- 2) a) Place le point B sur le cercle trigonométrique tel que $(\vec{OI}; \vec{OB}) = \frac{5\pi}{3}$.



- b) Donne quelques autres mesures de l'angle orienté $(\vec{OI}; \vec{OB})$.

.....

- c) Quelle est la mesure de l'angle orienté $(\vec{OI}; \vec{OB})$ qui correspond au plus petit chemin de I vers B sur le cercle trigonométrique?

- 3) Quelle est la longueur maximale du plus petit chemin de I vers un autre point se trouvant sur le cercle trigonométrique?

.....

Définition :

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté il en existe une et une seule qui appartient à l'intervalle

Elle s'appelle **la** de l'angle orienté.

Exemple :

$\dots; -\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}; \dots$ sont des mesures d'un même angle orienté,

..... est la mesure principale de cet angle.

Exercice :

Est-ce que ces mesures d'angles sont des mesures principales ? Sinon cherche la mesure principale.

- $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$

- $\alpha = \frac{\pi}{12}$

- $\alpha = \frac{22\pi}{3}$

EM4 : exercices 54-60 page 244

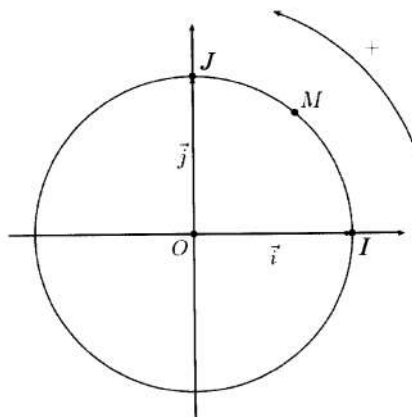
4 Nombres trigonométriques d'un angle orienté

4.1 Cosinus et sinus d'un angle orienté

Activité :

On donne un cercle trigonométrique et les points $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$.

Soit α un angle orienté aigu et M le point tel que $(\vec{OI}; \vec{OM}) = \alpha$.



1) Indique l'angle $(\vec{OI}; \vec{OM})$ sur la figure ci-dessus.

2) Complète :

$$\cos \alpha =$$

$$\sin \alpha =$$

Remarque :

On étend cette définition à tous les angles orientés.

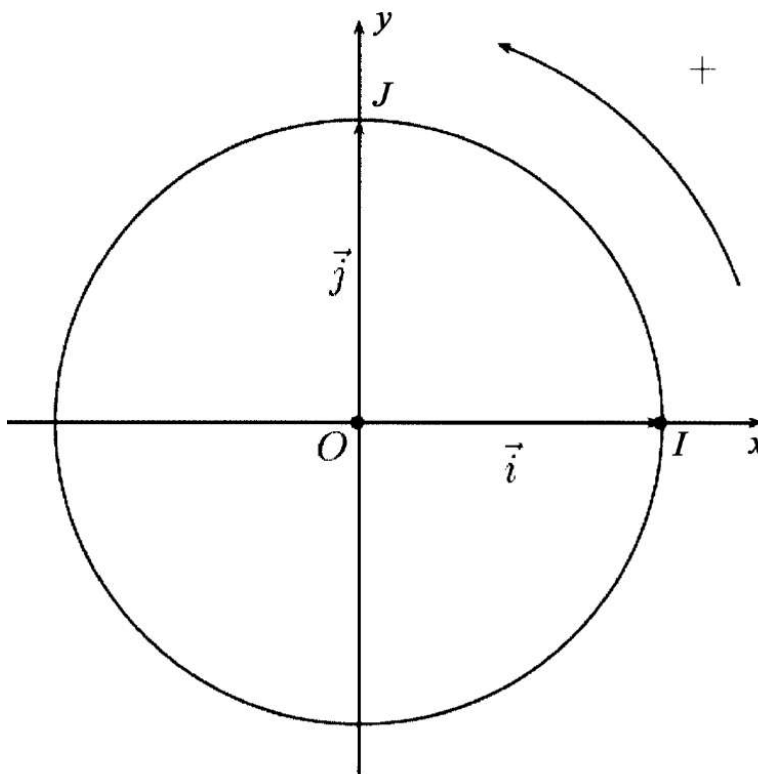
Définition :

Sur le cercle trigonométrique, on donne $I(1;0)$. Soit M un point qui appartient au cercle trigonométrique.

Soit α une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$.

- Le cosinus de α , noté $\cos \alpha$, correspond à
- Le sinus de α , noté $\sin \alpha$, correspond à

Les coordonnées du point M sont



4.2 Tangente et cotangente d'un angle orienté

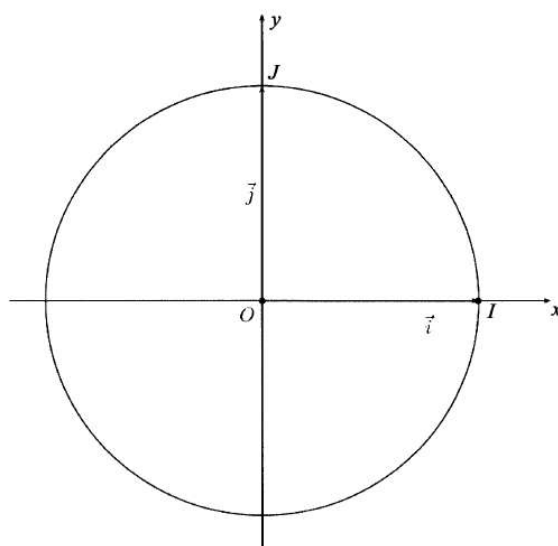
4.2.1 Tangente d'un angle

Activité :

On donne un cercle trigonométrique et les points $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$.

Soit α un angle orienté aigu et M le point tel que $(\vec{OI}; \vec{OM}) = \alpha$.

Trace la droite d tangente en I au cercle trigonométrique. T est le point d'intersection de la droite d et de la droite (OM) .



Remarque :

Si $\alpha = \dots\dots\dots$, le point T n'existe pas, car dans ce cas les droites (OM) et d sont $\dots\dots\dots$

Retenons :

$\tan \alpha$ est $\dots\dots\dots$ du point T avec $\alpha \neq \dots\dots\dots$

Rappel - classe de quatrième :

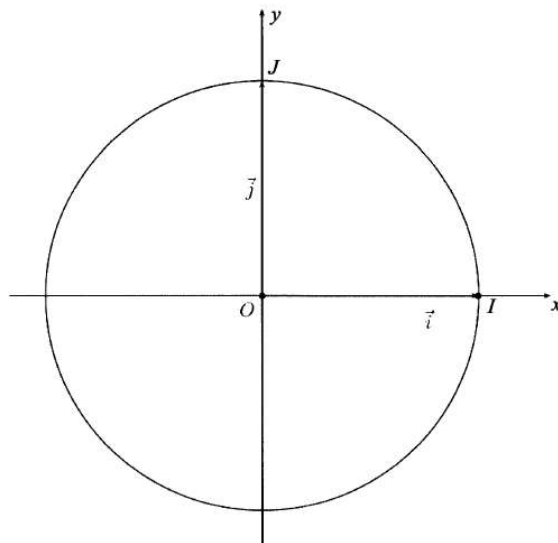
$\tan \alpha = \dots\dots\dots$ si $\alpha \neq \dots\dots\dots$

4.2.2 Cotangente d'un angle

On donne un cercle trigonométrique et les points $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$.

Soit α un angle orienté aigu et M le point tel que $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = \alpha$.

Trace la droite d' tangente en J au cercle trigonométrique. T' est le point d'intersection de la droite d et de la droite (OM) .



Remarque :

Si $\alpha = \dots\dots\dots$, le point T' n'existe pas, car dans ce cas les droites (OM) et d sont $\dots\dots\dots$

Retenons :

$\cot \alpha$ est $\dots\dots\dots$ du point T' avec $\alpha \neq \dots\dots\dots$

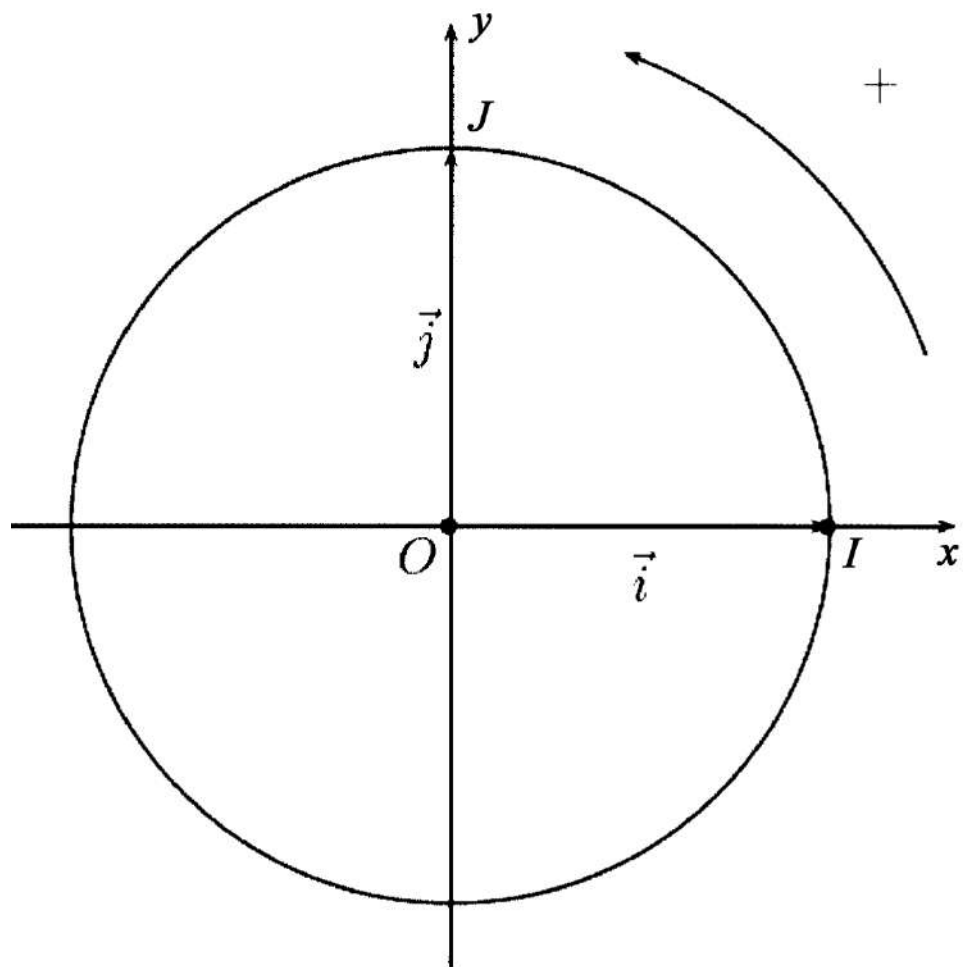
Rappel - classe de quatrième :

$\cot \alpha =$

si $\alpha \neq \dots\dots\dots$

EM4 : exercices 62, 63 page 245

Activité :



- 1) $(\vec{OI}; \vec{OM_1}) = 0$
- 2) $(\vec{OI}; \vec{OM_2}) = \frac{\pi}{6}$
- 3) $(\vec{OI}; \vec{OM_3}) = \frac{2\pi}{3}$
- 4) $(\vec{OI}; \vec{OM_4}) = \frac{\pi}{4}$
- 5) $(\vec{OI}; \vec{OM_5}) = -\frac{\pi}{2}$
- 6) $(\vec{OI}; \vec{OM_6}) = \pi$
- 7) $(\vec{OI}; \vec{OM_7}) = \frac{\pi}{2}$

Tableau récapitulatif

Angle α en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin \alpha$						
$\cos \alpha$						
$\tan \alpha$						
$\cot \alpha$						

Remarque :

1)

- La valeur maximale que peut atteindre l'abscisse de M est ...
- La valeur minimale que peut atteindre l'abscisse de M est ...

Donc :

2)

- La valeur maximale que peut atteindre l'ordonnée de M est ...
- La valeur minimale que peut atteindre l'ordonnée de M est ...

Donc :

Propriété :

Soit α la mesure d'un angle orienté :

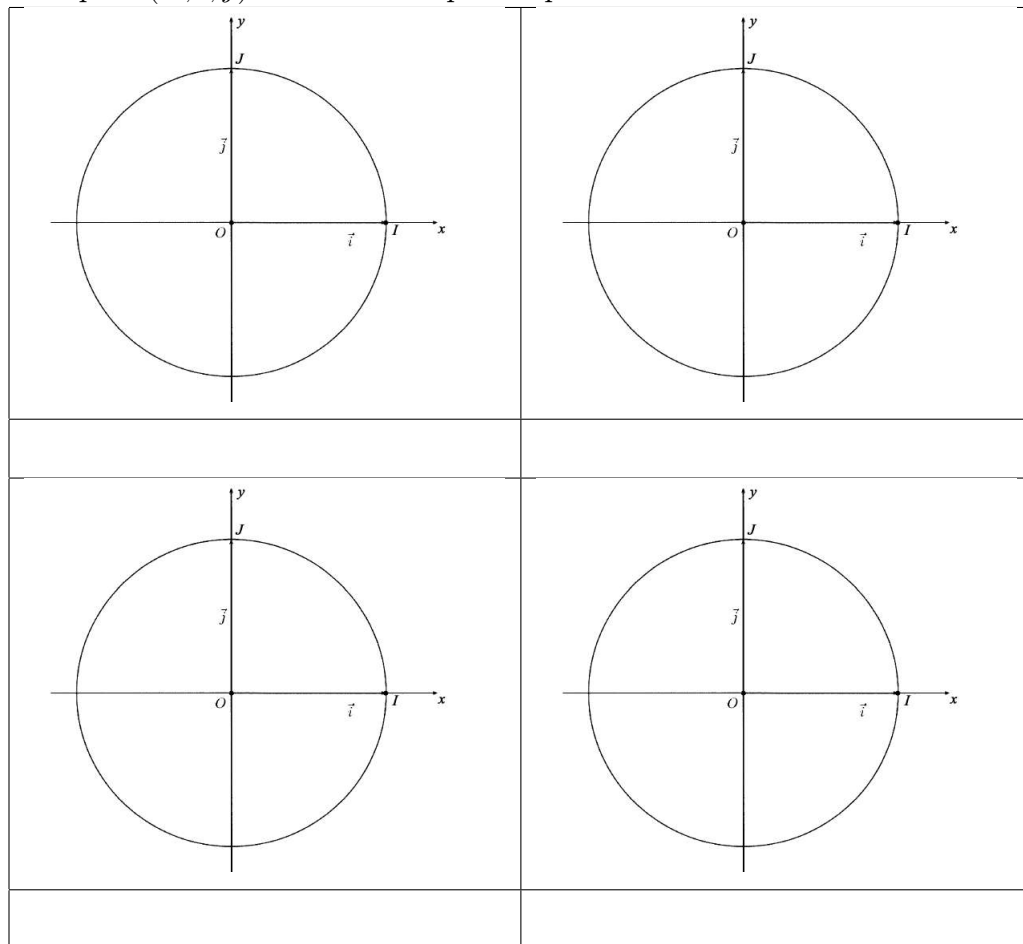
-
-

Remarque :

Il n'y a pas d'encadrement possible pour $\tan \alpha$

4.3 Signes des nombres trigonométriques

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est divisé en quatre quadrants.



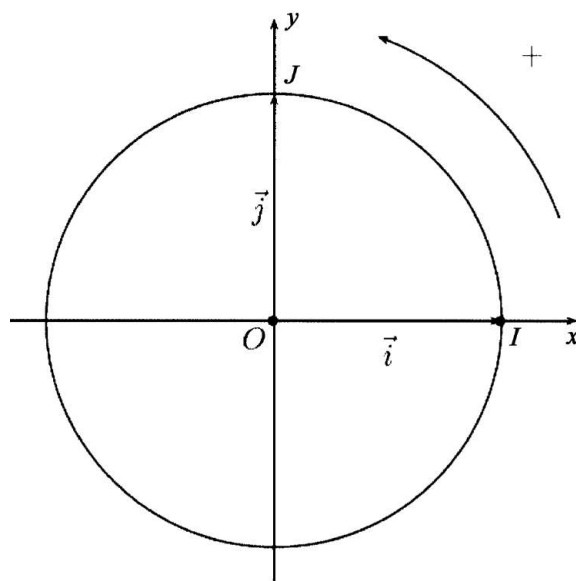
	1 ^{ier} quadrant (I)	2 ^e quadrant (II)	3 ^e quadrant (III)	4 ^e quadrant (IV)
$\cos \alpha$				
$\sin \alpha$				
$\tan \alpha$				
$\cot \alpha$				

EM4 : exercices 64, 65, 66 page 246

4.4 Angles associés

4.4.1 Angles équivalents

Sur le cercle trigonométrique M est un point mobile et α une mesure de l'angle orienté $(\vec{OI}; \vec{OM})$.



Quelles sont les autres mesures de $(\vec{OI}; \vec{OM})$?

Retenos :

Soit α une mesure de l'angle orienté et soit $k \in \mathbb{Z}$.

.....

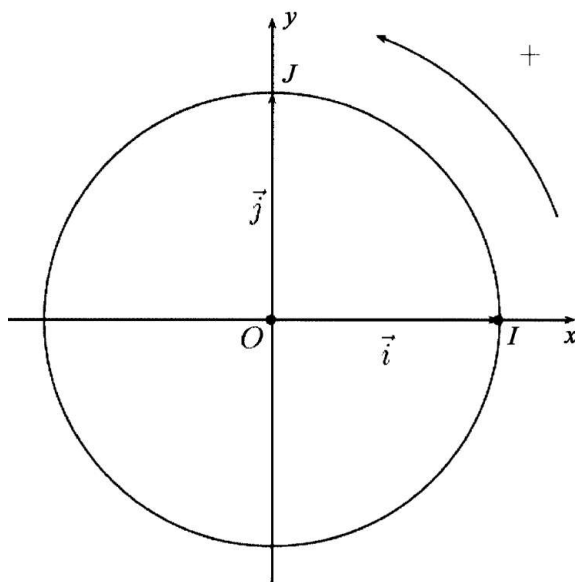
Exemples :

1) $\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) =$

2) $\tan\left(\frac{-19\pi}{4}\right) =$

4.4.2 Angles opposés

Soit M un point du cercle trigonométrique et soit M' le symétrique de M par rapport à (Ox) . Marque le point M' sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



Si $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = \alpha$, alors $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM'}) = \dots\dots\dots$

Définition :

Les angles $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$ sont appelés **angles opposés**.

Retenons :

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

Exemples :

Calcule sans calculatrice :

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$

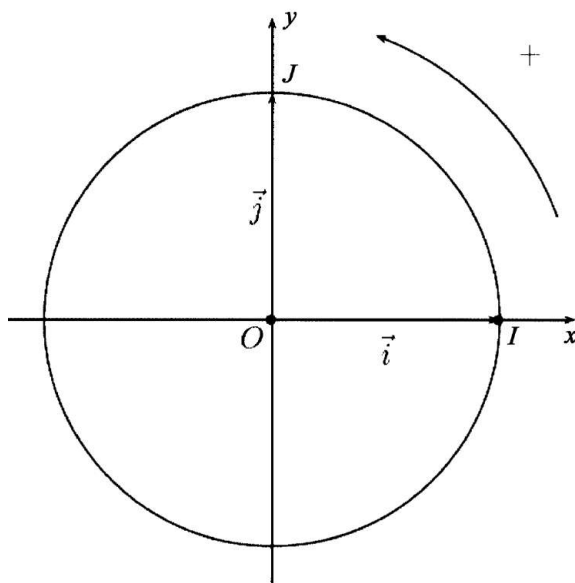
3) $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$

2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$

4) $\cot\left(-\frac{25\pi}{4}\right) =$

4.4.3 Angles supplémentaires

Soit M un point du cercle trigonométrique et soit M' le symétrique de M par rapport à (Oy) . Marque le point M' sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



Si $(\vec{OI}; \vec{OM}) = \alpha$, alors $(\vec{OI}; \vec{OM'}) = \dots\dots\dots$

Définition :

Les angles $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$ sont appelés **angles supplémentaires**.

Retenons :

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Exemples :

Calcule sans calculatrice :

1) $\sin \frac{2\pi}{3} =$

3) $\cot \left(-\frac{5\pi}{6} \right) =$

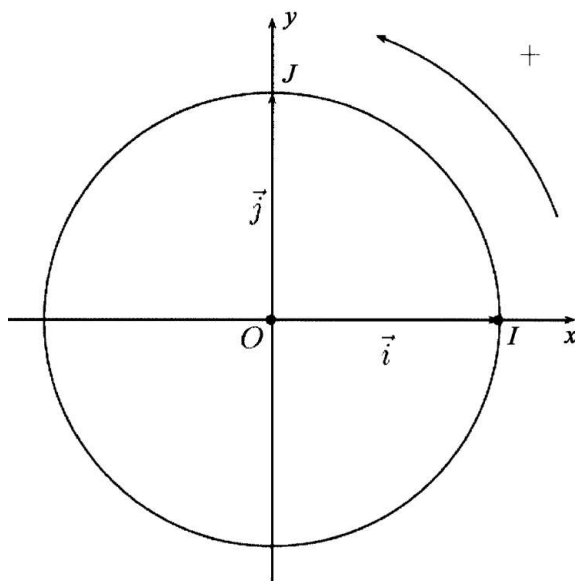
2) $\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) =$

4) $\tan \frac{14\pi}{3} =$

4.4.4 Angles antisupplémentaires

Soit M un point du cercle trigonométrique et soit M' le symétrique de M par rapport à O .

Marque le point M' sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



Si $(\vec{OI}; \vec{OM}) = \alpha$, alors $(\vec{OI}; \vec{OM'}) = \dots\dots\dots$

Définition :

Les angles $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$ sont appelés **angles antisupplémentaires**.

Retenons :

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

Exemples :

Calcule sans calculatrice :

1) $\cos \frac{7\pi}{6} =$

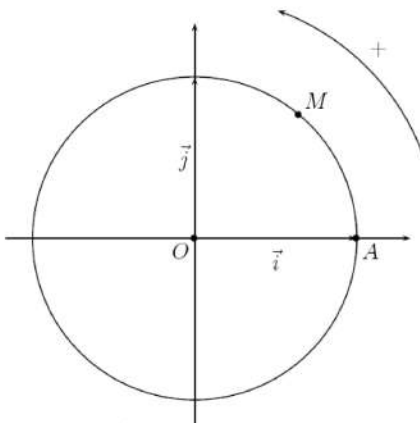
3) $\cot \left(-\frac{4\pi}{3} \right) =$

2) $\cos \left(-\frac{21\pi}{4} \right) =$

4) $\tan 5\pi =$

4.4.5 Angles complémentaires

Soit M un point du cercle trigonométrique. Sachant que $(\vec{OI}; \vec{OM}) = \alpha$ et $(\vec{OI}; \vec{OM}') = \frac{\pi}{2} - \alpha$, placer le point M' .



Définition :

Les angles et sont appelés **angles complémentaires**.

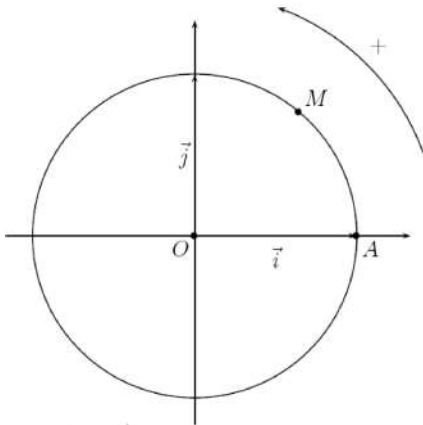
Retenons :

.....

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

4.4.6 Angles α et $\frac{\pi}{2} + \alpha$

Soit M un point du cercle trigonométrique. Sachant que $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + \alpha$, place le point M' .



Retenons :

EM4 : exercices 68, 69, 70 page 246, exercices 87, 88, 89,exercices 106, 107, 108
page 253

EM4 : exercices 219, 220 page 278

Feuille cercle trigonométriques et angles : exercices 1-10

Résumé :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(\alpha + k \cdot 2\pi) = \tan \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cot \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

Angle α en degrés	0°	30°	45°	60°	90°
Angle α en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	//
$\cot \alpha$	//	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

5 Équations trigonométriques

5.1 Équation de la forme $\cos x = a$

5.1.1 Équation de la forme $\cos x = a$ avec $a < -1$ ou $a > 1$

Exemples :

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos x = 3$$

.....

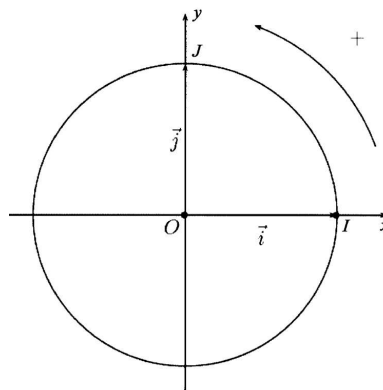
5.1.2 Équation de la forme $\cos x = a$ avec $-1 \leq a \leq 1$

Exemple :

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$



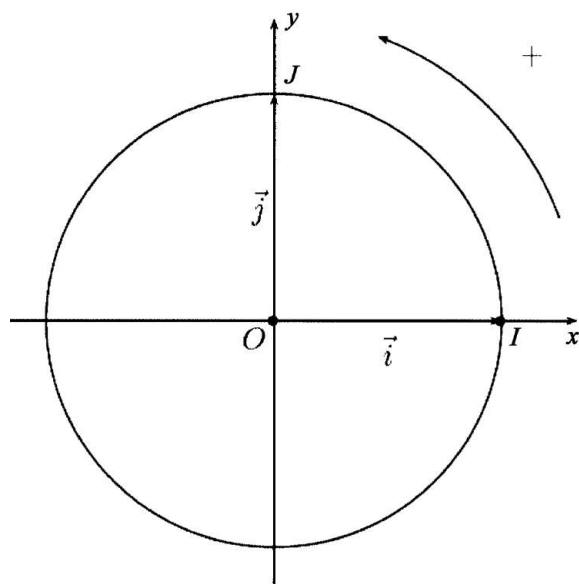
.....

Retenons :

- Si $a \notin [-1; 1]$, alors l'équation $\cos x = a$
- Si $a \in [-1; 1]$, alors l'équation $\cos x = a$

Dans ce cas, il existe au moins un réel α , tel que $a = \cos \alpha$.

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$



Cas particuliers :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1) $\cos x = 1$

.....

2) $\cos x = -1$

.....

5.2 Équation de la forme $\sin x = a$

5.2.1 Équation de la forme $\sin x = a$ avec $a < -1$ ou $a > 1$

Exemples :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1) $\sin x = 5$

.....

2) $\sin x = -2$

.....

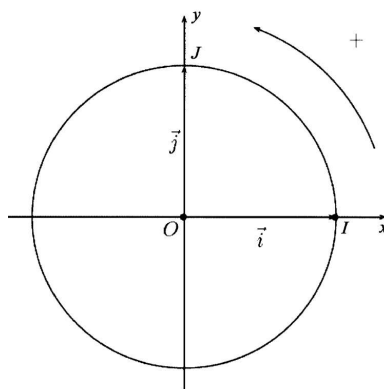
5.2.2 Équation de la forme $\sin x = a$ avec $-1 \leq a \leq 1$

Exemples :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1) $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{.....} \\ \text{.....} \\ \text{.....} \end{array} \right.$$



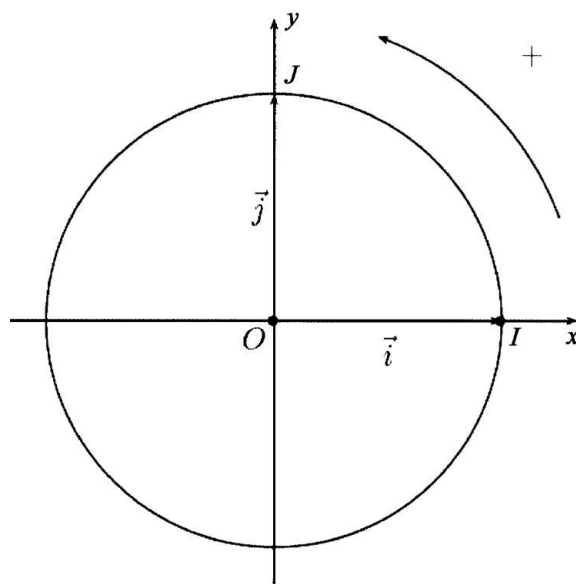
.....

Retenons :

- Si $a \notin [-1; 1]$, alors l'équation $\sin x = a$
- Si $a \in [-1; 1]$, alors l'équation $\sin x = a$

Dans ce cas, il existe au moins un réel α , tel que $a = \sin \alpha$.

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$



Cas particuliers, si $a = -1$ ou $a = 1$:

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1) $\sin x = 1$

.....

2) $\sin x = -1$

.....

5.3 Équation $\tan x = a$

Exemples :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

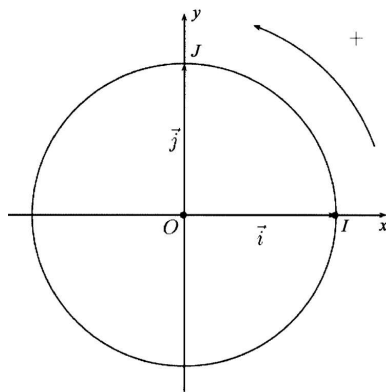
Domaine de définition :

1) $\tan x = 1 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

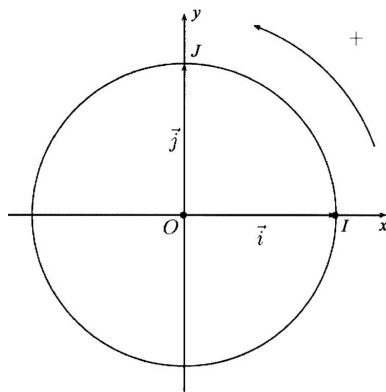
ce qu'on peut résumer en une seule formule :

$$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$$



.....

Retenons :



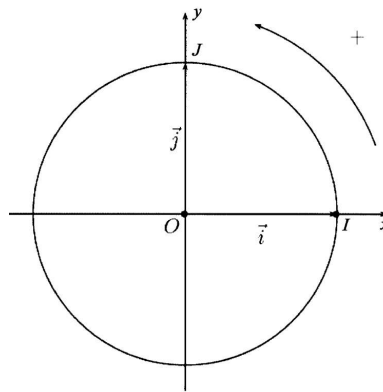
$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

2) $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$

$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$

$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$



$\dots\dots\dots$

EM4 : exercices 221, 222, 223, 224 page 278, 253 page 283

Feuille d'exercice : équations trigonométriques

6 Théorème d'Al Kashi (théorème de Pythagore généralisé ou relations aux cosinus)

6.1 Théorème d'Al Kashi ou théorème de Pythagore généralisé

Relation d'Al Kashi :

ABC est un triangle. On pose : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$, $\hat{C} = \widehat{ACB}$

On a :

$$a^2 = \dots\dots\dots$$

$$b^2 = \dots\dots\dots$$

$$c^2 = \dots\dots\dots$$

Démonstration :

Premier cas : Les trois angles du triangle ABC sont aigus.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Deuxième cas : Un des trois angles du triangle ABC est obtus.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6.2 Aire d'un triangle et théorème des sinus

Formule de l'aire :

ABC est un triangle. On pose : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$, $\hat{C} = \widehat{ACB}$

L'aire S du triangle ABC vaut :

$$S = \dots\dots\dots$$

$$S = \dots\dots\dots$$

$$S = \dots\dots\dots$$

Démonstration :

Premier cas : $\hat{A}$ est un angle aigu

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Deuxième cas : $\hat{A}$ est un angle obtus

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Conséquence :

On a :

$$2S = \dots\dots\dots$$

En multipliant $2S$ par $\frac{1}{abc}$ avec $abc \neq 0$, on obtient :

$$\dots\dots\dots$$

Or les sinus des angles d'un triangle sont différents de zéro et donc :

$$\dots\dots\dots$$

Théorème des sinus :

$$\dots\dots\dots$$

EM4 : exercices 236, 237, 238, 239, 240, 242 page 280

Exercices : feuille Théorème d'Al Kashi

Exemples de limites d'une fonction en un réel.

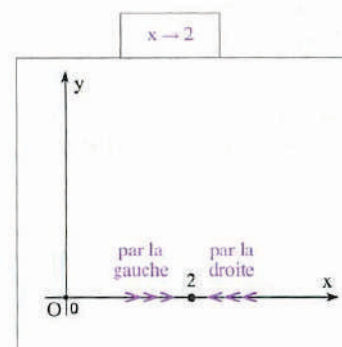
Interprétation graphique

Définition. Soit a un nombre réel.

On dit que le réel x **tend vers** a et on note $x \rightarrow a$, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a , mais différentes de a .

On dit que x **tend vers** a par **la droite** et on note $x \rightarrow a^+$, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a et $x > a$.

On dit que x **tend vers** a par **la gauche** et on note $x \rightarrow a^-$, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a et $x < a$.



Exemple 1. Soit $f : x \mapsto x^2$. Lorsque $x \rightarrow 2$, alors $f(x) \rightarrow 4$. Illustrons cette affirmation par un tableau des images de la fonction f :

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	3,61	3,9601	3,996001	3,99960001	4	4,00040001	4,004001	4,0401	4,41

On écrit :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

et on lit : la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers 2, est égale à 4. Remarquons que cette limite est précisément $f(2)$. On dit que f **est continue en** 2.

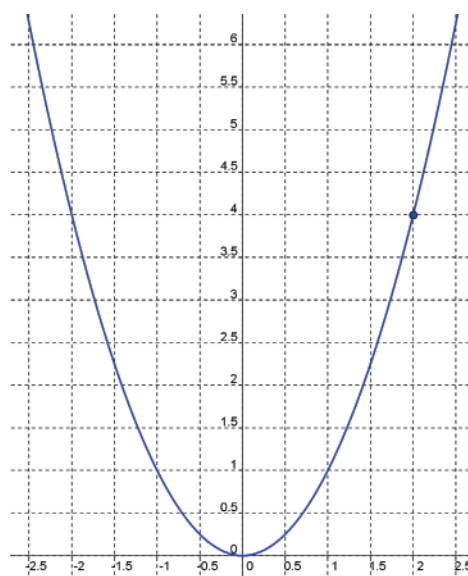
De même, on a : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9 = f(3)$

On dit que f **est continue en** 3.

En fait, pour tout autre réel a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

On dit que f **est continue en** tout réel a .



Définition. a) Soit f une fonction numérique d'une variable réelle. On dit que :

- a) f est **continue** en le réel a du domaine de f si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
 b) f est **continue à droite** en le réel a du domaine de f si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
 c) f est **continue à gauche** en le réel a du domaine de f si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Le **domaine de continuité** de f , noté $\text{dom}_c f$, est l'ensemble des réels a tels que f est continue en a .

Pour la fonction $f : x \mapsto x^2$ ci-dessus, on a : $\text{dom } f = \text{dom}_c f = \mathbb{R}$, car f est définie et continue en tout réel a . Intuitivement, on peut tracer $\mathcal{G}_f$ **sans lever le crayon**.

Propriété. Si $a \in \text{dom}_c f$ alors , donc $\text{dom}_c f \subset \text{dom } f$.

En effet, si $a \notin \text{dom } f$, alors on ne peut pas avoir $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

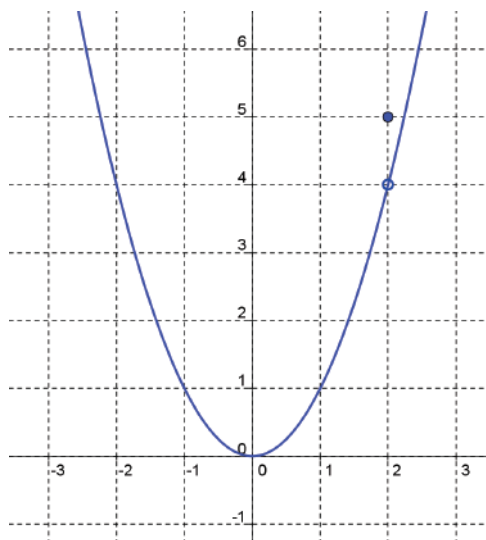
Attention : Si $a \in \text{dom } f$ alors f n'est pas nécessairement continue en a .

Exemple 2. Soit $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

On a toujours : $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$, car la valeur de la fonction g en $x = 2$ ne nous intéresse pas lorsque nous calculons sa limite en 2. Mais g n'est pas continue en 2 car $g(2) = 5 \neq 4$: $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4 \neq g(2)$

g est continue en tout réel sauf en 2. Pour la fonction g , on a donc :

$$\text{dom } g = \mathbb{R} , \text{ mais } \text{dom}_c g = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

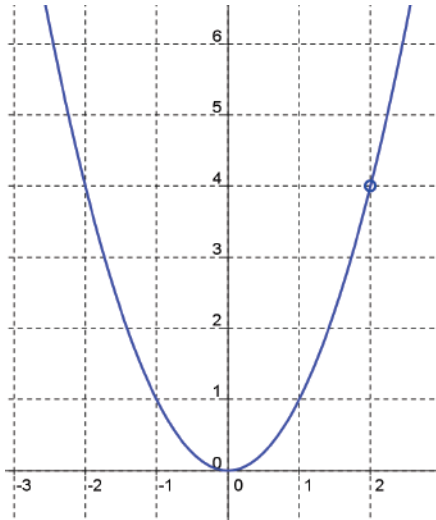


Exemple 3. Soit $h : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ / & \text{si } x = 2 \end{cases}$

Le $/$ dans la définition signifie que h n'est pas définie en 2. La limite de h en 2 existe, mais h n'est pas continue en 2 car $h(2)$ n'existe pas : $\text{dom } h = \text{dom}_c h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 4$$

Nous dirons que le graphe de h présente un *point creux* ou un *trou* en $(2, 4)$.



Exemple 4. Soit

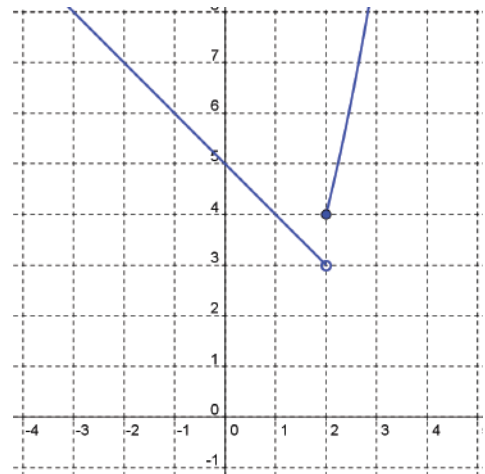
$$k : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x + 5 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4 = k(2)$$

k est continue à droite en 2. Mais k n'est pas continue à gauche en 2 car :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x + 5) = 3 \neq k(2)$$



Comme $\lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} k(x)$, on a $\lim_{x \rightarrow 2} k(x)$ n'existe pas !

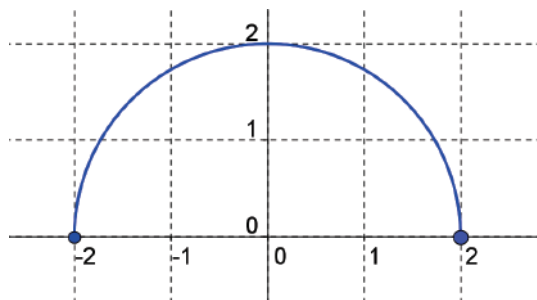
La fonction k est continue en tout réel, sauf en 2 : $\text{dom } k = \mathbb{R}$ et $\text{dom}_c k = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Intuitivement, cela signifie qu'on peut dessiner le graphe de k sans lever le crayon, sauf pour $x = 2$. Nous dirons que le graphe de k présente un *saut* d'amplitude 1 à l'abscisse 2.

Exemple 5. Soit $r : x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$ la fonction dont le graphe est le demi-cercle de centre l'origine et de rayon 2. On a : $\text{dom } r = [-2, 2]$.

r est **continue à droite** en -2 et **à gauche** en 2 :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -2^+} r(x) = 0 = r(-2)} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 2^-} r(x) = 0 = r(2)}$$



Par convention, nous dirons aussi que r est **continue** en -2 et en 2 . Nous avons le droit d'écrire :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -2} r(x) = 0 = r(-2)} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 2} r(x) = 0 = r(2)}$$

En effet, le domaine de la fonction étant $[-2, 2]$, lorsqu'on écrit $x \rightarrow -2$ (resp. $x \rightarrow 2$), il est sous-entendu que cela signifie $x \rightarrow -2^+$ (resp. $x \rightarrow 2^-$). On peut donc omettre le $+$ derrière -2 (resp. le $-$ derrière 2) dans une telle situation.

$$\text{dom } r = \text{dom}_c r = [-2, 2].$$

Evidemment les deux limites $\lim_{x \rightarrow -2^-} r(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} r(x)$ n'ont pas de sens. De même, il serait absurde de vouloir calculer $\lim_{x \rightarrow 3} r(x)$. Cette limite n'existe pas puisqu'on ne peut pas choisir une suite de réels dans le domaine de r qui tend vers 3.

Exemple 6. Soit

$$m : x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ / & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction oscille une infinité de fois entre -1 et $+1$ sur tout intervalle de la forme $]0, \alpha[$, où $\alpha > 0$.

Voilà pourquoi $\lim_{x \rightarrow 0^+} m(x)$ n'existe pas. En particulier la fonction m n'est pas continue en 0 . Elle est pourtant continue en tout autre réel de son domaine : $\text{dom}_c m = \mathbb{R}_+^*$.

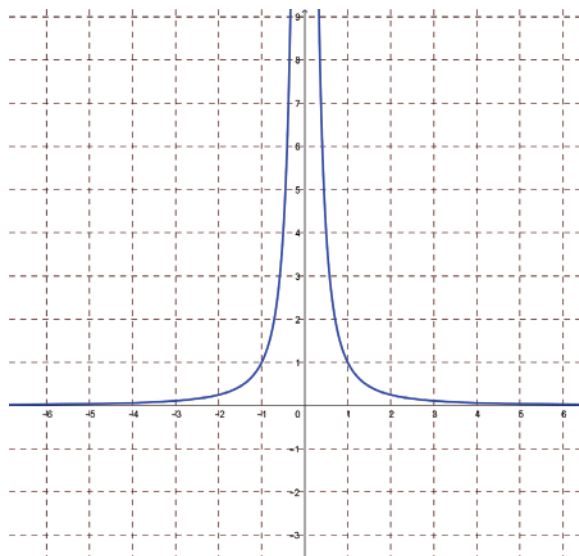
Exemple 7. Considérons le tableau des images suivant de la fonction $n : x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

x	1	$\pm 10^{-1}$	$\pm 10^{-2}$	$\pm 10^{-3}$	$\pm 10^{-10}$	...
$n(x)$	1	10^2	10^4	10^6	10^{20}	...

Nous observons que si x tend vers 0, alors $n(x)$ devient arbitrairement grand, c.-à-d. tend vers $+\infty$. Nous écrivons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} n(x) = +\infty$$

Le graphe de n admet l'axe des ordonnées comme *asymptote verticale* (AV). Evidemment, la fonction n n'est pas continue en 0 car $n(0)$ n'existe pas, mais n est continue en tout autre réel : $\text{dom } n = \text{dom}_c n = \mathbb{R}^*$.



Exemple 8. Considérons les tableaux des images suivants de la fonction $i : x \mapsto \frac{1}{x}$.

x	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-10}	...
$n(x)$	1	10^1	10^2	10^3	10^{10}	...

x	-1	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-10}	...
$n(x)$	-1	-10^1	-10^2	-10^3	-10^{10}	...

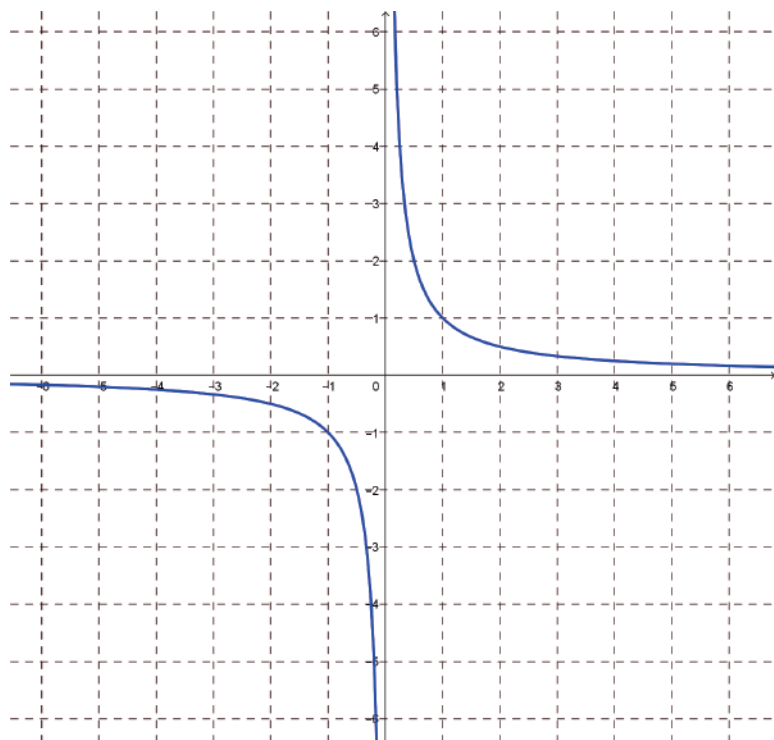
Nous observons que si x tend vers 0 par valeurs positives, alors $i(x)$ tend vers $+\infty$, alors que si x tend vers 0 par valeurs négatives, alors $i(x)$ tend vers $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Bien sûr, puisque les deux limites diffèrent, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ n'existe pas}$$

Le graphe de i admet toujours l'axe des ordonnées comme *asymptote verticale*.



Simplification d'expressions contenant des valeurs absolues & applications

Rappel : Définition de la valeur absolue :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Donc par exemple : $|3| = |-3| = 3$.

Propriété : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x| \geq 0$

Formules :

a) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

b) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

c) Attention : $|a + b| \leq |a| + |b|$ (*inégalité triangulaire*)

P. ex. : $3 = |-5 + 8| < |-5| + |8| = 13$

Comment écrire une expression sans valeur absolue ?

a) Expressions contenant *une seule* valeur absolue.

Exemple :

$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } 2x - 4 \geq 0 \text{ c.-à.d. si } x \geq 2 \\ -2x + 4 & \text{si } 2x - 4 \leq 0 \text{ c.-à.d. si } x \leq 2 \end{cases}$$

Il est pratique de faire la simplification dans un tableau :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x - 4$	$-$	0	$+$
$ 2x - 4 $	$-2x + 4$	0	$2x - 4$

On écrit l'**opposé** de l'expression
entre $| \quad |$ là où elle est $-$.

On écrit l'expression entre $| \quad |$ là
où elle est $+$.

La ligne dans le tableau qui contient le signe de $2x - 4$ est en fait *superflue* d'après la :

Règle du signe d'un binôme $ax + b$ du 1^{er} degré ($a \neq 0$) :

Le signe de a se trouve toujours à droite.

Dans la suite, on fera donc directement le tableau de simplification suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$ 2x - 4 $	$-2x + 4$	0	$2x - 4$

De même, *par exemple* pour simplifier $|3 - x|$, on obtient :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$ 3 - x $	$3 - x$	0	$x - 3$

Rappelons également la :

Règle du signe d'un trinôme $ax^2 + bx + c$ du 2^e degré ($a \neq 0$) :

Le signe de a est partout, sauf entre les racines.

Donc, *par exemple*, pour simplifier $|x^2 - 6x - 7|$, on détermine d'abord les racines du trinôme, qui sont -1 et 7 , puis on obtient le tableau de simplification suivant :

x	$-\infty$	-1		7	$+\infty$
$ x^2 - 6x - 7 $	$x^2 - 6x - 7$	0	$-x^2 + 6x + 7$	0	$x^2 - 6x - 7$

Autre exemple :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$ 4 - 9x^2 $	$9x^2 - 4$	0	$4 - 9x^2$	0	$9x^2 - 4$

Exercice 1 Ecrire sans valeur absolue à l'aide d'un tableau les expressions suivantes : a) $|4 - \frac{x}{2}|$ b) $|3x^2 - 4x + 8|$ c) $|-2x^2 - 1|$ d) $|-5x + \frac{1}{3}|$
e) $|-2x^2 + 3x + 35|$ f) $|(x + 5)^2|$ g) $|-x^2 - 2x - 1|$.

b) Expressions contenant *plusieurs* valeurs absolues :

Il faut compter *une ligne* pour chaque valeur absolue dans le tableau.

Exemple. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = |x - 2| - 2|3 - x|.$$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$ x - 2 $	$-x + 2$	0	$x - 2$	1	$x - 2$
$ 3 - x $	$3 - x$	1	$3 - x$	0	$x - 3$
$f(x)$	$-x + 2$ $-2(3 - x)$ $= x - 4$	-2	$x - 2$ $-2(3 - x)$ $= -8 + 3x$	1	$x - 2$ $-2(x - 3)$ $= -x + 4$

Remarque : Les valeurs 2 et 3 de la 1^{re} ligne du tableau sont parfois appelées *valeurs critiques* de $f(x)$. En effet, pour ces valeurs-là, l'une ou l'autre valeur absolue change d'expression et donc aussi $f(x)$.

Exercice 2 Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 7$ pour l'exemple ci-dessus.

Exercice 3 Ecrire sans valeur absolue à l'aide d'un tableau les fonctions suivantes :

a) $g(x) = |x - 1| + |3 - 2x|$

b) $h(x) = |x^2 - 1| - 3 \cdot |x^2 + 2x - 15|$

c) $k(x) = \frac{|x| - 2}{|x^2 - 4|}$ (Attention au domaine ici !)

Applications. Les tableaux de simplification précédents servent dans beaucoup de situations où interviennent des valeurs absolues :

- résolution d'équations et d'inéquations,
- représentation graphique de fonctions,
- calcul de limites ...

Exercice résolu 4

(1) Quel est le domaine de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{x - 1}{|2x + 1| - 3 \cdot |2 - x|} ?$$

(2) Ecrire $g(x)$ sans valeur absolue sur son domaine.

(3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 7} g(x)$ et interpréter graphiquement.

Réponse

(1) C.E. : $|2x + 1| - 3 \cdot |2 - x| \neq 0$

$$\Leftrightarrow |2x + 1| \neq |3 \cdot (2 - x)|$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 \neq 3 \cdot (2 - x) \text{ et } 2x + 1 \neq -3 \cdot (2 - x)$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 \neq 6 - 3x \text{ et } 2x + 1 \neq -6 + 3x$$

$$\Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq 7$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b$$

Donc : $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1, 7\}$.

(2) Simplifions d'abord le dénominateur de $g(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$ 2x + 1 $	$-2x - 1$	0	$2x + 1$		$2x + 1$
$ 2 - x $	$2 - x$		$2 - x$	0	$x - 2$
$ 2x + 1 $ $-3 \cdot 2 - x $	$-2x - 1$ $-3 \cdot (2 - x)$ $= x - 7$	$-\frac{15}{2}$	$2x + 1$ $-3 \cdot (2 - x)$ $= 5(x - 1)$	5	$2x + 1$ $-3 \cdot (x - 2)$ $= -x + 7$

Donc :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1		2		7	$+\infty$
$g(x)$	$\frac{x-1}{x-7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	//	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{x-1}{-x+7}$	//	$\frac{x-1}{-x+7}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{5(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$;

$$\lim_{x \rightarrow 7^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{x-1}{-x+7} = \frac{6}{0^+} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{x-1}{-x+7} = \frac{6}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} g(x) = \text{n'existe pas.}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x + 7$	+	0	-

Interprétation graphique : La courbe représentative de g admet un trou en $(1, \frac{1}{5})$ et une A.V. d'équation $x = 7$.

Exercice résolu 5

Soit $f(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x^2 - 1|}$.

(1) Quel est le domaine de la fonction f ?

(2) Etudier la parité de f .

- (3) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue sur son domaine.
 (4) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ et interpréter graphiquement.

Réponse

- (1) C.E. : $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ et $x \neq -1$.

Donc : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

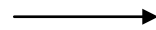
- (2) f est une fonction paire, car :

$$\left(\forall x \in \mathcal{D}_f \right) \quad f(-x) = \frac{(-x)^2 - |-x|}{|(-x)^2 - 1|} = \frac{x^2 - |x|}{|x^2 - 1|} = f(x).$$

- (3) Les valeurs critiques sont $-1, 0$ et 1 . Comme f est paire, on peut réduire l'étude à $\mathbb{R}_+$. D'où le tableau de simplification :

x	0		1	$+\infty$
$ x $	0	x		x
$ x^2 - 1 $		$1 - x^2$	0	$x^2 - 1$
$f(x)$	0	$\frac{x^2 - x}{1 - x^2}$ $= \frac{x(x-1)}{(1-x)(1+x)}$ $= -\frac{x}{x+1}$	/	$\frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ $= \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}$ $= \frac{x}{x+1}$

- (4) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{x}{x+1} \right) = -\frac{1}{2},$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2},$

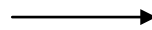


$\mathcal{C}_f$ admet un « saut »
d'amplitude 1 en $x = 1$.

Comme f est paire, on obtient les limites en -1 par symétrie du graphe :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{1}{2},$$



$\mathcal{C}_f$ admet un « saut »
d'amplitude -1 en $x = -1$.

Remarque. Bien sûr $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ n'existent pas.

Relations et fonctions.

Bijections et réciproques

1. Relations et relations réciproques

Rappel. Le produit cartésien de A par B , noté $A \times B$, est l'ensemble de tous les couples (a, b) , où $a \in A$ et $b \in B$. Donc $A \times B = \{(a, b) / a \in A \text{ et } b \in B\}$.

Définition. Une **relation** $\mathcal{R}$ d'un ensemble A vers un ensemble B est un triplet $(A, B, \mathcal{G})$ où :

- A est l'**ensemble de départ** de la relation ;
- B est l'**ensemble de d'arrivée** de la relation ;
- $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$; $\mathcal{G}$ est appelé le **graphe** de la relation $\mathcal{R}$.

Notations : $\mathcal{R} : A \rightarrow B$ signifie que A est l'ensemble de départ de la relation $\mathcal{R}$ et que B est l'ensemble d'arrivée est B . On écrira $a\mathcal{R}b$ ou $a \mapsto b$ au lieu de $(a, b) \in \mathcal{G}$. La flèche met en évidence le fait que relation $\mathcal{R}$ fait **correspondre** l'élément $a \in A$ à l'élément $b \in B$. Dans la suite, les ensembles de départ A et d'arrivée B d'une relation seront toujours des **sous-ensembles de $\mathbb{R}$** .

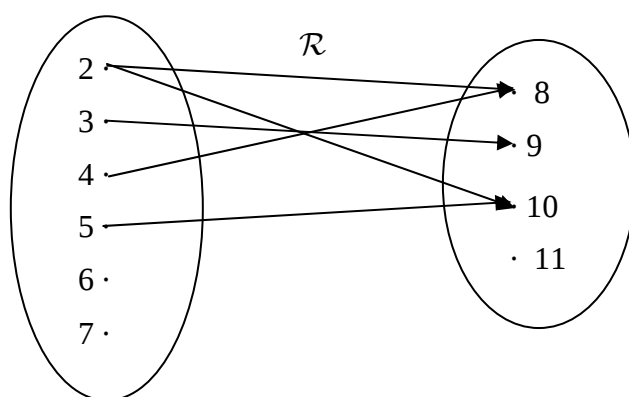
Pour comprendre la définition, nous donnons des exemples :

- (1) Soit $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $B = \{8, 9, 10, 11\}$. La relation

$$\mathcal{R} : A \rightarrow B, x \mapsto y \Leftrightarrow x \text{ est un diviseur de } y$$

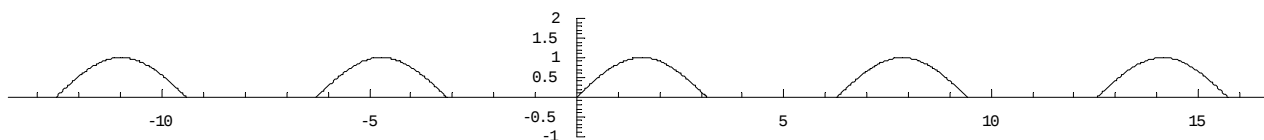
a comme graphe $\mathcal{G} = \{(2, 8), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 10)\}$.

Le diagramme fléché ou diagramme sagittal de cette relation est :



- (2) Soit $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}_+$. La relation $f : A \rightarrow B, x \mapsto y \Leftrightarrow y = \sin x$

est une fonction car à chaque réel x de A correspond au plus un réel $y = \sin x$ de B . Plus précisément, l'image de x est $\sin x$ si et seulement si $\sin x \geq 0$. La représentation graphique de f est donc la partie de la sinusoïde $y = \sin x$ située au-dessus de l'axe des abscisses.

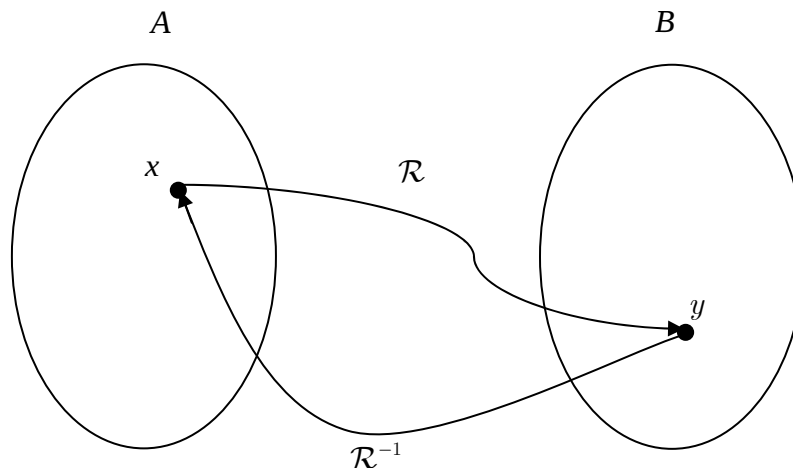


Rappel. Une fonction f d'un ensemble A vers un ensemble B est une relation de A vers B telle que à chaque élément x de A correspond au plus un élément y de B , appelé image de x par f .

Définition. Soit $\mathcal{R} = (A, B, \mathcal{G})$ une **relation** d'un ensemble A vers un ensemble B , dont le graphe est noté $\mathcal{G}$. La relation réciproque de $\mathcal{R}$, notée $\mathcal{R}^{-1}$, est le triplet $(B, A, \mathcal{G}^{-1})$ où :

$$\mathcal{G}^{-1} = \{(y, x) \in B \times A / (x, y) \in \mathcal{G}\}.$$

En d'autres termes, pour obtenir $\mathcal{R}^{-1}$ à partir de $\mathcal{R}$, on échange les ensembles de départ et d'arrivée et on inverse le sens des flèches :



Remarquons que : $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$.

Pour les exemples (1) et (2) ci-dessus on a respectivement :

- (1) $\mathcal{R}^{-1} : B \rightarrow A, y \mapsto x \Leftrightarrow x$ est un diviseur de $y \Leftrightarrow y$ est un multiple de x .

Le graphe de cette relation est :

$$\mathcal{G}^{-1} = \{(8, 2), (10, 2), (9, 3), (8, 4), (10, 5)\}.$$

- (2) $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto x \Leftrightarrow y = \sin x$. Si l'on veut représenter graphiquement cette relation dans un repère tel que l'axe des abscisses représente l'ensemble de départ $\mathbb{R}_+$ et l'axe des ordonnées représente l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, il convient d'échanger les lettres x et y dans la définition :

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y \Leftrightarrow x = \sin y$$

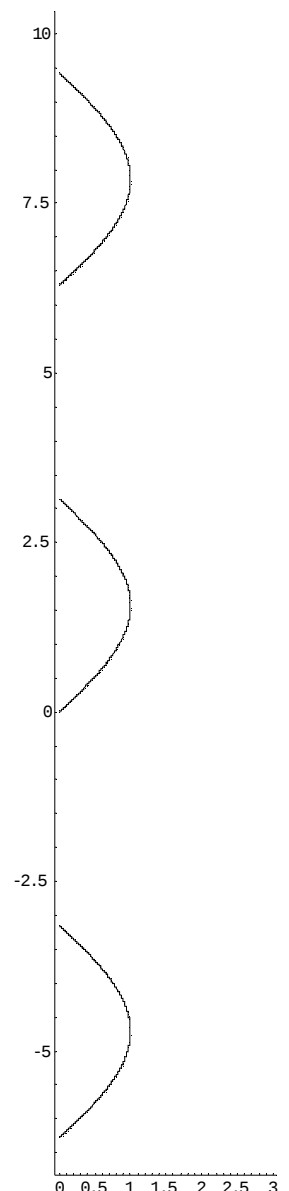
La représentation graphique est ci-contre. Remarquons que f^{-1} n'est pas une fonction, car aux x compris entre 0 et 1 correspondent une infinité de y .

Remarques :

- (1) La relation réciproque d'une fonction n'est pas nécessairement une fonction ! Nous verrons par la suite que la réciproque d'une fonction f est une fonction ssi f est **injective**.
- (2) Dans un repère orthonormé, les graphes d'une relation $\mathcal{R}$ et de sa réciproque $\mathcal{R}^{-1}$ sont toujours symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$ (1^{re} bissectrice du repère.) En effet :

$$(x, y) \in \mathcal{G} \text{ (graphe de } \mathcal{R}) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathcal{G}^{-1} \text{ (graphe de } \mathcal{R}^{-1})$$

Or, les points (x, y) et (y, x) sont toujours symétriques par rapport à Δ .



2. Fonctions de A dans B . Domaine et image. Restriction et prolongement

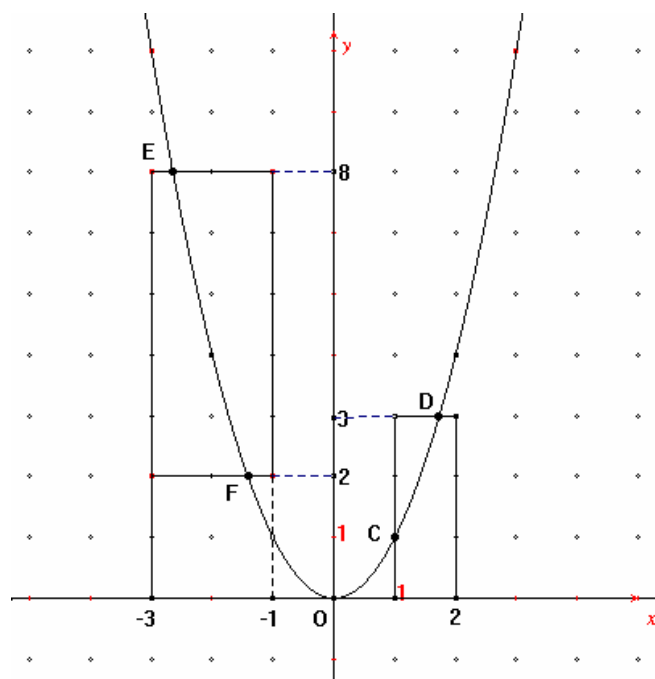
Dans la suite, nous considérons uniquement des relations qui sont des fonctions numériques d'une variable réelle. Les ensembles de départ A et d'arrivée B ne sont pas nécessairement égaux à $\mathbb{R}$. Par exemple, A et B peuvent être des **intervalles** de $\mathbb{R}$. Voici deux fonctions de ce genre :

$$\begin{array}{ll} f_1: [1,2] \rightarrow [0,3] & f_2:]-3,-1[\rightarrow]2,8[\\ x \mapsto x^2 & x \mapsto x^2 \end{array}$$

Quoique les deux fonctions appliquent x sur x^2 , elles ne sont pas égales puisque leurs ensembles de départ et d'arrivée diffèrent. Rappelons l'égalité de deux fonctions en général :

Définition. Deux fonctions f et g sont **égales** si et seulement si elles ont le même ensemble de départ A , le même ensemble d'arrivée B , le même domaine D et si $(\forall x \in D) f(x) = g(x)$.

Représentons graphiquement les deux fonctions f_1 et f_2 :



Traçons d'abord la parabole d'équation $y = x^2$.

La courbe représentative de f_1 est la partie de cette parabole tombant dans le **rectangle fermé** $[1,2] \times [0,3]$. C'est donc l'arc de parabole fermé $\widehat{CD}$. Dessinez cet arc en couleur !

La courbe représentative de f_2 est la partie de la parabole tombant dans le **rectangle ouvert** $] -3, -1[\times]2, 8[$. C'est donc l'arc de parabole ouvert $\widehat{EF}$. Dessinez cet arc en couleur !

Intéressons nous à présent aux **domaines** des deux fonctions :

- Le domaine de f_1 n'est pas égal à l'ensemble de départ $[1,2]$. En effet, par exemple $2 \notin \text{dom} f_1$ puisque $2^2 = 4$, mais 4 n'est pas un élément de l'ensemble d'arrivée $[0,3]$. Quel est le plus grand x appartenant à $\text{dom} f_1$? Visiblement, c'est l'antécédent de 3 par f_1 , i.e. $\sqrt{3}$. Donc : $\text{dom} f_1 = [1, \sqrt{3}]$.
- De même, le domaine de f_2 n'est pas égal à l'ensemble de départ $] -3, -1[$. Il est facile de voir que $\text{dom} f_2 =] -\sqrt{8}, -\sqrt{2}[$. C'est un intervalle ouvert cette fois !

Ces exemples montrent qu'il est plus difficile de chercher le domaine d'une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B . En fait, si $f: A \rightarrow B$ est une fonction, alors :

$$\text{dom} f = \{x \in A / f(x) \text{ existe et } f(x) \in B\}$$

Introduisons maintenant la notion d'**image d'un ensemble** par une fonction :

Définition.

- Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction et E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. L'**image de E par f** , noté $f(E)$ est l'ensemble des réels $f(x)$ appartenant à B , tels que $x \in E \cap \text{dom} f$. Donc :

$$f(E) = \{ f(x) \in B / x \in E \cap \text{dom} f \}$$

Ce sont donc les réels y dans B qui ont au moins un antécédent x dans E par f .

- On appelle **image de f** et on note $\text{im } f$ l'ensemble $f(\mathbb{R})$. Donc :

$$\text{im } f = \{ f(x) \in B / x \in \text{dom } f \}$$

Exemples.

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. La représentation graphique de f est la parabole d'équation $y = x^2$, tracée à la page précédente. On a par exemple :
 - $\text{im}(f) = f(\mathbb{R}) = \{ x^2 / x \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}_+$
 - $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ et $f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$
 - $f([0,2]) = [0,4]$ et $f([-3,-1]) = [1,9]$.
- Reprenons les fonctions f_1 et f_2 de la page précédente :
 - $f_1([1,2]) = [1,3]$. En effet, l'image de $[1,2]$ est nécessairement contenue dans l'ensemble d'arrivée $[0,3]$. Or les y dans $[0,3]$ qui ont un antécédent par f_1 sont exactement les éléments de $[1,3]$. Remarquons par ailleurs que : $\text{im } f_1 = f_1([1,2]) = [1,3]$.
 - De même : $\text{im } f_2 = f_2([-3,-1]) = f_2([- \sqrt{8}, -\sqrt{2}]) = [2,8]$.
 - $f_2([0,2]) = \emptyset$ car $[0,2]$ ne contient aucun élément du domaine de $f_2 : [0,2] \cap \text{dom} f_2 = \emptyset$.

Définition. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : A' \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si $A \subset A'$ et $(\forall x \in A) f(x) = g(x)$, alors on dit que f est la **restriction** de g à A et on note $f = g|_A$. On dit aussi que g est un **prolongement** de f à A' .

Exemples.

- Très souvent, $A' = A \cup \{a\}$, où a est un réel. Soit par exemple :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2+x-6}{x-2} \quad \text{et} \quad x \mapsto x+3$$

Ces deux fonctions ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble de départ. Néanmoins, g est un **prolongement** de f à $\mathbb{R}$ car :

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}) f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = x+3 = g(x).$$

La représentation graphique de f est la droite d'équation $y = x+3$ avec un trou en $(2,5)$.

- La fonction $s : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$ est la **restriction** de la fonction $\sin$ à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Représenter graphiquement les deux fonctions !

3. Applications, injections, surjections et bijections

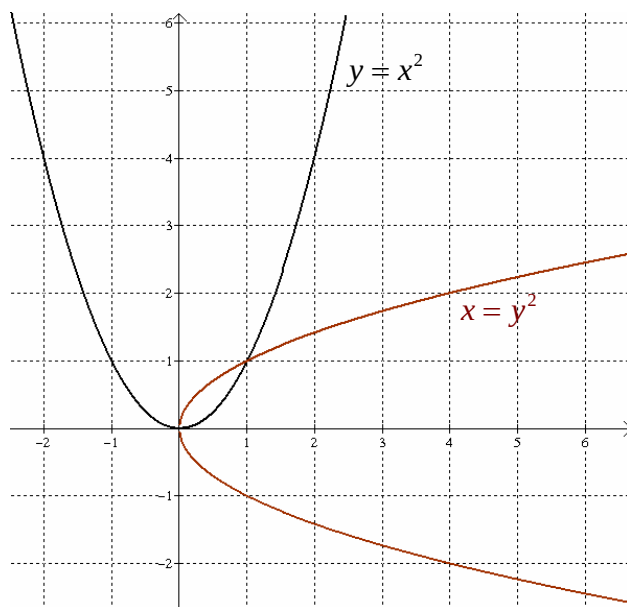
Définition. Soit f une **fonction** d'un ensemble A vers un ensemble B .

- f est **injective** ssi deux éléments distincts du domaine de f ont des images distinctes, c.-à-d.
ssi $(\forall x, x' \in \text{dom } f) \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$,
ssi tout $y \in B$ a **au plus** un antécédent $x \in A$ par f ,
ssi $(\forall y \in B)$ l'équation $f(x) = y$ a **au plus** une solution $x \in A$.
- f est **surjective** ssi $f(A) = B$, c.-à-d.
ssi tout $y \in B$ a **au moins** un antécédent $x \in A$ par f ,
ssi $(\forall y \in B)$ l'équation $f(x) = y$ a **au moins** une solution $x \in A$.
- f est une **application** ssi $\text{dom } f = A$, c.-à-d.
ssi tout $x \in A$ a **une et une seule image** par f dans B .
- f est une **injection** (ou **application injective**) ssi f est une **application** et f est **injective**.
- f est une **surjection** (ou **application surjective**) ssi f est une **application** et f est **surjective**.
- f est une **bijection** (ou **application bijective**)
ssi f est à la fois une **injection** et une **surjection**, c.-à-d.
ssi $\text{dom } f = A$ et tout $y \in B$ a **exactement** un antécédent $x \in A$ par f ,
ssi $(\forall y \in B)$ l'équation $f(x) = y$ a **exactement** une solution $x \in A$.

Remarque : La **condition nécessaire et suffisante** pour que la réciproque d'une fonction $f : A \rightarrow B$ soit encore une fonction est que tout $y \in B$ est au plus une fois image d'un élément de A . En d'autres termes : si $f : A \rightarrow B$ est une fonction, alors f^{-1} est encore une fonction ssi f est **injective**.

Exemples.

- Reprenons les fonctions exemples f_1 et f_2 du paragraphe 2. Ce ne sont pas des applications car $\text{dom } f_1 \neq [1, 2]$ et $\text{dom } f_2 \neq]-3, -1[$. Ce ne sont donc pas non plus des injections, des surjections ou des bijections. Par contre, on peut dire que f_1 et f_2 sont des fonctions injectives. De plus f_2 est surjective mais f_1 n'est pas surjective.
- La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est une application car $\text{dom } f = \mathbb{R}$. Ce n'est pas une injection car par exemple -2 et 2 ont la même image 4 par f . f n'est pas non plus une surjection car $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$; les réels strictement négatifs n'ont pas d'antécédent par f . f n'est donc pas une bijection. f^{-1} n'est pas une fonction puisque f n'est pas injective.

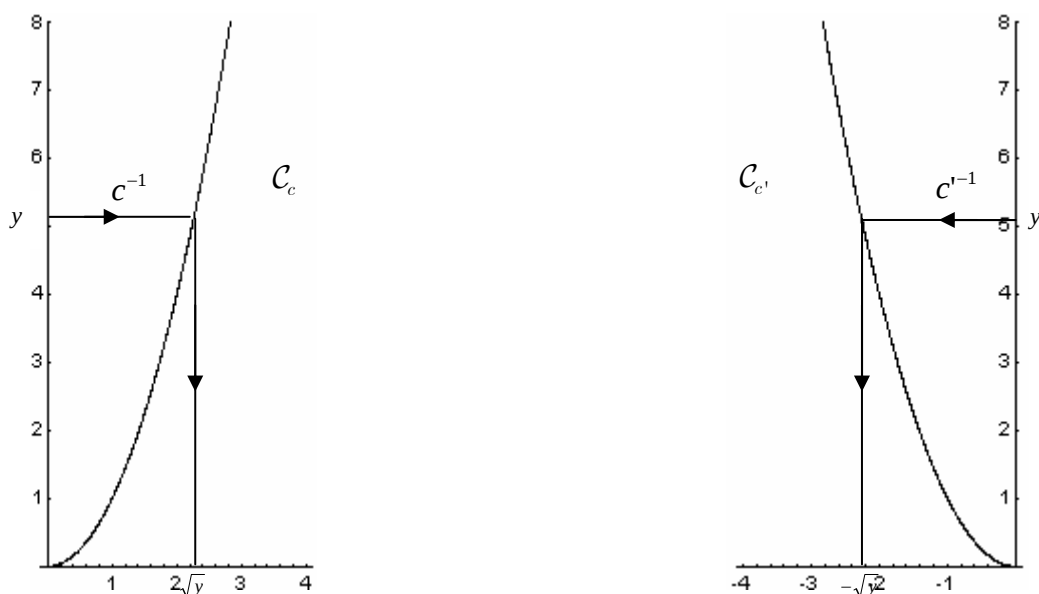


- La fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ est une application car $\text{dom } g = \mathbb{R}$. Ce n'est pas une injection car par exemple -3 et 3 ont la même image 9 . Par contre g est une surjection car $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$. g n'est pas une bijection puisque ce n'est pas une injection.
- La fonction $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, x \mapsto \frac{1}{x}$ est une bijection. En effet, h est une application puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \frac{1}{x}$ existe et $\in \mathbb{R}^*$. De plus : tout $y \in \mathbb{R}^*$ admet un et un seul antécédent par h . Pour le trouver, il faut résoudre l'équation $h(x) = y$ où x est l'inconnue. Or :

$$(\forall y \in \mathbb{R}^*) \quad h(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow 1 = xy \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^*.$$

L'antécédent unique de y est donc $\frac{1}{y}$ et appartient bien à l'ensemble de départ $\mathbb{R}^*$.

- Les fonctions $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ et $c' : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ sont des bijections. En effet, considérons les graphiques de ces fonctions :



c et c' sont évidemment des applications car $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2$ existe et $\in \mathbb{R}_+$. De plus, c est une bijection car tout $y \in \mathbb{R}_+$ admet un et un seul antécédent par c , à savoir $\sqrt{y}$. c' est également une bijection car tout $y \in \mathbb{R}_+$ admet un et un seul antécédent par c' , à savoir $-\sqrt{y}$.

Définition. Toute bijection $f: A \rightarrow B$ admet une bijection réciproque $f^{-1}: B \rightarrow A$. Par définition, c'est la fonction qui à tout $y \in B$ associe l'unique antécédent de y par f . Cet antécédent est noté $x = f^{-1}(y)$ et appartient à A .

Schéma mémo :

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ x & \xrightarrow{f} & f(x) \\ \parallel & & \parallel \\ f^{-1}(y) & \xleftarrow{f^{-1}} & y \end{array}$$

Exemples.

- La bijection réciproque de c est $c^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, y \mapsto \sqrt{y}$, celle de c' est $c'^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_-, y \mapsto -\sqrt{y}$. En pratique, on remplace la lettre y par la lettre x dans la définition : $c^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{x}$ et $c'^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_-, x \mapsto -\sqrt{x}$.
- La bijection réciproque de h est $h^{-1} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, y \mapsto \frac{1}{y}$. On constate que $h = h^{-1}$. On dit que h est une **bijection involutive**. C'est donc une bijection qui est égale à sa bijection réciproque.

Proposition. Soit $f : A \rightarrow B$ une bijection et f^{-1} sa bijection réciproque. Si f est strictement monotone sur A alors f^{-1} est strictement monotone sur $f(A)$ et varie dans le même sens que f .

Démonstration. Supposons par exemple que f est strictement croissante sur A . Donc :

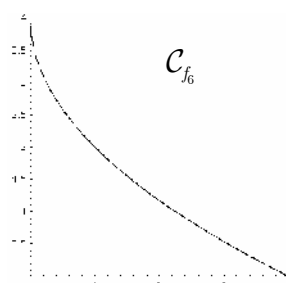
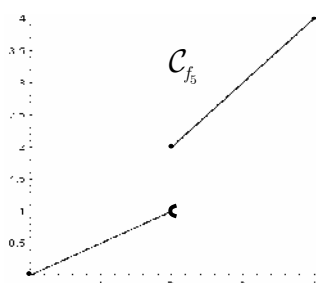
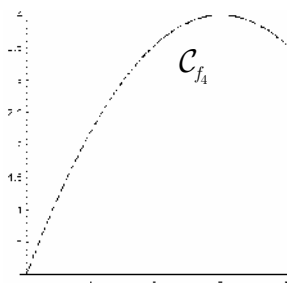
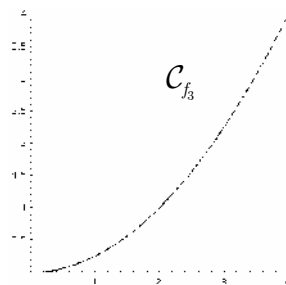
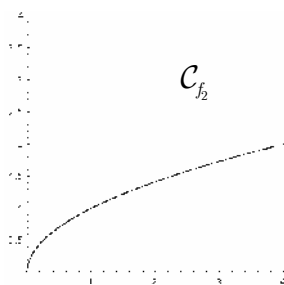
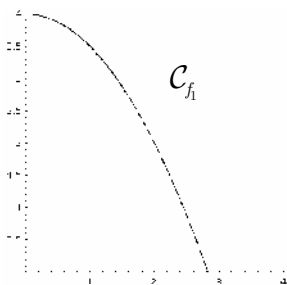
$$(\forall x, x' \in A) \quad x < x' \Leftrightarrow f(x) < f(x')$$

Montrons que f^{-1} est strictement croissante sur $f(A)$. Soit donc $y < y'$ deux réels distincts dans $f(A)$ et soit $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$. Il faut montrer que $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$.

Or, $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Comme $f(x) < f(x')$ et f est strictement croissante, on a $x < x'$, c.-à-d. $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. On raisonne de même lorsque f est strictement décroissante sur A .

4. Comment reconnaître et construire des bijections

Traçons les courbes représentatives de quelques fonctions dont les ensembles de départ et d'arrivée sont tous égaux à $[0,4]$.



- f_1 n'est pas une bijection car ce n'est pas une application : $\text{dom } f_1 \neq [0, 4]$
- f_2 n'est pas une bijection car f_2 n'est pas surjective : $\text{im } f_2 \neq [0, 4]$.
- f_4 n'est pas une bijection car f_4 n'est pas injective. L'application n'est donc pas bijective essentiellement parce qu'elle n'est pas **strictement monotone**.

- f_5 n'est pas une bijection : elle est strictement monotone mais elle n'est pas surjective.
- f_3 est une bijection car $\text{dom } f_3 = [0,4]$, $\text{im } f_3 = [0,4]$ et f_3 est une application strictement croissante.
- f_6 est une bijection car $\text{dom } f_6 = [0,4]$, $\text{im } f_6 = [0,4]$ et f_6 est une application strictement croissante.

Proposition 1. Si $f: A \rightarrow B$ est une fonction telle que

- f est **strictement monotone**,
- $\text{dom } f = A$ et
- $\text{im } f = B$,

alors f est une bijection.

Démonstration : Comme $\text{dom } f = A$, f est une application. Comme $\text{im } f = B$, f est surjective. Comme f est strictement monotone, deux éléments distincts du domaine ont des images distinctes. Donc f est aussi injective. Ainsi f est une application injective et surjective, donc bijective.

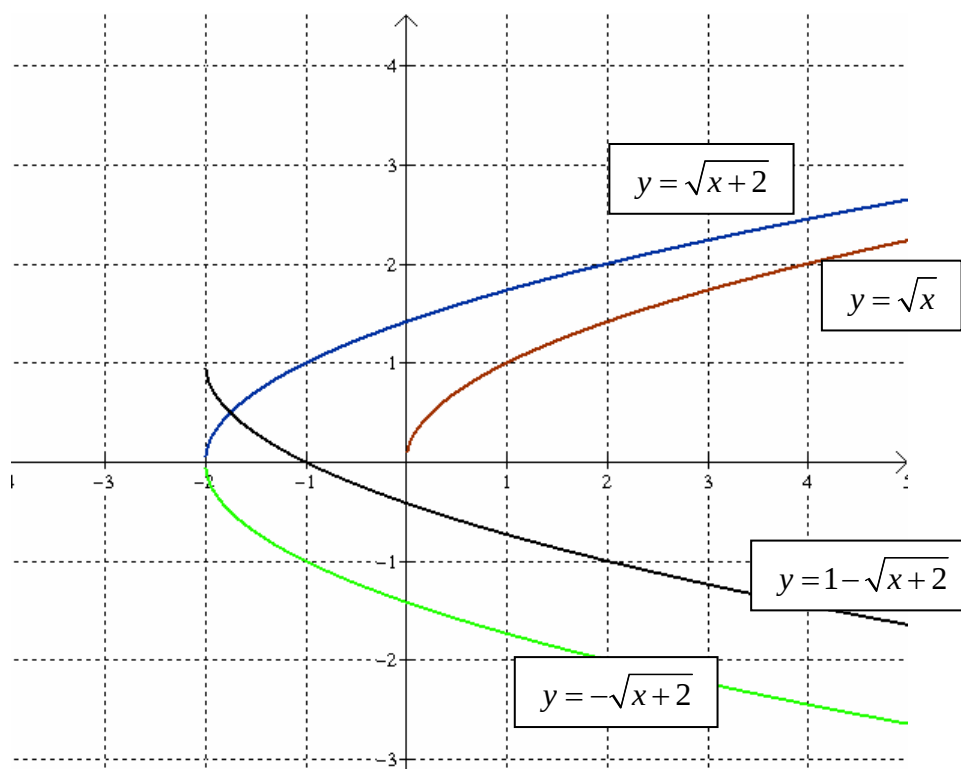
En pratique on dispose de deux moyens simples pour construire des bijections :

Proposition 2.

- (1) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. Alors f est une bijection de $A = \text{dom } f$ sur $B = \text{im } f$.
- (2) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Si A est un intervalle du $\text{dom } f$ tel que $f|_A$ soit strictement monotone, alors f est une bijection de A sur $B = f(A)$.

Exemples.

- (1) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - \sqrt{x+2}$. Par manipulations au départ de la courbe $y = \sqrt{x}$, on obtient la courbe représentative de f .



Il est clair que $\text{dom } f = [-2, +\infty[$ et que f est **continue et strictement décroissante** sur ce domaine. Par conséquent, $\text{im } f =]-\infty, 1]$. Donc :

$$f : [-2, +\infty[\rightarrow]-\infty, 1],$$

$$x \mapsto 1 - \sqrt{x+2}$$

est une bijection. Déterminons sa réciproque :

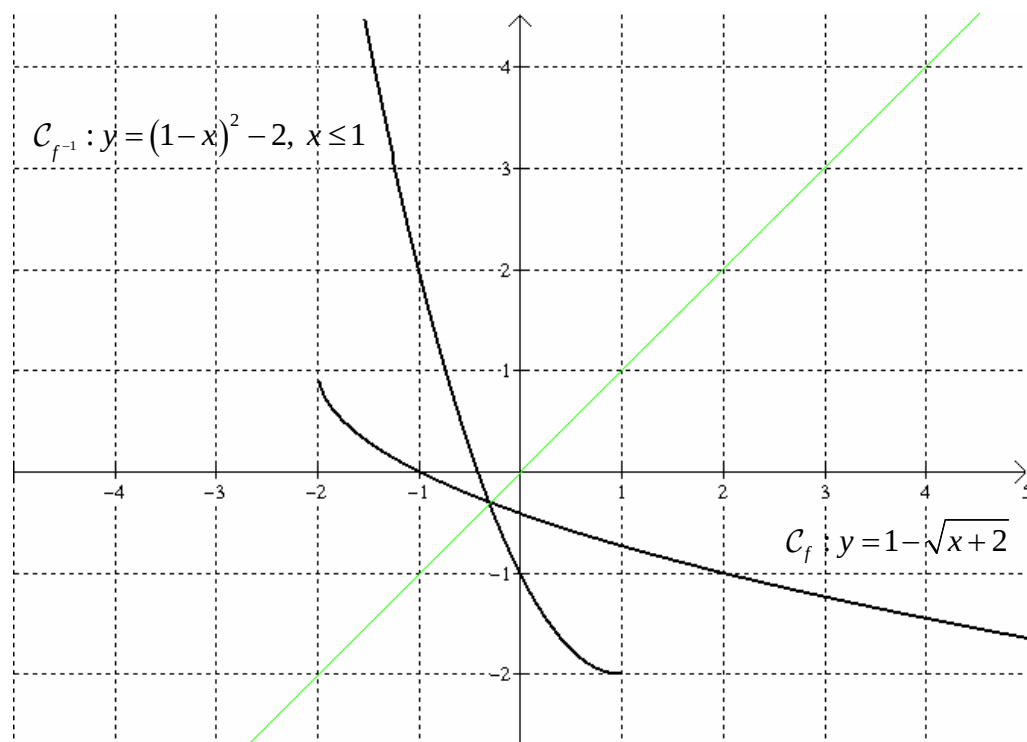
$$\begin{aligned}
 (\forall y \in]-\infty, 1]) (\forall x \in [-2, +\infty[) \quad & y = 1 - \sqrt{x+2} \\
 \Leftrightarrow y - 1 = -\sqrt{x+2} \\
 \Leftrightarrow \underbrace{1-y}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{x+2}}_{\geq 0} / ()^2 \\
 \Leftrightarrow (1-y)^2 = x+2 \\
 \Leftrightarrow x = (1-y)^2 - 2
 \end{aligned}$$

Donc :

$$f^{-1} :]-\infty, 1] \rightarrow [-2, +\infty[$$

$$x \mapsto (1-x)^2 - 2$$

Représentons graphiquement f et f^{-1} dans un repère orthonormé :

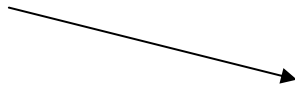


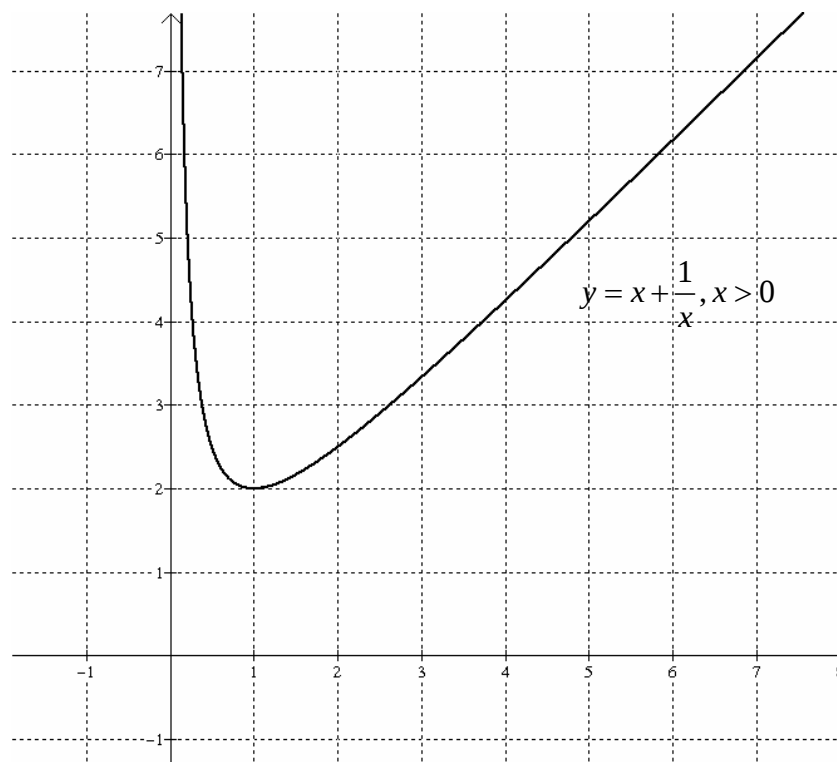
Remarquons que f et f^{-1} sont strictement décroissantes sur leur domaine (d'après la proposition page 6) et que leurs graphes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (d'après la 2^e remarque page 2).

- (2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + \frac{1}{x}$. f est impaire et continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Il en résulte immédiatement que f admet un extremum en $x=1$, que f est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$ est donc :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ 	2 (m)	 $+\infty$



Par conséquent :

$$f_1 :]0,1] \rightarrow [2,+\infty[, x \mapsto x + \frac{1}{x} \text{ et } f_2 : [1,+\infty[\rightarrow [2,+\infty[, x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

sont des bijections.

Déterminons leurs bijections réciproques :

$$(\forall y \in [2,+\infty[), (\forall x \in]0,+\infty[)$$

$$y = x + \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - yx + 1 = 0$$

Cette équation est du 2^e degré en x et son discriminant vaut :

$$\Delta = y^2 - 4 \geq 0 \text{ (car } y \geq 2)$$

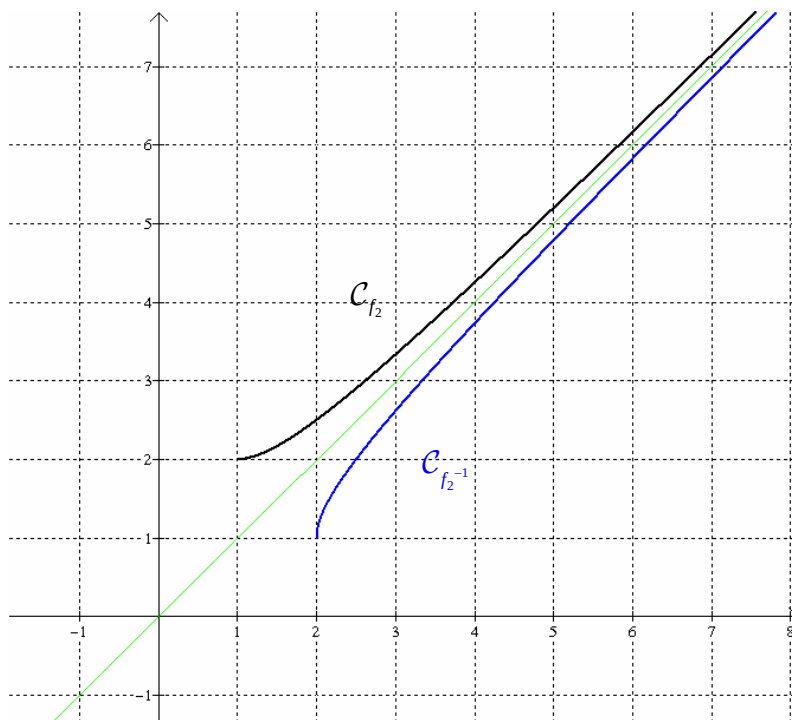
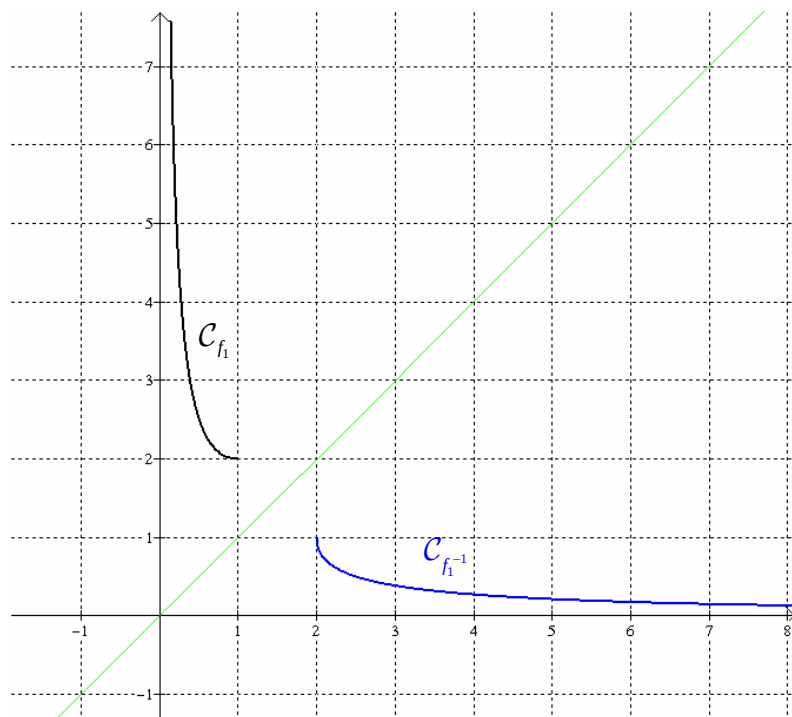
Les racines de l'équation sont donc :

$$x_1 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \in]0,1] \text{ et } x_2 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2} \in [1,+\infty[.$$

Evidemment, x_1 est l'antécédent de y par f_1 et x_2 est l'antécédent de y par f_2 . (Les deux racines sont confondues lorsque $y = 2$.) D'où les bijections réciproques de f_1 et f_2 :

$$f_1^{-1}: [2, +\infty[\rightarrow]0, 1], x \mapsto \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2} \text{ et}$$

$$f_2^{-1}: [2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[, x \mapsto \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$$



CHAPITRE I

MATRICES ET DETERMINANTS

A) OPERATIONS SUR LES MATRICES (théorie)

1) Addition de deux matrices

- Exemple

Andrée, Bernard, Charlotte et Dominique ont décidé de passer leur week-end à faire de la natation, de la course à pied et du vélo. Chaque jour chacun note dans un tableau combien de longueurs il a nagé, combien d'heures il a couru et combien de km il a fait en vélo.

