Table des matières

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Première partie

ANALYSE

Chapitre 1

FONCTIONS NUMÉRIQUES

1.1 Fonctions Numériques à variable réelle

1.1.1 Définition

On appelle fonction numérique de la variable réelle, toute fonction de $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1.1.2 Ensemble de définition

Définition

Soit f une fonction numérique.
On appelle ensemble de définition f noté E_f ou domaine de définition de f noté D_f l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

Remarque

Toute fonction polynôme est définie sur $\mathbb{R}$.

1.1.3 Quelques conditions d'existences des fonctions numériques

Soit p et q deux fonctions polynômes.

Fonctions numériques f	Conditions d'existences de f ou E_f
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$; $a_n \neq 0$	$f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$	$f(x)$ existe si et seulement si $q(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt{p(x)}$	$f(x)$ existe si et seulement si $p(x) \geq 0$
$f(x) = \sqrt{\frac{p(x)}{q(x)}}$	$f(x)$ existe si et seulement si $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$ et $q(x) \neq 0$
$f(x) = \frac{\sqrt{p(x)}}{\sqrt{q(x)}}$	$f(x)$ existe si et seulement si $p(x) \geq 0$ et $q(x) > 0$
$f(x) = \sqrt{p(x)} + \sqrt{q(x)}$	$f(x)$ existe si et seulement si $p(x) \geq 0$ et $q(x) \geq 0$
$f(x) = \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}}$	$f(x)$ existe si et seulement si $q(x) > 0$
$f(x) = \frac{\sqrt{p(x)}}{q(x)}$	$f(x)$ existe si et seulement si $p(x) \geq 0$ et $q(x) \neq 0$
$f(x) = p(x) + \sqrt{q(x)}$	$f(x)$ existe si et seulement si $q(x) \geq 0$
$f(x) = \lvert p(x) \rvert$	$f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{\lvert p(x) \rvert}$	$f(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{\lvert p(x) \rvert + l}$; $l \in \mathbb{R}$	si $l \geq 0$ $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{\lvert p(x) \rvert + l}$; $l \in \mathbb{R}$	si $l < 0$, $f(x)$ existe si et seulement si $\lvert p(x) \rvert + l \geq 0$
$f(x) = \cos(ax+b)$ ou $f(x) = \sin(ax+b)$; $a \neq 0$	, $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$

Exercice

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes : $f(x) = 3x^4 + 2x + 6$; $g(x) = \sqrt{x+1}$; $h(x) = \sqrt{|x+2| - 2}$; $k(x) = \dfrac{x}{(x+3)(x-1}$; $l(x) = x + 5 + \sqrt{2x+4}$; $m(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$; $p(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x(x+3)}$; $q(x) = \sqrt{|1+x^2|}$.

1.2 Compléments sur les limites

1.2.1 Limites de référence

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^n = 0$; $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{k}{x} = 0$: $k \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \sqrt{x} = 0$	$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{x^{2n-1}} = -\infty$; $n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{x^{2n-1}} = +\infty$	$\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1}{x^{2n}} = +\infty$; $n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^n = +\infty$; $\in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty$; $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^{2n-1} = -\infty$; $n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$; $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$; $n \in \mathbb{N}^*$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

1.2.2 Limites en l'infini des fonctions usuelles

a) Cas d'une fonction polynôme

La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

b) Cas d'une fonction rationnelle

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exercice

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} (-5x^3 + 7x + 4)\,; \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x}{x - 1}.$$

c) Cas d'une fonction irrationnelle

Exercice

Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 4}\,; \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x + 3}$.

1.2.3 Formes indéterminées

Dans certains cas les opérations algébriques ne permettent pas de trouver la limite cherchée. On dit qu'il y a une forme indéterminée. Ces cas sont : $+\infty - \infty\,; 0 \times \infty\,; \dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Pour lever l'indétermination, on utilise :
▷ La factorisation pour les fonctions polynômes.
▷ L'expression conjuguée pour les fonctions irrationnelles.

Exercice

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{x - 1}\,; \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (\sqrt{3 - x} - \sqrt{2 - x})\,; \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})\,;$
$\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + 3x - 10}$

1.2.4 Limites classiques des fonctions trigonométriques

Soit a un nombre réel non nul.
▷ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{x} = a$.
▷ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{x} = a$.
▷ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos ax}{x^2} = \dfrac{a^2}{2}$.
▷ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos ax - 1}{x} = 0$.
▷ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$; $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)$

1.2.5 Limites par comparaison

Théorème 1

Soit f et g deux fonctions telles que pour tout réel x de l'intervalle $]a;+\infty[$ (respectivement intervalle $]-\infty,a[$) ; $f(x)\geq g(x)$.

▷ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

▷ Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

Théorème 2

Soit f et g deux fonctions telles que pour tout réel x de l'intervalle $]a;+\infty[$ (respectivement intervalle $]-\infty,a[$) ; $f(x)\leq g(x)$.

▷ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

▷ Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

Théorème des gendarmes

Soit f une fonction définie sur E_f.

▷ S'il existe deux fonctions g et h telles que $g\leq f\leq h$ sur un intervalle $]a;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$

▷ S'il existe un nombre réel l, une fonction g et un intervalle $]a;+\infty[$ tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ et $\forall\ x\in]a;+\infty[$, $|f(x)-l|\leq g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

Théorème Comparaison de limites

Soit f et g deux fonctions telles que $f\leq g$ sur un intervalle $]a;+\infty[$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l'$, alors $l\leq l'$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{x}$

1. Montrer que pour tout $x>0$, $\dfrac{x-1}{x}\leq f(x)\leq\dfrac{x+1}{x}$
2. Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$

__Solution 1__

1. Montrons que $\forall\ x>0$; $\dfrac{x-1}{x}\leq f(x)\leq\dfrac{x+1}{x}$
   $\forall\ x\in\ ]0;+\infty[$; On a :
   $-1\leq\sin x\leq 1$ et $\frac{1}{x}>0$
   $x-1\leq x+\sin x\leq x+1$
   $\frac{x-1}{x}\leq\frac{x+\sin x}{x}\leq\frac{x+1}{x}$
   D'où $\boxed{\frac{x-1}{x}\leq f(x)\leq\frac{x+1}{x}}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

2. Calculons $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} \leq \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) \leq \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} \Longrightarrow 1 \leq \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) \leq 1.$
D'après le Théorème de gendarme ; $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$
D'où $\boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - 3\sin x$

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$; $2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4$
2. Calculer la limite f en $-\infty$ et $+\infty$.

Solution

1. Montrons que $2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4$; $\forall\ x\ \mathbb{R}$.
$-1 \leq \sin x \leq 1$
$-3 \leq -3\sin x \leq 3$
$3x + 1 - 3 \leq 2x + 1 - 3\sin x \leq 2x + 1 + 3$
D'où : $\boxed{2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4}$
2. Calculons la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$
$f(x) \leq 2x + 4$; $\forall\ x \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (2x + 4) = -\infty$; alors $\boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$
$2x - 2 \leq f(x)$; $\forall\ x \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (2x - 2) = +\infty$; alors $\boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$

Limite de la composée de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions numériques, a,b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$
Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x) = b$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} f(x) = c$; alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(g(x)) = c$

1.3 Étude des branches infinies

Soit f une fonction définie sur E_f. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1.3.1 Asymptote verticale : droite parallèle à l'axe (Oy)

Soit x_0 un nombre réel non défini sur E_f.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, alors la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

1.3.2 Asymptote horizontale : droite parallèle à l'axe (Ox)

Soit a un nombre réel.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$, alors la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = a$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

1.3.3 Asymptote oblique

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \ (a \in \mathbb{R}^*) \\ \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b \ (b \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

alors la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ de f au voisinage de ∞.

Remarques

▷ La droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ de f si $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

▷ Si de plus $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ et que $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$, alors la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

1.3.4 Direction asymptotique

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \ (a \in \mathbb{R}^*) \\ \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \infty \end{cases}$$

alors la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

1.3.5 Position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$: $y = ax + b$

Pour étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax + b$, on étudie le signe de $f(x) - y$. On distingue trois cas :

▷ Si $f(x) - y < 0$, alors la courbe $(\mathscr{C})$ de f est au dessous de la droite $(\mathscr{D})$.

▷ Si $f(x) - y > 0$, alors la courbe $(\mathscr{C})$ de f est au dessus de la droite $(\mathscr{D})$.

▷ Si $f(x) - y = 0$, alors la courbe $(\mathscr{C})$ de f et la droite $(\mathscr{D})$ sont confondues.

1.3.6 Branches paraboliques

a) Branche parabolique de direction (Ox)

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

alors la courbe $(\mathscr{C})$ f admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de ∞.

b) Branche parabolique de direction (Oy)

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty \end{cases}$$

alors la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de ∞.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

1.4 Continuité d'une fonction numérique

1.4.1 Continuité d'une fonction en un point x_0

Définition

Soit f une fonction définie sur E_f et x_0 un nombre réel.

On dit que f est continue en x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x) \text{ existe } (f \text{ est définie en } x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

1.4.2 Continuité à gauche et continuité à droite d'une fonction

Soit f une fonction définie sur E_f et x_0 un nombre réel.

▷ On dit que f est continue à gauche de x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x) \text{ existe } (f \text{ est définie en } x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

▷ On dit que f est continue à droite de x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x) \text{ existe } (f \text{ est définie en } x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

Propriétés

▷ Une fonction f est continue en x_0 si elle est continue à gauche et à droite de x_0.

Autrement dit f est continue en x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x) \text{ existe } (f \text{ est définie en } x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

▷ Soit f et g deux fonctions continues en point x_0 et α un réel.

• Les fonctions $f + g$; fg et αf sont continues en x_0.

• Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues au point x_0.

▷ Si f est continue en x_0, alors l'ensemble de continuité de f est son ensemble de définition, c'est-à-dire $E_C = E_f$.

Exercice

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = -x + 4 - \dfrac{1}{x-1} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-1} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
4. Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
5. En déduire l'ensemble de continuité de la fonction f.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

1.4.3 Continuité sur un intervalle

a) Définition

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I.

b) Théorèmes

▷ Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
▷ Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.
▷ Toute fonction irrationnelle est continue sur son ensemble de définition.
▷ Toute fonction continue sur un intervalle est définie sur cet intervalle.

c) Propriétés

Soient f et g deux fonction continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et α un nombre réel.
▷ Les fonctions $f+g$; αf ; $f \times g$ sont continues sur I.
▷ Si g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.
▷ Si $f \geq 0$, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

1.4.4 Prolongement par continuité

Définition

Soit f une fonction non définie en x_0 et l un réel tel que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$.
On appelle prolongement par continuité en x_0 de la fonction f la fonction g définie par :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$$
On dit que g est le prolongement par continuité de f en x_0.

Remarque

L'ensemble de définition de g est $E_g = E_f \cup \{x_0\}$.

Exercice 1

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+3x+2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer qu'on peut prolonger par continuité la fonction f en $x_0 = -1$.

Exercice 2

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$
Montrer que g est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Solution 2

Montrons que g est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$; on a :
$-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq f(x) \leq x^2$
$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} -x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x^2 = 0$.
D'après le théorème des gendarmes ; $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} g(x) = 0$
D'où g est donc le prolongeable par continuité en $x_0 = 0$
Ce prolongement est défini par :

$$f(x) = \begin{cases} g(x); \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1.4.5 Image d'un intervalle par une fonction continue

l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

I	Fonction croissant $f(I)$	Fonction décroissante $f(I)$
$[a;b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\longrightarrow b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow b^-}]f(x); f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x); f(b)\right]$	$\left[f(b); \lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x); \lim\limits_{x\longrightarrow b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow b^-} f(x); \lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x)\right[$
$[a;\infty[$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x); f(a)\right]$
$]-\infty;a]$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x); f(a)\right]$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)\right[$
$[-\infty;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x); \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x); \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)\right[$

1.4.6 Cas d'une fonction ni croissante, ni décroissante sur $I = [a;b]$

Pour tout $x \in [a;b]$; il existe deux réels m et Mtels que $m \leq f(x) \leq M$.
On a : $f([a;b]) = [m;M]$ où m désigne le minimum de f et M le maximum de f.

1.4.7 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires permet dans certains cas de démontrer l'existence de solutions d'une équation.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a;b]$. Alors pour tout réel α de $f([a;b])$, il existe au moins un réel $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) = \alpha$.
▷ Si f est continue et croissante sur $[a;b]$, on peut écrire : pour tout $\alpha \in [f(a);f(b)]$, il existe un réel $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) = \alpha$.
▷ Si f est continue et décroissante sur $[a;b]$, on peut écrire : pour tout $\alpha \in [f(b);f(a)]$, il existe un réel $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) = \alpha$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Propriété

Si la fonction f est continue sur un intervalle $I = [a; b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $x_0 \in]a; b[$. Si en plus f est strictement monotone sur $I = [a; b]$, alors x_0 est unique.

Exercice

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 2x - 1$
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in [0,4; 0,5]$

1.4.8 Fonction continue et strictement monotone

Théorème de la bijection réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
▷ f réalise une bijection de I vers $f(I)$
▷ La bijection réciproque notée f^{-1} ; est continue sur l'intervalle $f(I)$
f^{-1} est strictement monotone et a le même sens de variation que f.
▷ Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, la courbe $(\mathscr{C}')$ de f^{-1} se déduit de la courbe $(\mathscr{C})$ de f par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$ appelée première bissectrice.

1.5 Dérivabilité

1.5.1 Dérivabilité d'une fonction en un point x_0

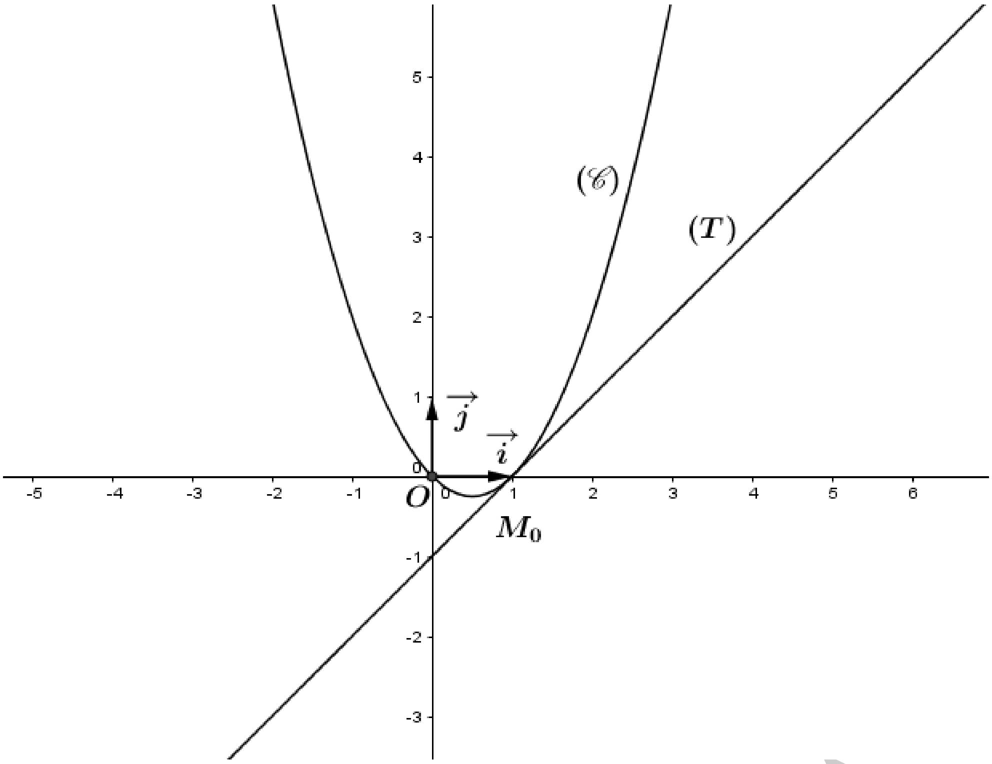
a) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a; b[$ et x_0 un élément de I.
On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et on note $f'(x_0) = a$.

b) Interprétation géométrique : Notion de tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et M_0 un point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse x_0.
Si f est dérivable en x_0, alors la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet en M_0 une tangente (T) dont le coefficient directeur est $f'(x_0) = a$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com



1.5.2 Équation de la tangente (T)

On a : $(T) : y = ax + b$
(T) passe par $M_0(x_0; y_0)$
$y_0 = ax_0 + b \Longrightarrow b = y_0 - ax_0$ avec $y_0 = f(x_0)$
$(T) : y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$
Donc $(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

1.5.3 Tangentes particulières

▷ Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, alors f est dérivable en x_0. La courbe $(\mathscr{C})$ de f admet une tangente (T) parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = f(x_0)$.
▷ Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$, alors f ne pas dérivable en x_0. La courbe $(\mathscr{C})$ de f admet une tangente (T) parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $x = x_0$.