Voici le tableau pour le samedi :

	Andrée	Bernard	Charlotte	Dominique
natation (longueurs)	8	25	0	15
jogging (h)	1,5	0	1	0,5
vélo (km)	10	15	30	25

On peut représenter cette situation par la **matrice de genre 3×4** (càd à 3 lignes et à 4 colonnes) suivante :

$$S = \begin{pmatrix} 8 & 25 & 0 & 15 \\ 1,5 & 0 & 1 & 0,5 \\ 10 & 15 & 30 & 25 \end{pmatrix}$$

En faisant de même pour le dimanche on obtient une matrice **de même genre 3×4** :

$$D = \begin{pmatrix} 14 & 30 & 40 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 1,5 \\ 17 & 29 & 10 & 23 \end{pmatrix}$$

Le bilan du week-end est alors représenté par la matrice **de genre 3×4** suivante :

$$W = \begin{pmatrix} 22 & 55 & 40 & 25 \\ 3,5 & 1 & 1 & 2 \\ 27 & 44 & 40 & 48 \end{pmatrix}$$

Chaque terme de la matrice W est obtenu par addition des termes correspondants des matrices S et D.

On note : $W = S + D$.

- **Définition**

Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ deux matrices de même genre $m \times n$, alors la **somme** des deux matrices est la matrice $S = (s_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ de **genre $m \times n$** définie par :

$$\boxed{\forall i \leq m, j \leq n \quad s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

On note :

$$S = A + B \text{ ou encore } (s_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n} + (b_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n} = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$$

2) **Multiplication d'une matrice par un nombre**

- **Exemple**

Le week-end suivant ils décident d'augmenter toutes leurs performances de 20%, ce qui revient à les multiplier par 1,2. Le bilan de leur week-end est alors représenté par la matrice W' obtenue en multipliant chaque terme de W par 1,2 :

$$W' = \begin{pmatrix} 26,4 & 66 & 48 & 30 \\ 4,2 & 1,2 & 1,2 & 2,4 \\ 32,4 & 52,8 & 48 & 57,6 \end{pmatrix}$$

- **Définition**

Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ une matrice de genre $m \times n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors le produit de la matrice A par α est la matrice de même genre $m \times n$ obtenue en multipliant chaque terme de A par α :

$$\boxed{\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n} = (\alpha \cdot a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}}$$

3) Multiplication de deux matrices

- Exemple

Le tableau suivant donne le prix, en euros par kg, de quatre fruits chez trois marchands :

marchands	bananes	oranges	pommes	poires
A	1,75	2,32	2,81	2,92
B	1,48	2,44	2,63	2,37
C	2,16	2,19	3,15	2,53

Cette situation peut être représentée à l'aide de la matrice (de genre 3×4) suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1,75 & 2,32 & 2,81 & 2,92 \\ 1,48 & 2,44 & 2,63 & 2,37 \\ 2,16 & 2,19 & 3,15 & 2,53 \end{pmatrix}$$

Le tableau suivant indique, pour Anne et pour Pierre, la quantité de fruits (en kg) de chaque sorte qu'ils désirent acheter :

	Anne	Pierre
bananes	3	1
oranges	1,5	3
pommes	2	1,5
poires	2,5	4

Cette situation peut être représentée à l'aide de la matrice (de genre 4×2) suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1,5 & 3 \\ 2 & 1,5 \\ 2,5 & 4 \end{pmatrix}$$

Pour faire ses achats chez le marchand A,

$$\text{Anne doit payer : } 1,75 \cdot 3 + 2,32 \cdot 1,5 + 2,81 \cdot 2 + 2,92 \cdot 2,5 = 21,65 \text{ € (1)}$$

$$\text{Pierre doit payer : } 1,75 \cdot 1 + 2,32 \cdot 3 + 2,81 \cdot 1,5 + 2,92 \cdot 4 = 24,605 \text{ € (2)}$$

Pour faire ses achats chez le marchand B,

$$\text{Anne doit payer : } 1,48 \cdot 3 + 2,44 \cdot 1,5 + 2,63 \cdot 2 + 2,37 \cdot 2,5 = 19,285 \text{ € (3)}$$

$$\text{Pierre doit payer : } 1,48 \cdot 1 + 2,44 \cdot 3 + 2,63 \cdot 1,5 + 2,37 \cdot 4 = 22,225 \text{ € (4)}$$

Pour faire ses achats chez le marchand C,

Anne doit payer : $2,16 \cdot 3 + 2,19 \cdot 1,5 + 3,15 \cdot 2 + 2,53 \cdot 2,5 = 22,39 \text{ €}$ (5)

Pierre doit payer : $2,16 \cdot 1 + 2,19 \cdot 3 + 3,15 \cdot 1,5 + 2,53 \cdot 0,5 = 23,575 \text{ €}$ (6)

Ces résultats peuvent être résumés dans le tableau :

prix à payer par :	Anne	Pierre
chez A	21,65	24,605
chez B	19,285	22,225
chez C	22,39	23,575

ou encore par la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 21,65 & 24,605 \\ 19,285 & 22,225 \\ 22,39 & 23,575 \end{pmatrix}$$

En appelant le calcul

- (1) « produit » de la 1^{re} ligne de A par la 1^{re} colonne de B,
- (2) « produit » de la 1^{re} ligne de A par la 2^e colonne de B,
- (3) « produit » de la 2^e ligne de A par la 1^{re} colonne de B,
- (4) « produit » de la 2^e ligne de A par la 2^e colonne de B,
- (5) « produit » de la 3^e ligne de A par la 1^{re} colonne de B,
- (6) « produit » de la 3^e ligne de A par la 2^e colonne de B,

on voit qu'on peut désigner P comme le « produit » de la matrice A par la matrice B.

On écrit : $A \cdot B = P$

Remarque : A est de genre 3x4, B de genre 4x2 et P de genre 3x2

• Définition

Soient A une matrice de genre $m \times n$, B une matrice de genre $n \times p$, alors le **produit**

$P = A \cdot B$ est la matrice de genre $m \times p$ définie par :

Le terme de la i^e ligne et de la j^e colonne de P est le « produit » de la i^e ligne de A et de la j^e colonne de B.

Ainsi si, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$, $B = (b_{jk})_{1 \leq j \leq n; 1 \leq k \leq p}$ et $P = (p_{ik})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq p}$ alors :

$$p_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

- **Attention**

Pour que le produit de A par B soit *possible*, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Ceci montre en particulier que le produit des matrices n'est **pas commutatif** ! L'exemple suivant montre que même le produit des matrices carrées n'est pas commutatif :

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41 & 25 \\ -1 & 21 \end{pmatrix}, \text{ mais } \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 20 \\ 45 & -16 \end{pmatrix}$$

4) **Propriétés des opérations sur les matrices**

- Soient A, B, C trois matrices de genre $m \times n$, O la matrice nulle de genre $m \times n$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors :

- o $A + B = B + A$
- o $A + (B + C) = (A + B) + C$
- o $A + O = A$
- o $A + (-A) = O$ où $-A = (-a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$

Conclusion : l'ensemble des matrices de genre $m \times n$ muni de l'addition est un **groupe commutatif**.

- Soient A, B deux matrices de genre $m \times n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors :

- o $1 \cdot A = A$
- o $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta) \cdot A$
- o $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- o $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

Conclusion : l'ensemble des matrices de genre $m \times n$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un **espace vectoriel**.

- Soient A, B, C trois matrices quelconques et I la matrice unité, à condition que les produits suivants soient *possibles* (ce qui dépend de leur genre !), on a :

- o $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- o $A \cdot I = I \cdot A = A$

- o $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- o $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
- Si A est une matrice carrée on pose :
 - $A \cdot A = A^2$
 - $A \cdot A \cdot A = A^3$
 - $A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A = A^n$ (n facteurs)
- Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n tel que $A \cdot B = B \cdot A = I$ on dit que B est la **matrice inverse** de A et on note: $B = A^{-1}$. On voit facilement (exercice!) qu'une matrice A a *au plus une* matrice inverse et on verra plus loin une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle en admette une.

Exemple

Vérifiez que si $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{27} \\ \frac{1}{18} & \frac{5}{54} \end{pmatrix}$

Exercices 1-9

B) EXERCICES

- 1) Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -9 & 3 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculez :

a) $2A - 3^t B$

b) $5C + \frac{1}{2}D$

c) ${}^t(AB)$ et ${}^t B^t A$ (conclusion ?)

d) $(C + D)^2$ (pensez-vous que $(C + D)^2 = C^2 + 2CD + D^2$?)

2) Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Calculez $A \cdot {}^tA - B^2$.
- b) Vous venez de calculer $A \cdot {}^tA$. En observant le résultat vous observez une certaine régularité, laquelle ? Pensez-vous que c'est dû au hasard ?
- c) Analysez si les calculs suivants sont *possibles* (justifiez votre réponse sans faire les calculs) :
 - $BA - 5B$
 - ${}^tB \cdot A + 5 \cdot A$
 - A^3
 - ${}^tA \cdot A + A \cdot {}^tA$
 - ${}^tA \cdot B - A$

3) Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculez :

- a) AB
 - b) CD et DC
 - c) $E^2, E^3, \dots, E^n$ avec $n \in \mathbb{N}$
 - d) $F^2, F^3, \dots, F^n$ avec $n \in \mathbb{N}$
- 4) Calculez a et b pour que :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ -2 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4b \\ -3 & 2a \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} a & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}^2 - 4 \begin{pmatrix} a & a-b \\ 2 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -24 \\ 2-10a & 7a^2 \end{pmatrix}$$

- 5) Soit $\mathcal{M}_3$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Montrez que $\mathcal{M}_3$ muni de la multiplication des matrices est un groupe commutatif.

- 6) Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

Calculez AB et AC . Que peut-on en conclure ?

- 7) Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$. Déterminez a et b pour que $AB = BA$.

- 8) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouvez la matrice X telle que :

$$A + X = BA$$

- 9) Soit $\mathbb{M}$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

- a) Montrez que $\forall A, B \in \mathbb{M} \quad A \cdot B = B \cdot A$
- b) Existe-t-il $A, B \in \mathbb{M}$ tel que $A \cdot B \in \mathbb{M}$?
- c) Se peut-il que $A \in \mathbb{M}$ soit inversible ?
- d) Calculez A^2 , A^3 et A^4 pour $A \in \mathbb{M}$. Trouvez puis démontrez (par récurrence) une formule donnant A^n avec $n \geq 2$

- 10)** Calculez les déterminants suivants en utilisant, si possible, les propriétés des déterminants pour rendre le calcul plus rapide :

a)
$$\begin{vmatrix} -3 & -41 & 37 \\ 0 & 12 & -8 \\ 0 & -7 & 5 \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} 7 & -11 & 9 \\ 0 & -4 & 0 \\ 20 & 8 & -13 \end{vmatrix}$$

c)
$$\begin{vmatrix} -9 & 12 & 21 \\ 73 & -94 & 107 \\ 3 & -4 & -7 \end{vmatrix}$$

d)
$$\begin{vmatrix} \frac{4}{13} & 8,9 & 0,1 \\ 14 & 0 & 0 \\ 91 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

e)
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 7 & -5 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

f)
$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 126 & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & -5 & 9,78 \\ 8 & 37,1 & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

g)
$$\begin{vmatrix} 17 & 12 & 28 & 8 \\ 5 & 3 & 7 & 2 \\ \frac{3}{8} & -149 & 0 & -27 \\ -6 & 458 & 501 & 19 \end{vmatrix}$$

h)
$$\begin{vmatrix} 24 & 5 & 1 & -30 \\ -39 & -7 & \frac{47}{91} & 42 \\ -9 & 9 & 0 & -54 \\ 0 & -8 & 0 & 48 \end{vmatrix}$$

i)
$$\begin{vmatrix} -2 & 9 & 15 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 4 & -7 \\ 14 & 5 & 11 & -1 & -5 \\ 9 & -4 & -6 & -5 & 2 \\ -35 & 8 & -21 & -28 & 49 \end{vmatrix}$$

j)
$$\begin{vmatrix} 5 & -19 & 9 & 25 & 31 \\ 2 & -63 & 6 & 7 & 20 \\ -5 & -18 & -15 & 2 & -11 \\ 7 & 9 & 21 & -1 & 43 \\ 1 & 36 & 3 & -4 & -15 \end{vmatrix}$$

k)
$$\begin{vmatrix} 5 & -13 & 1 & -2 & 8 \\ 15 & -38 & 3 & 47 & 24 \\ -65 & 7 & -13 & -73 & -3 \\ -2 & -4 & 7 & 3 & 12 \\ -7 & 9 & 6 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

l)
$$\begin{vmatrix} 11 & 8 & 32 & 7 & -1 \\ -5 & -3 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 17 & 8 & 7 \\ 7 & 4 & -8 & 15 & 11 \\ 0 & 2 & 6 & -7 & -9 \end{vmatrix}$$

11) Déterminants de Vandermonde d'ordre 3 et 4.

a) Montrez que pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a :
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

b) Utilisez cette formule pour calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ a & b & c \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

c) Calculez le déterminant de Vandermonde d'ordre 4.

12) Les matrices suivantes sont appelées *matrices antisymétriques* :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

d'ordre 2, 3 et 4 respectivement. Vérifiez sur ces exemples la propriété (générale) suivante : le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair vaut 0, alors que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre pair est un carré.

13) Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{vmatrix} 1 & n+1 & 2n+1 & \dots & (n-1)n+1 \\ 2 & n+2 & 2n+2 & \dots & (n-1)n+2 \\ 3 & n+3 & 2n+3 & \dots & (n-1)n+3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 2n & 3n & \dots & n^2 \end{vmatrix} = 0$

14) Montrez que :

$$\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R} \quad (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = (xx' + yy')^2 + (xy' - x'y)^2$$

en utilisant les matrices $A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{pmatrix}$.

15) Calculez, si elles existent, les inverses des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16) Soient A et B deux matrices régulières. Montrez que AB est aussi régulière et que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

17) Résolvez les systèmes suivants par la méthode indiquée :

a) $\begin{cases} 3x - 11y = 61 & (1) \\ -7x + 2y = -24 & (2) \end{cases}$ (par substitution et par calcul de la matrice inverse)

b) $\begin{cases} \frac{3-x}{5} - \frac{y-2x}{7} = 1 & (1) \\ 2x + 5\left(\frac{x}{3} - y\right) + 9y = x - 2y + 2 & (2) \end{cases}$ (règle de Cramer)

c) $\begin{cases} 5x - y + 3z = 12 & (1) \\ -2x + 5y - z = 5 & (2) \\ 11x - 5y + 2z = 7 & (3) \end{cases}$ (par substitution et par la règle de Cramer)

d) $\begin{cases} x - 6y + 3z = 3 & (1) \\ \frac{3x}{2} + 2y - 9z = 1 & (2) \\ -5x + 18y + \frac{33}{2}z = 0 & (3) \end{cases}$ (par calcul de la matrice inverse)

$$\text{e) } \begin{cases} 7x + 9y + t = -8 & (1) \\ 5y - 2z + 3t = -14 & (2) \\ -3x + y - z - t = 5 & (3) \\ 8x + 3z = -1 & (4) \end{cases} \text{ (les trois méthodes)}$$

18) Résolvez les systèmes suivants en discutant suivant les valeurs du paramètre m :

$$\text{a) } \begin{cases} (m+1)x - 2y = 4 & (1) \\ (m-1)x - 3y = 5 & (2) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + (m-2)y - m = 0 & (1) \\ 4x + my - 10 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + my + z = 2m & (1) \\ mx + y + z = 0 & (2) \\ x + my + (m+1)z = m & (3) \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} mx + y + z = 1 & (1) \\ x + my + z = 1 & (2) \\ x + y + mz = m & (3) \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ x + y + mz = 2 & (2) \\ mx + m^2y + m^3z = m & (3) \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x + my + m^2z = m^3 & (1) \\ m^3x + m^2y + mz = 1 & (2) \\ x + 2my + 3m^2z = 4m^3 & (3) \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} 2mx - y + 3z = 1 \\ 7x - my + 2z = 0 \\ x + (m+1)y - 5z = m+3 \end{cases}$$

CHAPITRE III

CALCUL VECTORIEL DANS L'ESPACE

<u>A) VECTEURS DANS L'ESPACE</u>	p 2
1) Exemple : force exercée par un aimant	p 2
2) Définitions et notations	p 3
3) Egalité de deux vecteurs	p 5
4) Multiplication d'un vecteur par un nombre réel	p 6
5) Addition et soustraction des vecteurs	p 8
6) Propriétés du calcul vectoriel	p 12
7) Forme vectorielle du théorème de Thalès	p 15
8) Equation vectorielle d'une droite	p 15
9) Equation vectorielle d'un plan	p 17
10) Milieu d'un segment	p 18
11) Centre de gravité d'un triangle	p 19
 <u>B) VECTEURS ET COORDONNEES</u>	p 21
1) Repères	p 21
2) Coordonnées d'un vecteur et calcul vectoriel	p 25
 <u>C) PRODUIT SCALAIRE</u>	p 29
1) Définitions	p 29
2) Interprétation géométrique	p 30
3) Expression analytique	p 32
4) Propriétés	p 34
5) Vecteur normal et équations d'un plan	p 35
6) Equations d'une sphère	p 38
 <u>D) EQUATIONS D'UN PLAN ET D'UNE DROITE</u>	p 39
1) Equations d'un plan	p 39
2) Systèmes d'équations d'une droite	P 41
 <u>EXERCICES</u>	p 43

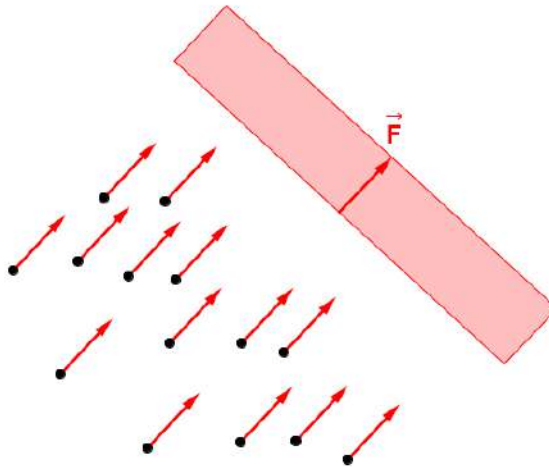
A) VECTEURS DANS L'ESPACE

D'une manière générale les vecteurs sont définis exactement de la même manière dans le plan et dans l'espace et ont les mêmes propriétés. Cette première partie du cours peut donc être considérée comme une révision de notions déjà traitées les années précédentes. Nous noterons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace.

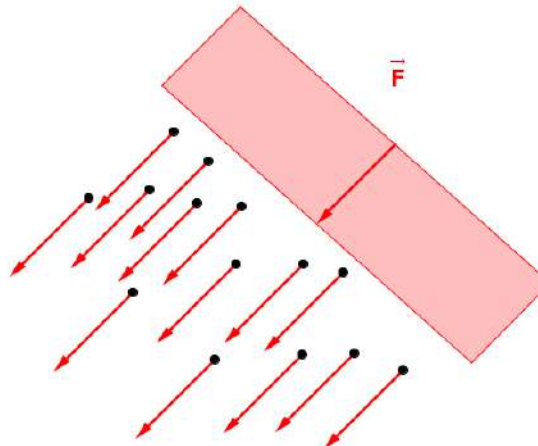
1) Exemple : force exercée par un aimant

Tout le monde sait qu'en plaçant des billes en fer au voisinage d'un aimant (Magnet), celles-ci sont soit attirées, soit repoussées par celui-ci. En physique on parle d'une **force** (d'attraction ou de répulsion), notée $\vec{F}$, exercée par l'aimant sur ces billes et celle-ci est représentée par des **flèches** partant de chacune de ces billes.

Voici l'exemple d'un aimant (rectangle rouge) qui attire les billes (points noirs) :



et l'exemple d'un aimant qui les repousse :



On constate que sur chacune de ces deux figures toutes les flèches ont :

- la **même longueur** : celle-ci caractérise en effet l'**intensité** de la force (ainsi les flèches de la 1^{re} figure sont moins longues que celles la 2^e figure : c'est que la force d'attraction de la 1^{re} figure est moins importante que la force de répulsion de la 2^e figure)
- la **même direction (les flèches sont toutes parallèles)** : celle qui est perpendiculaire à la surface de l'aimant tournée vers les billes et qui indique la direction dans laquelle celles-ci vont se déplacer sous l'impulsion de la force $\vec{F}$
- le **même sens** : sur la 1^{re} figure les flèches sont tournées vers l'aimant pour signifier que les billes sont attirées par l'aimant et vont donc se déplacer vers celui-ci, alors que sur la 2^e figure les flèches sont orientées dans le sens opposé pour signifier que les billes sont au contraire repoussées par l'aimant et vont s'éloigner de lui.

La notion de « **force** » en physique correspond à la notion de « **vecteur** » en mathématiques.

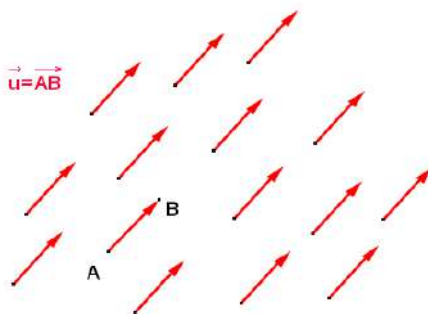
2) Définitions et notations

Définitions

Un vecteur est un *ensemble infini de flèches* qui ont toutes :

- même **direction**
- même **sens**
- même **longueur** appelée norme du vecteur

Chacune de ces flèches est un représentant du vecteur.



Notations

- un vecteur peut être noté de deux manières :
 - une lettre minuscule surmontée d'une flèche, p. ex. : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, ...

- deux lettres majuscules, désignant **l'origine et l'extrémité** d'un représentant particulier du vecteur, surmontées d'une flèche, p. ex. : $\overrightarrow{AB}$
- o la norme d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$
- o l'ensemble de tous les vecteurs de l'espace est noté $\mathcal{V}$

Remarques

- pour connaître un vecteur il suffit de connaître un seul représentant du vecteur !
- la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est rien d'autre que la distance de A à B :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB$$
- la norme d'un vecteur est un nombre réel positif ou nul : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \|\vec{u}\| \in \mathbb{R}_+$
- En 5^e vous avez vu qu'une translation qui transforme A en B est notée $t_{\overrightarrow{AB}}$: on dit que c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$!

Cas particuliers

- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le seul vecteur de norme nulle. En effet :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Leftrightarrow AB = 0 \Leftrightarrow A = B$$

De plus ce vecteur n'a pas de direction (ou toutes les directions, ce qui revient au même...) donc pas de sens non plus ! Ce vecteur est appelé **vecteur nul** et il est noté $\vec{0}$:

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots \quad \text{et} \quad \|\vec{0}\| = 0$$

- Un vecteur $\vec{u}$ tel que $\|\vec{u}\| = 1$ est appelé **vecteur unitaire**.
- Soient A et B deux points distincts, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même direction (car $(AB) = (BA)$), même norme (car $AB = BA$), mais des sens opposés : on dit que $\overrightarrow{BA}$ est le **vecteur opposé** de $\overrightarrow{AB}$ (ou que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont **des vecteurs opposés**) et on note :

$$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$$

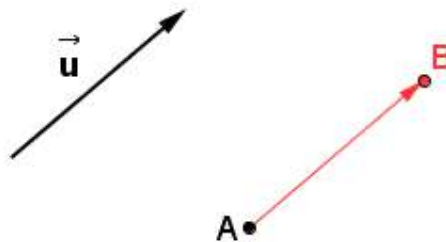
De manière générale, deux **vecteurs opposés** $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ sont deux vecteurs qui ont même direction, même norme et des sens opposés.



Propriété

Soit un vecteur $\vec{u}$ et un point A, alors il existe un seul point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ (c'est-à-dire qu'il existe un représentant unique de $\vec{u}$ qui admet A comme origine).

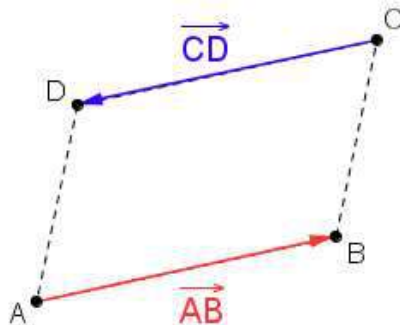
$$\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \forall A \in \mathcal{E} \quad \exists ! B \in \mathcal{E} \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$



3) Egalité de deux vecteurs

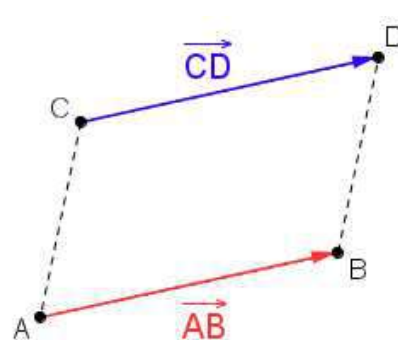
- D'après la définition d'un vecteur, deux **vecteurs** sont **égaux** si et seulement s'ils ont même direction, même sens et même norme.
- Soient A, B, C et D quatre points non alignés du plan. Pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient égaux il faut donc que $(AB) \parallel (CD)$ (même direction !) et que $AB = CD$ (même norme !), ce qui est vérifié ssi les quatre points forment un parallélogramme. Deux cas de figure peuvent alors se présenter :

1^{er} cas : $(ABCD) = \#$



$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$$

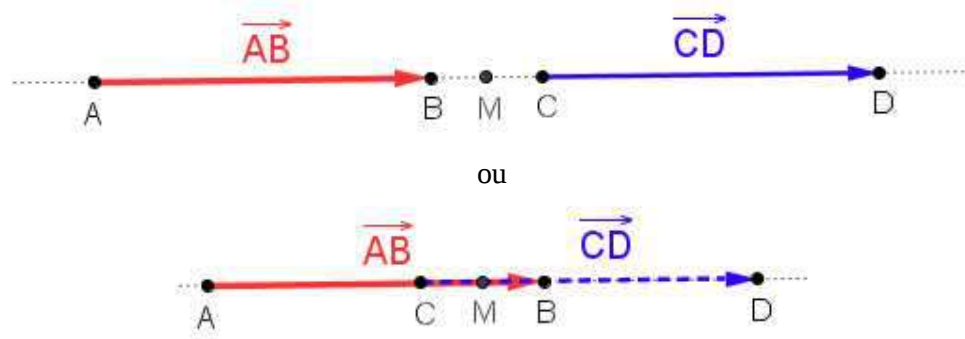
2^e cas : $(ABDC) = \#$



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Ainsi on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (ABDC) = \#$.

- Soient A, B, C et D quatre points alignés du plan. Comme $AB = CD$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux ssi $AB = CD$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même sens :



Sur ces deux figures on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $M = \text{milieu de } [AD] = \text{milieu de } [BC]$ donc on peut considérer (ABDC) comme une sorte de « parallélogramme aplati », ce qui nous amène à poser la définition suivante :

- **Définition**

Soient A, B, C et D quatre points quelconques de l'espace $\mathcal{E}$, alors :

$$(ABDC) = \# \text{ si et seulement si } \text{milieu de } [AD] = \text{milieu de } [BC]$$

- Nous avons alors montré que :

$$\forall A, B, C, D \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (ABDC) = \#$$

- **Remarque** : Sur une figure on voit facilement que :

$$\begin{aligned} (ABDC) = \# &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB} \end{aligned}$$

4) **Multiplication d'un vecteur par un nombre réel**

- **Exemple des aimants** :

En remplaçant un aimant par un aimant 2, 3, ... k fois ($k \in \mathbb{R}_+^*$) plus fort, la force exercée sur les billes gardera la même direction et le même sens mais son intensité (c'est-à-dire la longueur des flèches) sera « multipliée » par 2, 3, ... k. La nouvelle force sera alors notée $2 \cdot \vec{F}$, $3 \cdot \vec{F}$, ... $k \cdot \vec{F}$, ce qui définit une multiplication d'une force (donc d'un vecteur) par un réel positif. Il semble alors naturel de définir $-2 \cdot \vec{F}$, $-3 \cdot \vec{F}$, ... , $-k \cdot \vec{F}$

comme les forces (ou vecteurs) *opposées* aux forces $2 \cdot \vec{F}$, ... $k \cdot \vec{F}$ et $0 \cdot \vec{F} = k \cdot \vec{0} = \vec{0}$, ce qui nous amène à poser la définition suivante :

- **Définition**

Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$ et $k \in \mathbb{R}$, alors $k \cdot \vec{u}$ est le vecteur défini par :

- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ alors : $0 \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{0} = \vec{0}$

- si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k > 0$ alors :

- $k \cdot \vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$
- $k \cdot \vec{u}$ a **même sens** que $\vec{u}$
- $\|k \cdot \vec{u}\| = k \cdot \|\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

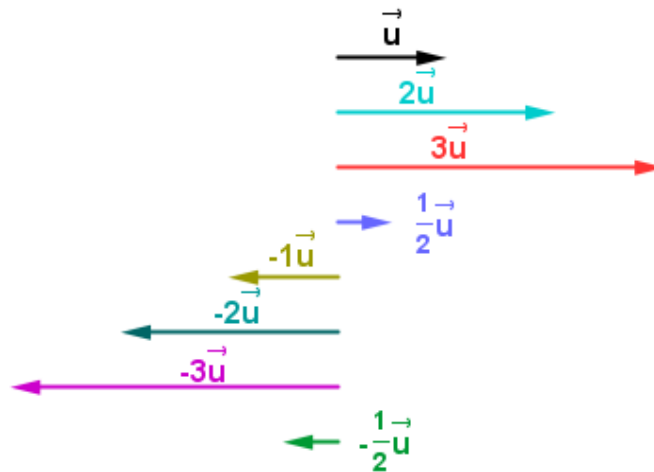
- si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k < 0$ alors :

- $k \cdot \vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$
- $k \cdot \vec{u}$ a le **sens opposé** de $\vec{u}$
- $\|k \cdot \vec{u}\| = -k \cdot \|\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

- **Remarque** : Dans tous les cas on a :

- $\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$
- $k \cdot \vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction (en posant que le vecteur nul a la même direction que n'importe quel vecteur $\vec{u}$)

- **Exemples**



On voit que toutes ces flèches, c'est-à-dire tous les représentants de $\vec{u}$ et de $k \cdot \vec{u}$, sont parallèles. On exprime ceci en disant que $\vec{u}$ et $k \cdot \vec{u}$ sont *colinéaires*.

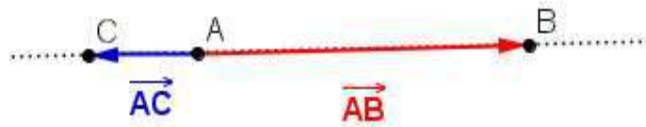
- **Définition**

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ssi il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ ou $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$

- **Propriétés**

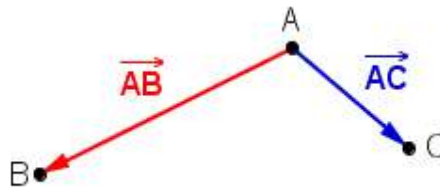
- $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$
- si on convient que $\vec{0}$ a toutes les directions, alors on peut dire deux vecteurs sont colinéaires ssi ils ont même direction
- En observant les deux figures suivantes :

figure 1



A, B, C sont alignés et $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires

figure 2



A, B, C ne sont pas alignés et $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires

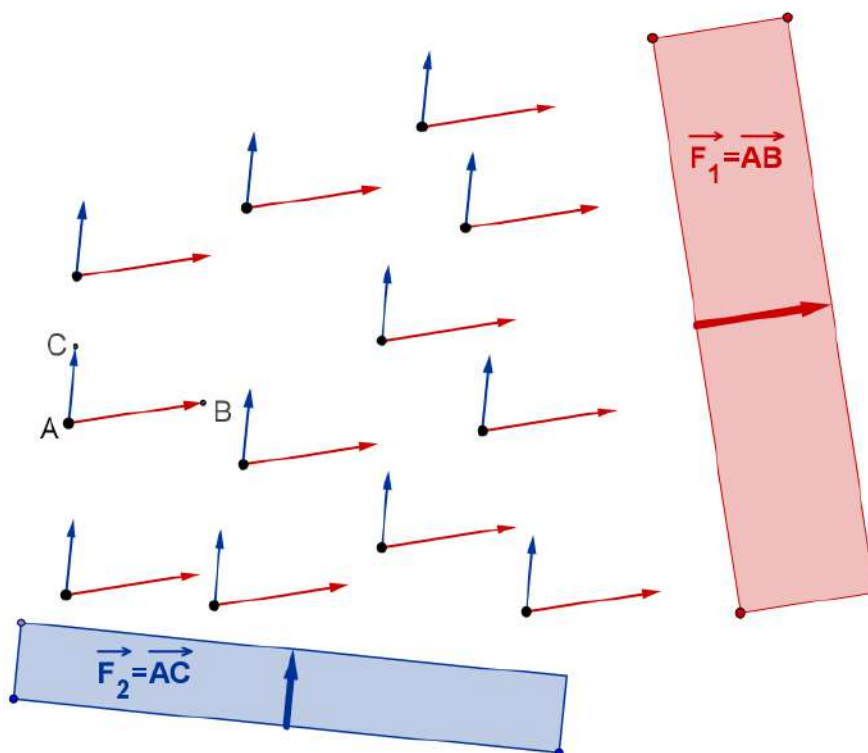
on voit que :

$$\forall A, B, C \quad A, B, C \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \vec{AB} \text{ et } \vec{AC} \text{ sont colinéaires}$$

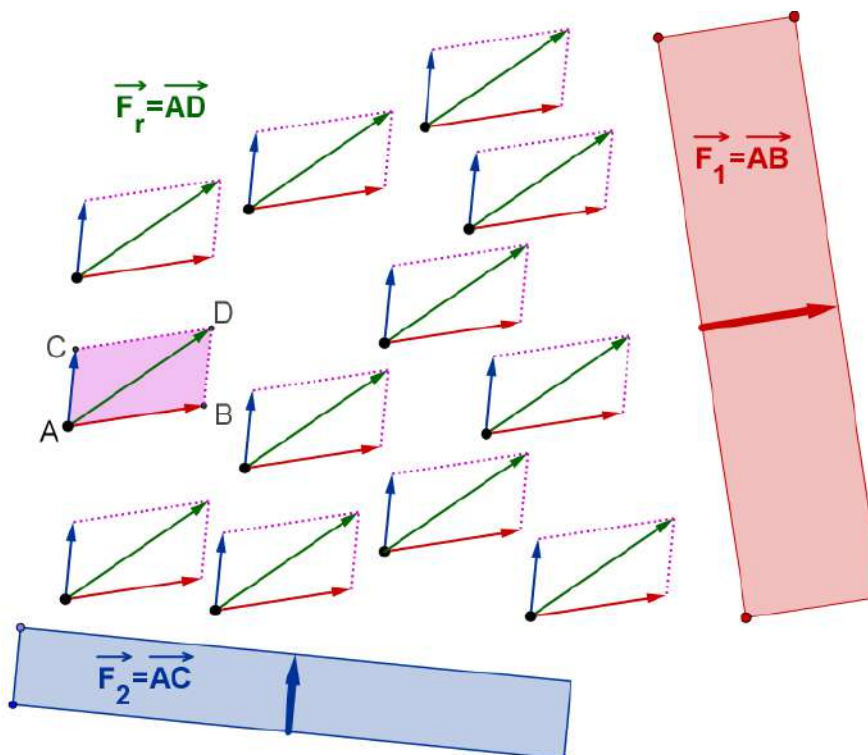
5) **Addition et soustraction des vecteurs**

- **Exemple**

Reprenons l'exemple des billes soumises à la force d'attraction $\vec{F}_1$ d'un aimant (rouge sur la figure) et rajoutons un deuxième aimant (bleu) qui attire les billes avec la force $\vec{F}_2$ dans une autre direction :



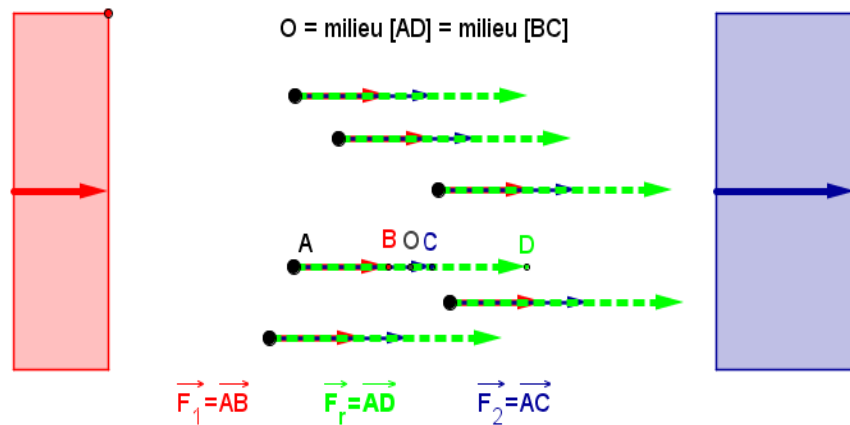
Alors l'expérience montre que tout se passe *comme si* les billes étaient attirées par un troisième aimant (invisible) dans une direction « intermédiaire » avec une force $\vec{F}_r$ représentée par les flèches vertes :



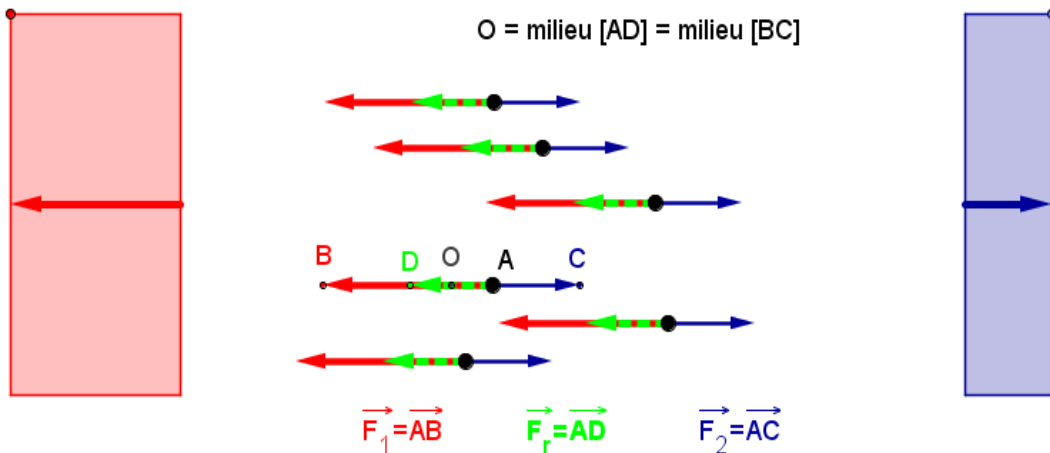
De plus cette force $\vec{F}_r$, appelée **force résultante** en physique, est telle que ses représentants forment la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont formés par les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$:

$$\text{Si } \vec{F}_1 = \vec{AB} \text{ et } \vec{F}_2 = \vec{AC} \text{ alors } \vec{F}_r = \vec{AD} \text{ avec } (ABDC) = \# (*)$$

Regardons ce qui se passe si les deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ ont même direction et même sens :



ou encore même direction et sens opposés :



On constate que (*) reste valable puisque (ABDC) est un parallélogramme aplati ! Que peut-on dire de la norme de $\vec{AD}$?

.....

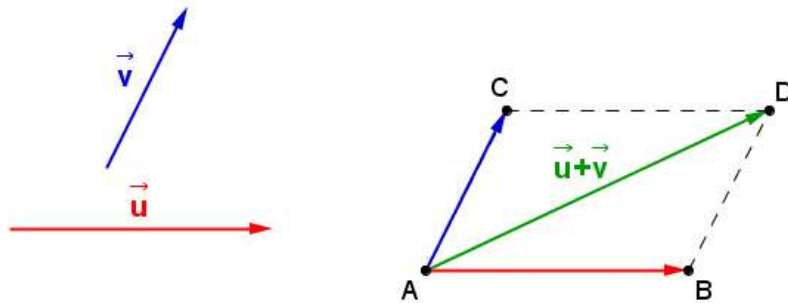
Que se passe-t-il si $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$?

• **Définition**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, alors on appelle **somme de ces deux vecteurs** le vecteur, noté $\vec{u} + \vec{v}$, dont un représentant est construit selon l'une des deux règles (équivalentes) suivantes :

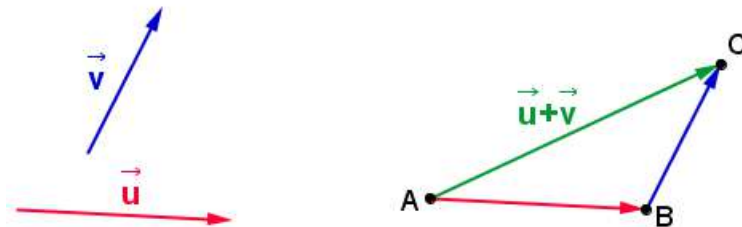
Règle du parallélogramme :

On choisit un point quelconque A, puis on construit le point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, le point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, puis le point D tel que (ABDC) = # (éventuellement aplati, si les deux vecteurs sont colinéaires, voir figures page 10). Alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$:



Règle simplifiée :

Sur la figure précédente $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ puisque (ABDC) = #, donc il suffit de construire le représentant de $\vec{v}$ d'origine B, c'est-à-dire le point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et on a directement $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$, sans passer par le # :



Remarque

La règle du parallélogramme consiste à choisir deux représentants de même origine ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$), alors qu'avec la règle simplifiée on choisit deux représentants consécutifs ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$).

- Il est facile de voir sur ces figures que pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ on a :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire)
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_+^* \vec{v} = k \cdot \vec{u} \text{ ou } \vec{u} = k \cdot \vec{v}$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens)

- La règle simplifiée montre que :

$$\boxed{\forall A, B, C \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

Cette formule, très importante pour le calcul vectoriel, est appelé relation de Chasles.

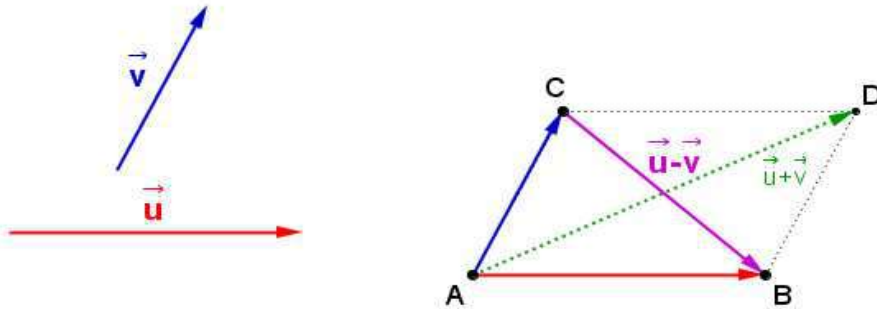
- Soustraction dans $\mathcal{V}$

Nous savons qu'on peut définir la soustraction de deux nombres a et b à partir de l'addition en posant : $a - b = a + (-b)$, c'est-à-dire que pour retrancher un nombre b d'un nombre a , on ajoute son opposé. On fait de même pour définir la soustraction dans $\mathcal{V}$:

$$\boxed{\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \vec{u} - \vec{v} \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{u} + (-\vec{v})}$$

Construction de $\vec{u} - \vec{v}$:

On choisit un point quelconque A , puis on construit le point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, le point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, puis le point D tel que $(ABDC) = \#$. Comme $-\vec{v} = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$, on a $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ d'après la relation de Chasles :



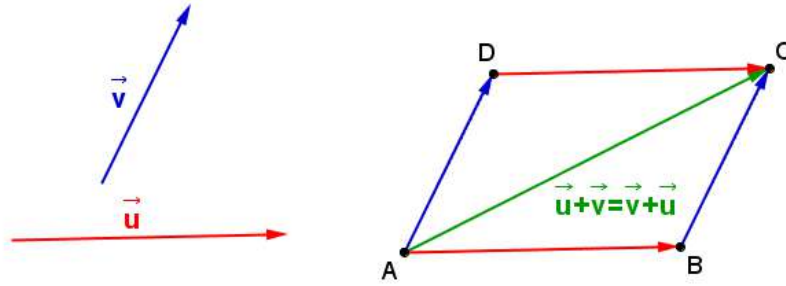
6) Propriétés du calcul vectoriel

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs quelconques et a , b deux nombres réels.

- L'addition des vecteurs est **commutative** : $\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}}$

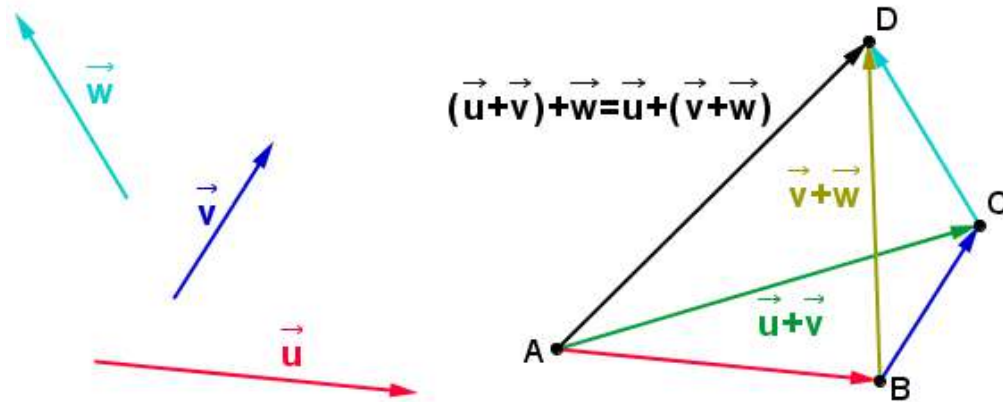
En effet soient A , B , C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et D le point tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{DC}$, alors d'après la relation de Chasles on a :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$



- L'addition des vecteurs est **associative** : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

En effet soient A, B, C, D quatre points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$, alors $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ d'après la relation de Chasles et on a de même : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.



- Comme l'addition des vecteurs est commutative et associative, on peut écrire une somme de plusieurs vecteurs sans parenthèses et dans l'ordre qu'on veut :

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{u} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{u} + \vec{v} = \dots$$

- $\vec{0}$ est l'**élément neutre** de l'addition des vecteurs : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

En effet soient A, B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors comme $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ on a : $\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\vec{0} + \vec{u} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$ d'après la relation de Chasles.

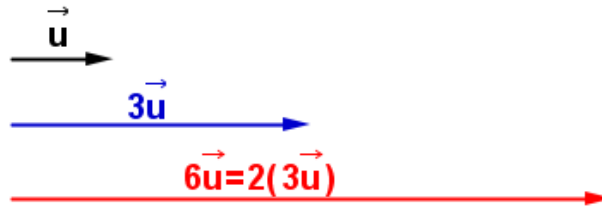
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

En effet soient A, B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors comme $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ on a : $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ et $(-\vec{u}) + \vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ d'après la relation de Chasles.

- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ et $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$ et $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$ (évident !)

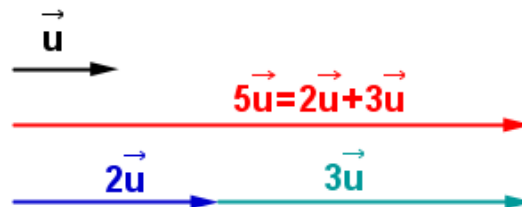
- $(ab) \cdot \vec{u} = a \cdot (b \cdot \vec{u})$ et on écrit simplement : $ab\vec{u}$

p. ex. $a = 2$ et $b = 3$



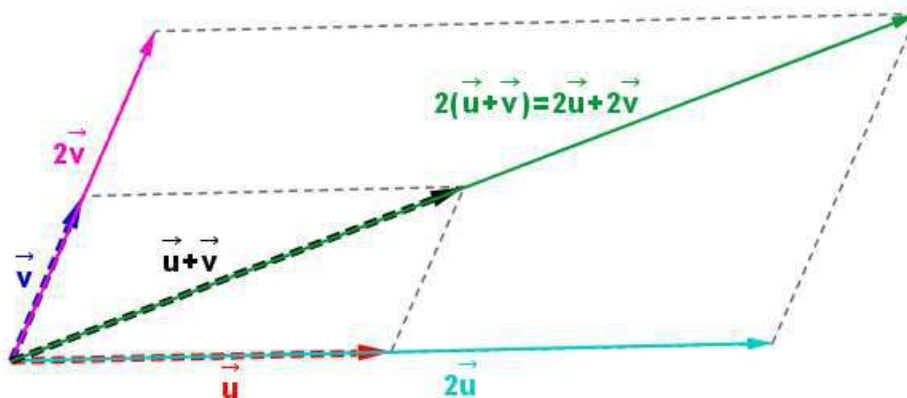
- $(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$

p. ex. $a = 2$ et $b = 3$



- $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$

p. ex. $a = 2$



Remarques

- Ces propriétés montrent que les règles de calcul sur les vecteurs « fonctionnent » de la même manière que celles sur les nombres réels, sauf qu'on ne peut PAS multiplier ou diviser deux vecteurs entre eux !

- Les deux dernières propriétés montrent qu'il y a une sorte de « distributivité » pour le calcul vectoriel : la différence avec la *vraie distributivité* est qu'ici on multiplie des objets de *nature différente* : des nombres et des vecteurs !
- L'ensemble $\mathcal{V}$ muni de l'addition des vecteurs (**opération interne** !) est un **groupe** (l'addition des vecteurs est associative, possède un élément neutre, le vecteur nul et tout vecteur a un symétrique, le vecteur opposé) **commutatif** (l'addition est en plus commutative).
- L'ensemble $\mathcal{V}$ muni de l'addition (interne) des vecteurs et de la multiplication (externe) des vecteurs par les réels est appelé **espace vectoriel**.

7) Forme vectorielle du théorème de Thalès

Le théorème de Thalès et sa réciproque, que vous avez vus en 4^e, peut être formulé dans le langage vectoriel de la manière suivante :

Théorème de Thalès

Soit un triangle ABC, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ et $(BC) \parallel (DE)$. Alors il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DE} = k \cdot \overrightarrow{BC}$$

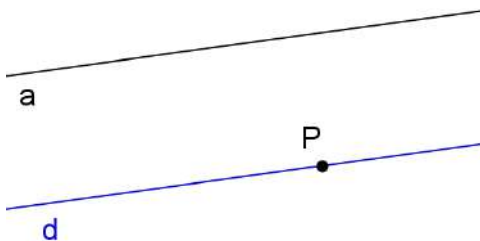
Réciproque du théorème de Thalès

Soit un triangle ABC, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ et un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

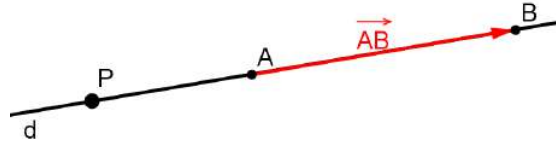
Alors $(BC) \parallel (DE)$.

8) Equation vectorielle d'une droite

- Soit un point P et une droite a, alors il existe exactement une seule droite d qui passe par A et qui est parallèle à a comme le montre la figure suivante :



La droite d est donc entièrement déterminée si on connaît un point de d et une droite qui lui est parallèle, c'est-à-dire qui indique sa **direction** ! Or pour indiquer une direction on peut également utiliser un vecteur : la direction de la droite d est connue si on connaît n'importe quel vecteur $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ où $A \in d$ et $B \in d$:



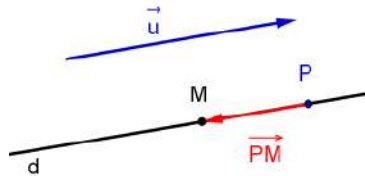
Un tel vecteur est appelé vecteur directeur de d.

- Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs qui sont tous
- Soient deux droites a et b de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement. Alors on a :

$$a \parallel b \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

- Soit d une droite définie par un point P et un vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point quelconque du plan. Deux cas peuvent se présenter :

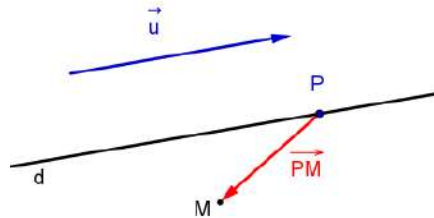
1^{er} cas : $M \in d$



$\vec{u}$ et $\overrightarrow{PM}$ sont colinéaires

2^e cas :

$M \notin d$



$\vec{u}$ et $\overrightarrow{PM}$ ne sont pas colinéaires

D'où :

$$\begin{aligned} \forall M \quad M \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{PM} = k \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

En d'autres termes $d = \{M / \overrightarrow{PM} = k \cdot \vec{u}, k \in \mathbb{R}\}$ et l'équation $\overrightarrow{PM} = k \cdot \vec{u}$ est appelée

équation vectorielle de d.

• Définition

On dit que deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{u} \neq \vec{0}$ ou $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $a \perp b$ où a et b sont deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement.

9) Equation vectorielle d'un plan

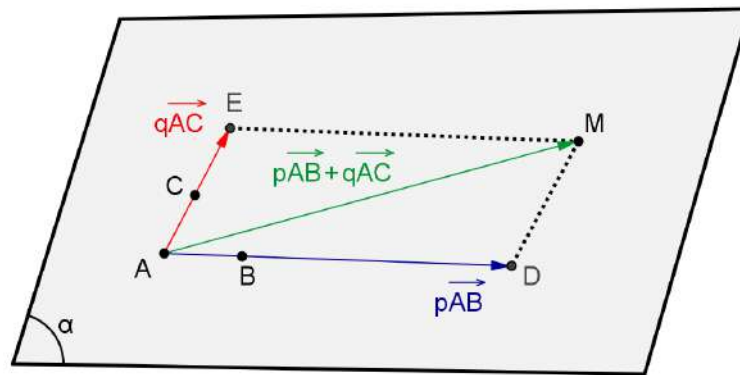
- Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, on appelle combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tout vecteur de la forme $p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{v}$ avec $p, q \in \mathbb{R}$.

- Théorème

Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{E}$ et M un point quelconque de $\mathcal{E}$, alors :

$$\boxed{M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ est une combinaison linéaire de } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC}}$$



démonstration

Supposons d'abord que $M \in (ABC)$, plusieurs cas peuvent se présenter :

- o si $M = A$ alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}$
- o si $M = B$ alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}$
- o si $M = C$ alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$
- o si $M \neq A$ et $M \neq B$ et $M \neq C$, alors il existe $D \in (AB)$ tel que $(DM) \parallel (AC)$ et

$E \in (AC)$ tel que $(EM) \parallel (AB)$. Alors $(ADME) = \#$ donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

Or $D \in (AB)$ donc $\exists p \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AD} = p \cdot \overrightarrow{AB}$ et $E \in (AC)$ donc $\exists q \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AE} = q \cdot \overrightarrow{AC}$ et par conséquent $\overrightarrow{AM} = p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{AC}$.

Dans tous les cas $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

Réciproquement supposons que $\overrightarrow{AM} = p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{AC}$ où p et q sont deux réels.

- o si $p = 0$ alors $\overrightarrow{AM} = q \cdot \overrightarrow{AC}$ et A, M, C sont alignés donc $M \in (ABC)$
- o si $q = 0$ alors $\overrightarrow{AM} = p \cdot \overrightarrow{AB}$ et A, M, B sont alignés donc $M \in (ABC)$

o si $p \cdot q \neq 0$ alors :

$$\exists ! D \in (AB) \text{ tel que } D \neq A \text{ et } \overrightarrow{AD} = p \cdot \overrightarrow{AB} \text{ et}$$

$$\exists ! E \in (AC) \text{ tel que } E \neq A \text{ et } \overrightarrow{AE} = q \cdot \overrightarrow{AC}$$

donc $(AB) = (AD)$ et $(AC) = (AE)$ et par conséquent $(ABC) = (ADE)$.

De plus $(ADME) = \#$ puisque $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, donc $M \in (ADE)$, ce qui montre que $M \in (ABC)$

Dans tous les cas on a montré que $M \in (ABC)$, cqfd.

- **Conséquence**

Soit un plan α et A, B, C trois points non alignés de α . Alors $\alpha = (ABC)$ et

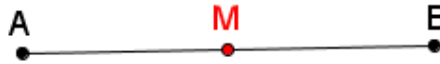
$M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} =$ combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire :

$$\alpha = \left\{ M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} = p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{AC} \text{ avec } p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux **vecteurs directeurs** (non colinéaires) de α et que $\overrightarrow{AM} = p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{AC}$ est une **équation vectorielle** de α .

10) Milieu d'un segment

- Soit M le milieu de $[AB]$:

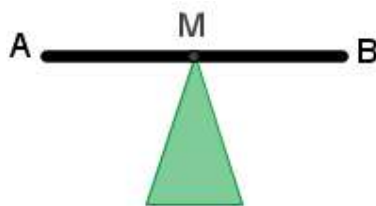


On voit facilement que :

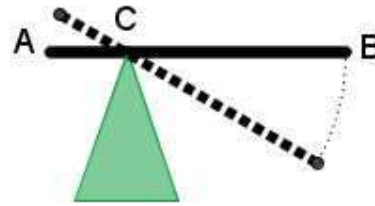
$$\forall A, B, M \quad M = \text{milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

- **Interprétation physique :**

Plaçons un bâton $[AB]$ sur la pointe d'un cône en position parfaitement horizontale, puis lâchons-le : si le bâton repose en son milieu M sur la pointe du cône, le bâton reste en équilibre, si par contre il repose sur un point C différent du milieu, il y a déséquilibre et il va tomber.



(équilibre)



(déséquilibre)

Le vecteur $\overrightarrow{MA}$ (respectivement $\overrightarrow{MB}$) représente la force exercée par l'extrémité A (resp. B) du bâton sur le point M et l'égalité $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ exprime le fait que la force résultante est la force nulle : il ne se passe rien, le bâton reste en équilibre !

Par contre la force résultante $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$ n'étant pas nulle, elle va entraîner le bâton vers le bas (il tombe)...

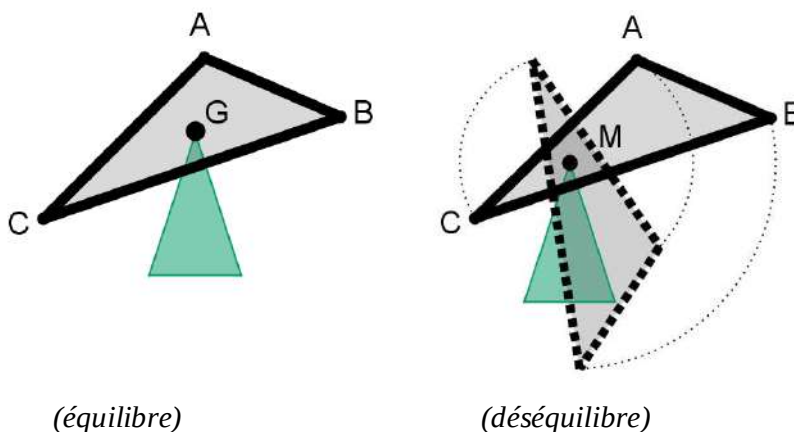
Conclusion :

Le milieu est le point d'équilibre appelé centre de gravité du segment (du bâton).

11) Centre de gravité d'un triangle

- **Interprétation physique :**

Soit ABC un triangle (découpé dans une plaque homogène, p. ex. une plaque en bois). Nous allons chercher « le point d'équilibre » de ce triangle, c'est-à-dire le point G tel que le triangle posé horizontalement sur ce point reste en équilibre :



Comme pour le bâton, les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ représentent les forces exercées respectivement par les sommets A, B et C sur le point G. Le point d'équilibre est alors caractérisé par l'égalité $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, alors que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \neq \vec{0}$.

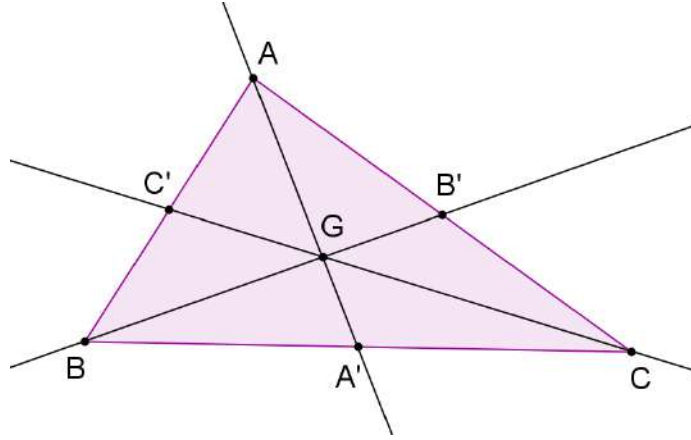
- **Définition**

On appelle centre de gravité d'un triangle $\Delta(ABC)$ le point G tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}}$$

• Propriétés de G

Soient un triangle $\Delta(ABC)$, A' , B' , C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ et G le centre de gravité, alors :



o $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}, \quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}, \quad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'},$

démonstration :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ (Chasles)} \\ &\Leftrightarrow 3 \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -3 \cdot \overrightarrow{GA} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AG} \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot \overrightarrow{AA'} = 3 \cdot \overrightarrow{AG} \text{ (voir exercice 19)} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AA'} \end{aligned}$$

Les deux autres égalités se démontrent de façon analogue (exercice !)

o $G \in (AA') \cap (BB') \cap (CC')$

démonstration :

Nous venons de montrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires, donc les points A , A' et G sont alignés (propriété p. 8) et par conséquent $G \in (AA')$. On montre de même que $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$, d'où le résultat.

Remarque :

Comme les droites (AA') , (BB') et (CC') sont les trois **médianes** du triangle, nous venons de montrer que G est le point d'intersection de ces médianes !

Exercices 1 à 13

B) VECTEURS ET COORDONNEES

1) Repères

a) Repères d'une droite



- Soit d une droite et $O, I \in d$ avec $O \neq I$, alors :

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad M \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OI} \quad (*)$$

- De plus ce réel k est unique.

En effet s'il existait k et k' tel que $\overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM} = k' \cdot \overrightarrow{OI}$ alors :

$$k \cdot \overrightarrow{OI} = k' \cdot \overrightarrow{OI} \Leftrightarrow (k - k') \cdot \overrightarrow{OI} = \vec{0} \Leftrightarrow k = k' \text{ ou } \overrightarrow{OI} = \vec{0},$$

or $\overrightarrow{OI} \neq \vec{0}$, donc $k = k'$.

- Définition

L'unique réel k tel que $\overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OI}$ est appelé l'**abscisse** du point M dans le **repère** $(O, \overrightarrow{OI})$ de d d'**origine** O . On note $M(k)$.

Ainsi :

$$M(k) \text{ dans } (O, \overrightarrow{OI}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OI}$$

b) Repères d'un plan

- Soit α un plan et O, I, J trois points non alignés de α , alors on a d'après le théorème page 17 :

$$M \in (OIJ) = \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \text{ est une combinaison linéaire de } \overrightarrow{OI} \text{ et } \overrightarrow{OJ}$$

$$\Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}$$

- De plus le couple (p, q) est unique.

En effet si $\overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OM} = p' \cdot \overrightarrow{OI} + q' \cdot \overrightarrow{OJ}$ alors :

$$p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} = p' \cdot \overrightarrow{OI} + q' \cdot \overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow (p - p') \cdot \overrightarrow{OI} = (q' - q) \cdot \overrightarrow{OJ} \quad (*).$$

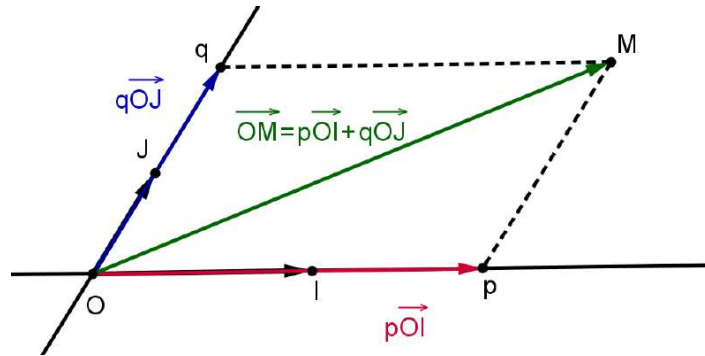
Mais alors $p - p' = 0$ car sinon on aurait $\overrightarrow{OI} = \frac{q' - q}{p - p'} \cdot \overrightarrow{OJ}$ et O, I, J seraient alignés

(puisque $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ colinéaires) ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent

$p = p'$ et $(*)$ devient :

$$0 \cdot \overrightarrow{OI} = (q' - q) \cdot \overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow \vec{0} = (q' - q) \cdot \overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow q' - q = 0 \text{ ou } \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$$

donc $q' - q = 0$ puisque $\overrightarrow{OI} \neq \vec{0}$ et on a également $\boxed{q = q'}$, cqfd.



- **Définition**

L'unique couple de réels (p, q) tel que $\overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}$ est appelé le couple des **coordonnées** du point M dans le **repère** $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ de α d'**origine** O. On note $M(p, q)$, p est appelé l'**abscisse** et q l'**ordonnée** de M. Ainsi :

$$\boxed{M(p, q) \text{ dans } (O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}}$$

- **Cas particuliers**

Si $\overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{OJ}$ on dit que $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère **orthogonal** et si de plus les deux vecteurs sont unitaires, c'est-à-dire si $\|\overrightarrow{OI}\| = \|\overrightarrow{OJ}\| = 1$, on dit qu'on a un **repère orthonormé** : on note **R.O.N.**

c) **Repères de l'espace**

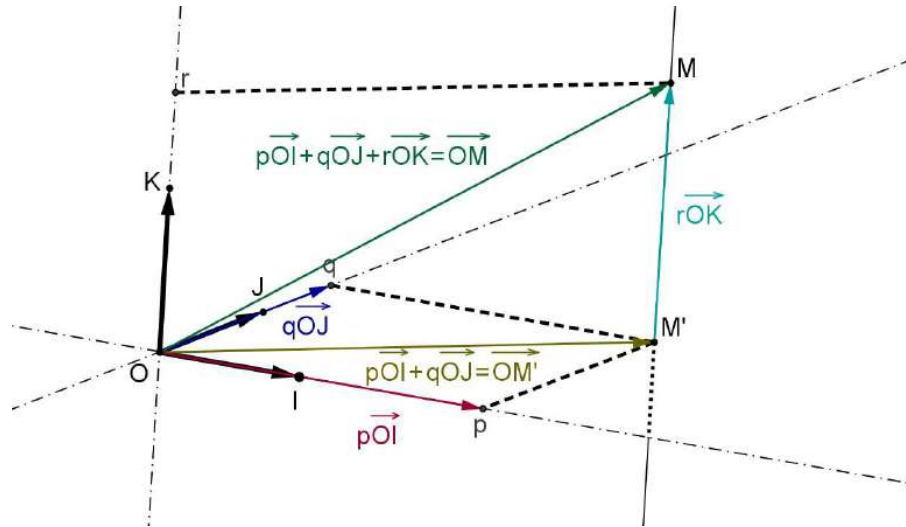
- Soient O, I, J, K quatre points non coplanaires (OIJK = tétraèdre) et M un point quelconque dans l'espace.

Alors il existe une droite d unique qui passe par M et qui est parallèle à OK : cette droite coupe le plan OIJ en M' et on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$ (1).

Dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ du plan OIJ : M'(p, q) donc $\overrightarrow{OM'} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}$ (2).

D'autre part $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires (puisque $M'M = d \parallel OK$) donc il existe un réel r unique tel que $\overrightarrow{M'M} = r \cdot \overrightarrow{OK}$ (3).

En remplaçant (2) et (3) dans (1) il vient : $\overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} + r \cdot \overrightarrow{OK}$.



- **Définition**

L'unique triplet de réels (p, q, r) tel que $\overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} + r \cdot \overrightarrow{OK}$ est appelé le triplet des **coordonnées** du point M dans le **repère** $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ de l'espace d'**origine** O. On note $M(p, q, r)$, p est appelé l'**abscisse**, q l'**ordonnée** et r la **cote** de M. Ainsi :

$$M(p, q, r) \text{ dans } (O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} + r \cdot \overrightarrow{OK}$$

Les trois vecteurs du repère sont souvent notés $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

- **Cas particuliers**

Si les vecteurs $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont deux à deux orthogonaux on dit que $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ est un repère **orthogonal** et si de plus les trois vecteurs sont unitaires, c'est-à-dire si $\|\overrightarrow{OI}\| = \|\overrightarrow{OJ}\| = \|\overrightarrow{OK}\| = 1$, on dit qu'on a un **repère orthonormé** : on note **R.O.N.**

- **Conclusion**

Un repère est toujours constitué d'un point fixe appelé origine du repère et :

- d'un vecteur directeur $\overrightarrow{OI}$ dans le cas d'une droite
- de deux vecteurs directeurs non colinéaires dans le cas d'un plan
- de trois vecteurs dont aucun n'est une combinaison linéaire des deux autres (ce qu'on exprime en disant qu'ils sont *linéairement indépendants*) dans le cas de l'espace.

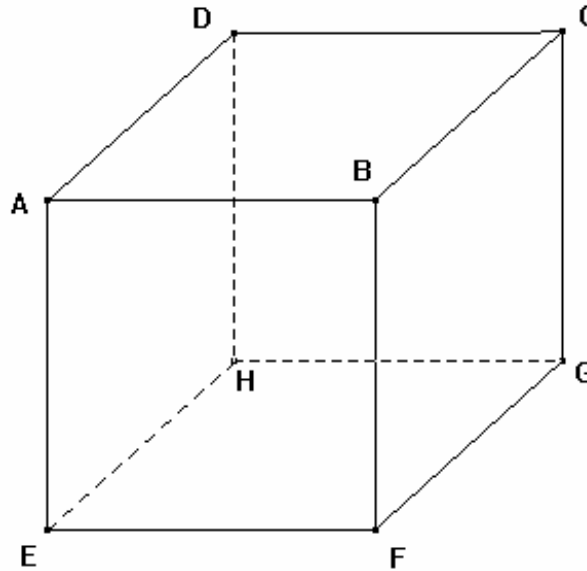
Pour repérer un point M il faut donc

- 1 abscisse si $M \in d : M(p)$
- 2 coordonnées si $M \in \alpha : M(p, q)$
- 3 coordonnées si $M \in \mathcal{E} : M(p, q, r)$

On dit qu'une droite est de **dimension** 1, un plan de dimension 2 et l'espace de dimension 3.

• **Exemples**

Soit ABCDEFGH un cube :



Dans le repère $(H, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{FB})$:

A(; ;), B(; ;), C(; ;), D(; ;), E(; ;),
F(; ;), G(; ;), H(; ;)

Dans le repère $(B, \overrightarrow{HD}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{GF})$:

A(; ;), B(; ;), C(; ;), D(; ;), E(; ;),
F(; ;), G(; ;), H(; ;)

Dans le repère $(A, 2 \cdot \overrightarrow{AB}, \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}, 3 \cdot \overrightarrow{AE})$:

A(; ;), B(; ;), C(; ;), D(; ;), E(; ;),
F(; ;), G(; ;), H(; ;)

2) Coordonnées d'un vecteur et calcul vectoriel

$\mathcal{E}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a) Définition

Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$ et $M(p, q, r) \in \mathcal{E}$ le point de $\mathcal{E}$ qui vérifie $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, alors :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$$

On dit que (p, q, r) est le triplet des **coordonnées** de $\vec{u}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on note :

$$\vec{u}(p, q, r) \text{ ou } \vec{u} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \Leftrightarrow \vec{u} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$$

Remarques :

- Prendre les mêmes coordonnées pour le point M et pour le vecteur $\vec{u}$ se justifie par le fait qu'un vecteur $\vec{u}$ est entièrement déterminé quand on connaît un de ses représentants $\overrightarrow{OM}$.
- La notation « verticale » des coordonnées est utilisée exclusivement pour les vecteurs et servira souvent à remplacer un « calcul vectoriel » par un « calcul matriciel » sur des matrices uni-colonnes.
- Il résulte de ce qui précède que deux vecteurs (ou deux points) sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées dans un repère donné.

b) Formules valables dans n'importe quel repère

- Soient $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{E}$ et $B(x_B, y_B, z_B) \in \mathcal{E}$, alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}) - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}) \\ &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Exemple : $A(5; -3; 7)$, $B(-1; 0; 9)$, alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha(x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}) = \alpha x_u \vec{i} + \alpha y_u \vec{j} + \alpha z_u \vec{k}, \text{ d'où :}$$

$$\alpha \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha x_u \\ \alpha y_u \\ \alpha z_u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k} + x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k} \\ &= (x_u + x_v) \vec{i} + (y_u + y_v) \vec{j} + (z_u + z_v) \vec{k} \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \\ z_u + z_v \end{pmatrix}$$

Exemples : $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$, alors : $3 \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ -21 \end{pmatrix}$, $-7 \vec{v} \begin{pmatrix} 56 \\ -77 \\ -21 \end{pmatrix}$, $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$,

$$2 \cdot \vec{u} - 5 \cdot \vec{v} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ -55 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ -65 \\ -29 \end{pmatrix}.$$

- Milieu d'un segment $[AB]$:

$$M = \text{milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A - x_M \\ y_A - y_M \\ z_A - z_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B - x_M \\ y_B - y_M \\ z_B - z_M \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A + x_B - 2x_M \\ y_A + y_B - 2y_M \\ z_A + z_B - 2z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B - 2x_M = 0 \\ y_A + y_B - 2y_M = 0 \\ z_A + z_B - 2z_M = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

D'où : $\boxed{M = \text{milieu de } [AB] \Leftrightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)}$

- Centre de gravité d'un triangle $\Delta(ABC)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A - x_G \\ y_A - y_G \\ z_A - z_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B - x_G \\ y_B - y_G \\ z_B - z_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C - x_G \\ y_C - y_G \\ z_C - z_G \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A + x_B + x_C - 3x_G \\ y_A + y_B + y_C - 3y_G \\ z_A + z_B + z_C - 3z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \\ z_A + z_B + z_C = 3z_G \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{G = \text{centre de gravité de } \Delta(ABC) \Leftrightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)}$$

Exemples :

A(-17;8;-9), B(23;0;-11), C(-2;15;-24) alors :

milieu de [AB] : M(3;4;-10) et centre de gravité de $\Delta(ABC)$: $G\left(\frac{4}{3}; \frac{23}{3}; -\frac{44}{3}\right)$

c) Formules valables uniquement dans un R.O.N.

On suppose maintenant que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un R.O.N..

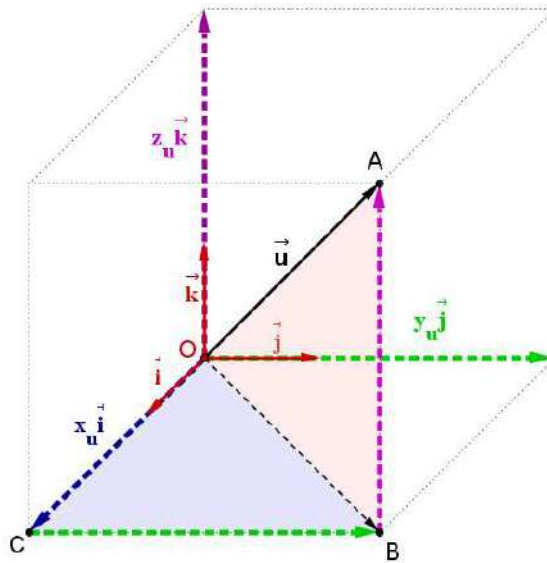
- **Norme d'un vecteur**

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et les points A($x_u; y_u; z_u$), B($x_u; y_u; 0$) et C($x_u; 0; 0$) (voir figure).

Alors $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ et comme $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un R.O.N :

o le triangle $\Delta(OCB)$ est rectangle en C donc $OB^2 = OC^2 + CB^2$ (Pythagore)

- o le triangle $\Delta(OAB)$ est rectangle en B donc $OA^2 = OB^2 + BA^2$ (Pythagore)
- o D'où $OA^2 = OC^2 + CB^2 + BA^2$ (1).



Or : $OC = \|\overrightarrow{OC}\| = \|x_u \vec{i}\| = |x_u| \|\vec{i}\| = |x_u| \cdot 1 = |x_u|$ (2),

$CA = \|\overrightarrow{CA}\| = \|y_u \vec{j}\| = |y_u| \|\vec{j}\| = |y_u| \cdot 1 = |y_u|$ (3),

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \|z_u \vec{k}\| = |z_u| \|\vec{k}\| = |z_u| \cdot 1 = |z_u|$ (4).

En remplaçant (2), (3), (4) dans (1) il vient :

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\overrightarrow{OA}\|^2 = OA^2 = |x_u|^2 + |y_u|^2 + |z_u|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

d'où :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$$

Exemple :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{6} \\ -3 \end{pmatrix}, \|\vec{u}\| = \sqrt{7^2 + \sqrt{6}^2 + (-3)^2} = \sqrt{49 + 6 + 9} = 8$$

- **Distance de deux points**

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, alors :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

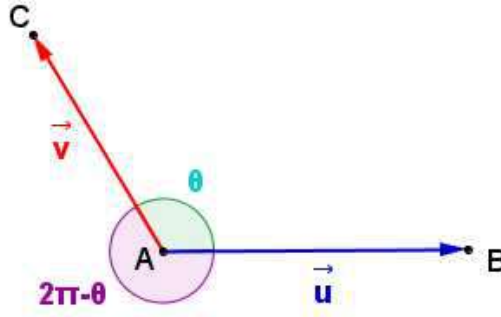
Exercices 14 à 22

C) PRODUIT SCALAIRE

1) Définitions

a) Angle formé par deux vecteurs non nuls

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et A, B, C trois points (non alignés) de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$:



L'angle $\theta = \widehat{BAC}$, indépendant des représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ choisis (expliquez pourquoi !), est appelé **angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** et est noté parfois $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

En fait $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment deux angles : θ et $2\pi - \theta$, dont l'un est saillant (c'est-à-dire de mesure comprise entre 0 et π radians), l'autre rentrant (c'est-à-dire de mesure strictement comprise entre π et 2π radians). Or comme on va le voir tout de suite, nous ne nous intéresserons qu'au *cosinus* de cet angle et comme $\cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos \theta$, nous choisirons toujours celui des deux angles qui est saillant : $\boxed{0 \leq \theta \leq \pi}$.

b) Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, on appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$** le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (on lit : « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »), défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

où $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ étant l'angle (saillant) formé par les deux vecteurs.

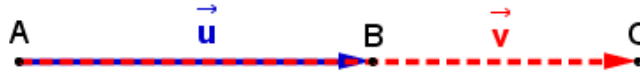
Exercices 23 et 24

2) Interprétation géométrique

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ et $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$.

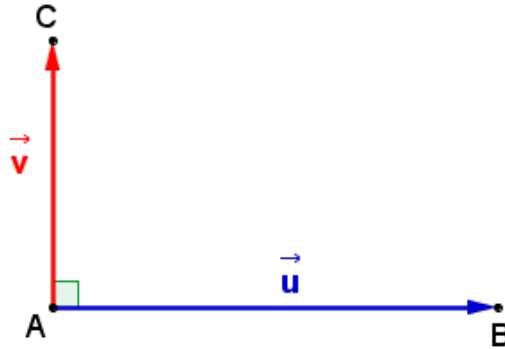
- 1^{er} cas : $\theta = 0$

Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 0 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot 1 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = AB \cdot AC > 0$.



- 2^e cas : $\theta = \frac{\pi}{2}$

Alors $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot 0 = 0$.



- 3^e cas : $\theta = \pi$

Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, des sens opposés et

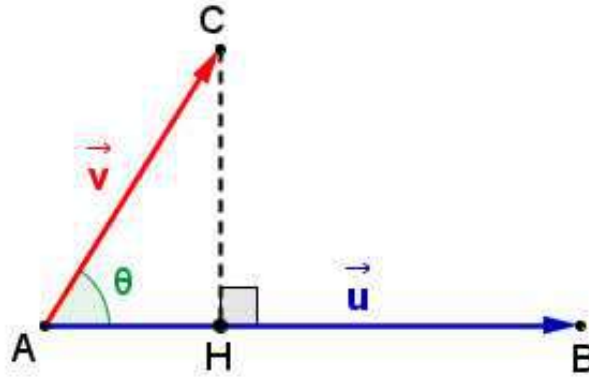
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \pi = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot (-1) = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = -AB \cdot AC < 0.$$



- 4^e cas : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Soit H la projection orthogonale de C sur AB, alors $\triangle(AHC)$ est rectangle en H donc

$$\cos \theta = \frac{AH}{AC} \text{ et par conséquent : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = AB \cdot AC \cdot \frac{AH}{AC} = AB \cdot AH > 0.$$

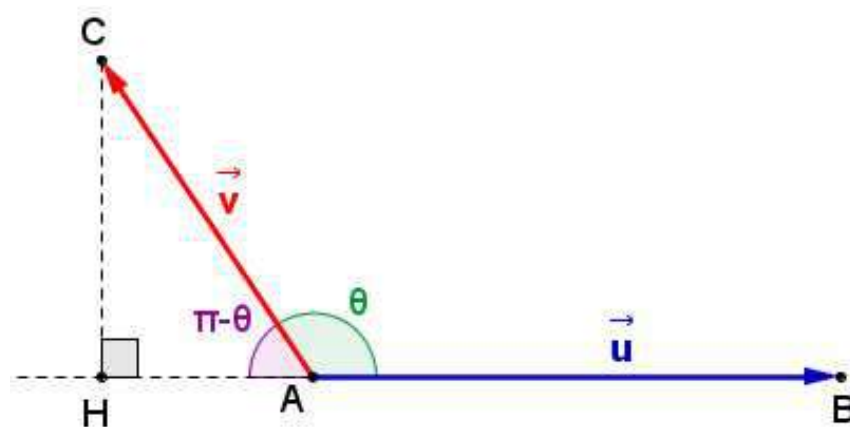


- 5^e cas : $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Soit H la projection orthogonale de C sur AB, alors $\triangle(AHC)$ est rectangle en H donc

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow -\cos \theta = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{AH}{AC} \text{ et par conséquent :}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = AB \cdot AC \cdot \left(-\frac{AH}{AC} \right) = -AB \cdot AH < 0.$$



Conclusion

En remarquant que dans le 1^{er} et le 3^e cas $H = C$, on voit que :

- si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AH > 0$
- si $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \cdot AH < 0$
- si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

3) Expression analytique

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un **R.O.N.**, $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$, A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$. Nous supposons d'abord que les deux vecteurs sont non nuls, alors trois cas peuvent se présenter :

- **1^{er} cas** : $\theta = 0$

Alors il existe un réel strictement positif k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_v = k \cdot x_u \\ y_v = k \cdot y_u \\ z_v = k \cdot z_u \end{cases}$ et on a :

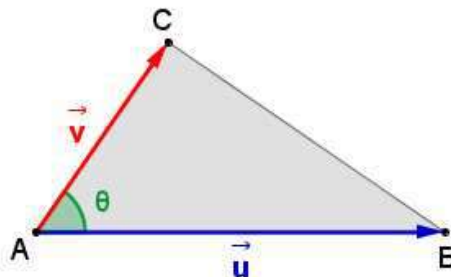
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 0 \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|k \cdot \vec{u}\| \cdot 1 \\ &= \|\vec{u}\| \cdot k \|\vec{u}\| \quad (\text{car } k > 0) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot k \\ &= k(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) \\ &= kx_u^2 + ky_u^2 + kz_u^2 \\ &= x_u kx_u + y_u ky_u + z_u kz_u \\ &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \end{aligned}$$

- **2^e cas** : $\theta = \pi$

Alors il existe un réel strictement négatif k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$ et on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \pi \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|k \cdot \vec{u}\| \cdot (-1) \\ &= \|\vec{u}\| \cdot (-k) \|\vec{u}\| \cdot (-1) \quad (\text{car } |k| = -k \text{ puisque } k < 0) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot k \\ &= \dots \quad (\text{voir 1^{er} cas}) \\ &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \end{aligned}$$

- **3^e cas** : $0 < \theta < \pi$



Alors ABC est un triangle et d'après le théorème du cosinus on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \theta \Leftrightarrow 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \theta = AB^2 + AC^2 - BC^2.$$

Or $AB \cdot AC \cdot \cos \theta = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v},$

$$AB^2 = \|\vec{u}\|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$AC^2 = \|\vec{v}\|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

$$BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (x_v - x_u)^2 + (y_v - y_u)^2 + (z_v - z_u)^2,$$

d'où : $2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 - (x_v - x_u)^2 - (y_v - y_u)^2 - (z_v - z_u)^2$

$$\Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = 2x_u x_v + 2y_u y_v + 2z_u z_v$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

Nous avons donc montré que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \quad (*)$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (par définition) et d'autre part $x_u = y_u = z_u = 0$ donc

$0 \cdot x_v + 0 \cdot y_v + 0 \cdot z_v = 0$, ce qui montre bien que la formule (*) reste valable pour $\vec{u} = \vec{0}$.

D'où :

Théorème

Pour tous vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ dans un **R.O.N.** on a :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v}$$

Remarque

L'expression analytique de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ permet de calculer $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$. Exemple :

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans un R.O.N. alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 0 = -11$ et d'autre part

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = \sqrt{1+4+9} \sqrt{9+16+0} \cos \theta = 5\sqrt{14} \cos \theta$, d'où $-11 = 5\sqrt{14} \cos \theta$ et par conséquent $\theta \simeq 126,01^\circ$.

Exercice 25

4) Propriétés

a) $\boxed{\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}}$

En effet : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0$ ou $\|\vec{v}\| = 0$ ou $\cos \theta = 0$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

b) $\boxed{\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \text{ (non nuls)} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi}$

En effet le signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le même que celui de $\cos \theta$ puisque $\|\vec{u}\| > 0$ et $\|\vec{v}\| > 0$.

c) $\boxed{\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}}$ (le produit scalaire est **symétrique**)

En effet en se plaçant dans un R.O.N. on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = x_v x_u + y_v y_u + z_v z_u = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

d) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) &= (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

(on dit que le produit scalaire est **linéaire**)

Remarque

On ne dit pas que le produit scalaire est « commutatif », « associatif » ou « distributif par rapport à l'addition » car ces termes sont réservés aux opérations internes dans un ensemble (comme par exemple l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$) et le produit scalaire est une **opération externe** : le produit de deux vecteurs n'est pas un vecteur mais un nombre réel !

e) $\boxed{\forall A, B, C, D \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}} \quad \text{avec } C' = p_{(AB)}(C) \text{ et } D' = p_{(AB)}(D)$

En effet :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D} \\ &= 0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + 0 \quad \text{car } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CC'} \text{ et } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{D'D} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} \end{aligned}$$

f) $\boxed{\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}}$

En effet $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos 0 = \|\vec{u}\|^2 \cdot 1 = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$.

Définition

Le nombre réel positif $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé **carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$ et il est noté $\vec{u}^2$.

Remarques

- Ainsi on a : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} \Leftrightarrow \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- On ne parle pas de « cube scalaire » ou de « $\vec{u}^n$ » où $n > 2$!

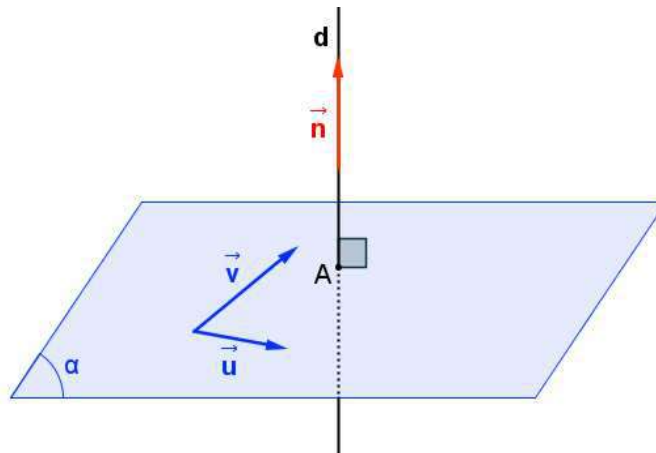
Exercices 26 à 38

5) Vecteur normal et équations d'un plan

- Nous avons vu en **A9)** que pour connaître un plan α il suffit de connaître un point $A \in \alpha$ et deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de ce plan. En fait un point A et une droite $d \perp \alpha$ suffisent puisqu'il n'existe qu'un seul plan passant par A et qui est orthogonal à d ! Or pour connaître une telle droite il suffit de connaître un vecteur directeur $\vec{n}$ de cette droite qui sera alors orthogonal à tous les vecteurs directeurs du plan α ! Ceci nous amène à poser la définition suivante :

• Définition

Soit un plan α et un vecteur $\vec{n}$ dans l'espace. On dit que $\vec{n}$ est un **vecteur normal** à α si et seulement si $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite $d \perp \alpha$.



Remarque

Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à α , alors l'ensemble des vecteurs normaux à α est égal à l'ensemble des vecteurs non nuls colinéaires à $\vec{n}$!

• **Propriété 1**

Soit un plan α de vecteur normal $\vec{n}$ et $A \in \alpha$, alors :

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{E} \quad M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}}$$

Démonstration :

Soit d la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par A . Alors $d \perp \alpha$ et pour tout $M \in \alpha$:

$$\begin{aligned} M \in \alpha &\Leftrightarrow (AM) \subset \alpha \quad (\text{car } A \in \alpha) \\ &\Leftrightarrow d \perp (AM) \quad (\text{car } \alpha \text{ est l'unique plan passant par } A \text{ et orthogonal à } d) \\ &\Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AM} \end{aligned}$$

• **Propriété 2**

Soit un plan α de l'espace muni d'un R.O.N., $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à α et

$A(x_A, y_A, z_A) \in \alpha$, alors :

$$\boxed{\forall M(x, y, z) \in \mathcal{E} \quad M(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \quad (*)}$$

où $d = -ax_A - by_A - cz_A$

Définition : On dit que (*) est **une équation cartésienne du plan** α .

Démonstration :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \alpha &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \quad (\text{d'après propriété 1}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{d'après C4a}) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{d'après B2b}) \\ &\Leftrightarrow (x - x_A) \cdot a + (y - y_A) \cdot b + (z - z_A) \cdot c = 0 \quad (\text{d'après C3}) \\ &\Leftrightarrow ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{en posant: } d = -ax_A - by_A - cz_A) \end{aligned}$$

Exemple

Soit α le plan passant par $A(-2, 3, 5)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in \alpha &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \\ z-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x+2) \cdot (-7) + (y-3) \cdot 4 + (z-5) \cdot (-6) = 0 \\
 &\Leftrightarrow -7x - 14 + 4y - 12 - 6z + 30 = 0 \\
 &\Leftrightarrow -7x + 4y - 6z + 4 = 0
 \end{aligned}$$

On note : $\alpha \equiv -7x + 4y - 6z + 4 = 0$. Cette équation permet de vérifier facilement si le plan passe par un point donné ou non : $B(2, 1, -1) \in \alpha$ car $-7 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) + 4 \stackrel{!}{=} 0$ et $C(-5, 3, 0) \notin \alpha$ car $-5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 6 \cdot 0 + 4 = 6 \neq 0$.

- **Propriété 3 (réciproque de la propriété 2)**

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors l'ensemble :

$E = \{M(x, y, z) / ax + by + cz + d = 0\}$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

Démonstration :

Comme $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ l'un au moins des nombres a, b, c est différent de 0, par exemple $a \neq 0$, d'où $A\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right) \in E$ car $a\left(-\frac{d}{a}\right) + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = -d + d \stackrel{!}{=} 0$.

Appelons α le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$, alors :

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in \alpha &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + \frac{d}{a} \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\
 &\Leftrightarrow ax + d + by + cz = 0 \\
 &\Leftrightarrow M(x, y, z) \in E
 \end{aligned}$$

Par conséquent $E = \alpha$, c.q.f.d.

Exercices 39, 40, 41

6) Equations d'une sphère

- Définition

Soit A un point de l'espace et r un nombre réel strictement positif, alors on appelle **sphère** de **centre A** et de **rayon r** le lieu des points M tel que $AM = r$.

Notation : $\mathcal{S}(A, r) = \{M \in \mathcal{E} / AM = r\}$.

- Propriété 1

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace muni d'un R.O.N. et $r \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{S}(A, r) \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{S}(A, r) &\Leftrightarrow AM = r \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2} = r \quad (\text{d'après B2c}) \\ &\Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2 \quad (\text{équation de } \mathcal{S}(A, r)) \end{aligned}$$

- Propriété 2

Soient A et B deux points de l'espace muni d'un R.O.N., alors le lieu des points $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$ est la sphère de diamètre $[AB]$, c'est-à-dire la sphère de centre $I = \text{milieu de } [AB]$ et de rayon $r = AI = BI$.