1.5.4 Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite

a) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0.
▷ f est dérivable à gauche de x_0 si et seulement si, $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1$; $a_1 \in \mathbb{R}$.
a_1 est appelée nombre dérivé à gauche de f en x_0 et on note $f'_g(x_0) = a_1$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0.
▷ f est dérivable à droite de x_0 si et seulement si, $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_2$; $a_2 \in \mathbb{R}$.
a_2 est appelée nombre dérivé à droite de f en x_0 et on note $f'_d(x_0) = a_2$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

b)Propriété

Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite de x_0 et que le nombre dérivé à gauche et à droite sont égaux, c'est-à-dire
$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Longrightarrow f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

1.5.5 Interprétation géométrique : Notion de demi-tangente à une courbe

▷ Si f est dérivable à gauche et à droite de x_0 mais elle n'est pas dérivable en x_0 c'est-à-dire $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$, alors la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet deux demi-tangentes oblique de coefficient $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ d'équations respectives $(T) : y = f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ et
$(T) : y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ au point $M_0(x_0; f(x_0))$. Ce point est appelé point anguleux.

▷ Si $\begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty \\ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \end{cases}$ ou $\begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \\ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty \end{cases}$

Alors f n'est pas dérivable en x_0, la la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet deux demi-tangentes verticales dirigées vers le haut ou vers le bas au point $M_0(x_0; f(x_0))$.
Ce point est appelé point de rebroussement.

▷ Si $\begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty \\ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty \end{cases}$ ou $\begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \\ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \end{cases}$

Alors f n'est pas dérivable en x_0, la la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet deux demi-tangentes verticales une dirigée vers le haut et l'autre vers le bas ou une dirigée vers le bas et l'autre vers le haut au point $M_0(x_0; f(x_0))$. Ce point est appelé point d'inflexion.

1.5.6 Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I.

1.5.7 Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle fonction dérivée ou simplement dérivée de la fonction f, l'application qui associée à tout élément x de I, son nombre dérivé $f'(x)$.

1.5.8 Propriétés sur les fonctions dérivables

- ▷ Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.
- ▷ Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ▷ Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.
- ▷ Toute fonction irrationnelle n'est pas dérivable au point où elle s'annule.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

1.5.9 Tableau des dérivées des fonctions usuelles

Fonction : f	Fonction dérivée : f'
$f(x)=a\,;\,a\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^n\,;\,n\in\mathbb{N}^*$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

Exercice

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :
$f(x)=5x^5+6\,;\; g(x)=2020^{2020}\,;\; h(x)=2\sqrt{x}$ et $p(x)=-\dfrac{2}{x}$.

1.5.10 Dérivées et opérations sur les fonctions

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
αu	$\alpha u'$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
u^n, $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u(ax+b)$	$au'(ax+b)$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\cos u$	$-u'\sin u$

1.5.11 Dérivée des fonctions composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle $f(I)$. Alors la fonction $v\circ u$ est dérivable sur I et on a : $(v\circ u)'=u'\times v'\circ u$.

Exercice

Soit $f(x)=2x+4$ et $g(x)=\dfrac{1}{x-4}$. Calculer la dérivée de $g\circ f(x)$.

1.5.12 Dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si sa dérivée f' est dérivable sur I, alors elle admet une dérivée sur I notée f'' appelée dérivée seconde de f.
De la même façon, on peut définir la dérivée troisième et ainsi de suite jusqu'à la dérivée n^{ieme}.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice

Calculer la dérivée seconde de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1.6 Application de la dérivée

1.6.1 Sens de variation

Théorèmes

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.
▷ f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
▷ f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
▷ f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Exercice

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plans muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$, à gauche et à droite de -1 et en $+\infty$.
3. Préciser les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
4. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
5. Donner le sens de variations de la fonction f.
6. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

1.6.2 Extremum d'une fonction

Théorèmes

Soit f une fonction définie sur E_f et $I \subset E_f$ un intervalle. Soit x_0 un élément de I.
On suppose que f dérivable en x_0.
▷ Si f admet un extremum en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
▷ Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum en x_0.

1.6.3 Point d'inflexion

a) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative de f dans le plans muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On appelle point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C})$ de f tout point M_0 de $(\mathscr{C})$ en lequel la courbe $(\mathscr{C})$ traverse sa tangente.

b) Propriétés

▷ Si la dérivée première de f notée f' s'annule en x_0 sans changer le signer, alors le point $M_0(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion à la courbe $(\mathscr{C})$.

▷ Si la dérivée seconde de f notée f'' s'annule en x_0 en changeant le signer, alors le point $M_0(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion à la courbe $(\mathscr{C})$.

1.6.4 Dérivée de la réciproque de dérivation

Soit f une fonction dérivable, strictement monotone sur un intervalle I.
(1) La fonction f réalise une bijection de I vers $f(I)$
(2) La bijection réciproque notée f^{-1} est dérivable sur $f(I)$; on a : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$; $\forall\ x \in f(I)$ avec f' une fonction non nulle.

1.7 Accroissements finis

1.7.1 Théorème de Rolle

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$; dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a) = f(b)$; alors il existe au moins un nombre c de $]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

1.7.2 Théorème des accroissements finis

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$; alors il existe au moins un nombre c de $]a,b[$ te que : $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

1.7.3 Théorème des inégalités des accroissements finis

Théorème 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I $(a < b)$.
S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x éléments de $[a;b]$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Théorème 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. S'il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de $[a;b]$; $|f'(x)| \leq M$; alors pour tous a et b éléments de I ; on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1. (a) Démontrer que $\forall\ x \in [1;2]$ on a : $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq f'(x) \leq \sqrt{2}$.
   (b) En déduire que $\sqrt{2}(x-2) \leq f(x) - \sqrt{5} \leq \frac{\sqrt{5}}{5}(x-2)$
2. (a) Démontrer que $\forall\ x\ [1;2]$; on a : $|f'(x)| \leq \sqrt{2}$
   (b) En déduire que $|f(x) - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2}|x-1|$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

1.8 Éléments de symétries

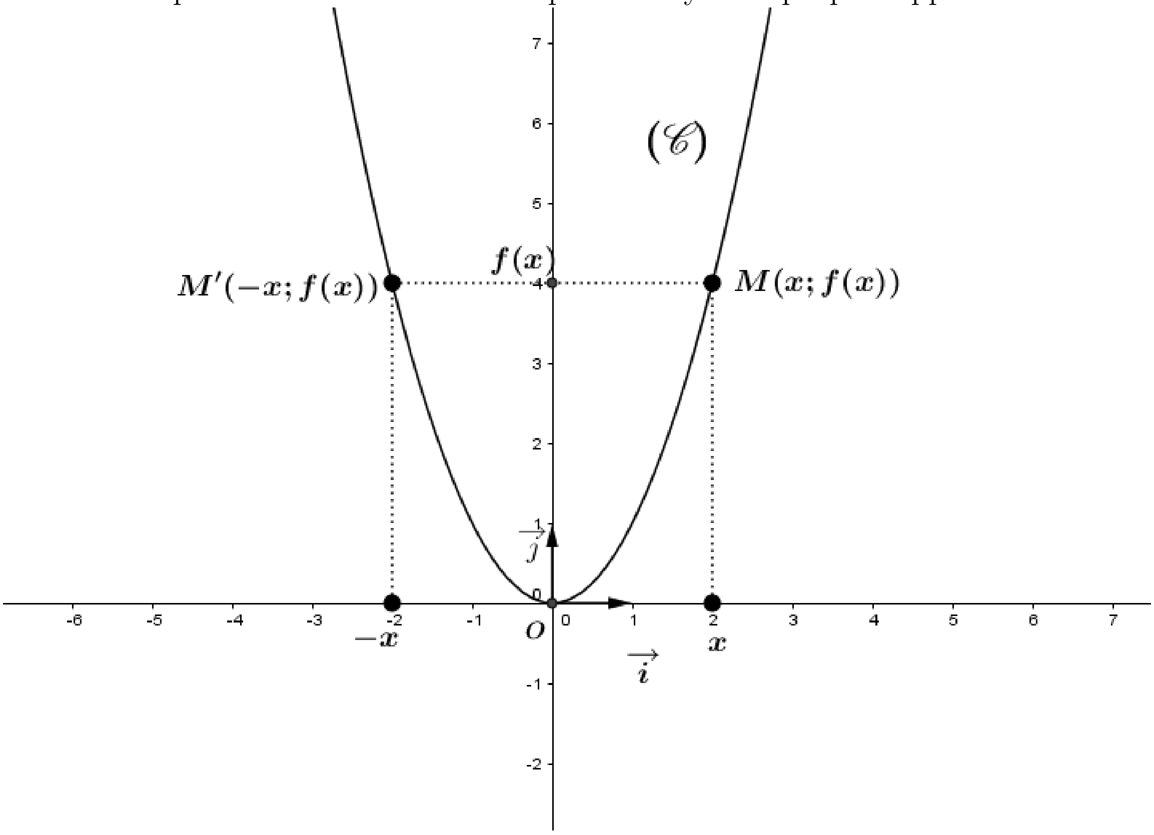
1.8.1 Fonction paire, fonction impaire

1.8.2 a) Fonction paire

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite paire si et seulement si pour tout $x \in I$, $-x \in I$; on a : $f(-x) = f(x)$.

Propriété

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



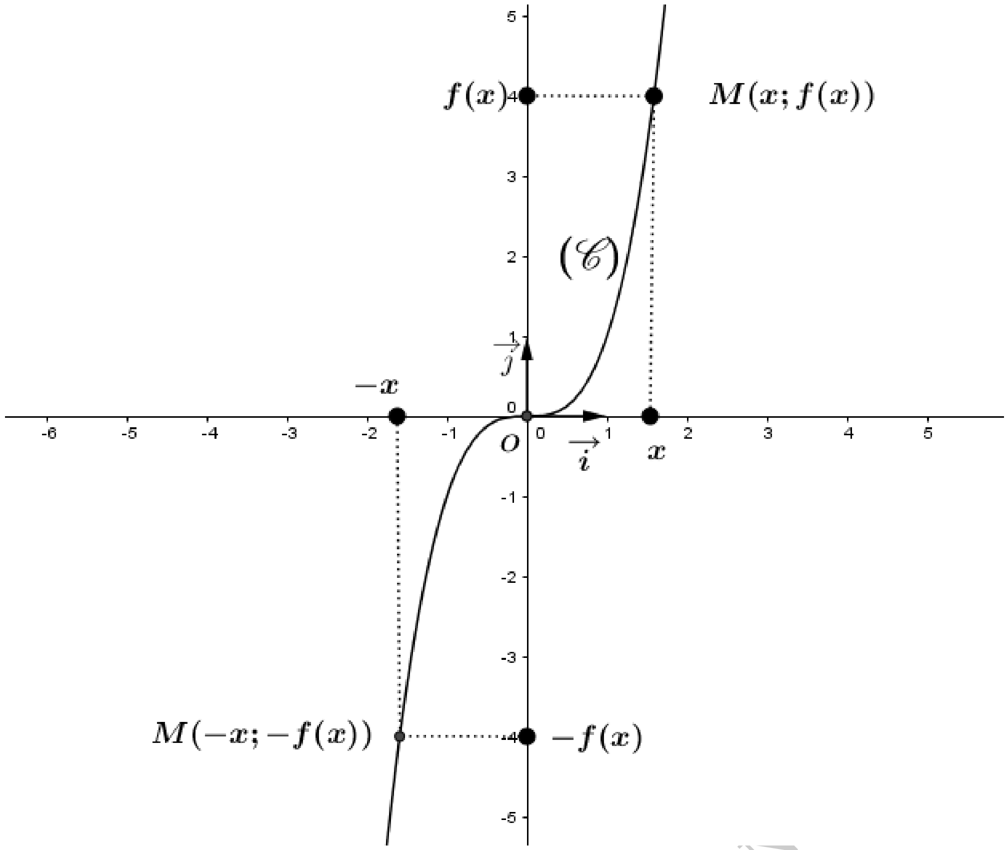
b) Fonction impaire

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite impaire si et seulement si pour tout $x \in I$, $-x \in I$; on a : $f(-x) = -f(x)$.

Propriété

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com



Exercice

Soit f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$ et $g(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g.
2. Étudier la parité des fonctions f et g.

1.8.3 Centre et Axe de symétrie d'une fonction

a) Centre de symétrie d'une fonction

Soit f une fonction numérique définie sur E_f et $\Omega(x_0;y_0)$ un point du plan. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On dit que $\Omega(x_0;y_0)$ est un centre de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$ de f si et seulement si pour tout $x \in E_f$, $2x_0 - x \in E_f$, on a : $f(2x_0-x)+f(x) = 2y_0$.

Exercice

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+4x+3}{x^2+1}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer trois réels α, β et γ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma x}{x^2+1}$.
3. Montrer que le point $B(0;3)$ est un centre de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$ la courbe de f.

b) Axe de symétrie d'une fonction

Soit f une fonction numérique définie sur E_f et $(\mathscr{D})$ une droite d'équation $x=a$ avec $a \in \mathbb{R}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
On dit que $(\mathscr{D})$ est un axe de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$ de f si et seulement si pour tout $x \in E_f$, $2x_0 - x \in E_f$, on a : $f(2x_0-x)-f(x)=0$.

Exercice

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-2x^2+6x+1$. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ une droite d'équation $x=\dfrac{3}{2}$ est un axe de symétrie à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

1.8.4 Périodicité

a) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et T un nombre réel non nul.
f est dite périodique et de période T si et seulement si :
pour tout $x \in I$, $x+T \in I$, $x-T \in I$ et on a : $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$.

Remarques

- ▷ $\cos x$ et $\sin x$ sont périodiques de période $T=2\pi$
- ▷ $\cos(ax+b)$ et $\sin(ax+b)$ sont périodiques de période $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$
- ▷ $\tan x$ et $\operatorname{cotan} x$ sont périodiques de période $T=\pi$
- ▷ $\tan(ax+b)$ et $\operatorname{co}\tan(ax+b)$ sont périodiques de période $T=\dfrac{\pi}{|a|}$
- ▷ Si f a pour période T_1 et g a pour période T_2 ; alors $f+g$; $f.g$ et $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ sont périodiques de période $T=PPCM(T_1;T_2)$

b) Intervalle d'étude

Lorsqu'une fonction est périodique de période T ; on peut l'étudier sur un intervalle I de longueur T. Sa courbe représentative sera complété dans tout le plan par des translations successives de vecteurs $\overrightarrow{u}=T\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{v}=-T\overrightarrow{i}$. Ainsi on a :
$I=[0;T]$ ou $I=[-T;0]$ ou $I=[x_0;x_0+T]$ ou $I=\left[-\dfrac{b}{a};-\dfrac{b}{a}+T\right]$ ou $I=\left[-\dfrac{b}{a}-\dfrac{T}{2};-\dfrac{b}{a}+\dfrac{T}{2}\right]$.

1.8.5 Familles des fonctions

Soit f_m une famille des fonctions et on désigne par $(\mathscr{C}_m)$ sa courbe représentative où m est un nombre réel.

a) Point fixe

Soit $(\mathscr{C}_m)$ l'ensemble des courbes des fonctions f_m.
Si toutes les courbes $(\mathscr{C}_m)$ des fonctions f_m passent par un point $M_0(x_0,y_0)$; alors ce point est fixe.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

b) Détermination du point fixe

Pour déterminer le point ou les points fixes, on résout l'équation : $f_{m+1}(x) - f_m(x) = 0$

1.8.6 Points d'intersection d'une courbe $(\mathscr{C})$ avec les axes du repère

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit f une fonction définie sur un intervalle et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans ce plan.
▷ L'ensemble des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ de f avec l'axe des abscisses est : $(\mathscr{C}) \cap (OI) = \{M(x;y) \in \mathscr{P} / f(x) = 0\}$
▷ L'ensemble des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ de f avec l'axe des ordonnées est : $(\mathscr{C}) \cap (OJ) = \{M(0; f(0) \in \mathscr{P}\}$

1.9 Courbes des fonctions associées aux fonctions données

1.9.1 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto -f(x)$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Les points $M(x; f(x))$ et $M'(x; -f(x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses avec $M \in (\mathscr{C})$ et $M' \in (\mathscr{C}')$. La courbe $(\mathscr{C}')$ de g est le symétrique de la courbe $(\mathscr{C})$ de f par rapport à l'axe des abscisses (Ox).

1.9.2 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto f(-x)$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Les points $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées avec $M \in (\mathscr{C})$ et $M' \in (\mathscr{C}')$. La courbe $(\mathscr{C}')$ de g est le symétrique de la courbe $(\mathscr{C})$ de f par rapport à l'axe des ordonnées (Oy).