Démonstration :

Soient $M \in \mathcal{E}$ et I le milieu de $[AB]$, alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \quad (\text{d'après C4a}) \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 0 \quad (\text{relation de Chasles}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \quad (\text{d'après C4d}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot (-\overrightarrow{IA}) = 0 \quad (\text{d'après C4c et } I = \text{milieu de } [AB]) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) - \overrightarrow{IA}^2 = 0 \quad (\text{d'après C4d}) \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI}\|^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} = \|\overrightarrow{IA}\|^2 \quad (\text{car } I = \text{milieu de } [AB] \text{ et d'après C4e}) \\ &\Leftrightarrow MI^2 + 0 = IA^2 \\ &\Leftrightarrow MI = IA \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{S}(I, IA) \end{aligned}$$

Exercices 42 et 43

D) EQUATIONS D'UN PLAN ET D'UNE DROITE

1) Equations d'un plan

Nous venons de voir (C5, pages 35 – 37) qu'un plan π est entièrement défini par la donnée d'un point $A \in \pi$ et d'un **vecteur normal** $\vec{n}$ au plan et que ces données permettent de déterminer une **équation cartésienne** du plan π .

Par ailleurs nous avons vu également (A 9, pages 17 – 18) qu'un plan π est entièrement défini par la donnée d'un point $A \in \pi$ et de **deux vecteurs directeurs non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (ou par trois points non alignés $A, B, C \in \pi$ ce qui revient au même puisqu'alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont bien deux vecteurs directeurs non colinéaires de π). De manière plus précise nous avons vu qu'un point M est dans le plan si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ce qui va nous permettre de déterminer des équations du plan π d'une autre façon.

a) Système d'équations paramétriques d'un plan

Soit π un plan donné par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et deux vecteurs directeurs non

colinéaires $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ et M(x, y, z) un point quelconque, alors :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \pi &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_u + \beta \cdot x_v \\ \alpha \cdot y_u + \beta \cdot y_v \\ \alpha \cdot z_u + \beta \cdot z_v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = x_A + \alpha \cdot x_u + \beta \cdot x_v \\ y = y_A + \alpha \cdot y_u + \beta \cdot y_v \\ z = z_A + \alpha \cdot z_u + \beta \cdot z_v \end{cases}$$

Ce système est appelé **système d'équations paramétriques** de π de **paramètres** α et β .

Exemples

- $A(7; -3; 2) \in \pi$ de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 7 + 4\alpha \\ y = -3 - 9\alpha + 5\beta \\ z = 2 + 11\alpha - \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

- si $\pi \equiv \begin{cases} x = 5 + 3\alpha - 6\beta \\ y = -1 + 8\alpha \\ z = -23\alpha + 7\beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ alors π est le plan passant par $A(5; -1; 0)$ et de

$$\text{vecteurs directeurs } \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -23 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir d'autres points de π on choisit n'importe quelles valeurs pour α et β :

$$\alpha = 1, \beta = 3 : B(5 + 3 - 18; -1 + 8; -23 + 21) = B(-10; 7; -2) \in \pi,$$

$$\alpha = -2, \beta = 0 : C(5 - 6; -1 - 16; 46) = C(-1; -17; 46) \in \pi, \text{ etc.}$$

b) Equation cartésienne d'un plan

Reprenons les notations précédentes.

- on appelle **déterminant des vecteurs** $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le déterminant :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

- Nous admettrons sans démonstration la propriété suivante:

$$\vec{w} \text{ est une combinaison linéaire de } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ssi } \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

- En utilisant cette propriété on obtient:

$$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ est une combinaison linéaire de } \vec{u} \text{ et } \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_u & x_v \\ y - y_A & y_u & y_v \\ z - z_A & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0$$

En calculant ce déterminant on obtient une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

c'est-à-dire une **équation cartésienne** de π .

Exemple

$$\pi \text{ défini par : } A(3, -5, 1), \vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -2 & 5 \\ y+5 & 7 & 1 \\ z-1 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -28(x-3) - 2(z-1) + 45(y+5) - 35(z-1) - 8(y+5) - 9(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -37x + 37y - 37z + 333 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + y - z + 9 = 0 \equiv \pi$$

Remarques

- La donnée d'un système d'équations paramétrées nous donne immédiatement deux vecteurs directeurs de π alors qu'une équation cartésienne nous fournit le vecteur

$$\text{normal } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} !$$

- Deux plans sont parallèles ssi ils ont les mêmes vecteurs directeurs et les memes vecteurs normaux.
- Deux plans sont orthogonaux ssi leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Exercices 44 - 54

2) Systèmes d'équations d'une droite

Il y a deux façons de déterminer une droite d dans l'espace :

➤ d est donnée par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$.

$$M(x, y, z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$$

et on obtient un **système d'équations paramétriques** de paramètre k de d :

$$M(x, y, z) \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = x_A + k \cdot x_u \\ y = y_A + k \cdot y_u \\ z = z_A + k \cdot z_u \end{cases}$$

Exemple

$$d \equiv \begin{cases} x = 17 - 6k \\ y = 37k \\ z = -5 + 19k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \text{ est la droite passant par } A(17, 0, -5) \text{ de v.d. } \vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 37 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

➤ d est donnée comme intersection de deux plans π_1 et π_2 , chaque plan étant défini par une équation cartésienne.

La droite d est alors déterminée par un système linéaire de deux équations à trois inconnues appelé **système d'équations cartésiennes** :

$$d \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Exemple

$$d \equiv \begin{cases} x - y + 3z = 2 & (1) \\ 2x + 4y - z = 1 & (2) \end{cases}$$

Pour chercher des points de d il faut résoudre ce système :

$$(1) \Leftrightarrow x = 2 + y - 3z$$

$$\text{dans } (2): 4 + 2y - 6z + 4y - z = 1 \Leftrightarrow 6y - 7z = -3 \Leftrightarrow y = \frac{7}{6}z - \frac{1}{2}$$

$$\text{dans } (1): x = 2 + \frac{7}{6}z - \frac{1}{2} - 3z \Leftrightarrow x = -\frac{11}{6}z + \frac{3}{2}$$

Ainsi $\forall z \in \mathbb{R} \quad M\left(-\frac{11}{6}z + \frac{3}{2}; \frac{7}{6}z - \frac{1}{2}; z\right) \in d$, par exemple pour $z = 0$ on obtient

$$A\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right) \in d, \text{ pour } z = -3 \text{ on obtient } B(7; -4; -3) \in d, \text{ etc.}$$

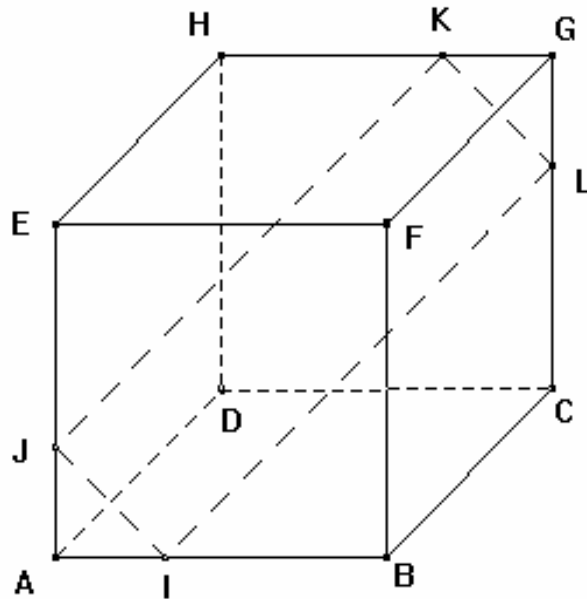
Exercices 55 - 68

EXERCICES

A) VECTEURS DANS L'ESPACE

- 1) Soient A, B et M trois points, montrez que :
 - a) M = milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$
 - b) M = milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$
- 2) Soit un triangle quelconque ABC et I le milieu de $[BC]$. Montrez que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.
- 3) Soit ABCD un tétraèdre et I, J, K, L, M, N les milieux de $[DB]$, $[DC]$, $[DA]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ respectivement (figure !).
 - a) Montrez que $IJNL = \#$ et que $MLKJ = \#$.
 - b) Déduisez-en que tous les segments ayant pour extrémités les milieux de deux arêtes opposées (càd qui ne se touchent pas) sont concourants en un point qui est leur milieu commun.
- 4) Soit ABCDEFGH un cube et I, J, K, L quatre points définis par :

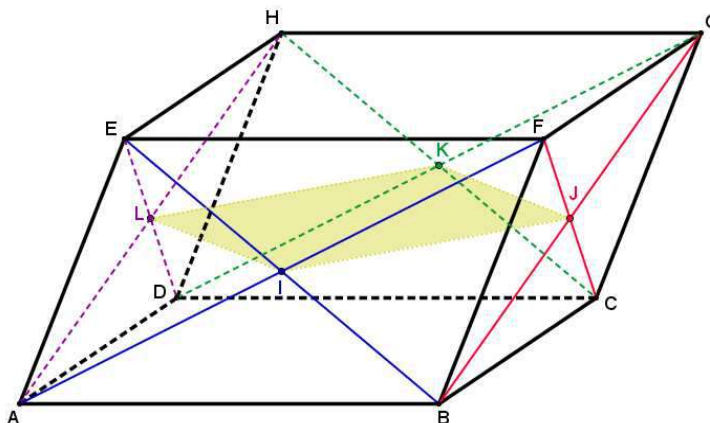
$$3 \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}, \quad \overrightarrow{HK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{HG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{LC} = 2 \cdot \overrightarrow{GL}$$



Montrez que $(IJKL) = \#$.

- 5) **Définition :** Un **parallélépipède** est un solide à 8 sommets dont les 6 faces sont des #. Si les faces sont des rectangles on dit que c'est un **parallélépipède rectangle ou pavé** et si les faces sont des carrés c'est un **cube** !

Soit ABCDEFGH un parallélépipède et I, J, K, L les points d'intersection des diagonales de ABFE, BCGF, CDHG et ADHE respectivement. Montrez que IJKL = #.



- 6) Soit ABCD un tétraèdre, et I, J les milieux de $[AB]$ et $[CD]$ respectivement. Montrez que $\overline{IJ}$ est une combinaison linéaire de $\overline{AD}$ et $\overline{CB}$.
- 7) Soit ABCD un tétraèdre et R, S, T, U les points définis par $\overline{AR} = \frac{1}{4}\overline{AC}$, $\overline{SD} = \frac{3}{4}\overline{AD}$, $4 \cdot \overline{BT} = \overline{BD}$ et $4 \cdot \overline{BU} = \overline{BC}$.
- a) Montrez que $(RSTU) = \#$.
- b) Soient I le point d'intersection de (CS) et (RD) et J le point d'intersection de (DU) et (CT) . Montrez que $(IJ) \parallel (RST)$.
- 8) Soient d_1, d_2, d_3 trois droites parallèles et non coplanaires, A_1, B_1, C_1 trois points sur d_1 , A_2, B_2, C_2 trois points sur d_2 , A_3, B_3, C_3 trois points sur d_3 , F, G, H les centres de gravités des triangles $\Delta(A_1A_2A_3)$, $\Delta(B_1B_2B_3)$, $\Delta(C_1C_2C_3)$ respectivement.
- Démontrez que :
- a) $3\overline{FG} = \overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \overline{A_3B_3}$
- b) F, G, H sont alignés
- 9) Soient A, B, C, D quatre points de l'espace et M, N, P, Q les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ respectivement. Démontrez que :

$$2(\|\overline{MP}\|^2 + \|\overline{NQ}\|^2) = \|\overline{AC}\|^2 + \|\overline{BD}\|^2$$

- 10)** Soient ABC un triangle quelconque et les points D, F, G définis par :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BA} \quad \overrightarrow{GC} = 5 \cdot \overrightarrow{GA}.$$

- a) Figure !
- b) Soit $E \in (AC)$ tel que $(DE) \parallel (BC)$, trouvez $a, b \in \mathbb{R}$ tel que :
- $\overrightarrow{CE} = a \cdot \overrightarrow{AC}$
 - $\overrightarrow{DE} = b \cdot \overrightarrow{CB}$
- c) Démontrez que $(GF) \parallel (DE)$.

- 11)** Soit ABCD un quadrilatère convexe quelconque (A, B, C, D coplanaires). On appelle **centre de gravité** de ABCD l'unique point G qui vérifie l'équation :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

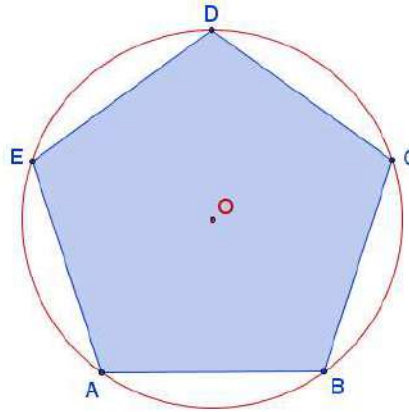
- a) Construisez un quadrilatère quelconque ABCD et son centre de gravité G après avoir démontré que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
- b) Soient M le milieu de $[AB]$ et P celui de $[CD]$. Montrez que $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$ et déduisez-en une construction plus simple de G.
- c) Soient N le milieu de $[BC]$ et Q celui de $[AD]$. Etudiez la nature du quadrilatère (MNPQ) et sa relation avec le point G.

- 12)** Soient ABC un triangle quelconque, G son centre de gravité, O le centre de son cercle circonscrit $\mathcal{C}$, A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ et H le point défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

- a) Montrez que $\overrightarrow{AH} = 2 \cdot \overrightarrow{OA'}$ et déduisez-en que H appartient à une droite remarquable du triangle $\Delta(ABC)$.
- b) Que peut-on dire du point H ?
- c) Énoncez le théorème que vous venez de démontrer et rappelez le nom du point H.
- d) Montrez que les points O, G et H appartiennent à une même droite appelée **droite d'Euler**.
- e) Montrez que les symétriques $H_1 = s_{A'}(H)$, $H_2 = s_{B'}(H)$ et $H_3 = s_{C'}(H)$ du point H par rapport aux milieux A', B' et C' appartiennent à $\mathcal{C}$.

- 13)** Soit ABCDE un pentagone régulier de centre O :



- a)** Montrez que :

$$\triangleright \exists a \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = a \cdot \overrightarrow{OD}$$

$$\triangleright \exists b \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = b \cdot \overrightarrow{OD}$$

- b)** Déduisez-en que : $\exists c \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = c \cdot \overrightarrow{OD}$

- c)** Déduisez-en que O est le centre de gravité du pentagone.

- d)** Calculez :

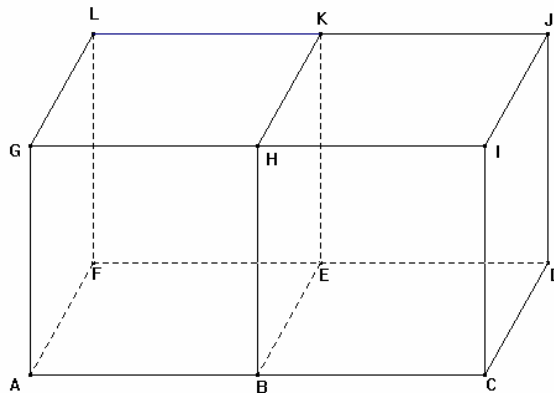
$$\triangleright \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB}$$

$$\triangleright \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC}$$

B) VECTEURS ET COORDONNEES

- 14)** Soit un triangle ABC, $D \in (BC)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BD} = \alpha \cdot \overrightarrow{BC}$. Exprimez les coordonnées de D dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en fonction de α .

- 15)** Soient ABEFGHKL et BCDEHIJK deux cubes dont les arêtes mesurent une unité :



Pour chacun des repères suivants, déterminez s'il s'agit d'un repère orthogonal ou orthonormé puis donnez les coordonnées des points A, B, C,, L dans ce repère :

- a) $(E, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DJ})$
- b) $(A, \overrightarrow{LJ}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{IC})$
- c) $(B, \overrightarrow{HB}, \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}, 4 \cdot \overrightarrow{AF})$

Pour les exercices suivants, si le repère n'est pas spécifié il s'agit d'un repère quelconque

16) Dans un repère de l'espace on donne $A(-5;1;4)$, $B(2;3;-6)$ et $C(0;1;7)$.

- a) Trouvez D tel que $(ABCD) = \#$.
- b) Trouvez E tel que $(AECB) = \#$.

17) Déterminez les réels a et b pour que :

- a) les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2-a \\ 1 \\ 2a+3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a+4 \\ a+2 \\ a+2 \end{pmatrix}$ soient égaux.
- b) les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a+2 \\ 2a-b \\ b+3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} b+3 \\ 3 \\ a+2 \end{pmatrix}$ soient égaux.
- c) les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ a-1 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.
- d) les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -2a \\ 5a-2 \\ b-5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ b+2a+3 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.
- e) les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2a-1 \\ 4-3a \\ 7-a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3+a \\ 5-2a \\ a \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

18) Examinez si les vecteurs suivants sont colinéaires :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} -14 \\ 21 \\ 35 \end{pmatrix}$$

19) Dans un R.O.N de l'espace on donne $A(3;-2;4)$, $B(-4;0;-2)$, $C(3;-1;2)$ et $D(-3;5;-1)$. Calculez la norme des vecteurs suivants :

a) $\vec{w} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

b) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

c) $\vec{v} = -\overrightarrow{AC} + 2 \cdot \overrightarrow{AD}$

20) Soient $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -3)$, $C(0; 3; -1)$.

a) Trouvez un point E différent de A, de B et du milieu de $[AB]$ tel que $E \in (AB)$.

b) Montrez que A, B et C ne sont pas alignés.

c) Trouvez un point D n'appartenant à aucune des droites (AB) , (AC) , (BC) et différent du centre de gravité du $\Delta(ABC)$ qui appartient au plan (ABC) .

21) Soient les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Analysez si $\vec{w}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

b) Déterminez λ pour que $\vec{t}$ soit combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{w}$.

22) Reprenez les exercices 3) à 6) et résolvez-les en utilisant des repères appropriés.

C) PRODUIT SCALAIRE

23) Sachant que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$ calculez $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

24) Sachant que $\|\vec{u}\| = 5$, $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{6}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10\sqrt{3}$ calculez $\|\vec{v}\|$.

25) Dans un R.O.N. de l'espace on donne $A(-3; 4; 5)$, $B(0; 7; -1)$ et $C(2; -1; 0)$. Calculez les angles du triangle $\Delta(ABC)$.

26) Soient A, B deux points du plan.

a) Déterminez le lieu des points M du plan tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2$.

b) Comment faut-il choisir les points M et N pour que $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2$?

c) Mêmes questions si A et B sont deux points de l'espace.

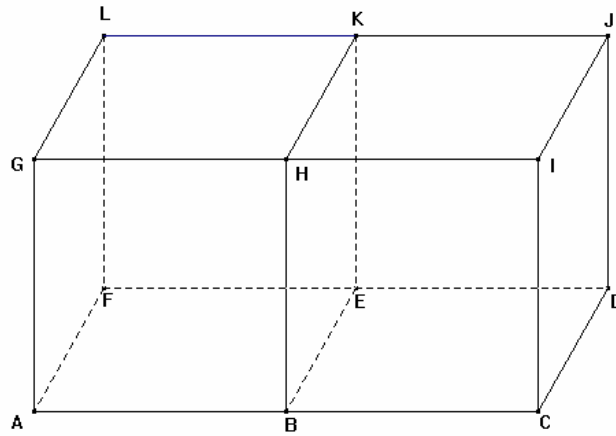
27) Soient $A, B \in \mathcal{E}$ avec $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$. Déterminez les ensembles suivants :

a) $\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0\}$

b) $\mathcal{I} = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4\}$

- c) $\mathcal{J} = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\}$
- d) $\mathcal{K} = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -1\}$
- e) $\mathcal{L} = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM}^2 = 9\}$
- f) $\mathcal{M} = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 6 \text{ et } AM = 4\}$
- g) $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \text{ et } BM = 5\}$

- 28) Soient ABEFGHKL et BCDEHIJK deux cubes dont les arêtes ont une longueur de 2 unités ($AF = AG = AB = BC = 2$) :



Calculez :

- a) $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{LC}$
- b) $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{BL}$
- c) $\widehat{LAJ}$
- d) $\widehat{CBL}$
- e) $\widehat{HCK}$

- 29) Soit $\triangle(ABC)$ un triangle rectangle en A tel que $AB = 2$ et $AC = 1$. Déterminez le lieu des points M du plan (ABC) tel que :

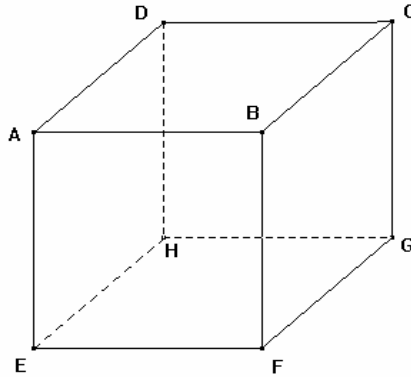
- | | |
|---|--|
| a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ | e) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = 1$ |
| b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 3$ | f) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC} = 2$ |
| c) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ | g) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}$ |
| d) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = -2$ | |

- 30)** Mêmes questions qu'à l'exercice 29 en prenant M dans l'espace $\mathcal{E}$.
- 31)** Soit ABC un triangle rectangle en B avec $AB = 4$ et $BC = 3$. Déterminez les ensembles suivants (dans l'espace, $M \in \mathcal{E}$) :

a) $\mathbb{A} = \left\{ M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{2} \right\}$

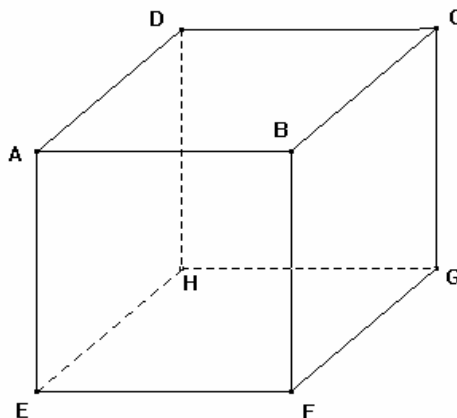
b) $\mathbb{B} = \left\{ M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = -5 \right\}$

- 32)** Soit ABCDEFGH un cube d'arête c :



- a) Montrez que $(EC) \perp (HF)$ et $(EC) \perp (AF)$.
- b) Calculez l'amplitude de l'angle $\widehat{AHC}$.
- c) Calculez l'amplitude de l'angle formé par les droites (AG) et (BH) .
- 33)** Soit ABCD un carré et $M \in [BD]$.
- a) Démontrez analytiquement et vectoriellement que $\overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DM}$.
- b) Déduisez-en que $MB \cdot MD = AB^2 - AM^2$.
- 34) a)** Montrez l'égalité suivante appelée égalité d'EULER :
- $$\forall A, B, C, D \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$
- b) *Application 1 :*
- Dans un tétraèdre ABCD il y a trois paires d'arêtes opposées : $[AB]$ et $[CD]$, $[AC]$ et $[BD]$, $[AD]$ et $[BC]$. Montrez que si deux de ces paires sont formées de segments orthogonaux, alors la troisième l'est aussi.
- c) *Application 2 :*
- Montrez que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes (théorème de l'orthocentre)

- 35)** Soit ABCD un # et O le point d'intersection de ses diagonales.
- Montrez que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow AB = AD$.
 - Enoncez la propriété ainsi démontrée.
- 36)** Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête c et I le milieu de $[AB]$. Calculez le produit scalaire $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID}$.
- 37)** Soient ABC un triangle, P et Q les pieds des hauteurs issues de A et de B et M le point d'intersection des hauteurs. Démontrez que $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{BM}$.
- 38)** Montrez que dans un # la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.
- 39)** Dans un R.O.N. de l'espace on donne $A(4; -3; 1)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$. Déterminez une équation du plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.
- 40)** Dans un R.O.N. de l'espace on donne l'équation d'un plan $\pi: 3x - 4y + z - 2 = 0$.
- Est-ce que les points $A(-2, 5, -3)$, $B(-4, -3, 2)$ appartiennent à π ?
 - Quel est l'ensemble de tous les vecteurs normaux à ce plan ?
 - Trouvez deux points de π .
- 41)** Soit le cube ABCDEFG :



Dans le R.O.N. $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ trouvez une équation de chacun des plans suivants :

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| a) (ABC) | d) (BCG) | g) (ACG) |
| b) (EFG) | e) (ABF) | h) (BCH) |
| c) (ADE) | f) (CDG) | i) (EBG) |

42) Dans un R.O.N. de l'espace on donne $A(3; -2; 4)$ et $B(-1; 1; 4)$.

- a)** Déterminez l'équation de la sphère de centre A et de rayon 7.
- b)** Déterminez l'équation de la sphère de diamètre [AB].
- c)** Déterminez l'ensemble $J = \{M(x, y, z) / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2\}$.

43) Déterminez les ensembles suivants définis dans un R.O.N. de l'espace :

$$\mathcal{P} = \{M(x, y, z) / x^2 - 6x + y^2 + 14y + z^2 + 2z + 55 = 0\}$$

$$\mathcal{Q} = \{M(x, y, z) / 3x^2 - 6x + 3y^2 + 3z^2 + 30z - 30 = 0\}$$

$$\mathcal{R} = \left\{M(x, y, z) / x^2 - x + y^2 + \frac{2}{3}y + z^2 - 2z - \frac{8}{9} = 0\right\}$$

$$\mathcal{T} = \{M(x, y, z) / x^2 - 7x + y^2 + 8y + z^2 - z + 47 = 0\}$$

$$\mathcal{U} = \{M(x, y, z) / 4x^2 + 24x + 4y^2 - 4y + 4z^2 + 8z + 41 = 0\}$$

D) EQUATIONS D'UN PLAN ET D'UNE DROITE

44) Déterminez une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan

passant par le point $A(-3; 1; 2)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

45) Déterminez une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan passant par les points $P(5; -3; 7)$, $Q(0; 2; -9)$ et $R(5; 0; 0)$

46) Soient (Ox), (Oy) et (Oz) les trois axes d'un R.O.N. d'origine O, a, b et c les bissectrices des angles $\widehat{yOz}$, $\widehat{xOz}$ et $\widehat{xOy}$ respectivement. Déterminez les équations cartésiennes :

- a)** des plans (xOy), (yOz) et (xOz).
- b)** du plan π_1 contenant a et (Ox).
- c)** du plan π_2 contenant b et (Oy)
- d)** du plan π_3 contenant c et (Oz)

- 47)** Dans un repère de l'espace on donne les points $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -3)$, $C(0; 3; -1)$, $D(-7; 10; 13)$ et $E(4; -5; 1)$.
- Vérifiez que A, B et C ne sont pas alignés.
 - Les points D et E appartiennent-ils au plan (ABC) ?
- 48)** Les points $K(2; 1; 0)$, $L(1; -2; -1)$, $M(0; 1; -2)$ et $P(2; -5; 4)$ sont-ils coplanaires ?
- 49)** Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(3; -4; 1)$ et parallèle au plan π' donné par le système d'équations paramétriques : $\pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = 2 + \alpha \end{cases}$
- 50)** Trouvez un système d'équations paramétriques du plan d'équation cartésienne : $\pi \equiv x - 2y + z = 1$.
- 51)** Trouvez une équation cartésienne du plan donné par le système d'équations paramétriques : $\pi \equiv \begin{cases} x = -3 + 2\alpha + \beta \\ y = 1 - \alpha + 3\beta \\ z = 5 - 3\alpha \end{cases}$.
- 52)** Analysez si parmi les plans suivants donnés par leurs équations cartésiennes il y en a qui sont orthogonaux :
- $$\pi_1 \equiv 2x - 7y - 2z + 1 = 0$$
- $$\pi_2 \equiv 4x - 2y + 11z - 5 = 0$$
- $$\pi_3 \equiv x + 13y + 2z + 37 = 0$$
- 53)** Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(2; 5; -7)$ et parallèle au plan $\pi' \equiv 3x - 5y + 7z - 4 = 0$.
- 54)** Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(2; 5; -7)$ et parallèle au plan (ABC) avec $A(2; 1; -3)$, $B(1; 2; -4)$ et $C(1; 0; 1)$.
- 55)** Déterminez un système d'équations paramétriques et un système d'équations cartésiennes :
- de la droite passant par $A(5; 2; -3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$.
 - de la droite passant par $A(1; -4; 3)$ et par $B(0; 1; -2)$.
 - des axes (Ox), (Oy) et (Oz).

56) Déterminez un système d'équations paramétriques de la droite d orthogonale au plan $\pi \equiv x - 2y + z = 1$ et passant par le point $P(2; 1; -1)$.

57) Analysez si les droites d et d' sont parallèles avec :

$$d \equiv \begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = -k - 1 \\ z = 3k + 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad d' \equiv \begin{cases} x = -\frac{6}{7}k - 1 \\ y = \frac{3}{7}k \\ z = \frac{9}{7}k - 8 \end{cases}$$

58) Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(1; -2; 3)$ et contenant

la droite $d \equiv \begin{cases} x = -3 + k \\ y = 2 - k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$.

59) Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point

$P(3; -1; 4)$ et parallèle à la droite $d' \equiv \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = 2\alpha + 2 \\ z = -\alpha + 3 \end{cases}$.

60) On donne les points $A(3; 2; -1)$, $B(1; -2; 1)$, $C(5; 6; -3)$ et $D(6; 8; 4)$.

a) Les points C et D appartiennent-ils à la droite (AB) ?

b) Le point T appartient à la droite (AB) et son abscisse vaut -4 . Calculez ses autres coordonnées.

61) On donne la droite $d \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 7 \\ x + 2y - 7z = 0 \end{cases}$ et le plan $\pi \equiv x - y + z = 5$. La droite d perce-t-elle le plan π ? Si oui en quel point ?

62) Déterminez l'intersection des droites

$$d \equiv \begin{cases} x + y - z = -6 \\ 2x - y + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad d' \equiv \begin{cases} x = k - 1 \\ y = 2k \\ z = 2 \end{cases}$$

63) Déterminez l'intersection de la droite $d \equiv \begin{cases} x = k - 1 \\ y = 3 + 2k \\ z = -k \end{cases}$ et du plan $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \alpha + \beta \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -3 - \alpha - \beta \end{cases}$.

- 64) Discutez, en fonction du réel α , la position de la droite $d \equiv \begin{cases} x = 3 + \alpha k \\ y = 2 + 2k \\ z = \alpha - k \end{cases}$ et du plan

$$\pi \equiv 3x - 2y + 5z = 1.$$

- 65) Déterminez l'intersection des droites

$$d \equiv \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = -2\alpha - 3 \\ z = 3\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad d' \equiv \begin{cases} x = 3\beta - 1 \\ y = -\beta - 4 \\ z = \beta + 2 \end{cases}$$

- 66) Déterminez l'intersection de la droite $d \equiv \begin{cases} x + y = 5 \\ -y - 3z = 1 \end{cases}$ et du plan $\pi \equiv \begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = -2\alpha - \beta - 1 \\ z = \alpha - \beta - 2 \end{cases}$.

- 67) Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point $P(1; 0; -1)$ et parallèle à la droite $d' \equiv \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$.

- 68) Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(2; -11; -5)$ et

$$\text{orthogonal à la droite } d \equiv \begin{cases} x = 2\alpha - 8 \\ y = 3\alpha \\ z = 5\alpha - 2 \end{cases}.$$

- 69) Dans un R.O.N. on donne les points $\Omega(-2; 1; -5)$, $A(11; 8; 3)$, $B(9; 0; -5)$, $C(-7; 0; 11)$. et $D(9; 5; 4)$.

a) Ecrivez l'équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre Ω et de rayon 13.

b) Déterminez $\mathcal{S} \cap (AB)$.

c) Déterminez $\mathcal{S} \cap (AC)$.

d) Déterminez $\mathcal{S} \cap (AD)$.

- 70) Dans un R.O.N. on donne les points $\Omega(1; -3; -4)$ et $A(-2; 1; -4)$.

a) Donnez une équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre Ω et de rayon 5 puis vérifiez que A appartient à $\mathcal{S}$.

b) Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par A et perpendiculaire à la droite (ΩA) . Ce plan est appelé **plan tangent** à la sphère $\mathcal{S}$ au point A .

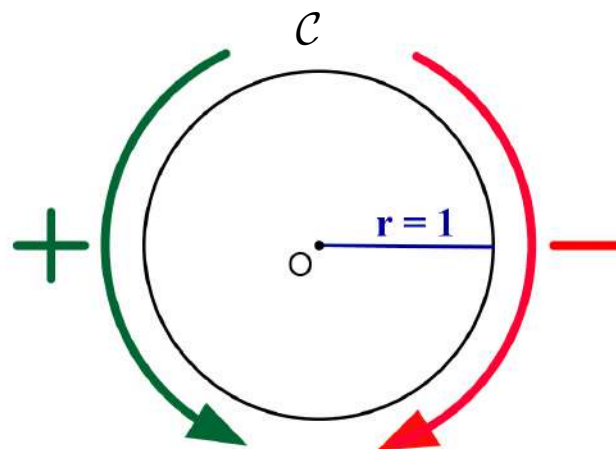
c) Déterminez $\mathcal{S} \cap \pi$.

CHAPITRE I

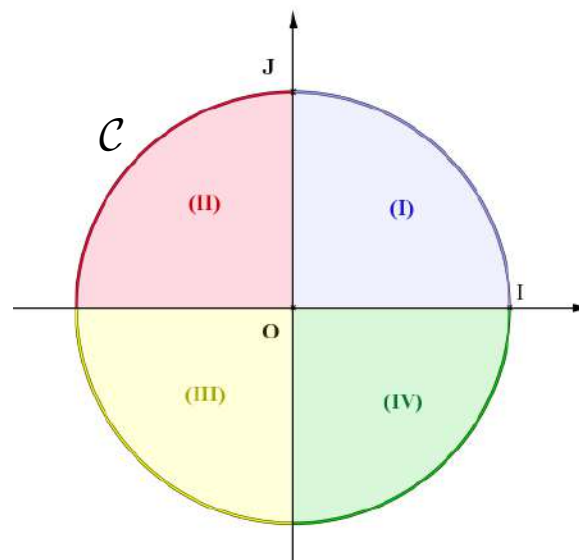
TRIGONOMETRIE

1) Le cercle trigonométrique

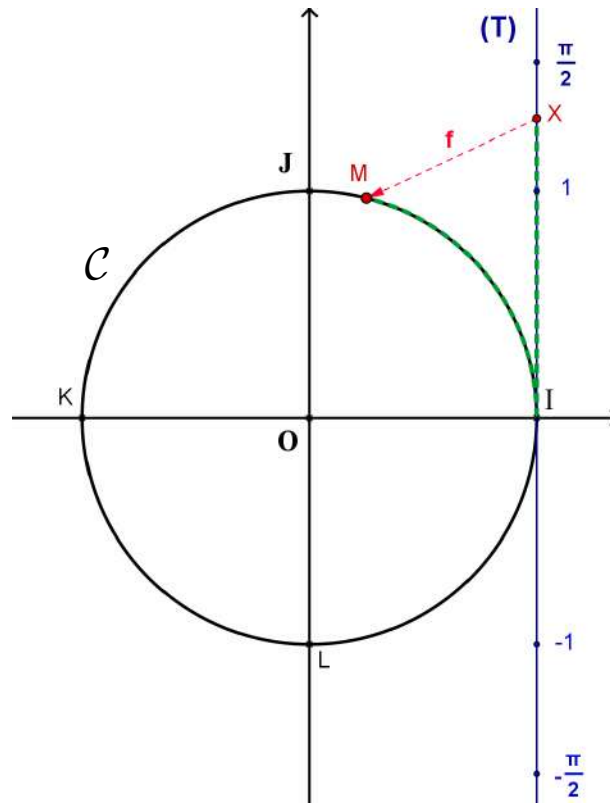
- Un **cercle trigonométrique** est un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 qui est orienté, ce qui veut dire qu'on a choisi un **sens positif (celui des ronds-points)** et un **sens négatif (celui des aiguilles d'une montre)** :



- Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique de centre O et I, J deux points de $\mathcal{C}$ tel que $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un R.O.N. du plan. Alors les axes OI et OJ subdivisent le cercle en quatre **quadrants** notés : (I), (II), (III) et (IV) :



- Soit (T) la tangente à $\mathcal{C}$ en I munie du repère $(I, \overrightarrow{OJ})$, $x \in \mathbb{R}$ et $X(x) \in (T)$:



En « enroulant » (T) autour de $\mathcal{C}$ à partir du point fixe commun I (vers « le haut » dans le sens positif, vers « le bas » dans le sens négatif), on voit qu'à tout réel x on peut associer un point unique $M \in \mathcal{C}$. Nous noterons $f(x) = M$ cette correspondance.

En remarquant que le périmètre de $\mathcal{C}$ vaut $p = 2\pi$ puisque son rayon vaut 1, on a :

$$f(\pi) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = \dots =$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = \dots =$$

$$f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = \dots = L$$

$$f(0) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = f(\quad) = \dots =$$

Et de manière générale : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad f(x + k \cdot 2\pi) = f(x)}$

En effet, ajouter $k \cdot 2\pi$ à x revient à faire k tours complets à partir de $f(x) = M$ dans un sens ou dans l'autre (selon le signe de k) pour retomber sur le même point M que x !

- Ainsi l'ensemble des nombres $x + k \cdot 2\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$) caractérise le point M et donc également l'angle $\widehat{IOM}$. De plus si $x \in [0, 2\pi]$ alors x est égal à la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ donc tout nombre de la forme $x + k \cdot 2\pi$ est une mesure de la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ à un multiple entier de 2π près ! Ceci nous amène à poser la définition suivante :

- **Définition**

Les nombres $x + k \cdot 2\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$) sont les mesures en **radians (rd)** de l'angle $\widehat{IOM}$ et aussi de l'arc $\widehat{IM}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{mes}\widehat{IOM} = \text{mes}\widehat{IM} = x + 2k\pi \quad \text{rd}}$$

- *Exemples :*

$$\text{mes}\widehat{IOJ} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{mes}\widehat{IOK} = \pi + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{mes}\widehat{IOL} = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Chaque angle a donc
 - une infinité de mesures, mais la différence entre deux mesures est toujours un multiple entier de 2π si on mesure en rd, un multiple entier de 360 si on mesure en degrés.,
 - une seule mesure comprise entre 0 rd et 2π rd : c'est la **plus petite mesure positive**.
 - une seule mesure comprise entre $-\pi$ rd et π rd : c'est la **mesure principale**.
- Correspondance entre degrés et radians : $\boxed{\pi \text{ rd} = 180^\circ}$.

Les transformations se font par une *règle de trois* :

$$\left\{ \begin{array}{l} 180^\circ = \pi \text{ rd} \\ 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rd} \\ x^\circ = \frac{x \cdot \pi}{180} \text{ rd} \end{array} \right. \quad \text{respectivement :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi \text{ rd} = 180^\circ \\ 1 \text{ rd} = \frac{180^\circ}{\pi} \\ x \text{ rd} = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi} \end{array} \right.$$

Exemples :

$$0^\circ = 0 \text{ rd}, \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rd}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rd}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rd}, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rd}.$$

2) Fonctions trigonométriques

a) Fonctions sinus et cosinus

- **Définitions**

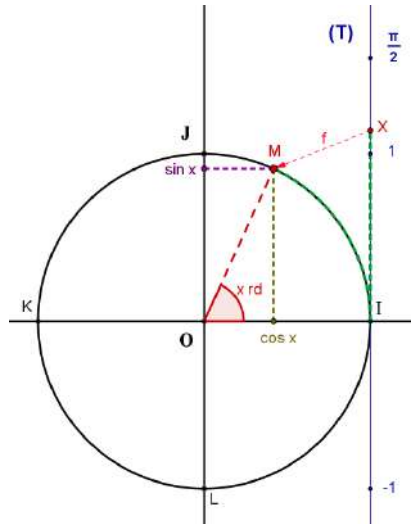
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = M \in \mathcal{C}$ (voir 1)), alors:

- o l'abscisse de M dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est appelée **cosinus de x** (ou cosinus de l'angle $\widehat{IOM}$) et est notée **cos x**.

- o l'ordonnée de M dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est appelée **sinus de x** (ou sinus de l'angle $\widehat{IOM}$) et est notée **sin x**.

- Ainsi dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ on a **$M(\cos x, \sin x)$** , c'est-à-dire

$$\overrightarrow{OM} = \cos x \cdot \overrightarrow{OI} + \sin x \cdot \overrightarrow{OJ}$$



- **Propriétés immédiates**

- o Les fonctions sin x et cos x existent pour tout réel x, donc $D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$

- o $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

Ceci est évident puisque le rayon de $\mathcal{C}$ vaut 1.

- o $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z})$ et $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z})$

En effet d'après la figure ci-dessus :

$$\begin{aligned} \sin x = 0 &\Leftrightarrow M = I \text{ ou } M = K \Leftrightarrow x \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, -\pi, -2\pi, -3\pi, \dots\} \\ &\Leftrightarrow x = k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow M = J \text{ ou } M = L$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 3\pi, \dots, \frac{\pi}{2} - \pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \dots \right\}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

o Le signe de $\cos x$ et de $\sin x$ dépend du quadrant dans lequel se trouve M :

$$\begin{aligned} \sin x \geq 0 &\Leftrightarrow M \in (I) \cup (II) \Leftrightarrow 0 + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi \\ \sin x \leq 0 &\Leftrightarrow M \in (III) \cup (IV) \Leftrightarrow \pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi \\ \cos x \geq 0 &\Leftrightarrow M \in (I) \cup (IV) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \cos x \leq 0 &\Leftrightarrow M \in (II) \cup (III) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned}$$

o $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \text{ et } \cos(x + 2k\pi) = \cos x$

Ceci découle immédiatement du fait que $f(x + k \cdot 2\pi) = f(x)$ et on exprime cette propriété en disant que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques de période 2π** .

• Remarque

Soit ABC un **triangle rectangle** en A et x la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$. En classe de 4^e vous avez défini $\cos x$ et $\sin x$ par :

$$\cos x = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \text{ et } \sin x = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Montrons que ces définitions, valables uniquement pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, sont compatibles avec celles, plus générales, que nous venons de voir en utilisant le cercle trigonométrique. Pour cela nous allons distinguer deux cas :

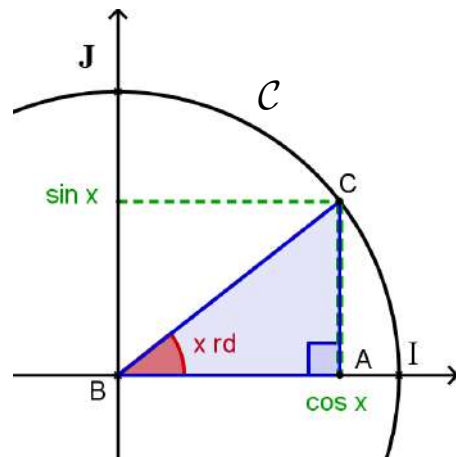
1^{er} cas : $\overline{BC} = 1$

Alors le cercle $\mathcal{C}$ de centre B passant par C est un cercle trigonométrique et en choisissant convenablement le R.O.N. d'origine B on a :

$$\cos x = \overline{AB} \text{ et } \sin x = \overline{AC}$$

$$\text{Et comme } \overline{BC} = 1 \text{ on a bien } \cos x = \overline{BA} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \text{ et}$$

$$\sin x = \overline{AC} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$



2^e cas : $\overline{BC} \neq 1$

Prenons par exemple $\overline{BC} > 1$ (le cas $\overline{BC} < 1$ étant analogue) et notons C' le point de $[BC]$ tel que

$\overline{BC'} = 1$ et A' le point de $[BA]$ tel que

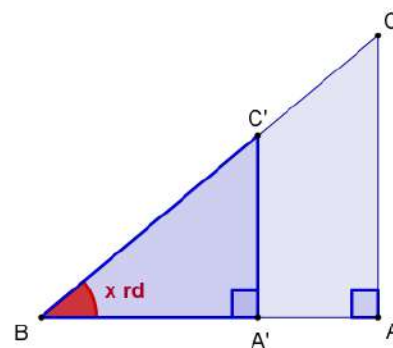
$\Delta(BA'C')$ est rectangle en A' . Comme

$AC \parallel A'C'$ on a d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Or $\frac{\overline{BA}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC'}}$ et comme $\cos x = \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC'}}$ d'après le 1^{er} cas appliqué au

triangle $\Delta(BA'C')$, on a bien $\cos x = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$. On montre de même que $\sin x = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.



- Valeurs remarquables**

Vous avez montré en classe de 4^e que $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, que $\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et que

$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Or $f(0) = I(1,0)$ donc $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = J(0,1)$ donc

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$ et $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. D'où le **tableau des valeurs remarquables** suivant :

x (rd)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

b) Fonctions tangente et cotangente

- Définitions**

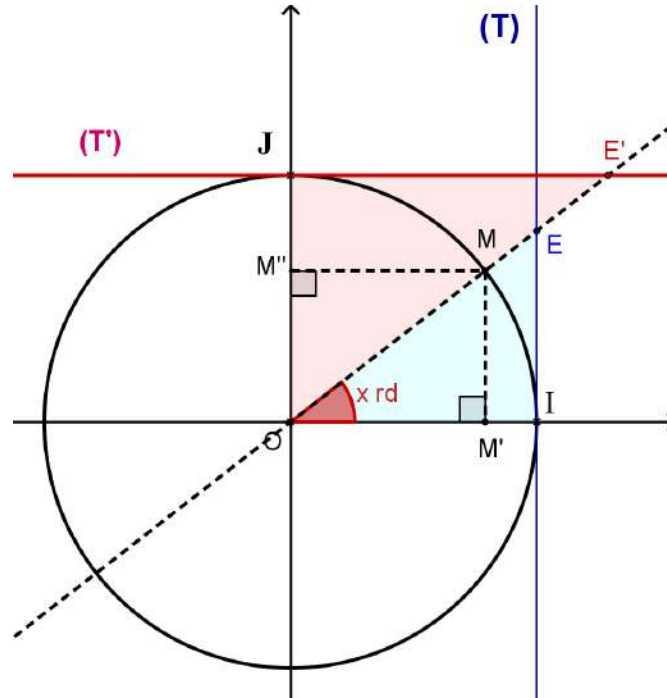
A partir des fonctions trigonométriques principales $\cos x$ et $\sin x$, on définit les fonctions **tangente** (notée **tan x**) et **cotangente** notée **cot x**) par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{et} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

- C.E. pour $\tan x$: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, donc $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$
- C.E. pour $\cot x$: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$, donc $D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
- *Interprétation géométrique:*

Soient (T) la tangente à $\mathcal{C}$ au point I et (T') la tangente à $\mathcal{C}$ au point J, $E \in (T) \cap OM$ et

$E' \in (T') \cap OM$:



Montrons que : $\overline{E(1, \tan x)}$ et $\overline{E'(\cot x, 1)}$ dans le cas où $M \in (I)$ (voir figure), les autres cas étant analogues.

Dans $\Delta(OIE)$: $\overline{MM'} = \sin x$, $\overline{OM'} = \cos x$, $\overline{OI} = 1$ et $MM' \parallel EI$. D'après le théorème de

Thalès on a : $\frac{\overline{OM'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{MM'}}{\overline{EI}}$ donc $\frac{\cos x}{1} = \frac{\sin x}{\overline{EI}} \Leftrightarrow \frac{\overline{EI}}{1} = \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \overline{EI} = \tan x$.

Dans $\Delta(OJE')$: $\overline{OM''} = \sin x$, $\overline{M''M} = \cos x$, $\overline{OJ} = 1$ et $MM'' \parallel E'J$. D'après le théorème

de Thalès on a : $\frac{\overline{OM''}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{M''M}}{\overline{E'J}}$ donc $\frac{\sin x}{1} = \frac{\cos x}{\overline{E'J}} \Leftrightarrow \frac{\overline{E'J}}{1} = \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow \overline{E'J} = \cot x$.

Justification géométrique des domaines de $\tan x$ et $\cot x$:

Si $x \equiv \frac{\pi}{2} (\pi)$, alors $OM \cap (T) = \emptyset$ donc E n'existe pas et si $x \equiv 0 (\pi)$, alors

$OM \cap (T') = \emptyset$ donc E' n'existe pas !

- Remarques

- o Pour $\sin x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$ on a : $\cot x = \frac{1}{\tan x}$, ce qui explique pourquoi la touche

« cot » ne figure pas sur les calculatrices !

- o tableau des valeurs remarquables :

x (rd)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
cot x		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0

3) FORMULES

a) Formule fondamentale et ses transformées

- Avec les notations utilisées aux paragraphes précédents, $M(\cos x, \sin x)$ et $M'(\cos x, 0)$, on peut appliquer le théorème de Pythagore au triangle $\Delta(OM'M)$ rectangle en M' :

$$\overline{OM'}^2 + \overline{MM'}^2 = \overline{OM}^2 \Leftrightarrow (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1^2 = 1$$

- Simplification des notations :

Au lieu d'écrire $(\sin x)^n$, $(\cos x)^n$, $(\tan x)^n$, on peut écrire : $\sin^n x$, $\cos^n x$, $\tan^n x$.

- Avec ces notations simplifiées la relation fondamentale s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

- Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ on a :

- o $1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

- o $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$

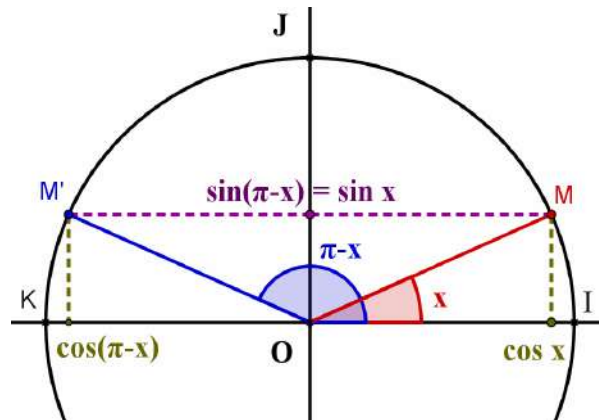
- o $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 + \tan^2 x - 1}{1 + \tan^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

D' où : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

b) $\sin(\pi-x)$, $\cos(\pi-x)$, $\tan(\pi-x)$

- Soient $x \in \mathbb{R}$, $M(\cos x, \sin x)$ et $M'(\cos(\pi-x), \sin(\pi-x))$, alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe OJ donc ils ont la même ordonnée et des abscisses opposées, en d'autres termes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi-x) = \sin x \quad \cos(\pi-x) = -\cos x$$



- Pour tout $x \in D_{\tan}$ on a : $\tan(\pi-x) = \frac{\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)} = \frac{\sin x}{-\cos x} = -\tan x$
- Pour tout $x \in D_{\cot}$ on a : $\cot(\pi-x) = \frac{\cos(\pi-x)}{\sin(\pi-x)} = \frac{-\cos x}{\sin x} = -\cot x$
- Application : ces formules permettent de **passer du 2^e au 1^{er} quadrant**, p.ex. :

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

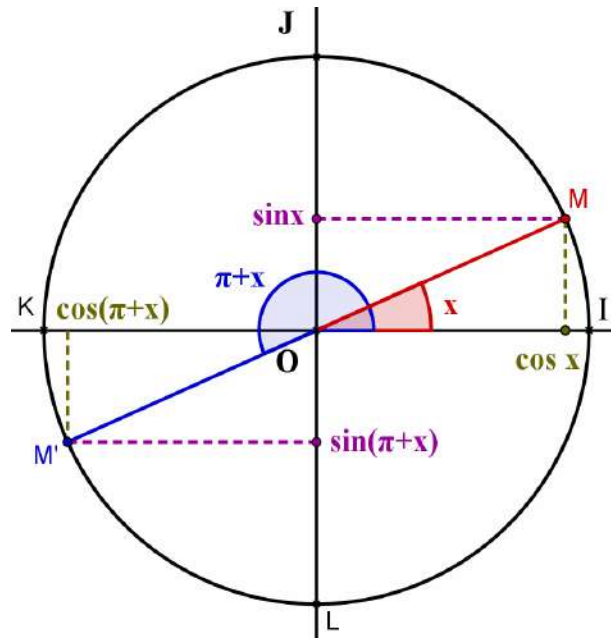
$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{6} = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) $\sin(\pi+x)$, $\cos(\pi+x)$, $\tan(\pi+x)$

- Soient $x \in \mathbb{R}$, $M(\cos x, \sin x)$ et $M'(\cos(\pi+x), \sin(\pi+x))$, alors M et M' sont symétriques par rapport à l'origine O donc ils ont des ordonnées et des abscisses opposées, en d'autres termes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi+x) = -\sin x \quad \cos(\pi+x) = -\cos x$$



- Pour tout $x \in D_{\tan}$ on a : $\tan(\pi+x) = \frac{\sin(\pi+x)}{\cos(\pi+x)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$
- Pour tout $x \in D_{\cot}$ on a : $\cot(\pi+x) = \frac{\cos(\pi+x)}{\sin(\pi+x)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \cot x$
- Ces deux dernières formules montrent que les fonctions **tangente et cotangente** sont **périodiques de période π** .
- Application : ces formules permettent de **passer du 3^e au 1^{er} quadrant**, p.ex. :

$$\sin \frac{4\pi}{3} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

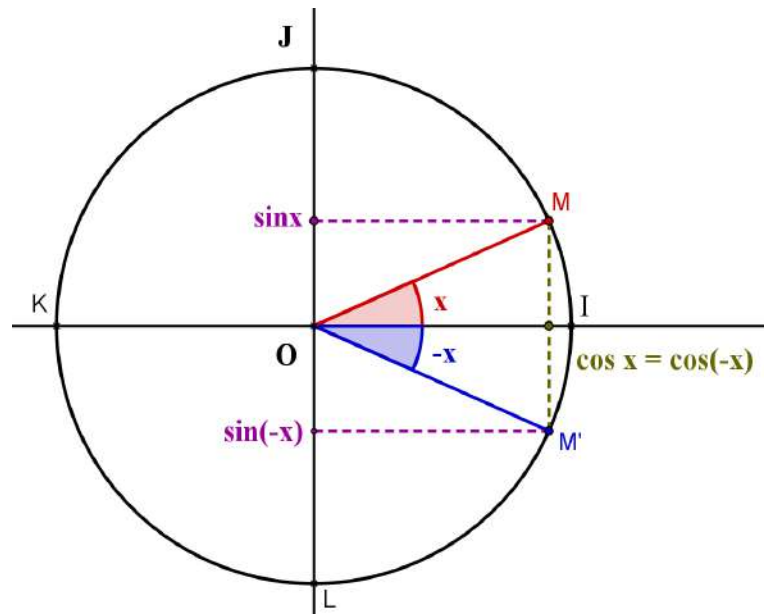
$$\cos \frac{5\pi}{4} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{7\pi}{6} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

d) $\sin(-x)$, $\cos(-x)$, $\tan(-x)$

- Soient $x \in \mathbb{R}$, $M(\cos x, \sin x)$ et $M'(\cos(-x), \sin(-x))$, alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe OI donc ils ont la même abscisse et des ordonnées opposées, en d'autres termes :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \cos(-x) = \cos x}$$



- Pour tout $x \in D_{\tan}$ on a : $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$
- Pour tout $x \in D_{\cot}$ on a : $\cot(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x$
- Ces formules montrent que la fonction **cosinus** est **paire** alors que les fonctions **sinus**, **tangente et cotangente** sont **impaires**.
- Application : ces formules permettent de **passer du 4^e au 1^{er} quadrant**, p.ex. :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 1 p 25

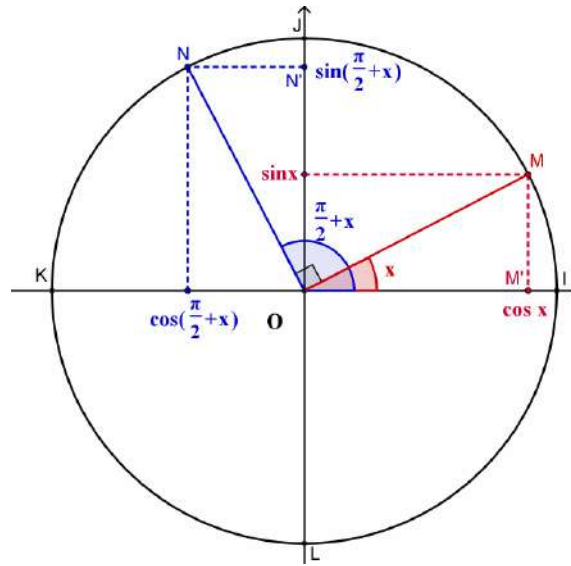
e) $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right), \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right), \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$

- Soient $x \in \mathbb{R}$, $M(\cos x, \sin x)$, $M'(\cos x, 0)$, et les images $N\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right)$ et $N'\left(0, \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right)$ de M et M' par la rotation de centre O et d'angle 90° . Comme une rotation conserve les distances, on a :

$$\overline{OM'} = \overline{ON'} \Leftrightarrow |\cos x| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right| \quad \text{et} \quad \overline{MM'} = \overline{NN'} \Leftrightarrow |\sin x| = \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right|.$$

Or on voit que $\cos x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ ont toujours même signe alors que $\sin x$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ ont toujours des signes contraires, d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$$

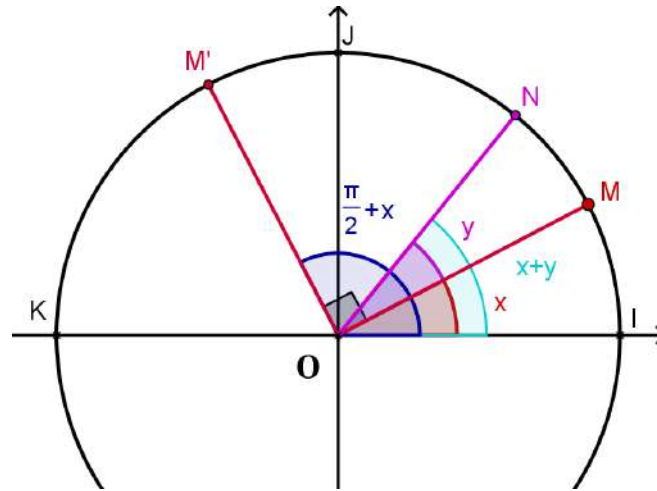


- Pour tout $x \in D_{\cot}$ on a : $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x$.
- Pour tout $x \in D_{\tan}$ on a : $\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+(-x)\right) = \cos(-x) = \cos x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+(-x)\right) = -\sin(-x) = \sin x$.
- Pour tout $x \in D_{\cot}$ on a : $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}+(-x)\right) = -\cot(-x) = \cot x$.
- Pour tout $x \in D_{\tan}$ on a : $\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2}+(-x)\right) = -\tan(-x) = \tan x$.
- Application : ces formules permettent de transformer sinus en cosinus et réciproquement !

f) Formules d'addition

$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$	$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$
$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$	
$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$	$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$
$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$	

démonstration:



- Dans le R.O.N. $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ on a: $M(\cos x, \sin x)$
 $N(\cos(x+y), \sin(x+y))$
 $M'\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = M'(-\sin x, \cos x)$

D'où : $\overrightarrow{OM} = \cos x \cdot \overrightarrow{OI} + \sin x \cdot \overrightarrow{OJ}$ (1)

$\overrightarrow{ON} = \cos(x+y) \cdot \overrightarrow{OI} + \sin(x+y) \cdot \overrightarrow{OJ}$ (2)

$\overrightarrow{OM'} = -\sin x \cdot \overrightarrow{OI} + \cos x \cdot \overrightarrow{OJ}$ (3)

Dans le R.O.N. $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ $N(\cos y, \sin y)$, d'où : $\overrightarrow{ON} = \cos y \cdot \overrightarrow{OM} + \sin y \cdot \overrightarrow{OM'}$ (4).

Remplaçons (1) et (3) dans (4) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON} &= \cos y \cdot \overrightarrow{OM} + \sin y \cdot \overrightarrow{OM'} \\ &= \cos y (\cos x \cdot \overrightarrow{OI} + \sin x \cdot \overrightarrow{OJ}) + \sin y (-\sin x \cdot \overrightarrow{OI} + \cos x \cdot \overrightarrow{OJ}) \\ &= \cos y \cos x \cdot \overrightarrow{OI} + \cos y \sin x \cdot \overrightarrow{OJ} - \sin y \sin x \cdot \overrightarrow{OI} + \sin y \cos x \cdot \overrightarrow{OJ} \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) \cdot \overrightarrow{OI} + (\sin x \cos y + \cos x \sin y) \cdot \overrightarrow{OJ} \end{aligned}$$

et en comparant avec (2) il vient :

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \text{ et } \sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \quad (5).$$

- Appliquons les formules (5) à $x-y = x+(-y)$:

$$\begin{aligned} \cos(x-y) &= \cos(x+(-y)) \\ &= \cos x \cdot \cos(-y) - \sin x \cdot \sin(-y) \\ &= \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x-y) &= \sin(x+(-y)) \\ &= \sin x \cdot \cos(-y) + \cos x \cdot \sin(-y) \\ &= \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y \end{aligned}$$

- $\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos y \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} \right)}{\cos x \cdot \cos y \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} \right)} \\ &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \end{aligned}$$

- $\tan(x-y) = \tan(x+(-y))$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \cdot \tan(-y)} \\ &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} \end{aligned}$$

Remarques :

- Alors que les formules pour **sin** et **cos** sont valables pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, celles concernant **tan** ne sont valables que si tous les dénominateurs sont non nuls !
- Toutes les formules qui vont suivre découlent directement des formules d'addition.

Exercice 2, 3 p 25

g) Formules de duplication

- Expressions de $\sin 2x$ et $\cos 2x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:

$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cdot \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$
--

démonstration :

D'après les formules d'addition on a :

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

- On peut exprimer $\cos 2x$ uniquement en fonction de $\sin x$ ou de $\cos x$:

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

démonstration :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1 \text{ d'après (a) et de même :}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x .$$

- $$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

démonstration :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 2 \cdot \tan x \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \cdot \tan x}{1 + \tan^2 x} \text{ d'après (a),}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 x} - 1 = \frac{2 - 1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \text{ d'après (a) et finalement :}$$

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \cdot \tan x}{1 + \tan^2 x} : \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} .$$

Exercice 4, 5, 6, 7, 8 p 26

h)
$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \quad \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \\ \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{array}$$

démonstration :

$$\sin 3x = \sin(2x + x)$$

$$= \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x \quad \text{d'après (f)}$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x + (1 - 2 \sin^2 x) \cdot \sin x \quad \text{d'après (g)}$$

$$= 2 \sin x \cdot (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x \quad \text{d'après (a)}$$

$$= 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x$$

$$= 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\begin{aligned}
 \cos 3x &= \cos(2x + x) \\
 &= \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x && \text{d'après (f)} \\
 &= (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin x && \text{d'après (g)} \\
 &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x \cdot (1 - \cos^2 x) && \text{d'après (a)} \\
 &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\
 &= 4\cos^3 x - 3\cos x
 \end{aligned}$$

Exercice 9 p 26

i) Formules de factorisation

Ce sont des formules permettant de **transformer des sommes** (de fonctions trigonométriques) en **produits**.

$\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$	$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}$
$\sin p - \sin q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$	
$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$	$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}$
$\cos p - \cos q = -2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$	

démonstration :

- D'après les formules d'addition on a :

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y + \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y = 2 \cdot \sin x \cdot \cos y$$

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y - \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = 2 \cdot \cos x \cdot \sin y$$

$$\text{et en posant } p = x + y \text{ et } q = x - y : p + q = 2x \Leftrightarrow x = \frac{p+q}{2} \text{ et } p - q = 2y \Leftrightarrow y = \frac{p-q}{2},$$

$$\text{d'où : } \sin p + \sin q = 2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \text{ et } \sin p - \sin q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}.$$

- Les formules $\cos p \pm \cos q$ se démontrent de manière analogue.

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cdot \cos q + \sin q \cdot \cos p}{\cos p \cdot \cos q} = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cdot \cos q} \text{ d'après (f).}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin p}{\cos p} - \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cdot \cos q - \sin q \cdot \cos p}{\cos p \cdot \cos q} = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cdot \cos q} \text{ d'après (f).}$$

Exercice 10 p 27

j) Formules de linéarisation

Ce sont des formules permettant de **transformer des produits** (de fonctions trigonométriques) en **sommes**.

$$\begin{aligned}\sin x \cdot \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)] \\ \cos x \cdot \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin x \cdot \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]\end{aligned}$$

démonstration :

D'après les formules d'addition on a :

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y + \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y = 2 \cdot \sin x \cdot \cos y$$

et en divisant par 2 on obtient la première formule. La démonstration des deux autres formules est laissée en exercice.

Remarque :

En remplaçant y par x dans les deux dernières formules on retrouve les formules vues en (g) :

$$\cos x \cdot \cos x = \frac{1}{2} [\cos 2x + \cos 0] \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} [\cos 2x + 1]$$

$$\sin x \cdot \sin x = \frac{1}{2} [\cos 0 - \cos 2x] \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} [1 - \cos 2x]$$

Ces deux formules sont donc également des **formules de linéarisation** !

Exercice 11, 12, 13, 14 p 27 - 29

4) Equations trigonométriques

a) Trois égalités fondamentales

- Nous avons déjà vu en 2a) que :

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi \text{ et } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ (avec } k \in \mathbb{Z})$$

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors :

$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow \sin a - \sin b = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{a-b}{2} = 0 \text{ ou } \cos \frac{a+b}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} = k\pi \text{ ou } \frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow a - b = 2k\pi \quad \text{ou} \quad a + b = \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = \pi - b + 2k\pi$$

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \cos a - \cos b = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{a-b}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \sin \frac{a+b}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} = k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{a+b}{2} = k\pi$$

$$\Leftrightarrow a - b = 2k\pi \quad \text{ou} \quad a + b = 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = -b + 2k\pi$$

- Soient $a, b \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$, alors :

$$\tan a = \tan b \Leftrightarrow \tan a - \tan b = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a - b = k\pi$$

$$\Leftrightarrow a = b + k\pi$$

- D'où les égalités suivantes où $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \sin a = \sin b &\Leftrightarrow a = b + k \cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad a = \pi - b + k \cdot 2\pi \\ \cos a = \cos b &\Leftrightarrow a = b + k \cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad a = -b + k \cdot 2\pi \\ \tan a = \tan b &\Leftrightarrow a = b + k \cdot \pi \end{aligned}$$

- Remarques

- Pour l'égalité de deux **sin** ou de deux **cos** on a **deux séries de solutions**, alors que pour l'égalité de deux **tan** on n'a qu'**une seule série de solutions** !

- $\sin a = \cos b \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos b \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} - a = -b + 2k\pi \Leftrightarrow \dots$

b) Quelques méthodes de résolution d'une équation trigonométrique

1^{re} méthode :

Les équations se trouvant sous l'une des trois formes précédentes se résolvent directement à l'aide de ces formules.

Exemples :

- $\sin 3x = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 3x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \pi - x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 4x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- $\cos 5x = \cos 2x \Leftrightarrow 5x = 2x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 5x = -2x + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow 3x = 2k\pi \quad \text{ou} \quad 7x = 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2k\pi}{7}$$

$$S = \left\{ \frac{2k\pi}{3}, \frac{2k\pi}{7} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = 4x + \frac{\pi}{3} + k\pi$

$$\Leftrightarrow -3x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow -3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} - \frac{k\pi}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2^e méthode :

En se servant des formules trigonométriques on peut parfois se ramener à l'une des formes précédentes.

Exemples :

- $\cos x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\sin 3x$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow -2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 4x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{ou} \quad -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- $2 \sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$
- $\sin 2x + 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

3^e méthode :

Parfois on peut se tirer d'affaire par un changement d'inconnue (pour obtenir une équation de degré supérieur à 1).

Exemple :

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

en posant $y = \sin x$ l'équation devient : $2y^2 - y - 1 = 0$, $\Delta = 9$, $y' = 1$, $y'' = -\frac{1}{2}$, d'où :

$$\sin x = 1 \quad \text{ou} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \sin x = -\sin \frac{\pi}{6} = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Remarques

- Pour les équations contenant des fractions (p. ex. tan ou cot), il ne faut pas oublier de commencer par chercher les **conditions d'existence (C.E.)** et de vérifier à la fin que celles-ci sont bien remplies ! Par exemple :

$$\tan 3x = \tan x, \text{ C.E. } 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{donc } D_E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \Leftrightarrow x = k\pi \in D_E \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \notin D_E$$

$$\text{par conséquent } S = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

- Parfois on ne demande pas de résoudre une équation dans $\mathbb{R}$ mais seulement sur un **intervalle** de $\mathbb{R}$. On ne retient alors que les solutions de cet intervalle (en général en nombre fini !). Par exemple s'il fallait résoudre l'équation précédente sur $[0, 2\pi]$ alors

$$S = \{0; \pi; 2\pi\}$$

Exercice 15 p 29

5) Inéquations trigonométriques

a) Inéquation du type $\sin x < (>, \leq, \geq) a$

- Pour certaines valeurs de a les solutions sont évidentes, p. ex.

$$\sin x \leq 2,8 \quad S = \mathbb{R}$$

$$\sin 5x < -4 \quad S = \emptyset$$

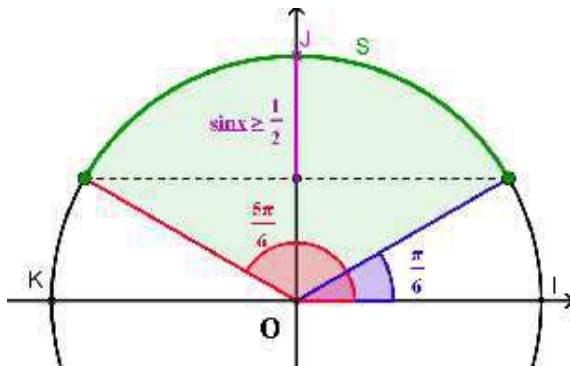
- Si $a = 0$ on sait que (voir p 5) :

$$\begin{array}{l} \sin x \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi \\ \sin x \leq 0 \Leftrightarrow -\pi + 2k\pi \leq x \leq 2k\pi \end{array}$$

- Sinon on résout d'abord l'équation $\sin x = a$ et on voit alors aisément quelles sont les solutions de l'inéquation en faisant une figure (cercle trigonométrique).

- Exemple1* : $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$



$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

- Exemple 2 : $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$

On résout d'abord $\sin y \geq \frac{1}{2}$ (voir exemple 1) puis on revient à l'inconnue x :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq y \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi &\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{aligned}$$

$$\text{donc } S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi \right\}$$

b) Inéquation du type $\cos x < (>, \leq, \geq) a$

- Pour certaines valeurs de a les solutions sont évidentes, p. ex.

$$\cos x > -9 \quad S = \mathbb{R}$$

$$\sin 5x \leq -1 \Leftrightarrow \sin 5x = -1 \Leftrightarrow 5x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad S = \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

- Si $a = 0$ on sait que (voir p 5) :

$$\begin{aligned} \cos x \geq 0 &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \cos x \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned}$$

- Sinon on résout d'abord l'équation $\cos x = a$ et on trouve les solutions de l'inéquation en faisant une figure (cercle trigonométrique).

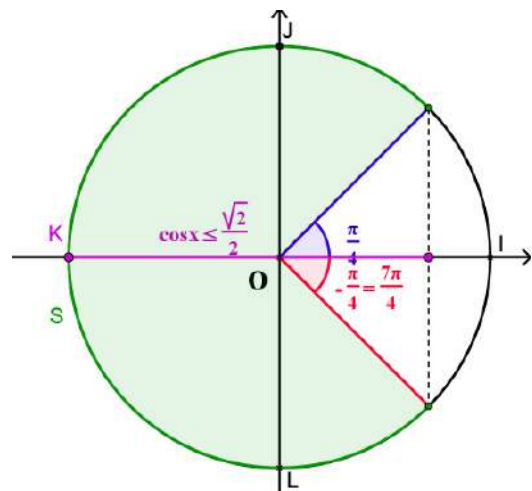
- Exemple 1 : $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right\}$$



- Exemple2 : $\cos 3x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

On résout d'abord $\cos y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (voir exemple 1) puis on revient à l'inconnue x :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq y \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 3x \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\text{donc } S = \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right\}$$

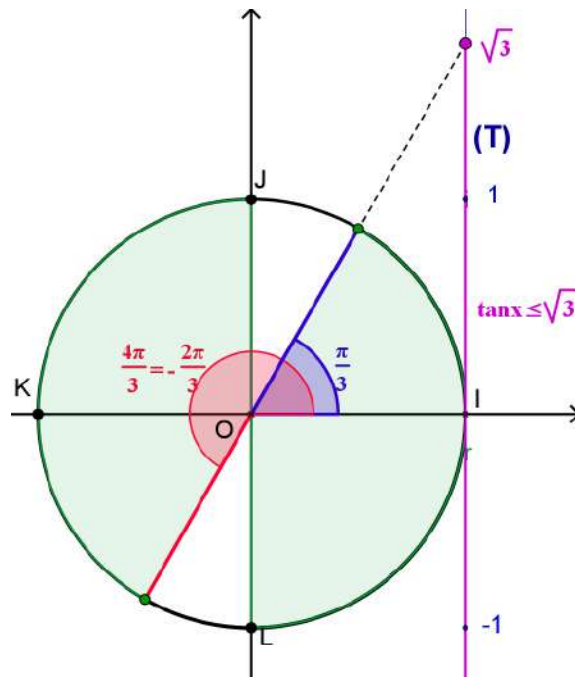
c) Inéquation du type $\tan x < (>, \leq, \geq) a$

- Si $a = 0$ on voit que :

$$\begin{aligned} \tan x \geq 0 &\Leftrightarrow \sin x \text{ et } \cos x \text{ ont même signe} \Leftrightarrow k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan x \leq 0 &\Leftrightarrow \sin x \text{ et } \cos x \text{ ont des signes opposés} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi \end{aligned}$$

- On résout d'abord l'équation $\tan x = a$ et on trouve les solutions de l'inéquation en faisant une figure (cercle trigonométrique).
- Exemple1 : $\tan x \leq \sqrt{3}$

$$\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$



$$S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \right\}$$

- Exemple2 : $\tan 5x \leq \sqrt{3}$, d'après l'exemple 1 :

$$\tan 5x \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < 5x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} < x \leq \frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{5}$$

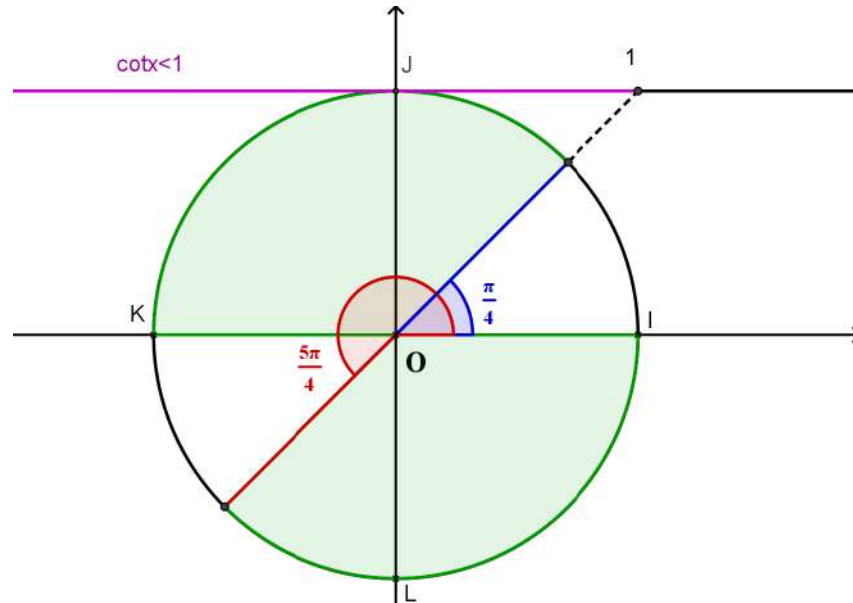
d) Inéquation du type $\cot x < (>, \leq, \geq) a$

- Si $a = 0$ on a :

$\cot x \geq 0 \Leftrightarrow \tan x \geq 0$ $\cot x \leq 0 \Leftrightarrow \tan x \leq 0$
--

- On résout d'abord l'équation $\cot x = a$ et on trouve les solutions de l'inéquation en faisant une figure (cercle trigonométrique).
- Exemple : $\cot x < 1$

$$\cot x = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$$



$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \pi + k\pi \right\}$$

Exercice 16 p 30

EXERCICES

1) Calculez sans calculatrice :

a) $\tan 120^\circ$

e) $\sin 330^\circ$

b) $\sin\left(-\frac{89\pi}{3}\right)$

f) $\sin \frac{53\pi}{4}$

c) $\cos\left(-\frac{53\pi}{6}\right)$

g) $\tan \frac{47\pi}{4}$

d) $\cot \frac{37\pi}{4}$

h) $\cos(-1680^\circ)$

2) L'angle de mesure $\frac{\pi}{12}$ rd :

a) Exprimez $\frac{\pi}{12}$ rd en degrés.

b) Ecrivez $\frac{\pi}{12}$ rd de deux façons différentes comme différence de deux angles remarquables.

c) Déduisez-en $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.

d) **Application :**

Calculez sans calculatrice

$$\cos 105^\circ \quad \sin \frac{7\pi}{12} \quad \tan \frac{65\pi}{12} \quad \cot\left(-\frac{13\pi}{12}\right) \quad \cos \frac{-43\pi}{12} \quad \sin 1275^\circ$$

3) a) Calculez les nombres trigonométriques de $a + b$ et de $a - b$ sachant que :

$$a \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right], \sin a = -\frac{1}{2}, b \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \text{ et } \cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) Calculez $\sin x$ et $\cos x$ sachant que :

$$\cos(x - y) = \frac{1}{3}, \sin(x - y) < 0, \sin y = -\frac{2}{3} \text{ et } \cos y > 0.$$

c) Calculez les nombres trigonométriques de $a + b + c$ sachant que :

$$a \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \text{ et } \sin a = \frac{2}{5}; b \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \text{ et } \cos b = \frac{2}{5}; c \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \text{ et } \cos c = -\frac{2}{3}$$

- 4) L'angle de mesure $\frac{\pi}{8}$ rd :
- a) Exprimez $\frac{\pi}{8}$ rd en degrés.
 - b) Ecrivez $\frac{\pi}{4}$ rd en fonction de $\frac{\pi}{8}$ rd.
 - c) Déduisez-en une équation du second degré vérifiée par $\cos \frac{\pi}{8}$ puis résolvez-la.
 - d) Calculez $\sin \frac{\pi}{8}$ puis $\tan \frac{\pi}{8}$.
 - e) Calculez sans calculatrice
- $$\sin \frac{7\pi}{8} \quad \cos \frac{3\pi}{8} \quad \tan \frac{65\pi}{8} \quad \cot \left(-\frac{5\pi}{8} \right) \quad \cos \frac{\pi}{16}$$
- 5) Calculez $\sin x$ et $\cos x$ sachant que $\sin 2x = 0,96$ et que $0 < \sin x < \cos x$.
- 6) Sans calculer x , calculez les nombres trigonométriques de $2x$ sachant que :
- $$x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right] \text{ et } \sin x = -\frac{1}{2}. \text{ A quel quadrant appartient } 2x ?$$
- 7) Calculez :
- a) $\sin 4x$ sachant que $\tan x = 3$ (*indication* : $\sin 4x = \sin 2 \cdot 2x$)
 - b) $\sin^4 x + \cos^4 x$ sachant que $\sin 2x = 0,5$ (*indication* : calculez $(\cos^2 x + \sin^2 x)^2$)
- 8) a) Exprimez $\sin 4a$ et $\cos 4a$ en fonction de $\sin a$ et $\cos a$.
- b) Exprimez $\frac{(\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2}$ en fonction de $\sin 2x$.
 - c) Exprimez $\tan 3a$ et $\tan 4a$ en fonction de $\tan a$.
 - d) Exprimez $\sin^2 \frac{x}{2}$ en fonction de $\cos x$.
- 9) Ecrivez aussi simplement que possible :
- a) $4 \sin \frac{x}{3} \sin \frac{\pi+x}{3} \sin \frac{\pi-x}{3}$
 - b) $\cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \sin \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)$
 - c) $\sin x + \sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left(x + \frac{4\pi}{3} \right)$

- d) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$
- e) $\frac{1}{2}(\tan(45^\circ + b) - \tan(45^\circ - b))$
- f) $\frac{\tan(45^\circ + y) + \tan(45^\circ - y)}{\tan(45^\circ + y) - \tan(45^\circ - y)}$

10) Factorisez les expressions suivantes :

- a) $\cos 2x - \cos x$
- b) $\tan a - \tan 4a$
- c) $\sin 3b + \sin 5b$
- d) $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x$
- e) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$
- f) $\sin 5x - \sin x + \sin 6x$
- g) $\sin y - 2 \sin 3y + \sin 5y$
- h) $\sin c - \sin 3c - \sin 5c + \sin 7c$
- i) $\sin x + \sin y - \sin(x + y)$

11) Linéarisez les expressions suivantes :

- a) $\cos 3x \cdot \cos 5x$
- b) $\cos(2x - 1) \cdot \sin(3 - x)$
- c) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
- d) $\sin x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x$
- e) $\cos^4 x$
- f) $\sin^4 3x$
- g) $\cos^3 x$
- h) $\sin^3 2x$

12) Calculez sans calculatrice:

- a) $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$

$$\text{b)} \quad \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24}$$

$$\text{c)} \quad \frac{\cos \frac{\pi}{17} \cos \frac{13\pi}{17}}{\cos \frac{3\pi}{17} + \cos \frac{5\pi}{17}}$$

13) Démontrez les formules suivantes (sans vous préoccuper des C.E.) :

$$\text{a)} \quad \cos(a - b) \cos(a + b) = \cos^2 a - \sin^2 b$$

$$\text{b)} \quad \sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a - b) \sin(a + b)$$

$$\text{c)} \quad \frac{1 - \tan \frac{a}{2} \cot a}{1 + \tan \frac{a}{2} \cot a} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\sin \frac{3a}{2}}$$

$$\text{d)} \quad \frac{1 - \tan y}{1 + \tan y} = \frac{\sin(x - y) + \cos(x + y)}{\sin(x + y) + \cos(x - y)}$$

$$\text{e)} \quad \cos^4 a - \sin^4 a = \cos 2a$$

$$\text{f)} \quad \cot x + \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{\sin x}$$

$$\text{g)} \quad \cos 2x (1 + \tan x \tan 2x) = 1$$

$$\text{h)} \quad \tan y + \cot y = \frac{2}{\sin 2y}$$

$$\text{i)} \quad \frac{\cot x - 1}{\cot x + 1} = \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x}$$

$$\text{j)} \quad \tan a = \frac{\sin 2a + \sin a}{1 + \cos a + \cos 2a}$$

$$\text{k)} \quad \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \tan^2 \frac{a}{2}$$

$$\text{l)} \quad \cot 4x = \frac{1}{\tan x + \tan 3x} - \frac{1}{\cot x + \cot 3x}$$

$$\text{m)} \quad \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$$

$$\text{n)} \quad \cos(x + y) \cos(x - y) - \sin(x + y) \sin(x - y) = \cos 2x$$

$$\text{o)} \quad \frac{\cos a}{1 + \cos a} \cdot \frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} = \tan \frac{a}{2}$$

$$\text{p)} \quad \sin 3x = 4 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right)$$

14) Ecrivez aussi simplement que possible :

- a) $\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$
- b) $\frac{\cos 4x - \cos 2x - \sin x}{\sin 4x + \sin 2x + \cos x}$
- c) $\frac{\sin 9x}{\sin 3x} + \frac{\cos 9x}{\cos 3x}$
- d) $\sin 2a (\cot a - \cot 2a)$
- e) $\sin(x - y) \cos(x + y) - \sin(x + y) \cos(x - y) + \sin 2y$

15) Résolvez les équations suivantes :

1^{re} série

- a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ dans $\mathbb{R}$
- b) $\tan 2x + \tan x = 0$ sur $[0, \pi]$
- c) $\tan 2x = \cot x$ dans $\mathbb{R}$
- d) $\sin x + 2 \cos x = 0$ dans $\mathbb{R}$
- e) $2 \cos^2 x = 1$ sur $[0, \pi]$
- f) $\sin x + \sin 3x = \cos x$ sur $[-\pi, \pi]$

2^e série

- a) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ sur $[0, \pi]$
- b) $2 \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = 0$ sur $[0; \pi]$
- c) $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- d) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$
- e) $2 \tan^3 2x + \tan^2 2x - 8 \tan 2x - 4 = 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- f) $\sin x - \sin 3x = 1 - \cos 2x$ sur $[0, \pi]$

3^e série

- a) $\sin \frac{\pi}{x-1} = 0$ sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$

- b)** $\cos x + \cos 3x + 2 \cos 2x = 0$ sur $[0; \pi]$
- c)** $2(1 + \cos 2x) = \sin x$ sur $[0; \pi]$
- d)** $\cos 2x + \cos x + 1 = \sin 3x + \sin 2x + \sin x$ sur $[-\pi; 0]$
- e)** $9 \sin^4 x - 13 \sin^2 x + 4 = 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- f)** $2 \sin x \sin 3x = 1$ sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

16) Résolvez les inéquations suivantes :

- a)** $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$
- b)** $\tan 4x > \sqrt{3}$ dans $\mathbb{R}$
- c)** $1 + 2 \sin 3x \leq 0$ dans $\mathbb{R}$
- d)** $2 - \cos 3x \geq 0$ dans $\mathbb{R}$
- e)** $2 \cos 2x + \sqrt{3} > 0$ dans $\mathbb{R}$
- f)** $\cot x + 1 \leq 0$ dans $\mathbb{R}$
- g)** $2|\cos x| + 1 \geq 0$ dans $\mathbb{R}$
- h)** $2|\cos x| - 1 < 0$ dans $\mathbb{R}$
- i)** $2|\sin x| - \sqrt{3} < 0$ dans $\mathbb{R}$

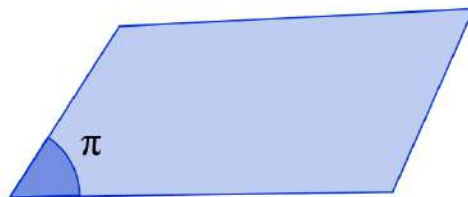
GEOMETRIE DANS L'ESPACE

A) <u>POINTS, DROITES, PLANS DANS L'ESPACE</u>	p 2
1) Notations et premières propriétés	p 2
2) Positions relatives de deux plans	p 2
3) Positions relatives de deux droites	p 3
4) Positions relatives d'une droite et d'un plan	p 4
B) <u>VECTEURS DANS L'ESPACE</u>	p 5
1) Exemple : force exercée par un aimant	p 5
2) Définitions et notations	p 7
3) Egalité de deux vecteurs	p 9
4) Multiplication d'un vecteur par un nombre réel	p 10
5) Addition et soustraction des vecteurs	p 12
6) Propriétés du calcul vectoriel	p 15
7) Equation vectorielle d'une droite	p 17
8) Equation vectorielle d'un plan	p 19
9) Milieu d'un segment	p 20
10) Centre de gravité d'un triangle	p 20
C) <u>VECTEURS ET COORDONNEES</u>	p 22
1) Repères	p 22
2) Coordonnées d'un vecteur	p 26
D) <u>PRODUIT SCALAIRE</u>	p 30
1) Définitions	p 30
2) Interprétation géométrique	p 31
3) Expression analytique	p 32
4) Propriétés	p 34
5) Equations d'un plan	p 35
6) Equations d'une sphère	p 38
<u>EXERCICES</u>	p 40

A) POINTS, DROITES, PLANS DANS L'ESPACE

1) Notations et premières propriétés

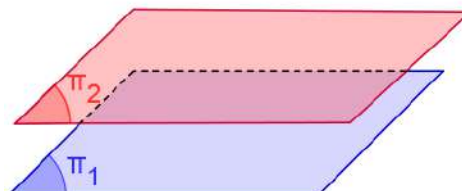
- Les **points** dans l'espace sont notés, comme ceux du plan, par des lettres majuscules : A, B, C,
- Les **droites** dans l'espace sont notées, comme celles du plan, par des lettres minuscules : d, a, b,
- Par deux points distincts A et B de l'espace il passe exactement une droite (comme dans le plan !) qu'on note (AB) ou (BA).
- On dit que plusieurs points A, B, C, D.... sont **alignés** s'il existe une droite qui passe par tous ces points.
- Les **plans** dans l'espace sont notés par des lettres grecques minuscules : π , α , β ,
- Par trois points non alignés A, B, C de l'espace il passe exactement un plan qu'on note (ABC).
- On dit que plusieurs points A, B, C, D.... sont **coplanaires** s'il existe un plan qui passe par tous ces points.
- Pour représenter un plan « en perspective » on dessine (à main levée) une sorte de parallélogramme :



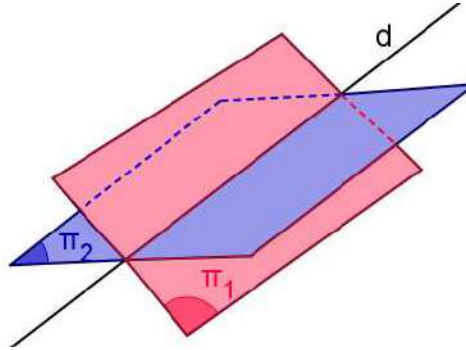
2) Positions relatives de deux plans

Soient π_1 et π_2 deux plans de l'espace. On a trois possibilités :

- $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2$: les deux plans sont **confondus**
- $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$: les deux plans sont **strictement parallèles**

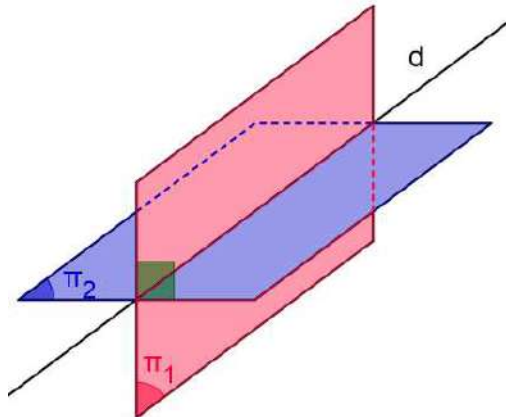


- $\pi_1 \cap \pi_2 = d$ (où d est une droite !) : les deux plans sont **sécants** :



Remarques

- o Le terme « sécant » vient du latin « secare » qui veut dire « couper ». Voici une liste de termes ayant la même *étymologie* : bissectrice, intersection, segment, sécateur, sécable (ce qu'on peut couper, et non pas « coupable » qui a un tout autre sens !), secteur, section, sectionner, secte, sectaire, dissection, vivisection, insecte (animal « découpé », dont le corps est formé de plusieurs volumes nettement distincts)
- o On dit que deux plans π_1 et π_2 sont **parallèles** et on note $\pi_1 \parallel \pi_2$ si et seulement si ils sont confondus ou strictement parallèles.
- o Si deux plans forment un angle de 90° on dit qu'ils sont perpendiculaires et on note : $\pi_1 \perp \pi_2$

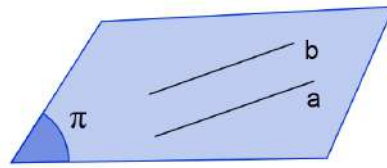


3) Positions relatives de deux droites

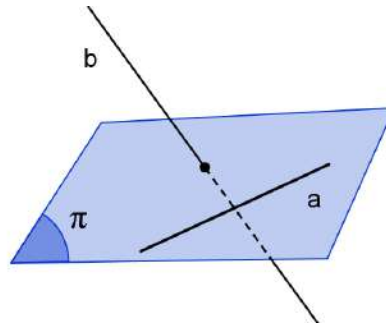
Soient a et b deux droites de l'espace. On a quatre possibilités :

- $a \cap b = a = b$: les deux droites sont **confondues**.
- $a \cap b = \{I\}$: les deux droites sont **sécantes en I** (elles se coupent au point I).

- $a \cap b = \emptyset$ et a et b sont coplanaires : on dit que a et b sont **strictement parallèles**.

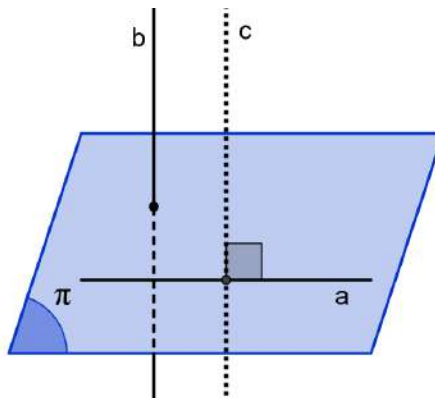


- $a \cap b = \emptyset$ et a et b ne sont pas coplanaires : on dit que a et b sont **gauches**.



Remarques

- o Si a et b sont confondues ou strictement parallèles on dit qu'elles sont **parallèles** et on note $a \parallel b$.
- o Deux droites sécantes ou parallèles sont toujours coplanaires.
- o Dire que deux droites sont gauches revient à dire qu'elles ne sont pas coplanaires.
- o Si a et b sont sécantes et forment un angle de 90° (angle droit) on dit que a et b sont perpendiculaires et on note $a \perp b$.
- o Si a et b sont deux droites gauches et s'il existe une droite c perpendiculaire à a et parallèle à b ($c \parallel a$ et $c \perp b$) on dit que a et b sont **orthogonales** et on note $a \perp b$.

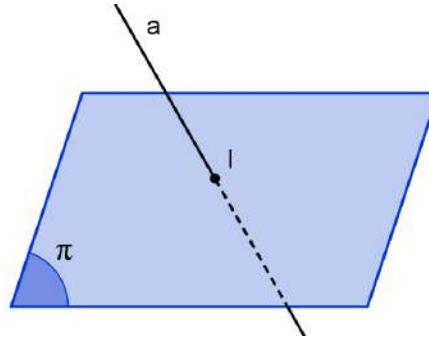


- o Deux droites perpendiculaires sont aussi orthogonales mais l'inverse est faux !

4) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soient d une droite et π un plan de l'espace. On a trois possibilités :

- $a \subset \pi$: la droite a est « dans » le plan π .
- $a \cap \pi = \{I\}$: on dit que a et π sont sécants en I ou que a « perce » le plan π au point I



- $a \cap \pi = \emptyset$: on dit que a est **strictement parallèle** à π

Remarques

- o Si a et π sont sécants et forment un angle de 90° on dit qu'ils sont **perpendiculaires** et on note : $a \perp \pi$. On peut montrer que :

$$a \perp \pi \Leftrightarrow a \text{ est orthogonale à toute droite incluse dans } \pi$$

- o Si a est dans π ou strictement parallèle à π on dit que qu'ils sont **parallèles** et on note $a \parallel \pi$.

Exercice 1

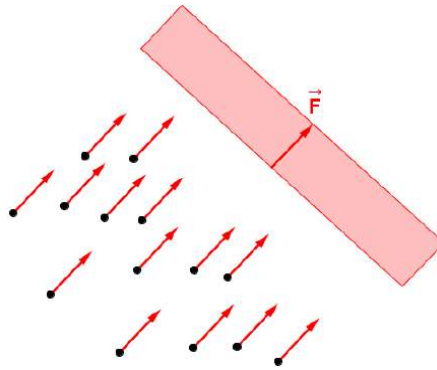
B) VECTEURS DANS L'ESPACE

Les vecteurs dans le plan et les vecteurs dans l'espace sont définis exactement de la même manière et ils ont les mêmes propriétés. Cette partie du cours peut donc être considérée à la fois comme une révision et une généralisation de notions déjà traitées les années précédentes. Nous noterons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace.

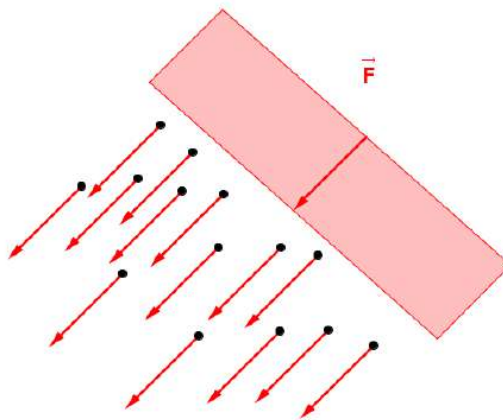
1) Exemple : force exercée par un aimant

Tout le monde sait qu'en plaçant des billes en fer au voisinage d'un aimant (Magnet), celles-ci sont soit attirées, soit repoussées par celui-ci. En physique on parle d'une **force** (d'attraction ou de répulsion), notée $\vec{F}$, exercée par l'aimant sur ces billes et celle-ci est représentée par des **flèches** partant de chacune de ces billes.

Voici l'exemple d'un aimant (rectangle rouge) qui attire les billes (points noirs) :



... et l'exemple d'un aimant qui les repousse :



On constate que sur chacune de ces deux figures toutes les flèches ont :

- la **même longueur** : celle-ci caractérise en effet **l'intensité** de la force (ainsi les flèches de la 1^{re} figure sont moins longues que celles la 2^e figure : c'est que la force d'attraction de la 1^{re} figure est moins importante que la force de répulsion de la 2^e figure)
- la **même direction (les flèches sont toutes parallèles)** : celle qui est perpendiculaire à la surface de l'aimant tournée vers les billes et qui indique la direction dans laquelle celles-ci vont se déplacer sous l'impulsion de la force $\vec{F}$
- le **même sens** : sur la 1^{re} figure les flèches sont tournées vers l'aimant pour signifier que les billes sont attirées par l'aimant et vont donc se déplacer vers celui-ci, alors que sur la 2^e figure les flèches sont orientées dans le sens opposé pour signifier que les billes sont au contraire repoussées par l'aimant et vont s'éloigner de lui.

La notion de « **force** » en physique correspond à la notion de « **vecteur** » en mathématiques.

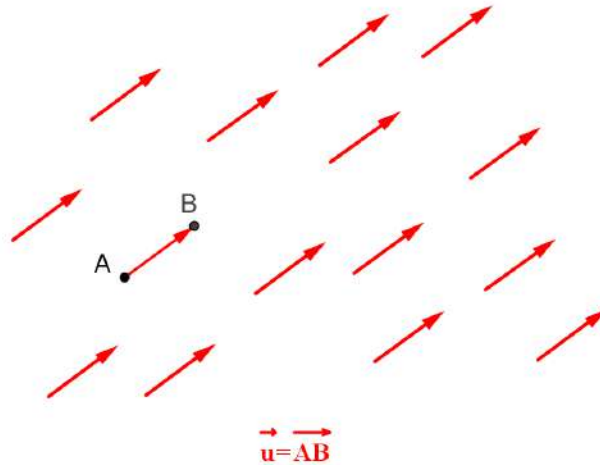
2) Définitions et notations

Définitions

Un **vecteur** est un *ensemble infini de flèches* qui ont toutes :

- o même **direction**
- o même **sens**
- o même **longueur** appelée **norme** du vecteur

Chacune de ces flèches est **un représentant** du vecteur.



Notations

- un vecteur peut être noté de deux manières :
 - o une lettre minuscule surmontée d'une flèche, p. ex. : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, ...
 - o deux lettres majuscules, désignant **l'origine et l'extrémité** d'un représentant particulier du vecteur, surmontées d'une flèche, p. ex. : $\overrightarrow{AB}$
- la norme d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$
- l'ensemble de tous les vecteurs de l'espace est noté $\mathcal{V}$

Remarques

- pour connaître un vecteur *il suffit de connaître un seul représentant* du vecteur !
- la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est rien d'autre que la distance de A à B :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \overline{AB}$$

- la norme d'un vecteur est un nombre réel positif ou nul : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \|\vec{u}\| \in \mathbb{R}_+$
- En classe de 5^e vous avez vu qu'une translation qui transforme A en B est notée $t_{\overrightarrow{AB}}$: on dit que c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$!

Cas particuliers

- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le seul vecteur de norme nulle. En effet :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Leftrightarrow AB = 0 \Leftrightarrow A = B$$

De plus ce vecteur n'a pas de direction (ou toutes les directions, ce qui revient au même...) donc pas de sens non plus ! Ce vecteur est appelé **vecteur nul** et il est noté $\vec{0}$:

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots \quad \text{et} \quad \|\vec{0}\| = 0$$

- Un vecteur $\vec{u}$ tel que $\|\vec{u}\| = 1$ est appelé **vecteur unitaire**.
- Soient A et B deux points distincts, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même direction (car $(AB) = (BA)$), même norme (car $AB = BA$), mais des sens opposés : on dit que $\overrightarrow{BA}$ est le **vecteur opposé** de $\overrightarrow{AB}$ et on note :

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

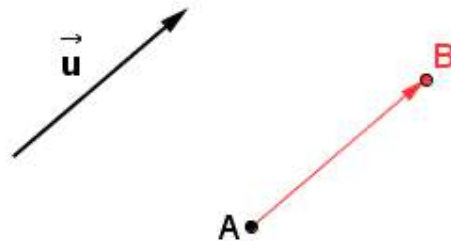
De manière générale, deux **vecteurs opposés** $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ sont deux vecteurs qui ont même direction, même norme et des sens opposés.



Propriété

Soit un vecteur $\vec{u}$ et un point A, alors il existe un seul point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ (c'est-à-dire qu'il existe un représentant unique de $\vec{u}$ qui admet A comme origine).

$$\boxed{\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \forall A \in \mathcal{E} \quad \exists ! B \in \mathcal{E} \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB}}$$



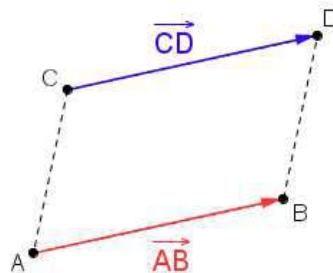
3) Egalité de deux vecteurs

- D'après la définition d'un vecteur, deux **vecteurs** sont **égaux** si et seulement s'ils ont même direction, même sens et même norme.
- Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. A quelle condition a-t-on $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} (*)$?

Remarquons que (*) signifie que les deux flèches (celle qui va de A vers B et celle qui va de C vers D) sont deux représentants du même vecteur et que ceci n'est possible que si A, B, C et D sont coplanaires puisqu'on doit avoir $(AB) \parallel (CD)$.

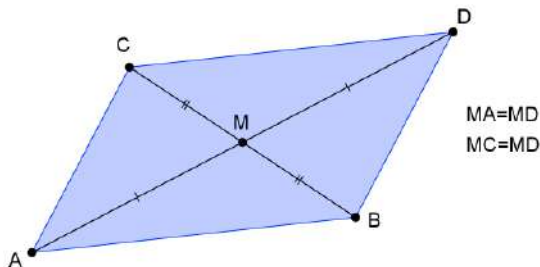
Supposons pour commencer que A, B, C et D ne sont pas alignés. Il suffit alors de faire une figure pour voir tout de suite que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (ABDC) = \# \text{ (parallélogramme)}$$

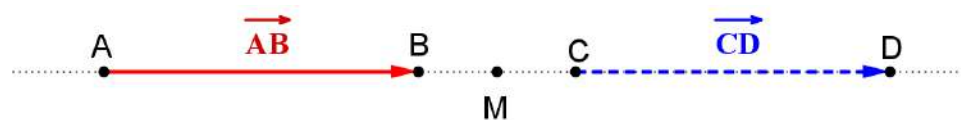


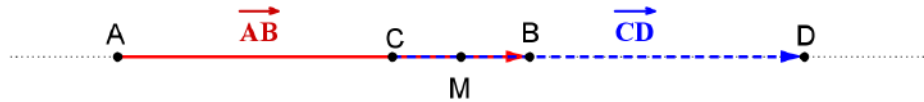
Or nous savons qu'on peut définir un # en disant que c'est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu :

$$(ABDC) = \# \Leftrightarrow \text{milieu de } [AD] = \text{milieu de } [BC] = M$$



Or cette définition s'applique aussi quand A, B, C, D sont alignés : on parle alors d'un « **parallélogramme aplati** ». Ainsi sur les deux figures suivantes (ABDC) est un # puisque M est le milieu à chaque fois des « diagonales » [AD] et [BC] et on voit bien que les deux flèches sont deux représentants du même vecteur :





Conclusion

$$\forall A, B, C, D \in \mathcal{E} \quad \overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow (ABDC) = \#$$

Remarque

Sur les figures on voit facilement que :

$$\begin{aligned} (ABDC) = \# &\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD} \\ &\Leftrightarrow \overline{BA} = \overline{DC} \\ &\Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{BD} \\ &\Leftrightarrow \overline{CA} = \overline{DB} \end{aligned}$$

4) Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

- Exemple des aimants :

En remplaçant un aimant par un aimant 2, 3, ... k fois ($k \in \mathbb{R}_+^*$) plus fort, la force exercée sur les billes gardera la même direction et le même sens mais son intensité (c'est-à-dire la longueur des flèches) sera « multipliée » par 2, 3, ... k. La nouvelle force sera alors notée $2 \cdot \vec{F}$, $3 \cdot \vec{F}$, ... $k \cdot \vec{F}$, ce qui définit une multiplication d'une force (donc d'un vecteur) par un réel positif.

Il semble alors naturel de définir $-2 \cdot \vec{F}$, $-3 \cdot \vec{F}$, ... , $-k \cdot \vec{F}$ comme les forces (ou vecteurs) *opposées* aux forces $2 \cdot \vec{F}$, ... $k \cdot \vec{F}$ et de poser $0 \cdot \vec{F} = k \cdot \vec{0} = \vec{0}$, ce qui nous amène à la définition suivante :

- Définition

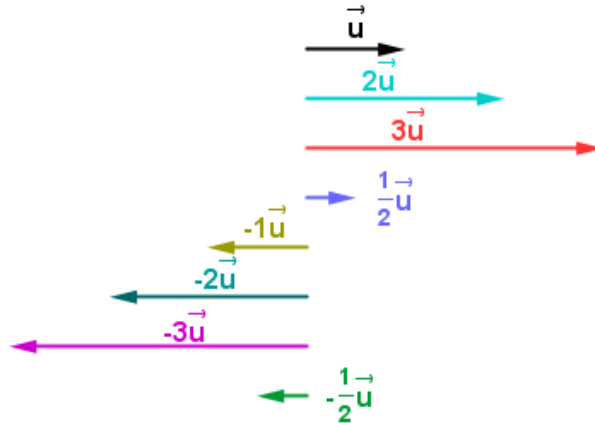
Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$ et $k \in \mathbb{R}$, alors $k \cdot \vec{u}$ est le vecteur défini de la manière suivante :

- o si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ alors : $0 \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{0} = \vec{0}$
- o si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k > 0$ alors :
 - $k \cdot \vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$
 - $k \cdot \vec{u}$ a même sens que $\vec{u}$
 - $\|k \cdot \vec{u}\| = k \cdot \|\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

o si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k < 0$ alors :

- $k \cdot \vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$
- $k \cdot \vec{u}$ a le **sens opposé** de $\vec{u}$
- $\|k \cdot \vec{u}\| = -k \cdot \|\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

- Remarque : Dans tous les cas on a $\boxed{\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \|k \cdot \vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|}$
- Exemples



On voit que toutes ces flèches, c'est-à-dire tous les représentants de $\vec{u}$ et de $k \cdot \vec{u}$, ont même direction. On exprime ceci en disant que $\vec{u}$ et $k \cdot \vec{u}$ sont *colinéaires*.

- Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe un nombre réel k tel que

$$\vec{u} = k \cdot \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = k \cdot \vec{u}$$

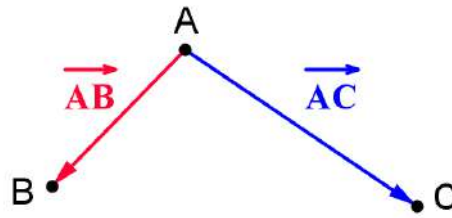
- Propriétés

- o $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$
- o si on convient que $\vec{0}$ a *toutes les directions*, alors on peut dire deux vecteurs sont colinéaires ssi ils ont même direction
- o En observant les deux figures suivantes :
figure 1



A, B, C sont alignés et $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires

figure 2



A, B, C ne sont pas alignés et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

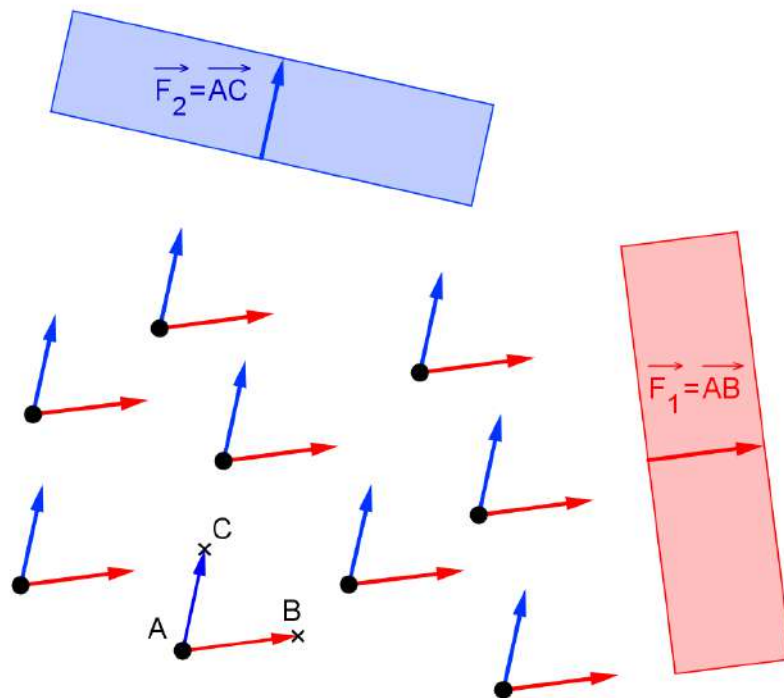
on voit que :

$$\forall A, B, C \in \mathcal{E} \quad A, B, C \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires}$$

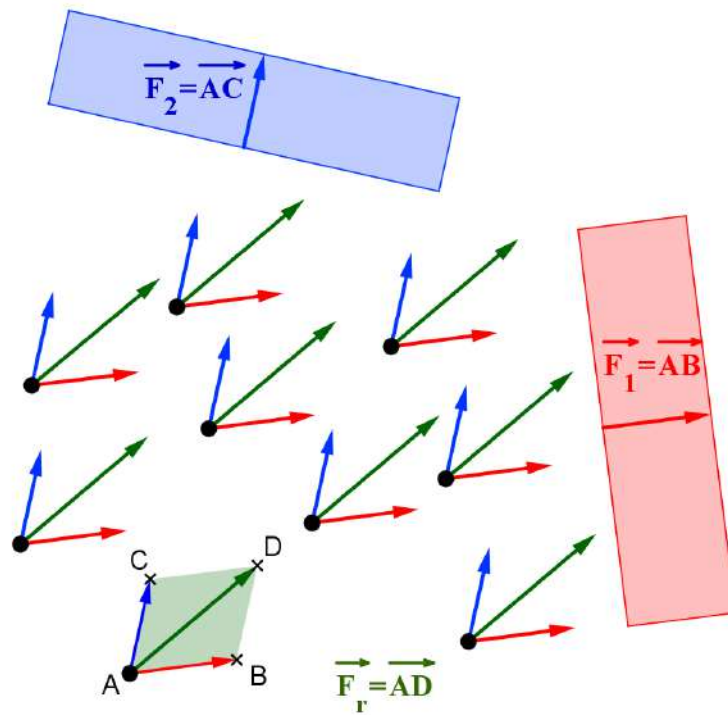
5) Addition et soustraction des vecteurs

- Exemple

Reprenons l'exemple des billes soumises à la force $\vec{F}_1$ d'un premier aimant (rouge sur la figure) et rajoutons un deuxième aimant (bleu) qui exerce la force $\vec{F}_2$ de direction différente sur les billes :



Alors l'expérience montre que tout se passe *comme si* les billes étaient attirées par un troisième aimant (invisible) dans une direction « intermédiaire » avec une force $\vec{F}_r$ représentée par les flèches vertes :



De plus cette force $\vec{F}_r$, appelée **force résultante** en physique, est telle que ses représentants forment la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont formés par les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$:

$$\text{Si } \vec{F}_1 = \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{F}_2 = \overrightarrow{AC} \text{ alors } \vec{F}_r = \overrightarrow{AD} \text{ avec } (ABDC) = \# (*)$$

Si les deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ ont même direction la relation (*) reste valable et (ABDC) est un # aplati.

Si $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ la force résultante sera la force nulle !

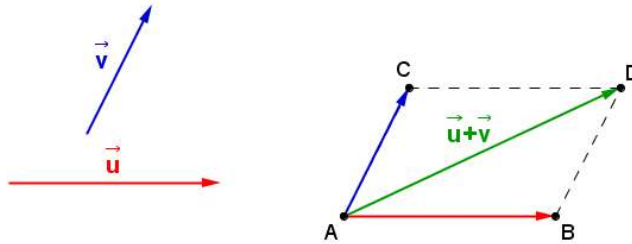
En mathématique cette force résultante est appelée **somme** des deux vecteurs.

- **Définition**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, alors on appelle somme de ces deux vecteurs le vecteur, noté $\vec{u} + \vec{v}$, dont un *représentant* est construit selon l'une des deux règles (équivalentes) suivantes :

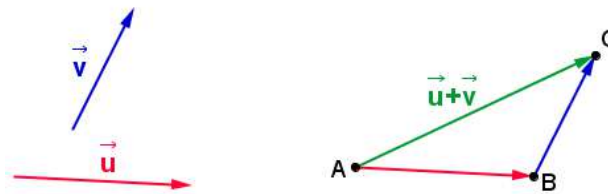
Règle du parallélogramme :

On choisit un point quelconque A, puis on construit le point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, le point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, puis le point D tel que (ABDC) = # (éventuellement aplati, si les deux vecteurs sont colinéaires). Alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$:



Règle simplifiée :

Sur la figure précédente $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ puisque $(ABDC) = \#$, donc il suffit de construire le représentant de $\vec{v}$ d'origine B, c'est-à-dire le point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et on a directement $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$, sans passer par le # :



Remarque

La règle du parallélogramme consiste à choisir deux représentants de **même origine** ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$), alors qu'avec la règle simplifiée on choisit deux représentants **consécutifs** ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$).

- Il est facile de voir sur ces figures que pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ on a :
 - $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire)
 - $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont même sens}$
- La règle simplifiée montre que :

$$\boxed{\forall A, B, C \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

Cette formule, très importante pour le calcul vectoriel, est appelé **relation de Chasles**.

• **Soustraction dans $\mathcal{V}$**

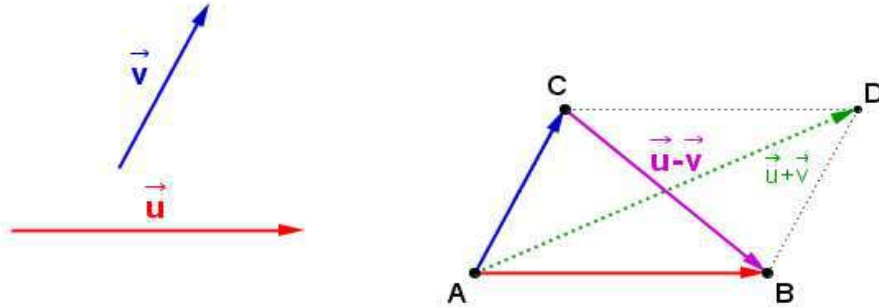
Nous savons qu'on peut définir la soustraction de deux nombres a et b à partir de l'addition en posant : $a - b = a + (-b)$, c'est-à-dire que pour retrancher un nombre b d'un nombre a, on ajoute son opposé. On fait de même pour définir la soustraction des vecteurs :

$$\boxed{\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \underset{\text{déf}}{\vec{u} - \vec{v}} = \vec{u} + (-\vec{v})}$$

Construction de $\vec{u} - \vec{v}$:

On choisit un point quelconque A, puis on construit le point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et le point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Alors $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{CB}$.

En effet $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.



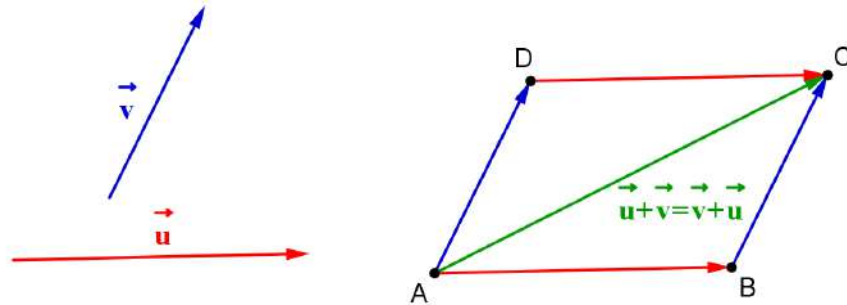
6) Propriétés du calcul vectoriel

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs quelconques et a, b deux nombres réels.

- L'addition des vecteurs est **commutative** : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

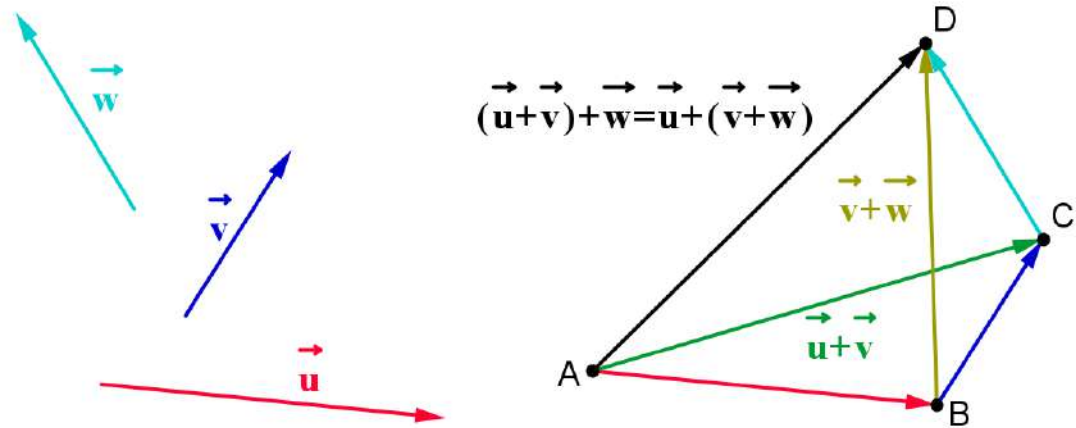
En effet soient A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et D le point tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{DC}$, alors d'après la relation de Chasles on a :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$



- L'addition des vecteurs est **associative** : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

En effet soient A, B, C, D quatre points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$, alors $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ d'après la relation de Chasles et on a de même : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.



- Comme l'addition des vecteurs est commutative et associative, on peut écrire une somme de plusieurs vecteurs sans parenthèses et dans l'ordre qu'on veut :

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{u} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{u} + \vec{v} = \dots$$

- $\vec{0}$ est l'**élément neutre** de l'addition des vecteurs : $\boxed{\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}}$

En effet soient A, B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors comme $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ on a :
 $\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\vec{0} + \vec{u} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$ d'après la relation de Chasles.

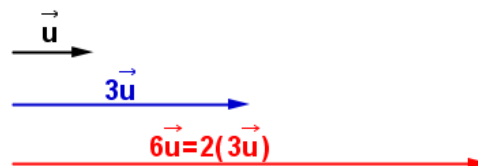
- $\boxed{\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}}$

En effet soient A, B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors comme $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ on a :
 $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ et $(-\vec{u}) + \vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ d'après la relation de Chasles.

- $\boxed{1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \text{ et } (-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u} \text{ et } 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}}$ (évident !)

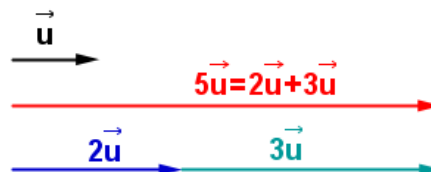
- $\boxed{(ab) \cdot \vec{u} = a \cdot (b \cdot \vec{u})}$ et on écrit simplement : $ab\vec{u}$

p. ex. $a = 2$ et $b = 3$



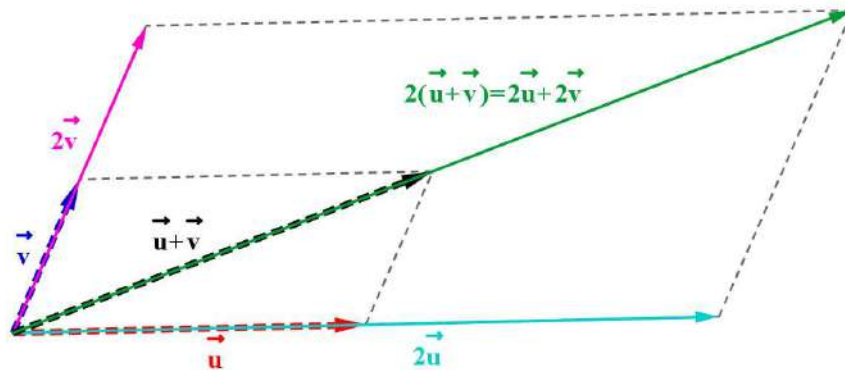
- $\boxed{(a+b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}}$

p. ex. $a = 2$ et $b = 3$



- $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$

p. ex. $a = 2$

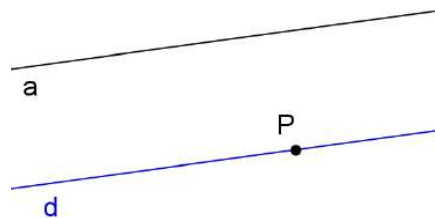


Remarque

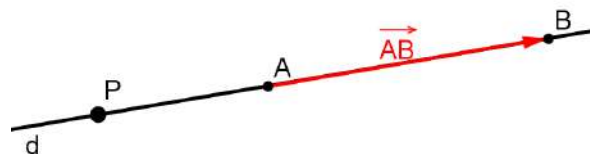
Ces propriétés montrent que les règles de calcul sur les vecteurs « fonctionnent » de la même manière que celles sur les nombres réels, sauf qu'on ne peut PAS multiplier ou diviser deux vecteurs entre eux !

7) Equation vectorielle d'une droite

- Soit un point P et une droite a, alors il existe exactement une seule droite d qui passe par A et qui est parallèle à a comme le montre la figure suivante :



La droite d est donc entièrement déterminée si on connaît un point de d et une droite qui lui est parallèle, c'est-à-dire qui indique sa **direction** ! Or pour indiquer une direction on peut également utiliser un vecteur : la direction de la droite d est connue si on connaît n'importe quel vecteur $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ où $A \in d$ et $B \in d$:



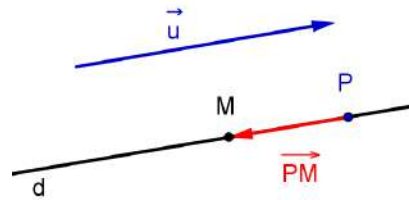
Un tel vecteur est appelé vecteur directeur de d.

- Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs qui sont tous colinéaires.
- Soient deux droites a et b de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement. Alors on a :

$$a \parallel b \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

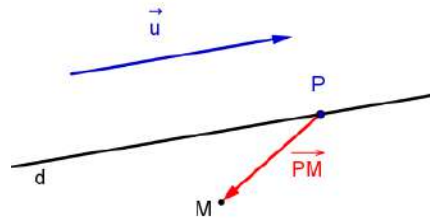
- Soit d une droite définie par un point P et un vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point quelconque du plan. Deux cas peuvent se présenter :

1^{er} cas : $M \in d$



$\vec{u}$ et $\overrightarrow{PM}$ sont colinéaires

2^e cas : $M \notin d$



$\vec{u}$ et $\overrightarrow{PM}$ ne sont pas colinéaires

Conclusion :

$$\begin{aligned} \forall M \quad M \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{PM} = k \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

L'équation $\overrightarrow{PM} = k \cdot \vec{u}$ où P est un point de d, $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et k un réel est appelée équation vectorielle de d.

- **Définition**

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux, et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

o $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

o $\vec{u} \neq \vec{0}$ ou $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $a \perp b$ où a et b sont deux droites quelconques de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement.

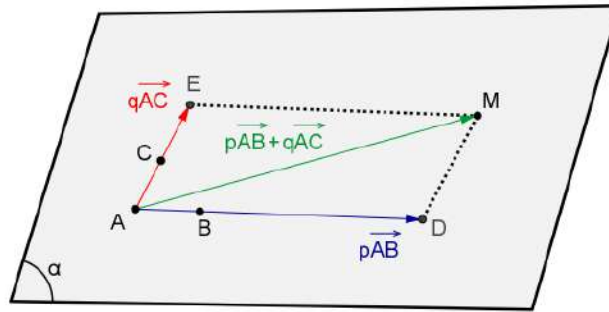
8) Equation vectorielle d'un plan

- Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, on appelle combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tout vecteur de la forme $p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{v}$

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs *non colinéaires* et A, B, C trois points (non alignés) de l'espace tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Alors pour tout réel p il existe un point $D \in (AB)$ tel que $\overrightarrow{AD} = p \cdot \vec{u}$ et pour tout réel q il existe un point $E \in (AC)$ tel que $\overrightarrow{AE} = q \cdot \vec{v}$. En désignant par M le point de l'espace tel que $(ADME) = \#$ on a :

$$p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM} :$$



Comme les sommets d'un # sont coplanaires on a $M \in (ABC)$, d'où :

- Théorème Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{E}$ et M un point quelconque de $\mathcal{E}$, alors :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ est une combinaison linéaire de } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC}$$

- Conséquence

Soit un plan α et A, B, C trois points non alignés de α . Alors $\alpha = (ABC)$ et $M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} =$ combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire :

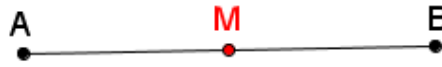
$$\alpha = \left\{ M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} = p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{AC} \text{ avec } p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs (non colinéaires) de α et que $\overrightarrow{AM} = p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{AC}$ est une équation vectorielle de α .

Ainsi pour connaître un plan il suffit de connaître un point et deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan.

9) Milieu d'un segment

- Soit M le milieu de $[AB]$:

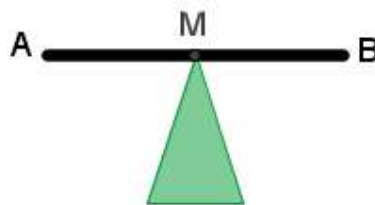


Il est alors évident que :

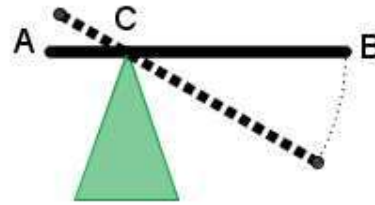
$$\forall A, B, M \quad M = \text{milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

- **Interprétation physique :**

Plaçons un bâton $[AB]$ sur la pointe d'un cône en position parfaitement horizontale, puis lâchons-le : si le bâton repose en son milieu M sur la pointe du cône, le bâton reste en équilibre, si par contre il repose sur un point C différent du milieu, il y a déséquilibre et il va tomber.



(équilibre)



(déséquilibre)

Le vecteur $\overrightarrow{MA}$ (respectivement $\overrightarrow{MB}$) représente la force exercée par l'extrémité A (resp. B) du bâton sur le point M et l'égalité $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ exprime le fait que la force résultante est la force nulle : il ne se passe rien, le bâton reste en équilibre !

Par contre la force résultante $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$ n'étant pas nulle, elle va entraîner le bâton vers le bas (il tombe)...

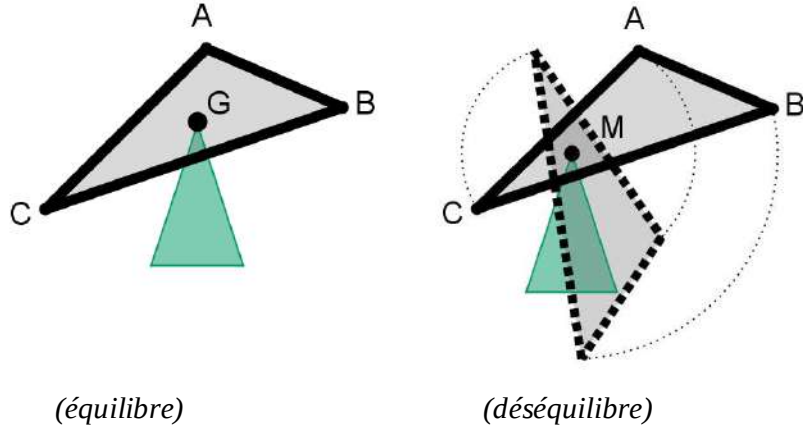
Conclusion :

Le milieu est le point d'équilibre appelé centre de gravité du segment (du bâton).

10) Centre de gravité d'un triangle

- **Interprétation physique :**

Soit ABC un triangle (découpé dans une plaque homogène, p. ex. une plaque en bois). Nous allons chercher « le point d'équilibre » de ce triangle, c'est-à-dire le point G tel que le triangle posé horizontalement sur ce point reste en équilibre :



Comme pour le bâton, les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ représentent les forces exercées respectivement par les sommets A, B et C sur le point G. Le point d'équilibre est alors caractérisé par l'égalité $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, alors que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \neq \vec{0}$.

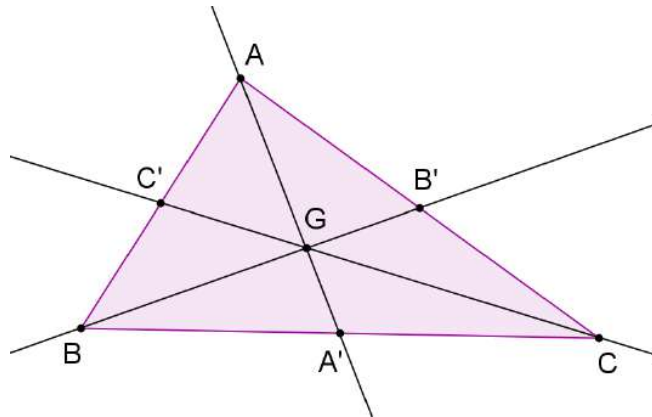
- Définition**

On appelle **centre de gravité** d'un triangle $\Delta(ABC)$ le point G tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}}$$

- Propriétés de G**

Soient un triangle $\Delta(ABC)$, A', B', C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC], [AB] et G le centre de gravité, alors :



o $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'}, \quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BB'}, \quad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CC'}}$

démonstration :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ (Chasles)} \\
 &\Leftrightarrow 3 \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -3 \cdot \overrightarrow{GA} \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AG} \\
 &\Leftrightarrow 2 \cdot \overrightarrow{AA'} = 3 \cdot \overrightarrow{AG} \text{ (voir exercice 19)} \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AA'}
 \end{aligned}$$

Les deux autres égalités se démontrent de façon analogue (exercice !)

o $G \in (AA') \cap (BB') \cap (CC')$

démonstration :

Nous venons de montrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires, donc les points A, A' et G sont alignés (propriété p. 12) et par conséquent $G \in (AA')$. On montre de même que $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$, d'où le résultat.

Remarque :

Comme les droites (AA') , (BB') et (CC') sont les trois **médianes** du triangle, nous venons de montrer que G est le point d'intersection de ces médianes !

Exercices 2 à 11

C) VECTEURS ET COORDONNEES

1) Repères

a) Repères d'une droite



- Soit d une droite et O, I $\in$ d avec O $\neq$ I, alors :

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad M \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OI} \text{ (*)}$$

- De plus ce réel k est unique.

En effet s'il existait k et k' tel que $\overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM} = k' \cdot \overrightarrow{OI}$ alors :

$$k \cdot \overrightarrow{OI} = k' \cdot \overrightarrow{OI} \Leftrightarrow (k - k') \overrightarrow{OI} = \vec{0} \Leftrightarrow k = k' \text{ ou } \overrightarrow{OI} = \vec{0}, \text{ or } \overrightarrow{OI} \neq \vec{0}, \text{ donc } k = k'.$$

• **Définition**

L'unique réel k tel que $\overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OI}$ est appelé l'**abscisse** du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{OI})$ d'**origine** O. On note $M(k)$.

Ainsi : $M(k) \text{ dans } (O, \overrightarrow{OI}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OI}$

b) Repères d'un plan

- Soit α un plan et O, I, J trois points non alignés de α , alors on a d'après le théorème page 19 :

$$\begin{aligned} M \in (OIJ) = \alpha &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \text{ est une combinaison linéaire de } \overrightarrow{OI} \text{ et } \overrightarrow{OJ} \\ &\Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} \end{aligned}$$

- De plus le couple (p, q) est unique.

En effet si $\overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OM} = p' \cdot \overrightarrow{OI} + q' \cdot \overrightarrow{OJ}$ alors :

$$p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} = p' \cdot \overrightarrow{OI} + q' \cdot \overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow (p - p') \cdot \overrightarrow{OI} = (q' - q) \cdot \overrightarrow{OJ} \quad (*)$$

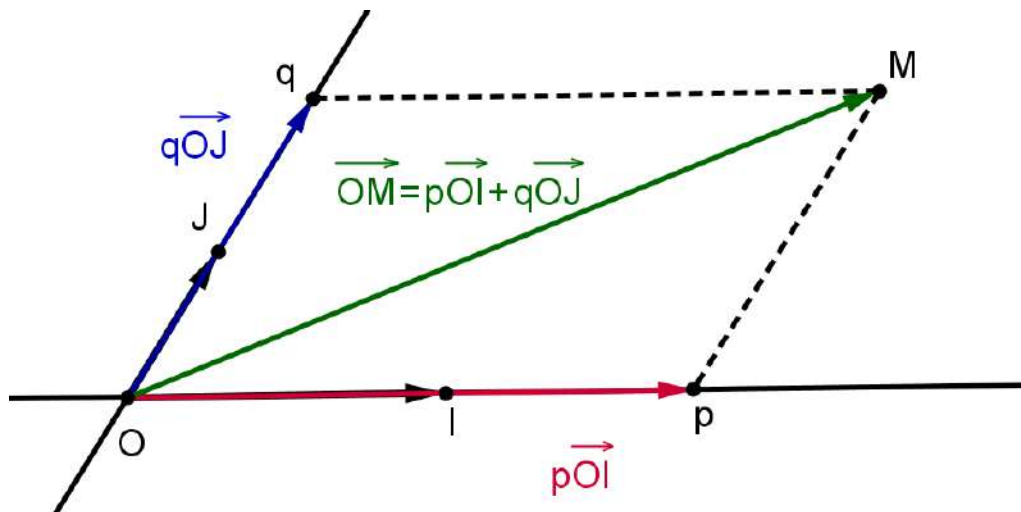
Mais alors $p - p' = 0$ car sinon on aurait $\overrightarrow{OI} = \frac{q' - q}{p - p'} \cdot \overrightarrow{OJ}$ et O, I, J seraient alignés

(puisque $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ colinéaires) ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent

$p = p'$ et (*) devient :

$$0 \cdot \overrightarrow{OI} = (q' - q) \cdot \overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow \vec{0} = (q' - q) \cdot \overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow q' - q = 0 \text{ ou } \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$$

donc $q' - q = 0$ puisque $\overrightarrow{OI} \neq \vec{0}$ et on a également $q = q'$, cqfd.



- **Définition**

L'unique couple de réels (p, q) tel que $\overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}$ est appelé le couple des **coordonnées** du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ de α d'**origine O**. On note $M(p, q)$, p est appelé l'**abscisse** et q l'**ordonnée** de M. Ainsi :

$$M(p, q) \text{ dans } (O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}$$

- **Cas particuliers**

Si $\overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{OJ}$ on dit que $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère **orthogonal** et si de plus les deux vecteurs sont unitaires, c'est-à-dire si $\|\overrightarrow{OI}\| = \|\overrightarrow{OJ}\| = 1$, on dit qu'on a un **repère orthonormé** : on note **R.O.N.**

c) **Repères de l'espace**

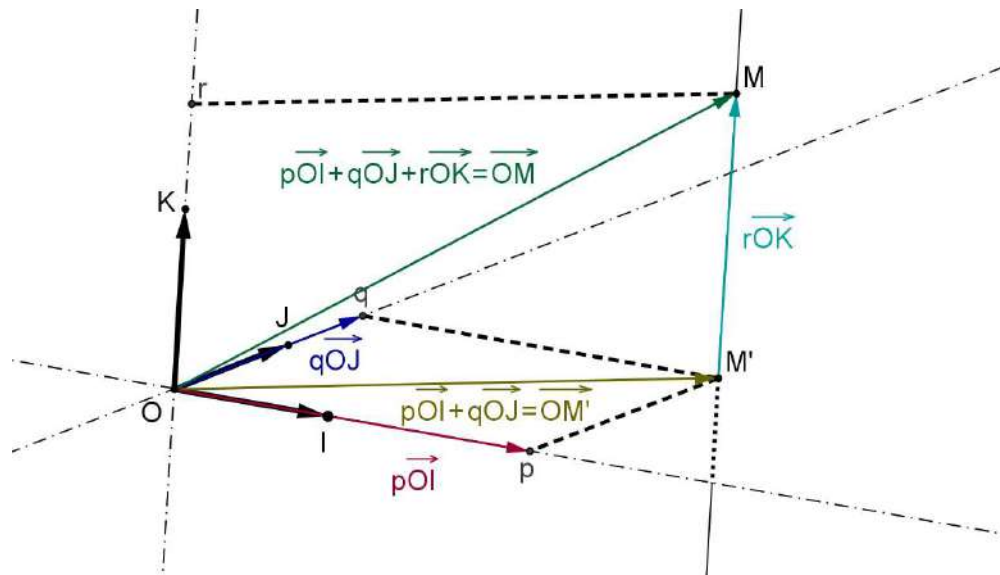
- Soient O, I, J, K quatre points non coplanaires (OIJK = tétraèdre) et M un point quelconque dans l'espace.

Alors il existe une droite d unique qui passe par M et qui est parallèle à OK : cette droite coupe le plan OIJ en M' et on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$ (1).

Dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ du plan OIJ : M'(p, q) donc $\overrightarrow{OM'} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}$ (2).

D'autre part $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires (puisque $M'M = d \parallel OK$) donc il existe un réel r unique tel que $\overrightarrow{M'M} = r \cdot \overrightarrow{OK}$ (3).

En remplaçant (2) et (3) dans (1) il vient : $\overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} + r \cdot \overrightarrow{OK}$.



- **Définition**

L'unique triplet de réels (p, q, r) tel que $\overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} + r \cdot \overrightarrow{OK}$ est appelé le triplet des **coordonnées** du point M dans le **repère** $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ d'**origine** O de l'espace. On note $M(p, q, r)$, p est appelé l'**abscisse**, q l'**ordonnée** et r la **cote** de M. Ainsi :

$$M(p, q, r) \text{ dans } (O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} + r \cdot \overrightarrow{OK}$$

Les trois vecteurs du repère sont souvent notés $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ et le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- **Cas particuliers**

Si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux on dit que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère **orthogonal** et si de plus les trois vecteurs sont unitaires, c'est-à-dire si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$, on dit qu'on a un **repère orthonormé** : on note **R.O.N.**

- **Conclusion**

Un repère est toujours constitué d'un point fixe appelé origine du repère et :

- d'un vecteur directeur $\overrightarrow{OI}$ dans le cas d'une droite
- de deux vecteurs directeurs non colinéaires dans le cas d'un plan
- de trois vecteurs dont aucun n'est une combinaison linéaire des deux autres (ce qu'on exprime en disant qu'ils sont *linéairement indépendants*) dans le cas de l'espace.

Pour repérer un point M il faut donc

- 1 abscisse si $M \in d : M(p)$
- 2 coordonnées si $M \in \alpha : M(p, q)$
- 3 coordonnées si $M \in \mathcal{E} : M(p, q, r)$

On exprime cette dernière propriété en disant qu'une droite est de **dimension** 1, un plan de dimension 2 et l'espace de dimension 3.

Exercice 12 - 14

2) Coordonnées d'un vecteur

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère quelconque de $\mathcal{E}$, nous venons de voir que chaque point de l'espace est repéré par 3 coordonnées dans ce repère. Nous allons voir maintenant qu'on peut également repérer un vecteur de l'espace par 3 coordonnées dans ce repère !

a) Définition

Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$ et $M(p, q, r)$ le point de $\mathcal{E}$ qui vérifie $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ (voir propriété p 8), alors :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$$

On dit que (p, q, r) est le triplet des **coordonnées** de $\vec{u}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on note :

$$\vec{u}(p, q, r) \text{ ou } \vec{u} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \Leftrightarrow \vec{u} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$$

Remarques :

- Prendre les mêmes coordonnées pour le point M et pour le vecteur $\vec{u}$ se justifie par le fait qu'un vecteur $\vec{u}$ est entièrement déterminé quand on connaît un de ses représentants $\overrightarrow{OM}$.
- La notation « verticale » des coordonnées est utilisée exclusivement pour les vecteurs et servira souvent à remplacer dans un « calcul vectoriel » un vecteur par cette « parenthèse en hauteur » contenant ses coordonnées.
- Il résulte de ce qui précède que deux vecteurs (ou deux points) sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées dans un repère donné.

b) Formules valables dans n'importe quel repère

- Soient $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{E}$ et $B(x_B, y_B, z_B) \in \mathcal{E}$, alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}) - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}) \\ &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} \end{aligned}$$

D'où :
$$\overrightarrow{\text{AB}} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Exemple : $A(5; -3; 7)$, $B(-1; 0; 9)$, alors $\overrightarrow{\text{AB}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BA}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha(x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}) = \alpha x_u \vec{i} + \alpha y_u \vec{j} + \alpha z_u \vec{k}, \text{ d'où :}$$

$$\alpha \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha x_u \\ \alpha y_u \\ \alpha z_u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k} + x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k} \\ &= (x_u + x_v) \vec{i} + (y_u + y_v) \vec{j} + (z_u + z_v) \vec{k} \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \\ z_u + z_v \end{pmatrix}$$

Exemples : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$, alors : $3 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ -21 \end{pmatrix}$, $-7 \vec{v} = \begin{pmatrix} 56 \\ -77 \\ -21 \end{pmatrix}$, $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$,

$$2 \cdot \vec{u} - 5 \cdot \vec{v} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ -55 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ -65 \\ -29 \end{pmatrix}.$$

- Milieu d'un segment $[\text{AB}]$:

$$M = \text{milieu de } [\text{AB}] \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{MB}} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A - x_M \\ y_A - y_M \\ z_A - z_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B - x_M \\ y_B - y_M \\ z_B - z_M \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A + x_B - 2x_M \\ y_A + y_B - 2y_M \\ z_A + z_B - 2z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B - 2x_M = 0 \\ y_A + y_B - 2y_M = 0 \\ z_A + z_B - 2z_M = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

D'où : $\boxed{M = \text{milieu de } [AB] \Leftrightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)}$

- Centre de gravité d'un triangle $\Delta(ABC)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A - x_G \\ y_A - y_G \\ z_A - z_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B - x_G \\ y_B - y_G \\ z_B - z_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C - x_G \\ y_C - y_G \\ z_C - z_G \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A + x_B + x_C - 3x_G \\ y_A + y_B + y_C - 3y_G \\ z_A + z_B + z_C - 3z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \\ z_A + z_B + z_C = 3z_G \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{G = \text{centre de gravité de } \Delta(ABC) \Leftrightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)}$$

Exemples :

$A(-17; 8; -9)$, $B(23; 0; -11)$, $C(-2; 15; -24)$ alors :

milieu de $[AB]$: $M(3; 4; -10)$

centre de gravité du $\Delta(ABC)$:

$$G\left(\frac{-17 + 23 - 2}{3}; \frac{8 + 0 + 15}{3}; \frac{-9 - 11 - 24}{3}\right) = G\left(\frac{4}{3}; \frac{23}{3}; -\frac{44}{3}\right)$$

c) Formules valables uniquement dans un R.O.N.

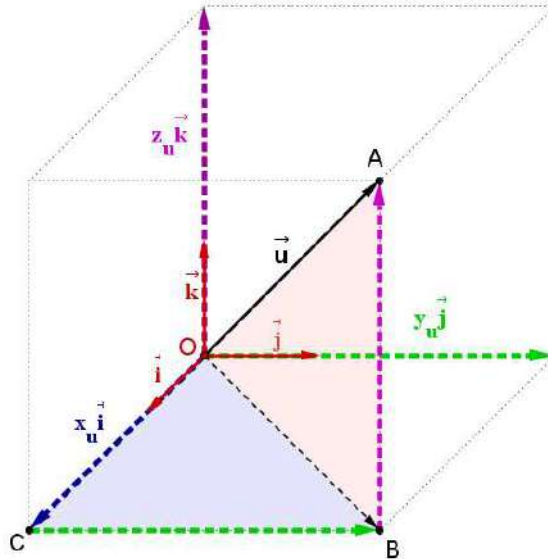
On suppose maintenant que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un R.O.N..

• **Norme d'un vecteur**

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et les points $A(x_u; y_u; z_u)$, $B(x_u; y_u; 0)$ et $C(x_u; 0; 0)$.

Alors $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ et comme $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un R.O.N :

- le triangle $\Delta(OCB)$ est rectangle en C donc $\overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CB}^2$ (Pythagore)
- le triangle $\Delta(OAB)$ est rectangle en B donc $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BA}^2$ (Pythagore)
- D'où $\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{BA}^2$ (1).



Or : $\overline{OC} = \|\overrightarrow{OC}\| = \|x_u \vec{i}\| = |x_u| \|\vec{i}\| = |x_u| \cdot 1 = |x_u|$ (2),

$\overline{CB} = \|\overrightarrow{CB}\| = \|y_u \vec{j}\| = |y_u| \|\vec{j}\| = |y_u| \cdot 1 = |y_u|$ (3),

$\overline{BA} = \|\overrightarrow{BA}\| = \|z_u \vec{k}\| = |z_u| \|\vec{k}\| = |z_u| \cdot 1 = |z_u|$ (4).

En remplaçant (2), (3), (4) dans (1) il vient :

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\overrightarrow{OA}\|^2 = \overline{OA}^2 = |x_u|^2 + |y_u|^2 + |z_u|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

d'où :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$$

Exemple :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{6} \\ -3 \end{pmatrix}, \|\vec{u}\| = \sqrt{7^2 + \sqrt{6}^2 + (-3)^2} = \sqrt{49 + 6 + 9} = 8$$

- **Distance de deux points**

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, alors :

$$\overline{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

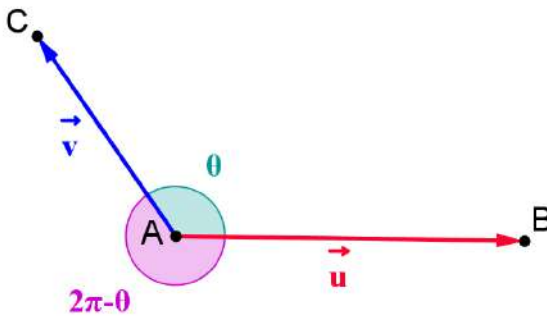
Exercices 15 – 21

D) PRODUIT SCALAIRE

1) Définitions

a) Angle formé par deux vecteurs non nuls

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et A, B, C trois points (non alignés) de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$:



L'angle $\theta = \widehat{BAC}$, indépendant des représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ choisis, est appelé **angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** et est noté parfois $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$. En fait $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment deux angles : θ et $2\pi - \theta$, dont l'un est saillant (c'est-à-dire de mesure comprise entre 0 et π radians), l'autre rentrant (c'est-à-dire de mesure strictement comprise entre π et 2π radians). Or comme on va le voir tout de suite, nous ne nous intéresserons qu'au cosinus de cet angle et comme $\cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos \theta$, nous choisirons toujours celui des deux angles qui est saillant : $\boxed{0 \leq \theta \leq \pi}$

b) Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, on appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$** le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (on lit : « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »), défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

où $\theta = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ étant l'angle (saillant) formé par les deux vecteurs.

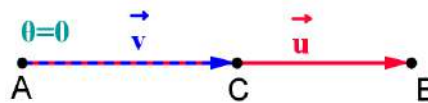
Exercices 22 et 23

2) Interprétation géométrique

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ et $\theta = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

- 1^{er} cas : $\theta = 0$

Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 0 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot 1 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$.



- 2^e cas : $\theta = \pi$

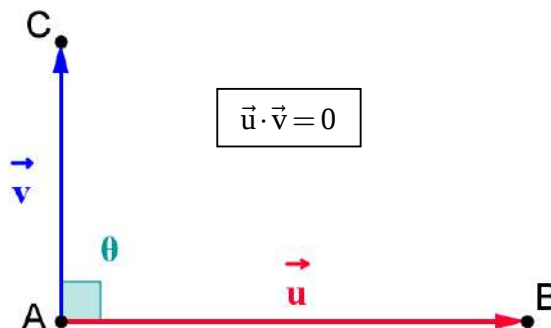
Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, des sens opposés et

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \pi = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot (-1) = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = -\overline{AB} \cdot \overline{AC}.$$



- 3^e cas : $\theta = \frac{\pi}{2}$

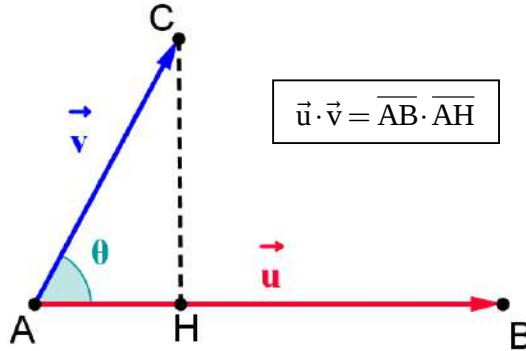
Alors $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot 0 = 0$.



- 4^e cas : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Soit H la projection orthogonale de C sur AB, alors $\Delta(AHC)$ est rectangle en H donc

$$\cos \theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} \text{ et par conséquent : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}.$$

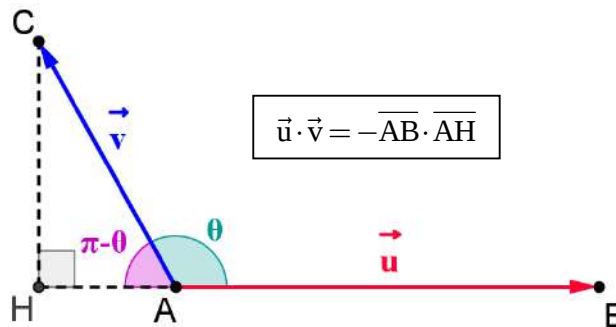


- 5^e cas : $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Soit H la projection orthogonale de C sur AB, alors $\Delta(AHC)$ est rectangle en H donc

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow -\cos \theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} \text{ et par conséquent :}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \left(-\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}\right) = -\overline{AB} \cdot \overline{AH}.$$



3) Expression analytique

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un R.O.N., $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$, A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$. Nous supposons d'abord que les deux vecteurs sont non nuls, alors

trois cas peuvent se présenter :

1^{er} cas : $\theta = 0$

Alors il existe un réel positif k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_v = k \cdot x_u \\ y_v = k \cdot y_u \\ z_v = k \cdot z_u \end{cases}$ et on a :

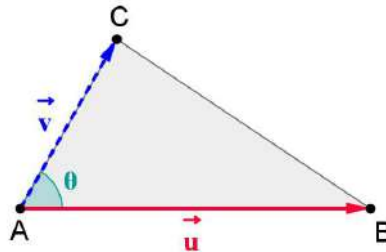
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 0 \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|k \cdot \vec{u}\| \cdot 1 \\ &= \|\vec{u}\| \cdot k \|\vec{u}\| \quad (\text{car } k > 0) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot k \\ &= k(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) \\ &= kx_u^2 + ky_u^2 + kz_u^2 \\ &= x_u kx_u + y_u ky_u + z_u kz_u \\ &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \end{aligned}$$

2^e cas : $\theta = \pi$

Alors il existe un réel négatif k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$ et on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \pi \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|k \cdot \vec{u}\| \cdot (-1) \\ &= \|\vec{u}\| \cdot (-k) \|\vec{u}\| \cdot (-1) \quad (\text{car } |k| = -k \text{ puisque } k < 0) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot k \\ &= \dots \quad (\text{voir 1^{er} cas}) \\ &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \end{aligned}$$

o 3^e cas : $0 < \theta < \pi$



Alors ABC est un triangle et d'après le théorème du cosinus on a :

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \theta \Leftrightarrow 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \theta = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2.$$

$$\text{Or} \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \theta = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v},$$

$$\overline{AB}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$\overline{AC}^2 = \|\vec{v}\|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

$$\overline{BC}^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (x_v - x_u)^2 + (y_v - y_u)^2 + (z_v - z_u)^2,$$

$$2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 - (x_v - x_u)^2 - (y_v - y_u)^2 - (z_v - z_u)^2$$

$$\text{d'où : } \Leftrightarrow 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = 2x_u x_v + 2y_u y_v + 2z_u z_v$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

Nous avons donc montré que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \quad (*)$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (par définition) et d'autre part $x_u = y_u = z_u = 0$ donc

$0 \cdot x_v + 0 \cdot y_v + 0 \cdot z_v = 0$, ce qui montre bien que la formule (*) reste valable pour $\vec{u} = \vec{0}$.

D'où :

Théorème

Pour tous vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ dans un **R.O.N.** on a :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v}$$

Remarque

L'expression analytique de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ permet de calculer $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$. Exemple :

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans un R.O.N. alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 0 = -11$ et d'autre part

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = \sqrt{1+4+9} \sqrt{9+16+0} \cos \theta = 5\sqrt{14} \cos \theta$, d'où $-11 = 5\sqrt{14} \cos \theta$ et par conséquent $\theta \simeq 126,01^\circ$.

Exercices 24

4) Propriétés

a) $\boxed{\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}}$

En effet : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0$ ou $\|\vec{v}\| = 0$ ou $\cos \theta = 0$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

b) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \text{ (non nuls)} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$

En effet le signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le même que celui de $\cos \theta$ puisque $\|\vec{u}\| > 0$ et $\|\vec{v}\| > 0$.

c) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (le produit scalaire est **symétrique**)

En effet en se plaçant dans un R.O.N. on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = x_v x_u + y_v y_u + z_v z_u = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

d) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) &= (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{aligned} \quad \text{(on dit que le produit scalaire est **linéaire**)}$$

Ces deux propriétés se vérifient facilement en se plaçant dans un R.O.N. (*exercice !*).

e) $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

En effet $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos 0 = \|\vec{u}\|^2 \cdot 1 = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$.

Définition

Le nombre réel positif $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé **carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$ et il est noté $\vec{u}^2$.

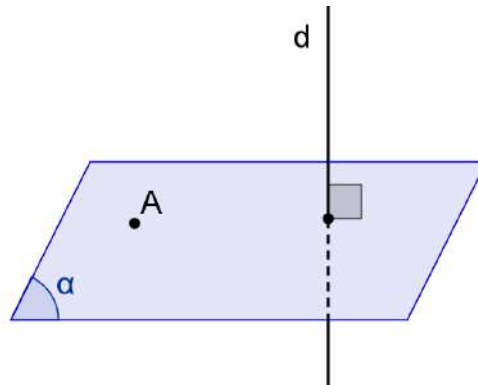
Remarques

- Ainsi on a : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} \Leftrightarrow \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- On ne parle pas de « cube scalaire » ou de « $\vec{u}^n$ » où $n > 2$!

Exercices 25 - 28

5) Equations d'un plan

- Soit A un point et d une droite de l'espace. Alors il existe exactement un plan α qui passe par A et qui est perpendiculaire à d :



- Pour connaître un plan α il suffit donc de connaître un point $A \in \alpha$ et une droite d telle que $d \perp \alpha$. Or pour connaître une telle droite il suffit de connaître un vecteur directeur $\vec{n}$ de cette droite qui sera alors orthogonal à tous les vecteurs directeurs du plan α ! Ceci nous amène à poser la définition suivante :

- **Définition**

Soit un plan α et un vecteur $\vec{n}$ dans l'espace. On dit que $\vec{n}$ est un **vecteur normal** à α si et seulement si $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite $d \perp \alpha$.

Remarque

Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à α , alors l'ensemble des vecteurs normaux à α est égal à l'ensemble des vecteurs non nuls colinéaires à $\vec{n}$! Un plan a donc une infinité de vecteurs normaux tous colinéaires.

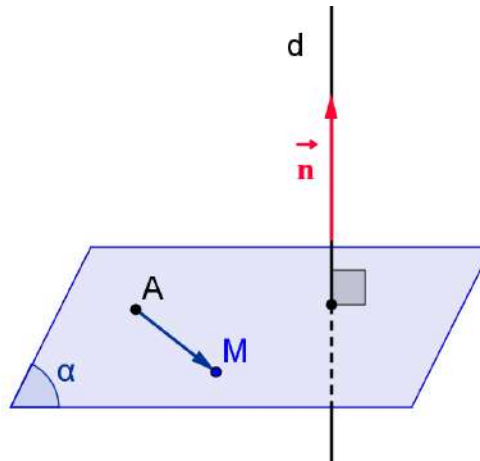
- **Propriété 1**

Soit un plan α de vecteur normal $\vec{n}$ et $A \in \alpha$, alors :

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$$

Démonstration :

$$M \in \alpha \Leftrightarrow d \perp AM \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AM}$$



- **Propriété 2**

Soit un plan α de l'espace muni d'un R.O.N., $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à α et

$A(x_A, y_A, z_A) \in \alpha$, alors :

$$\forall M(x, y, z) \in \mathcal{E} \quad M(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 (*)$$

où $d = -ax_A - by_A - cz_A$

Définition : On dit que $ax + by + cz + d = 0$ est **une équation cartésienne** du plan α .

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in \alpha &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \quad (\text{d'après propriété 1}) \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{d'après C4a}) \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{d'après B2b}) \\
 &\Leftrightarrow (x - x_A) \cdot a + (y - y_A) \cdot b + (z - z_A) \cdot c = 0 \quad (\text{d'après C3}) \\
 &\Leftrightarrow ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A = 0 \\
 &\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{en posant: } d = -ax_A - by_A - cz_A)
 \end{aligned}$$

Exemple

Soit α le plan passant par $A(-2, 3, 5)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in \alpha &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + 2 \\ y - 3 \\ z - 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x + 2) \cdot (-7) + (y - 3) \cdot 4 + (z - 5) \cdot (-6) = 0 \\
 &\Leftrightarrow -7x - 14 + 4y - 12 - 6z + 30 = 0 \\
 &\Leftrightarrow -7x + 4y - 6z + 4 = 0
 \end{aligned}$$

On note : $\alpha \equiv -7x + 4y - 6z + 4 = 0$. Cette équation permet de vérifier facilement si le plan passe par un point donné ou non : $B(2, 1, -1) \in \alpha$ car $-7 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) + 4 \stackrel{!}{=} 0$ et $C(-5, 3, 0) \notin \alpha$ car $-5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 6 \cdot 0 + 4 = 6 \neq 0$.

- **Propriété 3 (réciproque de la propriété 2)**

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors l'ensemble :

$E = \{M(x, y, z) / ax + by + cz + d = 0\}$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

Démonstration :

Comme $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ l'un au moins des nombres a, b, c est différent de 0, par exemple $a \neq 0$, d'où $A\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right) \in E$ car $a\left(-\frac{d}{a}\right) + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = -d + d \stackrel{!}{=} 0$.

Appelons α le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$, alors :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \alpha &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - \frac{d}{a} \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + d + by + cz = 0 \\ &\Leftrightarrow M(x, y, z) \in E \end{aligned}$$

Par conséquent $E = \alpha$, c.q.f.d.

Exemple

$$9x - 5y - z + 8 = 0 \text{ est une équation cartésienne d'un plan de vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Nous avons vu en **B8**) que pour connaître un plan α il suffit de connaître un point $A \in \alpha$ et deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de ce plan. Nous verrons plus tard qu'on peut déterminer une équation cartésienne de α à partir d'un point et de deux vecteurs directeurs non colinéaires.

Exercices 29 à 31

6) Equations d'une sphère

- Définition**

Soit A un point de l'espace et r un nombre réel strictement positif, alors on appelle **sphère** de **centre A** et de **rayon r** l'ensemble des points M tel que $\overline{AM} = r$.

Notation : $\mathcal{S}(A, r) = \{M \in \mathcal{E} / \overline{AM} = r\}$.

- Propriété 1**

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace muni d'un R.O.N. et $r \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{S}(A, r) \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2 (*)$$

Définition : On dit que (*) est **une équation de la sphère** $\mathcal{S}(A, r)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{S}(A, r) &\Leftrightarrow \overline{AM} = r \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2} = r \quad (\text{d'après B2c}) \\ &\Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2 \end{aligned}$$

- **Propriété 2**

Soient A et B deux points de l'espace muni d'un R.O.N., alors l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$ est la sphère de diamètre $[AB]$, c'est-à-dire la sphère de centre $I = \text{milieu de } [AB]$ et de rayon $r = \overline{AI} = \overline{BI}$.

Démonstration :

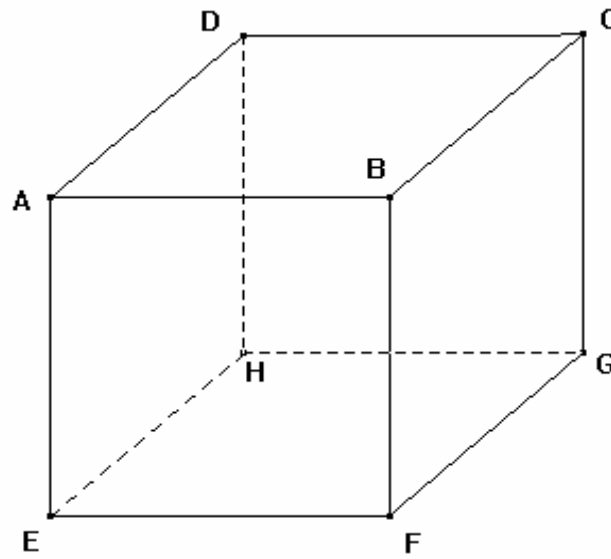
Soient $M \in \mathcal{E}$ et I le milieu de $[AB]$, alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \quad (\text{d'après C4a}) \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 0 \quad (\text{relation de Chasles}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \quad (\text{d'après C4d}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot (-\overrightarrow{IA}) = 0 \quad (\text{d'après C4c et } I = \text{milieu de } [AB]) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) - \overrightarrow{IA}^2 = 0 \quad (\text{d'après C4d}) \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI}\|^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} = \|\overrightarrow{IA}\|^2 \quad (\text{car } I = \text{milieu de } [AB] \text{ et d'après C4e}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + 0 = \overrightarrow{IA}^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IA} \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{S}(I, \overline{IA}) \end{aligned}$$

Exercices 32 à 33

EXERCICES

- 1) Soit ABCDEFGH un cube :



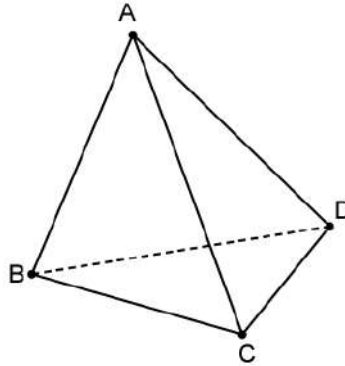
En utilisant les points A, B, C, ..., H indiquez :

- a) des plans parallèles.
 - b) des plans perpendiculaires.
 - c) des plans sécants mais pas perpendiculaires.
 - d) des droites parallèles.
 - e) des droites perpendiculaires.
 - f) des droites orthogonales mais *pas* perpendiculaires.
 - g) des droites sécantes mais *pas* perpendiculaires.
 - h) des plans et des droites parallèles.
 - i) des plans et des droites perpendiculaires.
 - j) des plans et des droites sécants mais pas perpendiculaires.
- 2) Soient A, B et M trois points, montrez que :
- a) $M = \text{milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$
 - b) $M = \text{milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$
- 3) Soit un triangle quelconque ABC et I le milieu de [BC]. Montrez que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

TETRAEDRE

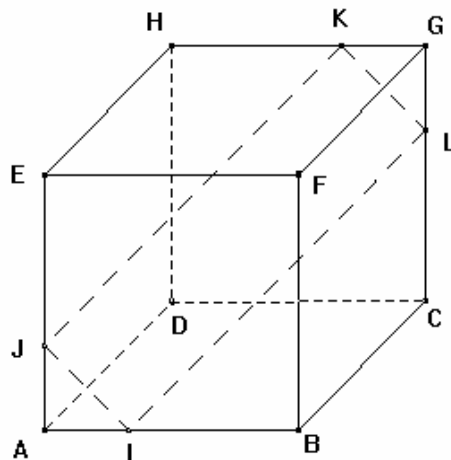
Soient A, B, C, D quatre points non coplanaires de l'espace. En reliant ces points par des segments on obtient un solide à 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces triangulaires appelé **tétraèdre** (on peut dire aussi : un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire).

Si les 6 arêtes ont la même longueur on dit qu'on a un **tétraèdre régulier**.



- 4) Soit ABCD un tétraèdre et I, J, K, L, M, N les milieux de $[DB]$, $[DC]$, $[DA]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ respectivement (figure !).
- a) Montrez que $(IJNL) = \#$ et que $(MLKJ) = \#$.
- b) Déduisez-en que tous les segments ayant pour extrémités les milieux de deux arêtes opposées (càd qui ne se touchent pas) sont concourants en un point qui est leur milieu commun.
- 5) Soit ABCDEFGH un cube et I, J, K, L quatre points définis par :

$$3 \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}, \quad \overrightarrow{HK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{HG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{LC} = 2 \cdot \overrightarrow{GL}$$



Montrez que $(IJKL) = \#$.

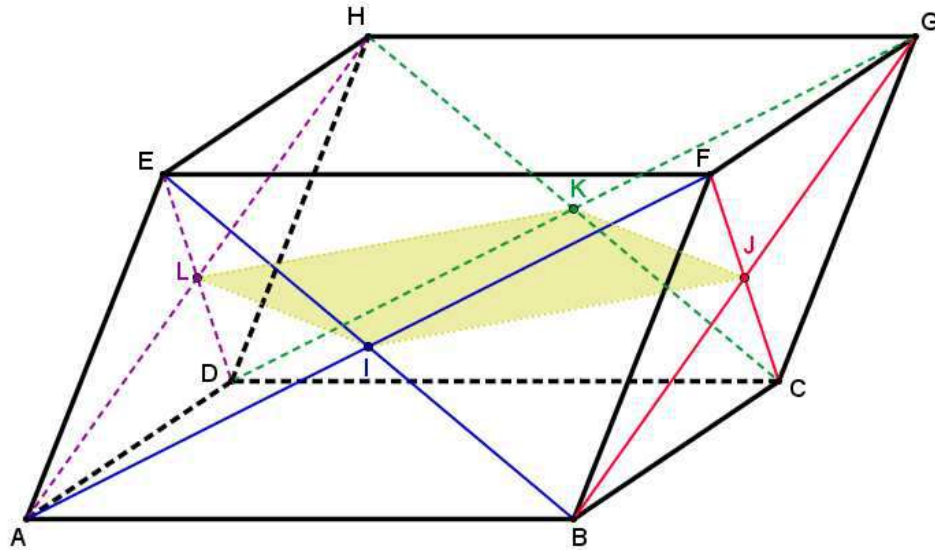
PARALLELEPIPEDE

Un **parallélépipède** est un solide à 8 sommets dont les 6 faces sont des #.

Si les faces sont des rectangles on dit que c'est un **parallélépipède rectangle** ou un **pavé**.

Si les faces sont des carrés c'est un **cube**.

- 6) Soit ABCDEFGH un parallélépipède et I, J, K, L les points d'intersection des diagonales de ABFE, BCGF, CDHG et ADHE respectivement. Montrez que $(IJKL) = \#$.



- 7) Soit ABCD un tétraèdre, et I, J les milieux de $[AB]$ et $[CD]$ respectivement. Montrez que $\overline{IJ}$ est une combinaison linéaire de $\overline{AD}$ et $\overline{CB}$.
- 8) Soit ABCD un tétraèdre et R, S, T, U les points définis par $\overline{AR} = \frac{1}{4}\overline{AC}$, $\overline{SD} = \frac{3}{4}\overline{AD}$, $4 \cdot \overline{BT} = \overline{BD}$ et $4 \cdot \overline{BU} = \overline{BC}$.
- a) Montrez que $(RSTU) = \#$.
- b) Soient I le point d'intersection de (CS) et de (RD) et J le point d'intersection de (DU) et de (CT). Montrez que $(IJ) \parallel (RST)$.
- 9) Soient d_1, d_2, d_3 trois droites parallèles et non coplanaires, A_1, B_1, C_1 trois points sur d_1 , A_2, B_2, C_2 trois points sur d_2 , A_3, B_3, C_3 trois points sur d_3 , F, G, H les centres de gravités des triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ respectivement.
- Démontrez que :
- a) $3\overline{FG} = \overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \overline{A_3B_3}$
- b) F, G, H sont alignés

- 10) Soient ABC un triangle quelconque et les points D, F, G définis par :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BA} \quad \overrightarrow{GC} = 5 \cdot \overrightarrow{GA}.$$

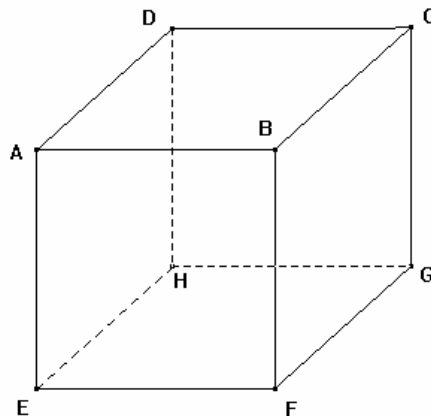
- a) Figure !
- b) Soit $E \in AC$ tel que $(DE) \parallel (BC)$, montrez que :
- $\exists a \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{CE} = a \cdot \overrightarrow{AC}$
- $\exists b \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{DE} = b \cdot \overrightarrow{CB}$
- c) Démontrez que $(GF) \parallel (DE)$.

- 11) Soit ABCD un quadrilatère quelconque (A, B, C, D coplanaires). On appelle **centre de gravité** de ABCD l'unique point G qui vérifie l'équation :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

- a) Construisez un quadrilatère quelconque ABCD et son centre de gravité G après avoir démontré que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
- b) Soient M le milieu de $[AB]$ et P celui de $[CD]$. Montrez que $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$ et déduisez-en une construction plus simple de G.
- c) Soient N le milieu de $[BC]$ et Q celui de $[AD]$. Étudiez la nature du quadrilatère MNPQ et sa relation avec le point G.

- 12) Soit ABCDEFGH un cube :

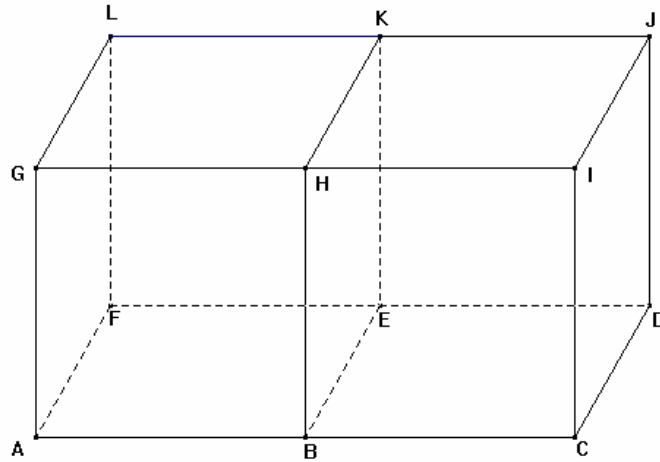


Déterminez les coordonnées des 8 sommets de ce cube

- a) dans le repère $(H, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HD})$.
- b) dans le repère $(H, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{GF})$.

- c) dans le repère $(B, \overrightarrow{HD}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{GF})$.
- d) dans le repère $(A, 2 \cdot \overrightarrow{AB}, \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}, 3 \cdot \overrightarrow{AE})$.

13) Soient ABEFGHKL et BCDEHIJK deux cubes dont les arêtes mesurent une unité :



Pour chacun des repères suivants, déterminez s'il s'agit d'un repère orthogonal ou orthonormé puis donnez les coordonnées des points A, B, C,, L dans ce repère :

- a) $(E, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DJ})$
- b) $(A, \overrightarrow{LJ}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{IC})$
- c) $(B, \overrightarrow{HB}, \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}, 4 \cdot \overrightarrow{AF})$
- 14) Soit un triangle ABC, $D \in BC$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BD} = \alpha \cdot \overrightarrow{BC}$. Exprimez les coordonnées de D dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en fonction de α .

Pour les exercices suivants, s'il n'est pas spécifié il s'agit toujours d'un repère quelconque

- 15) Dans un repère de l'espace on donne $A(-5;1;4)$, $B(2;3;-6)$ et $C(0;1;7)$.
- a) Trouvez D tel que ABCD = #.
- b) Trouvez E tel que AECB = #.
- 16) Examinez s'il existe des réels a et b tels que :

- a) les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2-a \\ 1 \\ 2a+3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a+4 \\ a+2 \\ a+2 \end{pmatrix}$ soient égaux.

- b)** les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a+2 \\ 2a-b \\ b+3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} b+3 \\ 3 \\ a+2 \end{pmatrix}$ soient égaux.
- c)** les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a+1 \\ 2a-4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5-a \\ 6-a \\ 2 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.
- d)** les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2a-1 \\ 4-3a \\ 7-a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3+a \\ 5-2a \\ a \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

17) Examinez si les vecteurs suivants sont colinéaires :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} -14 \\ 21 \\ 35 \end{pmatrix}$$

18) Dans un R.O.N de l'espace on donne $A(3;-2;4)$, $B(-4;0;-2)$, $C(3;-1;2)$ et $D(-3;5;-1)$. Calculez la norme des vecteurs suivants :

- a)** $\vec{w} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$
- b)** $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
- c)** $\vec{v} = -\overrightarrow{AC} + 2 \cdot \overrightarrow{AD}$

19) Soient $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-3)$, $C(0;3;-1)$.

- a)** Trouvez un point E différent de A et B qui appartient à la droite AB.
- b)** Montrez que A, B et C ne sont pas alignés.
- c)** Trouvez un point D différent de A, B et C qui appartient au plan ABC.

20) Soient les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

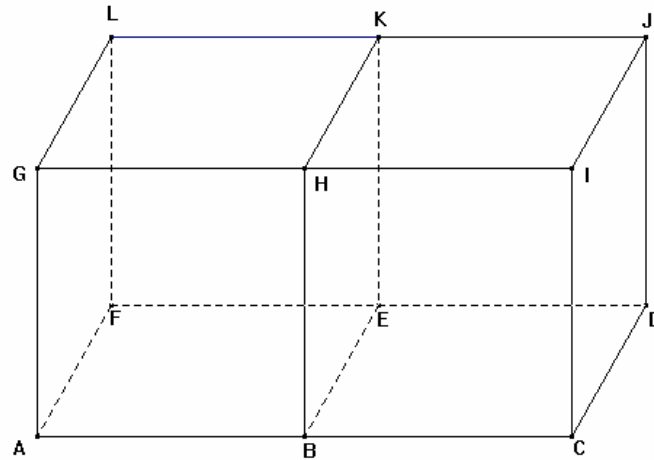
- a)** Analysez si $\vec{w}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.
- b)** Déterminez λ pour que $\vec{t}$ soit combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{w}$.

21) Reprenez les exercices 3) à 6) et résolvez-les en utilisant des repères appropriés.

22) Sachant que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$ calculez $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

23) Sachant que $\|\vec{u}\| = 5$, $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{6}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10\sqrt{3}$ calculez $\|\vec{v}\|$.

- 24) Dans un R.O.N. de l'espace on donne $A(-3;4;5)$, $B(0;7;-1)$ et $C(2;-1;0)$. Calculez les angles du triangle ABC.
- 25) Soient ABEFGHKL et BCDEHIJK deux cubes dont les arêtes ont une longueur de 2 unités ($\overline{AF} = \overline{AG} = \overline{AB} = \overline{BC} = 2$) :



Calculez :

a) $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{LC}$

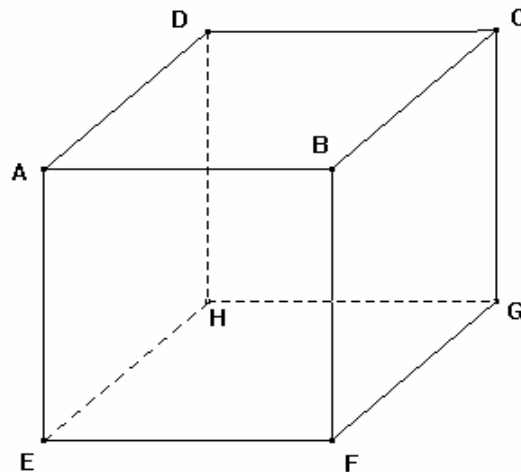
c) $\widehat{LAJ}$

e) $\widehat{HCK}$

b) $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{BL}$

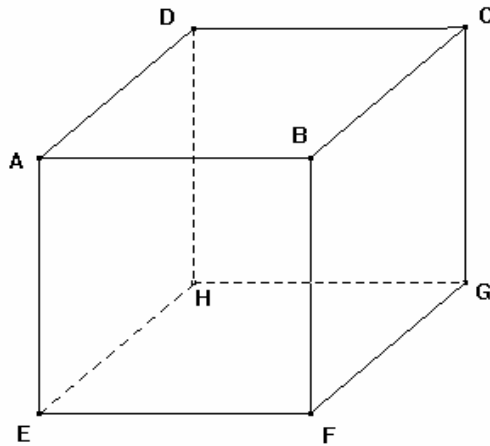
d) $\widehat{CBL}$

- 26) Soit ABCDEFGH un cube d'arête c :



- a) Montrez que $EC \perp HF$.
- b) Montrez que $EC \perp AF$.
- c) Calculez l'amplitude de l'angle $\widehat{AHC}$.
- d) Calculez l'amplitude de l'angle $\widehat{DFC}$.

- 27) Soit ABCD un carré et $M \in [BD]$.
- Démontrez que $\overline{AM}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{BM} \cdot \overline{DM}$.
 - Déduisez-en que $\overline{MB} \cdot \overline{MD} = \overline{AB}^2 - \overline{AM}^2$.
- 28) Montrez que dans un # la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.
- 29) Dans un R.O.N. de l'espace on donne $A(4; -3; 1)$ et $\vec{n}(2; 7; -5)$. Déterminez une équation du plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.
- 30) Dans un R.O.N. de l'espace on donne l'équation d'un plan $\pi: 3x - 4y + z - 2 = 0$.
- Est-ce que les points $A(-2, 5, -3)$, $B(-4, -3, 2)$ appartiennent à π ?
 - Quel est l'ensemble de tous les vecteurs normaux à ce plan ?
 - Trouvez deux points de π .
- 31) Soit le cube ABCDEFG :



Dans le R.O.N. $(A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$ trouvez une équation de chacun des plans suivants :

- ABC
- EFG
- ADE
- BCG
- ABF
- CDG
- ACG
- BCH
- EBG

32) Dans un R.O.N. de l'espace on donne $A(3; -2; 4)$ et $B(-1; 1; 4)$.

a) Déterminez l'équation de la sphère de centre A et de rayon 7.

b) Déterminez l'équation de la sphère de diamètre [AB].

c) Déterminez l'ensemble $J = \{M(x, y, z) / \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 2\}$.

33) Déterminez les ensembles suivants définis dans un R.O.N. de l'espace :

$$\mathcal{P} = \{M(x, y, z) / x^2 - 6x + y^2 + 14y + z^2 + 2z + 55 = 0\}$$

$$\mathcal{Q} = \{M(x, y, z) / 3x^2 - 6x + 3y^2 + 3z^2 + 30z - 30 = 0\}$$

$$\mathcal{R} = \left\{ M(x, y, z) / x^2 - x + y^2 + \frac{2}{3}y + z^2 - 2z - \frac{8}{9} = 0 \right\}$$

$$\mathcal{T} = \{M(x, y, z) / x^2 - 7x + y^2 + 8y + z^2 - z + 47 = 0\}$$

$$\mathcal{U} = \{M(x, y, z) / 4x^2 + 24x + 4y^2 - 4y + 4z^2 + 8z + 41 = 0\}$$

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$		
$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$	$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan(-x) = -\tan x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$	
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$		$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$		
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$		$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$		
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	
$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$	$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$		$\cos 3x = -3 \cos x + 4 \cos^3 x$
$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$		$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p + q)}{\cos p \cos q}$
$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$		
$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$		$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p - q)}{\cos p \cos q}$
$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$		
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$		
$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$		
$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$		

Formules de dérivation

A. Fonctions usuelles :

Remarques/hypothèses	$f(x)$	$\text{dom } f$	$f'(x)$	$\text{dom } f'$
$n \in \mathbb{Q}$	x^n	$\{x \in \mathbb{R} / x^n \text{ existe}\}^1$	nx^{n-1}	$\{x \in \mathbb{R} / x^{n-1} \text{ existe}\}$
<u>Cas particuliers:</u>	1	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
	x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
	$\cot x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
	$\text{Arcsin } x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
	$\text{Arccos } x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
	$\text{Arctan } x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
	e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	a^x	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
	$\ln x, \ln x $	$\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}^*$
$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\log_a x, \log_a x $	$\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}^*$

B. Opérations sur les fonctions :

Remarques/hypothèses	f	$\text{dom } f$	f'	f est dérivable sur ²
u, v fonctions $\mathcal{R}(v) = \{x / v(x) = 0\}$ $= \{\text{racines de } v\}$	$u + v$	$\text{dom } u \cap \text{dom } v$	$u' + v'$	$\text{dom } u' \cap \text{dom } v'$
	$u - v$		$u' - v'$	
	$u \cdot v$		$u'v + uv'$	
	$\frac{u}{v}$	$(\text{dom } u \cap \text{dom } v) \setminus \mathcal{R}(v)$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$(\text{dom } u' \cap \text{dom } v') \setminus \mathcal{R}(v)$
<u>Cas particuliers :</u> $k = \text{constante}$	$\frac{1}{v}$	$\text{dom } v \setminus \mathcal{R}(v)$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\text{dom } v' \setminus \mathcal{R}(v)$
	$k \cdot u$	$\text{dom } u$	$k \cdot u'$	$\text{dom } u'$
	$\frac{u}{k}$	$\text{dom } u$	$\frac{u'}{k}$	$\text{dom } u'$
	$\frac{k}{v}$	$\text{dom } v \setminus \mathcal{R}(v)$	$-\frac{kv'}{v^2}$	$\text{dom } v' \setminus \mathcal{R}(v)$
f, u fonctions	$f(u) = f \circ u$	$\text{dom } u \cap \{x / u(x) \in \text{dom } f\}$	$f'(u) \cdot u'$	$\text{dom } u' \cap \{x \in \text{dom } u / u(x) \in \text{dom } f'\}$
<u>Cas particuliers:</u> $n \in \mathbb{Q}$	u^n		$nu^{n-1}u'$	
	$\frac{1}{u}$		$-\frac{u'}{u^2}$	
	$\sqrt{u}$		$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	
	$\sin u$		$u' \cos u$	
	$\cos u$		$-u' \sin u$	
	$\tan u$		$\frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$	
	$\text{Arcsin } u$		$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	
	$\text{Arccos } u$		$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	
	$\text{Arctan } u$		$\frac{u'}{1+u^2}$	

Remarques / hyp.	f	$\text{dom } f$	f'	f est dérivable sur
<u>Suite cas particuliers:</u> $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	e^u		$u' e^u$	
	a^u		$u' a^u \ln a$	
	$\ln u, \ln u $		$\frac{u'}{u}$	
	$\log_a u, \log_a u $		$\frac{u'}{u \ln a}$	
u continue, dérivable, str. monotone sur son domaine	u^{-1} (réciproque)	$\text{dom } u^{-1} = \text{im } u$	$\frac{1}{u' \circ u^{-1}}$	$\{x \in \text{dom } u^{-1} / u'(u^{-1}(x)) \neq 0\}$

¹ On prolonge de façon naturelle les domaines lorsque les exposants sont rationnels : p.ex. pour $n = \frac{1}{3}$, on a $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$. Cette fonction peut être définie sur $\text{dom } f = \mathbb{R}$. La dérivée $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ est définie sur $\text{dom } f' = \mathbb{R}^*$.

² f est dérivable sur un ensemble I signifie seulement que $I \subset \text{dom } f'$ et non pas que $I = \text{dom } f'$.

Branches infinies

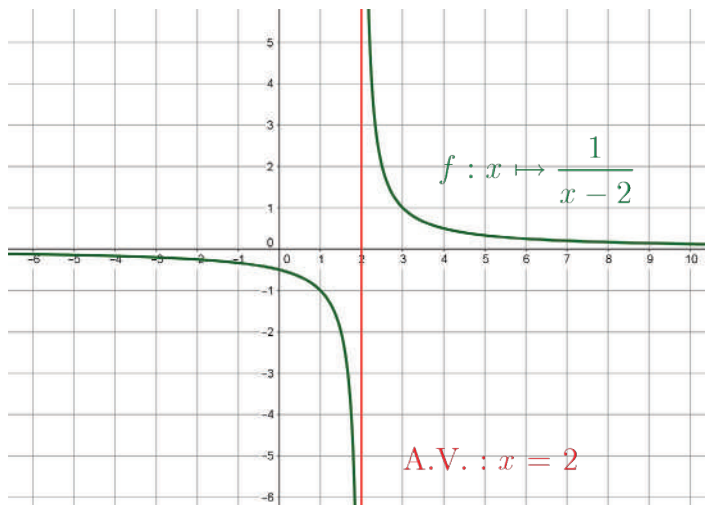
Une branche infinie du graphe d'une fonction est une partie de la courbe qui s'éloigne infiniment de l'origine. Nous étudions deux types de branches infinies :

- Quand la courbe se rapproche de plus en plus d'une droite lorsque l'abscisse ou l'ordonnée tend vers l'infini, cette droite est appelée une ***asymptote*** au graphe de la fonction.
- Quand la courbe semble *regarder* dans une direction d'une droite mais tout en s'en éloignant de cette droite, on dit que la courbe possède une ***branche parabolique*** dont l'axe est donné par la direction que *regarde* la courbe.