1.9.3 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto -f(-x)$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Les points $M(x; f(x))$ et $M'(-x; -f(x))$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère avec $M \in (\mathscr{C})$ et $M' \in (\mathscr{C}')$. La courbe $(\mathscr{C}')$ de g est le symétrique de la courbe $(\mathscr{C})$ de f par rapport à l'origine O du repère.

1.9.4 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto f(x-a)$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Le point $M'(x-a; f(x))$ est l'image de $M(x; f(x))$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i}$ avec $M \in (\mathscr{C})$ et $M' \in (\mathscr{C}')$. La courbe $(\mathscr{C}')$ de g est l'image de la courbe $(\mathscr{C})$ de f par la translation du vecteur $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i}$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

1.9.5 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto f(x)+b$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Le point $M'(x; f(x)+b)$ est l'image de $M(x; f(x))$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{v} = b\overrightarrow{j}$ avec $M \in (\mathscr{C})$ et $M' \in (\mathscr{C}')$. La courbe $(\mathscr{C}')$ de g est l'image de la courbe $(\mathscr{C})$ de f par la translation du vecteur $\overrightarrow{v} = b\overrightarrow{j}$.

1.9.6 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto f(x-a)+b$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Le point $M'(x-a; f(x)+b)$ est l'image de $M(x; f(x))$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ avec $M \in (\mathscr{C})$ et $M' \in (\mathscr{C}')$. La courbe $(\mathscr{C}')$ de g est l'image de la courbe $(\mathscr{C})$ de f par la translation du vecteur $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$.

1.9.7 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto |f(x)|$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Pour tout $x \in E_g$, on a : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \geq 0 \\ g(x) = -f(x) \text{ si } x < 0 \end{cases}$
La courbe $(\mathscr{C}')$ est la réunion des parties des courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$, situées au-dessus de (Ox).

1.9.8 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto f(|x|)$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Pour tout $x \in E_g$, on a : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \geq 0 \\ g(x) = f(-x) \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$
La courbe $(\mathscr{C}')$ de la fonction g est la réunion de la partie de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisses positives ainsi que son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy).

1.9.9 Courbes de $f : x \longmapsto f(x)$ et $g : x \longmapsto kf\left(\dfrac{1}{k}x\right)$ avec $k \in \mathbb{R}^*$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe de la fonction f et $(\mathscr{C}')$ la courbe de la fonction g dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
La courbe $(\mathscr{C}')$ de la fonction g est l'image de la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f par l'homothétie de centre O et de rapport k.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Chapitre 2

SUITES NUMÉRIQUES

2.1 Raisonnement par récurrence

2.1.1 Principe de récurrence

Soit $p(n)$ une propriété qui dépend de n.
Pour démontrer par récurrence que la propriété $p(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut :
▷ Vérifier que la propriété $p(n)$ est vraie au rang initial $n = n_0$;
▷ supposer qu'elle est vraie pour $n = k$, $\forall \quad k \geqslant n_0$;
▷ Prouver qu'elle est vraie pour $n = k+1$.
▷ conclure que : $\forall\ n \geqslant n_0$, $p(n)$ est vraie.

2.1.2 Application

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n+1} - 2$.

Exercice 2

Montrer par récurrence que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Soit S_n une somme définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $S_n = 1+2+3+4+5+...+n$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. En déduire les nombres suivants : $A = 1+2+3+4+5+...+2020$ et $B = 48+49+50+...+627$.

Solution 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$.

1. Calculons u_2, u_3 et u_4.
   $u_2 = 2 + 2^2 = 6$; $\quad u_3 = 2 + 2^2 + 2^3 = 14$; $\quad u_4 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$
2. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = 2^{n+1} - 2$.

   – Pour $n = 1$, $u_1 = 2^2 - 2 = 2$ vraie ; Pour $n = 2$, $u_2 = 2^3 - 2 = 6$ vraie

– Supposons que vraie au rang k.
– Prouvons qu'elle est vraie pour $k+1$, c'est-à-dire $u_{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 2$.
En effet,

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= \underbrace{2 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k}_{u_k} + 2^{k+1} \\
&= u_k + 2^{k+1} \\
&= 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} \\
&= 2 \times 2^{k+1} - 2 \\
&= 2^{(k+1)+1} - 2 \\
u_{k+1} &= 2^{(k+1)+1} - 2
\end{aligned}$$

D'où $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n+1} - 2$

2.2 Suite majorée, minorée , bornée

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
▷ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite majorée s'il existe un nombre réel M tel que $u_n \leq M$.
▷ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite minorée s'il existe un nombre réel m tel que $u_n \geq m$.
▷ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée si elle est à la fois minorée et majorée, c'est-à-dire pour tout nombres réels m et M, on a : $m \leq u_n \leq M$.

Remarque

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
▷ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite positive, lorsque pour tout n, $u_n \geq 0$.
▷ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite négative, lorsque pour tout n, $u_n \leq 0$.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 0.
2. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.
3. En déduire que la suite (u_n) est bornée.

Solution

On donne $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

1. Montrons que la suite (u_n) une suite est minorée par 0.
   $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2n}{n+1} \geq 0 \Longrightarrow u_n \geq 0$.
   D'où la suite (u_n) est minorée par 0.
2. Montrons que la suite (u_n) une suite est majorée par 2.
   $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n - 2 = \dfrac{2n}{n+1} - 2 \Longrightarrow u_n = \dfrac{-2}{n+1} < 0 \Longrightarrow u_n < 0$.
   D'où la suite (u_n) est majorée par 2.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

3. Déduisons-en que la suite (u_n) est bornée.
   La suite (u_n) étant minorée et majorée, elle est donc bornée.

2.3 Suite périodique

2.3.1 Définition

On dira qu'une suite (u_n) est périodique s'il existe un entier naturel non nul p tel que : $\forall \quad n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$
Le plus petit entier $p \geqslant 0$ est appelé période de la suite u_n.

2.3.2 Propriété

Si (u_n) est périodique de période p , alors $\forall \quad k \in \mathbb{N}, u_{n+kp} = u_n$.

Exercice

On donne : $u_n = (-1)^n$

1. Montrer que (u_n) est une suite périodique de période $p = 2$
2. Calculer u_0, u_1 et u_2.
3. En déduire u_{3019} et u_{3020}.

Solution

$u_n = (-1)^n$

1. Montrons que (u_n) est une suite périodique de période $p = 2$
   $u_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n.(-1)^2 = (-1)^n = u_n \Longrightarrow \underline{u_{n+2} = u_n}$.
   Donc (u_n) est une suite de période $p = 2$.
2. Calculons u_0, u_1 et u_2.
   $u_0 = (-1)^0 = 1, \quad u_1 = (-1)^1 = -1 \quad u_2 = (-1)^2 = 1$
3. Déduisons u_{3019} et u_{3020}.
   $3019 = 2 \times 1509 + 1$, donc $u_{3019} = u_{(1+2\times1509)} = u_1 \Longrightarrow \underline{u_{3019} = -1}$
   $3020 = 1510 \times 2 + 0$, donc $u_{3020} = u_{(0+2\times1510)} = u_0 \Longrightarrow \underline{u_{3020} = 1}$

2.4 Sens de variation d'une suite numérique

2.4.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
▷ La suite (u_n) est dite croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
▷ La suite (u_n) est dite décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
▷ La suite (u_n) est dite constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0$.

Exercice

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
Étudier le sens de variation de (u_n).

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

2.5 Convergence d'une suite numérique

2.5.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
▷ La suite (u_n) est dite convergente si elle admet une limite finie.
▷ La suite (u_n) est dite divergente si elle n'admet pas une limite finie.

2.5.2 Théorèmes de convergence d'une suite numérique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
▷ Toute suite croissante et majorée est convergente.
▷ Toute suite décroissante et minorée est convergente.
▷ Toute suite croissante non majorée, décroissante non minorée est divergente.

Exercice

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. En déduire sa limite.

2.6 Suite particulières

2.6.1 Suite arithmétique

a) Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique lorsqu'il existe un nombre réel r tel que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = r$.
Le réel r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple

La suite 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26,... est arithmétique de raison $r = 4$.

b) Terme général d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
On a : $u_{n+1} - u_n = r$
$u_1 - u_0 = r$
$u_2 - u_1 = r$
$u_3 - u_2 = r$
$u_4 - u_3 = r$
$u_5 - u_4 = r$
$u_6 - u_5 = r$
$\vdots$
$u_{n-1} - u_{n-2} = r$
$u_n - u_{n-1} = r$
En additionnant membre à membre les n égalités suivantes, on obtient : $u_n - u_0 = nr$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

D'où $u_n = u_0 + nr$.
En général, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$;
on a : $u_n = u_p + (n-p)r$ où p est l'indice du premier terme.

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
On donne $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$. Trouver la raison r et le premier terme u_0.

c) Progression arithmétique

Trois termes a, b et c pris dans cet ordre sont en progression arithmétique si et seulement si, $a + c = 2b$.

d) Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ la somme des termes d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n \quad (1)$
$s_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + ... + u_2 + u_1 + u_0 \quad (2)$

En faisant (1)+ (2), on a :
$2s_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + ... + (u_{n-2} + u_2) + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0)$
or $u_p + u_{n-p} = u_0 + pr + u_0 + (n-p)r$
$u_p + u_{n-p} = u_0 + pr + u_0 + nr - pr = u_0 + u_0 + nr$
$u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n$.
Ainsi
$2s_n = (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + ... + (u_0 + u_n)$
$2s_n = (n+1)(u_0 + u_n)$
D'où $s_n = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$
D'une manière générale, $\forall\, p \in \mathbb{N}$ on a : $s_n = \dfrac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$ avec p indice du premier terme de la suite.
En posant $Nt = n - p + 1$; on a : $s_n = \dfrac{Nt(u_p + u_n)}{2}$ avec $Nt = id - ip + 1$ le nombre de terme et id est l'indice du dernier terme de la suite ; ip est l'indice du premier terme de la suite.

e) Variation d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
▷ Si $r \geq 0$, la suite (u_n) est croissante ;
▷ Si $r \leq 0$, la suite (u_n) est décroissante ;
▷ si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.

f) Convergence d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n = u_p + (n-p)r$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_p - pr + \lim\limits_{n\to+\infty}(nr)$
▷ si $r > 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

$\triangleright$ si $r < 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
Donc la suite arithmétique est divergente.

2.6.2 Suite géométrique

a) Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique lorsqu'il existe un nombre réel q tel que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = qu_n$.
Le réel q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $q \neq 0$.

Exemple

La suite 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$,... est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

b) Terme général d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
On a : $u_{n+1} = qu_n$
$u_1 = qu_0$
$u_2 = qu_1$
$u_3 = qu_2$
$u_4 = qu_3$
$u_5 = qu_4$
$\vdots$
$u_{n-2} = qu_{n-3}$
$u_{n-1} = qu_{n-2}$
$u_n = qu_{n-1}$
En multipliant membre à membre les n égalités et en simplifiant, on obtient : $u_n = u_0q^n$
D'où $u_n = u_0q^n$
D'une manière générale, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = u_pq^{n-p}$.

c) Progression géométrique

Trois termes a, b et c pris dans cet ordre sont en progression géométrique si et seulement si, $a \times c = b^2$.

d) Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$.
On a :
$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ (1) et $qs_n = qu_0 + qu_1 + qu_2 + qu_3 + ... + qu_n$ (2)
$(1) - (2) \Longrightarrow s_n - qs_n = u_0 - qu_0 + u_1 - qu_1 + u_2 - qu_2 + u_3 - qu_3 + ... + u_n - qu_n$
or (u_n) est une suite géométrique, alors $u_1 = qu_0$; $u_2 = qu_1$....
on a : $s_n - qs_n = u_0 - qu_0 + qu_0 - qu_1 + qu_1 - qu_2 + qu_2 - qu_3 + ... + qu_{n-1} - qu_n$
$s_n - qs_n = u_0 - qu_n \Longrightarrow s_n(1-q) = u_0 - q.q^nu_0$.
D'où $s_n = \dfrac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q}$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

D'une manière générale, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $s_n = \dfrac{u_p(1-q^{n-p+1})}{1-q}$.

En posant $Nt = n-p+1$; on a : $s_n = \dfrac{u_p(1-q^{Nt})}{1-q}$

Remarques

▷ Si $q = 1$, on a : $s_n = (n+1)u_0$;

▷ $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

e) Variation d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q strictement positif et de premier terme u_0 telle que : $u_n = u_0 q_n$.
▷ si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante ;
▷ si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante ;
▷ si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante ;
▷ si $q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante ;
▷ si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Remarque

Si $q < 0$, la suite (u_n) est dite alternée.

Exercice

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par ses termes : $u_1 = 2$ et $u_3 = 8$

1. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sachant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique alternée.
2. Calculer u_2 et u_4.

f) Convergence d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_p et de raison r définie par :
$u_n = u_p q^{n-p}$ avec $p \in \mathbb{N}$.
On a : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = u_p \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^{n-p}$
▷ Si $q = 1$; $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n = 1$, alors (u_n) est convergente et elle converge vers u_p.
▷ Si $q > 1$; $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n = +\infty$, alors (u_n) est divergente.
▷ Si $|q| < 1$; $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n = 0$, alors (u_n) est convergente et elle converge vers 0.
▷ Si $q \leq -1$; $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n$ n'existe pas, alors (u_n) est divergente.

2.7 Suite arithmético-géométrique

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique lorsqu'il existe deux constantes α et β telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$.

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique avec $\alpha = 3$ et $\beta = -2$.

Remarques

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique.
▷ Si $\alpha = 1$, on a : $u_{n+1} = u_n + \beta$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = \beta$.
▷ Si $\beta = 0$, on a : $u_{n+1} = \alpha u_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \alpha$.
▷ Pour trouver le terme général de la suite (u_n), on introduit une suite auxiliaire (v_n) géométrique qui est en fonction de la suite (u_n).

Exercice

Soit une suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$
On pose la suite (v_n) telle que $v_n = u_n + 5$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

2.8 Suite adjacente

2.8.1 Définition

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ sont adjacentes si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées :
▷ (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;
▷ Pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$;
▷ $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

2.8.2 Théorème

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles converges vers une même limite.

Exercice

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout entier naturel n par :
$u_n = \dfrac{n}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

1. Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).
2. Vérifier que $v_n - u_n > 0$.
3. Calculer la limite des (u_n) et (v_n) en $+\infty$.
4. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2.9 Suites définies par certaines relation de récurrence

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \lambda \\ u_{n+1} = \alpha u_n + \beta \end{cases}$; $\forall\ n \in \mathbb{N}$ avec α et β des réels.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

▷ **Nature de la suite (u_n) et expression de u_n en fonction de n**

Pour donner la nature de cette suite, on distingue trois cas :

• premier cas : si $\alpha \neq \pm 1$ et $\beta = 0$
On a : $u_{n+1} = \alpha u_n$, alors (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \alpha$ et de premier terme $u_0 = \lambda$.
On a : $u_n = \alpha^n \lambda$.

• deuxième cas : si $\alpha = 1$ et $\beta \neq 0$
$u_{n+1} = u_n + \beta$, alors (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = \lambda$ et de raison $r = \beta$.
$u_n = u_0 + n\beta = \lambda + n\beta$.
On a : $u_n = \lambda + n\beta$

• troisième cas : $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ et $\beta \neq 0$.
$u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$.
Soit la fonction définie par $f(x) = \alpha x + \beta$, on a l'équation $f(x) = x$ entraine $\alpha x + \beta = x \Longleftrightarrow (\alpha - 1)x = \beta \Longrightarrow x = -\dfrac{\beta}{\alpha - 1} \Longrightarrow x = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.
Soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.
Montrons que (v_n) est une suite géométrique.
$v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{\beta}{1-\alpha}$ or $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$
$v_{n+1} = \alpha u_n + \beta - \dfrac{\beta}{1-\alpha} \Longrightarrow v_{n+1} = \alpha u_n + \dfrac{\beta - \alpha\beta - \beta}{1-\alpha} \Longrightarrow v_{n+1} = \alpha u_n - \dfrac{\alpha\beta}{1-\alpha}$
$v_{n+1} = \alpha v_n + \dfrac{\alpha\beta}{1-\alpha} - \dfrac{\alpha\beta}{1-\alpha} \Longrightarrow v_{n+1} = \alpha v_n$ avec $q = \alpha$.
On a : $v_n = q^n v_0 = \alpha^n v_0$.
$v_0 = u_0 - \dfrac{\beta}{1-\alpha} = \lambda - \dfrac{\beta}{1-\alpha} \Longrightarrow v_n = \alpha^n \left(\lambda - \dfrac{\beta}{1-\alpha}\right)$
Exprimer (u_n) en fonction de n.
On a : $u_n = v_n + \dfrac{\beta}{1-\alpha} \Longrightarrow u_n = \alpha^n \left(\lambda - \dfrac{\beta}{1-\alpha}\right) + \dfrac{\beta}{1-\alpha}$

Exercice

Soit la suite (u_n) définie par

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 5; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4.
2. Déterminer (u_n) en fonction de n.