Dans toute la suite, a et b sont des ***nombres réels***.

a) ***Asymptote verticale*** :

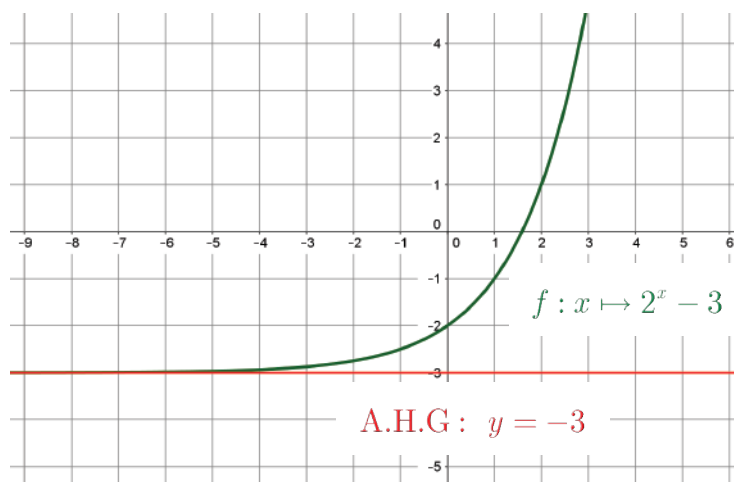
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \text{A.V. : } x = a$$



b) ***Asymptote horizontale*** :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Rightarrow \text{A.H. (à droite) : } y = b$$

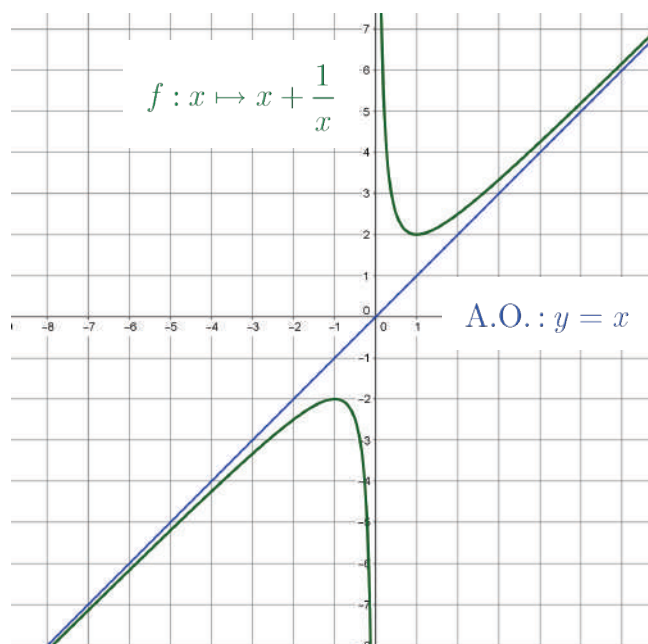
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \Rightarrow \text{A.H. (à gauche) : } y = b$$



Lorsque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, il y a **4 possibilités** (en pratique ...)

c1) **Asymptote oblique** :

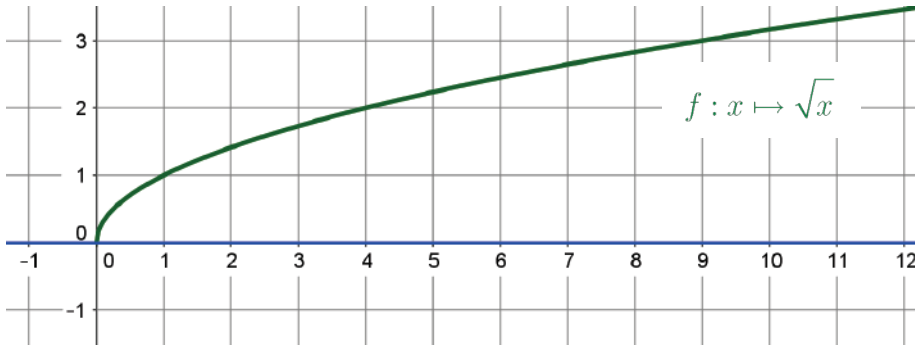
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \Rightarrow \text{A.O. : } y = ax + b$$



c2) *Branche parabolique de direction asymptotique (Ox)*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow \text{B.P. de direction (Ox)}$$

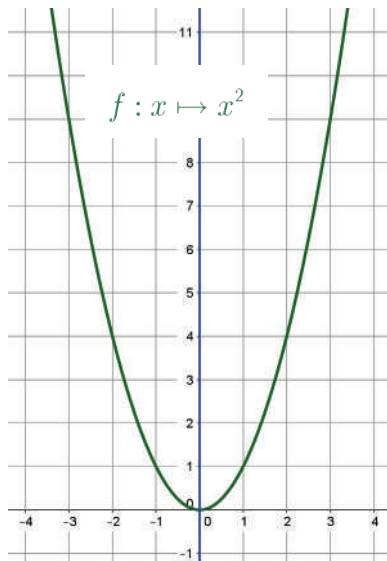
(La courbe regarde dans la direction de l'axe des abscisses mais elle s'en éloigne de plus en plus. Plus précisément : lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \mapsto \pm\infty$, mais $f(x)$ est négligeable, c.-à-d. petit par rapport à x .)



c3) *Branche parabolique de direction asymptotique (Oy)*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \Rightarrow \text{B.P. de direction (Oy)}$$

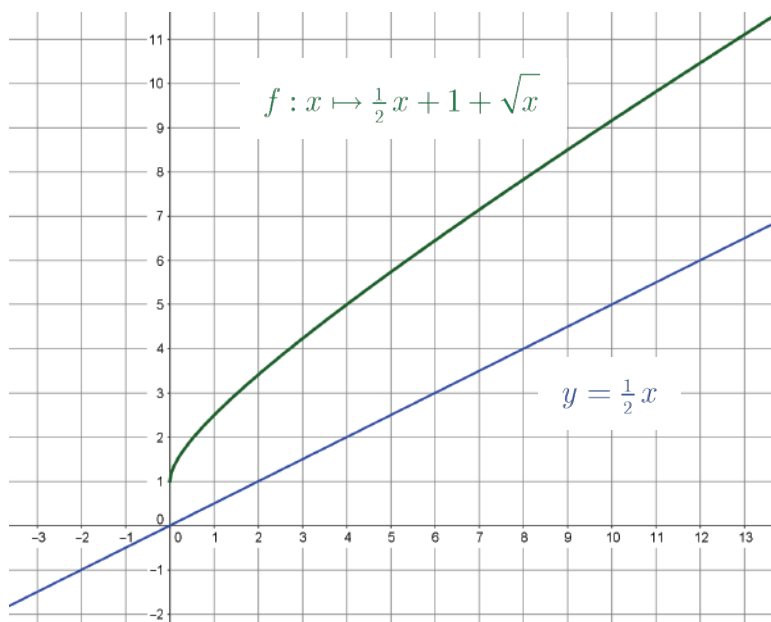
(La courbe regarde dans la direction de l'axe des ordonnées mais elle s'en éloigne de plus en plus. Plus précisément : lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \mapsto \pm\infty$, et $f(x)$ est grand par rapport à x .)



c4) *Branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty \Rightarrow \text{B.P. de D.A. } y = ax$$

(La courbe regarde dans la direction de la droite $y = ax$ mais elle s'en éloigne de plus en plus. Plus précisément : lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, le rapport $\frac{f(x)}{x} \mapsto a$, mais la différence $f(x) - ax \rightarrow \pm\infty$, c.-à-d. le graphe de f s'éloigne de plus en plus de la droite $y = ax$.)



Exercices

Etudier l'existence et la nature des branches infinies des graphes des fonctions suivantes :

- 1) $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$
- 2) $f : x \mapsto 2x\sqrt{x-3}$
- 3) $f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x}{x+1}$
- 4) $f : x \mapsto \sqrt{x-1} - 2x + 1$
- 5) $f : x \mapsto \frac{x^2 - x\sqrt{x-1}}{x+1}$

3.3 Logarithmes quelconques

Nous avons vu que la fonction $\exp_a$, où $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, définit une bijection strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Définition. La fonction $\log_a$, appelée fonction *logarithme de base a*, où $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, est la bijection réciproque de $\exp_a$.

Cas particuliers :

- Si $a = 10$ alors $\log_{10}$ est appelé *logarithme décimal* et noté $\log$. $\log$ est donc la bijection réciproque de $\exp_{10}$. Le logarithme décimal est utilisé en chimie pour exprimer le pH (voir manuel p. 47).
- Si $a = e$ (nombre d'Euler), alors $\log_e$ est appelé *logarithme népérien* et noté $\ln$. $\ln$ est donc la bijection réciproque de $\exp$.

Conséquences immédiates :

- (1) $\text{dom } \log_a = \mathbb{R}_+^*$ et $\text{im } \log_a = \mathbb{R}$ (car $\text{im } \exp_a = \mathbb{R}_+^*$ et $\text{dom } \exp_a = \mathbb{R}$).
- (2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}_+^*) \quad a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$.

Exemples :

- $\log_2 256 = 8$ car $2^8 = 256$;
- $\log_3 81 = 4$ car $3^4 = 81$;
- $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ car $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$;
- $\log 0,001 = -3$ car $10^{-3} = 0,001$;
- $\ln 5 \simeq 1,6094$ car $e^{1,6094} \simeq 5$;

On peut donc retenir que $\log_a x$ est « *l'exposant qu'il faut donner à a pour obtenir x* ».

- (3) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \log_a(a^x) = x$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad a^{\log_a(x)} = x$.

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\exp_a} & a^x \\
 \parallel & & \parallel \\
 \log_a y & \xleftarrow{\log_a} & y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\log_a} & \log_a x \\
 \parallel & & \parallel \\
 a^y & \xleftarrow{\exp_a} & y
 \end{array}$$

Exemples :

- | | |
|---|---|
| • $\log_6 6^4 = 4$ | $6^{\log_6 4} = 4$ |
| • $\log_2 2^{-9} = -9$ | $2^{\log_2 9} = 9 \quad (-9 \notin \text{dom } \log_2)$ |
| • $\ln e^3 = 3$ | $e^{\ln 3} = 3$ |
| • $\log 10^6 = 6$ | $10^{\log 6} = 6$ |
| • $\log_{0,5} 8 = \log_{0,5} 0,5^{-3} = -3$ | $0,5^{\log_{0,5} 8} = 8$ |

(4) $\log_a$ est **strictement monotone** et a **même sens de variation** que $\exp_a$. Plus précisément :

- si $a > 1$ alors $\log_a$ est str. croissante ;
- si $0 < a < 1$ alors $\log_a$ est str. décroissante.

(5) $\forall x, y > 0$:

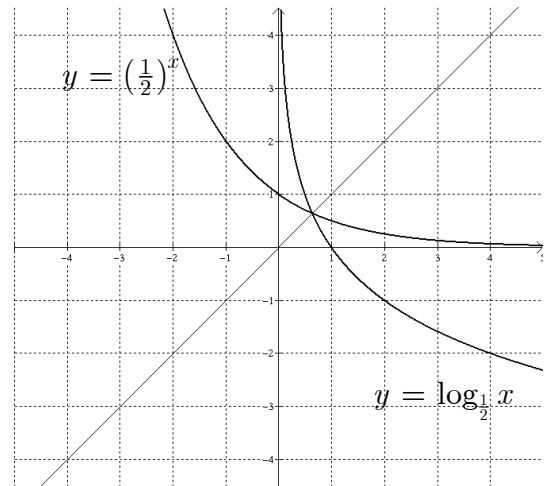
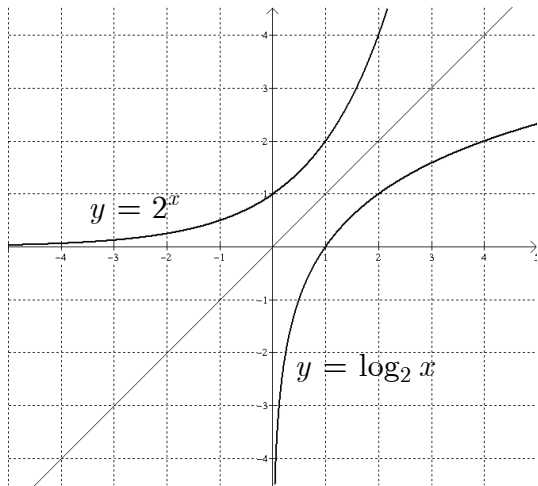
- $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$
- $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y$, lorsque $a > 1$
- $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y$, lorsque $0 < a < 1$

C'est une conséquence immédiate de la stricte croissance respectivement décroissance de $\log_a$.

Exemples : $\forall x > 0$:

- $\log_2 x < 3 \Leftrightarrow \log_2 x < \log_2 2^3 \Leftrightarrow x < 8$ $S =]0, 8[$;
- $\log x \geq -2 \Leftrightarrow \log x \geq \log 10^{-2} \Leftrightarrow x \geq 10^{-2}$ $S = [10^{-2}, +\infty[$;
- $\ln x < 2 \Leftrightarrow x < e^2$; $S =]0, e^2[$
- $\log_{\frac{1}{3}} x > -5 \Leftrightarrow x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} \Leftrightarrow x < 243$; $S =]0, 243[$

(6) Les graphes de $\log_a$ et $\exp_a$ sont **symétriques** par rapport à la 1^{re} bissectrice dans un repère orthonormé.



(7) De la symétrie des deux graphes de $\log_a$ et $\exp_a$ on déduit aussi que :

- si $a > 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$;
- si $0 < a < 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$;
- $\mathcal{G}_{\log_a}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

(8) Comme $a^0 = 1$ et $a^1 = a$, on a : $\log_a 1 = 0$ et $\log_a a = 1$. En d'autres termes, le graphe de $\log_a$ comprend les points $(1, 0)$ et $(a, 1)$.

Nous passons maintenant en revue les propriétés moins évidentes des fonctions logarithmes de base quelconque.

1) Propriété fondamentale de $\log_a$:

$$(\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}), (\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*)$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

Remarque. Cette propriété est fondamentale parce qu'elle « *caractérise* » les fonctions logarithmes. En d'autres termes, il n'y a pas d'autre fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ qui transforme la multiplication en l'addition. Nous admettons ce fait.

Démonstration. La formule résulte du fait que $\log_a$ est la bijection réciproque de $\exp_a$ et de la **propriété fondamentale** de $\exp_a$. En effet, soit x et y deux réels strictement positifs et $x' = \log_a x$ et $y' = \log_a y$. Or :

$$\begin{cases} x' = \log_a x \Leftrightarrow a^{x'} = x \\ y' = \log_a y \Leftrightarrow a^{y'} = y \end{cases}$$

Comme $a^{x'+y'} = a^{x'} \cdot a^{y'} = xy$, on en déduit que :

$$\log_a(xy) = x' + y' = \log_a x + \log_a y.$$

2) Autres propriétés :

$$(\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}), (\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*)$$

a) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$;

b) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;

c) $\log_a x^r = r \log_a x$, avec $r \in \mathbb{R}$;

Démonstration.

a) Dans la propriété fondamentale, on remplace y par $\frac{1}{x}$:

$$\log_a\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \log_a x + \log_a \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \log_a 1 = \log_a x + \log_a \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \log_a x + \log_a \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

b) On utilise la propriété fondamentale et la propriété précédente :

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_a x + \log_a \frac{1}{y} = \log_a x - \log_a y$$

c) Si $r \neq 0$:

$$\begin{aligned}\log_a x^r = y &\Leftrightarrow x^r = a^y \\ &\Leftrightarrow x = a^{\frac{y}{r}} \\ &\Leftrightarrow \frac{y}{r} = \log_a x \\ &\Leftrightarrow y = r \log_a x\end{aligned}$$

Si $r = 0$, la formule est trivialement vérifiée :

$$\log_a x^0 = \log_a 1 = 0 = 0 \cdot \log_a x$$

3) Dérivées de $\exp_a$ et $\log_a$

Dérivée de $\exp_a$: $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (a^x)' = a^x \ln a \quad \text{et} \quad (e^x)' = e^x.$

Démonstration. On a déjà établi le cas particulier $(e^x)' = e^x$. De plus on sait que la dérivée de $\exp_a$ est donnée par la formule :

$$(a^x)' = k a^x, \text{ où } k = \exp_a'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Pour déterminer la valeur de k nous nous ramenons au cas particulier $a = e$:

$$(a^x)' = \left((e^{\ln a})^x \right)' = (e^{x \cdot \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

Donc $k = \ln a$ et la formule est démontrée.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la dérivée de $\log_a$:

Dérivée de $\log_a$: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad \log_a'(x) = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{et} \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$

Démonstration. Calculons d'abord la dérivée de $\ln$. On sait que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad \exp(\ln x) = x$$

En dérivant les deux membres on obtient :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad \exp(\ln x) \cdot \ln' x = 1 \Leftrightarrow x \cdot \ln' x = 1 \Leftrightarrow \ln' x = \frac{1}{x}$$

Par conséquent :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad (\log_a)'(x) = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Détermination de la primitive d'une fraction rationnelle à l'aide de la V200

Rappelons qu'une **fraction rationnelle** est une fonction du type :

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}.$$

où le numérateur n et le dénominateur d sont deux **fonctions polynômes**.

Pour déterminer une primitive d'une telle fonction f on procède par étapes :

1. Si $\deg n \geq \deg d$, on commence par effectuer la **division euclidienne** de n par d . On obtient :

$$\begin{aligned} n(x) &= d(x) \cdot q(x) + r(x) \\ \Leftrightarrow f(x) &= q(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \quad \text{avec } \deg r < \deg d \end{aligned}$$

Le polynôme q s'intègre immédiatement. Il reste donc à étudier le cas où le degré du numérateur $r(x)$ est $<$ degré du dénominateur $d(x)$.

2. La fraction rationnelle $r(x)/d(x)$ doit être décomposée en une **somme d'« éléments simples »** qui dépendent de la **factorisation** de $d(x)$. D'après le théorème fondamental de l'algèbre, tout polynôme se factorise en facteurs du 1^{er} et/ou du 2^e degré. Plus précisément :

$$d(x) = c(x - \alpha_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_m)^{k_m} \cdot (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + \beta_p x + \gamma_p)^{l_p}$$

où c est une constante, les α_i sont les **racines réelles** de $d(x)$ de **multiplicités** respectives k_i alors que les **facteurs quadratiques** $x^2 + \beta x + \gamma$ n'admettent pas de racine réelle (sinon on pourrait les décomposer encore en facteurs du 1^{er} degré).

a) A chaque facteur $(x - \alpha)^k$ correspondent les **éléments simples du 1^{er} type** :

$$\frac{a_1}{x - \alpha} + \frac{a_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{a_k}{(x - \alpha)^k}.$$

b) A chaque facteur $(x^2 + \beta x + \gamma)^l$ correspondent les **éléments simples du 2^e type** :

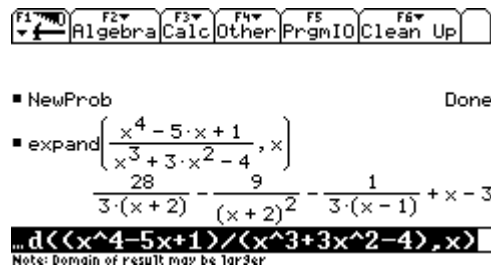
$$\frac{b_1 x + c_1}{x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \dots + \frac{b_l x + c_l}{(x^2 + \beta x + \gamma)^l}.$$

3. Les constantes inconnues a_i , b_i et c_i peuvent aussi être calculées par la **méthode des coefficients** indéterminés. Dans les exemples qui suivent cette étape est effectuée à l'aide d'une calculatrice TI V200, dotée d'un puissant système de calcul formel (CAS).

Exemples :

a) Soit $f(x) = \frac{x^4 - 5x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4} = \frac{n(x)}{d(x)}$.

La commande **expand(f(x),x)** permet de décomposer $f(x)$ en **éléments simples** :



Donc :

$$f(x) = x - 3 - \frac{1}{3(x-1)} + \frac{28}{3(x+2)} - \frac{9}{(x+2)^2}.$$

Le terme $x - 3$ est le quotient de la division euclidienne de $n(x)$ par $d(x)$. Les différents éléments simples, tous du 1^{er} type ici, proviennent de la factorisation de $d(x)$:

$$d(x) = (x-1)(x+2)^2.$$

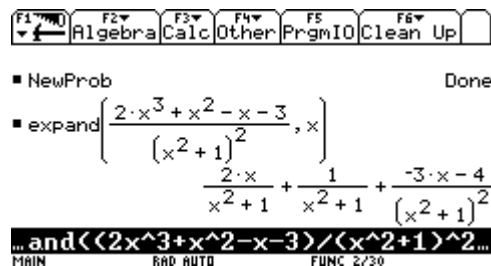
Par conséquent :

$$\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{28}{3} \ln|x+2| + \frac{9}{x+2} + k,$$

formule valable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant ni 1, ni -2.

b) Etudions maintenant un exemple où interviennent des éléments simples du 2^e type. Soit

$$g(x) = \frac{2x^3 + x^2 - x - 3}{(x^2 + 1)^2}.$$



D'où :

$$g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{3x}{(x^2 + 1)^2} - \frac{4}{(x^2 + 1)^2}.$$

Ces éléments simples proviennent évidemment du fait que $x^2 + 1$ n'admet pas de racine réelle. Les trois premiers termes s'intègrent immédiatement :

- $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) + k_1$
- $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \text{Arctan } x + k_2$
- $-\int \frac{3x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{3}{2(x^2 + 1)} + k_3$

Le dernier terme, et plus généralement tout élément simple de la forme $c/(x^2 + \beta x + \gamma)^\nu$ (avec $\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$), s'intègre à l'aide d'une **formule de récurrence** incontournable :

Proposition : Soit $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Alors :

$$\begin{cases} I_1 = \text{Arctan } x + k \\ I_{n+1} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Démonstration : On intègre par parties dans I_n :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{(x^2 + 1)^n} & v(x) &= x \\ u'(x) &= -\frac{2nx}{(x^2 + 1)^{n+1}} & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } I_n &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \int \frac{2nx^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx \\ &\Leftrightarrow I_n = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \int \frac{2n(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx - \int \frac{2n}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx \\ &\Leftrightarrow I_n = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1} \\ &\Leftrightarrow 2nI_{n+1} = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + (2n-1)I_n \\ &\Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n \quad (\text{C.Q.F.D.}) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\bullet \int \frac{-4}{(x^2 + 1)^2} dx = -4I_2 = -4 \left(\frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} I_1 \right) = \frac{-2x}{x^2 + 1} - 2 \text{Arctan } x + k_4$$

Finalement :

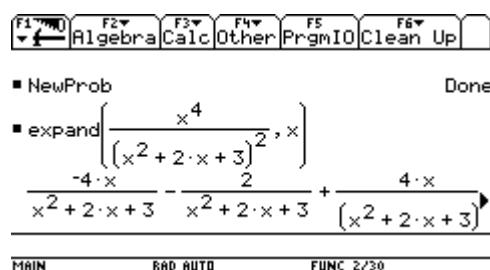
$$\begin{aligned}\int g(x) dx &= \ln(x^2 + 1) + \operatorname{Arctan} x + \frac{3}{2(x^2 + 1)} + \frac{-2x}{x^2 + 1} - 2 \operatorname{Arctan} x + k \\ &= \ln(x^2 + 1) - \operatorname{Arctan} x - \frac{4x - 3}{2(x^2 + 1)} + k\end{aligned}$$

c) Que faire lorsque le dénominateur admet des facteurs quadratiques plus compliqués ? Nous allons étudier un tel exemple maintenant. Soit

$$h(x) = \frac{x^4}{(x^2 + 2x + 3)^2}$$

La V200 donne la décomposition en éléments simples :

$$h(x) = 1 - \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 3} + \frac{4x - 3}{(x^2 + 2x + 3)^2}$$



Le premier terme est évident :

- $\int 1 dx = x + k_1$

Le second terme s'intègre en 2 étapes :

- $$\begin{aligned}- \int \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 3} dx &= - \underbrace{\int \frac{4x + 4}{x^2 + 2x + 3} dx}_{\substack{\text{on fait apparaître un multiple} \\ \text{de la dérivée du dénominateur} \\ \text{au numérateur } (\rightarrow k \cdot u' / u)}} + \int \frac{2}{x^2 + 2x + 3} dx \\ &= -2 \ln(x^2 + 2x + 3) + \int \frac{2}{x^2 + 2x + 3} dx\end{aligned}$$

Le trinôme $x^2 + 2x + 3$ ne se factorise pas puisque $\Delta = 4 - 12 < 0$. Il faut alors l'écrire sous forme canonique, c'est-à-dire en l'occurrence comme **somme de deux carrés** :

$$x^2 + 2x + 3 = (x + 2x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2.$$

En faisant le changement de variables

$$x + 1 = \sqrt{2}t \Rightarrow dx = \sqrt{2}dt,$$

dans la deuxième intégrale, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\bullet \quad 2 \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3} &= 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 2} \stackrel{x+1=\sqrt{2}t}{=} 2\sqrt{2} \int \frac{dt}{2t^2 + 2} \\
&= \sqrt{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \sqrt{2} \operatorname{Arctan} t + k_2 \\
&= \sqrt{2} \operatorname{Arctan} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + k_2
\end{aligned}$$

Pour intégrer le troisième terme, on utilise les mêmes idées avec en plus la formule de récurrence entre I_2 et I_1 :

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \int \frac{4x-3}{(x^2+2x+3)^2} dx &= \int \frac{4x+4}{(x^2+2x+3)^2} dx - \int \frac{7}{(x^2+2x+3)^2} dx \\
&= \frac{-2}{x^2+2x+3} - 7 \int \frac{1}{((x+1)^2+2)^2} dx \\
&= \frac{-2}{x^2+2x+3} - 7\sqrt{2} \int \frac{1}{(2t^2+2)^2} dt \quad (x+1=\sqrt{2}t) \\
&= \frac{-2}{x^2+2x+3} - \frac{7\sqrt{2}}{4} I_2 \\
&= \frac{-2}{x^2+2x+3} - \frac{7\sqrt{2}}{4} \left(\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} I_1 \right) \\
&= \frac{-2}{x^2+2x+3} - \frac{7\sqrt{2}}{4} \left(\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} t \right) + k_3 \\
&= \frac{-2}{x^2+2x+3} - \frac{7\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\frac{x+1}{\sqrt{2}}}{x^2+2x+3} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + k_3 \\
&= \frac{-2}{x^2+2x+3} - \frac{7(x+1)}{4(x^2+2x+3)} - \frac{7\sqrt{2}}{8} \operatorname{Arctan} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + k_3
\end{aligned}$$

En additionnant les différents résultats, on obtient finalement :

$$\int h(x) dx = x - \frac{7x+15}{4(x^2+2x+3)} - 2 \ln(x^2+2x+3) + \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{Arctan} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

d) Un dernier exemple avec au dénominateur un facteur quadratique le plus général possible (et un numérateur du 1^{er} degré afin de ne pas obtenir trop de termes ...) :

$$k(x) = \frac{x+1}{(2x^2-x+3)^3}$$

On vérifie aisément que le trinôme $p(x) = 2x^2 - x + 3$ n'a pas de racine. On utilisera sa forme canonique :

$$\begin{aligned}
p(x) &= 2\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right) \\
&= 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{x}{4} + \frac{1}{16} + \frac{23}{16}\right) \\
&= 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right]
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variables :

$$x - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{23}}{4}t \Leftrightarrow t = \frac{4x-1}{\sqrt{23}}, \quad dx = \frac{\sqrt{23}}{4}dt$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\int k(x) dx &= \int \frac{x+1}{(2x^2-x+3)^3} dx \\
&= \int \frac{x+1}{8\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right]^3} dx \\
&= \frac{\sqrt{23}}{32} \int \frac{\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}t}{\left(\frac{23}{16}t^2 + \frac{23}{16}\right)^3} dt \\
&= \frac{32\sqrt{23}}{23^3} \int \frac{5 + \sqrt{23}t}{(t^2 + 1)^3} dt \\
&= \frac{32\sqrt{23}}{23^3} \int \frac{5}{(t^2 + 1)^3} dt + \frac{16}{23^2} \int \frac{2t}{(t^2 + 1)^3} dt \\
&= \frac{160\sqrt{23}}{23^3} I_3 - \frac{8}{23^2(t^2 + 1)^2}
\end{aligned}$$

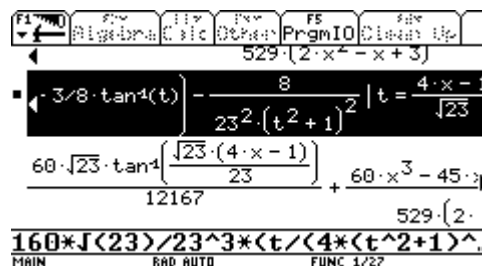
Or,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{t}{4(t^2 + 1)^2} + \frac{3}{4} I_2 \\
&= \frac{t}{4(t^2 + 1)^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{t}{2(t^2 + 1)} + \frac{1}{2} I_1 \right) \\
&= \frac{t}{4(t^2 + 1)^2} + \frac{3t}{8(t^2 + 1)} + \frac{3}{8} \operatorname{Arctan} t + k_1
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int k(x) dx = \frac{160\sqrt{23}}{23^3} \left(\frac{t}{4(t^2 + 1)^2} + \frac{3t}{8(t^2 + 1)} + \frac{3}{8} \operatorname{Arctan} t \right) - \frac{8}{23^2(t^2 + 1)^2} + k$$

Pour repasser à la variable x , on peut utiliser la commande « tel que » de la V200 :



On obtient finalement :

$$\int k(x) dx = \frac{60\sqrt{23}}{12167} \operatorname{Arctan}\left(\frac{4x-1}{\sqrt{23}}\right) + \frac{60x^3 - 45x^2 + 155x - 103}{529(2x^2 - x + 3)^2} + k$$

Détermination de la primitive d'une fonction trigonométrique à l'aide de la V200

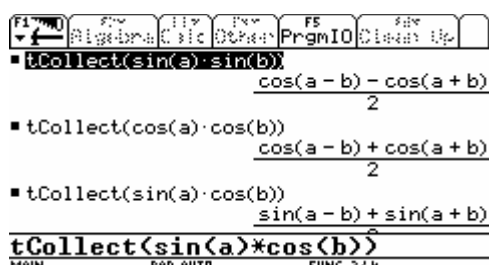
1. Formules élémentaires

Dans les formules suivantes, $u = u(x)$ est une fonction de x .

- $\int \sin x \, dx = -\cos x + k$
 $\int u' \sin u \, dx = -\cos u + k$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + k$
 $\int u' \cos u \, dx = \sin u + k$
- $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + k$, sur un intervalle ne contenant aucune racine de $\cos$, c.-à-d. aucun réel de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 $\int u' \tan u \, dx = -\ln|\cos u| + k$, sur un intervalle ne contenant aucune racine de $\cos u$.
- $\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + k$, sur un intervalle ne contenant aucune racine de $\sin$, c.-à-d. aucun réel de la forme $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
 $\int u' \cot u \, dx = \ln|\sin u| + k$, sur un intervalle ne contenant aucune racine de $\sin u$.

2. Formules de linéarisation : primitives de polynômes trigonométriques

Les formules de linéarisation permettent de transformer un **produit** de fonctions trigonométriques ($\sin$ ou $\cos$) en une **somme** de termes simples. Elles sont difficiles à mémoriser, mais peuvent être retrouvées à l'aide de la V200 via la commande **tcollect** :



Donc :

$$\begin{aligned} \sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)) \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b)) \end{aligned}$$

Le programme actuel prévoit que toute linéarisation de fonctions trigonométriques peut être effectué à l'aide de la V200 !

Exemples :

$$(1) \quad \int \sin 3x \cos 4x \, dx \underset{V200}{=} \frac{1}{2} \int (\sin 7x - \sin x) \, dx \\ = -\frac{1}{14} \cos 7x + \frac{1}{2} \cos x + k$$

$$(2) \quad \int \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \, dx \\ \underset{V200}{=} \frac{1}{2} \int \left(\sin\left(6x + \frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(4x + \frac{5\pi}{12}\right) \right) \, dx \\ = -\frac{1}{12} \cos\left(6x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{8} \cos\left(4x + \frac{5\pi}{12}\right) + k$$

$$(3) \quad \int \cos^4 x \, dx \underset{V200}{=} \frac{1}{8} \int (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3) \, dx \\ = \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x + k$$

3. Cas particulier : $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, où $m, n \in \mathbb{N}$

Lorsque m et n sont tous les 2 pairs, on doit encore linéariser l'expression à l'aide de la commande **tcollect** (voir exemple 3 ci-dessus : $m = 0$, $n = 4$).

Lorsque l'un au moins des deux exposants est **impair**, on peut aussi calculer la primitive **par substitution**. Plus précisément :

- Si m est impair, on fait le changement de variables : $y = \cos x$.
- Si n est impair, on fait le changement de variables : $y = \sin x$.

Exemples :

$$(1) \quad \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \sin x \sin^2 x \cos^2 x \, dx \\ = \int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \, dx \\ = -\int (1 - y^2) y^2 \, dy \\ = -\int (y^2 - y^4) \, dy \\ = -\frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 + k \\ = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + k$$

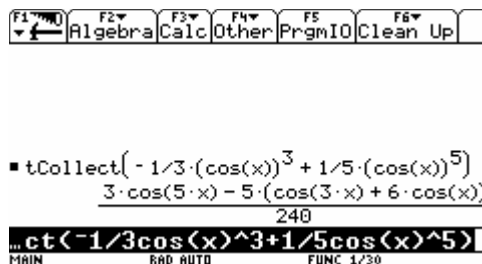
Changement de variables :

$$\begin{cases} y = \cos x \\ dy = -\sin x \, dx \end{cases}$$

Bien sûr, on peut aussi linéariser d'abord :

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx \underset{V200}{=} -\frac{1}{16} \int (\sin 5x - \sin 3x - 2 \sin x) \, dx \\ = \frac{1}{80} \cos 5x - \frac{1}{48} \cos 3x - \frac{1}{8} \cos x + k$$

Pour comparer les résultats obtenus par les deux méthodes, on linéarise le premier avec la V200 :



Remarque : Avec l'introduction de la V200, la méthode de substitution exposée ci-dessus perd en fait son intérêt ...

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int \cos^5 x \, dx &= \int \cos^4 x \cos x \, dx \\
 &= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx \\
 &= \int (1 - y^2)^2 \, dy \\
 &= \int (1 - 2y^2 + y^4) \, dy \\
 &= y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + k \\
 &= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + k
 \end{aligned}$$

Changement de variables :

$$\begin{cases} y = \sin x \\ dy = \cos x \, dx \end{cases}$$

4. Primitives de fractions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

Soit $R(\sin x, \cos x)$ une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$. On obtient une primitive de cette fonction via le changement de variables :

$$\begin{aligned} t &= \tan \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \operatorname{Arctan} t \\ dx &= \frac{2}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

et les deux formules :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

En effet :

$$\begin{cases} \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Ainsi on se ramène au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle :

$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} \, dt$$

Exemples : Soit $f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}$.

Le domaine de continuité de f étant $\mathbb{R} \setminus \{k \cdot 2\pi / k \in \mathbb{R}\}$, on peut rechercher une primitive de f sur tout intervalle de la forme $]k \cdot 2\pi, (k+1) \cdot 2\pi[, k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} dx \\
 &= \int \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\
 &= \int \frac{(1+t)^2}{t^2(1+t^2)} dt \\
 &\stackrel{v200}{=} \int \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{2t}{1+t^2} dt \\
 &= 2 \ln t - \frac{1}{t} - \ln(1+t^2) + k \\
 &= \ln\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) - \frac{1}{t} + k \\
 &= \ln\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) - \cot\left(\frac{x}{2}\right) + k
 \end{aligned}$$

Notons que la C.E. pour cette expression est $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ et donc que la primitive est bien définie sur un intervalle de la forme $]k \cdot 2\pi, (k+1) \cdot 2\pi[, k \in \mathbb{Z}$. Il faut toujours comparer les domaines de l'intégrand et de la primitive comme le montre l'exemple suivant :

Soit $g(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$.

Cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}$, il existe une primitive G sur $\mathbb{R}$. La substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ donne :

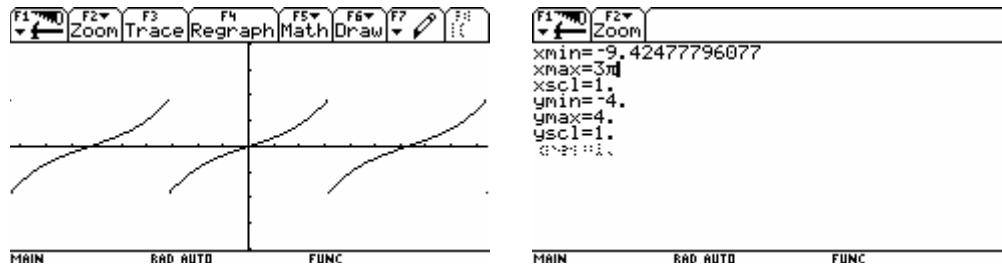
$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{2 + \cos x} dx &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} dt \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + k \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + k \\
 &= \int \frac{2}{3 + t^2} dt
 \end{aligned}$$

En choisissant $k = 0$, on obtient :

$$G_0(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Or, cette fonction est seulement définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi + n \cdot 2\pi / n \in \mathbb{Z}\}$. Ceci n'est pas surprenant, étant donné que la substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ n'est continue et strictement monotone que si l'on prend x dans un intervalle de départ de la forme $I_n =]-\pi + n \cdot 2\pi, \pi + n \cdot 2\pi[$, $n \in \mathbb{Z}$.

Voici le graphe de G_0 :



G_0 présente des sauts d'amplitude $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ en chaque réel de la forme $\pi + n \cdot 2\pi$. En effet, elle est périodique de période 2π et :

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} G_0(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\pi^+} G_0(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Pour obtenir une primitive de g , continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, il faut :

- a) déterminer des constantes d'intégration qui diffèrent d'un intervalle I_n à l'autre et qui sont telles que les différents morceaux du graphe s'enchaînent continûment: $G_n(x) = G_0(x) + k_n$ sur I_n . Le choix le plus naturel est bien sûr :

$$k_n = \frac{2n\pi}{\sqrt{3}}, n \in \mathbb{Z} ;$$

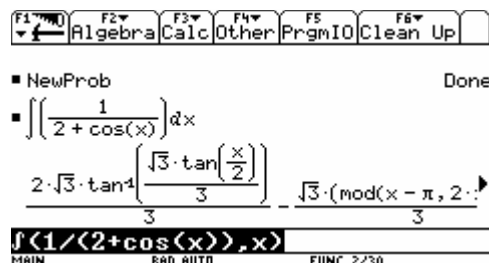
- b) « recoller » les différents morceaux :

$$G(x) = \begin{cases} \dots & \dots \\ G_{-2}(x) = G_0(x) - \frac{4\pi}{\sqrt{3}} & \text{si } x \in]-5\pi, -3\pi[\\ G_{-1}(x) = G_0(x) - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{si } x \in]-3\pi, -\pi[\\ G_0(x) & \text{si } x \in]-\pi, \pi[\\ G_1(x) = G_0(x) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{si } x \in]\pi, 3\pi[\\ G_2(x) = G_0(x) + \frac{4\pi}{\sqrt{3}} & \text{si } x \in]3\pi, 5\pi[\\ \dots & \dots \end{cases}$$

- c) prolonger G par continuité en tout réel de la forme $\pi + n \cdot 2\pi$.

La V200 procède de cette façon lorsqu'on lui demande de calculer une primitive de g . Elle donne le résultat suivant :

$$\tilde{G}(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{x - (x - \pi) \bmod 2\pi}{\sqrt{3}}$$



Pour le comprendre, il faut commencer par étendre la division euclidienne à des dividendes et diviseurs réels :

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}_+^*)(\exists ! q \in \mathbb{Z})(\exists ! r \in \mathbb{R}) / a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b.$$

En effet, il suffit de choisir $q = \operatorname{Ent}\left(\frac{a}{b}\right)$ et $r = a - bq$. Dans cette division euclidienne, on note encore $r = a \bmod b$. Donc :

$$a \bmod b = a - b \operatorname{Ent}\left(\frac{a}{b}\right).$$

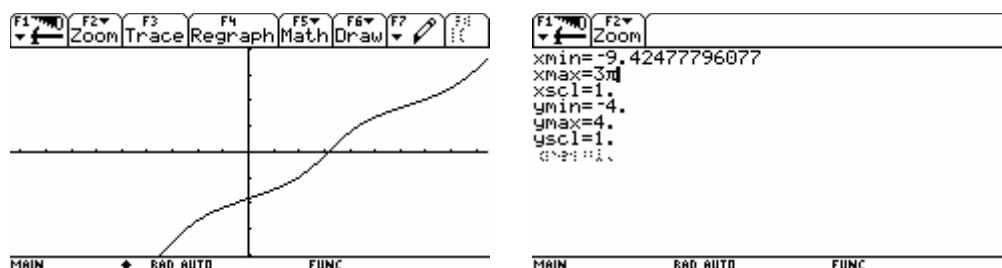
La fonction mod est utilisée par la V200 pour exprimer la « constante d'intégration variable » :

$$\begin{aligned} \frac{x - (x - \pi) \bmod 2\pi}{\sqrt{3}} &= \frac{x - (x - \pi) + 2\pi \operatorname{Ent}\left(\frac{x - \pi}{2\pi}\right)}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\pi + 2\pi \operatorname{Ent}\left(\frac{x - \pi}{2\pi}\right)}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Il est maintenant facile de voir que la « constante d'intégration variable » choisie par la V200 diffère de la nôtre de $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. En d'autres termes, si $x \in I_n$, alors :

$$\frac{x - (x - \pi) \bmod 2\pi}{\sqrt{3}} = k_n - \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Voici finalement le graphe de $\tilde{G}$, obtenue avec la V200 :



Lorsque $R(-u, v) = -R(u, v)$, c.-à-d. R est **impaire en** u , on peut aussi faire la substitution $t = \cos x$. De même, lorsque $R(u, -v) = -R(u, v)$, c.-à-d. R est **impaire en** v , on peut faire la substitution $t = \sin x$.

Exemple :

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x (1 + \cos x)} dx &= - \int \frac{dt}{t^2 (1 + t)} \\ &\stackrel{V200}{=} - \int \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} dt \\ &= -\ln(1+t) + \ln|t| + \frac{1}{t} + k \\ &= \ln \frac{|t|}{1+t} + \frac{1}{t} + k \\ &= \ln \frac{|\cos x|}{1 + \cos x} + \frac{1}{\cos x} + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(u, v) &= \frac{u}{v^2 (1 + v)} ; \\ R(-u, v) &= -R(u, v) \\ \begin{cases} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x dx \end{cases} \end{aligned}$$

Cette expression est valable sur un intervalle ne contenant aucune racine de $\cos x$, ni de $1 + \cos x$ (mêmes C.E. pour l'intégrand et la primitive trouvée).

Lorsque $R(-u, -v) = R(u, v)$, c.-à-d. R est **paire en** u **et en** v , on peut aussi utiliser la substitution :

$$\begin{cases} t = \tan x \Leftrightarrow x = \text{Arctan } t \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \end{cases}$$

et les deux formules : $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$; $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$.

Exemple : Soit a et b deux réels > 0 .

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \\ &= \int \frac{1}{a^2/(1+t^2) + b^2 t^2/(1+t^2)} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{\frac{b}{a} dt}{1 + \left(\frac{bt}{a}\right)^2} \\ &= \frac{1}{ab} \text{Arctan}\left(\frac{bt}{a}\right) + k \\ &= \frac{1}{ab} \text{Arctan}\left(\frac{b}{a} \tan x\right) + k \end{aligned}$$

On rencontre ici le même problème que pour la substitution $t = \tan \frac{x}{2}$: l'intégrand et la primitive ont des domaines différents. Pour déterminer l'expression d'une primitive continue sur $\mathbb{R}$, il faut donc à nouveau choisir une constante d'intégration variant d'un intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ à l'autre. Les détails sont laissés au lecteur ... ou à la V200 !

LES NOMBRES COMPLEXES

Table des matières

COURS

1)	L'invention du "nombre" i	p 2
2)	Construction des nombres complexes.....	p 4
3)	Racines carrées complexes.....	p 10
4)	Equations du second degré.....	p 13
5)	Forme trigonométrique d'un nombre complexe.....	p 16
6)	Racines n -ièmes complexes d'un nombre complexe.....	p 22
7)	Polynômes à coefficients complexes.....	p 24

EXERCICES.....	p 24
-----------------------	-------------

COURS

1) L'invention du "nombre" i

Un des premiers problèmes traités par l'**algèbre**, science inventée par les Arabes au IX^e siècle (« al-jabr » signifie « calcul » en arabe), fut la résolution des équations du premier, deuxième, troisième et quatrième degré. Ce n'est qu'au XVI^e siècle que les mathématiciens « algébristes » italiens *Del Ferro* (1465-1526), *Tartaglia* (1499-1557) et son grand rival *Cardano* (1501-1575) et enfin *Bombelli* (1526-1573), ont enfin réussi à résoudre les équations du 3^e et du 4^e degré. Or ce ne sont pas tant les formules qu'ils ont trouvées qui se sont révélées importantes par la suite, mais une certaine méthode qu'ils ont développée pour y arriver et qui a mené aux nombres qu'on appelle aujourd'hui « **nombres complexes** ».

Au début du seizième siècle **Del Ferro** a démontré que l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0 \quad (\text{où } p, q \in \mathbb{R})$$

a pour solution le nombre

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}}}$$

à condition bien sûr que $4p^3 + 27q^2 \geq 0$!

Cette formule n'est donc pas applicable à une équation comme par exemple

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \quad (*)$$

$$\text{car } \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}} = \sqrt{\frac{4(-15)^3 + 27(-4)^2}{108}} = \sqrt{-121} \text{ n'existe pas !}$$

C'est là que **Bombelli** a eu l'idée insolite d'imaginer qu'il existe un « nombre » i tel que $i^2 = -1$ et avec lequel on puisse faire les mêmes calculs qu'avec les nombres réels ordinaires comme p.ex. $i + 2$, $3i - 4$, $\frac{9}{i}$, etc...(on pourrait dire aussi qu'il a eu l'audace de faire *comme si* une telle « chose » existait...).

On aurait alors $(11i)^2 = 121i^2 = 121(-1) = -121$, donc $\sqrt{-121} = 11 \cdot i$ et par conséquent $x = \sqrt[3]{2+11 \cdot i} + \sqrt[3]{2-11 \cdot i}$.

Or $(2+i)^3 = 8 + 3 \cdot 4 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 = 8 + 12 \cdot i - 6 - i = 2 + 11 \cdot i$ (car $i^3 = i^2 i = -i$)

donc $\sqrt[3]{2+11 \cdot i} = 2+i$ et on montre de même que $(2-i)^3 = 2-11 \cdot i$, donc $\sqrt[3]{2-11 \cdot i} = 2-i$. Finalement on obtient $x = 2+i+2-i = 4$ et on vérifie facilement que le réel 4 est bien une solution de l'équation (*) !

Ainsi *Bombelli* avait trouvé une solution bien réelle de l'équation (*) en utilisant un « nombre » qui ne pouvait pas exister mais qui avait le bon goût de disparaître à la fin des calculs.... Au 17^e siècle *Descartes* (1596-1650) appela ce nombre irréel et inexistant « **nombre imaginaire** » et au 18^e siècle *Euler* (1707-1783) imposa la notation « **i** » que *Bombelli* n'avait pas encore utilisée, en l'appelant aussi « nombre

impossible ». Ces dénominations (irréel, imaginaire, impossible...) témoignent du profond malaise que les mathématiciens du 16^e au 18^e siècles ont ressenti envers ce nombre *i* (et ses composés $i+2$, $3i-4$, etc appelés **nombres complexes**) qui malgré sa

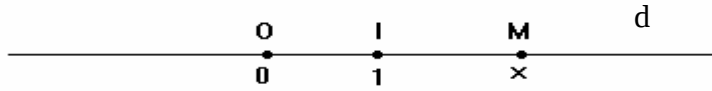


définition incertaine et bizarre s'est révélé être un instrument très efficace pour la résolution de nombreux problèmes algébriques. Ce n'est qu'au cours du 19^e siècle que des mathématiciens comme **Gauss** (1777-1855), **Cauchy** (1789-1857) et **Hamilton** (1805-1865) ont enfin réussi à donner une construction rigoureuse de ces nombres et à leur enlever leur caractère magique et mystérieux. Ils constituent aujourd'hui encore une des notions les plus importantes des mathématiques modernes.

2) Construction des nombres complexes

a) Idée fondamentale

L'ensemble $\mathbb{R}$ peut être interprété géométriquement comme l'ensemble des abscisses de tous les points d'une droite d munie d'un repère $(O, \overrightarrow{OI})$:



$$\forall M \in d \quad \exists ! x \in \mathbb{R} \quad M(x) \quad \text{càd} \quad \overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OI}$$

Comme $i \notin \mathbb{R}$ le point repéré par i , à supposer qu'il existe, ne peut pas se trouver sur d mais doit être cherché ailleurs dans le plan ! Or dans le plan muni d'un R.O.N. chaque point M est repéré par un *couple de deux nombres réels* a et b : $M(a,b)$. C'est en se basant sur ces considérations que *Hamilton* a eu l'idée de définir l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, comme l'ensemble des couples (a,b) de deux nombres réels :

$$\mathbb{C} = \{(a,b) / a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$$

Pour lui un « nombre » complexe est donc un couple de deux réels !

b) Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

Il a ensuite défini une addition notée $\oplus$ et une multiplication notée $\otimes$ en posant :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall (a,b), (a',b') \in \mathbb{C} \quad & (a,b) \oplus (a',b') = (a+a', b+b') \\ & (a,b) \otimes (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b) \end{aligned}}$$

p.ex. $(3,-7) \oplus (-11,54) = (-8,47)$

$$(4,-5) \otimes (-3,2) = (-12+10, 8+15) = (-2,23)$$

On vérifie facilement que les opérations ainsi définies ont les propriétés suivantes :

- **Addition**

➤ Commutativité : $(a,b) \oplus (a',b') = (a',b') \oplus (a,b)$

➤ Associativité :

$$[(a, b) \oplus (a', b')] \oplus (a'', b'') = (a, b) \oplus [(a', b') \oplus (a'', b'')]$$

➤ $(a, b) \oplus (0, 0) = (a, b)$, donc $(0, 0)$ est l'élément neutre pour l'addition

➤ $(a, b) \oplus (-a, -b) = (0, 0)$, donc $(-a, -b)$ est l'opposé de (a, b)

➤ Conclusion : $(\mathbb{C}, \oplus)$ est un **groupe commutatif**

➤ Notation : $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} / \{(0, 0)\} = \{(a, b) / a \in \mathbb{R}^* \text{ ou } b \in \mathbb{R}^*\}$

- **Multiplication**

➤ Commutativité : $(a, b) \otimes (a', b') = (a', b') \otimes (a, b)$

➤ Associativité :

$$[(a, b) \otimes (a', b')] \otimes (a'', b'') = (a, b) \otimes [(a', b') \otimes (a'', b'')]$$

➤ $(a, b) \otimes (1, 0) = (a, b)$, donc $(1, 0)$ est l'élément neutre pour $\otimes$

➤ si $(a, b) \in \mathbb{C}^*$ $(a, b) \otimes \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)$,

donc $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ est l'inverse de (a, b)

➤ $(\mathbb{C}^*, \otimes)$ est un groupe commutatif

- **Distributivité** de la multiplication pour l'addition :

$$(a, b) \otimes [(a', b') \oplus (a'', b'')] = (a, b) \otimes (a', b') \oplus (a, b) \otimes (a'', b'')$$

- **Conclusion :**

L'ensemble $\mathbb{C}$ muni de l'addition $\oplus$ et de la multiplication $\otimes$ est un **corps commutatif**, exactement comme $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

c) Relations entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Géométriquement, on peut identifier $\mathbb{R}$ au sous-ensemble $A = \{(a, 0) / a \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{C}$. Mais alors on aura sur $\mathbb{R}$ deux additions et deux multiplications : les opérations usuelles (opérations « réelles ») et celles induites par $\mathbb{C}$ (opérations « complexes ») ! Or en analysant le comportement des opérations « complexes » sur A on voit que :

- $(0,0) \in A$ et $(1,0) \in A$
- $(a,0) \oplus (a',0) = (a+a',0) \in A$
- $(a,0) \otimes (a',0) = (aa' - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot a') = (aa',0) \in A$
- si $a \neq 0$ l'inverse de $(a,0) = \left(\frac{a}{a^2+0^2}, \frac{-0}{a^2+0^2} \right) = \left(\frac{1}{a}, 0 \right) \in A$

En d'autres termes les opérations « complexes » et « réelles » se comportent exactement de la même manière sur A !

Conclusion :

On peut considérer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et que $\oplus$ et $\otimes$ sont des *extensions* à $\mathbb{C}$ de l'addition et de la multiplication usuelles dans $\mathbb{R}$. Ainsi on peut *identifier* $(a,0)$ au nombre réel a : $(a,0) \cong a$, $(1,0) \cong 1$, $(0,0) \cong 0$, etc.

d) Le nombre i existe !

Calculons $(0,1)^2 = (0,1) \otimes (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) \cong -1$. Donc en notant $i \cong (0,1)$ on a bien $i^2 = -1$, ce qui résout définitivement le problème de l'existence d'un tel nombre !

Le nombre complexe $(0,1)$ a donc exactement la propriété imaginée par Bombelli pour le nombre i ! De plus :

- $\forall b \in \mathbb{R} \quad (b,0) \otimes (0,1) = (0 - 0, b + 0) = (0,b)$, donc $(0,b) \cong b \otimes i$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{C} \quad (a,b) = (a,0) \oplus (0,b) \cong a \oplus b \otimes i$

e) Notations définitives

Les opérations $\oplus$ et $\otimes$ dans $\mathbb{C}$ ayant les mêmes propriétés que l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ qu'on peut par ailleurs considérer comme une partie de $\mathbb{C}$, on peut sans risquer aucune ambiguïté prendre les mêmes notations pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Ainsi par exemple au lieu de $a \oplus b \otimes i$ on écrira simplement : **$a+bi$** .

Avec ces nouvelles notations on peut donc écrire :

- $(a, b) = a + bi$
- $\mathbb{C} = \{a + bi / a, b \in \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$
- opposé de $(a + bi) = -(a + bi) = -a - bi$
- $(a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = aa' - bb' + (ab' + a'b)i$
- $a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$ en particulier : $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

Remarque : $\frac{i}{2}$ signifie $\frac{1}{2} \cdot i$ et $\frac{5+3i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cdot i$

Définitions

Pour tout nombre complexe $z = a + bi$:

- le réel a est appelé **partie réelle** de z et on note $a = \Re(z)$
- le réel b est appelé **partie imaginaire** de z et on note $b = \Im(z)$
- si $a = \Re(z) = 0$, c'à-d si $z = bi$, on dit que z est un **imaginaire pur**.

L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Remarque :

Bien que ces nombres n'aient aujourd'hui plus rien « d'imaginaire », le mot est resté, sans doute par esprit de tradition. On observe le même phénomène à propos des nombres « irrationnels » (p.ex. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, π , ...) qui n'ont plus rien d'irrationnel depuis qu'on a trouvé, également au 19^e siècle, une construction tout à fait rationnelle de ces nombres, mais c'est une autre histoire !

Exercices 1, 2, 3

f) Conjugué d'un complexe

Définition

Pour tout nombre complexe $z = a + bi$, on appelle **conjugué** de z le nombre :

$$\boxed{\bar{z} = a - bi}$$

Propriétés du conjugué :

- $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \quad \overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z'} \text{ et } \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$

$$\triangleright \forall z = a + bi \in \mathbb{C} \quad z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\triangleright \forall z \in \mathbb{C} \quad z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$\triangleright \forall z \in \mathbb{C} \quad z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

Exercices 4, 5

g) Division dans $\mathbb{C}$

Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}^*$ et $z' = a' + b'i \in \mathbb{C}$, alors :

$$\bullet \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

on retrouve ici la formule de l'inverse de $a + bi$ vue en b !

$$\bullet \quad \frac{z'}{z} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{(a' + b'i)(a - bi)}{a^2 + b^2} = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}i$$

Remarques :

Ce n'est pas la peine d'apprendre ces formules par cœur, il suffit de retenir qu'on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur, ce qui donne un dénominateur réel d'après la propriété $\bar{z}z = a^2 + b^2$!

Propriétés

$$\triangleright \forall z \in \mathbb{C}^* \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\triangleright \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall z' \in \mathbb{C}^* \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

Exercices 6, 7, 8

h) Interprétation géométrique

Dans le plan muni d'un R.O.N., appelé **plan de Gauss**, on peut représenter un nombre complexe $z = a + bi$ par le point $M(a, b)$. On dit que M est le **point image d'affixe z** et on note **M(z)**.

On voit facilement que :

- si $z \in \mathbb{R}$ alors M(z) est sur l'axe des abscisses appelé **axe réel**.

- si $z \in i\mathbb{R}$ alors $M(z)$ est sur l'axe des ordonnées appelé **axe imaginaire**.
- $M(z)$ et $M(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.
- $M(z)$ et $M(-z)$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

Exercices 9, 10, 11, 12

i) Module d'un complexe

- Définition

Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$ et $M(z)$ le point d'affixe z dans le plan de Gauss. On appelle **module de z** , et on note $|z|$, la distance de M à l'origine O du repère :

$$|z| = \overline{OM} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

- Exemples

$$|i| = \sqrt{0^2 + 1} = 1$$

$$|3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$|1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

- Remarques :

➤ $\forall a \in \mathbb{R} \quad |a| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ (valeur absolue)

Sur $\mathbb{R}$ il n'y a donc *aucune différence entre module et valeur absolue*, ce qui explique la similitude des notations !

➤ $\forall b \in \mathbb{R} \quad |bi| = \sqrt{0^2 + b^2} = \sqrt{b^2} = |b|$ (valeur absolue)

p.ex. $|5i| = 5$; $|-7i| = 7$

- Propriétés du module :

Ces propriétés sont exactement analogues (sauf la dernière) aux propriétés de la valeur absolue dans $\mathbb{R}$

- $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \in \mathbb{R}_+$
- $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall z' \in \mathbb{C}^* \quad \frac{|z|}{|z'|} = \left| \frac{z}{z'} \right|$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\bar{z}| = |z|$

Exercice 13

j) Relation d'ordre sur $\mathbb{C}$?

- Sur l'ensemble des nombres réels la relation « ..≤.. » est une relation d'ordre total : $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leq b \quad \text{ou} \quad b \leq a$
Elle permet de comparer deux réels quelconques et de plus elle est « compatible » avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ (p.ex. $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$, si $c > 0$ on a : $a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$, etc). Cette relation permet aussi de distinguer les réels positifs (ceux qui sont plus grands que 0) des réels négatifs (ceux qui sont plus petits que 0).
- Une telle relation d'ordre **n'existe pas** sur $\mathbb{C}$! On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes (p.ex. écrire « $1+i \leq 3-i$ » N'A PAS DE SENS !!!), ni parler de nombres complexes « positifs » ou « négatifs » puisqu'on ne peut pas les comparer à 0 ! En particulier il n'y a pas d'inéquations dans $\mathbb{C}$!

3) Racines carrées complexes

- Définition

Soient $z, u \in \mathbb{C}$, on dit que u est une **racine carrée complexe** (on notera : **rcc**)

de z ssi $z = u^2$

- Exemples

$(3i)^2 = 9i^2 = -9$ et $(-3i)^2 = 9i^2 = -9$ donc $3i$ et $-3i$ sont deux rcc de -9 .

$(2-i)^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$ et $(i-2)^2 = \dots = 3 - 4i$, donc $2-i$ et $i-2$ sont deux rcc de $3-4i$

$5^2 = (-5)^2 = 25$, donc 5 et -5 sont deux rcc de 25

Attention : 25 n'a qu'une seule racine carrée réelle : $\sqrt{25} = 5$!

- Calcul des rcc de $z = a + bi$

Supposons que $u = x + yi$ est une rcc de $z = a + bi$, alors:

$$(x + yi)^2 = a + bi \Leftrightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \end{cases}$$

$$\text{et } |u|^2 = |z| \Leftrightarrow |u|^2 = |z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3),$$

d'où :

$$\begin{aligned} (3)+(1): \quad 2x^2 &= \sqrt{a^2 + b^2} + a \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1 \\ (3)-(1): \quad 2y^2 &= \sqrt{a^2 + b^2} - a \\ \Leftrightarrow y^2 &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \\ \Leftrightarrow y &= \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1 \end{aligned}$$

Or d'après (2) xy et b ont le même signe, donc il faut distinguer 2 cas :

1^{er} cas : $b \geq 0$

Alors x et y ont même signe puisque $xy \geq 0$, donc u est égal à l'un des deux

$$\text{nombres suivants : } u_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \cdot i \text{ et } u_2 = -u_1.$$

2^e cas : $b < 0$

Alors x et y ont des signes opposés puisque $xy < 0$, donc u est égal à l'un des

$$\text{deux nombres suivants : } u_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \cdot i \text{ et } u_2 = -u_1.$$

Réciproquement on vérifie facilement (exercice !) que les nombres u_1 et u_2 trouvés dans les deux cas sont bien des rcc de $z = a + bi$.

Comme par ailleurs $\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$, $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$ on peut formuler le résultat obtenu de la manière suivante :

Théorème

Tout nombre complexe z a exactement deux rcc (racines carrées complexes) opposées données par les formules suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} u_1 = \sqrt{\frac{|z| + \Re(z)}{2}} + \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{|z| - \Re(z)}{2}} \cdot i \quad \text{avec } \varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{si } \Im(z) \geq 0 \\ -1 & \text{si } \Im(z) < 0 \end{cases} \\ u_2 = -u_1 \end{array}}$$

- **Exemples**

➤ $|3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$, $\Re(3 - 4i) = 3$ et $\Im(3 - 4i) < 0$ donc les rcc de

$$3 - 4i \text{ sont : } u_1 = \sqrt{\frac{5 + 3}{2}} - \sqrt{\frac{5 - 3}{2}} \cdot i = 2 - i \text{ et } u_2 = -2 + i$$

➤ $|1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, $\Re(1 + i) = 1$ et $\Im(1 + i) > 0$ donc les rcc de $1 + i$

$$\text{sont } u_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \cdot i \text{ et } u_2 = -u_1$$

➤ $|-3i| = \sqrt{0+9} = 3$, $\Re(-3i) = 0$ et $\Im(-3i) < 0$ donc les rcc de $-3i$ sont

$$u_1 = \sqrt{\frac{3+0}{2}} - \sqrt{\frac{3-0}{2}} \cdot i = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot i \text{ et } u_2 = -u_1$$

• Attention :

- Il ne faut pas confondre racine carrée réelle et racine carrée complexe !
 p.ex. 4 a une racine carrée réelle : $\sqrt{4} = 2$, mais deux rcc : 2 et -2 ,
 alors que -4 n'a aucune racine réelle, mais deux rcc : $2i$ et $-2i$!
- Le symbole $\sqrt{}$ n'est jamais utilisé pour noter une rcc ! En effet quel sens donner p.ex à $\sqrt{-4}$? $2i$ ou $-2i$?

Exercice 14

4) Equations du second degré

a) Résolution générale d'une équation du second degré

Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré à *coefficients complexes* ($a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$) et cherchons toutes les *solutions complexes* de cette équation.

$$az^2 + bz + c = 0 \quad | :a \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad (*)$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ et soit δ une rcc de Δ , alors :

$$(*) \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b + \delta}{2a}$$

Théorème

Toute équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ (où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$) a deux racines complexes données par :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

où δ est l'une des rcc du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

Remarques :

- Si $\Delta = \delta = 0$, alors les deux racines sont confondues et on dit que l'équation a une **racine double** $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$.
- On a les mêmes formules bien connues que dans $\mathbb{R}$ sauf qu'on n'écrit plus $\sqrt{\Delta}$ et qu'on n'a plus besoin de distinguer suivant le signe de Δ !
- En général on utilise plutôt la *lettre* z pour désigner une inconnue complexe, mais rien n'interdit d'utiliser x , y ou toute autre lettre !
- De la démonstration du théorème il découle immédiatement la **formule de factorisation** suivante :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

En d'autres termes un polynôme du second degré à coefficients complexes est toujours factorisable sous forme de produit de deux polynômes du premier degré. C'est un cas particulier du **théorème de D'Alembert** (1717-1783) (théorème fondamental de l'algèbre !) qui affirme que tout polynôme de degré n (n entier positif quelconque !) à coefficients complexes est factorisable sous forme de produit de n polynômes du premier degré.

Exercices 15, 16

b) Exemples d'équations se ramenant à des équations du second degré

Exemple1 : par factorisation

$$10z^3 - 4z^2 - 15iz + 6i = 0 \quad (\text{équation du } 3^{\text{e}} \text{ degré})$$

$$\Leftrightarrow 2z^2(5z - 2) - 3i(5z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (5z - 2)(2z^2 - 3i) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5z - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 2z^2 - 3i = 0, \text{ etc.}$$

$$\text{on trouve } S = \left\{ \frac{2}{5}; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i; -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right\}$$

Exemple2 : par changement d'inconnue

$$z^4 + (2i - 2)z^2 + 3 - 6i = 0 \quad (\text{équation « bicarrée »})$$

En posant $t = z^2$ on obtient l'équation du second degré d'inconnue t :

$$t^2 + (2i - 2)t + 3 - 6i = 0 \quad \text{qui a pour solutions } t' = 2 + i \text{ et } t'' = -3i.$$

D'où : $z^2 = 2 + i$ ou $z^2 = -3i$, et en cherchant les rcc de ces deux complexes

on trouve :

$$S = \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot i; -\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot i; \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \cdot i; -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \cdot i \right\}$$

Exemple3 : par réduction au même dénominateur

$$\frac{6}{z+1} - \frac{10}{3-z} = 4i-1 \mid (z+1)(3-z) \neq 0 \quad \text{C.E. } z \neq -1 \text{ et } z \neq 3$$

$$\Leftrightarrow 6(3-z) - 10(z+1) = (4i-1)(3-z)(z+1)$$

$$\Leftrightarrow (4i-1)z^2 - (14+8i)z + 11-12i = 0, \text{ etc.} \quad S = \left\{ 1-2 \cdot i; \frac{1}{17} - \frac{30}{17} \cdot i \right\}$$

Remarque :

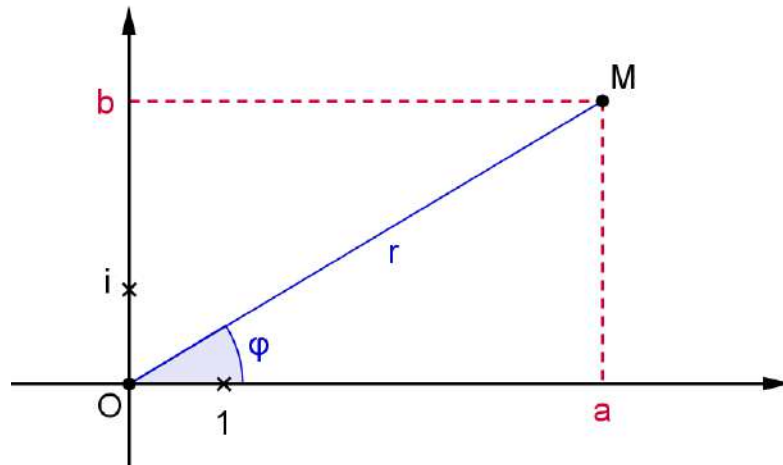
A titre d'exercice vous pourrez faire les calculs détaillés de ces exemples !

Exercice 17

5) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

a) Coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires

- Soit M un point du plan muni d'un R.O.N. $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, alors :
 - les réels uniques a et b tels que $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OI} + b\overrightarrow{OJ}$ sont appelés **coordonnées cartésiennes** de M. On note $M(a, b)$.
 - le point M peut également être repéré par la donnée de la distance $r = \overline{OM}$ et une mesure φ de l'angle $\widehat{xOM}$: ce sont les **coordonnées polaires** de M. On note $M(r, \varphi)$.



❶ *Attention* : Pour un point donné M les coordonnées a, b et r sont déterminées de façon unique alors que φ n'est déterminé qu'à un multiple entier de 2π près !

- Relations entre coordonnées cartésiennes et polaires

Si M appartient au premier quadrant (voir figure !) le triangle $\Delta(OAM)$

où A(a,0) est rectangle en A, donc : $\boxed{\cos \varphi = \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}}$

Nous admettrons que cette formule reste valable pour les autres quadrants.

b) Forme trigonométrique et forme algébrique

- Soient $z = a + bi$, M le point d'affixe z et (r, φ) les coordonnées polaires de M. Alors :

➤ $r = |z|$ (module de z)

➤ φ est appelé **argument** de z et on note : $\boxed{\arg(z) = \varphi}$

➤ $\boxed{z = a + bi = r \cos \varphi + r \sin \varphi \cdot i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$

➤ Notations :

le nombre $\cos \varphi + i \sin \varphi$ sera noté $\text{cis} \varphi$ ou $e^{i\varphi}$, où cis est une abréviation pour « cos + i sin » et $e^{i\varphi}$ est l'exponentielle complexe)

- Exemples :

$$\text{cis} 0 = e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$$

$$\text{cis} \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i$$

$$\text{cis} \pi = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1$$

$$\operatorname{cis} \frac{\pi}{4} = e^{i \frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

• Définitions :

➤ $z = r \operatorname{cis} \varphi = r e^{i\varphi}$ est appelée : **forme trigonométrique** de z

➤ $z = a + bi$ est appelée : **forme algébrique** de z

• Exemples :

$$z = 6 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} = 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 3 + 3\sqrt{3} \cdot i$$

$$z = 5 e^{i \frac{\pi}{6}} = 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} i$$

c) Propriétés

• $\boxed{\forall \varphi \in \mathbb{R} \quad |\operatorname{cis} \varphi| = |e^{i\varphi}| = 1}$

en effet $|\operatorname{cis} \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \sqrt{1} = 1$

• $\boxed{\operatorname{cis} \varphi = \operatorname{cis} \varphi' \Leftrightarrow \varphi' = \varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})}$

en effet $\operatorname{cis} \varphi = \operatorname{cis} \varphi' \Leftrightarrow (\cos \varphi = \cos \varphi' \text{ et } \sin \varphi = \sin \varphi')$,

or $\cos \varphi = \cos \varphi' \Leftrightarrow (\varphi = \varphi' + 2k\pi \text{ ou } \varphi = -\varphi' + 2k\pi)$

et $\sin \varphi = \sin \varphi' \Leftrightarrow (\varphi = \varphi' + 2k\pi \text{ ou } \varphi = \pi - \varphi' + 2k\pi)$,

donc $\cos \varphi = \cos \varphi' \text{ et } \sin \varphi = \sin \varphi' \Leftrightarrow \varphi = \varphi' + 2k\pi$.

• $\boxed{\forall \varphi \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \operatorname{cis}(\varphi + 2\pi) = \operatorname{cis} \varphi & (1) \\ \operatorname{cis}(\varphi + \pi) = -\operatorname{cis} \varphi & (2) \\ \operatorname{cis}(-\varphi) = \overline{\operatorname{cis} \varphi} & (3) \end{cases}}$

la vérification de ces formules découle immédiatement des formules analogues pour sinus et cosinus !

- $$\forall \varphi, \varphi' \in \mathbb{R} \quad \text{cis}(\varphi + \varphi') = \text{cis}\varphi \cdot \text{cis}\varphi' \quad \text{et} \quad \text{cis}(\varphi - \varphi') = \frac{\text{cis}\varphi}{\text{cis}\varphi'}$$

Remarque :

en notation exponentielle : $e^{i(\varphi+\varphi')} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi'}$ et $e^{i(\varphi-\varphi')} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi'}}$ on retrouve

les mêmes formules que pour la fonction exponentielle réelle (voir cours d'analyse), ce qui justifie cette notation !

$$\begin{aligned} \text{cis}\varphi \cdot \text{cis}\varphi' &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi' + i \sin \varphi') \\ &= \cos \varphi \cos \varphi' + i \cos \varphi \sin \varphi' + i \sin \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi' \\ &= \cos \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi' + i (\sin \varphi \cos \varphi' + \cos \varphi \sin \varphi') \\ &= \cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi') \\ &= \text{cis}(\varphi + \varphi') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{cis}\varphi}{\text{cis}\varphi'} &= \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi' + i \sin \varphi'} \\ &= \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi' - i \sin \varphi')}{(\cos \varphi' + i \sin \varphi')(\cos \varphi' - i \sin \varphi')} \\ &= \frac{\cos \varphi \cos \varphi' - i \cos \varphi \sin \varphi' + i \sin \varphi \cos \varphi' - i^2 \sin \varphi \sin \varphi'}{\cos^2 \varphi' - i^2 \sin^2 \varphi'} \\ &= \frac{\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' + i (\sin \varphi \cos \varphi' - \cos \varphi \sin \varphi')}{\cos^2 \varphi' + \sin^2 \varphi'} \\ &= \frac{\cos(\varphi - \varphi') + i \sin(\varphi - \varphi')}{1} \end{aligned}$$

$$= \text{cis}(\varphi - \varphi')$$

- $$\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad \arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

En effet soient $z = r \text{cis} \varphi$ et $z' = r' \text{cis} \varphi'$ deux complexes sous leur forme trigonométrique, alors $z \cdot z' = r \text{cis} \varphi \cdot r' \text{cis} \varphi' = rr' \text{cis}(\varphi + \varphi')$ d'après la propriété précédente donc $\arg(zz') = \varphi + \varphi' = \arg(z) + \arg(z')$.

De même :

$$\frac{z}{z'} = \frac{r \text{cis} \varphi}{r' \text{cis} \varphi'} = \frac{r}{r'} \text{cis}(\varphi - \varphi'), \text{ donc } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \varphi - \varphi' = \arg(z) - \arg(z').$$

- Formule de MOIVRE (1667-1754)**

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} \quad (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

Démonstration :

Montrons d'abord par récurrence que la formule est vraie pour $n \in \mathbb{N}$:

* $n = 0$: $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^0 = 1$ et $\cos 0 + i \cdot \sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$, donc

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^0 = \cos 0 + i \sin 0$$

* Supposons que la formule est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} (\text{cis } \varphi)^{n+1} &= (\text{cis } \varphi)^n \text{cis } \varphi \\ &= \text{cis}(n\varphi) \cdot \text{cis } \varphi \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \text{cis}(n\varphi + \varphi) \quad (\text{voir page 18}) \\ &\stackrel{!}{=} \text{cis}((n+1)\varphi) \end{aligned}$$

La formule est donc vraie pour $n \in \mathbb{N}$, d'où :

$$(\operatorname{cis} \varphi)^{-n} = \frac{1}{(\operatorname{cis} \varphi)^n} = \frac{1}{\operatorname{cis} n\varphi} = \frac{\overline{\operatorname{cis} n\varphi}}{\operatorname{cis} n\varphi \cdot \overline{\operatorname{cis} n\varphi}} = \frac{\operatorname{cis}(-n\varphi)}{|\operatorname{cis} n\varphi|^2} = \frac{\operatorname{cis}(-n\varphi)}{1} = \operatorname{cis}(-n\varphi)$$

la formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$, cqfd.

Remarque :

Cette formule peut s'écrire aussi : $(\operatorname{cis} \varphi)^n = \operatorname{cis}(n\varphi) \quad \text{ou} \quad (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$

d) Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Soit $z = a + bi$ un complexe sous forme algébrique ; pour mettre z sous forme trigonométrique, il faut calculer son module r et son argument φ .

- On commence par calculer $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Ensuite pour calculer φ il faut résoudre le système d'inconnue φ :

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r} \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} \end{cases}$$

Or ce système admet toujours une solution (unique à un multiple de 2π près !) puisque chaque complexe a un argument !

Exemples :

- $z = 1 + i$ ($a = b = 1$), alors $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \text{ donc } \varphi = \frac{\pi}{4} (+2k\pi)$$

$$\text{d'où } z = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

- $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$, alors $r = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{9} = 3$ et

$$\left. \begin{array}{l} \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos \frac{\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \\ \sin \varphi = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \end{array} \right\} \text{ donc } \varphi = \frac{5\pi}{6} (+2k\pi)$$

$$\text{d'où } z = 3\text{cis} \frac{5\pi}{6} \quad \text{ou} \quad z = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Remarque :

Le passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique est évident !

Exercices 18, 19, 20, 21

6) Racines n-ièmes complexes d'un nombre complexe

- Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N} (n \geq 2)$, on appelle **racine n-ième (complexe)** de z tout nombre complexe u tel que $u^n = z$.

- Recherche des racines n-ièmes de z :

Soit $z = r\text{cis}\varphi$ et $u = \rho\text{cis}\alpha$, alors : $u^n = z \Leftrightarrow (\rho\text{cis}\alpha)^n = r\text{cis}\varphi$

$$\Leftrightarrow \rho^n \text{cis} (n\alpha) = r\text{cis}\varphi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \end{cases}$$

Ainsi $|u| = \sqrt[n]{|z|}$ et $\arg(u) = \frac{\arg(z) + 2k\pi}{n}$; toutes les racines n-ièmes ont donc

le même module et on obtient n arguments distincts :

$$\frac{\varphi}{n}; \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}; \frac{\varphi}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}; \dots; \frac{\varphi}{n} + (n-1) \frac{2\pi}{n}$$

en effet pour $k = n$: $\frac{\varphi}{n} + n \frac{2\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi = \frac{\varphi}{n}$, etc..., d'où :

Théorème

Tout nombre complexe $z = r \operatorname{cis} \varphi$ admet n racines n -ièmes distinctes ($n \geq 2$) :

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \operatorname{cis} \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad \text{avec } k = 0; 1; 2; 3; \dots; n-1$$

- Remarque :

Comme pour les rcc on n'utilise JAMAIS la notation $\sqrt[n]{}$ pour une racine n -ième complexe !

- Exemple :

Les racines 4-ièmes de $z = 16 \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$ sont :

$$z_k = \sqrt[4]{16} \cdot \operatorname{cis} \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} \quad (\text{avec } k = 0; 1; 2; 3), \text{ c\`ad :}$$

$$z_0 = 2 \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{12}, \quad z_1 = 2 \cdot \operatorname{cis} \frac{7\pi}{12}, \quad z_2 = 2 \cdot \operatorname{cis} \frac{13\pi}{12}, \quad z_3 = 2 \cdot \operatorname{cis} \frac{19\pi}{12}$$

- Interprétation géométrique

Toutes les racines n -ièmes de $z = r \operatorname{cis} \varphi$ ont le même module $\sqrt[n]{r}$ donc les n points $M_k(z_k)$ d'affixes z_k ($k = 0; 1; \dots; n-1$) sont tous situés sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$. On voit facilement que

$$\arg(z_k) = \arg(z_{k-1}) + \frac{2\pi}{n} \quad (\text{pour } k = 1; \dots; n-1)$$

$$\text{donc } \widehat{M_0OM_1} = \widehat{M_1OM_2} = \widehat{M_2OM_3} = \dots = \widehat{M_{n-1}OM_1} = \frac{2\pi}{n}.$$

Par conséquent $M_0M_1M_2 \dots M_{n-1}$ est un **polygone régulier** à n côtés.

Exercices 22, 23, 24, 25

7) Polynômes à coefficients complexes

Soit $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $c_i \in \mathbb{C}$ ($c_n \in \mathbb{C}^*$) un polynôme de degré n à coefficients complexes et à variable complexe z . Comme les règles de calcul sont les mêmes dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, ces polynômes sont traités exactement de la même façon que les polynômes à coefficients réels et à variable réelle. En particulier le schéma pour la division des polynômes reste valable ainsi que le schéma de Horner pour une division par $z - a$ où $a \in \mathbb{C}$.

Rappelons également la propriété fondamentale des polynômes :

$P(a)$ est le reste de la division de $P(z)$ par $z - a$

et sa conséquence pratique :

$$P(z) \text{ est divisible par } z - a \Leftrightarrow P(a) = 0$$

Ceci permet de factoriser $P(z)$ quand on connaît une racine de $P(z)$ et donc de résoudre certaines équations d'un degré supérieur à 2.

Exercices 26, 27, 28, 29

EXERCICES

Exercice 1

Calculez (donnez le résultat sous la forme $a + bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$) :

1) $(3 - 5i) + (-2 + 2i) - (-2 + 3i) =$

7) $(-\sqrt{3} - i\sqrt{2})^2 =$

2) $\frac{4 - 3i}{2} - \frac{2}{3}(1 - i) - \frac{2 - i}{6} =$

8) $\left(2 + \frac{i}{2}\right)^3 =$

3) $(3 + 5i)(4 - 3i) =$

9) $(2 - 3i)(-7 + 6i)(5 - 4i) =$

$$4) \left(-\sqrt{3}-\frac{i}{2}\right)\left(-\sqrt{3}+\frac{i}{2}\right)=$$

$$10) \left(-2+i\sqrt{3}\right)^3=$$

$$5) \left(\sqrt{2}+3i\right)^2=$$

$$11) \left(\frac{3}{4}-\frac{i}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{3}+i\right)\left(\frac{2}{3}-i\right)=$$

$$6) \left(\sqrt{5}-3i\right)\left(2-i\sqrt{5}\right)=$$

$$12) \left(2-3i\right)^4=$$

Exercice 2

Trouvez les réels x et y tels que :

$$1) (2x-1)+(1-y)i=5-3i$$

$$2) 3x+2y+i-4xi=yi+2-i$$

$$3) 3xi-2y=3x+2-4yi-2i$$

$$4) xi-y-x+3i=0$$

$$5) 2x-1+2yi=2y-(2-3x)i$$

Exercice 3

$$1) \text{ Calculez } i^3, i^4, i^5, \dots, i^{10}.$$

$$2) \text{ Déduisez-en une formule pour calculer } i^n \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

$$3) \text{ Appliquez cette formule pour calculer } i^{372}, i^{2970}, i^{875} \text{ et } i^{1345}.$$

Exercice 4

$$1) \text{ Calculez } \overline{5+7i}, \overline{\frac{9-i}{2}}, \overline{13i}, \overline{78}, \overline{-4i}.$$

$$2) \text{ Calculez } z+\bar{z} \text{ et } z-\bar{z} \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

Exercice 5

Démontrez les propriétés suivantes :

$$1) \forall z \in \mathbb{C} \quad z = \bar{\bar{z}} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$2) \forall z \in \mathbb{C} \quad z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

$$3) \forall z = a+bi \in \mathbb{C} \quad z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$4) \forall z, z' \in \mathbb{C} \quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$5) \forall z, z' \in \mathbb{C} \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

Exercice 6

- 1) Calculez $i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}, \dots, i^{-6}$.
- 2) Déduisez-en une formule pour calculer i^n où $n \in \mathbb{Z}$.
- 3) Appliquez cette formule pour calculer $i^{-179}, i^{-2481}, i^{-522}$ et i^{-1724} .

Exercice 7

Calculez :

- | | |
|---|--|
| 1) $\frac{1}{-3i}$ | 6) $\frac{1}{\sqrt{5}+i} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-i}{\sqrt{5}+i} \right)^2$ |
| 2) $\frac{1}{3-i\sqrt{2}}$ | 7) $\left(\frac{5-i}{7+i} \right)^2 \div \frac{2i}{3+i}$ |
| 3) $\frac{3+4i}{-2i}$ | 8) $\frac{z^2-2z+3}{z^2+2z+3}$ avec $z = 3-2i$ |
| 4) $\frac{7+i}{4-5i}$ | 9) $\frac{3-2i}{4+3i} - \frac{7+8i}{1-3i}$ |
| 5) $\frac{i\sqrt{5}}{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$ | 10) $\frac{1-3i}{5-i} - \frac{9i}{2+3i}$ |

Exercice 8

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

- 1) $4z + 25\bar{z} = 2 - 3i$
- 2) $z - 3 = 4z + 8i$
- 3) $(1-3i)\bar{z} - \frac{5}{1+i} = 7\bar{z}$
- 4) $\overline{3z - 5\bar{z}} = 2 - i$
- 5) $(3-2i)z - \overline{1+3i} = \frac{z}{2-i}$
- 6) $(5-7i)z - \overline{2-3i} = \frac{2}{i} + 4\bar{z}$

Exercice 9

Construisez dans le plan de Gauss les points suivants :

$$A(i)$$

$$B(-5i)$$

$$C(6)$$

$$D(-4)$$

$$E(3-5i)$$

$$F(-(3-5i))$$

$$G(\overline{3-5i})$$

$$H(-\overline{3-5i})$$

$$I(1+i)$$

$$J(1-i)$$

Exercice 10

On donne $w = (z + 2i)(\bar{z} + 4)$ avec $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

- 1) Représentez les ensembles suivants dans le plan de Gauss:

$$A = \{z \in \mathbb{C} / w \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad B = \{z \in \mathbb{C} / w \in i\mathbb{R}\}$$

- 2) Déterminez le nombre k pour que l'équation $(z + 2i)(\bar{z} + 4) = k$ admette $2 - 3i$ comme solution, puis calculez l'autre solution de cette équation.

Exercice 11

Soit $t = \frac{z^2}{1-z}$ avec $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

- 1) Calculez t en fonction de x et de y .
- 2) Construisez le lieu géométrique des points images $P(z)$ pour lesquels $t \in \mathbb{R}$

Exercice 12

- 1) Déterminez puis représentez dans le plan de Gauss les ensembles suivants :

$$A = \{z \in \mathbb{C} / (iz + 1 + 2i)(\bar{z} - 3i) \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} / (iz + 1 + 2i)(\bar{z} - 3i) \in i\mathbb{R}\}$$

- 2) Déterminez $A \cap B$

Exercice 13

Démontrez les propriétés suivantes :

- 1) $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \in \mathbb{R}_+$
- 2) $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

3) $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

4) $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ et déduisez-en que $\forall z' \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}$

5) $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$. Sous quelle condition a-t-on l'égalité ?

6) $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\bar{z}| = |z|$

Exercice 14

Calculez les rcc des nombres suivants :

1) $z = 8 + 6i$

2) $z = -45 - 28i$

3) $z = 1 + 2i$

4) $z = -9$

5) $z = 4i$

6) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$

7) $z = 3 - 5i$

Exercice 15

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{C}$

1) $3z^2 - 4z + 2 = 0$

2) $z^2 - 5iz - 6 = 0$

3) $(i+1)x^2 + 4 = 4x$

4) $u^2 + (\sqrt{2} - 2)iu + 2\sqrt{2} = 0$

5) $\frac{1}{2}z^2 + (2+i)z + 8i - 1 = 0$

6) $\frac{3}{1-2i}z^2 - (5+i)z + \frac{18}{5} + \frac{14}{5i} = 0$

Exercice 16

Factorisez les polynômes suivants :

1) $P(z) = z^2 + 4$

2) $P(x) = 2x^2 + ix + 3$

3) $P(z) = 3z^2 + (8i - 2)z - 2i - 5$

4) $P(z) = (1 - 3i)z^2 - (4 + 18i)z + i - 17$

Exercice 17

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{C}$

1) $\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{3}$

2) $x^4 + 12x^2 + 27 = 0$

3) $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$

4) $z^4 + (5 + 2i)z^2 - 50i = 0$

5) $3u^4 - 4u^3 + 4u - 3 = 0$

Exercice 18

Ecrivez les complexes suivants sous forme trigonométrique :

1) $z = -7$

2) $z = \frac{5i}{7}$

3) $1 + i\sqrt{3}$

4) $z = -3 - i\sqrt{3}$

5) $z = \sqrt{3} - 3i$

6) $z = -16 + 16i$

7) $z = 5 - 7i$

8) $z = 3i - (\sqrt{3} - i)$

9) $z = \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} \right)^{46}$

Exercice 19

Ecrivez les complexes suivants sous forme algébrique :

1) $z = 2\text{cis}120^\circ$

2) $z = 5e^{\frac{11\pi}{6}i}$

- 3) $z = \text{cis}45^\circ \cdot \text{cis}30^\circ$ (en déduire $\cos 75^\circ$ et $\sin 75^\circ$)
- 4) $z = \left(2\text{cis}\frac{\pi}{3}\right)^2 \left(3\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)^3$ (en déduire $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$)
- 5) $z = (3-3i)^{17}$
- 6) $z = \frac{2e^{i60^\circ}}{5e^{i45^\circ}}$ (en déduire $\cos 15^\circ$ et $\sin 15^\circ$)
- 7) $z = \frac{(2-2i)^5}{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^4}$
- 8) $z = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5 (2-2i)^6$
- 9) $z = \frac{(1-i\sqrt{3})^4 (-\sqrt{3}-3i)^6}{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^8}$

Exercice 20

Soit $z = \frac{(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^4}$.

- 1) Calculez z sous forme algébrique et trigonométrique.
- 2) Déduisez-en les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 21

Soit $z = r \cdot \text{cis}\varphi$. Quel est le module et l'argument de $\bar{z}$?

Exercice 22

Les racines cubiques complexes de 1 :

- 1) Calculez les trois racines cubiques de 1 sous forme trigonométrique et algébrique. On note j la racine cubique d'argument $\frac{2\pi}{3}$.
- 2) Représentez ces racines dans le plan de Gauss.
- 3) Montrez que $j^2 = \bar{j}$ est une des trois racines.

- 4) Résolvez l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$. Que constatez-vous ?

Exercice 23

Calculez les racines suivantes et faites à chaque fois une figure dans le plan de Gauss :

- 1) les racines cubiques de i
- 2) les racines quatrième de -16
- 3) les racines cinquième de $-\sqrt{3} + i$
- 4) les racines sixième de $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$
- 5) les racines cubiques de $\frac{(2 - 2i)^4}{(-\sqrt{3} - i)^6 (-2i)^{10}}$

Exercice 24

Somme des n racines n -ième de z

- 1) Calculez les n racines n -ième de 1.
- 2) Montrez que $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\} \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$.
- 3) Dédisez-en que la somme des n racines n -ième de 1 vaut 0.
- 4) Dédisez-en que la somme des n racines n -ième de tout complexe z vaut 0.

Exercice 25

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

- 1) $z^6 + 1 + i = 0$
- 2) $x^4 + 81 = 0$
- 3) $y^3 - 2 + i = 0$
- 4) $t^4 + t^2 + 1 = 0$
- 5) $z^4 + 8\sqrt{2} = 8i\sqrt{2}$
- 6) $z^6 - z^3 + 1 = 0$

Exercice 26

Effectuez les divisions suivantes (utilisez le schéma général et vérifiez par le schéma de Horner si possible) :

- 1) $(z^3 - 3iz^2 + (1-i)z + 5) \div (z^2 - z + 3)$
- 2) $(3x^3 + (6i-9)x^2 - 5ix + 10 + 15i) \div (x - 3 + 2i)$
- 3) $((5-i)z^3 + 4iz + 9-i) \div (z^2 - 5)$
- 4) $(z^2 - 2iz + 5 - i) \div (z + i)$
- 5) $(z^3 + (3-3i)z^2 + (3-7i)z + 14-8i) \div (z + 3 - i)$

Exercice 27

Pour quelles valeurs du paramètre m le polynôme $P(z) = z^4 - 2iz^3 + (i-m)z + 2m$ est-il divisible par $z - 2i$?

Exercice 28

Résolvez les équations suivantes :

- 1) $2z^3 - (21+i)z^2 + (68+2i)z - 64 + 8i = 0$ sachant qu'elle a une racine réelle.
- 2) $z^3 + (7+10i)z^2 + (120i-81)z + 110i - 407 = 0$ sachant qu'elle a une racine réelle.
- 3) $z^3 + (8i-9)z^2 - (5+42i)z + 45 + 30i = 0$ sachant qu'elle a une racine imaginaire pure.
- 4) $2z^3 + (5-11i)z^2 - (16+18i)z - 16 + 4i = 0$ sachant qu'elle a une racine imaginaire pure.
- 5) $z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i = 0$ sachant qu'elle a une racine réelle.
- 6) $z^3 + 2z^2 + 7iz - 5 - i = 0$ sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

Exercice 29

Factorisez le polynôme $P(z) = z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 4z + 7$ sachant qu'il admet deux racines imaginaires pures.

CHAPITRE II

LES CONIQUES

Table des matières

COURS

1) Différentes approches des « coniques »...	page 2
2) Equation focale d'une conique	page 4
3) Axe focal de Γ	page 7
4) Sommets de Γ	page 7
5) Equations cartésiennes réduites d'une parabole	page 12
6) Equations réduites d'une ellipse et d'une hyperbole	page 16
7) Courbes algébriques du second degré	page 27
8) Définition bifocale des coniques centrées	page 31
9) Tangentes d'une conique.....	page 35
10) Propriétés optiques des coniques.....	page 39

FORMULAIRE	page 47
-------------------------	---------

EXERCICES	page 49
------------------------	---------

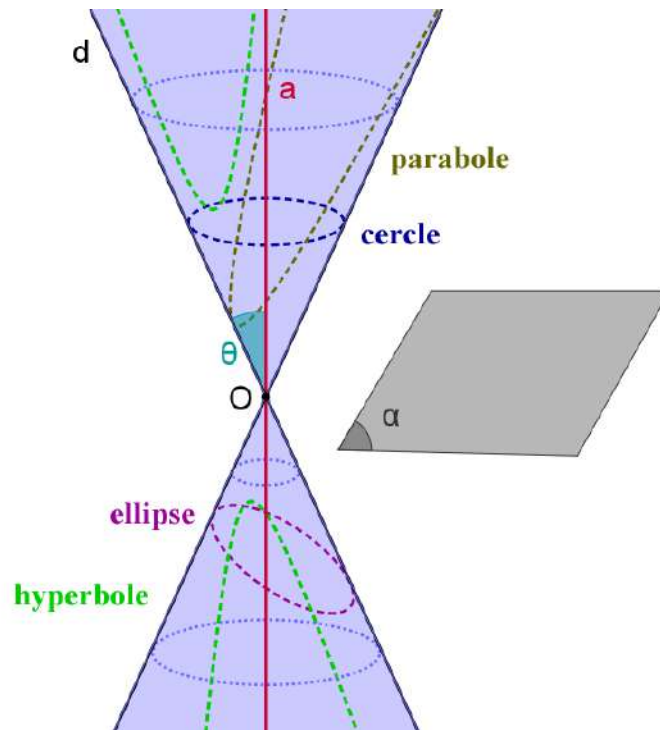
COURS

1) Différentes approches des « coniques »

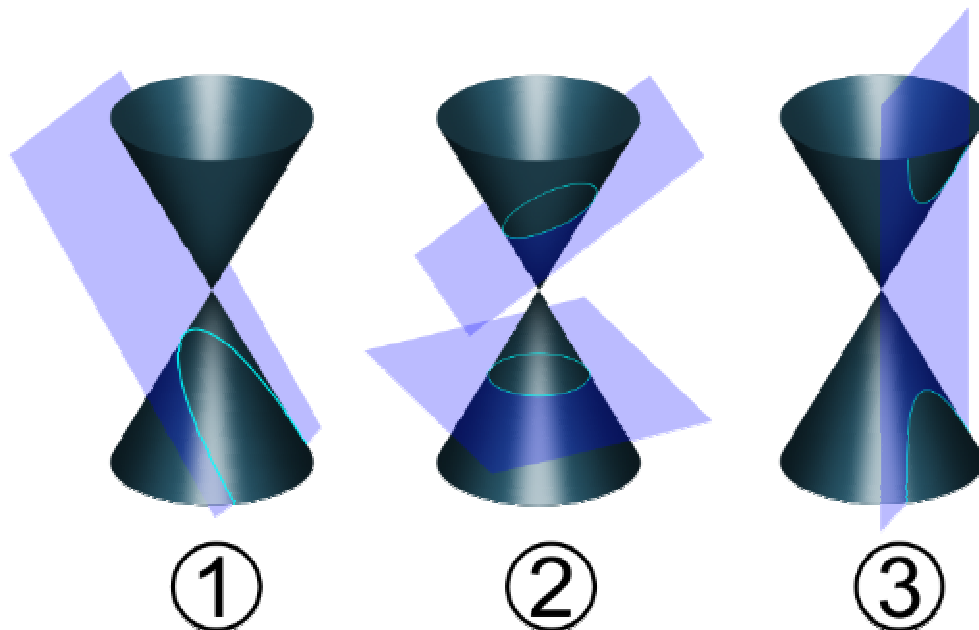
Au cours d'analyse vous avez vu que les courbes représentatives des fonctions du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont appelées « paraboles » et que celles de certaines fonctions homographiques $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ sont appelées « hyperboles ». Vous savez également que le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon r est le lieu géométrique des points $M(x,y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation du second degré $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Par ailleurs tout le monde a entendu parler de ces « cercles aplatis » qu'on appelle « ellipses »...