2.10 Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Ce sont des suites définies par

$$\begin{cases} u_0 = a\,, u_1 = b \\ u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n, p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Étude de la suite (u_n)
On a : $u_{n+2} - pu_{n+1} - qu_n = 0$.
Équation caractéristique $r^2 - pr - q = 0$.
Discriminant $\Delta = p^2 + 4q$, on distingue trois cas :

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

$\triangleright$ si $\Delta > 0$, alors il existe $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$,
on a $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$ avec $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$.
$\triangleright$ si $\Delta = 0$, alors il existe $r_1 = r_2 = r_0$,
on a $u_n = (A + Bn)r_0^n$
$\triangleright$ si $\Delta < 0$ alors il existe $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$,
on a $u_n = \varphi^n [A\cos\theta n + B\sin\theta n]$ avec

$$\begin{cases} \varphi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \cos\theta = \frac{\alpha}{\varphi} \\ \sin\theta = \frac{\beta}{\varphi} \end{cases} \qquad A \in \mathbb{R} \text{ , } B \in \mathbb{R}.$$

On détermine A et B en posant $u_0 = a$ et $u_1 = b$.

Exercice 1

Soit $(u_n) : \begin{cases} u_0 = u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n. \end{cases}$

1. Déterminer u_2 , u_3 et u_4.
2. Déterminer (u_n) en fonction de n.

Exercice 2

Soit $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 , u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n. \end{cases}$

1. Déterminer u_2 , u_3 et u_4.
2. Déterminer (u_n) en fonction de n.

Exercice 3

Soit $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 , u_1 = 2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n. \end{cases}$

1. Déterminer u_2 , u_3 et u_4.
2. Déterminer (u_n) en fonction de n.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Chapitre 3

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

3.1 Définition

On appelle fonction logarithme népérien, la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule au point 1.
▷ La fonction logarithme népérien de x est notée $\ln x$.
▷ Pour tout $x > 0$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$.

3.2 Propriétés

▷ **Conséquence de la définition**

• La fonction $x \longmapsto \ln x$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
• La fonction $x \longmapsto \ln x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par conséquent elle est bijective sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a donc $\forall\ a > 0$, $\forall\ b > 0$;
$\ln a \geq \ln b \Longleftrightarrow a \geq b$ (croissance)
$\ln a = \ln b \Longleftrightarrow a = b$ (bijection).

▷ **Propriétés fondamentales**

Pour tout a et b dans $\mathbb{R}_+^*$;
• $\ln(ab) = lna + \ln b$.
• $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
• $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$.
• $\ln a^{\alpha} = \alpha \ln a$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
• $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$.

3.3 Nombre d'Euler

On appelle nombre d'Euler, le nombre noté e tel que $\ln \mathrm{e} = 1$ avec $\mathrm{e} = 2,718281828$.

3.4 Existences

Soit u et v deux fonctions numériques.
▷ $\ln u(x)$ existe $\Longleftrightarrow$ $u(x)>0$.
▷ $\ln|u(x)|$ existe $\Longleftrightarrow$ $u(x)\neq 0$.
▷ $\ln\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)$ existe $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{u(x)}{v(x)}>0$.
▷ $\ln\left|\dfrac{u(x)}{v(x)}\right|$ existe $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{u(x)}{v(x)}\neq 0$
▷ $\ln(u(x))^2$ existe $\Longleftrightarrow$ $u(x)\neq 0$.

Exercice

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :
$f(x)=x^3+2x+\ln x$; $g(x)=x^2\ln(-x)$; $h(x)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\ln(2-x)$.

3.5 Dérivation

La fonction logarithme népérien est dérivable sur son ensemble de définition. On a :
▷ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.
▷ $(\ln u(x))'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
▷ $(\ln|u(x)|)'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exercice

Calculer la dérivée des fonctions suivantes : $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$; $g(x)=|\cos x-\sin x|$; $h(x)=\ln\left(2+\sqrt{x^2+1}\right)$.

3.6 Limites classiques

Les limites classiques de la fonction logarithme népérien sont :
▷ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\ln x=-\infty$; $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\ln x=+\infty$.
▷ $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}x\ln x=0$.
▷ $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$; $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}x^\alpha\ln x=0,\ \alpha\in\mathbb{R}_+^*$.
▷ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$; $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=a,\ a\in\mathbb{R}^*$.
▷ $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x^2 + 1 + \ln x$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f à droite de 0 et en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x \in \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$.

3.7 Équations et Inéquations avec logarithme

3.7.1 Équations avec logarithme

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\ln(x+3) = 0$; $\ln^2 x + \ln x = 0$; $\ln^2 x + 3\ln x - 4 = 0$

3.7.2 Inéquations avec logarithme

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\ln(2x - \mathrm{e}) > 1$; $\ln(2-3x) \geq 0$; $\ln^2 x + 3\ln x - 4 \leq 0$

3.8 Étude de la fonction $x \longmapsto \ln x$

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \ln x$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Étudier et représenter graphiquement cette fonction.

Exercice

Soit g une fonction définie par : $g(x) = x^2 - 1 + 2\ln x$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de g, puis calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x)$.
   (b) Calculer $g'(x)$. En déduire le sens de variation de g.
   (c) Dresser le tableau de variation de g.
   (d) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.
2. Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2} - \dfrac{2\ln x}{x}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   (a) Calculer les limites de f à droite de 0 et en $+\infty$.
   (b) Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ puis préciser l'autre asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
   (c) Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$.
   (d) Déterminer l'équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.
   (e) Montrer que pour tout $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.
   (f) Dresser le tableau de variation de f.
   (g) Tracer la $(\mathscr{D})$ et la courbe $(\mathscr{C})$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

3.9 Fonction logarithme de base a

3.9.1 Définition

Soit a un nombre réel strictement positif et diffèrent de 1. On appelle fonction logarithme de base a, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$, notée $\log_a$ et définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$; $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

3.9.2 Propriétés

Soit a un nombre réel strictement positif et diffèrent de 1.
▷ La fonction $x \longmapsto \log_a x$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
▷ Pour tout $x > 0$, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
• si $0 < x < 1$; $\ln a < 0$, donc $\log_a$ est strictement décroissante.
• si $a > 1$, $\ln a > 0$, donc $\log_a$ est strictement croissante.
▷ $\forall\ x > 0$, $\forall\ y > 0$ et $\forall\ k \in \mathbb{R}$
• $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
• $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
• $\log_a x^k = k \log_a x$.
▷ $\forall\ x > 0$, $\log_\mathrm{e} x = \dfrac{\ln x}{\ln \mathrm{e}} = \ln x$. On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base e.

3.9.3 Logarithme décimal

Pour $a = 10$, le logarithme de base a est le logarithme décimal et on note log.
On a : $\forall\ x > 0$; $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Exercice 1

Étudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \longmapsto \log_2 x$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie par : $f(x) = 2\ln(1+x)$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, unité graphique $2cm$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Calculer les limites de f à droite de -1 et en $+\infty$.
   (c) Préciser les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
2. (a) Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   (c) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.
3. (a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on dressera le tableau de variation.
   (b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ de f^{-1} dans le même repère que $(\mathscr{C})$.
   (c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(4\ln 2)$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

   (d) Expliciter $f^{-1}(x)$ puis vérifier le résultat de la question 3.(c).

4. Soit I un intervalle tel que $I = [2;3]$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in I$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

5. Soit (u_n) une suite numérique telle que : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \in I$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|u_n - \alpha| \leq (\frac{2}{3})^n$.
   (d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
   (e) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$; $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Chapitre 4

FONCTION EXPONENTIELLE

4.1 Fonction exponentielle de base e

4.1.1 Définition

On appelle fonction exponentielle de base e, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. On la note exp.
La fonction exponentielle de x est notée exp(x) ou e^x.

4.1.2 Propriétés

▷ **Conséquence de la définition**

La fonction e^x est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On a donc : $\forall\ x \in \mathbb{R}\,;\ \forall\ y \in \mathbb{R}$

- $e^x \leq e^y \Longleftrightarrow x \leq y$.
- $e^x = e^y \Longleftrightarrow x = y$.
- $\begin{cases} x > 0 \\ y = \ln x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = e^y \end{cases}$
- $e^{\ln x} = \ln e^x = x$.

▷ **Propriétés fondamentales**

$\forall\ x \in \mathbb{R}\,;\ \forall\ y \in \mathbb{R}$.

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.
- $e^{x+y} = e^x.e^y$; $e^{x-y} = e^x.e^{-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
- $e^{xy} = (e^x)^y$.
- $e^{r\alpha} = (e^\alpha)^r$; $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

4.1.3 Existence

$e^{u(x)}$ existe si et seulement si $u(x)$ existe.

Exercice

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes : $f(x) = e^{2x^2+3x+1}$; $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$; $h(x) = \dfrac{e^{-x}+2}{e^x+1}$.

4.1.4 Dérivation

La fonction exponentielle est dérivable sur son ensemble de définition.
▷ Pour tout réel x, $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.
▷ $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{e}^{\alpha x})' = \alpha \mathrm{e}^{\alpha x}$.
▷ $\left(\mathrm{e}^{u(x)}\right)' = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Exercice

Calculer la dérivée des fonctions suivantes : $f(x) = \mathrm{e}^{2x^2+3x+1}$; $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$; $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}+2}{\mathrm{e}^x+1}$.

4.1.5 Limites classiques

Soit a et α deux nombres réels tels que $a \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha > 0$.
▷ $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^x = 0$; $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
▷ $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$; $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^\alpha \mathrm{e}^x = 0$; $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} = 0$.
▷ $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\mathrm{e}^{ax}-1}{x} = a$; $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

Remarque

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} u(x)}.$$

4.1.6 Résolution dans $\mathbb{R}$ des équations, inéquations et systèmes

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\mathrm{e}^{x+2} = 3$; $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{x+2}$; $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 3 = 0$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 4\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^y = 9 \\ 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y = 7 \end{cases}$

4.1.7 Étude de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$

Soit g une fonction définie par : $g(x) = \mathrm{e}^x$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Étudier et représenter graphiquement cette fonction.

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - \mathrm{e}^x$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x+1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

   (c) Préciser l'autre branche infinie.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Construire la droite $(\mathscr{D})$ et la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)(2e^x - x)$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Étudier les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $'(x) = 2(x-1)(e^x - 1)$.
   (b) En déduire le sens de variation de f.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $e^x - x > 0$.
   (b) En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses en un point unique A que l'on précisera les coordonnées.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.
5. Soit g une fonction définie par : $g(x) = -f(x)$. On désigne par $(\mathscr{C}')$ sa courbe.
   (a) Par quel procédé peut-on tracer la courbe $(\mathscr{C}')$.
   (b) Tracer alors la courbe $(\mathscr{C}')$.
   (c) En déduire le tableau de variation de g.

4.2 Fonction exponentielle de base a

4.2.1 Définition

Soit a un nombre réel strictement positif. On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction notée $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\ x \in \mathbb{R}$; $\exp_a = a^x = e^{x \ln a}$.

Exemple

$3^x = e^{x \ln 3}$.

4.2.2 Propriétés

Soit a un nombre réel strictement positif.
▷ La fonction $\exp_a$ est la bijection réciproque de la fonction $\log_a$.
▷ Pour tout réel x, $\ln a^x = x \ln a$.
▷ $\forall\ (x;y) \in \mathbb{R}^2$;
• $a^{x+y} = a^x . a^y$; $(a^x)^y = a^{xy}$
• $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
▷ $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.
▷ $\forall\ b > 0$; $\forall\ x \in \mathbb{R}$.
• $(ab)^x = a^x b^x$.
• $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x} = a^x b^{-x}$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

4.2.3 Variations

La fonction a^x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = \ln a e^{x\ln a}$.
▷ si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$ et la fonction $x \longmapsto a^x$ est strictement décroissante.
▷ si $a > 1$, $\ln a > 0$ et la fonction $x \longmapsto a^x$ est strictement croissante.

4.3 Fonction puissance

4.3.1 Définition

Soit α un nombre réel. On appelle fonction puissance α, la fonction qui à tout réel positif x, associe le réel x^α.

4.3.2 Propriétés

Soit α et β deux nombres réels.
▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$; $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.
▷ $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha . x^\beta$; $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$; $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$.
$x^0 = 1$ et $x^1 = x$.

4.3.3 Variations

La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $(x^\alpha)' = \dfrac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x}$.
▷ si $\alpha > 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est strictement croissante.
▷ si $\alpha < 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est strictement décroissante.

4.4 Croissances comparées

Pour le calcul de certaines limites sur les fonctions logarithmes, exponentielles et puissances, on utilise la propriété ci-dessous pour lever les indéterminations.
" La fonction exponentielle croit plus vite que la fonction puissance, elle croit plus vite que la fonction logarithme " Ainsi donc on a les résultats suivants :
▷ $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.
▷ $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Chapitre 5

INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

5.1 Rappels sur les primitives

5.1.1 Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de la fonction f sur I, la fonction F telle que pour tout x élément de I, on a : $F'(x) = f(x)$.

Exemples

1. $x \longmapsto \ln x$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. $x \longmapsto \cos x$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

5.1.2 Propriétés

▷ Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
▷ Soit F une primitive de la fonction f sur I, alors pour tout réel c, $F+c$ est une primitive sur I de f.
▷ Toute primitive de f sur un intervalle I s'écrit sous la forme $F+c$ où c est un réel.
▷ Soit f une fonction admettant une primitive F sur l'intervalle I, y_0 un réel, x_0 un point de I. Il existe une unique primitive F de f qui prend la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire $F(x_0) = y_0$.

5.1.3 Calcul des primitives

a) Primitives usuelles

Fonction f	Primitive F	Conditions
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + c$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{N} - \{-1\}$	$F(x) = \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$	sur $\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x + c$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -cotanx + c$	$x \neq k\pi$
$f(x) = \sqrt{x}$	$F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + c$	sur $\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	sur $\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x}(\ln x)^n$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} + c$	sur $\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \tan x$	$F(x) = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

b) Primitives des fonctions composées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Primitive	Condition
$u'u^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + c$	$u \neq 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u^n},\ n \in \mathbb{N} - \{1\}$	$-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{u^{n-1}} + c$	$u \neq 0$ sur I
$u'u^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + c$	sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$u > 0$ sur I
$u'\sin u$	$-\cos u + c$	sur I
$u'\cos u$	$\sin u + c$	sur I
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + c$	sur I

Exercice

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - \sqrt{x}$.

1. Déterminer une primitive de F sur $\mathbb{R}_+$ de f.
2. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}_+$ qui prend la valeur 1 en 0.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Solution

1. Déterminons une primitive de F sur $\mathbb{R}_+$ de f.
   On a : $F(x) = e^x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
2. Déterminons une primitive F de f sur $\mathbb{R}_+$ qui prend la valeur 1 en 0.
   On a : $F(x) = e^x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
   Or $F(0) = 1 \Longrightarrow c = 0$
   D'où $F(x) = e^x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

5.2 Notion d'intégrale

5.2.1 Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I et F une primitive de f sur I. On appelle intégrale de f de a à b le nombre réel noté $F(b) - F(a)$. On note pour tout $t \in I$, $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$.

5.2.2 Vocabulaire

▷ $\int_a^b f(t)dt$ se lit " somme ou intégrale de a à b $f(t)dt$ "
▷ $[F(t)]_a^b$ se lit " $F(t)$ pris entre a et b "
▷ a et b sont les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ avec $a \leq b$.
▷ La variable t est appelée variable d'intégration. Elle est dite variable muette car elle peut être remplacer par une autre sans changer la valeur de l'intégrale.

Exemple

$$\int_1^3 (t^2 - 1)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t\right]_1^3 = \frac{20}{3}$$

Conséquence

Soit F et G deux primitives de f sur un intervalle I, alors il existe un réel c tel que $\forall\ t \in I$, $G(t) = F(t) + c$.

5.2.3 Propriétés

p_1) Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b et c trois éléments de I, on a :
▷ $\int_a^a f(t)dt = 0$;
▷ $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$;
▷ $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$ (relation de Chasles).

p_2) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, α un nombre réel, a et b deux éléments de I, on a :

▷ $\int_a^a \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^a f(t)dt = 0$;

▷ $\int_a^a (f(t)+g(t))dt = \int_a^a f(t)dt + \int_a^a g(t)dt$.

p_3) Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, α un nombre réel, a et b deux éléments de I ($a \leq b$).

▷ Si f est positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$;

▷ Si $f \leq g$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

p_4) Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [-a;a]$, on a :

▷ Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.

▷ Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

p_5) Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a;b]$ et p un nombre réel non nul. Si f est périodique de période p ;

▷ $\int_a^{a+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt$.

▷ $\int_{a+p}^{b+p} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

5.2.4 Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a;b]$ et a et b deux éléments de I.