Toutes ces courbes, qui sont connues et ont été étudiées depuis l'Antiquité pour le rôle important qu'elles jouent en physique (en particulier en astronomie), peuvent être définies comme l'intersection d'un double cône infini et d'un plan :

- Soient a et d deux droites dans l'espace sécantes en O et formant un angle aigu θ .
En faisant tourner d autour de a (en gardant toujours le même angle θ) on obtient une **surface dans l'espace** appelée **double cône infini d'axe a et de génératrice d** (voir figure page suivante).
- En coupant ce double cône avec un plan α on obtient (suivant la position du plan par rapport à la droite a), soit un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole, appelés **coniques**, soit le point O , une droite ou deux droites sécantes, appelés **coniques dégénérées**. Essayez de « voir » comment obtenir chacune de ces figures !



Sur la figure suivante, ① représente une parabole, ② un cercle et une ellipse et ③ une hyperbole :



Cette approche, qui a donné leur nom aux « coniques », en allemand « Kegelschnitt », en anglais « conic **section** », est cependant un peu difficile à mettre en œuvre quand on

veut obtenir des propriétés plus précises de ces figures puisqu'il faut travailler dans l'espace !. Dans ce chapitre nous verrons trois autres approches des coniques :

- Nous définirons tout d'abord (*paragraphes 2 à 6*) les coniques comme lieu géométrique des points dans le plan vérifiant une certaine équation appelée **équation focale** : cette approche, moins générale que la première, donne uniquement les ellipses (mais pas le cercle !), les paraboles et les hyperboles, c'est-à-dire des coniques non dégénérées.
- Nous aborderons ensuite (*paragraphe 7*), uniquement par des exemples (sans présenter la théorie complète), les coniques comme **courbes algébriques du second degré**. Cette approche algébrique des coniques est aussi générale que la première : elle couvre toutes les coniques, dégénérées ou non.
- Pour finir (*paragraphe 8*) nous verrons une autre approche géométrique, la définition « **bifocale** », qui n'est cependant valable que pour les ellipses et les hyperboles.

2) Equation focale d'une conique

a) Définitions

Soient un point F et une droite d dans le plan et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Le lieu géométrique Γ des points P du plan qui vérifient l'équation $PF = \varepsilon \cdot Pd$ est appelé **conique de foyer F , de directrice d et d'excentricité ε** . Cette équation est appelée **équation focale** de Γ .

$$\Gamma = \{P / PF = \varepsilon \cdot Pd\}$$

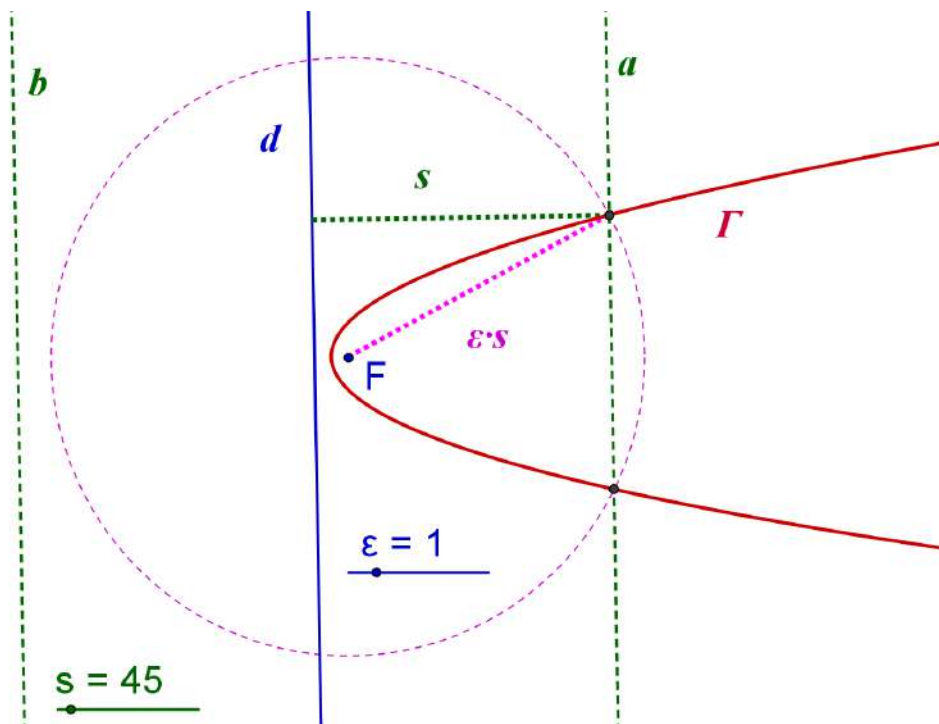
De plus :

- si $0 < \varepsilon < 1$, alors Γ est appelée **ellipse**
- si $\varepsilon = 1$, alors Γ est appelée **parabole**
- si $\varepsilon > 1$, alors Γ est appelée **hyperbole**

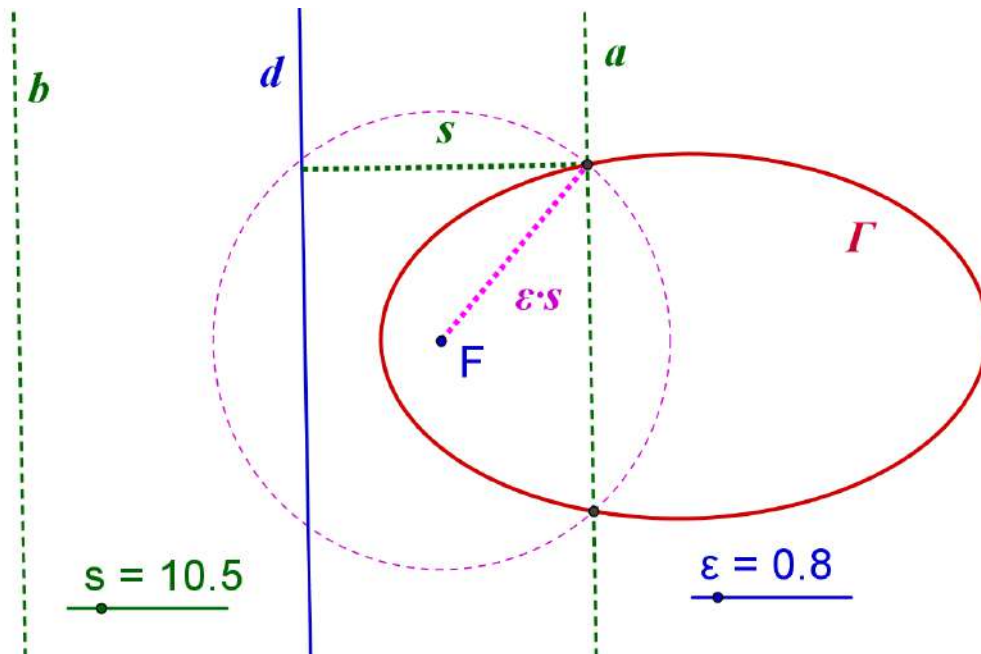
b) Exploration à l'aide de GEOGEBRA

- Construisez d , F et deux curseurs ε et s
- L'ensemble des points P tels que $Pd = s$ est constitué de deux droites a et b parallèles à d . Pour construire celles-ci on peut construire successivement :
 - un point $Q \in d$
 - le cercle $\mathcal{C}$ de centre Q et de rayon s

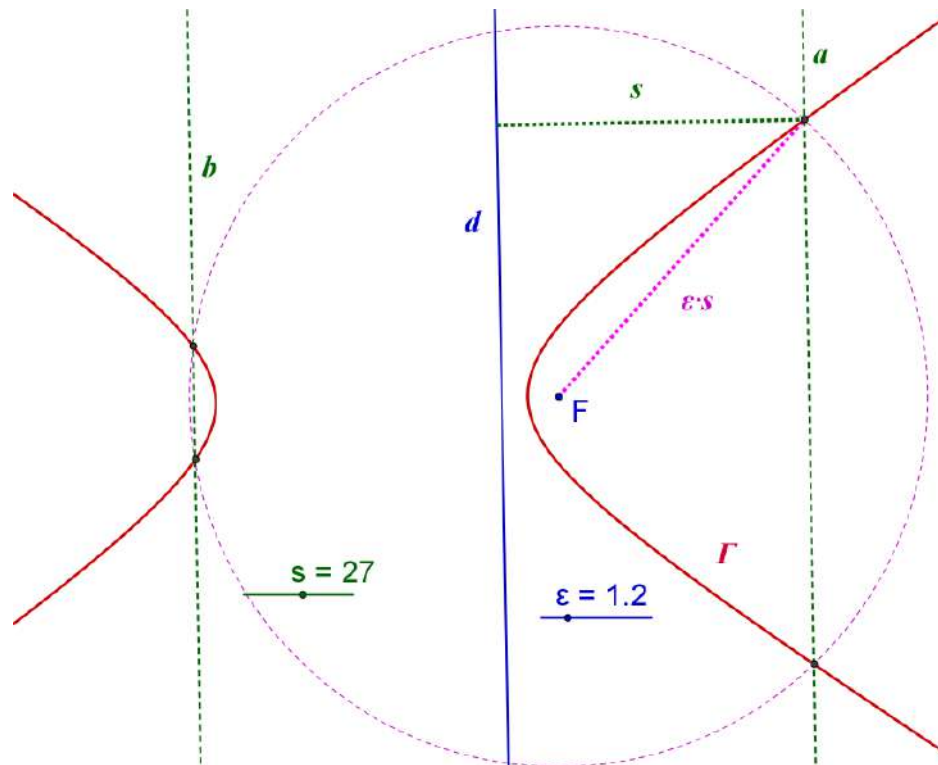
- la droite m passant par Q et perpendiculaire à d
 - les deux points d'intersection I et J de m et du cercle $\mathcal{C}$
 - les droites a et b passant par I et J respectivement et parallèles à d
 - afin de rendre la figure plus lisible on « cache » les objets Q , I , J , $\mathcal{C}$ et m
- L'ensemble des points P tels que $PF = \varepsilon \cdot s$ est le cercle de centre $\mathcal{C}'$ de centre F et de rayon $\varepsilon \cdot s$.
- L'ensemble des points P tels que $PF = \varepsilon \cdot Pd$ sont les points d'intersection de $\mathcal{C}'$ et des droites a et b (il y en a 0, 1, 2 ou 4 suivant les valeurs de s et de ε)
- Pour obtenir le lieu cherché Γ on fait varier le nombre s en laissant le nombre ε fixe.
- En utilisant la commande « lieu » on peut obtenir tout de suite Γ pour un ε donné de la manière suivante :
 - on commence par choisir ε et s de telle manière à avoir 4 points d'intersection
 - pour chacun de ces 4 points on utilise la commande « lieu » en cliquant d'abord sur le point puis sur le curseur s : on obtient 4 lieux dont la réunion est la courbe Γ
- Exemple 1 : $\varepsilon = 1$ (Γ est une parabole)



- Exemple 2 : $\varepsilon = 0,8$ (Γ est une ellipse)



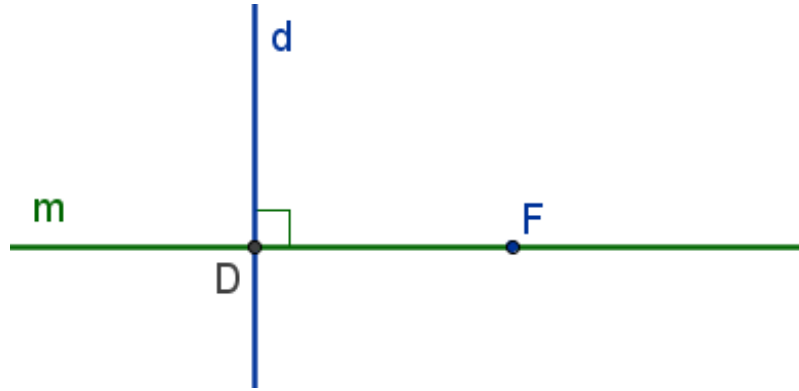
- Exemple 3 : $\varepsilon = 1,2$ (Γ est une hyperbole)



3) Axe focal de Γ

a) Définition

On appelle **axe focal** de Γ la droite **m** passant par le foyer F et orthogonale à la directrice d.



Remarque : $Fd = \text{distance de } F \text{ à } d = FD$ où $D \in m \cap d$

b) Propriété

L'axe focal **m** de Γ est un **axe de symétrie** de Γ

démonstration :

Soit s_m la symétrie d'axe **m**, P un point du plan, on notera $P' = s_m(P)$ le symétrique de P par rapport à **m**. Alors $s_m(F) = F$ car $F \in m$ et $s_m(d) = d$ car $d \perp m$, et comme s_m conserve les distances, $PF = P'F$ et $Pd = P'd$. D'où : $PF = \varepsilon \cdot Pd \Leftrightarrow P'F = \varepsilon \cdot P'd$, c'est-à-dire : $P \in \Gamma \Leftrightarrow P' \in \Gamma$. Par conséquent $s_m(\Gamma) = \Gamma$ et **m** est bien un axe de symétrie de Γ .

4) Sommets de Γ

a) Définition

Les points d'intersection de l'axe focal **m** et de la conique Γ sont appelés **sommets** de Γ .

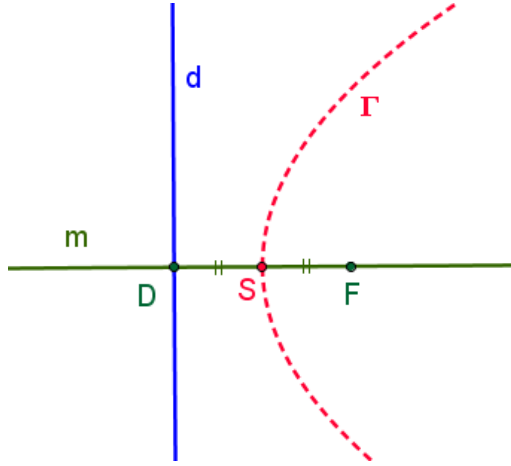
Remarques :

- Nous verrons plus loin que pour les ellipses il existe d'autres points qu'on appelle également « sommets ».
- $P \in m \cap \Gamma \Leftrightarrow P \in m$ et $PF = \varepsilon \cdot PD$ car pour tout $P \in m$ $Pd = PD$.

Notation : dans la suite nous noterons **S le milieu de $[FD]$** .

b) Sommet d'une parabole

Soit Γ une parabole, alors : $P \in m \cap \Gamma \Leftrightarrow P \in m$ et $PF = PD \Leftrightarrow P = S$, et par conséquent $\Gamma \cap m = \{S\}$. Ainsi une parabole n'a qu'un seul sommet et ce sommet est le milieu S de $[FD]$.



c) Sommets d'une ellipse et d'une hyperbole

i) Préliminaires

Soit Γ une conique d'excentricité $\varepsilon \neq 1$, alors :

$$P \in m \cap \Gamma \Leftrightarrow P \in m \text{ et } PF = \varepsilon \cdot PD$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PF} = -\varepsilon \overrightarrow{PD} & (1) \text{ si } \overrightarrow{PF} \text{ et } \overrightarrow{PD} \text{ sont de sens opposés, c\`ad si } P \in [DF] \\ \text{ou} \\ \overrightarrow{PF} = \varepsilon \overrightarrow{PD} & (2) \text{ si } \overrightarrow{PF} \text{ et } \overrightarrow{PD} \text{ ont le m\`eme sens, c\`ad si } P \notin [DF] \end{cases}$$

De plus : $(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DF} = -\varepsilon \overrightarrow{PD} \Leftrightarrow (1 + \varepsilon) \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{FD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DP} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \overrightarrow{DF}$, or D , F et

ε étant fixes, il existe un seul point $S_1 \in m$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{DS_1} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \overrightarrow{DF}} \quad (3)$$

De même $(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DF} = \varepsilon \overrightarrow{PD} \Leftrightarrow \underbrace{(1 - \varepsilon)}_{\neq 0 \text{ car } \varepsilon \neq 1} \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{FD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DP} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \overrightarrow{DF}$, donc il

existe également un seul point $S_2 \in m$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{DS_2} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \overrightarrow{DF}} \quad (4)$$

Ainsi pour les ellipses et les hyperboles (c'est-à-dire les coniques d'excentricité $\varepsilon \neq 1$) on a : $\Gamma \cap m = \{S_1, S_2\}$ où les sommets S_1 et S_2 sont définis par (3) et (4).

Désignons par **O le milieu de $[S_1, S_2]$** , alors O est appelé **centre de la conique** (ce terme sera justifié page 17) et il vient :

$$\overrightarrow{DS_1} = \frac{1}{1+\varepsilon} \overrightarrow{DF} \Leftrightarrow \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OS_1} = \frac{1}{1+\varepsilon} \overrightarrow{DF} \quad (5), \text{ et comme } \overrightarrow{OS_2} = -\overrightarrow{OS_1} \text{ on a aussi :}$$

$$\overrightarrow{DS_2} = \frac{1}{1-\varepsilon} \overrightarrow{DF} \Leftrightarrow \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OS_2} = \frac{1}{1-\varepsilon} \overrightarrow{DF} \Leftrightarrow \overrightarrow{DO} - \overrightarrow{OS_1} = \frac{1}{1-\varepsilon} \overrightarrow{DF} \quad (6), \text{ d'où :}$$

$$(5)+(6): 2 \cdot \overrightarrow{DO} = \left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon} \right) \overrightarrow{DF} \Leftrightarrow 2 \cdot \overrightarrow{DO} = \frac{1-\varepsilon+1+\varepsilon}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)} \overrightarrow{DF}, \text{ d'où :}$$

$$\boxed{\overrightarrow{DO} = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \overrightarrow{DF}} \quad (7)$$

ii) Positions relatives de D, F, S₁, S₂ et O :

D'après les égalités (3), (4), et (7) ces positions dépendent des coefficients $\frac{1}{1+\varepsilon}$,

$\frac{1}{1-\varepsilon}$ et $\frac{1}{1-\varepsilon^2}$ qui dépendent eux-mêmes de ε . Il faut donc distinguer deux cas :

1^{er} cas : $\boxed{0 < \varepsilon < 1}$ (Γ est une **ellipse**)

$$\bullet \quad 0 < \varepsilon < 1 \Leftrightarrow 1 < 1+\varepsilon < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+\varepsilon} < 1,$$

$$\text{et comme } \overrightarrow{DS} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DF}; \quad \overrightarrow{DS_1} = \frac{1}{1+\varepsilon} \overrightarrow{DF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = 1 \cdot \overrightarrow{DF}, \text{ on a :}$$

$$S_1 \in]S, F[$$

$$\bullet \quad 0 < \varepsilon < 1 \Leftrightarrow -1 < -\varepsilon < 0 \Leftrightarrow 0 < 1-\varepsilon < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\varepsilon} > 1$$

$$\text{et comme } \overrightarrow{DS_2} = \frac{1}{1-\varepsilon} \overrightarrow{DF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = 1 \cdot \overrightarrow{DF}, \text{ on voit que } S_2 \text{ est « à}$$

droite » de F sur la figure page 7 donc $F \in]D, S_2[$

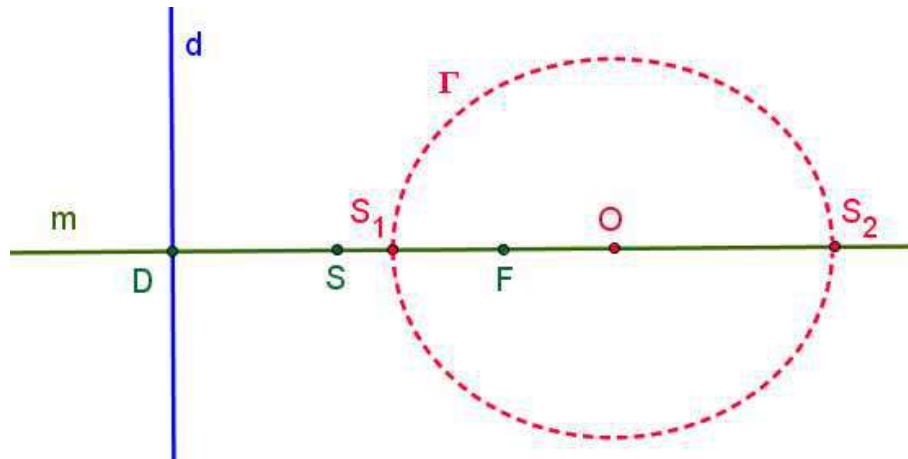
$$\bullet \quad 0 < \varepsilon < 1 \Leftrightarrow 0 < \varepsilon^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < -\varepsilon^2 < 0 \Leftrightarrow 0 < 1-\varepsilon^2 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\varepsilon^2} > 1$$

$$\text{et comme } \overrightarrow{DO} = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \overrightarrow{DF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = 1 \cdot \overrightarrow{DF}, \text{ on voit que O est « à}$$

droite » de F sur la figure page 7 donc $F \in]D, O[$

Conclusion :

Pour une **ellipse** les points D, F, S₁, S₂ et O se présentent dans l'ordre suivant :



2^e cas : $\boxed{\varepsilon > 1}$ (Γ est une **hyperbole**)

- $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow 1 + \varepsilon > 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1 + \varepsilon} < \frac{1}{2}$,

et comme $\overrightarrow{DS_1} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DS} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DF}$, on a $S_1 \in]D, S[$.

- $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow -\varepsilon < -1 \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \varepsilon} < 0$ et comme $\overrightarrow{DS_2} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \overrightarrow{DF}$, on

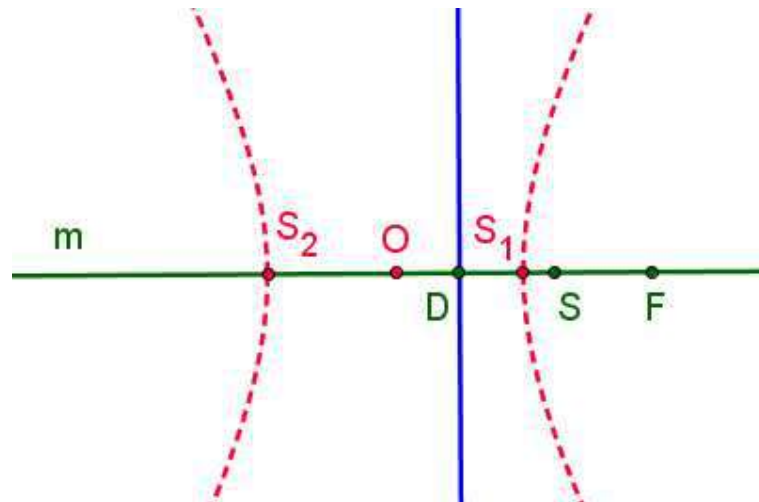
voit que S_2 est « à gauche » de D sur la figure page 7 donc $D \in]S_2, F[$.

- $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow \varepsilon^2 > 1 \Leftrightarrow -\varepsilon^2 < -1 \Leftrightarrow 1 - \varepsilon^2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \varepsilon^2} < 0$

et comme $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \overrightarrow{DF}$, on voit que O est « à gauche » de D sur la

figure page 7 donc $D \in]O, F[$

Conclusion : Pour une **hyperbole** les points D, F, S_1 , S_2 et O se présentent dans l'ordre suivant :



Notations

Pour **les ellipses et les hyperboles** nous noterons **a** la distance du centre à l'un des deux sommets et **c** la distance du centre au foyer :

$$a = OS_1 = OS_2 = \frac{1}{2} S_1 S_2 \quad \text{et} \quad c = OF$$

iii) Propriétés de a et de c

➤ Pour une **ellipse** $c < a$ et pour une **hyperbole** $c > a$

Démonstration : évident d'après ce qui précède

➤ Pour les **ellipses** et pour les **hyperboles** : $\varepsilon = \frac{c}{a}$ et $Od = OD = \frac{a^2}{c}$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DS_1} &= \frac{1}{1+\varepsilon} \overrightarrow{DF} \Leftrightarrow (1+\varepsilon) \overrightarrow{DS_1} = \overrightarrow{DF} \\ &\Leftrightarrow (1+\varepsilon)(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OS_1}) = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OF} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OS_1} + \varepsilon \cdot \overrightarrow{DO} + \varepsilon \cdot \overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OF} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OS_1} + \varepsilon \cdot \overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OF} + \varepsilon \cdot \overrightarrow{OD} \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DS_2} &= \frac{1}{1-\varepsilon} \overrightarrow{DF} \Leftrightarrow (1-\varepsilon) \overrightarrow{DS_2} = \overrightarrow{DF} \\ &\Leftrightarrow (1-\varepsilon)(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OS_2}) = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OF} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OS_2} - \varepsilon \cdot \overrightarrow{DO} - \varepsilon \cdot \overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OF} \\ &\Leftrightarrow -\overrightarrow{OS_1} + \varepsilon \cdot \overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OF} - \varepsilon \cdot \overrightarrow{OD} \quad (9) \quad (\text{car } \overrightarrow{OS_2} = -\overrightarrow{OS_1}) \end{aligned}$$

$$(8) + (9): \quad 2\varepsilon \cdot \overrightarrow{OS_1} = 2 \cdot \overrightarrow{OF} \Leftrightarrow \varepsilon \cdot \overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OF},$$

$$\text{donc } \varepsilon \cdot OS_1 = OF \Leftrightarrow \varepsilon \cdot a = c \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{c}{a}$$

$$(8) - (9): \quad 2 \cdot \overrightarrow{OS_1} = 2\varepsilon \cdot \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OS_1} = \varepsilon \cdot \overrightarrow{OD},$$

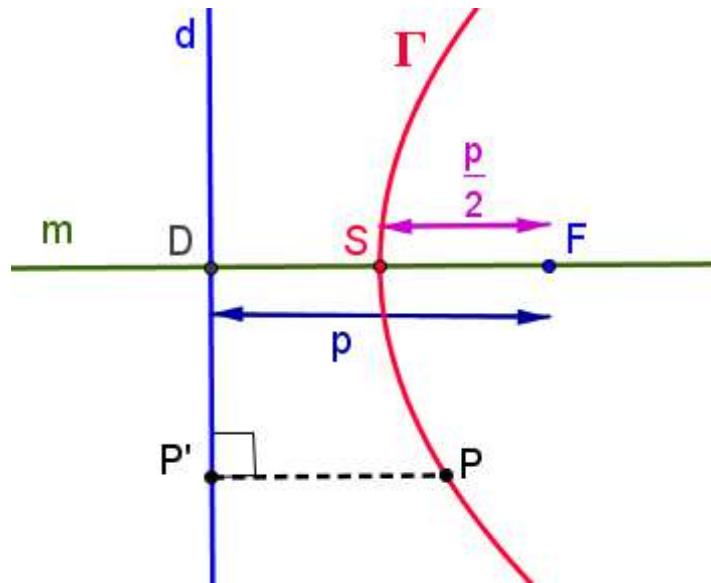
$$\text{donc } OS_1 = \varepsilon \cdot OD \Leftrightarrow a = \frac{c}{a} \cdot OD \Leftrightarrow OD = \frac{a^2}{c}$$

5) Equations cartésiennes réduites d'une parabole

b) Paramètre d'une parabole

Soit Γ une parabole ($\varepsilon=1$) de foyer F, de directrice d, d'axe focal m ($m \cap d = \{D\}$) et de sommet S.

Posons $p = Fd = FD$, alors comme S est le milieu de $[DF]$ on a $SD = SF = \frac{p}{2}$:



p est appelé **paramètre** de la parabole Γ

c) Equations cartésiennes d'une parabole

Pour tout point P du plan désignons par P' sa projection orthogonale sur d, alors :

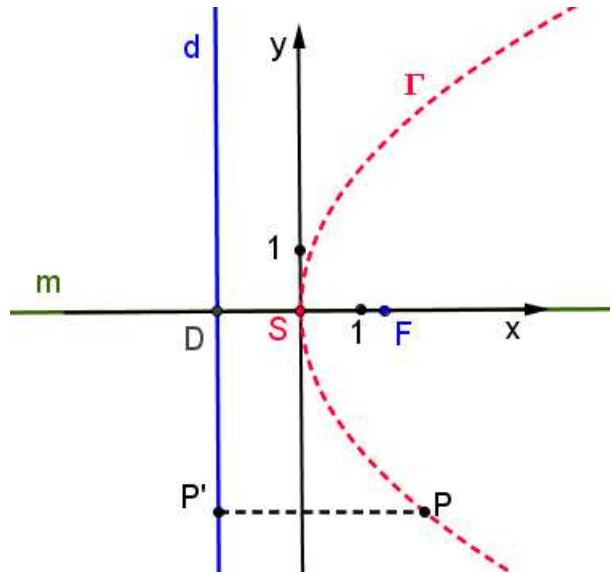
$$P \in \Gamma \Leftrightarrow PF = PP'$$

Afin d'obtenir une équation aussi simple que possible de cette parabole nous choisirons un **R.O.N.** (afin de pouvoir utiliser la formule sur la distance de deux points) **d'origine S** (pour avoir $S(0,0)$) et **d'axes parallèles à m et à d** (pour que soit l'abscisse, soit l'ordonnée de F soit nulle, pour que P et P' aient soit la même abscisse, soit la même ordonnée et enfin pour des raisons de symétrie).

Ceci peut se faire de 4 manières différentes :

1^{re} manière : **m** est l'**axe des abscisses** orienté de S vers F et l'**axe des ordonnées** est la droite passant par S qui est parallèle à d

$$\text{Alors } S(0,0); F\left(\frac{p}{2}, 0\right); P(x, y); P'\left(-\frac{p}{2}, y\right) :$$

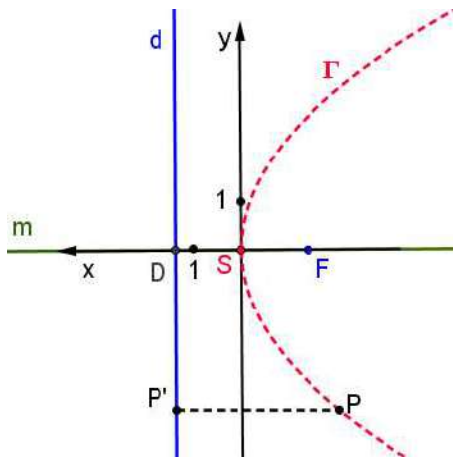


$$\begin{aligned}
 P(x, y) \in \Gamma &\Leftrightarrow PF^2 = PP'^2 \\
 &\Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \\
 &\Leftrightarrow \boxed{y^2 = 2px} \quad (\text{équation cartésienne réduite de } \Gamma)
 \end{aligned}$$

Remarque : en changeant l'orientation de l'axe des y on ne change absolument rien à ce calcul, donc cette orientation ne joue aucun rôle ici !

2^e manière : **m** est l'**axe des abscisses** orienté de S vers D et l'axe des ordonnées est la droite passant par S qui est parallèle à d

$$\text{Alors : } S(0,0); F\left(-\frac{p}{2}, 0\right); P(x, y); P'\left(\frac{p}{2}, y\right)$$

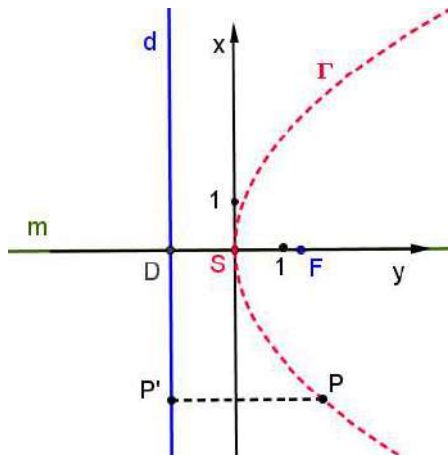


$$\begin{aligned}
 P(x, y) \in \Gamma &\Leftrightarrow PF^2 = PP'^2 \\
 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4} \\
 &\Leftrightarrow \boxed{y^2 = -2px} \quad (\text{équation cartésienne réduite de } \Gamma)
 \end{aligned}$$

Remarque : ici encore l'orientation de l'axe des y ne joue aucun rôle !

3^e manière : **m** est l'axe des ordonnées orienté de S vers F et l'axe des abscisses est la droite passant par S qui est parallèle à d

$$\text{Alors : } S(0, 0); F\left(0, \frac{p}{2}\right); P(x, y); P'\left(x, -\frac{p}{2}\right)$$

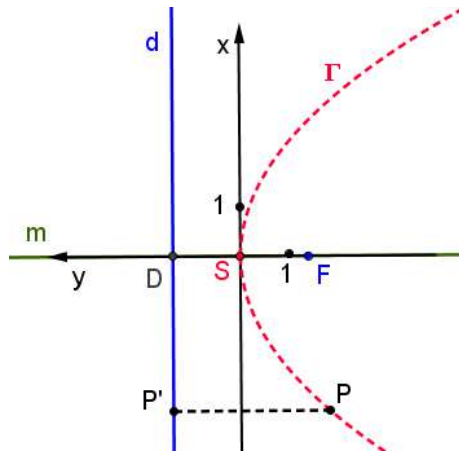


$$\begin{aligned}
 P(x, y) \in \Gamma &\Leftrightarrow PF^2 = PP'^2 \\
 &\Leftrightarrow (x - 0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = (x - x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4} \\
 &\Leftrightarrow \boxed{x^2 = 2py} \quad (\text{équation cartésienne réduite de } \Gamma)
 \end{aligned}$$

Remarque : en changeant l'orientation de l'axe des x on ne change absolument rien à ce calcul, donc cette orientation ne joue aucun rôle ici !

4^e manière : **m** est l'axe des ordonnées orienté de S vers D et l'axe des abscisses est la droite passant par S qui est parallèle à d

$$\text{Alors : } S(0, 0); F\left(0, -\frac{p}{2}\right); P(x, y); P'\left(x, \frac{p}{2}\right)$$



$$P(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow PF^2 = PP'^2$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 = (x-x)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + py + \frac{p^2}{4} = y^2 - py + \frac{p^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2 = -2py} \quad (\text{équation cartésienne réduite de } \Gamma)$$

Remarque : ici encore l'orientation de l'axe des x ne joue aucun rôle !

Conclusion

Dans un R.O.N. d'origine S et d'axes parallèles à m et à d l'équation cartésienne de la parabole Γ est de l'une des quatre formes suivantes :

- $y^2 = 2px$ si m est l'axe des x orienté de S vers F
- $y^2 = -2px$ si m est l'axe des x orienté de S vers D
- $x^2 = 2py$ si m est l'axe des y orienté de S vers F
- $x^2 = -2py$ si m est l'axe des y orienté de S vers D

c) Construction d'une parabole

➤ Si $x^2 = 2py \Leftrightarrow y = \frac{1}{2p}x^2$ alors $\Gamma = G_f$ avec $f(x) = \frac{1}{2p}x^2$

➤ Si $x^2 = -2py \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2p}x^2$ alors $\Gamma = G_f$ avec $f(x) = -\frac{1}{2p}x^2$

➤ Si $y^2 = 2px \Leftrightarrow y = \sqrt{2px}$ ou $y = -\sqrt{2px}$ alors $\Gamma = G_f \cup G_{-f}$ avec $f(x) = \sqrt{2px}$

➤ Si $y^2 = -2px \Leftrightarrow y = \sqrt{-2px}$ ou $y = -\sqrt{-2px}$ alors $\Gamma = G_f \cup G_{-f}$ avec $f(x) = \sqrt{2px}$

L'étude et la construction des courbes de ces fonctions très simples a été vue au cours d'analyse et ne présente aucune difficulté.

Exercices 1, 2, 3

6) Equations cartésiennes réduites d'une ellipse et d'une hyperbole

a) Equations communes aux ellipses et aux hyperboles

Soit Γ une conique avec $\varepsilon \neq 1$ de foyer F , de directrice d , d'axe focal m ($m \cap d = \{D\}$) et de sommets S_1 et S_2 . En posant $O = \text{milieu de } [S_1, S_2]$,

$a = OS_1 = OS_2$ et $c = OF$ on sait que $\varepsilon = \frac{c}{a}$ et $OD = \frac{a^2}{c}$ (voir p 10). Nous noterons

m' la droite passant par O et perpendiculaire à m ($O \in m'$ et $m' \perp m$).

Pour tout point P du plan désignons par P' sa projection orthogonale sur d , alors :

$$P \in \Gamma \Leftrightarrow PF = \varepsilon \cdot PP' \Leftrightarrow PF^2 = \varepsilon^2 \cdot PP'^2 \Leftrightarrow PF^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot PP'^2$$

Afin d'obtenir *une équation aussi simple que possible de cette conique* nous choisirons un **R.O.N.** (afin de pouvoir utiliser la formule sur la distance de deux points) **d'origine O** (O occupe en effet une position centrale dans les formules que nous venons de rappeler) et **d'axes m et m'** (pour que soit l'abscisse, soit l'ordonnée de F , D , S_1 et S_2 soit nulle et pour que P et P' aient soit la même abscisse, soit la même ordonnée).

Ceci peut se faire de 2 manières différentes :

1^{re} manière : $(Ox) = m$ et $(Oy) = m'$

Comme S_1 , D et F se trouvent toujours du même côté de O et S_2 de l'autre côté (voir figures pages 8 et 9) on peut orienter (Ox) de manière à avoir soit

$$S_1(a, 0), S_2(-a, 0), D\left(\frac{a^2}{c}, 0\right), F(c, 0), P(x, y) \text{ et } P'\left(\frac{a^2}{c}, y\right) \quad (1),$$

$$\text{soit } S_1(-a, 0), S_2(a, 0), D\left(-\frac{a^2}{c}, 0\right), F(-c, 0), P(x, y) \text{ et } P'\left(-\frac{a^2}{c}, y\right) \quad (2)$$

L'orientation de (Oy) ne joue aucun rôle ici parce que les *ordonnées* de S_1 , S_2 , D et F valent toutes 0 et que P et P' ont les *mêmes ordonnées* !

Comme les deux manières aboutissent exactement au même résultat (à vérifier en exercice !) nous nous contenterons de faire les calculs dans le cas (1) :

$$\begin{aligned}
P(x, y) \in \Gamma &\Leftrightarrow PF^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot PP'^2 \\
&\Leftrightarrow (x-c)^2 + (y-0)^2 = \frac{c^2}{a^2} \left[\left(x - \frac{a^2}{c} \right)^2 + (y-y)^2 \right] \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(x^2 - 2\frac{a^2}{c}x + \frac{a^4}{c^2} \right) \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 - 2cx + a^2 \quad | \cdot a^2 \\
&\Leftrightarrow a^2 x^2 + a^2 c^2 + a^2 y^2 = c^2 x^2 + a^4 \\
&\Leftrightarrow (a^2 - c^2) x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2) \quad | \div a^2 (a^2 - c^2) \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1
\end{aligned}$$

2^e manière : (Oy) = m et (Ox) = m'

Pour les mêmes raisons que plus haut on peut orienter (Oy) de manière à avoir soit

$$S_1(0, a), S_2(0, -a), D\left(0, \frac{a^2}{c}\right), F(0, c), P(x, y) \text{ et } P'\left(x, \frac{a^2}{c}\right) \quad (1),$$

$$\text{soit } S_1(0, -a), S_2(0, a), D\left(0, -\frac{a^2}{c}\right), F(0, -c), P(x, y) \text{ et } P'\left(x, -\frac{a^2}{c}\right) \quad (2)$$

Cette fois c'est l'orientation de (Ox) ne joue aucun rôle parce que les *abscisses* de S_1, S_2, D et F valent toutes 0 et que P et P' ont les mêmes *abscisses* !

Comme les deux manières aboutissent exactement au même résultat (à vérifier en exercice !) nous nous contenterons de faire les calculs dans le cas (1) :

$$\begin{aligned}
P(x, y) \in \Gamma &\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-c)^2 = \frac{c^2}{a^2} \left[(x-x)^2 + \left(y - \frac{a^2}{c} \right)^2 \right] \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(y^2 - 2\frac{a^2}{c}y + \frac{a^4}{c^2} \right) \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = \frac{c^2}{a^2} y^2 - 2cy + a^2 \quad | \cdot a^2 \\
&\Leftrightarrow a^2 x^2 + a^2 y^2 + a^2 c^2 = c^2 y^2 + a^4 \\
&\Leftrightarrow a^2 x^2 + (a^2 - c^2) y^2 = a^2 (a^2 - c^2) \quad | \div a^2 (a^2 - c^2) \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1
\end{aligned}$$

Conclusion (provisoire)

Dans un R.O.N. d'origine O et d'axes m et m', l'équation d'une conique d'excentricité différente de 1 est de l'une des deux formes suivantes :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (\text{si } m = (Ox))$$

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (\text{si } m = (Oy))$$

b) Symétries d'une ellipse et d'une hyperbole**➤ O est centre de symétrie de Γ**

Prenons $m = (Ox)$, notons s_O la symétrie de centre O et $s_O(P) = P'$, alors

$P(x, y) \Leftrightarrow P'(-x, -y)$ et par conséquent :

$$P(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{a^2 - c^2} = 1 \Leftrightarrow P'(-x, -y) \in \Gamma,$$

donc $s_O(\Gamma) = \Gamma$.

Raisonnement analogue pour $m = (Oy)$.

Définition

O est appelé **centre** de Γ et les coniques d'excentricité différentes de 1 (c-à-d les ellipses et les hyperboles) sont appelées **coniques centrées** (par opposition les paraboles sont appelées *coniques non centrées*)

➤ La droite m' est aussi un axe de symétrie de Γ

Prenons $m = (Ox)$, notons $s_{m'}$ la symétrie d'axe m', $s_{m'}(P) = P'$, alors

$P(x, y) \Leftrightarrow P'(-x, y)$ et

$$P(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \Leftrightarrow P'(-x, y) \in \Gamma$$

donc $s_{m'}(\Gamma) = \Gamma$.

Raisonnement analogue pour $m = (Oy)$.

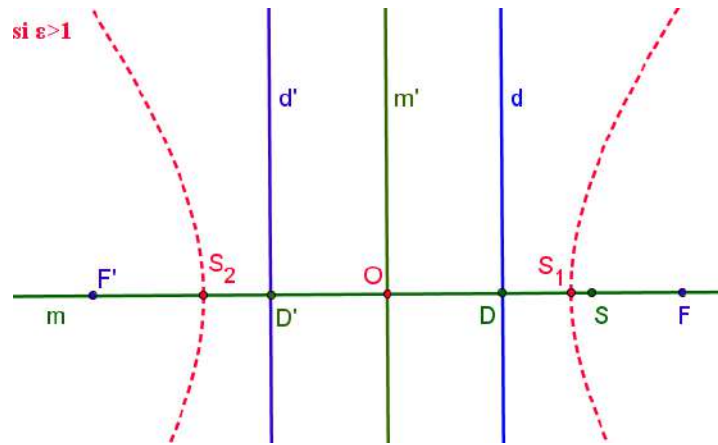
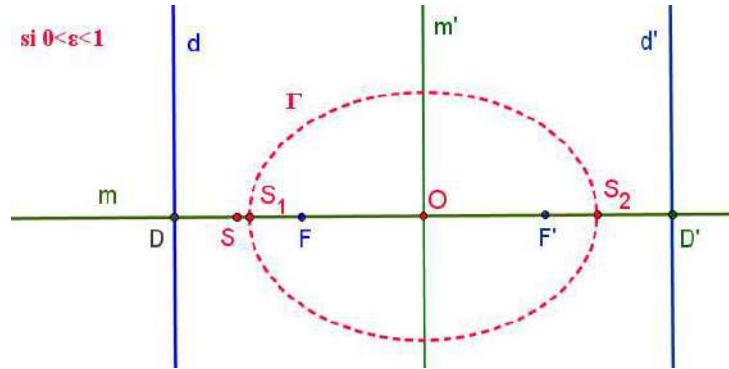
Définition et notations

m' est appelé **axe non focal** de Γ et on notera **F'** = $s_{m'}(F)$ et **d'** = $s_{m'}(d)$.

➤ F' et d' sont également un foyer et une directrice de Γ . Une conique centrée

admet donc deux foyers F et F' et deux directrices d et d' symétriques par rapport à m'.

En effet $P \in \Gamma \Leftrightarrow s_m(P) = P' \in \Gamma$ (car m' est axe de symétrie de Γ)
 $\Leftrightarrow P'F = \varepsilon \cdot P'd$ (par définition de Γ)
 $\Leftrightarrow PF' = \varepsilon \cdot Pd'$ (car s_m conserve les distances)
 donc Γ est la conique de foyer F' et de directrice d' .



La distance $FF' = 2c$ est appelée **distance focale** de Γ

d (resp. d') est la **directrice associée** à F (resp. F')

c) Equation cartésienne réduite d'une ELLIPSE

Soit Γ une ellipse, alors $0 < \varepsilon < 1$ et $\varepsilon = \frac{c}{a}$ donc on a :

$$0 < \frac{c}{a} < 1 \Leftrightarrow 0 < c < a \Leftrightarrow 0 < c^2 < a^2 \Leftrightarrow a^2 - c^2 > 0$$

Ainsi il existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a^2 - c^2 = b^2$ et comme $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$, on a $b < a$.

Par conséquent l'équation de l'ellipse Γ peut s'écrire sous la forme suivante appelée **équation cartésienne réduite de l'ellipse** :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{si } m = (Ox) \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{si } m = (Oy)$$

$$\text{où } b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{et} \quad 0 < b < a.$$

A retenir : comment reconnaître l'axe focal ?

Si le grand carré (toujours noté a^2) se trouve en dessous de x^2 alors $m = (Ox)$ et
s'il se trouve en dessous de y^2 alors $m = (Oy)$.

Construction d'une ellipse :

1^{er} cas : $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Alors $m = (Ox)$, $S_1(a, 0)$, $S_2(-a, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ car $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2$,

$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, $D\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$, $D'\left(-\frac{a^2}{c}, 0\right)$, $d \equiv x = \frac{a^2}{c}$ et $d' \equiv x = -\frac{a^2}{c}$. De plus

$x = 0 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2 \Leftrightarrow y = b$ ou $y = -b$, donc Γ coupe (Oy) aux deux points :

$S_3(0, b)$ et $S_4(0, -b)$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Leftrightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} \\ &\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \\ &\Leftrightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ ou } y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

En posant $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ on a $\Gamma = G_f \cup G_{-f}$ et il suffit de faire l'étude de f :

C.E. $a^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, donc $D_f = [-a, a]$

$\forall x \in]-a, a[\quad f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-bx}{a \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}$, et comme a et b sont positifs,

$f'(x)$ a le même signe que $-x$.

dérivabilité en a : $\lim_{a^-} f'(x) = \left(\frac{-b}{0^+}\right) = -\infty$

dérivabilité en $-a$: $\lim_{-a^+} f'(x) = \left(\frac{b}{0^+}\right) = +\infty$

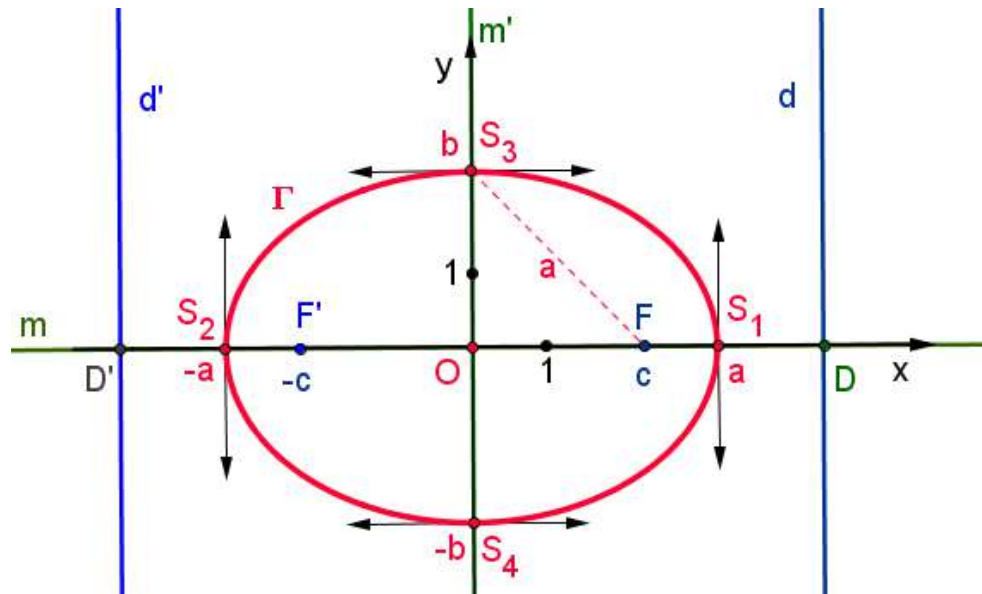
donc f n'est dérivable ni en a ni en $-a$ ($D_f =]-a, a[$), mais la courbe de f admet des tangentes parallèles à (Oy) aux points $S_1(a, 0)$ et $S_2(-a, 0)$

$\forall x \in]-a, a[\quad f''(x) = \dots = \frac{-ab}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} < 0$, donc la courbe de f n'admet pas

de point d'inflexion et est toujours concave

tableau de variation :

x	$-a$		0		a
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
f	0	$\nearrow$	b	$\searrow$	0



Remarque :

Le triangle OFS_3 étant rectangle en O on a $FS_3^2 = FO^2 + OS_3^2 = c^2 + b^2 = a^2$, donc

$FS_3 = a$

2^e cas : $\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$

Alors $m = Oy$, $S_1(0, a)$, $S_2(0, -a)$, $F(0, c)$, $F'(0, -c)$, $D\left(0, \frac{a^2}{c}\right)$, $D'\left(0, -\frac{a^2}{c}\right)$,

$d \equiv y = \frac{a^2}{c}$ et $d' \equiv y = -\frac{a^2}{c}$. De plus $y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = b^2 \Leftrightarrow x = b$ ou $x = -b$,

donc Γ coupe (Ox) aux deux points : $S_3(b, 0)$ et $S_4(-b, 0)$. Par ailleurs :

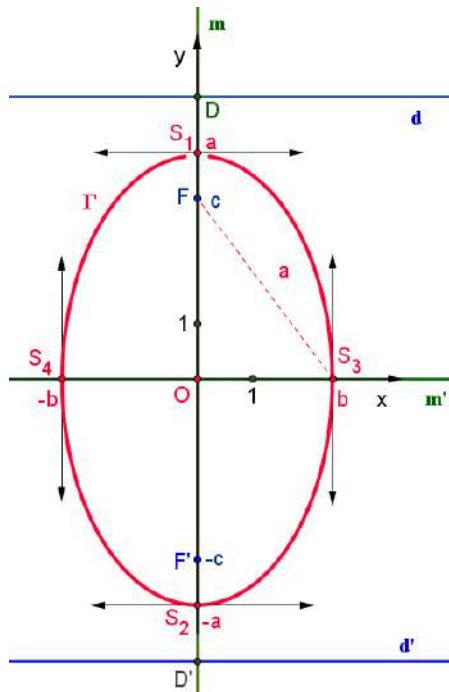
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = a^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2} \text{ ou } y = -\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$$

En posant $f(x) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$ on a $\Gamma = G_f \cup G_{-f}$ et il suffit de faire l'étude de f qui

est analogue à la précédente (exercice !). On obtient alors la courbe suivante :



Définitions

Les points : S_3 et S_4 sont également appelés **sommets** de l'ellipse qui est ainsi la seule conique à avoir quatre sommets !

Le segment $[S_1, S_2]$ de longueur $2a$ est appelé **grand axe**, et le segment $[S_3, S_4]$ de longueur $2b$ est appelé **petit axe** de l'ellipse.

d) Equation cartésienne réduite d'une HYPERBOLE

Soit Γ une hyperbole : $\varepsilon > 1$, et comme $\varepsilon = \frac{c}{a}$ on a :

$$\frac{c}{a} > 1 \Leftrightarrow c > a > 0 \Leftrightarrow c^2 > a^2 \Leftrightarrow a^2 - c^2 < 0 \Leftrightarrow c^2 - a^2 > 0$$

Ainsi il existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $b^2 = c^2 - a^2$.

Par conséquent l'équation de l'hyperbole Γ peut s'écrire sous la forme suivante appelée **équation cartésienne réduite de l'hyperbole** :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{si } m = (\text{Ox}) \quad \text{et} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{si } m = (\text{Oy})$$

$$\text{où } b^2 = c^2 - a^2.$$

Remarques

- C'est le terme précédé d'un « + » qui indique quel est l'axe focal m
- Pour les hyperboles on peut avoir $a < b$ ou $a > b$:
 a^2 se trouve dans le terme précédé d'un « + »
 b^2 se trouve dans le terme précédé d'un « - »
- Comme $b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$, a et b sont les deux côtés d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut c.

Construction d'une hyperbole :

1^{er} cas : $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Alors $m = \text{Ox}$, $S_1(a, 0)$, $S_2(-a, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ car $c^2 = a^2 + b^2$, $F(c, 0)$,

$F'(-c, 0)$, $D\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$, $D'\left(-\frac{a^2}{c}, 0\right)$, $d \equiv x = \frac{a^2}{c}$ et $d' \equiv x = -\frac{a^2}{c}$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) \\ &\Leftrightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \text{ ou } y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \end{aligned}$$

En posant $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ on a $\Gamma = G_f \cup G_{-f}$ et il suffit de faire l'étude de f :

$$\text{C.E. : } x^2 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a \text{ donc } D_f = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) = \mathbb{R} \setminus]-a, a[$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{+\infty} f &= \lim_{+\infty} \frac{b}{a} \sqrt{x^2} = +\infty \\ \lim_{-\infty} f &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{pas d'A.H.}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{b \sqrt{x^2}}{a x} = \lim_{+\infty} \frac{b x}{a x} = \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned}\lim_{+\infty} \left(f(x) - \frac{b}{a}x \right) &= \lim_{+\infty} \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x \right) = \lim_{+\infty} \frac{b}{a} \left(\sqrt{x^2 - a^2} - x \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \\ &= \lim_{+\infty} \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \lim_{+\infty} \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \left(\frac{-ab}{+\infty} \right) = 0\end{aligned}$$

donc on a une A.O.D. d'équation $y = \frac{b}{a}x$ et par un calcul analogue on trouve

également une A.O.G d'équation $y = -\frac{b}{a}x$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a] \quad f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{bx}{a \cdot \sqrt{x^2 - a^2}}$, et comme a et b sont positifs, $f'(x)$ a le même signe que x .

dérivabilité en a : $\lim_{a^-} f'(x) = \left(\frac{b}{0^+} \right) = +\infty$ et en $-a$: $\lim_{-a^+} f'(x) = \left(\frac{-b}{0^+} \right) = -\infty$

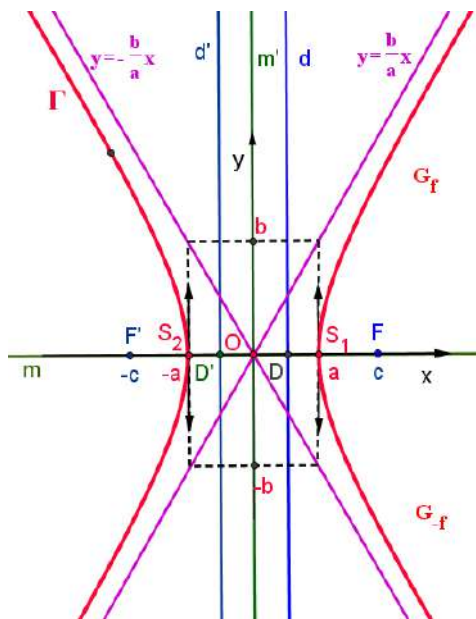
donc f n'est dérivable ni en a ni en $-a$ ($D_f = \mathbb{R} \setminus [-a, a]$), mais la courbe de f admet des tangentes parallèles à Oy aux points $S_1(a, 0)$ et $S_2(-a, 0)$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a] \quad f''(x) = \dots = \frac{-ab}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} < 0$, donc la courbe de f n'admet

pas de point d'inflexion et est toujours concave

tableau de variation :

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-\infty$		$+\infty$		$+$
f	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$



2^e cas : $\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$

Alors $m = (Oy)$, $S_1(0, a)$, $S_2(0, -a)$, $F(0, c)$, $F'(0, -c)$, $D\left(0, \frac{a^2}{c}\right)$, $D'\left(0, -\frac{a^2}{c}\right)$,

$d \equiv y = \frac{a^2}{c}$ et $d' \equiv y = -\frac{a^2}{c}$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 &\Leftrightarrow y^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2} + a^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 = \frac{a^2}{b^2} (x^2 + b^2) \\ &\Leftrightarrow y = \frac{a}{b} \sqrt{x^2 + b^2} \text{ ou } y = -\frac{a}{b} \sqrt{x^2 + b^2} \end{aligned}$$

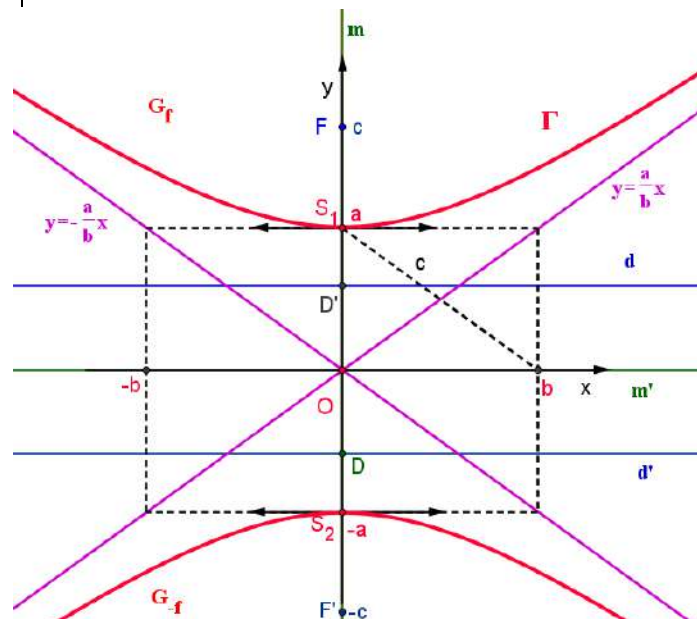
En posant $f(x) = \frac{a}{b} \sqrt{x^2 + b^2}$ on a $\Gamma = G_f \cup G_{-f}$ et il suffit de faire l'étude de f :

$D_f = \mathbb{R}$, A.O.D. $y = \frac{a}{b} x$, A.O.G. $y = -\frac{a}{b} x$, $f'(x) = \frac{ax}{b \cdot \sqrt{x^2 + b^2}}$ même signe que x ,

$f''(x) = \frac{ab}{(x^2 + b^2)\sqrt{x^2 + b^2}} > 0$, donc la courbe de f n'admet pas de point d'inflexion

et est toujours convexe et on a le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$+\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$



e) Remarques concernant les coefficients a et b

- Si dans l'équation d'une **ellipse** on prenait $a = b$ on obtiendrait $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = 0$ et $x^2 + y^2 = a^2 = b^2$ c'est-à-dire l'équation du cercle de centre O et de rayon a qui serait alors une « ellipse d'excentricité 0 ». Or ceci n'a pas de sens dans le cadre de l'équation focale puisque $PF = 0 \cdot Pd \Leftrightarrow PF = 0 \Leftrightarrow P = F$ et la conique d'excentricité 0 serait réduite au seul point F ! Il reste néanmoins que plus l'excentricité est proche de 0, plus les deux foyers sont proches (puisque alors c serait également très proche de 0) et les deux axes de l'ellipse de longueurs voisines, c'est-à-dire que **plus l'excentricité est proche de 0 et plus l'ellipse ressemble au cercle de centre O et de rayon $a \approx b$!** De même on voit que plus l'excentricité d'une ellipse est proche de 1, plus c est proche de a donc b est proche de 0, plus les foyers sont éloignés l'un de l'autre et plus l'ellipse est « aplatie ».

- Par contre il est parfaitement possible d'avoir $a = b$ dans le cas d'une hyperbole. On a alors :

o $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{2} \cdot a \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{2} \Leftrightarrow e = \sqrt{2}$

- o les asymptotes ont pour équations $y = x$ et $y = -x$ (puisque $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$) : ce sont les deux bissectrices (perpendiculaires !) du repère.

Une telle hyperbole est appelée **hyperbole équilatère**.

- Dans le cas d'une hyperbole, si $\varepsilon \approx 1$ alors $c \approx a$ et $b \approx 0$, donc les deux branches de l'hyperbole sont très « resserrées » autour de l'axe focal. Par contre si ε est très grand alors $c \approx b$ et $a \approx 0$ et par conséquent les deux branches de l'hyperbole sont très « éloignées » de l'axe focal.
- **A retenir** : La lettre qui se trouve en dessous de y^2 dans l'équation d'une hyperbole se trouve également au numérateur de la pente de ses A.O. !

Exercices 4, 5, 6

7) Courbes algébriques du second degré

Comme nous l'avons annoncé au premier paragraphe, nous allons maintenant définir les *coniques comme courbes algébriques du second degré*.

Définition

On appelle **conique** le lieu géométrique Γ des points $M(x, y)$, dans un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, dont les coordonnées vérifient une équation générale du second degré :

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E + Fxy = 0 \quad (*)$$

(où les coefficients réels $A, B, \dots, F$ ne sont pas tous nuls)

On peut montrer (*hors programme* !) qu'en faisant un changement de repère par rotation autour de O d'un angle bien choisi on peut toujours s'arranger pour que dans le nouveau repère l'équation (*) soit de la forme :

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0 \quad (**)$$

En d'autres termes on peut supposer, *sans perte de généralité*, que $F = 0$.

L'étude générale de l'équation (**) étant très longue en raison des nombreux cas qu'il faut distinguer suivant les valeurs des coefficients $a, b, \dots, e$, nous nous contenterons de traiter les différents cas qui peuvent se présenter par des exemples.

Exemple 1 : $a = b = e = 1$ et $c = d = 0$

$x^2 + y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -1$, ce qui est impossible, donc $\Gamma = \emptyset$ (conique dégénérée).

Exemple 2 : $a = b = 0$

$cx + dy + e = 0$, ce qui est l'équation cartésienne d'une droite, donc $\Gamma =$ droite (conique dégénérée).

Exemple 3 : $a = 1, b = c = d = 0$ et $e = -1$

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$, alors $\Gamma = d_1 \cup d_2$ où d_1 et d_2 sont les droites strictement parallèles d'équations $d_1 \equiv x = 1$ et $d_2 \equiv x = -1$. Ceci n'étant pas une conique au sens défini au début (intersection d'un double cône et d'un plan) on peut supposer qu'on n'a pas $b = d = 0$ ou $a = c = 0$.

Exemple 4 : $a = 4$, $b = -1$ et $c = d = e = 0$

$4x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = y^2 \Leftrightarrow y = 2x$ ou $y = -2x$, alors $\Gamma = d_1 \cup d_2$ où d_1 et d_2 sont les droites d'équations $d_1 \equiv y = 2x$ et $d_2 \equiv y = -2x$ (conique dégénérée).

Exemple 5 : $a > 0$, $b > 0$ et $c = d = e = 0$

$ax^2 + by^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$, donc $\Gamma = \{O\}$ (conique dégénérée).

Exemple 6 : $a = b = 1$, $c = -2$, $d = 4$ et $e = 5$

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $y = -2$,
donc $\Gamma = \{A(1, -2)\}$ (conique dégénérée).

Exemple 7 : $a = b = 1$, $c = -2$, $d = 4$ et $e = -20$

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$,

donc Γ est le **cercle** de centre $A(1, -2)$ et de rayon 5.

Exemple 8 : $a = 4$, $b = 25$, $c = d = 0$ et $e = -100$

$4x^2 + 25y^2 - 100 = 0 \mid \div 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$, donc Γ est une **ellipse** d'axe focal $m = (Ox)$

avec : $a = 5$, $b = 2$, $S_1(5, 0)$, $S_2(-5, 0)$, $S_3(0, 2)$, $S_4(0, -2)$, $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{21} \approx 4,58$,

$F(\sqrt{21}, 0)$, $F'(-\sqrt{21}, 0)$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0,92$, $d \equiv x = \frac{25}{\sqrt{21}}$, $d' \equiv x = -\frac{25}{\sqrt{21}}$

Exemple 9 : $a = 9$, $b = 4$, $c = -54$, $d = 40$ et $e = 145$

$9x^2 + 4y^2 - 54x + 40y + 145 = 0 \Leftrightarrow 9(x^2 - 6x) + 4(y^2 + 10y) + 145 = 0$
 $\Leftrightarrow 9(x-3)^2 - 81 + 4(y+5)^2 - 100 + 145 = 0$
 $\Leftrightarrow 9(x-3)^2 + 4(y+5)^2 = 36 \mid \div 36$,
 $\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{9} = 1$

posons : $\begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y + 5 \end{cases}$ et $\Omega(3, -5)$, alors dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ la conique a pour

équation : $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1$ donc Γ est une **ellipse** d'axe focal $m = (\Omega Y)$ avec :

$$a = 3, b = 2, S_1(0, 3), S_2(0, -3), S_3(2, 0), S_4(-2, 0), b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{5} \approx 2,24,$$

$$F(0, \sqrt{5}), F'(0, -\sqrt{5}), \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,75, d \equiv Y = \frac{9}{\sqrt{5}} \approx 4,02, d' \equiv Y = -\frac{9}{\sqrt{5}}$$

Exemple 10 : $a = 4, b = -9, c = 16, d = 126$ et $e = -429$

$$4x^2 - 9y^2 + 16x + 126y - 429 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2 + 4x) - 9(y^2 - 14y) - 429 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x+2)^2 - 16 - 9(y-7)^2 + 441 - 429 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x+2)^2 - 9(y-7)^2 = 4 \quad | :4$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - \frac{9}{4}(y-7)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - \frac{(y-7)^2}{\frac{4}{9}} = 1$$

posons : $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 7 \end{cases}$ et $\Omega(-2, 7)$, alors dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ la conique a pour

équation : $X^2 - \frac{Y^2}{\frac{4}{9}} = 1$ donc Γ est une **hyperbole** d'axe focal $m = (\Omega X)$ avec :

$$a = 1, b = \frac{2}{3}, S_1(1, 0), S_2(-1, 0), A.O. Y = \frac{2}{3}X \text{ et } Y = -\frac{2}{3}X, c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow c = \frac{\sqrt{13}}{3} \approx 1,2$$

$$F\left(\frac{\sqrt{13}}{3}, 0\right), F'\left(-\frac{\sqrt{13}}{3}, 0\right), \varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{3}, d \equiv X = \frac{3}{\sqrt{13}} \approx 0,83, d' \equiv X = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

Exemple 11 : $a = 0, b = 1, c = -10, d = 12$ et $e = 66$

$$y^2 - 10x + 12y + 66 = 0 \Leftrightarrow (y+6)^2 - 36 - 10x + 66 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+6)^2 = 10x - 30$$

$$\Leftrightarrow (y+6)^2 = 10(x-3)$$

posons : $\begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y + 6 \end{cases}$ et $\Omega(3, -6)$, alors dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ la conique a pour

équation : $Y^2 = 10X$ donc Γ est une **parabole** d'axe focal $m = (\Omega X)$, de sommet Ω ,

de paramètre $p = 5$, de foyer $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ et de directrice $d \equiv X = -\frac{5}{2}$

Exemple 12 : $a = 3$, $b = 0$, $c = -30$, $d = 1$ et $e = 76$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 30x + y + 76 = 0 &\Leftrightarrow 3(x^2 - 10x) + y + 76 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x - 5)^2 - 75 + y + 76 = 0 \\ &\Leftrightarrow y + 1 = -3(x - 5)^2 \\ &\Leftrightarrow (x - 5)^2 = -\frac{1}{3}(y + 1) \end{aligned}$$

posons : $\begin{cases} X = x - 5 \\ Y = y + 1 \end{cases}$ et $\Omega(5, -1)$, alors dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ la conique a pour

équation : $X^2 = -\frac{1}{3}Y$ donc Γ est une **parabole** d'axe focal $m = (\Omega Y)$, de sommet Ω ,

de paramètre $p = \frac{1}{6}$, de foyer $F\left(0, -\frac{1}{12}\right)$ et de directrice $d \equiv Y = \frac{1}{12}$.

Exemple 13 : $a = b = 1$, $c = d = 0$ et $e = -25$

L'équation obtenue $x^2 + y^2 = 25$ est celle du **cercle** de centre O et de rayon 5, ce qui montre que d'après la définition page 25 le cercle est bien une conique alors qu'avec l'équation focale on n'obtient que des ellipses, des hyperboles et des paraboles !

Remarque

Dans l'équation générale (*) les 6 coefficients ne sont pas tous nuls, donc en divisant (*) par un de ces coefficients non nuls on obtient une équation générale avec 5 coefficients. Ceci montre qu'une conique est entièrement déterminée par la donnée de 5 de ses points ! Vous pouvez tester ceci en utilisant la commande « conique » dans GEOGEBRA !

Exercices 7, 8, 9

8) Définition bifocale des coniques centrées

Soit Γ une conique centrée (ellipse ou hyperbole) d'axe focal m , de foyers F et F' , de directrices d et d' et d'équation focale :

$$\Gamma \equiv PF = \varepsilon \cdot Pd \quad \text{ou} \quad \Gamma \equiv PF' = \varepsilon \cdot Pd'$$

a) Exploration à l'aide de GEOGEBRA

Soient deux points F et F' , $[AB]$ un segment de longueur s . Nous allons construire les lieux suivants :

➤ $\mathbb{E} = \{P / PF + PF' = s\}$

- Construisons un point $C \in [AB]$, notons $p = AC$ et $q = CB$ et construisons les cercles $\mathcal{C}_1(F, p)$ et $\mathcal{C}_2(F', q)$.
- Ces deux cercles se coupent si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées (inégalités triangulaires) :

$$FF' \leq p + q \Leftrightarrow FF' \leq s \quad (1) \quad p \leq q + FF' \quad (2) \quad q \leq p + FF' \quad (3)$$

$$\text{Or } (2) \Leftrightarrow p + q \leq 2q + FF' \Leftrightarrow s \leq 2q + FF' \Leftrightarrow s - FF' \leq 2q \Leftrightarrow q \geq \frac{s - FF'}{2}$$

$$\text{et } (3) \Leftrightarrow q + p \leq 2p + FF' \Leftrightarrow s \leq 2p + FF' \Leftrightarrow s - FF' \leq 2p \Leftrightarrow p \geq \frac{s - FF'}{2}.$$

$$\text{De plus } (2) \Leftrightarrow p + p \leq q + p + FF' \Leftrightarrow 2p \leq s + FF' \Leftrightarrow p \leq \frac{s + FF'}{2} \text{ et de même}$$

$$(3) \Leftrightarrow q + q \leq p + q + FF' \Leftrightarrow 2q \leq s + FF' \Leftrightarrow q \leq \frac{s + FF'}{2}.$$

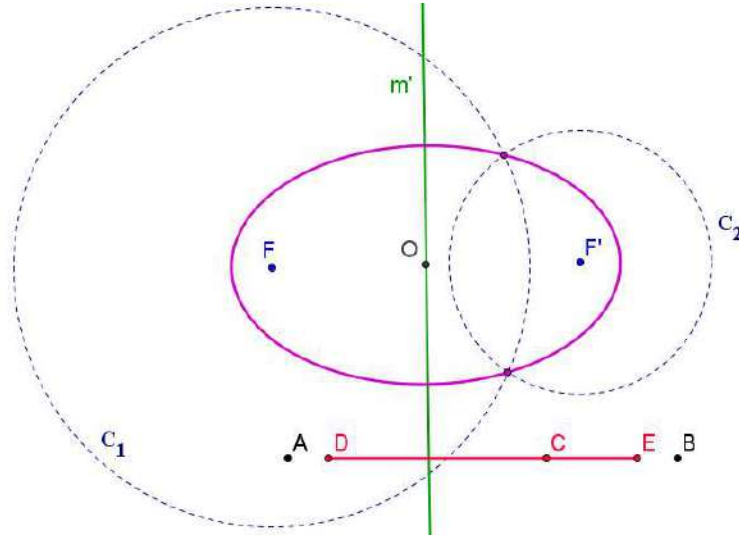
$$\text{En posant } d = \frac{s - FF'}{2} \text{ on a } s - d = s - \frac{s - FF'}{2} = \frac{2s - s + FF'}{2} = \frac{s + FF'}{2} \text{ et par}$$

conséquent les deux cercles se coupent si et seulement si :

$$FF' \leq s \quad (1), \quad d \leq p \leq s - d \quad (4) \quad \text{et} \quad d \leq q \leq s - d \quad (5)$$

- Effaçons C et construisons deux points D et E sur $[AB]$ tels que $AD = d$ et $BE = d$. Désactivons l'affichage de $[AB]$ et construisons $[DE]$, puis un point $C \in [DE]$. En désignant de nouveau par $p = AC$ et par $q = CB$, et en reconstruisant les cercles $\mathcal{C}_1(F, p)$ et $\mathcal{C}_2(F', q)$, on voit que pour tout

$C \in [DE]$ les trois conditions (1), (4) et (5) sont vérifiées. En faisant varier le point C sur $[DE]$ les points d'intersection des deux cercles décrivent $\mathbb{E}$ qu'on obtient de façon complète en utilisant la commande « lieu ». On constate que $\mathbb{E}$ est l'ellipse de foyers F et F', de centre O et d'axe non focal m'.



➤ $\mathbb{H} = \{P / |PF - PF'| = s\}$

- Construisons un segment $[FF']$, sa médiatrice m' et un segment $[AB]$ dont la longueur sera noté s ($s > 0$ car $A \neq B$). On sait que pour tout point $P \in m'$ on a $PF = PF'$, donc $PF - PF' = 0$ et par conséquent $P \notin \mathbb{H}$. Or si P et F sont du même côté de m' on a : $PF < PF'$, donc $|PF - PF'| = PF' - PF$ et si P est du même côté de m' que F' on a : $PF > PF'$, donc $|PF - PF'| = PF - PF'$.
- Pour obtenir deux nombres positifs (variables !) p et q tels que $p - q = s$ on peut faire la construction suivante :



où $AB = s$, $AC = p$, $BC = q$ (en particulier $q < p$) et C appartient à la demi-droite rouge.

- Les points d'intersection (éventuels) P et P' des cercles $C_1(F, p)$ et $C_2(F', q)$ se trouvant plus près de F' que de F on a : $|PF - PF'| = PF - PF' = p - q = s$, donc ce sont deux points de $\mathbb{H}$. Or ces deux cercles se coupent si et seulement si les inégalités triangulaires suivantes sont vérifiées :

$$FF' \leq p + q \Leftrightarrow FF' - 2q \leq p + q - 2q \Leftrightarrow FF' - 2q \leq s \Leftrightarrow \frac{FF' - s}{2} \leq q \quad (1)$$

$$p \leq FF' + q \Leftrightarrow p - q \leq FF' \Leftrightarrow s \leq FF' \quad (2)$$

$$q \leq FF' + p \quad (3) \text{ ce qui est toujours vérifié puisque } q < p$$

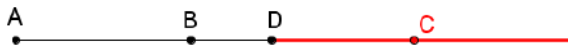
Ainsi en posant $d = \frac{FF' - s}{2}$ les deux cercles $C_1(F, p)$ et $C_2(F', q)$ se coupent

si et seulement si $FF' \geq s \Leftrightarrow FF' \geq AB$ et $q \geq d \Leftrightarrow BC \geq d$

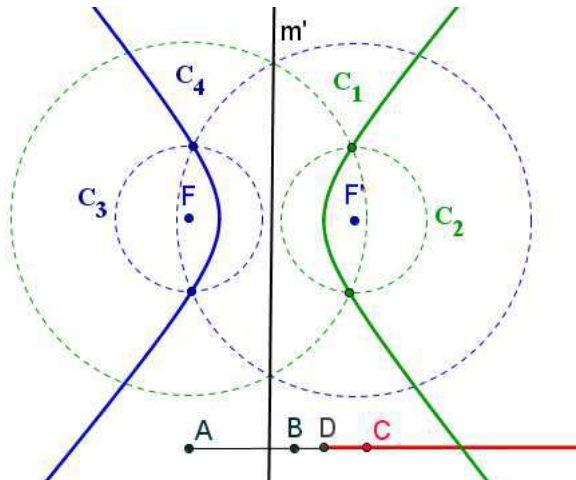
- De même les points d'intersection (éventuels) P et P' des cercles $C_3(F, q)$ et $C_4(F', p)$ se trouvant plus près de F que de F' on a :
 $|PF - PF'| = PF' - PF = p - q = s$, donc ce sont également deux points de $\mathbb{H}$.

Les conditions d'existence de ces points d'intersection sont exactement les mêmes que pour les deux premiers cercles.

- Ces calculs préliminaires nous amènent donc à construire une demi-droite $[AB)$, un point $D \in [AB) \setminus [AB]$ tel que $BD = d$, la demi-droite (rouge) d'origine D entièrement contenue dans $[AB)$ et C un point sur cette demi-droite :



- En construisant ensuite les quatre cercles définis plus haut et leurs points d'intersection, on obtient le lieu $\mathbb{H}$. On constate $\mathbb{H}$ est l'hyperbole de foyers F et F', et d'axe non focal m' .



b) Définition bifocale d'une ellipse

Soit Γ une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un R.O.N. dont l'axe Ox est égale à

l'axe focal m , alors : $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$, $d \equiv x = \frac{a^2}{c}$ et $d' \equiv x = -\frac{a^2}{c}$.

Comme l'ellipse est entièrement située entre ses directrices d et d' (voir figure p 17),

on a pour tout point $P \in \Gamma$: $Pd + Pd' = dd' = 2 \frac{a^2}{c}$, d'où :

$$PF + PF' = \varepsilon \cdot Pd + \varepsilon \cdot Pd' = \varepsilon \cdot (Pd + Pd') = \varepsilon \cdot dd' = \frac{c}{a} \cdot 2 \cdot \frac{a^2}{c} = 2a$$

Réciproquement si $PF + PF' = 2a$ alors on a, en posant $P(x, y)$:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \dots (\text{exercice!}) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow P \in \Gamma, \text{ d'où :}$$

Théorème et définition

Pour toute ellipse Γ de foyers F et F' et de grand axe $2a$ on a :

$$\forall P \quad P \in \Gamma \Leftrightarrow PF + PF' = 2a$$

En d'autres termes $\boxed{\Gamma = \{P / PF + PF' = 2a\}}$: c'est la **définition bifocale de**

l'ellipse.

c) Définition bifocale d'une hyperbole

Soit Γ une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un R.O.N. dont l'axe Ox est

égale à l'axe focal m , alors : $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $d \equiv x = \frac{a^2}{c}$ et $d' \equiv x = -\frac{a^2}{c}$.

Comme l'hyperbole est entièrement située à l'extérieur de ses directrices d et d' (voir figure p 18), on a deux possibilités pour tout point $P \in \Gamma$:

- P est du même côté de d que F (donc $Pd < Pd'$ et $Pd' - Pd = dd'$), alors :

$$PF' - PF = \varepsilon \cdot Pd' - \varepsilon \cdot Pd = \varepsilon \cdot (Pd' - Pd) = \varepsilon \cdot dd' = \frac{c}{a} \cdot 2 \cdot \frac{a^2}{c} = 2a$$

- P est du même côté de d' que F' (donc $Pd' < Pd$ et $Pd - Pd' = dd'$), alors :

$$PF - PF' = \varepsilon \cdot Pd - \varepsilon \cdot Pd' = \varepsilon \cdot (Pd - Pd') = \varepsilon \cdot dd' = \frac{c}{a} \cdot 2 \cdot \frac{a^2}{c} = 2a$$

Dans les deux cas on a : $|PF - PF'| = 2a$.

Réciproquement si $|PF - PF'| = 2a$ alors on a, en posant $P(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 & PF - PF' = 2a \text{ ou } PF' - PF = 2a \\
 \Rightarrow & \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \text{ ou } \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\
 \Rightarrow & \dots (\text{exercice!}) \\
 \Rightarrow & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\
 \Rightarrow & P \in \Gamma
 \end{aligned}$$

Théorème et définition

Pour toute hyperbole Γ de foyers F et F' on a :

$$\forall P \quad P \in \Gamma \Leftrightarrow |PF - PF'| = 2a$$

En d'autres termes $\Gamma = \{P / |PF - PF'| = 2a\}$: c'est la **définition bifocale de l'hyperbole**.

Exercices 10, 11

9) Tangentes à une conique

a) Tangentes à une parabole

Soit Γ une **parabole** de sommet S , de directrice d , d'axe focal m et de paramètre p .
Nous avons vu que dans un R.O.N. d'origine S et d'axes parallèles à m et à d l'équation de la parabole Γ est de l'une des quatre formes suivantes :

- $x^2 = 2py$ si m est l'axe des y orienté de S vers F
- $x^2 = -2py$ si m est l'axe des y orienté de S vers D
- $y^2 = 2px$ si m est l'axe des x orienté de S vers F
- $y^2 = -2px$ si m est l'axe des x orienté de S vers D

Cherchons l'équation de la tangente (T) à Γ au point $P(x_0, y_0) \in \Gamma$.

- Si $x^2 = 2py \Leftrightarrow y = \frac{1}{2p} x^2$, on a, en posant $f(x) = \frac{1}{2p} x^2$:

$$\Gamma = G_f \text{ et } (T) \equiv y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Comme $f'(x) = \frac{1}{2p} 2x = \frac{x}{p}$ et que $x_0^2 = 2py_0$ (car $P \in \Gamma$), il vient :

$$\begin{aligned}(T) \equiv y - y_0 &= \frac{x_0}{p}(x - x_0) \Leftrightarrow py - py_0 = x_0x - x_0^2 \\ &\Leftrightarrow py - py_0 = x_0x - 2py_0 \\ &\Leftrightarrow py + py_0 = x_0x\end{aligned}$$

- Si $x^2 = -2py$ on obtient de même (exercice !) : $(T) \equiv x_0x = -py_0 - py$
- Si $y^2 = 2px \Leftrightarrow y = \sqrt{2px}$ ou $y = -\sqrt{2px}$ il faut distinguer trois cas :

1^{er} cas : $y_0 > 0$

Alors $P \in G_f$ où $f(x) = \sqrt{2px}$ (en particulier $y_0 = f(x_0) = \sqrt{2px_0}$) et comme

$$f'(x) = \frac{2p}{2\sqrt{2px}} = \frac{p}{\sqrt{2px}}, \text{ donc } f'(x_0) = \frac{p}{\sqrt{2px_0}} = \frac{p}{y_0}, \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned}(T) \equiv y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \\ &\Leftrightarrow y_0y - y_0^2 = px - px_0 \\ &\Leftrightarrow y_0y - 2px_0 = px - px_0 \text{ (car } y_0^2 = 2px_0) \\ &\Leftrightarrow y_0y = px + px_0\end{aligned}$$

2^e cas : $y_0 < 0$

Alors $P \in G_f$ où $f(x) = -\sqrt{2px}$ (en particulier $y_0 = f(x_0) = -\sqrt{2px_0}$) et

$$\text{comme } f'(x) = -\frac{p}{\sqrt{2px}}, \text{ donc } f'(x_0) = -\frac{p}{\sqrt{2px_0}} = -\frac{p}{-y_0} = \frac{p}{y_0}, \text{ la suite des}$$

calculs et le résultat sont les mêmes que dans le 1^{er} cas.

3^e cas : $y_0 = 0$ (alors $x_0 = 0$ càd $P(0,0)$)

Alors $P \in G_f$ où $f(x) = \sqrt{2px}$ et comme

$$\lim_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{0^+} \frac{\sqrt{2px} - 0}{x} = \lim_{0^+} \sqrt{\frac{2p}{x}} = +\infty, \text{ } G_f \text{ admet l'axe Oy comme}$$

tangente, d'où $(T) \equiv x = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot y = px + p \cdot 0$

Conclusion : dans les trois cas on obtient : $(T) \equiv y_0y = px + px_0$

Si $y^2 = -2px \Leftrightarrow y = \sqrt{-2px}$ ou $y = -\sqrt{-2px}$ et par un calcul analogue au précédent (exercice !) on obtient : $(T) \equiv y_0y = -px - px_0$

Théorème

La **tangente** (T) à une **parabole** Γ au point $P(x_0, y_0) \in \Gamma$ a pour équation :

- (T) $\equiv x_0 x = p y_0 + p y$ si $\Gamma \equiv x^2 = 2 p y$
- (T) $\equiv x_0 x = -p y_0 - p y$ si $\Gamma \equiv x^2 = -2 p y$
- (T) $\equiv y_0 y = p x + p x_0$ si $\Gamma \equiv y^2 = 2 p x$
- (T) $\equiv y_0 y = -p x - p x_0$ si $\Gamma \equiv y^2 = -2 p x$

b) Tangentes à une ellipse

Soit Γ une ellipse d'équation $\Gamma \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $P(x_0, y_0) \in \Gamma$.

Cherchons l'équation de la tangente (T) à Γ en P. Comme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

il faudra distinguer deux cas :

1^{er} cas : $y_0 > 0$ (alors $y_0 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}$)

Posons $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, alors $f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, donc

$f'(x_0) = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$ et par conséquent :

$$(T) \equiv y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow y - y_0 = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} (x - x_0) \quad \left| \cdot a \sqrt{a^2 - x_0^2} = a \frac{a y_0}{b} = \frac{a^2 y_0}{b} \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 y_0}{b} y - \frac{a^2 y_0}{b} y_0 = -b x_0 (x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b} y y_0 - \frac{a^2}{b} y_0^2 = -b x_0 x + b x_0^2 \quad \left| \cdot \frac{1}{a^2 b} \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{y y_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\frac{x x_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1 \quad (\text{car } P(x_0, y_0) \in \Gamma)$$

2^e cas : $y_0 < 0$ (alors $y_0 = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$)

Posons $f(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, alors $f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, donc $f'(x_0) = \frac{b}{a} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$

et par un calcul analogue au précédent (exercice !) on obtient exactement le même

$$\text{résultat : } (T) \equiv \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Dans le cas où $\Gamma \equiv \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ on obtient : $(T) \equiv \frac{xx_0}{b^2} + \frac{yy_0}{a^2} = 1$ par un calcul

analogue en échangeant a et b, d'où :

Théorème

La **tangente** (T) à une **ellipse** Γ au point $P(x_0, y_0) \in \Gamma$ a pour équation :

- $(T) \equiv \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ si $\Gamma \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- $(T) \equiv \frac{xx_0}{b^2} + \frac{yy_0}{a^2} = 1$ si $\Gamma \equiv \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

c) Tangentes à une hyperbole

Par des calculs analogues aux précédents (exercice !) on montre que :

Théorème

La **tangente** (T) à une **hyperbole** Γ au point $P(x_0, y_0) \in \Gamma$ a pour équation :

- $(T) \equiv \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ si $\Gamma \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- $(T) \equiv \frac{yy_0}{a^2} - \frac{xx_0}{b^2} = 1$ si $\Gamma \equiv \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Remarque : intersection d'une conique et d'une droite

- Pour trouver les points d'intersection d'une conique Γ et d'une droite d (il y en a 0, 1 ou 2) il faut résoudre le système formé par les équations de la droite et de la conique.
- Si $d \cap \Gamma = \emptyset$, on dit que la droite est **extérieure** à la conique (elle peut être asymptote à la conique dans le cas d'une hyperbole).

- Si $d \cap \Gamma = \{I\}$ alors la droite d est soit une tangente, soit une sécante à la conique (si d est parallèle à une asymptote d'une hyperbole).
- Si $d \cap \Gamma = \{I, J\}$ alors la droite d est **sécante** à la conique.

Exercices 12 - 24

10) Propriétés optiques des coniques

a) Propriétés préparatoires (appelées aussi : lemmes)

Lemme 1

Soit d une droite non parallèle à (Oy) d'équation $d \equiv y = ax + b$ qui coupe (Ox) en A et α l'angle formé par d et Ox tel que $\alpha = \widehat{xAB}$ où $B \in d$ et $y_B > 0$. Alors :

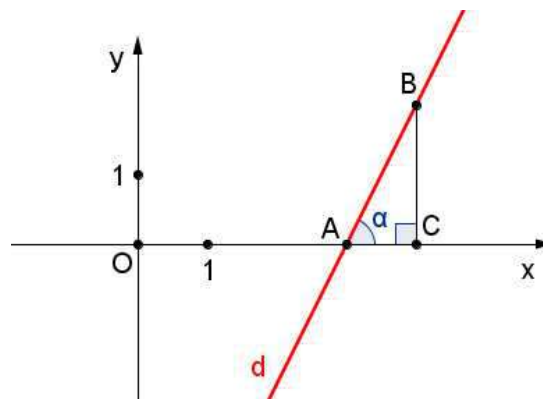
$$\boxed{\tan \alpha = a}$$

démonstration :

1^{er} cas : $a > 0$

Choisissons B et C tels que le triangle $\Delta(ABC)$ soit rectangle en C et $\overline{AC} = 1$. Alors

$$BC = \text{pente de } d = a \text{ et } \tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{1} = a.$$

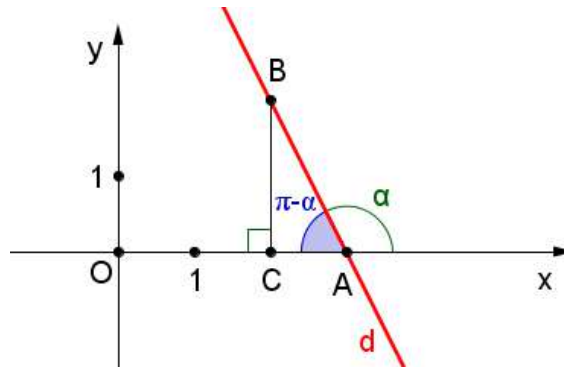


2^e cas : $a < 0$

Choisissons B et C tels que le triangle $\Delta(ABC)$ soit rectangle en C et $AC = 1$. Alors

$$BC = |\text{pente de } d| = -a \text{ puisque } a < 0 \text{ et } \tan(\pi - \alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{-a}{1} = -a. \text{ Comme}$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \text{ on a bien : } \tan \alpha = a.$$



3^e cas : $a = 0$

Alors $d = (Ox)$, donc $\alpha = 0$ et $\tan \alpha = \tan 0 = 0 = a$.

cqfd

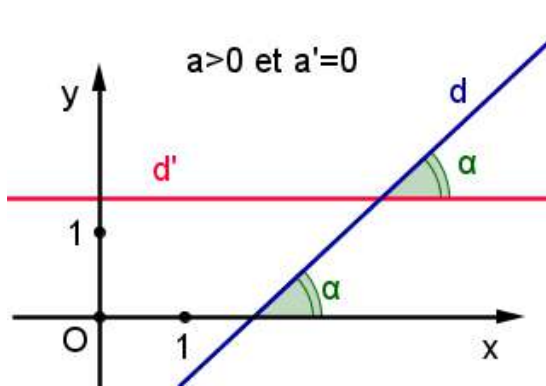
Lemme 2

Soient d et d' deux droites d'équations $d \equiv y = ax + b$ et $d' \equiv y = a'x + b'$ (d et d' non parallèles à (Oy)), sécantes (càd $a \neq a'$), non perpendiculaires (donc $aa' \neq -1$)

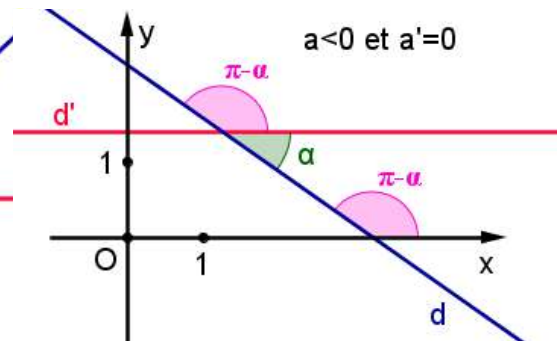
et α l'angle aigu formé par d et d' . Alors : $\tan \alpha = \left| \frac{a - a'}{1 + aa'} \right|$

démonstration:

1^{er} cas : $a = 0$ ou $a' = 0$ (p.ex. $a' = 0$ et $a \neq 0$)



$$\begin{aligned} \tan \alpha &= a \quad (\text{d'après lemme 1}) \\ &= |a| \quad (\text{car } a > 0) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tan(\pi - \alpha) &= a \quad (\text{d'après lemme 1}) \\ \Leftrightarrow -\tan \alpha &= a \\ \Leftrightarrow \tan \alpha &= -a \\ \Leftrightarrow \tan \alpha &= |a| \quad (\text{car } a < 0) \end{aligned}$$

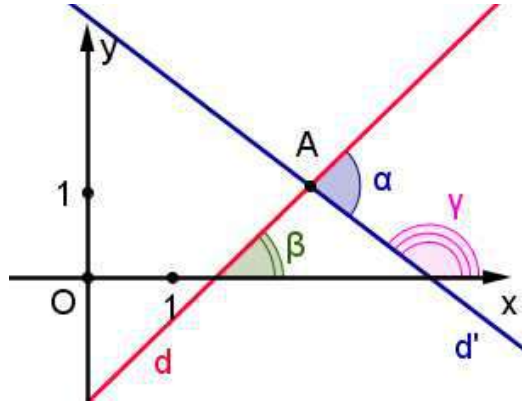
$$\text{pour les deux figures on a : } \tan \alpha = |a| = \left| \frac{a - 0}{1 + a \cdot 0} \right| = \left| \frac{a - a'}{1 + a \cdot a'} \right|$$

cas général : $a \neq 0$ et $a' \neq 0$

Posons $d \cap d' = \{A\}$, α = angle aigu formé par d et d' , β = angle formé par d et (Ox)

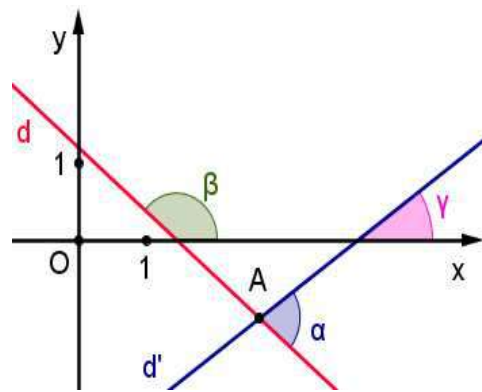
tel que $\tan \beta = a$ et γ = angle formé par d' et (Ox) tel que $\tan \gamma = a'$ d'après lemme 1.

Dans tous les cas de figure on obtient : $\tan \alpha = |\tan(\beta - \gamma)|$. Vérifions-le sur deux exemples :



$$(\pi - \alpha) + \beta + (\pi - \gamma) = \pi \Leftrightarrow \alpha = \pi + \beta - \gamma$$

donc $\tan \alpha = \tan(\beta - \gamma)$



$$(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + \gamma = \pi \Leftrightarrow \alpha = \pi - (\beta - \gamma)$$

donc $\tan \alpha = -\tan(\beta - \gamma)$

Ainsi dans chaque cas de figure on a : $\tan \alpha = |\tan(\beta - \gamma)| = \left| \frac{\tan \beta - \tan \gamma}{1 + \tan \beta \tan \gamma} \right| = \left| \frac{a - a'}{1 + aa'} \right|$

b) Propriété optique de la parabole

Soit Γ une **parabole** de foyer F , de sommet S et d'axe focal m , $P \in \Gamma \setminus \{S\}$, (T) la tangente à Γ en P , α l'angle aigu formé par (T) et (FP) , et β l'angle aigu formé par (T) et m (ou toute autre droite parallèle à m , en particulier celle passant par P).

Alors $\alpha = \beta$.

démonstration :

Prenons un R.O.N. d'origine S avec $(Sx) = m$ orienté tel que $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Dans ce

repère $\Gamma \equiv y^2 = 2px$, pour tout $P(x_0, y_0) \in \Gamma \setminus \{S\}$ on a $x_0 > 0$ et $y_0 \neq 0$ et enfin

l'équation de (T) est donnée par : $(T) \equiv y_0 y = px + px_0 \Leftrightarrow y = \frac{p}{y_0} x + \frac{px_0}{y_0}$. Ainsi la

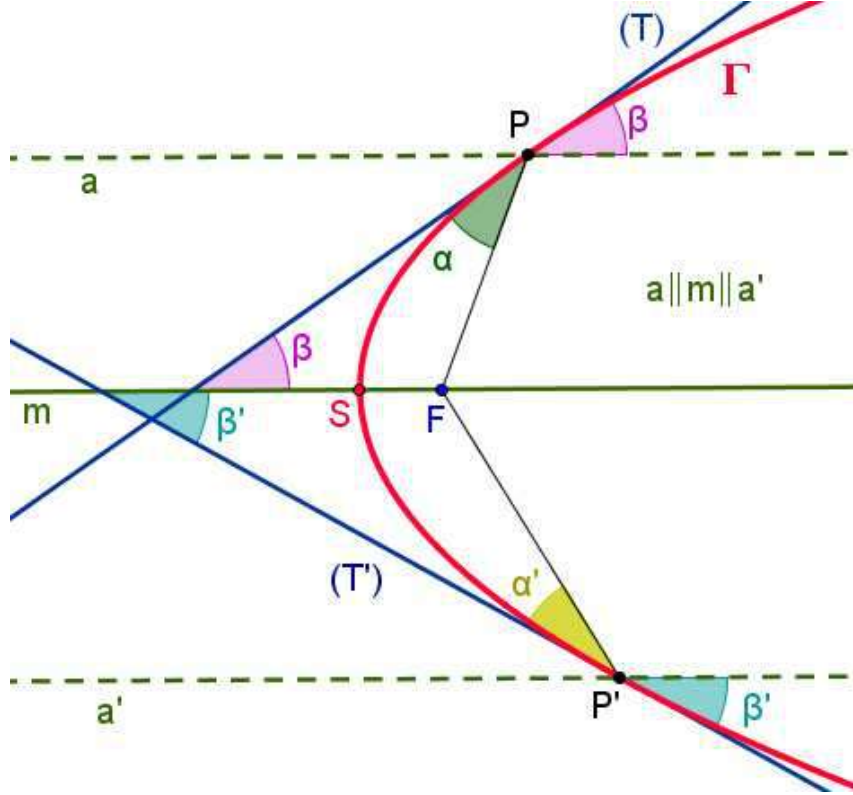
pende de (T) vaut $\frac{p}{y_0}$ et celle de m vaut 0.

En appliquant le lemme 2 aux droites (T) et a || m on obtient :

$$\tan \beta = \left| \frac{\frac{p}{y_0} - 0}{1 + \frac{p}{y_0} \cdot 0} \right| = \left| \frac{p}{y_0} \right|.$$

Pour l'angle α il faut distinguer deux cas :

1^{er} cas : $x_P \neq x_F$ c'est-à-dire (FP) et m ne sont pas orthogonales.

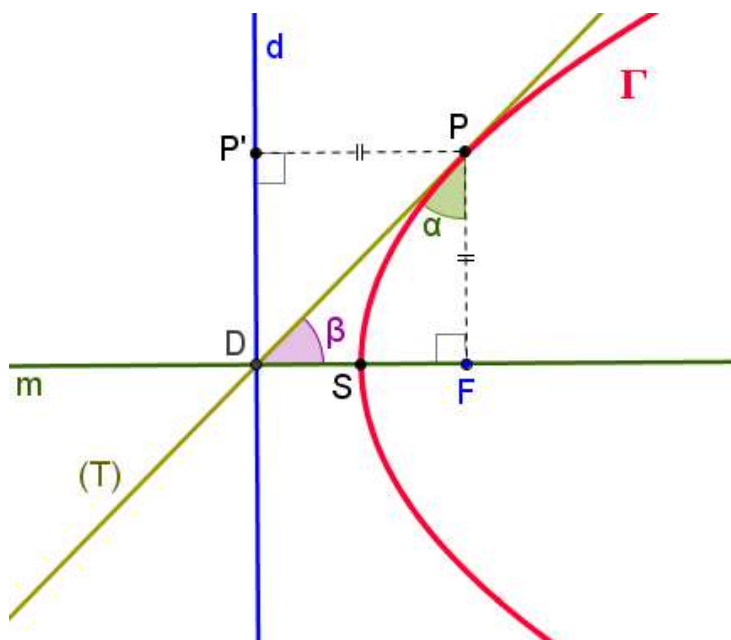


Alors la pente de (FP) vaut $\frac{y_P - y_F}{x_P - x_F} = \frac{y_0 - 0}{x_0 - \frac{p}{2}} = \frac{2y_0}{2x_0 - p}$ et d'après le lemme 2 on a :

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \left| \frac{\frac{2y_0}{2x_0 - p} - \frac{p}{y_0}}{1 + \frac{2y_0}{2x_0 - p} \cdot \frac{p}{y_0}} \right| = \left| \frac{\frac{2y_0^2 - p(2x_0 - p)}{(2x_0 - p)y_0}}{\frac{2x_0 - p + 2p}{2x_0 - p}} \right| = \left| \frac{2y_0^2 - 2px_0 + p^2}{(2x_0 + p)y_0} \right| \\ &= \left| \frac{2 \cdot 2px_0 - 2px_0 + p^2}{(2x_0 + p)y_0} \right| = \left| \frac{2px_0 + p^2}{(2x_0 + p)y_0} \right| = \left| \frac{p(2x_0 + p)}{(2x_0 + p)y_0} \right| = \left| \frac{p}{y_0} \right| \end{aligned}$$

Ainsi $\tan \alpha = \tan \beta$, donc $\alpha = \beta$ puisque $\alpha, \beta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$

2^e cas : $x_p = x_F \Leftrightarrow (FP) \perp m$



Alors $FPP'D$ est un rectangle, et comme $PP' = Pf$ (puisque Γ est une parabole)

$FPP'D$ est un carré donc $FP = FD \Leftrightarrow y_0 = p$ (1) et $\widehat{FDP} = \widehat{DPF} = \frac{\pi}{4}$ (2).

Or $\tan \beta = \text{pente de } (T) = \frac{p}{y_0}$ (et ceci *indépendamment du point d'intersection de (T)*

et de m qui n'est pas *a priori* le point D !) donc $\tan \beta = 1$ d'après (1). Par conséquent

$\beta = \frac{\pi}{4}$ et d'après (2) la droite (DP) et la tangente (T) forment le même angle avec m

et comme elles passent toutes les deux par P, on a $(T) = (PD)$, donc $\alpha = \beta \left(= \frac{\pi}{4} \right)$.

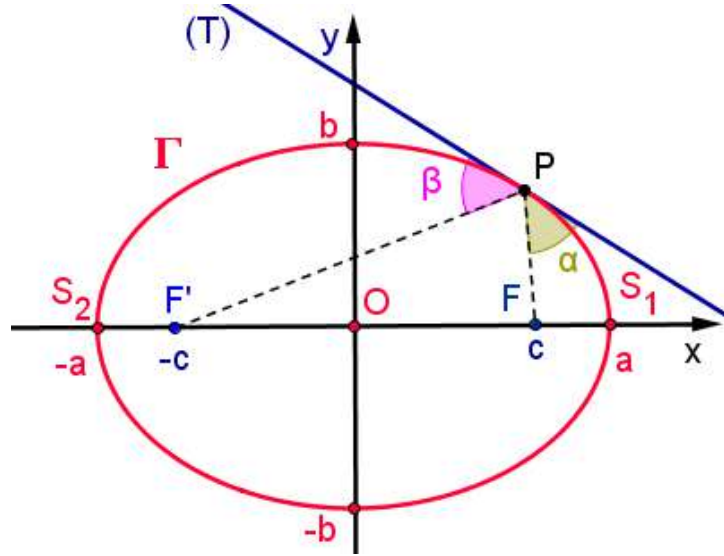
Commentaire

Cette propriété montre que si F est une source lumineuse (p.ex. une ampoule), alors tous les rayons de lumière qui touchent la parabole sont reflétés par celle-ci parallèlement à l'axe focal, c'est-à-dire que la parabole (en fait un paraboloïde, surface obtenue en faisant tourner la parabole autour de son axe focal) peut servir comme miroir d'un projecteur. Inversement tous les rayons lumineux parallèles à l'axe focal sont réfléchis par la parabole sur son foyer, ce qui montre que la parabole peut aussi servir comme miroir d'un télescope (les rayons d'une étoile arrivant sur terre peuvent en effet être considérés comme étant parallèles et l'œil de l'observateur sera placé en F).

c) Propriété optique de l'ellipse

Soit Γ une **ellipse** de foyers F et F' , $P \in \Gamma$, (T) la tangente à Γ en P , α l'angle aigu formé par (T) et (FP) , et β l'angle aigu formé par (T) et $(F'P)$.

Alors $\alpha = \beta$.



démonstration :

Prenons un R.O.N. d'origine $O = \text{milieu de } [FF']$ avec $(Ox) = m$ orienté tel que

$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, $S_1(a, 0)$ et $S_2(-a, 0)$. Dans ce repère $\Gamma \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (avec

Il faudra distinguer trois cas suivant la position de P :

1^{er} cas : $y_0 = 0$

Alors $P = S_1$ ou $P = S_2$, donc $(T) \equiv x = a$ ou $(T) \equiv x = -a$ et dans les deux cas on a $\alpha = \beta = 0$.

2^e cas : $x_0 = c$ ou $x_0 = -c$, c'est-à-dire $(PF) \perp m$ ou $(PF') \perp m$

$$P(\pm c, y_0) \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = b^2 - \frac{b^2 c^2}{a^2} = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2} = \frac{b^2 b^2}{a^2} = \frac{b^4}{a^2} \Leftrightarrow y_0 = \pm \frac{b^2}{a}$$

On a donc quatre possibilités : $P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$, $P\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$, $P\left(-c, \frac{b^2}{a}\right)$ ou $P\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$

Nous traiterons le cas $P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$, les calculs pour les autres cas étant analogues.

$$(T) \equiv \frac{cx}{a^2} + \frac{\frac{b^2}{a}y}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{cx}{a^2} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{cx}{a} + y = a \Leftrightarrow y = -\frac{c}{a}x + a$$

$$(T) \cap m: y = 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a}x = a \Leftrightarrow x = \frac{a^2}{c}, \text{ donc } (T) \cap m = \left\{ D\left(\frac{a^2}{c}, 0\right) \right\} \text{ et } (T) = (PD)$$

$$\text{Dans le triangle } \Delta(PDF) \text{ rectangle en F : } \tan \alpha = \frac{FD}{FP} = \frac{\frac{a^2}{c} - c}{\frac{b^2}{a}} = \frac{\frac{a^2 - c^2}{c}}{\frac{b^2}{a}} = \frac{b^2}{c} \cdot \frac{a}{b^2} = \frac{a}{c}.$$

$$\text{D'autre part la pente de } F'P = \frac{\frac{b^2}{a} - 0}{c + c} = \frac{b^2}{2ac} \text{ et la pente de } (T) = -\frac{c}{a}, \text{ donc d'après le}$$

$$\text{lemme2 : } \tan \beta = \left| \frac{\frac{b^2}{2ac} + \frac{c}{a}}{1 - \frac{b^2}{2ac} \cdot \frac{c}{a}} \right| = \left| \frac{\frac{b^2 + 2c^2}{2ac}}{\frac{2a^2 - b^2}{2a^2}} \right| = \left| \frac{\frac{a^2 - c^2 + 2c^2}{2ac}}{\frac{2a^2 + c^2 - a^2}{2a^2}} \right| = \left| \frac{\frac{a^2 + c^2}{2ac}}{\frac{a^2 + c^2}{2a^2}} \right| = \left| \frac{2a^2}{2ac} \right| = \frac{a}{c} \text{ et}$$

$$\text{par conséquent } \tan \alpha = \tan \beta, \text{ donc } \alpha = \beta \text{ puisque } \alpha, \beta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[.$$

3^e cas : $x_0 \neq \pm c$ et $y_0 \neq 0$

$$(T) \equiv \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2 \Leftrightarrow y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x + \frac{b^2}{y_0}.$$

$$\text{Ainsi la pente de } (T) \text{ vaut } -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}, \text{ celle de } (FP) \frac{y_0 - 0}{x_0 - c} = \frac{y_0}{x_0 - c} \text{ et celle } (PF')$$

$$\frac{y_0}{x_0 + c}, \text{ donc d'après le lemme2 :}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \left| \frac{\frac{y_0}{x_0 - c} + \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}{1 - \frac{y_0}{x_0 - c} \cdot \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}} \right| = \left| \frac{\frac{a^2 y_0^2 + b^2 x_0 (x_0 - c)}{a^2 y_0 (x_0 - c)}}{\frac{a^2 (x_0 - c) - b^2 x_0}{a^2 (x_0 - c)}} \right| = \left| \frac{\frac{a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - b^2 c x_0}{y_0}}{\frac{a^2 x_0 - a^2 c - b^2 x_0}{1}} \right| \\ &= \left| \frac{a^2 b^2 - b^2 c x_0}{y_0 (x_0 (a^2 - b^2) - a^2 c)} \right| = \left| \frac{b^2 (a^2 - c x_0)}{y_0 (x_0 c^2 - a^2 c)} \right| = \left| \frac{b^2 (a^2 - c x_0)}{-c y_0 (a^2 - x_0 c)} \right| = \left| \frac{b^2}{c y_0} \right| \\ \tan \beta &= \left| \frac{\frac{y_0}{x_0 + c} + \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}{1 - \frac{y_0}{x_0 + c} \cdot \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}} \right| = \dots = \left| \frac{b^2}{c y_0} \right| \end{aligned}$$

par conséquent $\tan \alpha = \tan \beta$, donc $\alpha = \beta$ puisque $\alpha, \beta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

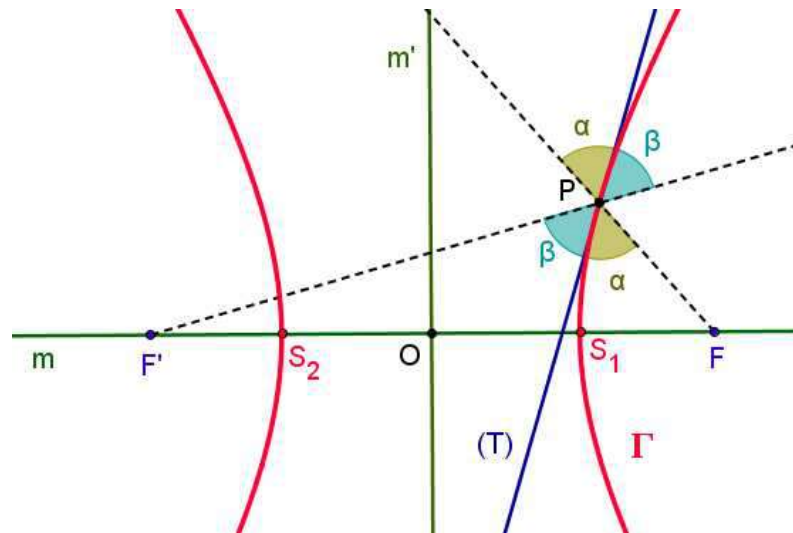
Commentaire

Un rayon lumineux partant d'un foyer dans n'importe quelle direction sera réfléchi par l'ellipse vers l'autre foyer.

d) Propriété optique de l'hyperbole

Soit Γ une **hyperbole** de foyers F et F' , $P \in \Gamma$ avec $P \neq$ sommet de Γ , (T) la tangente à Γ en P , α l'angle aigu formé par (T) et (FP) , et β l'angle aigu formé par (T) et $(F'P)$. Alors $\alpha = \beta$.

La démonstration, laissée en exercice, est analogue à la précédente



Commentaire :

Un miroir hyperbolique réfléchit un rayon issu d'un foyer comme s'il était issu de l'autre foyer !

Exercices 25 - 27

FORMULAIRE SUR LES CONIQUES

d'équation focale : $\boxed{PF = \varepsilon \cdot Pd}$

A) PARABOLES

- une **directrice** d , un **foyer** F , **excentricité** $\varepsilon = 1$
- **axe focal** m : $F \in m$, $m \perp d$ et $m \cap d = \{D\}$ (m est un axe de symétrie)
- **paramètre** p de la parabole : $p = Fd = FD$
- un **sommet** S = milieu de $[DF]$: $SF = SD = \frac{p}{2}$
- **équation** dans un R.O.N. d'origine S et d'axes parallèles à m et à d :
 si $m = (Ox)$ orienté de S vers F alors $\boxed{y^2 = 2px}$, $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, $d \equiv x = -\frac{p}{2}$ et $(T) \equiv y_0 y = px + px_0$
 si $m = (Ox)$ orienté de S vers D alors $\boxed{y^2 = -2px}$, $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, $d \equiv x = \frac{p}{2}$ et $(T) \equiv y_0 y = -px - px_0$
 si $m = (Oy)$ orienté de S vers F alors $\boxed{x^2 = 2py}$, $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, $d \equiv y = -\frac{p}{2}$ et $(T) \equiv x_0 x = py + py_0$
 si $m = (Oy)$ orienté de S vers D alors $\boxed{x^2 = -2py}$, $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$, $d \equiv y = \frac{p}{2}$ et $(T) \equiv x_0 x = -py - py_0$

où (T) est la tangente à l'ellipse au point $P(x_0; y_0)$

B) CONIQUES CENTREES : ELLIPSES et HYPERBOLES

1) Coniques centrées

- **axes** : axes focal m et axe non focal m'
 $m \perp m'$ et m et m' sont les **axes de symétrie** de la conique
- deux **sommets** sur l'axe focal m : S_1 et S_2
- un **centre** : le milieu O de $[S_1, S_2]$, on pose : $a = OS_1 = OS_2$
 O est **centre de symétrie** de la conique et $O \in m \cap m'$
- deux **foyers** $F, F' \in m$ symétriques par rapport à O , on pose $c = OF = OF'$
 la distance $FF' = 2c$ est appelée **distance focale**
- deux **directrices** d et d' symétriques par rapport à m' avec $\boxed{Od = Od' = \frac{a^2}{c}}$
- **excentricité** $\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$

2) Ellipses ($\varepsilon < 1$)

- le nombre réel positif **b** < **a** est défini par : $b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$
- deux **sommets supplémentaires** sur m' : S_3 et S_4 , avec : $OS_3 = OS_4 = b$
- on appelle **grand axe** la distance $S_1S_2 = 2a$ et **petit axe** la distance $S_3S_4 = 2b$
- équation** dans un R.O.N. d'origine **O** et d'axes parallèles à m et à d :
 - si $m = (Ox)$ alors $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $S_{1,2}(\pm a, 0)$, $S_{3,4}(0, \pm b)$, $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$,
 $d, d' \equiv x = \pm \frac{a^2}{c}$ et la **tangente** au point $P(x_0, y_0)$: $(T) \equiv \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$
 - si $m = (Oy)$ alors $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$, $S_{1,2}(0, \pm a)$, $S_{3,4}(\pm b, 0)$, $F(0, c)$, $F'(0, -c)$,
 $d, d' \equiv y = \pm \frac{a^2}{c}$ et la **tangente** au point $P(x_0, y_0)$: $(T) \equiv \frac{xx_0}{b^2} + \frac{yy_0}{a^2} = 1$
- $\Gamma = \{P / PF + PF' = 2a\}$ (définition bifocale)

3) Hyperboles ($\varepsilon > 1$)

- le nombre réel positif **b** est défini par : $b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$
- deux **asymptotes obliques** (A.O.) passant par **O**
- équation** dans un R.O.N. d'origine **O** et d'axes parallèles à m et à d :
 - si $m = (Ox)$ alors $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, **A.O.** : $y = \pm \frac{b}{a}x$, $S_{1,2}(\pm a, 0)$, $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$,
 $d, d' \equiv x = \pm \frac{a^2}{c}$ et la **tangente** au point $P(x_0, y_0)$: $(T) \equiv \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$
 - si $m = (Oy)$ alors $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, **A.O.** : $y = \pm \frac{a}{b}x$, $S_{1,2}(0, \pm a)$, $F(0, c)$, $F'(0, -c)$,
 $d, d' \equiv y = \pm \frac{a^2}{c}$ et la **tangente** au point $P(x_0, y_0)$: $(T) \equiv \frac{yy_0}{a^2} - \frac{xx_0}{b^2} = 1$
- si $a = b$ les A.O. sont orthogonales et on dit que l'hyperbole est **équilatère**.
- $\Gamma = \{P / |PF - PF'| = 2a\}$ (définition bifocale)

EXERCICES

- 1) Dans un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan on définit 4 paraboles par leurs équations cartésiennes réduites :

$$y^2 = 12x \quad (1) \qquad x^2 + 9y = 0 \quad (2) \qquad y^2 + \frac{5}{6}x = 0 \quad (3) \qquad 8x^2 - 5y = 0 \quad (4)$$

Pour chacune d'elles, précisez l'axe focal, le foyer et la directrice. Construisez-les.

- 2) Dans un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan on donne les points $A(3;0)$, $B(-7;0)$, $C(0;5)$, $E(1,3)$ et les droites $d \equiv x = -3$, $d' \equiv y = -1$.

a) Ecrivez l'équation cartésienne (dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$) de la parabole de foyer A et de directrice d. Précisez son axe focal et son sommet.

b) Mêmes question pour la parabole de foyer B et de directrice d.

c) Mêmes question pour la parabole de foyer C et de directrice d'.

d) Mêmes question pour la parabole de foyer E et de directrice d.

e) Mêmes question pour la parabole de foyer E et de directrice d'.

- 3) Donnez une équation cartésienne dans un R.O.N. d'origine O des paraboles de sommet O, de foyer F, de directrice d et de paramètre p qui vérifient :

a) (Ox) est l'axe focal, la coordonnée non nulle de F est positive et $p = 7$.

b) (Oy) est l'axe focal, la coordonnée non nulle de F est négative et $p = \frac{11}{4}$.

c) $d \equiv x + 6 = 0$.

d) $F(0;4)$.

e) $F(0;-1)$.

f) (Ox) est l'axe focal et le point $M(3;-4)$ appartient à la parabole.

g) (Oy) est l'axe focal et le point $M(2;-5)$ appartient à la parabole.

- 4) Soient $\Gamma_1 \equiv \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ et $\Gamma_2 \equiv \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ dans un R.O.N. Pour chacune de ces coniques déterminez sa nature, son axe focal, ses sommets, ses foyers, ses directrices, ses asymptotes éventuelles et son excentricité. Donnez également une équation focale pour chacune d'elles. Construisez-les (unités : 1 cm).

- 5) Le plan est rapporté à un R.O.N. d'origine O. Déterminez une équation cartésienne et une équation focale des coniques de centre O telles que :
- a) (Ox) est l'axe focal, le grand axe vaut 16 et la distance focale 12.
 - b) (Oy) est l'axe focal, la distance focale vaut 20 et l'excentricité $\sqrt{20}$.
 - c) (Ox) est l'axe focal, le petit axe vaut 10 et l'excentricité 0,2.
 - d) (Oy) est l'axe focal, le grand axe vaut 32 et la conique passe par A(1; 2).
 - e) La conique passe par les points $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$ et $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$ et $\varepsilon < 1$.
 - f) (Oy) est l'axe focal, la distance focale vaut 24 et la conique admet deux asymptotes obliques qui forment un angle de $\frac{\pi}{3}$ rd.
 - g) Un foyer a pour coordonnées (-3; 0) et l'excentricité vaut $\sqrt{3}$.
 - h) La conique coupe l'axe focal en (0; -2) et elle admet comme A.O. : $y = \frac{1}{3}x$.
 - i) Un foyer a pour coordonnées (-8; 0) et le petit axe vaut 12.
- 6) a) Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $4y^2 + 12y + 4x + 9 = 0$ dans un R.O.N. Déterminez les coordonnées de son foyer, de son sommet et les équations de sa directrice et de son axe de symétrie dans ce même repère.
- b) Mêmes questions pour la parabole d'équation $x^2 + 6x - 5y = 0$.
- 7) Identifiez les coniques données par les équations suivantes, donnez leurs caractéristiques (foyers, directrices, sommets, excentricité, asymptotes éventuelles) et représentez-les :
- a) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$
 - b) $9x^2 - y^2 + 18 = 0$
 - c) $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$
 - d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
 - e) $4y^2 - 24y + x + 36 = 0$
 - f) $4x^2 - y^2 = 2y$
 - g) $x^2 + 6x + y = 0$
 - h) $4x^2 - y^2 + x + 4y - 48 = 0$
 - i) $y = 2\sqrt{x^2 - 4}$

j) $y = 2 - \sqrt{-x^2 - 2x}$

k) $x = 2 + \sqrt{2 + y}$

- 8) Déterminez une équation, le sommet, le foyer et la directrice de la parabole $\mathcal{P}$ sachant que :

a) L'axe de $\mathcal{P}$ est horizontal et $\mathcal{P}$ passe par $A(-2;3)$, $B(2;7)$ et $C(-1;1)$.

b) L'axe de $\mathcal{P}$ est vertical et $\mathcal{P}$ passe par $A(-2;3)$, $B(2;7)$ et $C(-1;1)$.

c) L'axe de $\mathcal{P}$ n'est pas oblique et $\mathcal{P}$ passe par $A(-1;5)$, $B(1;2)$ et $C(3;5)$.

- 9) Déterminez l'équation cartésienne réduite des coniques suivantes données par un foyer F et la directrice associée dans un R.O.N. ainsi que leur excentricité ε :

a) $F(1,4)$, $d \equiv y+3=0$ et $\varepsilon=2$.

b) $F(-2,3)$, $d \equiv x+5=0$ et $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

c) $F(5,2)$, $d \equiv y-1=0$ et $\varepsilon=1$.

d) $F(6,-2)$, $d \equiv x=2,8$ et $\varepsilon=\frac{5}{3}$.

e) $F(-\frac{11}{2},5)$, $d \equiv x=-\frac{1}{2}$ et $\varepsilon=1$.

- 10) Soient A et B deux points fixes avec $AB=8$. Déterminez la nature, donnez une équation cartésienne et une équation focale des lieux suivants puis construisez-les:

$$\mathbb{S} = \{M / MA + MB = 10\}$$

$$\mathbb{T} = \{M / |MA - MB| = 4\}$$

- 11) Un jardinier souhaite créer un parterre de forme elliptique dont la grande dimension est 20 m et la plus petite 10 m. Pour cela il plante deux piquets fixes M et P dans le sol auxquels il attache les deux bouts d'une ficelle rigide d'une certaine longueur. Il tend cette ficelle par un piquet mobile R qu'il garde toujours vertical tout en le déplaçant de telle façon que la corde reste bien tendue. Justifiez pourquoi le piquet R décrit de cette façon une ellipse ! Comment faut-il choisir la distance entre les piquets fixes et la longueur de la ficelle pour obtenir l'ellipse souhaitée ?

- 12) Soit l'hyperbole d'équation $4x^2 - 9y^2 = 36$ et les droites :

$$d_1 \equiv x - y + 1 = 0$$

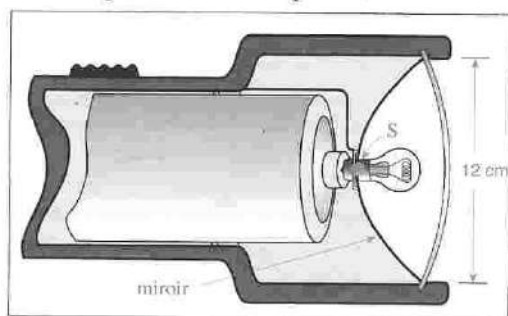
$$d_2 \equiv 2(\sqrt{2}+1)x - 3y - 6(\sqrt{2}+1) = 0$$

$$d_3 \equiv y = 4 - \frac{2\sqrt{5}}{3}x$$

Etudiez les positions relatives de ces droites et de cette hyperbole.

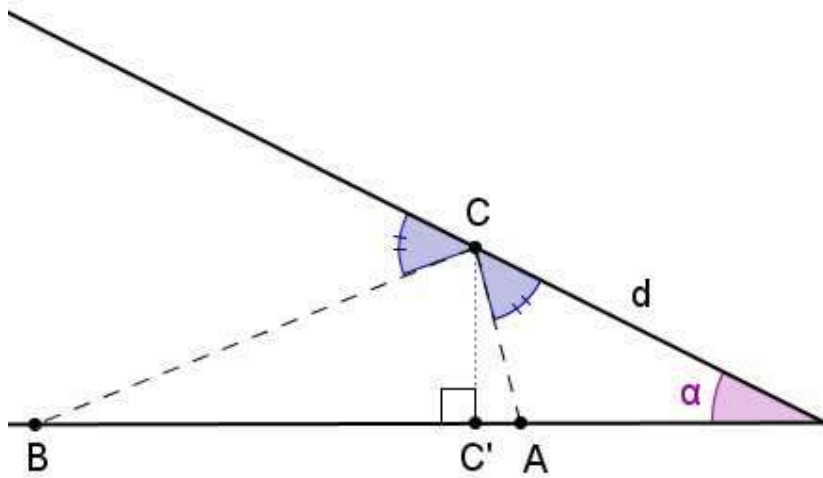
- 13)** Déterminez les équations des tangentes à l'ellipse d'équation $9x^2 + 16y^2 = 144$ aux points d'abscisse 2 et aux points d'ordonnée 3.
- 14)** Discutez suivant les valeurs du paramètre réel m la position relative de la droite $d \equiv x + y = m$ et de l'ellipse $\Gamma \equiv 4x^2 + y^2 = 1$.
- 15)** Soit Γ une parabole de sommet S , de directrice d et de foyer F , T un point de Γ différent du sommet S , t la tangente à Γ au point T . La tangente t coupe d en U et la droite passant par le foyer F qui est parallèle à d en R (figure !). Montrez que $FU = FR$.
- 16)** Soit $\Gamma \equiv y^2 = 2px$ l'équation d'une parabole dans un R.O.N. du plan, $M(x_1, y_1) \in \Gamma$ et t la tangente à Γ au point M qui coupe (Ox) en T et (Oy) en J .
- a)** Déterminez une équation de t .
- b)** Montrez que $T(-x_1, 0)$ et $J\left(0, \frac{y_1}{2}\right)$.
- c)** Dédisez-en une construction de la tangente t .
- 17)** Soit l'ellipse d'équation cartésienne $\Gamma \equiv 4x^2 + 9y^2 = 36$. Déterminez les équations des tangentes à cette ellipse issues du point $P(4; 0)$ ainsi que les coordonnées de leurs points de contact.
- 18)** Soit l'hyperbole d'équation cartésienne $\Gamma \equiv x^2 - 4y^2 - 4 = 0$. Déterminez les équations des tangentes à cette hyperbole issues du point $P(1; 1)$. Faites une figure !
- 19)** Soit l'hyperbole d'équation cartésienne $\Gamma \equiv 16x^2 - 25y^2 + 400 = 0$. Déterminez les équations des tangentes à cette hyperbole de coefficient angulaire $\frac{\sqrt{7}}{5}$. Faites une figure !
- 20)** Soit la conique d'équation cartésienne $\Gamma \equiv y^2 - 6y - 8x + 41 = 0$ et la droite $d \equiv 3x - 4y + 1 = 0$. Déterminez les équations des tangentes à cette conique qui sont parallèles à d . (figure !)

- 21)** Soit la conique d'équation cartésienne $\Gamma \equiv x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ et la droite $d \equiv x - 3y = 9$.
Déterminez les équations des tangentes à cette conique qui sont perpendiculaires à d .
(figure !)
- 22)** Calculez le réel p pour que la droite d'équation $d \equiv y = px + 5$ soit tangente à l'hyperbole $\Gamma \equiv 9x^2 - 16y^2 = 144$.
- 23)** Déterminez une équation cartésienne de la tangente à l'ellipse $\Gamma \equiv 3x^2 + 5y^2 - 32 = 0$ en ses points dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.
- 24)** Le point $P(-1; 2)$ est l'un des sommets du parallélogramme circonscrit à l'ellipse $\Gamma \equiv x^2 + 4y^2 - 16 = 0$. Trouvez les équations cartésiennes des côtés de ce parallélogramme.
- 25)** Le miroir d'une torche électrique a la forme d'un paraboloïde (surface engendrée par la rotation d'une parabole autour de son axe focal) de 12 cm de diamètre et de 3 cm de profondeur. Où faut-il placer l'ampoule pour que les rayons lumineux émis soient réfléchis parallèlement à l'axe du paraboloïde ? A quelle distance du point S ?



- 26)** Dans un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm) on donne le point $A(1, 4)$ et l'hyperbole d'équation $\Gamma \equiv 16x^2 - 9y^2 = 144$.
- a)** Déterminez toutes les caractéristiques (sommets, foyers, directrices, asymptotes, excentricité) de l'hyperbole puis représentez-la (figure soignée !).
- b)** A partir du foyer F' on dirige un rayon laser sur la branche de l'hyperbole la plus éloignée de F' (on suppose pour cela que la branche la plus rapprochée a été enlevée pour laisser passer le rayon). Ce rayon est réfléchi par l'hyperbole et atteint le point A . Déterminez les coordonnées du point d'impact $I \in \Gamma$ du rayon. Justifiez vos calculs !

- 27) Deux points A et B sont éloignés de 12 m et la droite d forme avec (AB) un angle α . Un rayon lumineux issu de A est réfléchi par d au point C et arrive en B après un parcours de 20 m. De plus la projection orthogonale C' de C sur (AB) est telle que $C' \in [AB]$ et $AC' = 1$ m.



- Montrez que C appartient à une conique dont vous déterminerez l'équation réduite.
- Quelle est la position de d par rapport à cette conique ? Trouvez son équation !
- Calculez une mesure de l'angle α

PROBABILITES

Table des matières

COURS

A) Construction d'une « probabilité »	page 2
1) Rappels sur les ensembles.....	page 2
2) Notion de « probabilité ».....	page 7
3) Construction du modèle mathématique.....	page 8
4) Evènements indépendants et probabilité conditionnelle	page 11
B) Analyse combinatoire	page 13
1) Les tirages au sort	page 13
2) Tirages avec ordre et avec répétition	page 13
3) Tirages avec ordre et sans répétition	page 15
4) Tirages sans ordre et sans répétition.....	page 17
5) Tirages sans ordre et avec répétition.....	page 18
6) Propriétés du nombre C_n^p	page 19

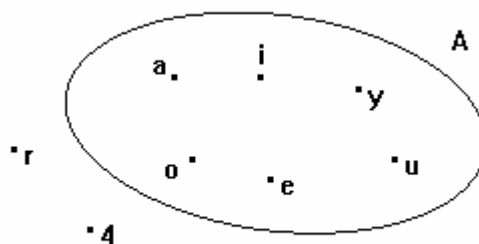
EXERCICES.....	page 22
-----------------------	---------

A) Construction d'une « probabilité »

1) Rappels sur les ensembles

- Un **ensemble** est une collection d'objets clairement définis appelés **éléments** de cet ensemble. Pour *définir un ensemble* on a deux possibilités :
 - On *énumère* tous les éléments de cet ensemble en les entourant de deux accolades : c'est la définition **par énumération** ou **en extension**. Ceci n'est possible que pour un **ensemble fini** c-à-d un ensemble qui n'a qu'un nombre fini d'éléments (et de préférence pas trop grand....)
 p.ex. $A = \{a, o, i, u, e, y\}$
 - On *décrit* les éléments en donnant une propriété qui les caractérise et les distingue de tous les éléments qui n'appartiennent pas à cet ensemble : c'est la définition **en compréhension**.
 p.ex. A est l'ensemble des voyelles de l'alphabet, ou de manière plus « formelle » : $A = \{x / x \text{ est une voyelle de l'alphabet}\}$
- Le **cardinal** d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de E et il est noté :
 $\text{Card } E$ ou $\# E$
 p.ex. $\text{Card } A = 6$
- Il n'existe qu'un seul ensemble de cardinal 0 : c'est **l'ensemble vide** noté $\emptyset$
 p.ex. $P = \{x / x \text{ est un triangle rectangle équilatéral}\} = \emptyset$
- Un ensemble de cardinal 1 est appelé **singleton**.
 p.ex. $L = \{x / x \text{ est un entier qui a une infinité de diviseurs}\} = \{0\}$
- Pour *représenter* un ensemble E on dessine une ligne fermée et on met les éléments de E à l'intérieur de cette ligne, les autres à l'extérieur. Un tel schéma est appelé **diagramme de Venn**.

p.ex.



- Les symboles $\in$ et $\notin$

Pour un ensemble E et un élément x :

$x \in E$ signifie que x est un élément de E

$x \notin E$ signifie que x n'est pas un élément de E

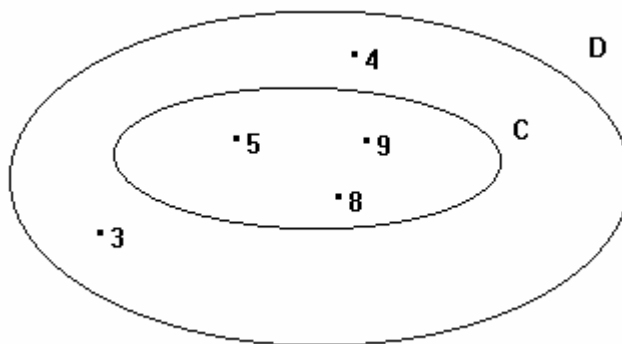
p.ex. $e \in A$, mais $4 \notin A$

- Les symboles $\subset$ et $\not\subset$

Pour deux ensembles E et F :

$E \subset F$ signifie que *tous* les éléments de E sont aussi des éléments de F, c'est-à-dire que E est une **partie** ou un **sous-ensemble** de F

p.ex. $C = \{5, 8, 9\}$, $D = \{3, 4, 5, 8, 9\}$, $C \subset D$



$E \not\subset F$ signifie que E n'est pas un sous-ensemble de F, c'est-à-dire qu'il existe *au moins un* élément de E qui n'est pas dans F

Remarque : Pour tout ensemble E on a : $\emptyset \subset E$ (c'est la **partie vide** de E) et

$E \subset E$ (c'est la **partie pleine** de E). Toute partie de E qui n'est ni vide, ni pleine est appelée **partie propre** de E

- **L'ensemble des parties** d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$.

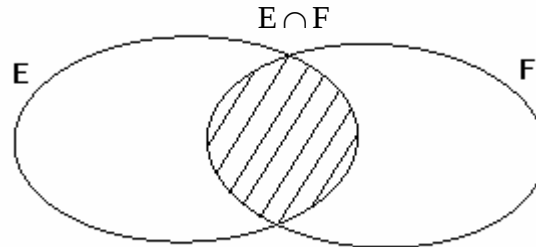
p.ex. $G = \{1, 2, 3\}$ alors $\mathcal{P}(G) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, G\}$

Attention : on écrit $2 \in G$ car 2 est un *élément* de l'ensemble G, alors que $\{2\} \subset G$ car $\{2\}$ est un *sous-ensemble* de G et enfin $\{2\} \in \mathcal{P}(G)$ car $\{2\}$ est un *élément* de l'ensemble $\mathcal{P}(G)$!

Remarque : L'ensemble vide $\emptyset$ n'a qu'un seul sous-ensemble : lui-même ! Ainsi $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, ce qui montre en particulier que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$!.

- On appelle **intersection** de deux ensembles E et F l'ensemble, noté $E \cap F$, des éléments qui appartiennent à E et à F.

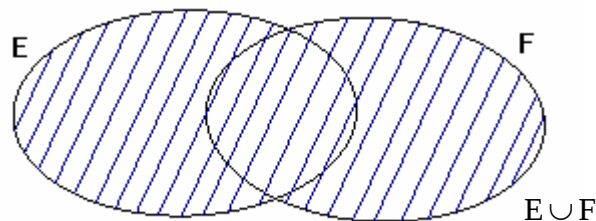
$$E \cap F = \{x / x \in E \text{ et } x \in F\}$$



Si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont **disjoints**.

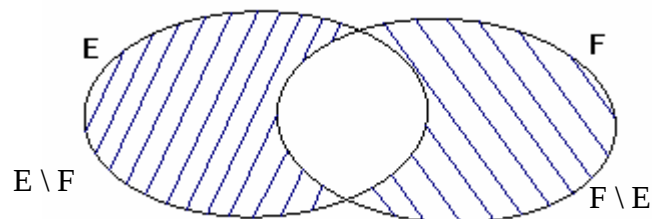
- On appelle **réunion** de deux ensembles E et F l'ensemble, noté $E \cup F$, des éléments qui appartiennent à E ou à F.

$$E \cup F = \{x / x \in E \text{ ou } x \in F\}$$



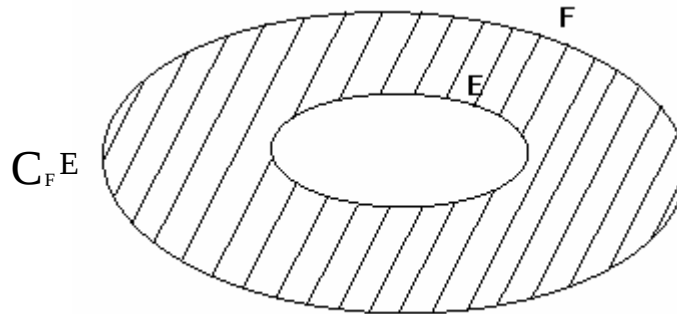
- On appelle **différence** de l'ensembles E et de l'ensemble F l'ensemble, noté $E \setminus F$, des éléments qui appartiennent à E mais pas à F.

$$E \setminus F = \{x / x \in E \text{ et } x \notin F\}$$



On voit que $E \setminus F$ et $F \setminus E$ sont deux ensembles disjoints !

- Si $E \subset F$ l'ensemble $F \setminus E$ est appelé **complémentaire** de E dans (ou *par rapport à*) F et est noté $C_F E$.



Remarque : Si l'ensemble de référence F est évident d'après le contexte, le complémentaire de E (dans F) est souvent noté plus simplement : $\bar{E}$

- On vérifie facilement les propriétés suivantes :
 - L'intersection et la réunion sont commutatives et associatives :

$$A \cap B = B \cap A \text{ et } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

$$A \cup B = B \cup A \text{ et } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$
 - L'ensemble vide est neutre pour la réunion : $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$
 - L'intersection est distributive pour la réunion et la réunion est distributive pour l'intersection :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
 - Si A, B sont des sous-ensembles de E , alors :

$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B \text{ et } C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B.$$

en notations simplifiées : $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
 - $\#(E \cup F) = \#E + \#F - \#(E \cap F)$

- **Correspondances entre propositions logiques et ensembles.**

- La **conjonction** « et » correspond à l'intersection.

p.ex : « Pierre joue au tennis **et** au football » correspond à : $\text{Pierre} \in T \cap F$ où T est l'ensemble des joueurs de tennis et F l'ensemble des joueurs de football.

o **La disjonction « ou » correspond à la réunion.**

p.ex. « je ne sais pas si Pierre joue au tennis ou au football » correspond à : « je ne sais pas si $Pierre \in T \cup F$ »

o **L'exclusion « mais pas » correspond à la différence.**

p.ex. « Pierre joue au tennis **mais pas** au football » correspond à : $Pierre \in T \setminus F$ où T est l'ensemble des joueurs de tennis et F l'ensemble des joueurs de football.

o **La négation correspond au complémentaire.**

p.ex. « Pierre ne joue pas au tennis » correspond à : $Pierre \in \bar{T}$, le complémentaire étant pris par rapport à un plus grand ensemble, par exemple l'ensemble des hommes.

● **Produit cartésien de plusieurs ensembles.**

- o Soient A et B deux ensembles, on appelle produit cartésien de A par B l'ensemble, noté $A \times B$, des couples dont le premier élément appartient à A et le deuxième à B.

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Attention :

Dans un couple l'ordre est essentiel, p. ex. $(3, 4) \neq (4, 3)$, donc $A \times B \neq B \times A$

Remarque :

Le produit cartésien d'un ensemble A par lui-même, $A \times A$, peut être noté également : A^2

- o D'une manière générale, le produit cartésien de n ensembles $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ est l'ensemble des **n-uplets** défini par :

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in A_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n\}$$

si $A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_n = A$, on note $A \times A \times \dots \times A = A^n$

o **Cardinal d'un produit cartésien**

Si les ensembles $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ sont finis, alors :

$$\#(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n) = \#A_1 \cdot \#A_2 \cdot \dots \cdot \#A_n = \prod_{i=1}^n \#(A_i)$$

Exemples : $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$, $\#(A^2) = (\#A)^2$, etc.

2) Notion de « probabilité »



- En jetant une pièce de monnaie non truquée (jeu de « pile ou face ») on sait par avance que les *résultats possibles* sont « pile » ou « face », mais on est incapable de *prédire* exactement lequel de ces résultats va « sortir » ! Pour désigner une expérience de ce genre, on parle de « hasard » ou de « **phénomène aléatoire** », deux mots qui ont la même signification puisque « hasard » vient de l'arabe « az-zar » qui veut dire « dé » et que « aléatoire » vient du latin « alea » qui veut dire la même chose ! La théorie des probabilités (du latin « probare », mettre à l'épreuve, essayer, mais aussi : prouver, démontrer) a pour but de construire des modèles mathématiques de phénomènes aléatoires qu'on peut répéter, dans des conditions identiques, autant de fois qu'on le veut. Ceci bien entendu dans le but de rendre ces phénomènes *incertains* plus « probabilis », c'est-à-dire dignes d'approbation, acceptables....

- Approche pratique (statistique descriptive) :

On réalise l'expérience un certain nombre de fois (n fois) et on note le nombre de fois (p fois, avec $p \leq n$) qu'un certain résultat est sorti. La **fréquence** de ce résultat est alors le nombre réel positif : $f = \frac{p}{n} \in [0,1]$.

p.ex. On lance n fois une pièce de monnaie, on note p le nombre de fois que « pile » est sorti, puis on calcule la fréquence f de « pile ». Le résultat d'une telle expérience pourrait être le suivant :

n	10	250	5700	500000
p	7	103	3024	261357
f	$\frac{7}{10} = 0,7$	$\frac{103}{250} \approx 0,41$	$\frac{3024}{5700} \approx 0,53$	$\frac{261357}{500000} \approx 0,52$

Parfois on multiplie la fréquence par 100 pour obtenir la fréquence en pourcentage (p.ex . $100 \cdot 0,41 = 41\%$ de « pile »)

- Approche théorique (probabiliste) :

A chaque résultat possible on donne *a priori* (c'est-à-dire sans réaliser l'expérience) une certaine fréquence appelée alors **probabilité**.

p.ex. pour le jeu de « pile ou face » il n'y a aucune raison *a priori* de penser que « pile » (P) sorte plus ou moins souvent que « face » (F), donc chacun des deux résultats a autant de « chances » de sortir que l'autre, c'est-à-dire « 1 chance sur 2 ». On dit alors que « pile » (P) et « face » (F) on chacun une probabilité de $\frac{1}{2}$ et on note : $p(P) = p(F) = \frac{1}{2}$.

- Le lien entre les deux approches est alors assuré par la **loi des grands nombres** qui affirme que plus le nombre n de fois que l'expérience est réalisée est grand, plus la fréquence (réelle) d'un certain résultat est proche de sa probabilité. *La probabilité d'un résultat serait en quelque sorte sa fréquence si on réalisait l'expérience une infinité de fois !* Cette affirmation de bon sens n'a jamais été contredite par la réalité, même s'il est bien sûr impossible de la vérifier en pratique...

3) Construction du modèle mathématique

- La première étape consiste à déterminer de façon claire et précise les résultats possibles de l'expérience aléatoire et de les compter !

L'ensemble ou *univers* des **résultats possibles** ou **éventualités** ou encore **événements élémentaires** sera noté Ω . Nous ne verrons que des exemples où Ω est un *ensemble fini* !

Exemples

(a) On joue à « pile ou face » : $\Omega = \{P, F\}$ et $\#\Omega = 2$

(b) On lance un dé normal et on note le nombre indiqué par la face supérieure du dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\#\Omega = 6$

- (c) On lance un dé deux fois de suite et on note la suite des deux nombres obtenus ou, ce qui revient au même, on lance deux dés de couleurs différentes : $\Omega = \{(x, y) / x \text{ est le résultat du 1}^{\text{er}} \text{ dé et } y \text{ celui du 2}^{\text{e}} \text{ dé}\}$ et $\#\Omega = 6^2 = 36$

- La deuxième étape consiste à attribuer à toute éventualité (c'est-à-dire à tout élément de Ω) sa probabilité c'est-à-dire de définir une application : $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$

qui à tout $x \in \Omega$ associe sa « probabilité » $p(x)$ avec $\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$.

Cas particulier important : équiprobabilité

Si $\#\Omega = n$ et si toutes les éventualités ont a priori la même chance de se réaliser,

on posera : $\boxed{\forall x \in \Omega \quad p(x) = \frac{1}{n}}$

Exemples

- (a) On a équiprobabilité : $p(P) = p(F) = \frac{1}{2}$
- (b) On a équiprobabilité : $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$
- (c) On a équiprobabilité : $\forall (x, y) \in \Omega \quad p((x, y)) = \frac{1}{36}$
- (d) On lance un dé dont trois faces portent le 1, deux faces le 3 et une face le 2. Alors $\Omega = \{1, 2, 3\}$ et $\#\Omega = 3$, mais il serait très peu raisonnable de donner la même probabilité à chaque éventualité si on veut que le modèle mathématique représente correctement la réalité ! On pose donc : $p(1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $p(2) = \frac{1}{6}$ et $p(3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (on a bien : $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$!).

- On appelle **évènement** tout sous-ensemble de Ω et on dit qu'un évènement A se *produit* ou se *réalise* si le résultat de l'expérience appartient à A . La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités de ses éléments :

$$\boxed{\forall A \subset \Omega \quad p(A) = \sum_{x \in A} p(x)}$$

Dans le cas de l'équiprobabilité on obtient la fameuse **formule de Laplace** :

$$\boxed{\forall A \subset \Omega \quad p(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

Il y a deux évènements « extrêmes » :

- o L'évènement **certain** : Ω avec $p(\Omega) = 1$
p.ex. il est certain qu'en jetant un dé on va obtenir un entier entre 1 et 6
- o L'évènement **impossible** : $\emptyset$ avec $p(\emptyset) = 0$
p.ex. il est impossible qu'en jetant un dé normal on va obtenir 8

Un évènement peut être présenté soit par énumération (p.ex. $A = \{2, 4, 6\}$), soit en compréhension par une phrase (p.ex. A : « obtenir un nombre pair »)

Exemples

- (a) A part l'évènement certain et l'évènement impossible il n'y a que deux évènements qui correspondent aux deux éventualités : $\{P\}$ et $\{F\}$.
- (b) $A = \{2, 4, 6\}$ et $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
 B : « obtenir un nombre premier impair », $B = \{3, 5\}$ et $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
 C : « obtenir un nombre inférieur à 6 », $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $p(C) = \frac{5}{6}$
- (c) A : « obtenir deux fois le même résultat », $p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
 B : « obtenir un nombre plus grand au deuxième jet qu'au premier »
 $p(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$
- (d) A : « obtenir un nombre impair », $p(A) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

• **Propriétés des évènements :**

Soient A et B deux évènements, alors :

- o L'évènement $A \cap B$ se produit si A **et** B se produisent
- o L'évènement $A \cup B$ se produit si A **ou** B se produisent
- o $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- o si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont **incompatibles** et on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

- o L'évènement $\bar{A} = \mathbf{C}_{\Omega} A = \Omega \setminus A$ est appelé évènement **contraire** de A et :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Cette formule est très utile quand l'évènement contraire est beaucoup plus simple à calculer que l'évènement lui-même, ce qui arrive souvent !

Exercices 1-10

4) Evènements indépendants et probabilité conditionnelle

- Exemple 1

Une urne contient une boule noire (N), une jaune (J) et une rouge (R). On tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne puis on tire une deuxième boule. Alors $\Omega = U \times U = U^2$ avec $U = \{N, J, R\}$ ou plus simplement en notant p.ex ; NR au lieu de (N, R) : $\Omega = \{NN, NJ, NR, JN, JJ, JR, RN, RJ, RR\}$, donc $\#\Omega = 3^2 = 9$ et toutes les éventualités sont équiprobables. Considérons les évènements suivants :

A : « obtenir une boule noire N au 1^{er} tirage » càd $A = \{NN, NJ, NR\}$

B : « obtenir une boule jaune J au 2^e tirage », càd $B = \{NJ, JJ, RJ\}$

$A \cap B$: « obtenir N au 1^{er} tirage **et** J au 2^e tirage », càd $A \cap B = \{NJ\}$

Alors : $p(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $p(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{9}$

- Exemple 2

Reprenons la situation de l'exemple 1, mais sans remettre la première boule dans l'urne avant de tirer la deuxième. Dans ce cas $\Omega = \{NJ, NR, JN, JR, RN, RJ\}$,

$\#\Omega = 6$, $A = \{NJ, NR\}$, $p(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $B = \{NJ, RJ\}$, $p(B) = \dots = \frac{1}{3}$,

$A \cap B = \{NJ\}$ et $p(A \cap B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega} = \frac{1}{6}$.

- Commentaire

- o Dans le premier exemple les évènements A et B sont *indépendants* dans le sens où le résultat du premier tirage n'influe en aucune manière sur le déroulement ou le résultat du deuxième tirage : il y a « 1 chance sur 3 » de tirer N au 1^{er} et de tirer J au 2^e tirage ! On constate que $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = p(A \cap B)$.

- o Dans le deuxième exemple par contre, si on tire J au 1^{er} tirage, la probabilité de tirer J au 2^e est nulle, alors que si on tire N ou R au 1^{er} tirage, on a 1

chance sur 2 de tirer J au 2^e tirage, par conséquent les deux évènements A et

B ne sont pas indépendants et de plus : $p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \neq p(A \cap B)$

- Définition

On dit que A et B sont deux **évènements indépendants** si et seulement si

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

- Problème

Supposons que N est le résultat du 1^{er} tirage : quelle est alors la probabilité de tirer J au 2^e tirage ? En d'autres termes : quelle est la probabilité de B sachant que A est déjà réalisé ? Nous noterons cette probabilité : $p(B/A)$.

Dans la situation de l'exemple 1 : $p(B/A) = p(B) = \frac{1}{3}$.

Dans la situation de l'exemple 2 : $p(B/A) = \frac{1}{2} \neq p(B)$.

De plus on a :

- o dans l'exemple 1 : $p(B/A) \cdot p(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = p(A \cap B)$
- o dans l'exemple 2 : $p(B/A) \cdot p(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = p(A \cap B)$

Que A et B soient donc indépendants ou non, on a $p(B/A) \cdot p(A) = p(A \cap B)$, ce qui amène à poser la définition suivante :

- Définition

Si A et B sont deux évènements avec $p(A) \neq 0$, alors on appelle **probabilité conditionnelle de B en A** ou **probabilité de B sachant A**, la probabilité, notée $p(B/A)$, définie par :

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarque : si $p(A) \neq 0$ alors A et B sont indépendants $\Leftrightarrow p(B/A) = p(B)$

Exercices 11-17

B) Analyse combinatoire

Ce terme désigne un ensemble de techniques de « dénombrement » qui permettent de compter le nombre d'éléments d'un ensemble. D'après ce qui précède on comprend aisément que ce genre de technique est essentiel pour le calcul des probabilités.

1) Les tirages au sort

- La plupart des expériences aléatoires peuvent être interprétées comme des tirages au sort de p boules d'une urne qui en contient n .

Exemple

La question : « Dans une course de chevaux avec 10 participants, de combien de façons peut-on parier sur les trois premiers ? » peut être reformulée de la manière suivante : « De combien de façons peut-on tirer, dans l'ordre, 3 boules d'une urne qui en contient 10 ? »

- Il y a **deux critères** pour distinguer ces tirages au sort :
 - **L'ordre**
si l'ordre dans lequel on tire les boules est pris en considération, on dit que c'est un « tirage avec ordre », sinon c'est un « tirage sans ordre ».
 - **La répétition**
si on remet chaque boule tirée dans l'urne avant de tirer la suivante, on peut tirer plusieurs fois la même boule : on parle alors d'un tirage avec répétition ou avec remise. Dans la cas contraire on parle d'un tirage sans répétition ou sans remise.
- Il y a donc quatre sortes de tirages au sort :
 - Tirages avec ordre et avec répétition (OR)
 - Tirages avec ordre et sans répétition ($\overline{\text{OR}}$)
 - Tirages sans ordre et sans répétition ($\overline{\text{OR}}$)
 - Tirages sans ordre et avec répétition ($\overline{\text{OR}}$)

2) Tirages avec ordre et avec répétition

- Exemple :
Combien de nombres à deux chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 2 et 3 ?

En d'autres termes : de combien de façons peut-on tirer deux boules d'une urne qui en contient trois numérotées de 1 à 3, avec ordre : 1^{re} boule tirée = chiffre des dizaines, 2^e boule tirée = chiffre des unités, et avec répétition, le chiffre des dizaines et des unités pouvant être le même ?

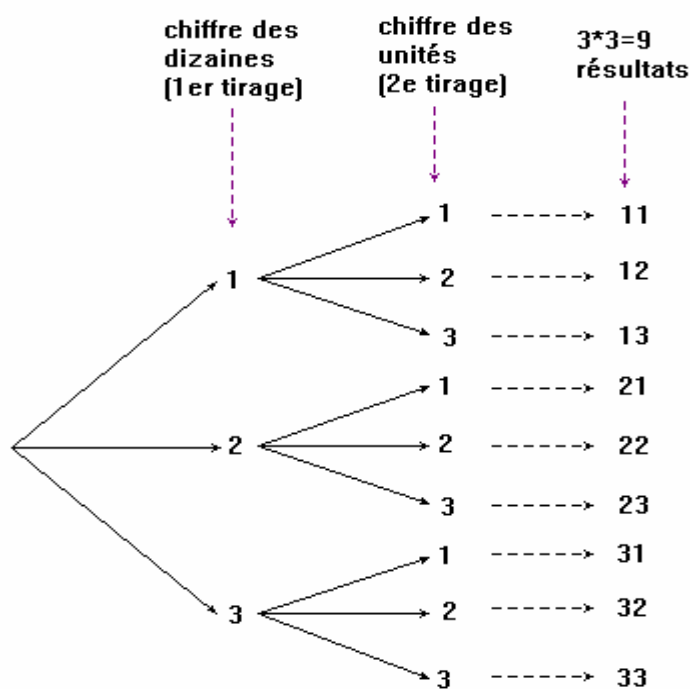
Réponse : 9 nombres : 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33

Raisonnement :

- pour le chiffre des dizaines on a 3 possibilités : 1, 2 ou 3
- pour le chiffre des unités on a également 3 possibilités : 1, 2 ou 3
- au total on a donc $3 \cdot 3 = 9$ possibilités

Justification :

Pourquoi y a-t-il $3 \cdot 3 = 9$ et non pas $3 + 3 = 6$ possibilités ? Pour bien comprendre pourquoi dans ce genre de situation il faut multiplier et non pas additionner pour obtenir le total, il faut considérer le **diagramme en arbre** suivant :



● Cas général

On fait un tirage OR de p boules d'une urne qui en contient n :

- Nombre de possibilités pour la 1^{re} boule : n
- Nombre de possibilités pour la 2^e boule : n (car remise !)
- ⋮
- Nombre de possibilités pour la p^e boule : n
- Total : $n \cdot n \cdots n = n^p$ (diagramme en arbre !)

- Définition

Un tirage avec ordre et avec remise OR de p objets parmi n est appelé **arrangement à répétition de n objets pris p à p** .

Le nombre de ces tirages est noté B_n^p

- Nous venons de montrer que : $\boxed{\forall n, p \in \mathbb{N}^* \quad B_n^p = n^p}$

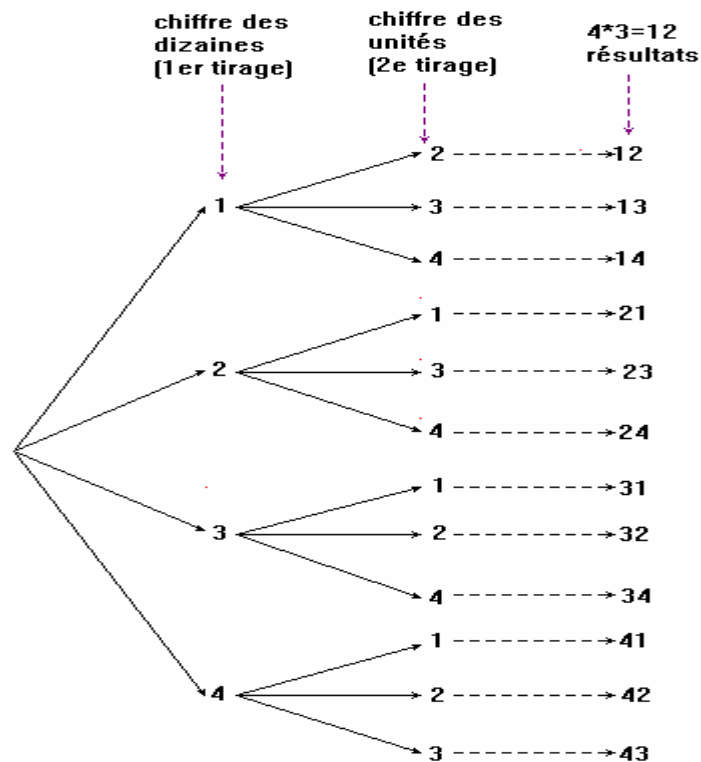
3) Tirages avec ordre et sans répétition

- Exemple :

Combien de nombres à deux chiffres différents peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 ?

En d'autres termes : de combien de façons peut-on tirer deux boules d'une urne qui en contient quatre numérotées de 1 à 4, avec ordre : 1^{re} boule tirée = chiffre des dizaines, 2^e boule tirée = chiffre des unités, et sans répétition, les chiffres des dizaines et des unités devant être différents ?

Ici le **diagramme en arbre** compte 4 branches au premier niveau et $4-1=3$ branches au deuxième niveau :



Raisonnement :

- pour le chiffre des dizaines on a 4 possibilités : 1, 2, 3 ou 4

- pour le chiffre des unités on n'a plus que $4-1=3$ possibilités puisqu'on ne peut plus tirer la boule qui vient de sortir !
- au total on a donc $4 \cdot 3 = 12$ possibilités

● Cas général

On fait un tirage $\overline{\text{OR}}$ de p boules d'une urne qui en contient n . Il est évident que pour qu'un tel tirage existe, il faut que $p \leq n$.

- Nombre de possibilités pour la 1^{re} boule : n
- Nombre de possibilités pour la 2^e boule : $n-1$ (car pas de remise !)
- Nombre de possibilités pour la 3^e boule : $(n-1)-1 = n-2$
- $\vdots$
- Nombre de possibilités pour la p^{e} boule : $n-(p-1) = n-p+1$
- Total : $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-p+1)$ (diagramme en arbre !)

● Définition

Un tirage avec ordre et sans remise $\overline{\text{OR}}$ de p objets parmi n est appelé **arrangement de n objets pris p à p** .

Le nombre de ces tirages est noté A_n^p

- Nous venons de montrer que :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^* \quad A_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-p+1) & \text{si } p \leq n \end{cases}$$

● Cas particulier important : $p = n$

Un tel tirage (on tire toutes les boules de l'urne dans un certain ordre) revient à *ranger les n boules de l'urne dans un certain ordre* : on dit qu'on a fait une **permutation** des n objets de l'urne et $A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

● Notation

Le nombre $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ (pour $n \geq 2$) est appelé **factorielle n** et est noté **$n!$** . Pour des raisons exposées plus bas on pose : $0! = 1! = 1$, d'où :

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq 1 \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^n i & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- Exemples

- o $5! = 120$; $10! = 3\,628\,800$; $50! \approx 3,041\,409 \cdot 10^{64}$; $100! \approx 9,332\,622 \cdot 10^{157}$
- o Il y a 25 ! possibilités pour placer 25 personnes sur 25 chaises. En supposant qu'un ordinateur très puissant « réalise » 100 milliards (10^{11}) de tels placements *par seconde*, il aurait besoin pour finir son travail de :

$$\frac{25!}{3600 \cdot 24 \cdot 365,25 \cdot 10^{11}} \approx 4\,915\,206 \text{ années !}$$

- Autre notation pour A_n^p :

- o pour $p < n-1$: $A_n^p = \frac{n \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-p)!} (*)$

- o $A_n^{n-1} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(n-1)+1) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Donc la formule (*) marche pour $p = n-1$ si et seulement si :

$$(n-p)! = 1 \Leftrightarrow (n-(n-1))! = 1 \Leftrightarrow 1! = 1$$

- o $A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-n+1) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$

Donc la formule (*) marche pour $p = n$ si et seulement si :

$$(n-p)! = 1 \Leftrightarrow (n-n)! = 1 \Leftrightarrow 0! = 1$$

- o Or dans la définition de $n!$ on a bien posé $0! = 1! = 1$, d'où:

$$\boxed{\forall p \leq n \quad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

4) Tirages sans ordre et sans répétition

- Exemple : le loto

On tire 6 boules d'une urne qui en contient 49 (numérotées de 1 à 49) sans considérer l'ordre dans lequel elles ont été tirées et sans remise.

Soit x le nombre de tirages possibles : à chacun de ces tirages (p.ex. 5 – 43 – 17 – 28 – 31 – 35) on peut associer 6 ! tirages *avec ordre* (en permutant ces 6 éléments), donc $x \cdot 6! = A_{49}^6 \Leftrightarrow x = \frac{A_{49}^6}{6!} \Leftrightarrow x = \frac{49!}{43!6!}$. Ainsi il y a 13983816

façons de remplir une grille de loto !

- Cas général

Soit x le nombre de tirages $\overline{\overline{OR}}$ de p boules d'une urne qui en contient n (avec $p \leq n$). En permutant les p boules d'un tel tirage, on obtient $p!$ tirages $\overline{\overline{OR}}$. D'où :

$$x \cdot p! = A_n^p \Leftrightarrow x = \frac{A_n^p}{p!} \Leftrightarrow x = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

- Définition

Un tirage sans ordre et sans remise $\overline{\overline{OR}}$ de p objets parmi n (avec $p \leq n$) est appelé **combinaison (sans répétition) de n objets pris p à p** . Le nombre de ces tirages est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

- Nous venons de montrer que : $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
- Si $p > n$ il n'y a aucune possibilité de tirer p objets parmi n sans répétition, donc on pose : $\forall p > n \quad C_n^p = 0$.
- Dans l'énumération des éléments d'un ensemble l'ordre ne joue pas de rôle donc un tirage $\overline{\overline{OR}}$ peut être considéré comme un sous-ensemble de p éléments d'un ensemble de cardinal n . Par conséquent :

$$C_n^p = \text{nombre de sous-ensembles de } p \text{ éléments d'un ensemble à } n \text{ éléments}$$

- Exemples :

$$C_5^3 = \frac{5!}{2!3!} = 10, \quad C_9^4 = \frac{9!}{5!4!} = 126, \quad C_{17}^1 = \frac{17!}{16!1!} = 17, \quad C_{39}^0 = \frac{39!}{39!0!} = 1, \text{ etc.}$$

5) Tirages sans ordre et avec répétition (hors programme)

- Exemple

On choisit 6 entiers parmi 4 entiers a, b, c et d et on fait leur somme. Combien de résultats *différents* peut-on ainsi obtenir *au plus* (si on choisit p.ex. $a = 1, b = 10, c = 100$ et $d = 1000$ toutes les sommes calculées sont différentes, mais on vérifie facilement que pour d'autres choix, p.ex. $a = 1, b = 2, c = 3$ et $d = 4$, certaines sommes sont égales !)?

Comme l'ordre des termes d'une somme ne joue aucun rôle, ceci revient à compter le nombre de tirages $\overline{\text{OR}}$ de 6 nombres parmi les entiers a, b, c et d. Dans un tel tirage, la seule chose qui importe est le nombre de fois que chacun de ces entiers a été tiré. On peut donc représenter ces tirages de la manière suivante :

$$u_1 | u_2 | u_3 | u_4$$

où u_1 (respectivement u_2 , u_3 et u_4) est le nombre de fois que l'entier a (respectivement b, c et d) est tiré, avec $\sum_{i=1}^4 u_i = 6$.

Ou encore : $\underbrace{00\cdots 0}_{u_1 \text{ "0"}} | \underbrace{00\cdots 0}_{u_2 \text{ "0"}} | \underbrace{00\cdots 0}_{u_3 \text{ "0"}} | \underbrace{00\cdots 0}_{u_4 \text{ "0"}}$, autrement dit un tirage peut être

représenté par une suite dans un certain ordre de 6 « 0 » et de $4-1=3$ « | ». Par exemple $000||0|00$ signifie qu'on a tiré 3 fois le a, aucune fois le b, 1 fois le c et 2 fois le d. Dans une telle suite de $6+3=9$ symboles il faut choisir 6 places pour mettre les « 0 » (les 3 places restantes sont occupées par des « | »), c'est-à-dire dans l'ensemble des 9 places disponibles il faut choisir un sous-ensemble de 6 places pour mettre les « 0 », ce qui peut se faire de $C_9^6 = \frac{9!}{3!6!} = 84$ manières différentes.

- Cas général

Désignons par D_n^p le nombre de tirages $\overline{\text{OR}}$ de p objets parmi n. D'après ce qui précède, un tel tirage peut être représenté par une suite de p « 0 » et de $n-1$ « | », donc D_n^p est égal au nombre de sous-ensembles de p éléments (les p places pour les « 0 ») d'un ensemble de $n-1+p$ éléments (puisque en tout il y a $n-1+p$ symboles dans une suite), d'où :

$$D_n^p = C_{n+p-1}^p$$

Exercices 18 - 42

6) Propriétés du nombre C_n^p

a) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad C_n^0 = C_n^n = 1}$

En effet $C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!1} = 1$ et $C_n^n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{1}{0!1} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$.

On aurait pu dire aussi qu'un ensemble de n éléments a 1 sous-ensemble de 0 élément (l'ensemble vide) et 1 sous-ensemble de n éléments (l'ensemble lui-même !).

b) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n}$

En effet $C_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!1} = n$ et $C_n^{n-1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$.

c) $\boxed{\forall n, p \in \mathbb{N} \quad (\text{avec } p \leq n) \quad C_n^p = C_n^{n-p}}$

En effet $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-(n-p))!(n-p)!} = C_n^{n-p}$

p.ex. $C_5^3 = C_5^2$, $C_{17}^6 = C_{17}^{11}$, etc.

d) **Triangle de Pascal**

(Blaise Pascal, mathématicien, physicien, philosophe et théologien, 1623-1662, un des initiateurs du calcul des probabilités)

• $\boxed{\forall n, p \in \mathbb{N} \quad (\text{avec } p \leq n) \quad C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p} \quad (*)$

démonstration :

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p &= \frac{(n-1)!}{(n-1-p+1)!(p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!p!} \\ &= \frac{(n-1)!p}{(n-p)!(p-1)!p} + \frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)(n-1-p)!p!} \\ &= \frac{(n-1)!p}{(n-p)!p!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{(n-1)!p + (n-p)(n-1)!}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{(n-1)![p + (n-p)]}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{(n-1)!n}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p \end{aligned}$$

- Dressons un tableau avec les valeurs des C_n^p :
 - o Les lignes et les colonnes sont numérotées : 0, 1, 2, 3, etc.
 - o C_n^p se trouve à l'intersection de la n -ième ligne et de la p -ième colonne
 - o d'après la propriété a) la première colonne et la diagonale du tableau seront remplies de « 1 »

- au-dessus de la diagonale il n'y a que des 0 car si $p > n$ $C_n^p = 0$, ce qui donne une forme « triangulaire » à ce tableau
- pour les autres valeurs on utilise la formule (*) pour calculer progressivement :

$$C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 1+1=2, \quad C_3^1 = 1+2=3, \quad C_3^2 = 2+1=3, \quad C_4^1 = 1+3=4,$$

$$C_4^2 = 3+3=6, \quad C_4^3 = 3+1=4, \quad C_5^1 = 1+4=5, \quad C_5^2 = 4+6=10, \text{ etc}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Exercices 43 - 44

e) Binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors nous savons que :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ et } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

et nous constatons que les coefficients des expressions des membres droits de ces égalités sont les nombres des 3^e et 4^e lignes du triangle de Pascal :

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 \text{ et } (a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$$

Formulons l'hypothèse que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\boxed{\begin{aligned} (a+b)^n &= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^i a^{n-i} b^i + \dots + C_n^n a^0 b^n \\ &= \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i \end{aligned}} \quad (*)$$

et démontrons-la par récurrence :

pour $n=1$: $(a+b)^1 = a+b = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1$ donc (*) est bien vérifiée !

supposons que (*) est vérifiée pour n et montrons qu'alors elle l'est aussi pour $n+1$:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \\ &= (C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^i a^{n-i} b^i + \dots + C_n^n a^0 b^n)(a+b) \\ &= C_n^0 a^{n+1} b^0 + C_n^1 a^n b + C_n^2 a^{n-1} b^2 + \dots + C_n^n a^1 b^n + C_n^0 a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^n + C_n^n a^0 b^{n+1} \\ &= C_n^0 a^{n+1} b^0 + (C_n^1 + C_n^0) a^n b + (C_n^2 + C_n^1) a^{n-1} b^2 + \dots + (C_n^n + C_n^{n-1}) ab^n + C_n^n a^0 b^{n+1} \\ &\stackrel{!}{=} C_{n+1}^0 a^{n+1} b^0 + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \dots + C_{n+1}^n ab^n + C_{n+1}^{n+1} a^0 b^{n+1} \end{aligned}$$

La formule (*) est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous les réels a et b : elle est appelée **formule du binôme de Newton**.

Exercices 45 - 51

EXERCICES

- 1) Pour chacune des expériences suivantes, déterminez l'ensemble Ω des éventualités, son cardinal, une probabilité p et calculez la probabilité $p(A)$ de l'évènement A proposé :
 - a) Jeter une pièce de monnaie et observer la face visible. A : « le côté visible est pile ».
 - b) Tirer une carte d'un jeu de 52 cartes et observer la **couleur** : trèfle, pique, cœur, carreau. A : « la couleur tirée est trèfle ».

- c) Tirer une carte d'un jeu de 32 cartes et observer la **valeur** : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as. A : « la carte tirée est une image ».
- d) Tirer une carte d'un jeu de 32 cartes et observer la teinte : rouge, noir. A : « la carte tirée est jaune ».
- e) Tirer une boule d'une urne contenant 31 boules numérotées de 1 à 31. A : « tirer une boule impaire ».
- f) Tirer une boule d'une urne contenant 5 boules rouges, 2 vertes, 9 bleues, 7 blanches et 3 noires. A : « la boule tirée n'est pas blanche ».
- 2) François a un dé assez irrégulier qui ne donne pas les 6 chiffres avec la même fréquence. Pour établir la probabilité de chaque résultat il a lancé son dé 100000 fois en notant les résultats obtenus. Voici le tableau des probabilités (fréquences) qu'il a obtenues :

x	1	2	3	4	5	6
$p(\{x\})$	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$

Qu'en pensez-vous ?

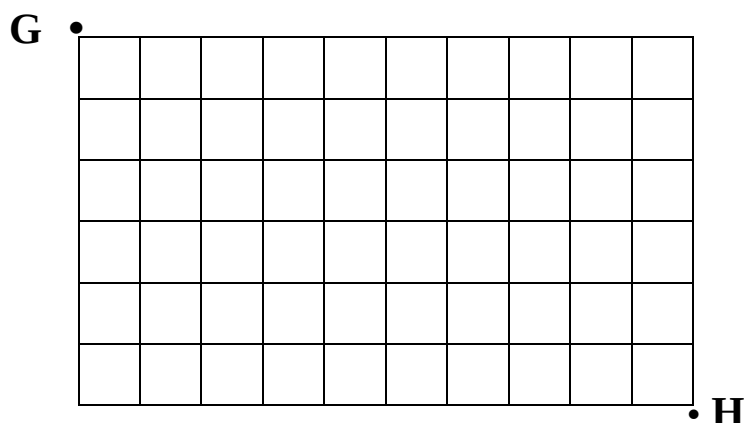
- 3) On jette un dé non pipé. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre :
- strictement inférieur à 5 ?
 - strictement supérieur à 4 ?
 - pair ?
 - premier ?
 - impair supérieur à 2 ?
- 4) On fait 3 parties consécutives de « pile ou face » avec une pièce non truquée. Quelle est la probabilité d'obtenir :
- plus de « face » que de « pile » ?
 - exactement deux fois « pile » ?
 - « pile » au troisième jet ?
 - trois fois le même côté ?
- 5) On jette un dé deux fois de suite et on fait la somme des deux résultats obtenus.
- Déterminez l'ensemble Ω des éventualités, son cardinal et une probabilité p.
 - Quelle est la probabilité d'obtenir 8 ?
 - Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 3 ?
 - Quelle est la probabilité d'obtenir au plus 9 ?

- 6) D'un jeu de 52 cartes on tire 1 carte au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir
- a) Un 10 ou un roi ?
 - b) un valet ou un trèfle ?
- 7) Une urne contient une boule noire, une blanche et une rouge. On effectue successivement 2 tirages d'une boule, la boule tirée en premier étant remplacée dans l'urne avant de tirer la deuxième. Quelle est la probabilité de tirer :
- a) deux fois la boule rouge ?
 - b) exactement une fois la boule blanche ?
 - c) au moins une fois la boule noire ?
- 8) Un jeu de 32 cartes est distribué carte par carte. Quelle est la probabilité pour que la troisième carte soit la dame de cœur ?
- 9) On lance trois fois de suite un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?
- 10) Un dé est pipé de telle façon que la probabilité d'apparaître pour chacune des faces soit proportionnelle au chiffre de cette face (p.ex. le 3 a trois fois plus de chances de sortir que le 1).
- a) Définissez l'ensemble Ω des éventualités, son cardinal et la probabilité p qui convient.
 - b) En jetant ce dé une fois, est-il plus probable d'obtenir un chiffre pair ou impair ?
- 11) On joue au jeu suivant : on lance une pièce et si on obtient « pile » on a gagné, sinon on peut lancer la pièce une deuxième fois pour essayer d'obtenir « pile ».
- a) Que pensez-vous du raisonnement suivant : « Dans ce jeu il y a trois résultats possibles :
 - on obtient « pile » au premier jet et on a gagné
 - on obtient « face » au premier jet et « pile » au deuxième et on a encore gagné
 - on obtient deux fois « face » et on a perduPar conséquent la probabilité de gagner vaut $\frac{2}{3}$! »
 - b) Quelle est la bonne solution ?
 - c) En supposant qu'on peut lancer la pièce jusqu'à ce qu'on obtienne « pile », quelle est la probabilité que le jeu s'arrête au 10^e lancer ? au n^{ième} lancer ?

- 12)** Un sac contient 4 boules rouges et 3 boules vertes. On tire successivement 2 boules avec remise de la première avant de tirer la deuxième. Quelle est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes ?
- 13)** Même question qu'à l'exercice précédent mais sans remettre la première boule dans le sac avant de tirer la deuxième.
- 14)** D'une urne contenant 4 boules vertes, 3 noires et 3 rouges, on tire successivement 4 boules avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre :
- a)** 4 boules vertes ?
 - b)** 3 vertes, puis 1 rouge ?
 - c)** 1 verte, 1 rouge puis 2 noires ?
- 15)** Mêmes questions qu'à l'exercice précédent mais sans remise.
- 16)** On tire successivement et au hasard 4 lettres du mot PROFITABLES. Quelle est la probabilité pour que, dans l'ordre du tirage, ces lettres forment le mot RATE ?
- 17)** Dans une pièce se trouvent 50 personnes. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour (en ne comptant pas le 29 février) ?
- 18)** Avec les chiffres de 0 à 9, combien peut-on former de nombres à 6 chiffres (le premier chiffre étant bien sûr différent de 0) :
- a)** si on admet que ces nombres peuvent contenir plusieurs fois le même chiffre ?
 - b)** si on veut que les 6 chiffres d'un de ces nombres soient deux à deux différents ?
- 19)** Combien de plaques d'immatriculation pour les voitures a-t-on si chaque plaque
- a)** est constituée de 2 lettres suivies de 3 chiffres ?
 - b)** est constituée de 2 lettres suivies de 4 chiffres ?
 - c)** est constituée de 2 lettres et de 3 chiffres dans un ordre quelconque ?
- 20)** Combien y a-t-il de nombres à 4 chiffres tel que le chiffre des milliers soit impair, le chiffre des centaines strictement inférieur à 7, le chiffre des dizaines pair et le chiffre des unités supérieur ou égal à 4 ?
- 21)** Un lycée de 1200 élèves (640 filles et 560 garçons) et de 180 professeurs (72 femmes et 108 hommes) veut se doter d'un conseil de 10 membres, 5 élèves et 5 professeurs. De combien de façons peut-on procéder si
- a)** on n'impose pas de condition particulière ?
 - b)** on veut que la commission ait autant de membres masculins que féminins ?
 - c)** on veut que la commission ait au moins 4 filles et au moins 4 membres masculins ?

- 22)** De combien de façons peut-on tirer une main de 4 cartes d'un jeu de 32 cartes contenant
- a) 1 roi, 1 dame et 2 valets?
 - b) 3 cartes noires ?
 - c) au moins 1 trèfle?
 - d) 2 dames et 2 cœurs ?
 - e) une carte de chaque couleur ?
 - f) 4 cartes de même valeur ?
 - g) au moins 1 roi et au plus 3 as ?
 - h) au moins 1 roi et au plus 2 as ?
 - i) des cartes de deux couleurs différentes ?
 - j) des cartes de trois valeurs différentes ?
- 23)** De combien de manières peut-on choisir 2 délégués de nationalités différentes parmi 4 belges, 6 français et 8 anglais ?
- 24)** De combien de manières une société de 10 membres peut-elle choisir un groupe de 3 personnes pour effectuer un voyage culturel
- a) si Madame Gamma refuse de partir avec Monsieur Zète ?
 - b) si Mlle Alpha et M. Bêta n'acceptent de participer au voyage que s'ils sont ensemble ?
 - c) si on est soumis aux deux contraintes précédentes à la fois ?
- 25)** De combien de façons peut-on dédoubler une classe de 30 élèves ...
- a) en deux classes de 15 élèves ?
 - b) en deux classes de 15 élèves sachant que l'une aura M. Hicks comme titulaire tandis que la titulaire de l'autre sera Mme Ygraic ?
- 26)** Anatole a 5 livres d'algèbre, 3 livres de géométrie et 4 livres d'analyse.
- a) De combien de manières peut-il les ranger sur une étagère de sa bibliothèque ?
 - b) Même question en les regroupant par sujet.
- 27)** De combien de façons peut-on ranger 5 boules dans 7 cases ...
- a) si les boules et les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule ?
 - b) si les boules et les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?
 - c) si les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule ?

28) Voici le plan d'une ville américaine, G étant la gare et H un hôtel :



Chaque bloc est un carré de 100 m sur 100 m. Quelle est la longueur minimale d'un trajet qui va de la gare à l'hôtel indiqué ? Comment faut-il se déplacer sur ce quadrillage si on ne veut pas dépasser cette longueur minimale ? Combien de trajets différents y a-t-il pour aller de la gare à l'hôtel sans faire de détour ?

29) Avec les 9 chiffres distincts de 0, combien peut-on écrire de nombres de 5 chiffres différents

- a) qui se terminent par 7 ?
- b) qui se terminent par 23 ?
- c) qui comprennent 4 ?
- d) qui ne comprennent pas 9 ?
- e) qui ne comprennent que des chiffres impairs ?
- f) qui comprennent 5 mais pas 6 ?
- g) qui comprennent 2 et 5 sous la forme 25 ? (*p.ex. 72518, mais pas 72158*)
- h) qui comprennent 2 et 5 dans cet ordre ? (*p.ex. 924751, mais pas 954721*)
- i) qui comprennent 2 et 5 dans un ordre quelconque ?
- j) dont deux sont pairs et trois impairs ?

30) Au poker on dispose d'un jeu de 32 cartes (4 **couleurs** : cœurs, carreaux, trèfles et piques et 8 **valeurs** : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7). Calculez la probabilité d'obtenir une main de 5 cartes formant :

- a) un full (3 cartes d'une valeur et 2 autres d'une autre valeur, *p.ex. 3 as et 2 valets*)
- b) une quinte floche (5 cartes consécutives d'une même couleur, *p.ex. 8, 9, 10, valet, dame, tous carreaux*)
- c) une couleur (5 cartes non consécutives d'une même couleur, *p.ex. 7, 9, 10, valet, as, tous carreaux*)

- d) une quinte (5 cartes consécutives qui ne sont pas d'une même couleur, *p.ex.* 8 de trèfle, 9 de carreau, 10 de pique, valet de pique, dame de cœur)
 - e) un carré (4 cartes d'une même valeur et une autre, *p.ex.* 4 as et un 10)
- 31)** D'un jeu de 32 cartes on tire simultanément 2 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir
- a) 2 cartes rouges ?
 - b) 2 piques ?
 - c) 2 cartes de même couleur (parmi les 4 couleurs) ?
 - d) 1 roi et 1 neuf ?
 - e) 2 cartes de valeurs différentes ?
 - f) 1 valet et 1 trèfle exactement ?
 - g) 1 roi ou 1 pique ?
- 32)** Reprenez les questions de l'exercice précédent si on tire successivement 2 cartes en tenant compte de l'ordre du tirage,
- a) sans remise.
 - b) avec remise de la première carte avant de tirer la deuxième.
- 33)** On distribue à un joueur 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Calculez la probabilité qu'il ait dans sa main :
- a) 5 piques, 3 trèfles, 4 carreaux et 1 cœur.
 - b) Au moins 2 cœurs ?
 - c) Au plus 3 rois ?
 - d) Au moins 1 as et 1 sept ?
- 34)** Une commission européenne est formée de 20 membres : 12 allemands, 6 polonais et 2 hongrois. En en choisissant 2 au hasard, quelle est la probabilité qu'ils aient la même nationalité ?
- 35)** Dans un village il y a 6 bistrot. Six villageois ont décidé de se rencontrer dans un de ces établissements et chacun d'eux en choisit un au hasard.
- a) Quelle est la probabilité pour que les six personnes aient choisit le même bistrot ?
 - b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux personnes aient choisi le même établissement ?
- 36)** Pour l'examen oral de géographie, le professeur a réalisé 60 fiches proposant chacune un paragraphe de la matière à réviser. Chaque élève doit en tirer 4 au hasard. Sachant que P. n'a révisé qu'un tiers du programme, quelle est la probabilité pour qu'il :
- a) connaisse les 4 sujets tirés ?

- b) ne connaisse aucun des 4 sujets tirés ?
 c) connaisse 3 des 4 sujets tirés ?
 d) rate son examen ?
- 37) On lance 5 fois la même pièce de monnaie. Quelle est la probabilité d'obtenir :
 a) exactement 3 faces ?
 b) au moins 3 faces ?
- 38) On tire simultanément 3 boules d'une urne qui contient 5 boules rouges, 3 boules blanches et 7 boules noires. Quelle est la probabilité d'obtenir :
 a) 1 boule de chaque couleur ?
 b) 3 boules de même couleur ?
 c) 2 boules rouges et 1 boule d'une autre couleur ?
 d) au moins 2 boules noires ?
- 39) Jouer au loto consiste à choisir 6 numéros parmi 49. Calculez la probabilité d'avoir :
 a) les 6 bons numéros.
 b) 5 bons numéros et le numéro complémentaire.
 c) 5 bons numéros.
 d) 4 bons numéros.
 e) 3 bons numéros.
- 40) Une tombola comprend 1000 billets pour 2 lots gagnants. Quel est le nombre minimal de billets qu'il faut acheter pour que la probabilité de gagner soit supérieure à 0,5 ?
- 41) D'un sac contenant 9 boules numérotées de 1 à 9 on tire simultanément 2 boules. Calculez la probabilité de tirer
 a) deux boules impaires
 b) une paire et une impaire
- 42) Mêmes question qu'à l'exercice précédent en tirant successivement 2 boules.
- 43) Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq m \leq n$. Comparez $\frac{C_m^p}{C_n^p}$ et $\frac{A_m^p}{A_n^p}$
- 44) Ecrivez plus simplement :
- | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| a) $71! \cdot 72$ | e) $\frac{100!}{99!}$ |
| b) $\frac{84!}{84}$ | f) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ |
| c) $\frac{(n+3)!}{(n+1)(n+2)}$ | g) $\frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$ |
| d) $(n+1)n!$ | |

45) Développez les binômes suivants :

a) $(a + b)^7$

d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{x^2}{2}\right)^6$

b) $(2x + 3y)^4$

e) $(a - 2b)^5$

c) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^3$

f) $\left(x^3\sqrt{2} - \frac{1}{x\sqrt{2}}\right)^4$

46) Calculez sans calculatrice :

$$0,34^5 + 5 \cdot 0,34^4 \cdot 0,66 + 10 \cdot 0,34^3 \cdot 0,66^2 + 10 \cdot 0,34^2 \cdot 0,66^3 + 5 \cdot 0,34 \cdot 0,66^4 + 0,66^5$$

47) Quelle est la somme des coefficients des développements de $(x + y)^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$?

48) Calculez : $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 \dots + (-1)^n C_n^n$

49) Soit E un ensemble de n éléments, où $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Combien y a-t-il de sous-ensembles de E à 0, 1, 2, 3, p éléments ?

b) Notons $\wp(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. Calculez le cardinal de cet ensemble.

c) Retrouvez ce résultat en utilisant un tirage au sort bien choisi.