▷ S'il existe deux nombres réel m et M tels que $\forall\ x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$.

▷ S'il existe un nombre réel M tel que $\forall\ x \in [a;b]$, $|f(x)| \leq M$, alors $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq M|b-a|$.

5.2.5 Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a,b]$ avec $a \neq b$.

On appelle valeur moyenne de f sur I, le nombre réel noté μ défini par $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

5.3 Techniques de calcul d'intégrale

5.3.1 Utilisation des primitives usuelles

Exercice

Calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\mathrm{e}^{\cos^2 t}dt$, $J = \int_0^2 \dfrac{2t}{t^2-1}dt$ et $K = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \dfrac{1}{t(\ln t)^2}dt$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Solution

Calculons les intégrales suivantes :

▷ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \mathrm{e}^{\cos^2 t} dt = \left[-\mathrm{e}^{\cos^2 t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 + \mathrm{e}$

D'où $I = -1 + \mathrm{e}$

▷ $J = \int_0^2 \frac{2t}{t^2-1} dt = \left[\ln\left|t^2-1\right|\right]_0^2 = 0$

D'où $J = 0$

▷ $K = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{t(\ln t)^2} dt = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$

D'où $K = \frac{2}{3}$

5.3.2 Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que les dérivées u' et v' sont continues sur I, a et b deux éléments de I.

On a : $\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

ou $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$

Exercice

Calculer les intégrales suivantes : $I = \int_1^{\mathrm{e}} \ln t dt$ et $J = \int_0^1 t\mathrm{e}^t dt$

Solution

Calculons les intégrales suivantes :

▷ $I = \int_1^{\mathrm{e}} \ln t dt$

Posons $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \ln t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = t \\ v' = \frac{1}{t} \end{cases}$

$I = [t \ln t]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} dt = 1$

D'où $I = 1$

▷ $J = \int_0^1 t\mathrm{e}^t dt$

Posons $\begin{cases} u' = \mathrm{e}^t \\ v = t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = \mathrm{e}^t \\ v' = 1 \end{cases}$

$J = \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t dt = \left[t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t\right]_0^1 = 1$

D'où $J = 1$.

5.3.3 Changement de variable affine

Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt$ avec $\alpha \neq 0$, on peut utiliser le procédé suivant :

▷ Faire un changement de variable : $u = \alpha t + \beta$; on obtient : $du = \alpha dt$;

▷ Utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} \frac{1}{\alpha} f(u)du.$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice

Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}} dt.$

Solution

Calculons l'intégrale suivante : $I = \int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}} dt.$

Posons $u = 2t+3$; $du = 2dt \Longrightarrow dt = \frac{1}{2} du$

De plus : si $t = -1 \Leftrightarrow u = 1$ et si $t = 0 \Leftrightarrow u = 3$

On déduit que : $I = \frac{1}{4} \int_{1}^{3} \left(\sqrt{u} - \frac{3}{\sqrt{u}} \right) = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} u\sqrt{u} - 6\sqrt{u} \right]_{1}^{3} = \frac{4}{3} - \sqrt{3}$

5.4 Application du calcul intégral

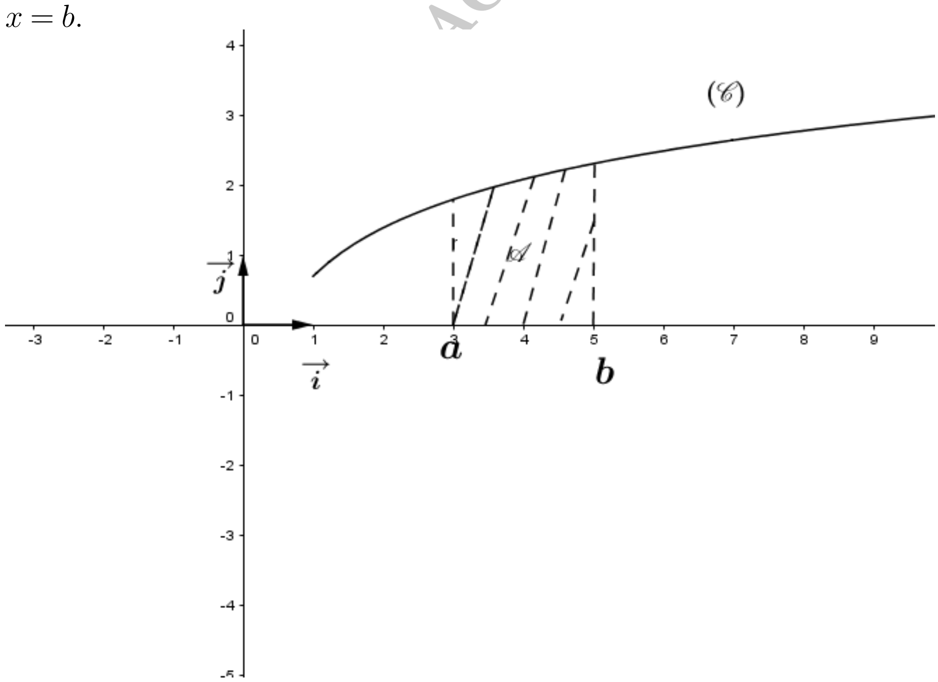
5.4.1 Calcul d'aire

a) Unités d'aire (u.a)

Dans le plan rapporté à un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ unité graphique étant le centimètre.
On a : $1u.a = \| \overrightarrow{i} \| . \| \overrightarrow{j} \| cm^2$.

b) Interprétation graphique de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$

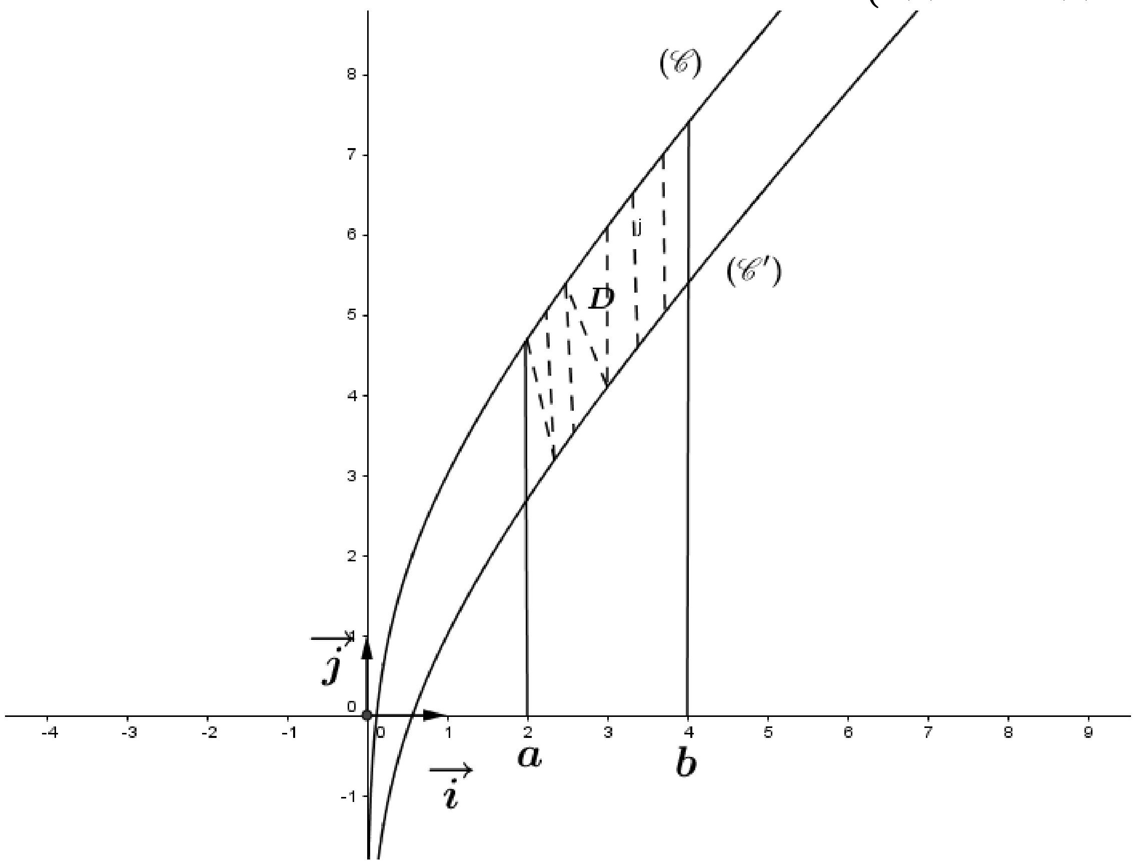
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I, $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative et a et b deux éléments de I tels que $a < b$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire est l'aire en unité d'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



5.4.2 Aire d'un domaine plan

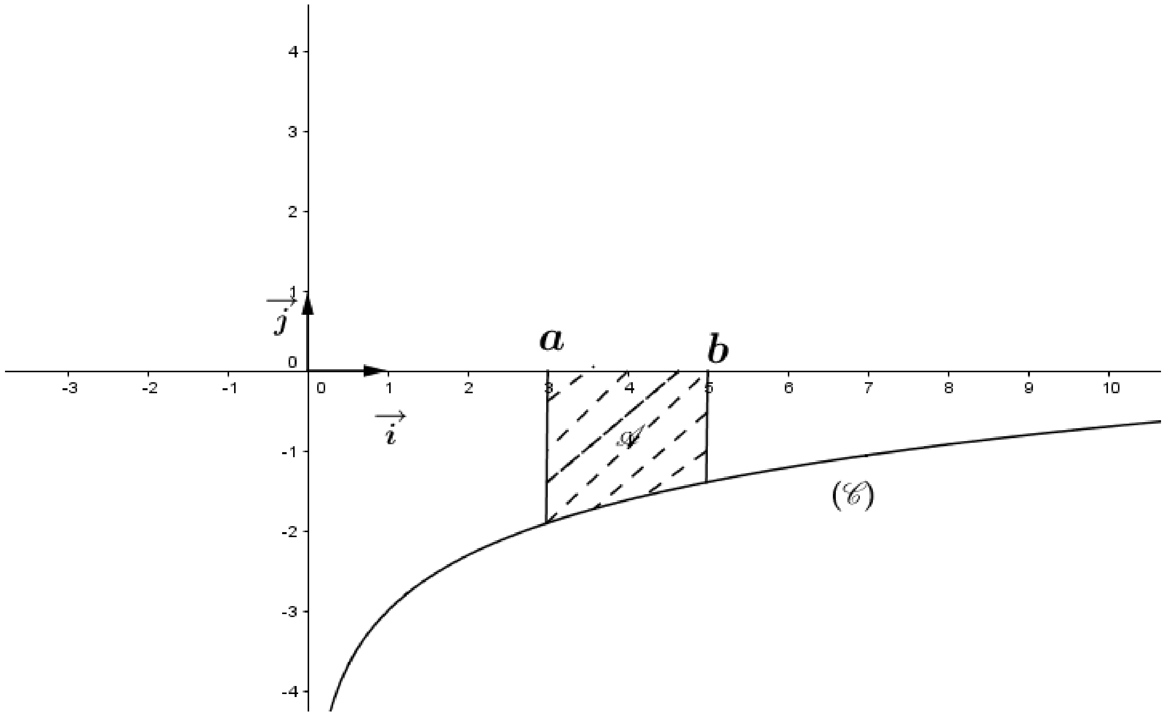
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a;b]$. Si pour tout x appartenant à l'intervalle I.
Lorsque $g(x) \leq f(x)$ sur I, alors $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ est l'aire en unité d'aire du domaine D délimité par les courbes $(\mathcal{C})$ de f et $(\mathcal{C}')$ de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On a : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / a \leq x \leq b; g(x) \leq y \leq f(x)\}$ ou $D : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$



En particulier si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq 0$, alors l'aire d'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\mathcal{A} = \left(-\int_a^b f(x)dx\right) u.a.$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com



Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, unité graphique $2cm$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$.
3. Donner le sens de variations de f puis dresser son tableau de variation.
4. On admet que la courbe $(\mathscr{C})$ possède une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
5. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan délité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Calculer $\mathcal{A}$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = 1 - \ln x$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, unité graphique $1cm$.

1. Calculer les limites de f à droite de 0 et en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée f' de f.
3. (a) Dresser le tableau de variation de f.
   (b) Étudier les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
5. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Solution de l'exercice 1

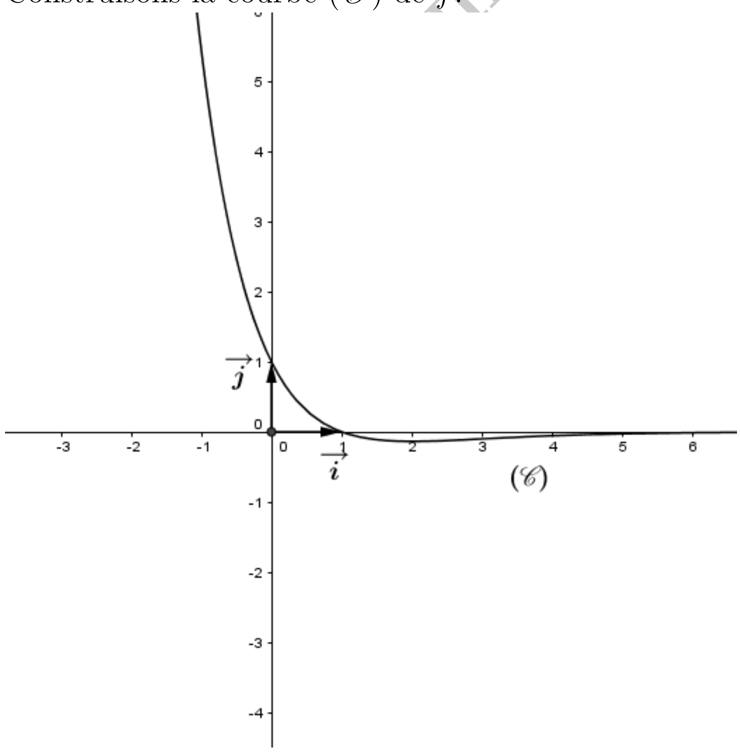
On donne $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

1. Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$
2. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$.
   On a : $f'(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$
3. Donnons le sens de variations de f puis dressons son tableau de variation.
   Posons $f'(x) = 0$, $(x-2)\mathrm{e}^{-x} = 0 \Longrightarrow x = 2$
   ▷ Pour $x \in]-\infty; 2[$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante
   ▷ Pour $x \in]2; +\infty[$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante.
   Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	0

4. On admet que la courbe $(\mathscr{C})$ possède une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.
   Construisons la courbe $(\mathscr{C})$ de f.



5. Calculons $\mathcal{A}$.
   $\mathcal{A} = \left(\int_0^1 f(x)dx\right) u.a$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

On a : $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-1}$
D'où $\mathcal{A} = 4\mathrm{e}^{-1}cm^2$

5.4.3 Volume d'un solide

L'espace est orienté et rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit (S) un solide délimité par les plans $z = a$; $z = b$ avec $a \leq b$. Soit S la fonction qui associe à tout z la fonction du solide coupé par le plan de cote z. Si la fonction $z \longmapsto S(z)$ est continue sur $[a;b]$, alors $\int_a^b S(z)dz$ est le volume en unité de volume du solide (S).

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x+2}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
(Unité graphique $2cm$).

1. (a) Calculer l'image de 0 par f et la limite de f en $+\infty$.
   (b) Préciser la branche infinie à la courbe $(\mathscr{C})$.
2. (a) Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   (c) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
3. Pour tout naturel n on a : $I_n = \int_0^3 x^n \mathrm{e}^{-2x}dx$
   (a) Calculer I_0.
   (b) En intégrant par parties, montrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $(n+1)I_n - 2I_{n+1} = 3^{n+1}\mathrm{e}^{-6}$.
   (c) En déduire les valeurs I_1 et I_2.
4. On définit le solide S obtenu par révolution autour de l'axe (Ox) de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $0 \leq x \leq 3$ dans le plan (xOy). On rappelle que le volume V du solide est donné en unités de volume par : $V = \pi \int_0^3 [f(x)]^2 dx$.
   (a) Exprimer V en fonction de I_2.
   (b) Déterminer alors une valeur approchée à $1cm^3$ près du volume du solide.

Solution de l'exercice 1

On donne $f(x) = x\mathrm{e}^{-x+2}$ et $E_f = [0;+\infty[$

1. (a) Calculons l'image de 0 par f et la limite de f en $+\infty$.
   On a : $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$.
   (b) Précisons la branche infinie à la courbe $(\mathscr{C})$.
   Comme $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$, alors la droite $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
2. (a) Calculons la dérivée f' de f puis étudier son signe.
   ▷ Dérivée f' de f
   $f(x) = x\mathrm{e}^{-x+2} \Longrightarrow f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x+2}$.
   ▷ Signe de $f'(x)$

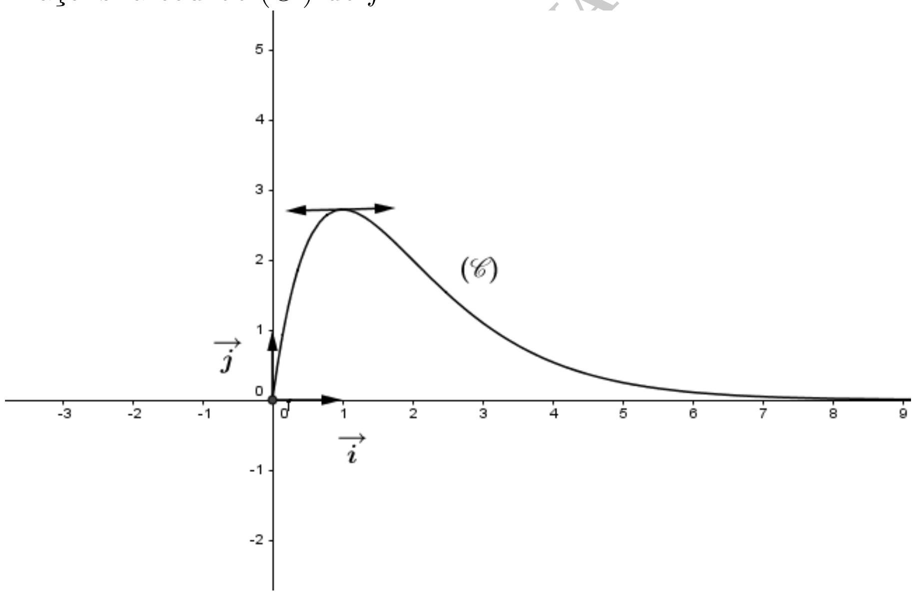
Posons $f'(x) = 0$
$(1-x)\mathrm{e}^{-x+2} = 0 \Longrightarrow 1-x=0 \Longrightarrow x=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

(b) Dressons le tableau de variations de la fonction f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

(c) Traçons la courbe $(\mathscr{C})$ de f.



3. On donne $I_n = \int_0^3 x^n \mathrm{e}^{-2x} dx$

(a) Calculons I_0.
$I_0 = \int_0^3 \mathrm{e}^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3$
$I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-6}$

(b) Montrons $\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a : $(n+1)I_n - 2I_{n+1} = 3^{n+1}\mathrm{e}^{-6}$.
Intégrons par parties I_n,
Posons $u = \mathrm{e}^{-2x}$, $v' = x^n$ et $u' = -2\mathrm{e}^{-2x}$, $v = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$I_n = \left[\frac{1}{n+1}\mathrm{e}^{-2x}x^{n+1}\right]_0^3 + \frac{2}{n+1}\int_0^3 x^{n+1}\mathrm{e}^{-2x}dx \Longrightarrow I_n = \frac{3^{n+1}}{n+1}\mathrm{e}^{-6} + \frac{2}{n+1}I_{n+1}$

D'où $(n+1)I_n - 2I_{n+1} = 3^{n+1}\mathrm{e}^{-6}$.

(c) Déduisons-en les valeurs I_1 et I_2.
On a : $I_1 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{7}{4}\mathrm{e}^{-6}$ et $I_2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{25}{4}\mathrm{e}^{-6}$

4. On donne : $V = \pi \displaystyle\int_0^3 [f(x)]^2\, dx$.

(a) Exprimons V en fonction de I_2.
$V = \pi \displaystyle\int_0^3 [f(x)]^2\, dx = \pi \int_0^3 x^2 \mathrm{e}^{-2x+4} dx = \pi \mathrm{e}^4 \int_0^3 x^2 \mathrm{e}^{-2x} dx$.
D'où $V = \pi \mathrm{e}^4 I_2$.

(b) Déterminons alors une valeur approchée à $1cm^3$ près du volume du solide.
$V = \pi \mathrm{e}^4 \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{25}{4}\mathrm{e}^{-6}\right) u.v$, or $u.v = 8cm^3$
$V = \dfrac{2\pi}{\mathrm{e}^2}\left(\mathrm{e}^6 - 25\right) cm^3 = 321{,}8cm^3$

5.5 Fonctions définies par une intégrale

5.5.1 Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a;b]$.
On appelle fonction définie par une intégrale, toutes les fonctions $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ dérivables sur l'intervalle I.
x est la variable de F et t est la variable d'intégration.

5.5.2 Ensemble de définition : existence de l'intégrale

$F(x)$ existe si et seulement si f est continue sur l'intervalle $I = [a;b]$.

5.5.3 Dérivation

Si $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, alors F est la primitive de f sur I qui s'annule en a, donc $\forall\ x \in I$; $F'(x) = f(x)$.

Remarque

Pour étudier le sens de variation de F, il suffit de connaitre le signe de f.

Exercice 1

Soit F la fonction de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t} dt$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner le sens de variations de F sur son ensemble de définition.
3. (a) Étudier le signe de la fonction h définie par : $h(x) = F(x) - \ln x$.
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x)$
   (c) Donner le tableau de variations de F.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

4. Étudier les branches infinies de $(\mathscr{C})$.
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le plan.

Exercice 2

Soit la fonction F définie par : $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est impaire et calculer $F(0)$.
3. (a) Montrer que $F(1) \leq 1$ et que $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt \leq 1 - \frac{1}{x}$.
   (b) En déduire que $F(x) \leq 2 - \frac{1}{x}$.
4. Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} F(x)$ puis donner une interprétation géométrique.
5. Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ puis dresser le tableau de variations de F.
6. Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en $x_0 = 0$ puis étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T).
7. Construire la tangent (T) et la courbe $(\mathscr{C})$.

Solution de l'exercice 1

On donne $F(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}dt$.

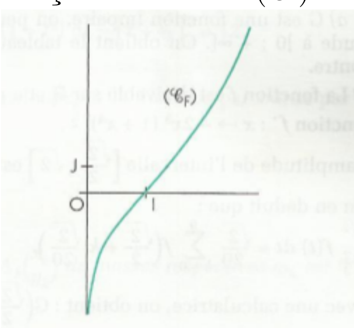
1. Montrons que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   La fonction $F : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$, alors $E_F =]0; +\infty[$.
2. Donnons le sens de variations de F sur son ensemble de définition.
   La fonction F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est $F' : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ est une fonction positive sur $]0; +\infty[$ donc croissante.
3. (a) Étudions le signe de la fonction h définie par : $h(x) = F(x) - \ln x$.
   $h(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}dt - \int_1^x \frac{1}{t}dt = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}dt.$
   Comme $\frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} > 0 \; \forall \, t \in]0; +\infty[$, alors h est strictement croissante et de plus $h(1) = 0$, donc h est négative sur $]0; 1[$ et positive sur $]1; +\infty[$.
   (b) Déduisons-en $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x)$.
   $\triangleright \; \forall \, x \in]0; 1[, \; F(x) < \ln x$
   $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \ln x = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} F(x) = -\infty$
   $\triangleright \; \forall \, x \in]1; +\infty[, \; F(x) > \ln x$
   $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

(c) Donnons le tableau de variations de F.

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	||	$+$	
$F(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$ $+\infty$

4. Étudions les branches infinies de $(\mathscr{C})$.
$\triangleright$ Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} F(x) = -\infty$, alors la droite (OJ) est une asymptote à $(\mathscr{C})$.
$\triangleright$ Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$, alors $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de (OJ).
5. Traçons la courbe $(\mathscr{C})$ dans le plan.



Chapitre 6

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

6.1 GÉNÉRALITÉS

Activité

Soit g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = -\mathrm{e}^{2x}$.

(a) Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.

(b) Trouver une relation entre :

  i. $g'(x)$ et $g(x)$.

  ii. $g''(x)$, $g'(x)$ et $g(x)$.

6.1.1 Définition

On appelle équation différentielle, toute équation ayant pour inconnue une fonction dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

Exemple

$y' - 3y = 0$; $y'' + 2y' + 3y = 0$

6.1.2 Ordre d'une équation différentielle

L'ordre d'une équation différentielle est le plus grand ordre de dérivation de la fonction inconnue, ayant un coefficient non nul dans cette équation différentielle.

6.1.3 Exemples

$2y'' + 4y' + -y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2 ;
$f'(x) + 6f(x) = 0 \Longrightarrow$ équation différentielle d'ordre 1 ;
$y''' + 3y'' - 2y' + 6 = \mathrm{e}^{2x}$, est une équation différentielle d'ordre 3.

Remarque

Une équation différentielle est dite homogène ou sans second membre lorsque le second membre de cette équation différentielle est nul.

6.2 Résolution d'une équation différentielle

Résoudre ou intégrer une équation sur un intervalle ouvert I, c'est déterminer l'ensemble des solutions sur I de cette équation différentielle.

Remarque

Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle ouvert I est appelée solution sur I de cette équation différentielle.

6.2.1 Solution d'une équation différentielle

Soit y une fonction qui dépend de x, on pose $y = f(x)$.
La solution d'une équation différentielle est toute fonction $y = f(x)$ telle que l'équation différentielle soit satisfaite.

a) Solution générale

Une solution de l'équation différentielle est dite générale si elle dépend :
▹ d'une constante lorsqu'elle est du premier degré,
▹ de deux constantes lorsqu'elle est du second degré.

b) Solution particulière

Une solution de l'équation différentielle est dite particulière lorsqu'elle est une fonction qui vérifie directement l'équation et est indépendante des constantes.

6.3 Équations différentielles du premier ordre

6.3.1 Définition

Une équations différentielles du premier ordre est toute équation ayant pour inconnue une fonction, dans laquelle figure la première dérivée.

6.3.2 Résolution d'une équations différentielles du premier ordre

a) Équation différentielle de la forme y'=0

La solution générale de l'équation différentielle $y' = 0$ est une constante.
En effet, $y' = 0 \Longrightarrow y = c\,;\ c \in \mathbb{R}$.
Conclusion : La solution générale de l'équation différentielle $y' = 0$ est de la forme $y = c\,;$ $c \in \mathbb{R}$.

b) Équation de la forme y'=f(x), où f est une fonction sur $\mathbb{R}$

Soit f une fonction définie sur $I \subseteq \mathbb{R}$.
$y' = f(x) \Longrightarrow \int y'dx = \int f(x)dx + c \Longrightarrow y = F(x) + c$ avec F la primitive de f sur I et c un réel.
Conclusion : La solution générale de l'équation différentielle $y' = f(x)$ est de la forme $y = F(x) + c\,;\ c \in \mathbb{R}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exemples

Intégrer les équations différentielles suivantes : $a)$ $y' = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$; $b)$ $y' = \tan x - \cos 2x$.

Solution

Intégrons les équations différentielles suivantes
$a)$ $y' = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, les fonctions $\dfrac{1}{x^2}$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$,
alors $y' = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \Longrightarrow \displaystyle\int y'dx = \int \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}dx + K \Longrightarrow y = -\int -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}dx + K \Longrightarrow y = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + K$.
D'où $y = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + K$
$b)$ $y' = \tan x - \cos 2x$, les fonctions $x \longmapsto \tan x$ et $x \longmapsto \cos 2x$ sont respectivement continues sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{R}$.
On a : $y' = \tan x - \cos 2x = \dfrac{\sin x}{\cos x} - \cos 2x \Longrightarrow \displaystyle\int y'dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx - \int \cos 2x dx + C$
D'où $y = -\ln|\cos x| - \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

c) Équation de la forme ay'+by=0 avec a $\in \mathbb{R}^*$ et b$\in \mathbb{R}$

Soit à résoudre l'équation $(E) : ay' + by = 0$
• La solution nulle est solution de (E).
• Soit y une solution de (E) qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
En effet ;

$$ay' + by = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \Longleftrightarrow \int \frac{y'}{y}dx = \int -\frac{b}{a}dx + c$$

$$\Longleftrightarrow \ln|y| = -\frac{b}{a}x + C \Longleftrightarrow |y| = \mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x + c} \Longleftrightarrow y = \lambda\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x}$$

avec $\lambda = \pm\mathrm{e}^c \in \mathbb{R}^*$.
Conclusion : La solution générale de (E) sont les fonctions $x \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
D'où $\boxed{y = \lambda\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque

Toute équation de la forme $ay' + by = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constantes sans second membre.

Théorème

L'équation différentielle $ay' + by = 0$, admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}$, vérifiant : $y(x_0) = y_0$ (appelée condition initiale).

Exemple

Déterminer la solution de l'équation différentielle : $2y' + 3y = 0$ vérifiant $f(0) = 2$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Solution

$2y' + 3y = 0 \Longrightarrow \dfrac{y'}{y} = -\dfrac{3}{2} \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{y'}{y}dx = \int -\frac{3}{2}dx + c \Longrightarrow y = \lambda e^{-\frac{3}{2}x}$ avec $\lambda = \pm e^{c} \in \mathbb{R}^{*}$.
or $y = f(x) \Longrightarrow f(0) = 2 \Longrightarrow \lambda = 2$
D'où $\boxed{f(x) = 2e^{-\frac{3}{2}x}}$.

6.4 Équations différentielles du second ordre

6.4.1 Définition

Une équation différentielle du second ordre est toute équation ayant pour inconnue une fonction, dans laquelle figure la dérivée seconde.

6.4.2 Résolution d'une équations différentielles du second ordre

a) Équation de la forme y"=0

En effet ; $y'' = 0 \Longleftrightarrow y' = c_1$; $c_1 \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow y = c_1x + c_2$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Conclusion : La solution générale de l'équation différentielle $y'' = 0$ est de la forme
$y = c_1x + c_2$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) Équation de la forme y"=f(x) ; f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$

Soit f une fonction continue sur $I \subseteq \mathbb{R}$. On définit F la primitive de f sur I et G celle de F sur I.
En effet ; $y'' = f(x) \Longrightarrow \displaystyle\int y''dx = \int f(x)dx + c_1 \Longrightarrow y' = F(x) + c_1$; $c_1 \in \mathbb{R}$
$\displaystyle\int y'dx = \int (F(x) + c_1)dx + c_2$; $c_1; c_2 \in \mathbb{R} \Longrightarrow y = G(x) + c_1x + c_2$; $c_1; c_2 \in \mathbb{R}$.
Conclusion : La solution générale de l'équation différentielle $y'' = f(x)$ est
$y = G(x) + c_1x + c_2$; $c_1; c_2 \in \mathbb{R}$

Exemple

Résoudre les équations différentielles suivantes : $a)$ $y'' = x + \dfrac{1}{x^2}$; $b)$ $y'' = 2\sin^2 x$

Solution

Résolvons les différentielles suivantes :
- $a)$ $y'' = x + \dfrac{1}{x^2}$

La fonction $x \longmapsto x + \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*}$.
On a : $y'' = x + \dfrac{1}{x^2} \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{x} + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R} \Longrightarrow y = \dfrac{1}{6}x^3 - \ln|x| + c_1x + c_2$; $c_1; c_2 \in \mathbb{R}$
- $b)$ $y'' = 2\sin^2 x$

On a : $b)$ $y'' = 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x \Longrightarrow y' = x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + c_1$; $c_1 \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow y = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}\cos 2x + c_1x + c_2$; $c_1; c_2 \in \mathbb{R}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

c) Équation de la forme ay"+by'+cy=0 ; a $\in \mathbb{R}^*$, b ; c $\in \mathbb{R}$

Soit à résoudre l'équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$.
Soit $y : x \longmapsto e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$ deux fois dérivable, on a : $y' = re^{rx}$; $y'' = r^2 e^{rx}$.
Alors $ay'' + by' + cy = 0 \Longrightarrow (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$, or $e^{rx} > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R} \Longrightarrow ar^2 + br + c = 0$.
L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est l'équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ et admet pour discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
On distingue trois cas :
$\triangleright$ premier cas : si $\Delta > 0$
alors l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 telles que $r_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $r_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
La solution générale de l'équation différentielle est : $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$; $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
$\triangleright$ deuxième cas si $\Delta = 0$
alors l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet une racine double telle que $r = \dfrac{-b}{2a}$.
La solution générale de l'équation différentielle est : $y = (Ax + B)e^{rx}$; $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
$\triangleright$ troisième cas si $\Delta < 0$
alors l'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines complexes conjuguées r_1 et r_2 telles que $r_1 = \alpha - i\beta$; $r_2 = \alpha + i\beta$.
La solution générale de l'équation différentielle est : $y = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$; $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque

$ay'' + by' + cy = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants sans second membre.