50) Calculez le terme en

a) x^6 dans $(3x^2 - 2)^{10}$

c) x^{16} dans $x^{10}(x + 7)^8$

b) x dans $\left(2x^2 - \frac{4}{x}\right)^5$

d) t^3 dans $\left(3t + \frac{1}{t^2}\right)^{12}$

51) Calculez le(s) terme(s) milieu(x) dans le développement de :

a) $(3x + 2)^{12}$

b) $\left(4k^2 - \frac{3}{k}\right)^{11}$

c) $\left(y\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^7$

GEOMETRIE ANALYTIQUE

Table des matières

A) Systèmes linéaires	page 2
1) Définitions	page 2
2) Résolution d'un système linéaire par substitution	page 2
3) Règle de Cramer	page 5
B) Géométrie analytique dans le plan (rappels).....	page 9
1) Repères du plan	page 9
2) Calcul vectoriel dans un repère du plan	page 9
3) Equations d'une droite	page 10
4) Vecteur normal d'une droite	page 13
5) Intersection de deux droites	page 14
C) Géométrie analytique dans l'espace.....	page 15
1) Points, droites, plans et vecteurs dans l'espace	page 15
2) Repères de l'espace	page 18
3) Calcul vectoriel dans un repère de l'espace	page 19
4) Equations d'un plan	page 20
5) Systèmes d'équations d'une droite	page 23
EXERCICES.....	page 25

A) SYSTEMES LINEAIRES

1) Définitions

- Une **équation linéaire** à 2 ou 3 inconnues est une équation de la forme :
 (1) $ax + by = c$ où x, y sont deux inconnues et a, b, c des coefficients réels
 (2) $ax + by + cz = d$ où x, y, z sont trois inconnues et a, b, c, d des coefficients réels

Exemples

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 15 \\ 8x - \frac{4}{7}y + 3,7z = -65 \end{array} \right\} \text{équations linéaires}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 3y = 1 \\ 3x - 8xy + z^3 = 23 \end{array} \right\} \text{équations non linéaires}$$

- Une **solution** de l'équation (1) est un couple de deux nombres $(x; y)$ tel que $ax + by = c$ et une solution de l'équation (2) est un triplet de trois nombres $(x; y; z)$ tel que $ax + by + cz = d$. Par exemple $(18; 7)$ est une solution de $2x - 3y = 15$ et $(-3; 7; -10)$ est une solution de $8x - \frac{4}{7}y + 3,7z = -65$.
- Un **système linéaire** est un ensemble de plusieurs équations linéaires. Les solutions d'un système d'équations sont les solutions communes à toutes les équations du système.

Exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 5y = 17 \quad (1) \\ -3x + 2y = -12 \quad (2) \end{array} \right.$$

$(17; 0)$ est une solution de (1), mais pas de (2) donc ce n'est pas une solution du système ! Par contre $(2; -3)$ est une solution du système car c'est une solution commune aux deux équations.

2) Résolution d'un système linéaire « par substitution »

C'est la méthode la plus générale qui marche avec tout système. Elle consiste à choisir une équation du système et à exprimer à l'aide de celle-ci une des inconnues en fonctions des autres (le choix le plus judicieux consiste à prendre, si possible, une inconnue dont le coefficient vaut 1, ce qui permet d'éviter les calculs avec des fractions !). On remplace

ensuite cette inconnue dans toutes les autres équations du système par cette expression : on obtient alors un système avec une équation et une inconnue en moins que le système initial. On répète ceci jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule équation qu'on peut alors résoudre.

Exemples

- $$\begin{cases} 5x + 17y = 1 & (1) \\ x - 2y = 11 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x = 11 + 2y$$

$$\text{dans (1)} : 5(11 + 2y) - 2y = 11 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y = -2$$

$$\text{donc } x = 11 + 2(-2) = 7$$

$$S = \{(7; -2)\} \text{ (le système a donc une seule solution !)}$$

- $$\begin{cases} 3x - 5y = -4 & (1) \\ -6x + 10y = 8 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 3x = 5y - 4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}y - \frac{4}{3}$$

$$\text{dans (2)} : -6\left(\frac{5}{3}y - \frac{4}{3}\right) + 10y = 8 \Leftrightarrow -10y + 8 + 10y = 8 \Leftrightarrow 0y = 0, \text{ ce qui est vrai}$$

pour tout réel y donc ce système admet une infinité de solutions :

$$S = \left\{ \left(\frac{5}{3}y - \frac{4}{3}; y \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$$

- $$\begin{cases} x + 3y = -7 & (1) \\ 2x - y = 14 & (2) \\ -x + 2y = -13 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow y = 2x - 14$$

$$\text{dans (1)} : x + 3(2x - 14) = -7 \Leftrightarrow 7x = 35 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{donc } y = 2 \cdot 5 - 14 = -4$$

$$\text{vérifions (3)} : -5 + 2(-4) \stackrel{!}{=} -13, \text{ d'où } S = \{(5; -4)\}$$

- $$\begin{cases} x + 3y = -7 & (1) \\ 2x - y = 14 & (2) \\ 8x - 7y = 3 & (3) \end{cases}$$

en utilisant (1) et (2) on obtient $x = 5$ et $y = -4$ (voir exemple ci-dessus)

vérifions (3) : $8 \cdot 5 - 7(-4) = 68 \neq 3$, d'où $S = \emptyset$!

$$\bullet \quad \begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ 2x - 3y - z = -7 & (2) \\ 5x - 2y + 3z = 10 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow z = 6 - x - y$$

$$\text{dans (2) : } 2x - 3y - (6 - x - y) = -7 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 3x - 2y = -1 \quad (4)$$

$$\text{dans (3) : } 5x - 2y + 3(6 - x - y) = 10 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 2x - 5y = -8 \quad (5)$$

(4) et (5) constituent alors un système de 2 équations à 2 inconnues :

$$(5) \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}y - 4$$

$$\text{dans (4) : } \frac{15}{2}y - 12 - 2y = -1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y = 2, \text{ donc } x = \frac{5}{2} \cdot 2 - 4 = 1$$

$$\text{dans (1) : } z = 6 - 1 - 2 = 3, \text{ d'où } S = \{(1; 2; 3)\}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 15 & (1) \\ -x + 5y + z = -18 & (2) \\ -6x + 3y - 9z = 7 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow y = 2x + 3z - 15$$

$$\text{dans (2) : } -x + 5(2x + 3z - 15) + z = -18 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 9x + 16z = 57 \quad (4)$$

$$\text{dans (3) : } -6x + 3(2x + 3z - 15) - 9z = 7 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 0x + 0z = 52 \quad (5)$$

or (5) est impossible donc $S = \emptyset$.

$$\bullet \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 15 & (1) \\ -x + 5y + z = -18 & (2) \\ -6x + 3y - 9z = -45 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow y = 2x + 3z - 15$$

$$\text{dans (2) : } -x + 5(2x + 3z - 15) + z = -18 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 9x + 16z = 57 \quad (4)$$

$$\text{dans (3) : } -6x + 3(2x + 3z - 15) - 9z = -45 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 0x + 0z = 0 \quad (5)$$

or (5) est vrai pour tous x, z réels, donc il y a une infinité de solutions :

$$(4) \Leftrightarrow z = -\frac{9}{16}x + \frac{57}{16}, \text{ dans (1) : } y = 2x + 3\left(-\frac{9}{16}x + \frac{57}{16}\right) - 15 = \frac{5}{16}x - \frac{69}{16}$$

$$\text{donc } S = \left\{ \left(x; \frac{5}{16}x - \frac{69}{16}; -\frac{9}{16}x + \frac{57}{16} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

3) Règle de Cramer

Cette règle s'applique aux systèmes linéaires ayant même nombre d'équations que d'inconnues (nous nous limiterons à deux cas : systèmes de **2 équations à 2 inconnues** et systèmes de **3 équations à 3 inconnues**).

a) Déterminants d'ordre 2 et 3

- Un **déterminant d'ordre 2** est un « tableau carré » de $2 \cdot 2 = 4$ nombres a, b, c, d

noté $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$. La valeur de ce déterminant est donnée par la formule suivante :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemples

$$\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 - 5 \cdot 11 = 21 - 55 = -34$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 9 \\ -8 & -12 \end{vmatrix} = (-4)(-12) - 9(-8) = 48 + 72 = 120$$

- Un **déterminant d'ordre 3** est un « tableau carré » de $3 \cdot 3 = 9$ nombres a, b, c, d, e, f, g, h, i noté $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$. La valeur de ce déterminant est donnée par la formule

suivante appelée **règle de Sarrus** :

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & g \\ e & h \\ f & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g & h \\ h & i \\ i & a \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - gec - ahf - dbi$$

Exemples

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -56 + 0 + 15 - 4 + 12 - 0 = -33$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -10 & 0 \\ -1 & 3 & 9 \\ 7 & -21 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -10 \\ -1 & 3 \\ 7 & -21 \end{vmatrix} = -30 - 630 + 0 - 0 + 945 + 20 = 305$$

b) Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Soit un système de deux équations à deux inconnues écrit sous forme standard :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On commence par calculer le déterminant principal du système :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

1^{er} cas : $\Delta \neq 0$

Le système admet une solution unique qu'on obtient en calculant les déterminants :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

$$\text{Alors } x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \text{ et } y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \text{ d'où : } S = \left\{ \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \right\}$$

2^e cas : $\Delta = 0$

Le système a alors une infinité ou pas de solutions (à préciser à l'aide de la méthode par substitution.

Exemples

Reprenons les exemples du paragraphe 2.

$$\bullet \quad \begin{cases} 5x + 17y = 1 & (1) \\ x - 2y = 11 & (2) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 17 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 17 = -27 \neq 0 \text{ donc une seule solution}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 17 \\ 11 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 187 = -189 \text{ donc } x = \frac{-189}{-27} = 7$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 55 - 1 = 54 \text{ donc } y = \frac{54}{-27} = -2$$

$$S = \{(7; -2)\}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} 7x - 8y = 11 & (1) \\ -21x + 24y = -5 & (2) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -8 \\ -21 & 24 \end{vmatrix} = 168 - 168 = 0 \text{ donc pas ou une infinité de solutions}$$

$(1) \mid (-3) \Leftrightarrow -21x + 24y = -33$ ce qui est incompatible avec (2), donc $S = \emptyset$.

$$\bullet \quad \begin{cases} 3x - 5y = -4 & (1) \\ -6x + 10y = 8 & (2) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0 \text{ donc pas ou une infinité de solutions}$$

Par substitution on trouve (voir p. 3) : $S = \left\{ \left(\frac{5}{3}y - \frac{4}{3}; y \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$

c) Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

Soit un système de trois équations à trois inconnues écrit sous forme standard :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

On commence par calculer le déterminant principal du système :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

1^{er} cas : $\Delta \neq 0$

Le système admet une solution unique qu'on obtient en calculant les déterminants :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

Alors $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ et $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ d'où : $S = \left\{ \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}; \frac{\Delta_y}{\Delta}; \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) \right\}$

2^e cas : $\Delta = 0$

Le système a alors une infinité ou pas de solutions à préciser à l'aide de la méthode par substitution.

Exemples

Reprenons les exemples du paragraphe 2.

$$\bullet \quad \begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ 2x - 3y - z = -7 & (2) \\ 5x - 2y + 3z = 10 & (3) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 5 - 4 + 15 - 2 - 6 = -11 \neq 0 \text{ donc une seule solution}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -7 & -3 & -1 \\ 10 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -54 - 10 + 14 + 30 - 12 + 21 = -11 \text{ donc } x = \frac{-11}{-11} = 1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 5 & 10 & 3 \end{vmatrix} = -21 - 30 + 20 + 35 + 10 - 36 = -22 \text{ donc } y = \frac{-22}{-11} = 2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & -7 \\ 5 & -2 & 10 \end{vmatrix} = -30 - 35 - 24 + 90 - 14 - 20 = -33 \text{ donc } z = \frac{-33}{-11} = 3$$

$$S = \{(1; 2; 3)\}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 15 & (1) \\ -x + 5y + z = -18 & (2) \\ -6x + 3y - 9z = 7 & (3) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -6 & 3 & -9 \end{vmatrix} = -90 + 6 - 9 + 90 - 6 + 9 = 0 \text{ donc une infinité ou pas de solutions}$$

Par substitution on trouve (voir p. 4) : $S = \emptyset$

$$\bullet \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 15 & (1) \\ -x + 5y + z = -18 & (2) \\ -6x + 3y - 9z = -45 & (3) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -6 & 3 & -9 \end{vmatrix} = -90 + 6 - 9 + 90 - 6 + 9 = 0 \text{ donc une infinité ou pas de solutions}$$

$$\text{Par substitution on trouve (voir p. 4) : } S = \left\{ \left(x; \frac{5}{16}x - \frac{69}{16}; -\frac{9}{16}x + \frac{57}{16} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercices 1, 2, 3

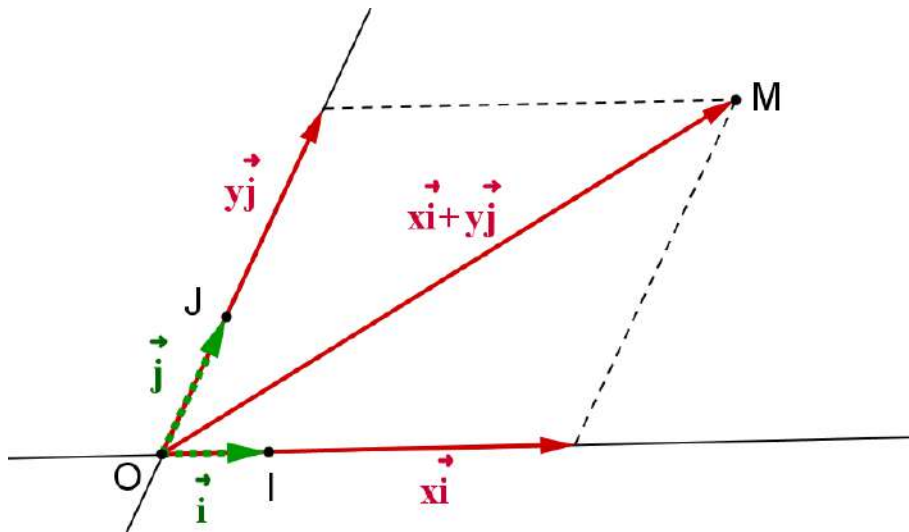
B) GEOMETRIE ANALYTIQUE DANS LE PLAN (Rappels)

1) Repères du plan

- Soient O, I, J trois points non alignés du plan, alors les vecteurs $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ ne sont pas colinéaires et le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un **repère** du plan ce qui signifie que pour tout point M du plan il existe un couple unique $(x; y)$ de nombre réels appelés **coordonnées** de M tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

On note $M(x; y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, x est appelée **abscisse** de M et y **ordonnée** de M. La droite OI est appelée **axe des abscisses** et la droite OJ **axe des ordonnées**



- Si $OI \perp OJ$ et $OI = OJ = 1$ on dit que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un **repère orthonormé (R.O.N.)**
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un point unique M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ ($\overrightarrow{OM}$ est le représentant d'origine O de $\vec{u}$). Si on connaît M, on connaît $\vec{u}$, il est donc naturel de dire que les coordonnées de M sont aussi les « coordonnées » de $\vec{u}$:

$$\text{si } M(x; y) \text{ et } \vec{u} = \overrightarrow{OM} \text{ alors } \vec{u}(x; y) \text{ ou } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2) Calcul vectoriel dans un repère du plan

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et

$\alpha \in \mathbb{R}$, rappelons qu'on a alors les formules suivantes :

a) Formules valables dans tout repère

- $\alpha \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha x_u \\ \alpha y_u \end{pmatrix}$
- $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
- on appelle **déterminant des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le déterminant :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

- on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \vec{u} = k \cdot \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = k \cdot \vec{u}$$

c'est-à-dire si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction ou s'ils sont nuls.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
- A, B, C alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ colinéaires
 $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

b) Formules valables uniquement dans un R.O.N.

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$
- $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- on appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v$$

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

3) Equations d'une droite

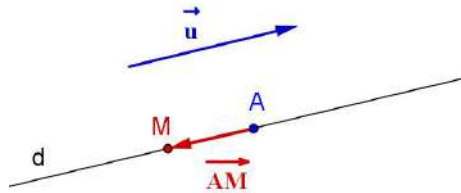
Une droite d du plan est entièrement déterminée si on connaît :

- deux points A et B de d

ou bien

- un point $A \in d$ et un **vecteur directeur** $\vec{u}$ de d (c'est-à-dire un vecteur non nul qui a même direction que d)

Remarquons que dans le premier cas on connaît également un vecteur directeur : $\overrightarrow{AB}$.



$$\forall M \quad M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$$

Nous allons maintenant exprimer cette dernière propriété en utilisant les coordonnées dans un repère (en principe quelconque, en pratique orthonormé) :

$$A(x_A; y_A), M(x; y) \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$$

a) Système d'équations paramétriques de d

$$M(x; y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x_u \\ k \cdot y_u \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x - x_A = k \cdot x_u \\ y - y_A = k \cdot y_u \end{cases}$$

D'où :

$$M(x; y) \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = x_A + k \cdot x_u \\ y = y_A + k \cdot y_u \end{cases}$$

Ce système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y et de **paramètre k** est appelé **système d'équations paramétriques** de d.

Exemple

Soit d la droite passant par A(5; -2) et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, alors :

$$d \equiv \begin{cases} x = 5 - 3k \\ y = -2 + 7k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

pour $k = 1$: $x = 2$ et $y = 5$ donc $B(2; 5) \in d$,

pour $k = -4$: $x = 17$ et $y = -30$ donc $C(17; -30) \in d$, etc.

Pour voir si $D(8,3) \in d$ il faut voir s'il existe un réel k tel que $8 = 5 - 3k$ et $3 = -2 + 7k$. Or la première de ces équations donne $k = -1$ et la deuxième $k = \frac{5}{7}$, donc $D \notin d$!

b) Equation cartésienne de d

$$\begin{aligned} M(x;y) \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_u \\ y - y_A & y_u \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_A)y_u - (y - y_A)x_u = 0 \\ &\Leftrightarrow y_u x - y_u x_A - x_u y + x_u y_A = 0 \end{aligned}$$

En posant $a = y_u$, $b = -x_u$ et $c = x_u y_A - y_u x_A$, on obtient l'équation :

$$M(x;y) \in d \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \quad \text{avec } \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ v.d. de } d$$

Cette équation linéaire à deux inconnues est appelée **équation cartésienne** de d.

Exemple

Pour $A(5;-2)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - 5 \\ y + 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 5 & -3 \\ y + 2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 7(x - 5) + 3(y + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 7x + 3y - 29 = 0 \end{aligned}$$

donc $d \equiv 7x + 3y - 29 = 0$. Cherchons quelques points de d :

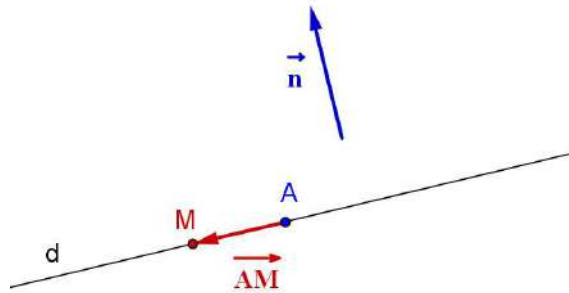
pour $x = 2$, $14 + 3y - 29 = 0 \Leftrightarrow y = 5$, donc $B(2;5) \in d$

pour $y = -30$, $7x - 90 - 29 = 0 \Leftrightarrow x = 17$, donc $C(17;-30) \in d$, etc.

$D(8,3) \in d \Leftrightarrow 7 \cdot 8 + 3 \cdot 3 - 29 = 0$ ce qui est faux donc $D \notin d$.

4) Vecteur normal d'une droite

- On appelle **vecteur normal** d'une droite d tout vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ qui est orthogonal à tout vecteur directeur de d (on peut dire aussi : qui est un vecteur directeur de toute droite perpendiculaire à d).



- Pour connaître d il suffit de connaître un point $A \in d$ et un vecteur $\vec{n}$ normal à d car :

$$\boxed{\forall M \quad M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}}$$

- Si $A(x_A; y_A)$, $M(x; y)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ dans un R.O.N. alors :

$$\begin{aligned} M(x; y) \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \perp \vec{n} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_A)x_n + (y - y_A)y_n = 0 \\ &\Leftrightarrow x_n x - x_A x_n + y_n y - y_A y_n = 0 \end{aligned}$$

En posant $a = x_n$, $b = y_n$ et $c = -x_n x_A - y_n y_A$, on obtient l'équation :

$$\boxed{M(x; y) \in d \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \quad \text{avec } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ v.n. à } d}$$

Exemple

Pour $A(-9; 5)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} M(x; y) \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x + 9 \\ y - 5 \end{pmatrix} \perp \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (x + 9)2 + (y - 5)(-13) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 13y + 83 = 0 \equiv d \end{aligned}$$

- **Remarque :** Si $d \equiv ax + by + c = 0$ alors $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d .

Exemple : pour $d \equiv 4x - 11y + 29 = 0$, $\vec{u} \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$.

5) Intersection de deux droites

Soient deux droites $d \equiv ax + by + c = 0$ et $d' \equiv a'x + b'y + c' = 0$ données par leurs équations cartésiennes, alors :

$$I(x; y) \in d \cap d' \Leftrightarrow (x; y) \text{ est solution du système } \begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \end{cases}$$

Déterminer l'intersection de d et d' et résoudre ce système revient donc au même !

On a trois possibilités :

- si $d \cap d' = \{I\}$ (d et d' sécantes), le système a une seule solution : les coordonnées de I .
- si $d \cap d' = \emptyset$ (d et d' strictement parallèles), le système n'a pas de solution.
- si $d \cap d' = d = d'$ (d et d' confondues), le système a une infinité de solutions.

Remarque : $d \parallel d' \Leftrightarrow \Delta = 0$ et d et d' sécantes $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$ avec $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$.

Exemples (pour les calculs voir pages 6-7)

- $\begin{cases} 5x + 17y = 1 & (1) \\ x - 2y = 11 & (2) \end{cases}, S = \{(7; -2)\}$

interprétation géométrique : les deux équations du système sont les équations de deux droites sécantes qui se coupent en $I(7; -2)$.

- $\begin{cases} 7x - 8y = 11 & (1) \\ -21x + 24y = -5 & (2) \end{cases}, S = \emptyset$

interprétation géométrique : les deux équations du système sont les équations de deux droites strictement parallèles (disjointes).

- $\begin{cases} 3x - 5y = -4 & (1) \\ -6x + 10y = 8 & (2) \end{cases}, S = \left\{ \left(\frac{5}{3}y - \frac{4}{3}; y \right) / y \in \mathbb{R} \right\}$

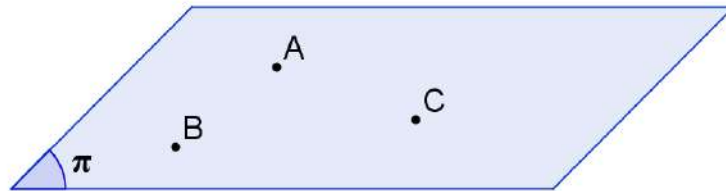
interprétation géométrique : les deux équations du système sont les équations de deux droites confondues.

Exercice 4

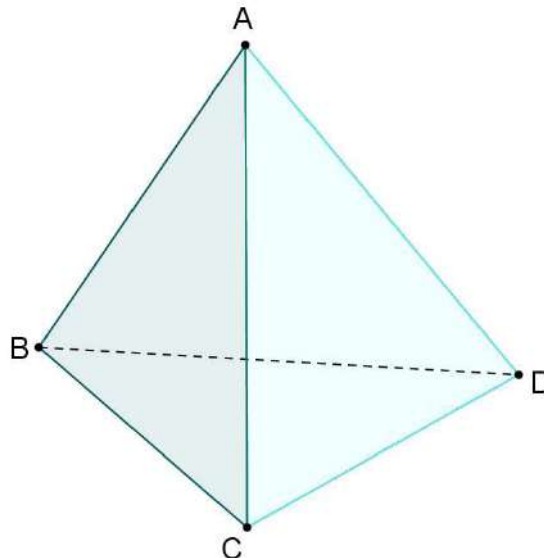
C) GEOMETRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

1) Points, droites, plans et vecteurs dans l'espace

- Les notations pour les points et les droites de l'espace sont les mêmes que celles utilisées dans le plan, les plans sont souvent notés par des lettres grecques : $\alpha, \beta, \pi, \dots$
- Par deux points A et B il passe exactement une droite notée (AB) .
- Par trois points non alignés A, B, C de l'espace il passe exactement un plan noté parfois (ABC) ou simplement ABC :



- Si quatre points appartiennent à un même plan on dit qu'ils sont **coplanaires**, sinon ils forment un **tétraèdre** (c'est-à-dire une pyramide à quatre faces triangulaires) :



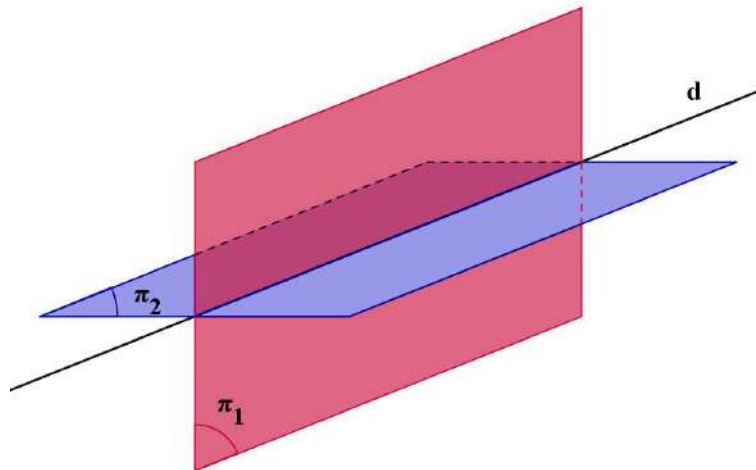
$A \notin BCD$
 $B \notin ACD$
 $C \notin ABD$
 $D \notin ABC$

- **Deux plans** π_1 et π_2 de l'espace peuvent être :
 - **confondus** : $\pi_1 = \pi_2$

➤ **strictement parallèles** : $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$

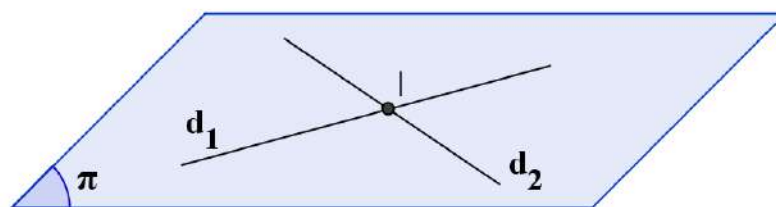


➤ **sécants** : $\pi_1 \cap \pi_2 = d$ (l'intersection de deux plans sécants est une droite !)

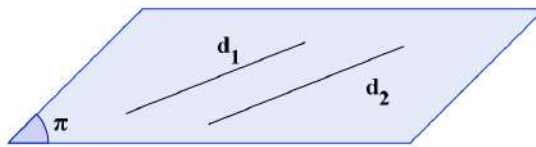


Remarques :

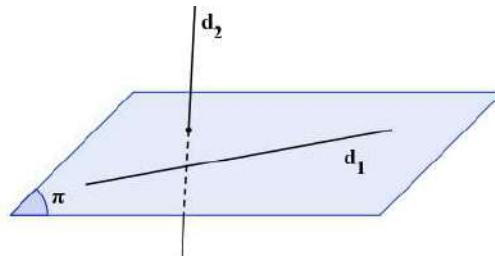
- $\pi_1 \parallel \pi_2$ (**parallèles**) signifie que $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ ou $\pi_1 = \pi_2$, donc deux plans sont soit parallèles, soit sécants (comme deux droites dans un plan).
- Une droite peut toujours être définie comme intersection de deux plans sécants.
- **Deux droites** d_1 et d_2 de l'espace peuvent être :
 - **sécantes** : $d_1 \cap d_2 = \{I\}$ (deux droites sécantes sont coplanaires, c'est-à-dire qu'elles appartiennent à un même plan π)



- **parallèles** : $d_1 = d_2$ ou $d_1 \cap d_2 = \emptyset$ (deux droites parallèles sont également coplanaires)



- **gauches** : c'est ainsi qu'on appelle deux droites qui ne sont pas coplanaires



- Les vecteurs se définissent exactement de la même manière dans l'espace que dans le plan, avec les mêmes propriétés et règles de calcul : addition des vecteurs, multiplication par un réel, vecteurs colinéaires, vecteurs orthogonaux, relation de Chasles, etc.
- Soient A, B, C trois points non alignés qui définissent un plan $\pi = (ABC)$ de l'espace. Alors $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de ce plan donc pour tout point $M \in \pi$ il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$: on exprime ceci en disant que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Il est évident que si $M \notin \pi$ alors $\overrightarrow{AM}$ n'est **pas** une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$! Ainsi :

$$M \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$$

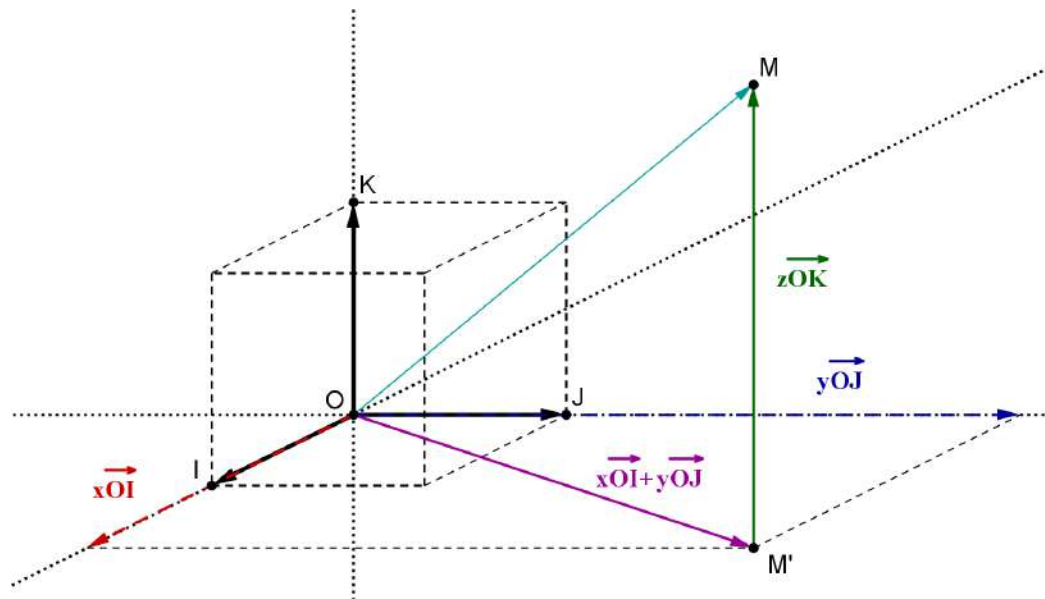
D'une manière générale $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$. Ceci revient en fait à dire qu'il existe trois représentants de ces vecteurs qui sont coplanaires !

- Deux droites sécantes dont les vecteurs directeurs sont orthogonaux sont appelées **droites perpendiculaires**, alors que deux droites gauches dont les vecteurs directeurs sont orthogonaux sont appelées **droites orthogonales**, mais dans les deux cas on note : $d_1 \perp d_2$.

2) Repères de l'espace

- Exemple :**

Soient O, I, J, K quatre sommets adjacents d'un cube, M un point quelconque de l'espace et M' sa projection orthogonale sur le plan (OIJ). Alors il existe deux réels x et y tel que $\overrightarrow{OM'} = x \cdot \overrightarrow{OI} + y \cdot \overrightarrow{OJ}$ puisque $M' \in (OIJ)$ et il existe un réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z \cdot \overrightarrow{OK}$ puisque $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires :



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = x \cdot \overrightarrow{OI} + y \cdot \overrightarrow{OJ} + z \cdot \overrightarrow{OK}$$

- Soient O, I, J, K quatre points non coplanaires de l'espace (OIJK est un tétraèdre) et notons $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$. Alors le quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un **repère** de l'espace ce qui signifie que pour tout point M de l'espace il existe un triplet unique $(x; y; z)$ de nombre réels appelés **coordonnées** de M tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

On note $M(x; y; z)$, x est l'**abscisse** de M, y l'**ordonnée** de M et z la **cote** de M. La droite OI est appelée **axe des abscisses**, la droite OJ **axe des ordonnées** et la droite OK **axe des cotes**. Si les trois vecteurs du repère ont pour norme 1 et sont deux à deux orthogonaux, on dit que le repère est orthonormé (R.O.N.).

Par exemple $O(0, 0, 0)$, $I(1, 0, 0)$, $J(0, 1, 0)$, $K(0, 0, 1)$.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace il existe un point unique M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Comme dans le plan on prend alors les coordonnées de M dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ comme coordonnées de $\vec{u}$:

$$\text{si } M(a, b, c) \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ et } \vec{u} = \overrightarrow{OM} \text{ alors } \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

3) Calcul vectoriel dans un repère de l'espace

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix}$, $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ et $C(x_C, y_C, z_C)$ dans un

repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, de même que dans le plan on a alors les formules suivantes :

a) Formules valables dans tout repère

$$\bullet \quad \alpha \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_u \\ \alpha \cdot y_u \\ \alpha \cdot z_u \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \\ z_u + z_v \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

- on appelle **déterminant des vecteurs** $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le déterminant :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

- $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ssi $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$
- A, B, C, D coplanaires ssi $\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc ssi $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\Leftrightarrow \exists k \quad \vec{u} = k \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \exists k \quad \begin{cases} x_u = k \cdot x_v \\ y_u = k \cdot y_v \\ z_u = k \cdot z_v \end{cases}$ si et seulement si

b) Formules valables uniquement dans un R.O.N.

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$
- $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- on appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v$$

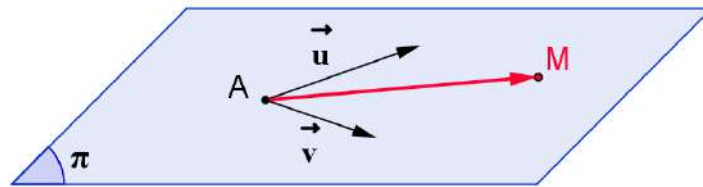
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

4) Equations d'un plan**a) Déterminer un plan**

Il y a deux façons pour déterminer un plan π dans l'espace :

➤ 1^{er} cas

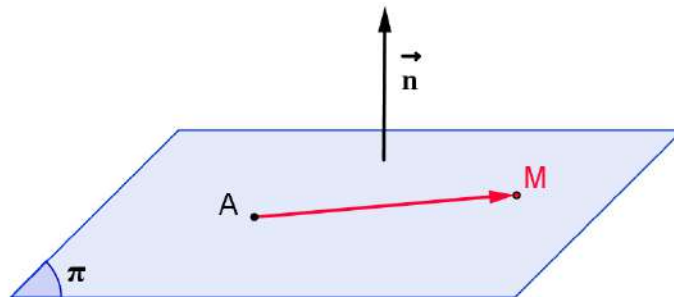
On donne un point $A \in \pi$ et **deux vecteurs directeurs non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de π (ou trois points non alignés $A, B, C \in \pi$ ce qui revient au même puisqu'alors $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont bien deux vecteurs directeurs non colinéaires de π).



$$\boxed{\forall M \quad M \in \pi \Leftrightarrow \overline{AM} \text{ est une combinaison linéaire de } \vec{u} \text{ et de } \vec{v}}$$

➤ 2^e cas

On donne un point $A \in \pi$ et **un vecteur normal** $\vec{n}$ au plan c'est-à-dire un vecteur un vecteur non nul qui est orthogonal à tout vecteur directeur de π .



$$\boxed{\forall M \quad M \in \pi \Leftrightarrow \overline{AM} \perp \vec{n}}$$

b) Système d'équations paramétriques d'un plan

Soit π un plan donné par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et deux vecteurs directeurs non

colinéaires $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ et $M(x, y, z)$ un point quelconque, alors :

$$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_u + \beta \cdot x_v \\ \alpha \cdot y_u + \beta \cdot y_v \\ \alpha \cdot z_u + \beta \cdot z_v \end{pmatrix}$$

D'où :

$$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = x_A + \alpha \cdot x_u + \beta \cdot x_v \\ y = y_A + \alpha \cdot y_u + \beta \cdot y_v \\ z = z_A + \alpha \cdot z_u + \beta \cdot z_v \end{cases}$$

Ce système de paramètres α et β est appelé **système d'équations paramétriques** de π .

Exemples

- $A(7; -3; 2) \in \pi$ de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 7 + 4\alpha \\ y = -3 - 9\alpha + 5\beta \\ z = 2 + 11\alpha - \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

- si $\pi \equiv \begin{cases} x = 5 + 3\alpha - 6\beta \\ y = -1 + 8\alpha \\ z = -23\alpha + 7\beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ alors π est le plan passant par $A(5; -1; 0)$ et

de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -23 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Autres points de π : $\alpha = 1, \beta = 3$: $B(5 + 3 - 18; -1 + 8; -23 + 21) = B(-10; 7; -2)$,

$\alpha = -2, \beta = 0$: $C(5 - 6; -1 - 16; 46) = C(-1; -17; 46)$, etc.

c) Equation cartésienne d'un plan

1^{er} cas : π est défini par un point A et deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_u & x_v \\ y - y_A & y_u & y_v \\ z - z_A & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0$$

En calculant ce déterminant on obtient une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

appelée **équation cartésienne** de π .

Exemple

$$\pi \text{ défini par : } A(3, -5, 1), \vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -2 & 5 \\ y+5 & 7 & 1 \\ z-1 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -28(x-3) - 2(z-1) + 45(y+5) - 35(z-1) - 8(y+5) - 9(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -37x + 37y - 37z + 333 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + y - z + 9 = 0 \equiv \pi$$

2^e cas : π est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}$ **dans un R.O.N.**

$$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_n(x - x_A) + y_n(y - y_A) + z_n(z - z_A) = 0$$

et en posant $a = x_n$, $b = y_n$, $c = z_n$ et $d = -x_A x_n - y_A y_n - z_A z_n$ on obtient encore une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Exemple

$$\pi \text{ défini par : } A(-2, 15, 0) \text{ et } \vec{n} \begin{pmatrix} 8 \\ -21 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \pi &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-15 \\ z \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} 8 \\ -21 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 8(x+2) - 21(y-15) - 3z = 0 \\ &\Leftrightarrow 8x - 21y - 3z + 331 = 0 \equiv \pi \end{aligned}$$

autre méthode : $\pi \equiv 8x - 21y - 3z + d = 0$ et comme $A(-2, 15, 0) \in \pi$:

$$8 \cdot (-2) - 21 \cdot 15 - 3 \cdot 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 331 \text{ d'où } \pi \equiv 8x - 21y - 3z + 331 = 0$$

Exercices 5 - 15**5) Systèmes d'équations d'une droite**

Il y a deux façons de déterminer une droite d dans l'espace :

➤ d est donnée par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on obtient un **système d'équations paramétriques** de paramètre k de d :

$$M(x, y, z) \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = x_A + k \cdot x_u \\ y = y_A + k \cdot y_u \\ z = z_A + k \cdot z_u \end{cases}$$

Exemple

$$d \equiv \begin{cases} x = 17 - 6k \\ y = 37k \\ z = -5 + 19k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \text{ est la droite passant par } A(17, 0, -5) \text{ de v.d. } \vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 37 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

- d est donnée comme intersection de deux plans π_1 et π_2 , chaque plan étant défini par une équation cartésienne.

La droite d est alors déterminée par un système linéaire de deux équations à trois inconnues appelé **système d'équations cartésiennes** :

$$d \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Exemple

$$d \equiv \begin{cases} x - y + 3z = 2 & (1) \\ 2x + 4y - z = 1 & (2) \end{cases}$$

Pour chercher des points de d il faut résoudre ce système :

$$(1) \Leftrightarrow x = 2 + y - 3z$$

$$\text{dans } (2): 4 + 2y - 6z + 4y - z = 1 \Leftrightarrow 6y - 7z = -3 \Leftrightarrow y = \frac{7}{6}z - \frac{1}{2}$$

$$\text{dans } (1): x = 2 + \frac{7}{6}z - \frac{1}{2} - 3z \Leftrightarrow x = -\frac{11}{6}z + \frac{3}{2}$$

Ainsi $\forall z \in \mathbb{R} \quad M\left(-\frac{11}{6}z + \frac{3}{2}; \frac{7}{6}z - \frac{1}{2}; z\right) \in d$, par exemple pour $z = 0$ on obtient

$$A\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right) \in d, \text{ pour } z = -3 \text{ on obtient } B(7; -4; -3) \in d, \text{ etc.}$$

Exercices 16 - 30

EXERCICES**Exercice 1**

Résolvez les systèmes linéaires suivants (méthode au choix) :

$$1) \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \\ 3x - 2z = 5 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x + 3y = 4 \\ 2x + 4y - z = 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x - 6y + 2z = 4 \\ 2x - 5y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x - 4y - 2z = 4 \\ x - 2y - z = 2 \\ -3x + 6y + 3z = 6 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 3x - 2y + z = 7 \\ 2x + 2y - z + 2 = 0 \\ 4x - y + 2z = 9 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} y - 3z + 5 = 0 \\ 2x + y - 2z + 9 = 0 \\ 3x - y + 5z + 20 = 0 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2 \\ 6x_1 - 18x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 8 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 12x_1 + 9x_2 - 18x_3 = 3 \\ 8x_1 + 6x_2 - 12x_3 = 2 \\ -20x_1 - 15x_2 + 30x_3 + 5 = 0 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 + 3x \\ x - 3y + z = 2 - z \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 2x + y - 3z = 4 \\ -4x - 2y + 6z = 2 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 2x = y + 4 \\ 4x + y + 1 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} \frac{x-3}{2} - \frac{y+5}{4} = -2 \\ \frac{2x-5}{3} - \frac{y-2}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3y - z + 5 = 0 \\ 2x + 3z = -4 \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x - 6y + 3z = 3 \\ -\frac{x}{2} - y + \frac{z}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 5y = 14 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 4 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} \frac{x-5y}{3} = 4 + z \\ \frac{3z-5x}{5} = z + \frac{x-2y}{3} \\ 1 - \frac{x+y-z}{2} = -3 \end{cases}$$

Exercice 2

Déterminez les valeurs du paramètre m pour que les systèmes suivants aient :

- a) une seule solution
- b) aucune solution
- c) une infinité de solutions :

$$1) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my + 3z = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + my - z = 1 \\ -x + y + mz = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x - my = 3 \\ 2x + y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Exercice 3

Résolvez les systèmes linéaires suivants en discutant suivant les valeurs du paramètre m :

$$1) \begin{cases} (m+1)x - 2y = 4 \\ (m-1)x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + my + z = 2m \\ mx + y + z = 0 \\ x + my + (m+1)z = m \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x + (m-2)y - m = 0 \\ 4x + my - 10 = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = m \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + mz = 2 \\ mx + m^2y + m^3z = m \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2my + mz = 0 \\ 3x + (m+2)y + (m+1)z = 0 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} mx + y = 2 \\ x + 2y = m \\ 2x + my = 1 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} mx + 3y - mz = 1 \\ 2x + my - z = m \end{cases}$$

Exercice 4

Reprenez tous les systèmes linéaires à deux inconnues des exercices précédents (1 à 3) et donnez-en une interprétation géométrique.

Dans les exercices qui suivent où il sera question d'orthogonalité (càd de vecteurs normaux)

on supposera toujours que le repère est un R.O.N.

Exercice 5

Déterminez une équation cartésienne du plan passant par le point $A(-2;3;1)$ et de vecteur

normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Déterminez une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan passant

par le point $A(-3;1;2)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Déterminez une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan passant

par les points $P(5;-3;7)$, $Q(0;2;-9)$ et $R(5;0;0)$

Exercice 8

Soient Ox , Oy et Oz les trois axes d'un R.O.N. d'origine O , a , b et c les bissectrices des angles

$\widehat{yOz}$, $\widehat{xOz}$ et $\widehat{xOy}$ respectivement. Déterminez les équations cartésiennes :

- 1) des plans xOy , yOz et xOz .
- 2) du plan π_1 contenant a et Ox .
- 3) du plan π_2 contenant b et Oy
- 4) du plan π_3 contenant c et Oz

Exercice 9

Dans un repère de l'espace on donne les points $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-3)$, $C(0;3;-1)$,

$D(-7;10;13)$ et $E(4;-5;1)$.

- 1) Vérifiez que A , B et C ne sont pas alignés.
- 2) Les points D et E appartiennent-ils au plan ABC ?

Exercice 10

Les points $K(2;1;0)$, $L(1;-2;-1)$, $M(0;1;-2)$ et $P(2;-5;4)$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 11

Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(3; -4; 1)$ et parallèle au

plan π' donné par le système d'équations paramétriques : $\pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = 2 + \alpha \end{cases}$

Exercice 12

- 1) Trouvez un système d'équations paramétriques du plan d'équation cartésienne :

$$\pi \equiv x - 2y + z = 1$$

- 2) Trouvez une équation cartésienne du plan donné par le système d'équations

$$\text{paramétriques : } \pi \equiv \begin{cases} x = -3 + 2\alpha + \beta \\ y = 1 - \alpha + 3\beta \\ z = 5 - 3\alpha \end{cases}$$

Exercice 13

Analysez si parmi les plans suivants donnés par leurs équations cartésiennes il y en a qui sont orthogonaux :

$$\pi_1 \equiv 2x - 7y - 2z + 1 = 0$$

$$\pi_2 \equiv 4x - 2y + 11z - 5 = 0$$

$$\pi_3 \equiv x + 13y + 2z + 37 = 0$$

Exercice 14

Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(2; 5; -7)$ et parallèle au

plan $\pi' \equiv 3x - 5y + 7z - 4 = 0$

Exercice 15

Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(2; 5; -7)$ et parallèle au

plan ABC avec $A(2; 1; -3)$, $B(1; 2; -4)$ et $C(1; 0; 1)$

Exercice 16

Déterminez un système d'équations paramétriques et un système d'équations cartésiennes :

1) de la droite passant par $A(5; 2; -3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2) de la droite passant par $A(1; -4; 3)$ et par $B(0; 1; -2)$.

3) des axes de coordonnées Ox , Oy et Oz .

Exercice 17

Analysez si les droites d et d' sont parallèles avec :

$$d \equiv \begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = -k - 1 \\ z = 3k + 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad d' \equiv \begin{cases} x = -\frac{6}{7}k - 1 \\ y = \frac{3}{7}k \\ z = \frac{9}{7}k - 8 \end{cases}$$

Exercice 18

Déterminez un système d'équations paramétriques de la droite d orthogonale au plan $\pi \equiv x - 2y + z = 1$ et passant par le point $P(2; 1; -1)$.

Exercice 19

Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(1; -2; 3)$ et contenant la

$$\text{droite } d \equiv \begin{cases} x = -3 + k \\ y = 2 - k \\ z = -1 + 2k \end{cases}.$$

Exercice 20

Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point $P(3; -1; 4)$

$$\text{et parallèle à la droite } d' \equiv \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = 2\alpha + 2 \\ z = -\alpha + 3 \end{cases}.$$

Exercice 21

On donne les points $A(3; 2; -1)$, $B(1; -2; 1)$, $C(5; 6; -3)$ et $D(6; 8; 4)$.

- 1) Les points C et D appartiennent-ils à la droite AB ?
- 2) Le point T appartient à la droite AB et son abscisse vaut -4 . Calculez ses autres coordonnées.

Exercice 22

Reprenez tous les systèmes linéaires à trois inconnues des exercices précédents (1 à 3) et donnez une interprétation géométrique.

Exercice 23

$$\text{On donne la droite } d \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 7 \\ x + 2y - 7z = 0 \end{cases} \text{ et le plan } \pi \equiv x - y + z = 5. \text{ La droite } d \text{ perce-t-elle le}$$

plan π ? Si oui en quel point ?

Exercice 24

Déterminez l'intersection des droites

$$d \equiv \begin{cases} x + y - z = -6 \\ 2x - y + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad d' \equiv \begin{cases} x = k - 1 \\ y = 2k \\ z = 2 \end{cases}$$

Exercice 25

Déterminez l'intersection de la droite $d \equiv \begin{cases} x = k - 1 \\ y = 3 + 2k \\ z = -k \end{cases}$ et du plan $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \alpha + \beta \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -3 - \alpha - \beta \end{cases}$

Exercice 26

Discutez, en fonction du réel α , la position de la droite $d \equiv \begin{cases} x = 3 + \alpha k \\ y = 2 + 2k \\ z = \alpha - k \end{cases}$ et du plan

$$\pi \equiv 3x - 2y + 5z = 1.$$

Exercice 27

Déterminez l'intersection des droites

$$d \equiv \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = -2\alpha - 3 \\ z = 3\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad d' \equiv \begin{cases} x = 3\beta - 1 \\ y = -\beta - 4 \\ z = \beta + 2 \end{cases}$$

Exercice 28

Déterminez l'intersection de la droite $d \equiv \begin{cases} x + y = 5 \\ -y - 3z = 1 \end{cases}$ et du plan $\pi \equiv \begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = -2\alpha - \beta - 1 \\ z = \alpha - \beta - 2 \end{cases}$.

Exercice 29

Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point $P(1; 0; -1)$

et parallèle à la droite $d' \equiv \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$.

Exercice 30

Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(2; -11; -5)$ et

orthogonal à la droite $d \equiv \begin{cases} x = 2\alpha - 8 \\ y = 3\alpha \\ z = 5\alpha - 2 \end{cases}$.

Exercice 1

$$1) \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 & (1) \\ x - y + 2z = 3 & (2) \\ 3x - 2z = 5 & (3) \end{cases}$$

par substitution :

$$(2) \Leftrightarrow y = x + 2z - 3$$

$$\rightarrow (1): 2x - 3(x + 2z - 3) + z = 1 \Leftrightarrow -x - 5z = -8 \Leftrightarrow 8 - 5z = x \quad (4)$$

par (4) dans (3).

$$(4) \rightarrow (3): 2(8 - 5z) - 2z = 5 \Leftrightarrow 16 - 10z - 2z = 5 \Leftrightarrow 11 = 12z \Leftrightarrow z = \frac{11}{12}$$

$$x = 8 - \frac{55}{12} \Leftrightarrow x = \frac{41}{12}$$

$$y = \frac{41}{12} + \frac{22}{6} - 3 \Leftrightarrow y = \frac{48}{12}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{41}{12}, \frac{48}{12}, \frac{11}{12} \right) \right\}$$

$$2) \begin{cases} x - y + z = 1 & (1) \\ 3x + 3y = 4 & (2) \\ 2x + 4y - z = 3 & (3) \end{cases}$$

Règle de Cramer :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 0 + 12 - 6 - 0 - 3 = 0$$

 $\rightarrow 0$ ou une infinité de solutions (à trouver par substitution)

$$(3): 2x + 4y - z = 3$$

$$\rightarrow (1): x - y + 2x + 4y - 3 = 1 \Leftrightarrow 3x + 3y = 4 \quad (4)$$

$$(4) = (2) \rightarrow \text{une infinité de sol.} : 3y = 4 - 3x \quad | :3 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3} - x$$

$$\rightarrow (3): z = 2x + \frac{16}{3} - 4x - 3 = -2x + \frac{7}{3}$$

$$S = \left\{ \left(x, \frac{4}{3} - x, \frac{7}{3} - 2x \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$3) \begin{cases} x - y - z = 2 & (1) \\ 3x - 6y + 2z = 4 & (2) \\ 2x - 5y + 3z = 3 & (3) \end{cases}$$

Règle de Cramer :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -18 - 4 + 15 - 12 + 10 + 9 = 0$$

 $\rightarrow 0$ ou une infinité de solutions

$$(1): x = 2 + y + z$$

$$\rightarrow (2): 6 + 3y + 2z - 6y + 2z = 4 \Leftrightarrow -3y + 4z = -2 \quad (4)$$

$$\rightarrow (3): 4 + 2y + 2z - 5y + 3z = 3 \Leftrightarrow -3y + 5z = -1 \quad (5)$$

$$(4) \rightarrow (5): -1 = -2 \text{ impossible donc } S = \emptyset$$

$$4) \begin{cases} 2x - 4y - 2z = 4 & (1) \\ x - 2y - z = 2 & (2) \\ -3x + 6y + 3z = 6 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) + (3): 0 = 16 \text{ impossible donc } S = \emptyset$$

$$5) \begin{cases} x - 2y = 3 & (1) \\ 2x + y = 1 & (2) \\ 3x - y = 4 & (3) \end{cases} \quad (3 \text{ eq. à 2 inc.} \rightarrow \text{substitution})$$

$$(2) + (3): 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\rightarrow (2): 2 + y = 1 \Leftrightarrow y = -1$$

$$\text{vérif. (1): } 1 + 2 = 3 \text{ vrai!}$$

$$S = \{(1, -1)\}$$

$$6) \begin{cases} 3x - 2y = 5 & (1) \\ 2x + y = 1 & (2) \text{ (idem)} \\ 4x + 3y = 5 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow y = 1 - 2x$$

$$\rightarrow (1): 3x - 2 + 4x = 5 \Leftrightarrow 7x = 7 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\rightarrow (2): y = 1 - 2 = -1$$

$$\text{vérif. (3): } 4 - 3 = 5 \text{ faux donc } S = \emptyset$$

$$7) \begin{cases} 3x - 2y + z = 7 & (1) \\ 2x + 2y - z = -2 & (2) \\ 4x - y + 2z = 9 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2): 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\rightarrow (2): 2 + 2y - z = -2 \Leftrightarrow z = 2y + 4 \quad (4)$$

$$\rightarrow (3): 4 - y + 2z = 9 \Leftrightarrow y = 2z - 5 \quad (5)$$

$$(5) \rightarrow (4): z = 4z - 10 + 4 \Leftrightarrow -3z = -6 \Leftrightarrow z = 2$$

$$y = 4 - 5 = -1$$

$$S = \{(1, -1, 2)\}$$

$$8) \begin{cases} y - 3z = -5 & (1) \\ 2x + y - 2z = -9 & (2) \\ 3x - y + 5z = -20 & (3) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 6 + 9 - 0 - 10 = -1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 \\ -9 & 1 & -2 \\ -20 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -25 + 40 - 27 - 60 + 10 + 45 = -17, x = \frac{-17}{-1} = 17$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 2 & -9 & -2 \\ 3 & -20 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 30 + 120 - 81 - 0 + 50 = 119, y = \frac{119}{-1} = -119$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -9 \\ 3 & -1 & -20 \end{vmatrix} = 0 - 27 + 10 + 15 - 0 + 40 = 38, z = \frac{38}{-1} = -38$$

$$S = \{(17; -119; -38)\}$$

$$9) \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2 & (2) \\ 6x_1 - 18x_2 + 2x_3 = 6 & (3) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 6 & -18 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 48 + 36 - 30 + 36 + 16 = 0$$

→ on a une infinité de sol.

$$(1): x_1 = 1 + 4x_2 + x_3$$

$$\rightarrow (2): 2 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_2 + 2x_3 = 2 \Leftrightarrow 3x_2 + 4x_3 = 0 \quad (4)$$

$$\rightarrow (3): 6 + 24x_2 + 6x_3 - 18x_2 + 2x_3 = 6 \Leftrightarrow 6x_2 + 8x_3 = 0 \quad | :2 \Leftrightarrow 3x_2 + 4x_3 = 0 \quad (4)$$

$$(4) \Leftrightarrow x_2 = -\frac{4}{3}x_3$$

$$\text{donc } x_1 = 1 - \frac{16}{3}x_3 + x_3 = 1 - \frac{13}{3}x_3$$

$$S = \left\{ \left(1 - \frac{13}{3}x_3, -\frac{4}{3}x_3, x_3 \right) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$10) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8 & (1) \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 5 & (2) \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 & (3) \end{cases}$$

$$(1): x_1 = 8 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\rightarrow (4): 32 - 8x_2 + 20x_3 + 6x_2 - 2x_3 = 5 \Leftrightarrow -2x_2 + 18x_3 = -27 \quad (4')$$

$$\rightarrow (3): 8 - 2x_2 + 5x_3 + x_2 + 4x_3 = 2 \Leftrightarrow -x_2 + 9x_3 = -6 \quad | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow -2x_2 + 18x_3 = -12 \quad (5)$$

impos.

$$S = \emptyset$$

$$11) \begin{cases} 12x_1 + 9x_2 - 18x_3 = 3 & (1) \\ 8x_1 + 6x_2 - 12x_3 = 2 & (2) \\ -20x_1 - 15x_2 + 30x_3 = -5 & (3) \end{cases}$$

$$(3) : (-1) \Leftrightarrow 4x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1 \quad | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 8x_1 + 6x_2 - 12x_3 = 2 \quad \text{donc } (3) = (2)$$

$$(3) : \cdot 3 \Leftrightarrow 12x_1 + 9x_2 - 18x_3 = 3 \quad \text{donc } (3) = (1)$$

Donc le système est réduit à une seule équation:

$$4x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{4}$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{4}; x_2; x_3 \right) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$12) \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 + 3x & (1) \\ x - 3y + z = 2 - z & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow y = 1 + 3x - 2x + 3z \Leftrightarrow y = 1 + x + 3z$$

$$\rightarrow (2): x - 3 - 3x - 9z + z = 2 - z \Leftrightarrow 2x - 7z = 5$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}z - \frac{5}{2}$$

$$\text{donc } y = 1 - \frac{7}{2}z - \frac{5}{2} + 3z = -\frac{1}{2}z - \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{7}{2}z - \frac{5}{2}; -\frac{1}{2}z - \frac{3}{2}; z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$13) \begin{cases} 2x + y - 3z = 4 & (1) \\ -4x - 2y + 6z = 2 & (2) \end{cases}$$

$$(1): y = 4 - 2x + 3z$$

$$\rightarrow (2): -4x - 8 + 4x - 6z + 6z = 2 \Leftrightarrow -8 = 2 \text{ impos donc } S = \emptyset$$

$$14) \begin{cases} 2x = y + 4 & (1) \\ 4x + y + 1 = 0 & (2) \\ 2x + y = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow y = -2x$$

$$\rightarrow (1): 2x = -2x + 4 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow \underline{x = 1}$$

$$\underline{y = -2}$$

vérifions (2): $4 - 2 + 1 \neq 0$ donc $S = \emptyset$

$$15) \frac{2(x-3)}{2} - \frac{4(y+5)}{4} = -2 \cdot 4 \quad | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6 - y - 5 = -8$$

$$\Leftrightarrow 2x - y = 3 \quad (1)$$

$$\frac{2(2x-5)}{2} - \frac{3(y-2)}{2} = \frac{1}{2} \quad | \cdot 6$$

$$\Leftrightarrow 2(2x-5) - 3(y-2) = 3$$

$$\Leftrightarrow 4x - 10 - 3y + 6 = 3$$

$$\Leftrightarrow 4x - 3y = 7 \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 7 = -2, \quad x = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2, \quad y = \frac{2}{-2} = -1$$

$$S = \{(1, -1)\}$$

$$16) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3y - z = -5 \\ 2x + 3z = -4 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 + 0 - 0 - 0 - 0 = 13 \neq 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 8 + 0 - 0 - 0 - 30 = -11, \quad x = -\frac{11}{13}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -15 - 6 + 0 - 0 - 4 - 0 = -25, \quad y = -\frac{25}{13}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 20 + 0 - 18 - 0 - 0 = -10, \quad z = -\frac{10}{13}$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{11}{13}, -\frac{25}{13}, -\frac{10}{13} \right) \right\}$$

$$17) \begin{cases} x - 2y + z = 1 & (1) \\ 3x + y - 2z = 2 & (2) \\ 4x - y - z = 3 & (3) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 16 - 3 - 4 - 2 - 6 = 0$$

→ 0 ou une infinité de sol.

$$(1) \Leftrightarrow x = 1 + 2y - z$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (2): 3 + 6y - 3z + y - 2z &= 2 \Leftrightarrow 7y - 5z = -1 & (4) \\ \rightarrow (3): 4 + 8y - 4z - y - z &= 3 \Leftrightarrow 7y - 5z = -1 & (5) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \rightarrow (2) \\ \rightarrow (3) \end{aligned}} \right\} =$$

$$(4) \Leftrightarrow y = \frac{5z - 1}{7}$$

$$\text{donc } x = 1 + \frac{10z - 2}{7} - z = \frac{7 + 10z - 2 - 7z}{7} = \frac{3z + 5}{7}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{3z + 5}{7}, \frac{5z - 1}{7}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$18) \begin{cases} x - 2y + z = 1 & (1) \\ 3x - 6y + 3z = 3 & (2) \\ -\frac{x}{2} - y + \frac{z}{2} = -\frac{1}{2} \quad | \cdot (-1) \Leftrightarrow x + 2y - z = 1 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (3): 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (1): 1 - 2y + z &= 1 \Leftrightarrow z = 2y & (4) \\ \rightarrow (3): 1 + 2y - z &= 1 \Leftrightarrow z = 2y & (5) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \rightarrow (1) \\ \rightarrow (3) \end{aligned}} \right\} =$$

$$\rightarrow (2): 3 - 6y + 6y = 3 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ vrai!}$$

$$S = \{ (1; y; 2y) \mid y \in \mathbb{R} \}$$

$$19) \begin{cases} x - 2y = 1 & (1) \\ 3x + 5y = 14 & (2) \\ x - y - z = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x = 1 + 2y$$

$$\rightarrow (2): 3 + 2y - y - z = 0 \Leftrightarrow y = z$$

$$\text{donc } x = 1 + z = 3$$

$$\text{Vérif (2): } 9 + 5 = 14$$

$$S = \{ (3, 1) \}$$

$$20) \begin{cases} x+y=5 & (1) \\ 3x-y=4 & (2) \\ 2x-3y=2 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x=5-y$$

$$\rightarrow (2): 15-6y-y=4 \Leftrightarrow y=\frac{11}{7}$$

$$x=5-\frac{11}{7} \Leftrightarrow x=\frac{13}{7}$$

$$\text{vérif. (3): } \frac{26}{7} - \frac{33}{7} = -\frac{7}{7} = -1 \neq 2 \quad \text{donc } S = \emptyset$$

$$21) \begin{cases} 2x+y-3z=1 & (1) \\ x-2y+z=2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow y=1-2x+3z$$

$$\rightarrow (2): x-2+4x-6z+z=2 \Leftrightarrow x=\frac{5z+4}{5}=z+\frac{4}{5}$$

$$y=1-2z-\frac{8}{5}+3z=z-\frac{3}{5}$$

$$S = \left\{ \left(z + \frac{4}{5}; z - \frac{3}{5}; z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$22) \begin{cases} \frac{x-5y}{3} = 4+z & (1) \quad | \cdot 3 \\ \frac{3z-5x}{3} = z + \frac{x-2y}{3} & (2) \quad | \cdot 15 \\ 2x - \frac{5}{2}(x+y-z) = -3 \cdot 2 & (3) \quad | \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5y=12+3z \\ 9z-15x=15z+5x-10y \\ 2-x-y+z=-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5y-3z=12 & (1) \\ 20x-10y+6z=0 & (2) \quad | :2 \Leftrightarrow 10x-5y+3z=0 \\ x+y-z=8 & (3) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 10 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 - 15 - 30 - 15 - 3 - 50 = -108$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 60 - 120 + 0 - 120 - 36 - 0 = -216, \quad x = \frac{-216}{-108} = 2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & -3 \\ 10 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 36 - 240 - 0 - 24 + 120 = -108, \quad y = \frac{-108}{-108} = 1$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 12 \\ 10 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -40 + 0 + 120 + 60 + 0 + 400 = 540, \quad z = \frac{540}{-108} = -5$$

$$S = \{(2, 1, -5)\}$$

Exercice 2

$$1) \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+my=3 \\ x+my+3z=2 \end{cases}$$

Le nombre de solutions dépend de Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & m \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = 9 + m - 2m + 3 - m^2 - 6 = -m^2 - m + 6$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + 6 = 0, \Delta' = 1 + 24 = 25, m' = \frac{1+5}{-2} = -3, m'' = \frac{1-5}{-2} = 2$$

• pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$: 1 solution (car $\Delta \neq 0$)

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & m \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2m - 3m + 6 - m^2 - 9 = -m^2 - m + 6$$

$$x = \frac{-m^2 - m + 6}{-m^2 - m + 6} = 1$$

pas
demandé
ici!

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & m \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + m - 4 + 3 - 2m - 6 = -m + 2$$

$$y = \frac{2-m}{\Delta} = \frac{2-m}{-(m+3)(m-2)} = \frac{2-m}{(m+3)(2-m)} = \frac{1}{m+3}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = 6 + 2 + 3m - 3 - 3m - 4 = 2$$

$$z = \frac{2}{(m+3)(2-m)} = \frac{1}{m+3}$$

$$S = \left\{ \left(1; \frac{1}{m+3}; \frac{1}{m+3} \right) \mid m \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\} \right\}$$

• pour $m = 2$, $\Delta = 0$ donc le système a 0 ou une infinité de solutions

$$\begin{cases} x+y-z=1 & (1) \\ 2x+3y+2z=3 & (2) \\ x+2y+3z=2 & (3) \end{cases}$$

$$(1) : z = x + y - 1$$

$$\rightarrow (2) : 2x + 3y + 2x + 2y - 2 = 3 \Leftrightarrow 4x + 5y = 5 \quad (4)$$

$$\rightarrow (3) : x + 2y + 3x + 3y - 3 = 2 \Leftrightarrow 4x + 5y = 5 \quad (5)$$

$$(4) \Leftrightarrow y = \frac{5-4x}{5} = 1 - \frac{4}{5}x$$

$$z = x + 1 - \frac{4}{5}x - 1 = \frac{1}{5}x$$

$$S = \left\{ \left(x, 1 - \frac{4}{5}x, \frac{1}{5}x \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{une inf. de sol.})$$

- pour $m = -3$, $\Delta = 0$ donc on a une inf. ou pas de sol.

$$\begin{cases} x+y-z=1 & (1) \\ 2x+3y-3z=3 & (2) \\ x-3y+3z=2 & (3) \end{cases}$$

$$(2)+(3): 3x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$$

$$\rightarrow (1): \frac{5}{3}+y-z=1 \Leftrightarrow y-z=-\frac{2}{3} \quad | \cdot 3 \Leftrightarrow 3y-3z=-2 \quad \text{imposs.}$$

$$\rightarrow (2): \frac{10}{3}+3y-3z=3 \Leftrightarrow 3y-3z=-\frac{1}{3}$$

donc $S = \emptyset$

Conclusion:

- Le système a :
- 1 sol. pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{2; -3\}$
 - une inf. de sol. pour $m = 2$
 - pas de sol. pour $m = -3$

$$2) \begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+my-z=1 \\ -x+y+mx=1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 - 1 - m + m - m = m(m^2 - 1) = m(m-1)(m+1)$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = 1 \text{ ou } m = -1$$

- pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1; -1\}$: $\Delta \neq 0$ donc 1 solution

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 - 1 + m - m = (m-1)(m+1)$$

$$x = \frac{1}{m}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 1 - 1 - 1 + m - m = m^2 - 1$$

$$y = \frac{1}{m}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 1 + m - m - 1 = m^2 - 1$$

$$z = \frac{1}{m}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \frac{1}{m} \right) \mid m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1; -1\} \right\}$$

- pour $m = 0$, $\Delta = 0$ donc 0 ou une inf. de sol.

$$\begin{cases} y-z=1 & (1) \\ x-z=1 & (2) \\ -x+y=1 & (3) \end{cases} \quad \begin{matrix} \leftarrow (2)+(3): y-z=2 \\ \text{imposs.} \end{matrix}$$

$$S = \emptyset$$

- pour $m=1$, $\Delta=0$ donc 0 ou une inf. de sol.

$$\begin{cases} x+y-z=1 & (1) \\ x+y-z=1 & (2) \\ -x+y+z=1 & (3) \end{cases} =$$

$$(2)+(3): 2y=2 \Leftrightarrow y=1$$

$$\rightarrow (1): x+1-z=1 \Leftrightarrow x=z$$

$$\rightarrow (3): -x+1+z=1 \Leftrightarrow x=z$$

$$S = \{(x, 1, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

- pour $m=-1$, $\Delta=0$ donc 0 ou une inf. de sol.

$$\begin{cases} -x+y-z=1 & (1) \\ x-y-z=1 & (2) \\ -x+y-z=1 & (3) \end{cases} =$$

$$(1)+(2): -2z=2 \Leftrightarrow z=-1$$

$$\rightarrow (1): -x+y+1=1 \Leftrightarrow x=y$$

$$\rightarrow (2): x-y+1=1 \Leftrightarrow x=y$$

$$S = \{(x, x, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Conclusion:

Le système a: - 1 sol. pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1; -1\}$

- 0 sol. pour $m=0$

- une infinité de sol. pour $m \in \{1; -1\}$

$$3) \begin{cases} 4x-my=3 & (1) \\ 2x+y=2 & (2) \\ x+y=5 & (3) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} 3 \text{ éq. à 2 inconnues} \rightarrow \text{pas de déterminant?} \end{array} \right)$$

$$(2) \Leftrightarrow y=2-2x$$

$$\rightarrow (1): x+2-2x=5 \Leftrightarrow -x=3 \Leftrightarrow x=-3$$

$$y=8$$

$$\text{Vérifions (3): } -12-8m=3 \Leftrightarrow 8m=-15 \Leftrightarrow m=-\frac{15}{8}$$

Conclusion:

Le système a: - 1 sol. ($S=\{(-3; 8)\}$) pour $m=-\frac{15}{8}$

- 0 sol. pour $m \neq -\frac{15}{8}$

Exercice 3

$$1) \begin{cases} (m+1)x - 2y = 4 & (1) \\ (m-1)x - 3y = 5 & (2) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ m-1 & -3 \end{vmatrix} = -3m-3+2m-2 = -m-5$$

$$\Delta \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -5$$

1^{er} cas: $m \neq -5$ ($\Delta \neq 0 \rightarrow 1$ sol.)

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -12+10 = -2, \quad x = \frac{-2}{-m-5} = \frac{2}{m+5}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} m+1 & 4 \\ m-1 & 5 \end{vmatrix} = 5m+5-4m+4 = m+9, \quad y = \frac{m+9}{-m-5}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{2}{m+5}; -\frac{m+9}{m+5} \right) \right\}$$

2^e cas: $m = -5$ ($\Delta = 0 \rightarrow 0$ ou une inf. de sol.)

$$\begin{cases} -4x - 2y = 4 & | :(-2) \\ -6x - 3y = 5 & | :(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -2 \\ 2x + y = -\frac{5}{3} \end{cases} \text{ impossible. } S = \emptyset$$

Résumé

$$\begin{aligned} &\text{— pour } m \neq -5: S = \left\{ \left(\frac{2}{m+5}; -\frac{m+9}{m+5} \right) \right\} \\ &\text{— pour } m = -5: S = \emptyset \end{aligned}$$

$$2) \begin{cases} x + my + z = 2m \\ mx + y + z = 0 \\ x + my + (m+1)z = m \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & m+1 \end{vmatrix} = \cancel{m^2} + \cancel{m} + \cancel{m^2} - \cancel{1} - \cancel{m} - \cancel{m^2(m+1)} \\ = \cancel{m^2} + m - \cancel{m^3} - \cancel{m^2} \\ = m(1 - m^2) \\ = m(1-m)(1+m)$$

$$\Delta \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \text{ ou } m = 1 \text{ ou } m = -1$$

1^{er} cas: $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1; 1\}$ ($\Delta \neq 0 \rightarrow$ sol. unique)

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2m & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & m & m+1 \end{vmatrix} = \cancel{2m^2} + \cancel{2m} + \cancel{m^2} + 0 - m - \cancel{2m^2} - 0 \\ = m^2 + m = m(m+1), \quad x = \frac{1}{1-m}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2m & 1 \\ m & 0 & 1 \\ 1 & m & m+1 \end{vmatrix} = 0 + 2m + m^2 - 0 - m - 2m^3 - 2m^2 = -2m^3 - m^2 + m$$

$$= -m(2m^2 + m - 1)$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$m' = \frac{-1 \pm 3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$m'' = \frac{-1 - 3}{4} = -1$$

$$y = \frac{-(2m+1)}{1-m} = \frac{2m+1}{m-1} = -m - 2\left(m - \frac{1}{2}\right)\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -m(2m-1)(m+1)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & m & 2m \\ m & 1 & 0 \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = m + 0 + 2m^3 - 2m - 0 - m^3 = m^3 - m = -\Delta$$

$$z = \frac{-\Delta}{\Delta} = -1$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{1-m}, \frac{2m+1}{m-1}, -1 \right) \right\}$$

2^e cas: $m = 0$

$$\begin{cases} x+z=0 & (1) \\ y+z=0 & (2) \\ x+z=0 & (3) \end{cases} =$$

(1): $x = -z$

(2): $y = -z$

$$S = \{ (-z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R} \}$$

3^e cas: $m = 1$

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+z=0 \\ \dots \end{cases} \text{ impossible. } S = \emptyset$$

4^e cas: $m = -1$

$$\begin{cases} x-y+z=-2 & (1) \\ -x+y+z=0 & (2) \\ x-y=-1 & (3) \end{cases}$$

(1)+(2): $2z = -2 \Leftrightarrow z = -1$

$\rightarrow$ (1): $x-y-1 = -2 \Leftrightarrow x-y = -1$

$\rightarrow$ (2): $-x+y-1 = 0 \Leftrightarrow x-y = -1$

$\rightarrow$ (3): $x-y = -1$

$$\left. \begin{aligned} &\rightarrow (1): x-y-1 = -2 \Leftrightarrow x-y = -1 \\ &\rightarrow (2): -x+y-1 = 0 \Leftrightarrow x-y = -1 \\ &\rightarrow (3): x-y = -1 \end{aligned} \right\} \text{ d'où } (1) = (2) = (3) \Leftrightarrow x = y-1$$

$$S = \{ (y-1, y, -1) \mid y \in \mathbb{R} \}$$

Résumé:

- pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$: $S = \left\{ \left(\frac{1}{m-1}, \frac{2m-1}{m-1}, -1 \right) \right\}$
- pour $m=0$: $S = \{(-z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$
- pour $m=1$: $S = \emptyset$
- pour $m=-1$: $S = \{(y-1, y, -1) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$$3) \begin{cases} 2x + (m-2)y = m \\ 4x + my = 10 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m-2 \\ 4 & m \end{vmatrix} = 2m - 4m + 8 = -2m + 8$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 4$$

1^{er} cas: $m \neq 4$ ($\Delta \neq 0 \rightarrow 1 \text{ sol.}$)

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m & m-2 \\ 10 & m \end{vmatrix} = m^2 - 10m + 20 \quad (\Delta' = 100 - 80 = 20, m' = \frac{10 \pm \sqrt{20}}{2})$$

$$x = \frac{m^2 - 10m + 20}{8 - 2m}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & m \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 4m, \quad y = \frac{2(10 - 2m)}{2(4 - m)} = \frac{2m - 10}{m - 4}$$

2^e cas: $m = 4$ ($\Delta = 0$, 0 ou ∞ de sol.)

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 & (1) \\ 4x + 4y = 10 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 2x = 4 - 2y \Leftrightarrow x = 2 - y$$

$$(1) \Leftrightarrow 2x = 4 - 2y \Leftrightarrow x = 2 - y$$

$$\rightarrow (2) \quad 8 - 4y + 4y = 10 \text{ imposs. donc } S = \emptyset$$

Résumé

- pour $m \neq 4$: $S = \left\{ \left(\frac{m^2 - 10m + 20}{8 - 2m}, \frac{2m - 10}{m - 4} \right) \right\}$
- pour $m = 4$: $S = \emptyset$

$$4) \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = m \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 + 1 - m - m - m = m^3 - 3m + 2$$

$$\Delta = (m-1)(m^2 + m - 2)$$

$$= (m-1)^2(m+2)$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ ou } m = -2$$

pour éval. : $m = 1$

1	1	0	-3	2
1	1	1	1	-2
1	1	1	-2	0
1	2	0		

1^{er} cas: $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ ($\Delta \neq 0 \rightarrow$ 1 sol)

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \end{vmatrix} = m^2 + m + 1 - m^2 - 1 - m = 0, \underline{x=0}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = m^2 + 1 + m - 1 - m^2 - m = 0, \underline{y=0}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 + 1 - m - m - m = m^3 - 3m + 2 = \Delta$$

$z=1$

$S = \{(0, 0, 1)\}$ (solution indépendante de m , très rare!)

2^e cas: $m=1$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow x+y+z=1 \Leftrightarrow z=1-x-y$$

$S = \{(x, y, 1-x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ (système doublement indéterminé)

3^e cas: $m=-2$

$$\begin{cases} -2x+y+z=1 & (1) \\ x-2y+z=1 & (2) \\ x+y-2z=-2 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow z=1+2x-y$$

$$\rightarrow (2): x-2y+1+2x-y=1 \Leftrightarrow 3x-3y=0 \Leftrightarrow x=y$$

$$\rightarrow (3): x+y-2-4x+2y=-2 \Leftrightarrow -3x+3y=0 \Leftrightarrow x=y$$

$$z=1+2x-x=1+x$$

$$S = \{(x, x, 1+x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$5) \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+mz=2 \\ mx+m^2y+m^3z=m \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & m^2 & m^3 \end{vmatrix} = \cancel{m^3} + \cancel{m^2} + \cancel{m} - m - \cancel{m^3} - \cancel{m^2} = -m^3 + 2m^2 - m$$

$$= -m(m^2 - 2m + 1) = -m(m-1)^2$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = 1$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \quad (\Delta \neq 0 \rightarrow 1 \text{ sol.})$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ m & m^2 & m^3 \end{vmatrix} = \cancel{m^3} + m^2 + 2m^2 - m - \cancel{m^3} - 2m^3 = -2m^3 + 3m^2 - m$$

$$= -m(2m^2 - 3m + 1)$$

rac. év. : 1

$$= -m(m-1)(2m-1)$$

$$x = \frac{-m(m-1)(2m-1)}{-m(m-1)^2} = \frac{2m-1}{m-1}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ m & m & m^3 \end{vmatrix} = 2m^3 + \cancel{m^2} + m - 2m - \cancel{m^2} - m^3$$

$$= m^3 - m$$

$$= m(m^2 - 1)$$

$$= m(m-1)(m+1)$$

$$y = \frac{m(m-1)(m+1)}{-m(m-1)^2} = \frac{m+1}{1-m}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & m^2 & m \end{vmatrix} = m + 2m + m^2 - m - 2m^2 - m = -m^2 + m$$

$$= -m(m-1)$$

$$z = \frac{-m(m-1)}{-m(m-1)^2} = \frac{1}{m-1}$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas : } m = 0$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 & (1) \\ x+y=2 & (2) \\ 0=0 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow y = 2-x$$

$$\rightarrow (1): x + 2 - x + z = 1 \Leftrightarrow z = -1$$

$$S = \{(x, 2-x, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$3^{\text{e}} \text{ cas : } m = 1$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \\ \dots \end{cases} \text{ impossible donc } S = \emptyset$$

Résumé : - pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ $S = \left\{ \left(\frac{2m-1}{m-1}, \frac{1+m}{1-m}, \frac{1}{m-1} \right) \right\}$
 - pour $m = 0$ $S = \{(x, 2-x, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$
 - pour $m = 1$ $S = \emptyset$

$$6) \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2my+nz=0 \\ 3x+(m+2)y+(m+1)z=0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2m & m \\ 3 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = 2m^2 + 2m + 3m + 2m + 4 - 6m - m^2 - 2m - 2m - 2 = m^2 - 3m + 2 \quad (\Delta' = 9 - 8 = 1, m' = \frac{3 \pm 1}{2} = 2) \\ = (m-1)(m-2) \quad m'' = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ ou } m = 2$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas: } m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \quad (\Delta \neq 0 \rightarrow 1 \text{ sol})$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2m & m \\ 0 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = 0, \quad x=0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & m \\ 3 & 0 & m+1 \end{vmatrix} = 0, \quad y=0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2m & 0 \\ 3 & m+2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad z=0$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas: } m = 1$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 & (1) \\ 2x+2y+z=0 & (2) \\ 3x+3y+2z=0 & (3) \end{cases}$$

$$(1): z = -x - y$$

$$\rightarrow (2): 2x+2y-x-y=0 \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$$

$$\rightarrow (3): 3x+3y-2x-2y=0 \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$$

$$z = -x + x = 0$$

$$S = \{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$3^{\text{e}} \text{ cas: } m = 2$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 & (1) \\ 2x+4y+2z=0 & (2) \\ 3x+4y+3z=0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow z = -x - y$$

$$\rightarrow (2): 2x+4y-2x-2y=0 \Leftrightarrow 2y=0 \Leftrightarrow y=0$$

$$\rightarrow (3): 3x + 4y - 3x - 3y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$z = -x$$

$$S = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Résumé : - pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$: $S = \{(0, 0, 0)\}$

$$\text{ - pour } m = 1 : S = \{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{ - pour } m = 2 : S = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$7) \begin{cases} mx + y = 2 & (1) \\ x + 2y = m & (2) \\ 2x + my = 1 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow y = 2 - mx$$

$$\rightarrow (2): x + 4 - 2mx = m \Leftrightarrow (1 - 2m)x = m - 4$$

$$\underline{1^{\text{er}} \text{ cas}}: 1 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$0 \cdot x = \frac{1}{2} - 4 \text{ impossible donc } S = \emptyset$$

$$\underline{2^{\text{e}} \text{ cas}}: m \neq \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{m - 4}{1 - 2m}$$

$$y = 2 - m \frac{m - 4}{1 - 2m} = \frac{2 - 4m - m^2 + 4m}{1 - 2m} = \frac{2 - m^2}{1 - 2m}$$

Vérifions (3):

$$2 \cdot \frac{m - 4}{1 - 2m} + m \cdot \frac{2 - m^2}{1 - 2m} = 1 \quad | \cdot (1 - 2m)$$

$$\Leftrightarrow 2m - 8 + 2m - m^3 = 1 - 2m$$

$$\Leftrightarrow -m^3 + 6m - 9 = 0$$

$$\text{rac. évid. : } m = -3$$

-1	0	6	-9
-3	3	-9	9
-1	3	-3	0

$$\Leftrightarrow (m + 3)(-m^2 + 3m - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -3 \text{ ou } -m^2 + 3m - 3 = 0, \Delta' = 9 - 12 < 0$$

$$\Leftrightarrow m = -3$$

$$\text{ - si } m = -3: x = \frac{-7}{7} = -1, y = \frac{-7}{7} = -1$$

$$\text{ - si } m \neq -3: S = \emptyset \text{ car (3) pas vérifiée!}$$

Résumé : - pour $m = -3$: $S = \{(-1, -1)\}$
 - pour $m \neq -3$: $S = \emptyset$

$$8) \begin{cases} mx + 3y - mz = 1 & (1) \\ 2x + my - z = m & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow z = 2x + my - m$$

$$\rightarrow (1): mx + 3y - 2mx - m^2y + m^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow -mx + (3 - m^2)y = 1 - m^2$$

$$- \text{si } m = 0: 3y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}$$

$$z = 2x$$

$$S = \left\{ \left(x, \frac{1}{3}, 2x \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$- \text{si } m \neq 0: mx = (3 - m^2)y + m^2 - 1 \quad | : m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(3 - m^2)y + m^2 - 1}{m}$$

$$z = 2 \cdot \frac{(3 - m^2)y + m^2 - 1}{m} + my - m$$

$$= \frac{(6 - 2m^2)y + 2m^2 - 2 + m^2y - m^2}{m}$$

$$= \frac{(6 - m^2)y + m^2 - 2}{m}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{(3 - m^2)y + m^2 - 1}{m}, y, \frac{(6 - m^2)y + m^2 - 2}{m} \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 4 (toutes les équations représentent des droites dans le plan)

- Ex 1, ⑤ : les 3 équations représentent 3 droites qui se coupent en 1 point: $I(1, -1)$ (on peut dire aussi : qui sont concourantes en $I(1, -1)$)
- Ex 1, ⑥ : les 3 ép. représentent 3 droites qui n'ont aucun point en commun.
- Ex 1, ⑭ : idem
- Ex 1, ⑮ : même chose que ⑤
- Ex 1, ⑲ : les 3 équations représentent 3 droites qui sont concourantes en $I(3, 1)$
- Ex 1, ⑳ : même chose que ⑥
- Ex 2, ③ : - pour $m = -\frac{15}{8}$: les 3 ép. représentent 3 droites concourantes en $I(-3, 8)$
- pour $m \neq -\frac{15}{8}$: les 3 ép. représentent 3 droites qui n'ont aucun point commun

- Ex 3, ① : pour $m \neq -5$: Les 2 équations représentent 2 droites qui se coupent en $I\left(\frac{2}{m+5}, -\frac{m+9}{m+5}\right)$
pour $m = -5$: Les 2 éq. représentent 2 droites strictement parallèles
- Ex 3, ③ : pour $m \neq 4$: Deux droites qui se coupent en $I\left(\frac{m^2 - 10m + 10}{8 - 2m}, \frac{2m - 10}{m - 4}\right)$
pour $m = 4$: Deux droites strictement parallèles
- Ex 3, ⑦ : pour $m = -3$: Les 3 éq. représentent 3 droites concourantes en $I(-1, 1)$
pour $m \neq -3$: Les 3 droites n'ont aucun point commun

Exercice 22

Toutes les équations représentent des plans dans l'espace

- Ex 1, ① : les 3 éq. représentent 3 plans qui se coupent au point $I\left(\frac{41}{17}, \frac{25}{17}, \frac{19}{17}\right)$

- Ex 1, ② : posons $x = k$ alors S s'écrit :
$$\begin{cases} x = k \\ y = \frac{4}{3} - k \\ z = \frac{7}{3} - 2k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$$

donc S représente la droite d passant par $A(0, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$ et de v. directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
($\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = d$)

- Ex 1, ③ : Les 3 plans représentés par les 3 équations n'ont aucun point en commun.

Analyse plus fine:

$$\begin{aligned} \text{v.m. de } \pi_1 &: \vec{m}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \text{v.m. de } \pi_2 &: \vec{m}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \text{v.m. de } \pi_3 &: \vec{m}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{M}_2 = k \cdot \vec{M}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = k \\ -6 = -k \\ 2 = -k \end{cases} \text{ impossible, donc } \pi_1 \nparallel \pi_2$$

$$\vec{M}_3 = k \cdot \vec{M}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ -5 = -k \\ 3 = -k \end{cases} \text{ impossible, donc } \pi_1 \nparallel \pi_3$$

$$\vec{M}_3 = k \cdot \vec{M}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3k \\ -5 = -6k \\ 3 = 2k \end{cases} \text{ impossible, donc } \pi_2 \nparallel \pi_3$$

Conclusion : les 3 plans sont 2 à 2 sécants

• Ex 1, (4) : idem

De plus : $\pi_1 = \pi_2$ et $\pi_1 \cap \pi_3 = \emptyset$

• Ex 1, (7) : Les 3 plans se coupent en $\Sigma(1, -1, 2)$

• Ex 1, (8) : $\Sigma(17, -119, -38)$

• Ex 1, (9) : posons $x_3 = k$, alors :

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{13}{3}k \\ x_2 = -\frac{4}{3}k \\ x_3 = k \end{cases}$$

les 3 plans se coupent en une droite d passant par $A(1, 0, 0)$ et de v. dir. $\vec{u} \begin{pmatrix} -\frac{13}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

• Ex 1, (10) : Les 3 plans n'ont aucun point commun
En analysant les vecteurs normaux, on peut montrer que les 3 plans sont deux à deux sécants

• Ex 1, (11) : Les 3 plans sont confondus

• Ex 1, (12) : posons $z = k$ alors :

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}k \\ y = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}k \\ z = k \end{cases}$$

les deux plans se coupent en une droite d qui passe par $A(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 0)$ et de v. dir. $\vec{u} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Ex 1, (13) Les 2 équations représentent deux plans strictement parallèles

- Ex 1, (17) posons $z=k$ alors:
$$\begin{cases} x = \frac{5}{7} + \frac{3}{7}k \\ y = -\frac{1}{7} + \frac{5}{7}k \\ z = k \end{cases}$$

Les 3 plans se coupent suivant la droite qui passe par $A(\frac{5}{7}, -\frac{1}{7}, 0)$ et de v.dir. $\vec{u}(\frac{3}{7}, \frac{5}{7}, 1)$

- Ex 1, (18) posons $y=k$ alors
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = k \\ z = 2k \end{cases}$$

Les 3 plans se coupent en une droite qui passe par $A(1, 0, 0)$ et de v.dir. $\vec{u}(\frac{0}{1}, 1, 2)$

- Ex 1, (21) posons $z=k$ alors:
$$\begin{cases} x = \frac{4}{5} + k \\ y = -\frac{3}{5} + k \\ z = k \end{cases}$$

Les 2 plans sont sécants et leur intersection est la droite passant par $A(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$ et de v.dir. $\vec{u}(\frac{1}{1}, 1, 1)$

- Ex 1, (22) Les 3 plans sont concourants en $\Omega(2, 1, -1)$

- Ex 2, (1) * pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$ les 3 plans se coupent au point $\Omega(1, \frac{1}{m+3}, \frac{1}{m+3})$

* pour $m = 2$ posons $x=k$ alors:
$$\begin{cases} x = k \\ y = 1 - \frac{4}{7}k \\ z = \frac{1}{7}k \end{cases}$$

donc les 3 plans ont en commun la droite passant par $A(0, 1, 0)$ et de v.dir. $\vec{u}(\frac{1}{-4}, \frac{1}{7}, 1)$

* pour $m = -3$ les 3 plans n'ont pas de point commun. On peut montrer qu'ils sont 2 à 2 sécants

• Ex 2, ② : * pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$ les 3 plans se coupent au point $I\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)$

* pour $m = 0$ les 3 plans n'ont aucun point commun (ils sont 2 à 2 sécants)

* pour $m = 1$ posons $x = k$ alors :
$$\begin{cases} x = k \\ y = 1 \\ z = k \end{cases}$$

Les 3 plans se coupent en une droite d'intersection passant par $A(0, 1, 0)$ et de v. dir. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

* pour $m = -1$ posons $x = k$ alors
$$\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = -1 \end{cases}$$

Les 3 plans se coupent en une droite passant par $B(0, 0, -1)$ et de v. dir. $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• Ex 3, ② * pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$ les 3 plans se coupent au point $I\left(\frac{1}{1-m}, \frac{2m-1}{m-1}, -1\right)$

* pour $m = 0$ posons $z = k$ alors
$$\begin{cases} x = -k \\ y = -k \\ z = k \end{cases}$$

Les 3 plans se coupent en une droite passant par $O(0, 0, 0)$ et de v. dir. $\vec{u}'\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

* pour $m = 1$ les 3 plans n'ont pas de point commun. En considérant les v. nor. on peut montrer que $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ et π_3 est sécant à π_1 et π_2 .

* pour $m = -1$ posons $y = k$ alors
$$\begin{cases} x = -1+k \\ y = k \\ z = -1 \end{cases}$$

Les 3 plans se coupent en une droite passant par $A(-1, 0, -1)$ et de v.dir. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Ex 3, ④ : * pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{1; -2\}$ les 3 plans se coupent en un point $\underline{I}(0, 0, 1)$
 * pour $m=1$: $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}_3$
 * pour $m=-2$ pour $x=k$ alors $\begin{cases} x=k \\ y=k \\ z=1+k \end{cases}$

les 3 plans se coupent en une droite passant par $A(0, 0, 1)$ et de v.dir. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Ex 3, ⑤ : * pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ les 3 plans se coupent en un point $\underline{I}\left(\frac{2m-1}{m-1}, \frac{m+1}{1-m}, \frac{1}{m-1}\right)$
 * pour $m=0$ pour $x=k$ alors $\begin{cases} x=k \\ y=2-k \\ z=1 \end{cases}$

les 3 plans se coupent en une droite passant par $A(0, 2, 1)$ et de v.dir. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- * pour $m=-1$ les 3 plans n'ont pas de point commun (plus précisément $\vec{u}_1 \cap \vec{u}_2 = \emptyset$ et $\vec{u}_3 = \vec{u}_1$)

- Ex 3, ⑥ : * pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ les 3 plans se coupent en O .
 * pour $m=1$ pour $x=k$ alors $\begin{cases} x=k \\ y=-k \\ z=0 \end{cases}$

les 3 plans se coupent en une droite passant par O et de v.dir. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- * pour $m=2$ pour $x=k$ alors $\begin{cases} x=k \\ y=0 \\ z=-k \end{cases}$

L'intersection des 3 plans est la droite passant par O et de v.dir. $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

• Ex3, ⑧ * pour $m \neq 0$ posons $y = k$ alors

$$\begin{cases} x = \frac{m^2-1}{m} + \frac{3-m^2}{m} k \\ y = k \\ z = \frac{m^2-2}{m} + \frac{6-m^2}{m} k \end{cases}$$

Les 2 plans sont sécants et leur intersection est la droite passant par $A\left(\frac{m^2-1}{m}, 0, \frac{m^2-2}{m}\right)$ et de v.dir. $\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{3-m^2}{m} \\ 1 \\ \frac{6-m^2}{m} \end{pmatrix}$

* pour $m = 0$ posons $x = k$ alors $\begin{cases} x = k \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 2k \end{cases}$

Les 2 plans définissent la droite et passant par $B(0, \frac{1}{3}, 0)$ et de v.dir. $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

P2-systèmes d'équations
P11-Équations-Inéquations
P30-Fonctions(1)
P41-Fonctions affines
P45-Triomes du 2nd degré
P54-Fonctions homographiq
P60-Trigonométrie
P97-Limites
P103-Valeur Absolue
P108-Bijection
P119-Matrices
P131-Vect.Espace
P186-Trigonométrie(2)
P216-Geométrie.Espace
P264-Trigonométrie(3)
P268-Branches Infinies
P276-Primitives
P296-Complexes
P322-Coniques
P376-Probabilités
P406-Géométrie Analytiq