Exemple

Résoudre les équations différentielles suivantes :
a) $y'' + 2y' - 3y = 0$, vérifiant $f(o) = 3$ et $f'(0) = 1$.
b) $4y'' - 4y' + y = 0$, vérifiant $g(o) = 4$ et $g'(0) = 2$.
c) $y'' + \pi^2 y = 0$; $y = h(x)$ est une fonction impaire et $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$.

solution

Résolvons les équations différentielles suivantes :
a) $y'' + 2y' - 3y = 0$, vérifiant $f(o) = 3$ et $f'(0) = 1$.
L'équation caractéristique est : $r^2 + 2r - 3 = 0$.
On a : $\Delta = 16 \Longrightarrow r_1 = -3$; $r_2 = 1$
D'où $y = Ae^{-3x} + Be^{x}$; $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- $f(0) = A + B = 3$ (1) car $f(x) = y$.
- $f'(0) = -3A + B = -1$ (2)

En faisant $(1) - (2)$, on a : $A = 1$ et $B = 2$
D'où $\boxed{f(x) = e^{-3x} + 2e^{x}}$
b) $4y'' - 4y' + y = 0$, vérifiant $g(o) = 4$ et $g'(0) = 2$.
L'équation caractéristique est : $4r^2 - 4r + 1 = 0$.
On a : $\Delta = 0 \Longrightarrow r = \dfrac{1}{2}$
D'où $y = (Ax + B)e^{\frac{1}{2}x}$; $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

• $g(0) = B = 4$ (1) car $g(x) = y$.
• $g'(0) = A + \frac{1}{2}B = 2$ (2)
En remplaçant (1) dans (2), on a : $A = 0$
D'où $\boxed{g(x) = 4e^{\frac{1}{2}x}}$
c) $y'' + \pi^2 y = 0$; $y = h(x)$ est une fonction impaire et $h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.
L'équation caractéristique est : $r^2 + \pi^2 = 0$.
On a : $r_1 = -i\pi$; $r_2 = i\pi$
D'où $y = A\cos\pi x + B\sin\pi x$; $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
• h est paire $\Longleftrightarrow h(-x) = -h(x) \Longrightarrow h(-x) + h(x) = 0 \Longrightarrow 2A\cos\pi x = 0$
$A = 0$ car $\forall\ x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$; $\cos\pi x \neq 0$
• $h\left(\frac{1}{2}\right) = B = 1$
D'où $\boxed{h(x) = \sin\pi x}$

6.5 Équation différentielle avec second membre

6.5.1 Résolution

Pour résoudre une équation différentielle avec second membre, on peut utiliser le procédé suivant :
• Déterminer une solution particulier g de cette équation ;
• Démontrer que les solutions de l'équation différentielle avec second membres sont les fonctions φ du type : $\varphi = f + g$, où f est solution de l'équation différentielle sans second membre (équation homogène).
• Résoudre l'équation différentielle sans second membre et en déduire les solutions l'équation différentielle avec second membre.

6.5.2 Équation différentielle de la forme : ay'+by=f(x) (f une fonction réelle)

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = -x + 5$.
(a) Déterminer la solution particulière de (E').
(b) Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = 0$.
(c) En déduire les solutions de (E).

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y = 2\cos x$.
(a) Montrer que la fonction g définie par : $g(x) = -\cos x + \sin x$ est solution de (E).
(b) Démontrer φ est solution de (E) si et seulement si $f = \varphi - g$ est solution de $(E') : y' - y = 0$.
(c) En déduire toutes les solutions de (E).

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Solution 1

On considère l'équation $(E) : y' + 3y = -x + 5$

(a) Déterminons la solution particulière (E).
Le second membre de (E) est de la forme : $y = ax + b \ \ y' = a$.
Alors $y' + 3y = -x + 5 \ \Rightarrow \ a + 3(ax + b) = -x + 5$
Par identification :

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{16}{9} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_p = -\frac{1}{3}x + \frac{16}{9}$$

(b) Résolution de l'équation $(E') : \ y' + 3y = 0$
$y' + 3y = 0 \ \Rightarrow \ \dfrac{y'}{y} = -3 \ \Rightarrow \ y = k\mathrm{e}^{-3x}$ avec $k \in \mathbb{R}$

(c) Déduisons-en la solution de (E).
Les solutions de (E) sont de la forme $\varphi = f + g$ avec g la solution particulière et f la solution de l'équation homogène (E').
D'où $\varphi(x) = k\mathrm{e}^{-3x} - \frac{1}{3}x + \frac{16}{9}$

Solution 2

On donne $y' - y = 2\cos x$

(a) Montrons que g solution de (E) :
g est solution de $(E) \ \Leftrightarrow \ g'(x) - g(x) = 2\cos x$
On a : $g(x) = -\cos x + \sin x \ \Rightarrow \ g'(x) = \cos x + \sin x$
En effet ; $g'(x) - g(x) = (\cos x + \sin x) - (-\cos x + \sin x)$
$g'(x) - g(x) = 2\cos x$ Donc g est solution de (E).

(b) Démontrons que φ solution de (E) si et seulement si $f = \varphi - g$ est solution de $(E') : y' - y = 0$
φ est solution de $(E) \ \Leftrightarrow \ \varphi'(x) - \varphi(x) = 2\cos x; \ \forall x \in \mathbb{R}$
$f = \varphi - g \ \Rightarrow \ \varphi(x) = f(x) + g(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \ \varphi'(x) - \varphi(x) = 2\cos x \ \Rightarrow \ (f(x) + g(x))' + (f(x) + g(x)) = 2\cos x$; or g est solution de $(E) \ \Rightarrow \ g'(x) - g(x) = 2\cos x$
Donc $f'(x) - f(x) = 0$ f est donc solution de $(E') : y' - y = 0$.
D'où $f(x) = k\mathrm{e}^{x}; \ k \in \mathbb{R}$

(c) Déduisons-en toutes les solutions de (E).
On a : $f(x) = \varphi(x) - g(x) \Longrightarrow \varphi(x) = f(x) + g(x)$.
D'où $\varphi(x) = k\mathrm{e}^{x} - \cos x + \sin x, \ k \in \mathbb{R}$.

6.6 Équation différentielle de la forme $y'' + y' + y = f(x)$

Exercice 1

Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-2x}$

(a) Déterminer le nombre réel m tel que la fonction g définie par $g(x) = m\mathrm{e}^{-2x}$ soit solution de (E_1)

(b) Démontrer que $f + g$ est solution de (E_1) si et seulement si f est solution de $(E_2) : y'' - 2y' + 5y = 0$. Résoudre (E_2).

(c) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) vérifiant la relation $h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Chapitre 7

COURBES PARAMÉTRÉES

7.1 Rappels

7.1.1 Fonction paire

Soit f une fonction définie sur E_f, on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
f est une fonction paire si $\forall\ x \in E_f,\ -x \in E_f\ ;\ f(-x) = f(x)$.
La courbe $(\mathscr{C})$ d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

7.1.2 Fonction impaire

Soit f une fonction définie sur E_f, on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
f est une fonction impaire si $\forall\ x \in E_f,\ -x \in E_f\ ;\ f(-x) = -f(x)$.
La courbe $(\mathscr{C})$ d'une fonction impaire est symétrique par rapport à origine du repère.

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 \end{aligned}$$

7.1.3 Fonction périodique

Soit f une fonction définie sur E_f.
f est périodique de période $T \in \mathbb{R}_+^*$ si $\forall\ x \in E_f,\ x + T \in E_f\ ;\ f(x+T) = f(x)$.

7.2 Introduction

On considère le plan rapporté un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Un point M se déplace dans le plan. A chaque t appartenant à un intervalle de temps I, la

position du point M est donnée par les coordonnées $(x(t), y(t))$.
M décrit une courbe $(\mathscr{C})$ appelée trajectoire.
Le système $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ est une représentation paramétrique des coordonnées de M.

Exemple

Soit $M(x, y)$ un point du segment $[AB]$, avec $A(2, -1)$ et $B(-1, 3)$.
M est un point du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, les points A, B et M sont alignés.
On a : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = k(-1-2) \\ y + 1 = k(3+1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3k + 2 \\ y = 4k - 1 \end{cases}$ avec $k \in [0, 1]$
Ce système est une représentation paramétrique du segment $[AB]$.

7.3 Courbes paramétrés

7.3.1 Définition d'une courbe paramétrée

Soit un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.
On appelle courbe paramétrée $(\mathscr{C})$, l'ensemble des points $M(t)$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in I$
où f et $g$sont deux fonctions de la variables t, définies sur I à valeurs réelles.
Ces équations sont appelées équations paramétriques de $(\mathscr{C})$.
On note aussi $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I$
NB : si l'on veut que cette définition ait un sens, il faut que $x(t)$ et $y(t)$ existent simultanément.

Exemples

▷ L'application $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$ paramètre le cercle trigonométrique.
▷ L'application $t \longmapsto (at + b, ct + d)$ paramètre une droite si $(a, c) \neq (0, 0)$.
▷ L'application $t \longmapsto (x, f(x))$ paramètre le graphe de la fonction f.
Remarques
▷ Une courbe peut admettre plusieurs représentations paramétriques.
▷ On peut parfois, en éliminant le paramètre t entre les deux équations, obtient y comme fonction de x et ramener l'étude de la courbe à celle d'une courbe définie par une relation $y = h(x)$.

7.3.2 Définition de la fonction vectorielle

On appelle fonction vectorielle F associée à $(\mathscr{C})$, la fonction définie par :

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto F(t) = \overrightarrow{OM}(t) = f(t)\,\overrightarrow{i} + g(t)\,\overrightarrow{j}$$

.

7.4 Étude d'une courbe paramétrée.

L'étude d'une courbe paramétrée comprend éventuellement les étapes suivantes :
▹ Domaine de définition ;
▹ Tableau de variation ;
▹ Points remarquables ;
▹ Étude des branches infinies ;
▹ Représentation graphique.

7.4.1 Domaine de définition

Le domaine de définition D de la courbe $(\mathscr{C})$ est l'intersection des domaines de définition D_x et D_y des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. On a donc $D = D_x \cap D_y$. On s'efforcera ensuite, si possible, de réduire le domaine d'étude de la courbe, de plusieurs manières.

a) Par périodicité

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$
alors F est périodique de T c'est-à-dire que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques de période T.

Remarque

▹ Soit $T_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $T_2 \in \mathbb{R}_+^*$, si $\begin{cases} x(t+T_1) = x(t) \\ y(t+T_2) = y(t) \end{cases}$
alors on cherche la période commune $T = PPCM(T_1, T_2)$.
▹ Dans la pratique, si F est périodique de période T, l'étude de la courbe se fait dans un intervalle de longueur T. Par exemple $[t_0,\ t_0 + T]$ avec $t_0 \in D$.

b) Par la parité des fonctions x(t) et y(t)

Si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont paires ou impaires, on pourra réduire le domaine d'étude à $t \geq 0$, puis compléter le tracé de la courbe par une ou plusieurs symétries.

Remarque

On peut, bien entendu, généraliser cet énoncé au cas où le domaine de définition est symétrique par rapport à un réel α, et où les fonctions $t \longmapsto x(t+\alpha)$, $t \longmapsto y(t+\alpha)$ ont des propriétés de parité.

c) Éléments de symétries

Soit $M(t) : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$; $M(-t) : \begin{cases} x(-t) \\ y(-t) \end{cases}$; $M(\pi - t) : \begin{cases} x(\pi - t) \\ y(\pi - t) \end{cases}$; $M(\pi + t) : \begin{cases} x(\pi + t) \\ y(\pi + t) \end{cases}$
des points de la courbe $(\mathscr{C})$.
▹ Si $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x(\pi - t) = x(t) \\ y(\pi - t) = -y(t) \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x(\pi + t) = x(t) \\ y(\pi + t) = -y(t) \end{cases}$,
alors les points $M(-t)$, $M(\pi - t)$ et $M(\pi + t)$ sont les symétriques de $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses (Ox) : $S_{(Ox)}$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

▷ Si $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x(\pi + t) = -x(t) \\ y(\pi + t) = y(t) \end{cases}$,
alors les points $M(-t)$, $M(\pi - t)$ et $M(\pi + t)$ sont les symétriques de $M(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées (Oy) : $S_{(Oy)}$.

▷ Si $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = -y(t) \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x(\pi + t) = -x(t) \\ y(\pi + t) = -y(t) \end{cases}$,
alors les points $M(-t)$, $M(\pi - t)$ et $M(\pi + t)$ sont les symétriques de $M(t)$ par rapport à l'origine du repère O : $S_{(O)}$.

▷ Si $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$
alors $M(-t)$ et $M(t)$ sont confondus.

▷ Si $\begin{cases} x(-t) = y(t) \\ y(-t) = x(t) \end{cases}$
alors $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice : $(\mathscr{D}) : y = x$.

▷ Si $\begin{cases} x(-t) = -y(t) \\ y(-t) = x(t) \end{cases}$
alors $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à la seconde bissectrice : $(\mathscr{D}') : y = -x$.

7.4.2 Tableau de variation

On étudie les variations de x et y lorsque t décrit E_C.
Les résultats sont rassembles dans un tableau de variations commun.

t	si possibles les valeurs de t
$x'(t)$	signe de la dérivée
$x(t)$	sens de variation
$y'(t)$	signe de la dérivée
$y(t)$	sens de variation

On pourra compléter le tableau des dérivées par une ligne donnant les valeurs de $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ pour les valeurs de t figurant déjà dans ce tableau.

7.4.3 Tangente à une courbe paramétrée

Propriété

Soit $(\mathscr{C})$ une courbe paramétrée définie par : $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\,\overrightarrow{i} + g(t)\,\overrightarrow{j}$, $t \in I$ où f et g sont deux fonctions dérivables en t_0. On a au point $M\left(f(t_0), g(t_0)\right)$ une tangente colinéaire au vecteur $F'(t_0) = f'(t_0)\,\overrightarrow{i} + g'(t_0)\,\overrightarrow{j}$ s'il n'est pas nul.
Dans les autres cas, on a :

▷ Si $\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) \neq 0 \end{cases}$, alors $(\mathscr{C})$ admet au point $M(t_0)$ une tangente verticale.

▷ Si $\begin{cases} x'(t_0) \neq 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$, alors $(\mathscr{C})$ admet au point $M(t_0)$ une tangente horizontale.

▷ Si $\begin{cases} x'(t_0) = a \neq 0 \\ y'(t_0) = b \neq 0 \end{cases}$, alors $(\mathscr{C})$ admet au point $M(t_0)$ une tangente oblique.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

▷ Si $\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$ et si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = 0$
alors $(\mathscr{C})$ admet au point $M(t_0)$ une tangente horizontale.
▷ Si $\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$ et si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \infty$
alors $(\mathscr{C})$ admet au point $M(t_0)$ une tangente verticale.
▷ Si $\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$ et si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = a \neq 0$
alors $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ avec $b = y(t_0) - ax(t_0)$.

7.4.4 Étude des branches infinies

Soit $t_0 \in E_C$, c'est-à-dire $t_0 \in E_x$ et $t_0 \in E_y$
▷ Si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} (x(t); y(t)) = (\alpha; \infty)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $x = \alpha$ est asymptote verticale $(\mathscr{C})$.
▷ Si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} (x(t); y(t)) = (\infty; \beta)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = \beta$ est asymptote horizontale $(\mathscr{C})$.
▷ Si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = (\infty, \infty)$, on étudie $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$.

- $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \infty$, alors $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy).
- Si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, alors $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Ox).
- Si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a$ où $a \in \mathbb{R}^*$, on examine la limite alors $(\mathscr{C})$: $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} [y(t) - ax(t)]$

∗ Si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} [y(t) - ax(t)] = 0$, alors $(\mathscr{C})$ admet une une asymptote oblique d'équation $y = ax$.
∗ Si $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} [y(t) - ax(t)] = b$ où $b \in \mathbb{R}^*$, alors $(\mathscr{C})$ admet une une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

7.4.5 Représentation graphique

a) Intersection avec les axes du repère

▷ Si $(\mathscr{C}) \cap (Ox)$, on a $y(t) = 0$
▷ Si $(\mathscr{C}) \cap (Oy)$, on a $x(t) = 0$

b) Comment tracer la courbe

▷ Tracer d'abord les asymptotes et les points connus.
▷ Tracer ensuite la courbe en lisant le tableau de gauche à droite. regarder comment évoluent les coordonnées des points en fonction de t.
▷ Noter sur le dessin les valeurs de t aux endroits remarquables.

Exercice 1

Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé, on considère la courbe $(\mathscr{C})$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = -1 + 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

1. Définir la fonction vectorielle F associée à $(\mathscr{C})$.
2. Montrer que F est périodique de période $T = 2\pi$.
3. a) Par quelle transformation ponctuelle le point $M(-t)$ se déduit-il de $M(t)$?
   b) En déduire que F peut être étudiée sur l'intervalle $[0;\pi]$.
4. Étudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ et dresser le tableau de variation de F.
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 2

Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé, on considère la courbe $(\mathscr{C})$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

1. Définir la fonction vectorielle F associée à $(\mathscr{C})$.
2. a) Montrer que F est périodique de période $T = 2\pi$.
   b) Par quelle isométrie le point $M(-t)$ se déduit-il de $M(t)$?
   c) Par quelle isométrie le point $M(\pi - t)$ se déduit-il de $M(t)$?
   d) préciser le domaine d'étude de F.
3. Étudier les variations de F.
4. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction F.

Exercice 3

Dans le plan rapporté au repère orthonormé, on considère la courbe $(\mathscr{C})$,ensemble des points $M(t)$ dont les coordonnées sont définies par : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\ln|t| \\ y(t) = t\ln|t| \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^*$

1. a) Par quelle isométrie le point $M(-t)$ se déduit-il de $M(t)$?
   b) Par quelle isométrie le point $M(\frac{1}{t})$ se déduit-il de $M(t)$?
2. En déduit que l'intervalle $\mathbb{R}^*$ peut etre réduit à $]0;1]$.
3. Tracer $(\mathscr{C})$.

Solution 1

1. Définissons la fonction vectorielle F associée à $(\mathscr{C})$.
   On appelle fonction vectorielle F de la variable réelle t associée à $(\mathscr{C})$, la fonction définie par :
   $$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto F(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} \end{aligned}$$
   . où $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel.
2. Montrons que F est périodique de période $T = 2\pi$.
   $\begin{cases} x(t+2\pi) = -1 + 2\cos(t+2\pi) = -1 + 2\cos t \\ y(t+2\pi) = \sin(t+2\pi) = \sin t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$
   D'où F est périodique de période $T = 2\pi$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

3. (a) Précisons la transformation ponctuelle ou le point $M(-t)$ se déduit de $M(t)$.
$\begin{cases} x(-t) = -1 + 2\cos(-t) = x(t) \\ y(-t) = \sin(-t) = y(t) \end{cases} \Longrightarrow M(-t)$ se déduit de $M(t)$ par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, c'est-à-dire (Ox).

   (b) Déduisons que F peut être étudier sur $[0;\pi]$
F étant périodique de période $T = 2\pi$, alors elle peut être étudier sur $[-\pi;\pi]$ et de plus l'axe des abscisses est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$, alors F peut-être étudiée sur $[0;\pi]$.

4. Étudions les variations de $x(t)$ et $y(t)$ et dressons le tableau de variation de F.
▷ Pour $x(t)$:
On a : $x(t) = -1 + 2\cos t$; $[0;\pi]$
• Calculons $x(0)$ et $x(\pi)$
$x(0) = 1$ et $x(\pi) = -3$
• Dérivée et signe
$x'(t) = -2\sin t$
$\forall\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $x'(t) \leq 0$
• Tableau de variation

t	0		π
$x'(t)$		$-$	
$x(t)$	1	↘	-3

▷ Pour $y(t)$:
On a : $y(t) = \sin t$; $[0;\pi]$
• Calculons $y(0)$ et $y(\pi)$
$y(0) = 0$ et $y(\pi) = 0$
• Dérivée et signe
$y'(t) = \cos t$
$\forall\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $y'(t) \geq 0$ et $\forall\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; $y'(t) \leq 0$
• Tableau de variation

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	↗	1	↘	0

• Dressons le tableau de variation de F

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$		$-$		$-$	
$x(t)$	1	$\searrow$	-1	$\searrow$	-3
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

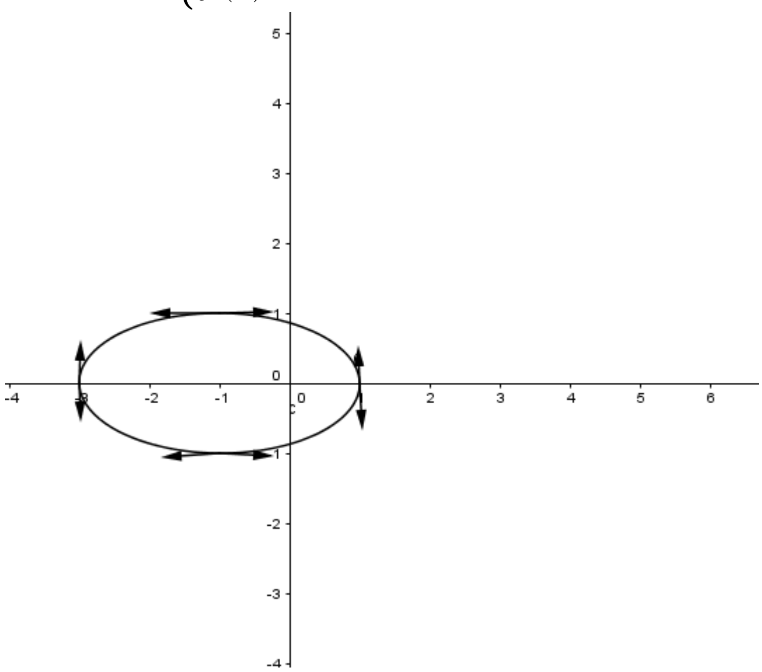
5. Traçons $(\mathscr{C})$
   - Points d'intersection avec les axes

   On a : $A\left(O; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
   - Tangente

   $\triangleright$ En $t = 0$; $\begin{cases} x'(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$; tangente verticale

   $\triangleright$ En $t = \dfrac{\pi}{2}$; $\begin{cases} x'(\frac{\pi}{2}) = -2 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$; tangente horizontale

   $\triangleright$ En $t = \pi$; $\begin{cases} x'(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = -1 \end{cases}$; tangente verticale



Deuxième partie

ALGÈBRE

Chapitre 8

NOMBRES COMPLEXES

8.1 Étude algébrique du nombre complexe

8.1.1 Définition d'un nombre complexe

On appelle nombre complexe, toute expression de la forme $a+ib$ où a et b sont des réels, i est un nombre imaginaire tel que $i^2=-1$.

8.1.2 Ensemble des nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

8.1.3 Forme algébrique du nombre complexe

On appelle forme algébrique ou cartésienne du nombre complexe z l'écriture $z=a+ib$.

Remarques

Soit z un nombre complexe défini par : $z=a+ib$.
▷ a est la partie réelle de z ; on note $Re(z)=a$, $z\in\mathbb{R}$.
▷ b est la partie imaginaire de z ; on note $Im(z)=b$; $z\in i\mathbb{R}$.
▷ Si $a=0$, alors z est appelé imaginaire pur, on note $z=ib$.
▷ Si $b=0$, alors z est un réel, on note $z=a$.

Exemples

$z=3-i$; $z=15+3i$; $z=4$; $z=-9i$.

8.1.4 Conjugué d'un nombre complexe

a) Définition

Soit z un nombre complexe tel que $z=a+ib$.
On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par : $\overline{z}=a-ib$.

b) Propriétés

Soit z un nombre complexe tel que $z=a+ib$.
▷ $z\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow z=\overline{z}$.
▷ $z\in i\mathbb{R}\Longleftrightarrow z=-\overline{z}$.
▷ $z.\overline{z}=a^2+b^2$.

▷ $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; avec z' un nombre complexe.
▷ $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
▷ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
▷ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
▷ $z + \overline{z} = 2Re(z) \Longrightarrow Re(z) = \dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$.
▷ $z - \overline{z} = 2Im(z) \Longrightarrow Im(z) = \dfrac{1}{2}(z-\overline{z})$.
▷ $\overline{\overline{z}} = z$.
▷ Si $p(z)$ est un polynôme à coefficient réel, alors $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$.

8.1.5 Calculs sur les nombres complexes

Soit $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes.

Égalités de deux nombres complexes

$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

Remarque

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe ; z est nul si et seulement si $a = b = 0$

Sommes de deux nombres complexes

$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

Produits de deux nombres complexes

$z_1 \times z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1.a_2 - b_1.b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

Quotients de deux nombres complexes

$$\frac{z}{z'} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Exercice

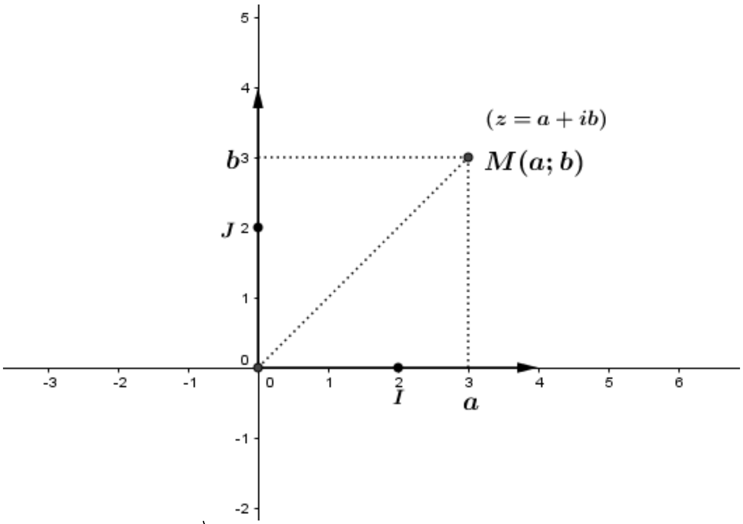
Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique : $z_1 = \dfrac{-1}{2i}$; $z_2 = \dfrac{3-i}{4+3i}$.

8.2 Le plan complexe

8.2.1 Affixe du point

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
A tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe un point $M(a; b)$ du plan et réciproquement.
z est appelé affixe de M, on dit aussi que M est l'image de z dans le plan.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com



▷ L'axe $(O;\overrightarrow{OI})$ est appelé l'axe réel ;
▷ L'axe $(O;\overrightarrow{OJ})$ est appelé l'axe imaginaire.

8.2.2 Affixe du vecteur

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$ défini par : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

8.3 Module d'un nombre complexe

8.3.1 Définition

On appelle module du nombre complexe z, le nombre réel positif noté $|z|$ défini par :
$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.
Si $z = a + ib$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
$|z| = OM$

8.3.2 Propriétés

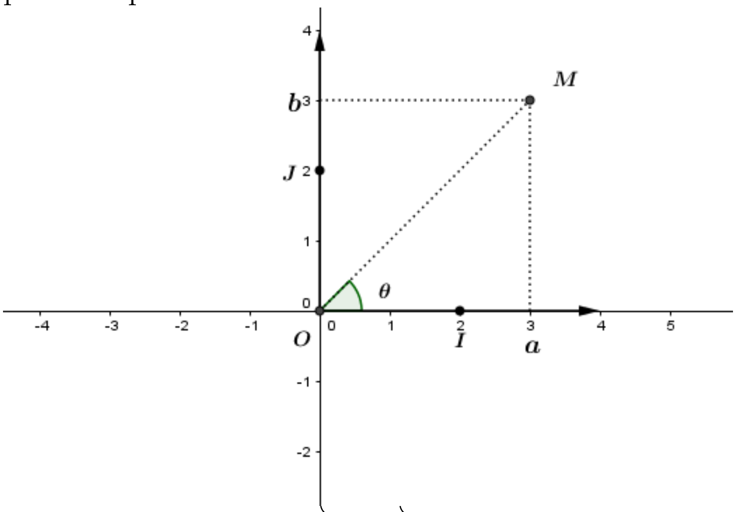
Soit z un nombre complexe non nul ; on a :
▷ $|\overline{z}| = |z|$.
▷ $|z| = 0 \iff z = 0$.
▷ $|Re(z)| \leq |z|$.
▷ $|Im(z)| \leq |z|$.
▷ $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$.
▷ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.
▷ $|z^n| = |z|^n$; $n \in \mathbb{N}^*$
▷ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

8.4 Argument d'un nombre complexe

8.4.1 Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Un argument de z, noté $arg(z)$ est une mesure quelconque exprimée en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM})$ où M est l'image de z dans le plan complexe.



On a $Arg(z) = \theta = (\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM})[2\pi]$

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}$

8.4.2 Propriétés

Soit z un nombre complexe non nul ; on a :

▷ $arg\overline{z} = -argz + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$.

▷ $arg(-z) = \pi + argz + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$.

▷ $argz = 0[2\pi] \iff z \in \mathbb{R}_+^*$.

▷ $argz = \pi[2\pi] \iff z \in \mathbb{R}_-^*$.

▷ $argz = \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \iff z \in i\mathbb{R}_+^*$.

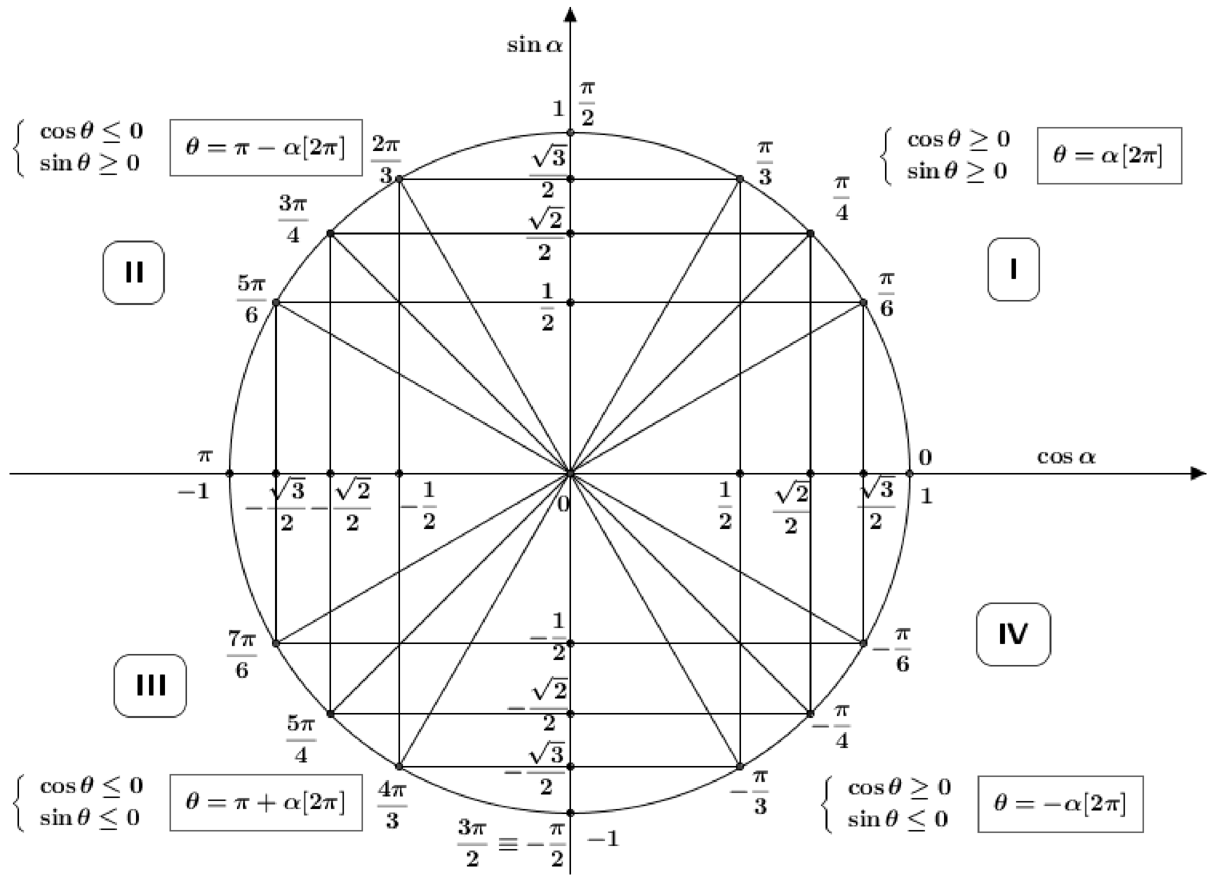
▷ $argz = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \iff z \in i\mathbb{R}_-^*$.

▷ $arg(z_1.z_2) = argz_1 + argz_2[2\pi]$.

▷ $arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = argz_1 - argz_2[2\pi]$.

▷ $arg(z^n) = nargz[2\pi],\ n \in \mathbb{N}^*$.

8.4.3 Rappel sur le cercle trigonométrique



8.5 Application des nombres complexes en trigonométries

8.5.1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

a) Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.
On appelle forme trigonométrique du nombre complexe z l'écriture : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

b) Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes tels que : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

▷ $z \times z' = rr'[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$;

▷ $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}[\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')]$; $z' \neq 0$;

▷ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$; $z \neq 0$;

▷ $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$.

Remarque

La forme trigonométrique du nombre complexe conjugué de z est : $\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

8.5.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

a)Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.
On appelle forme exponentielle du nombre complexe z l'écriture : $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$.

b) Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes tels que : $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ et $z' = r'\mathrm{e}^{i\theta'}$

▷ $z \times z' = rr'\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$;

▷ $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$; $z' \neq 0$;

▷ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta}$; $z \neq 0$;

▷ $z^n = r^n\mathrm{e}^{in\theta}$.

Remarque

La forme exponentielle du nombre complexe conjugué de z est : $\overline{z} = r\mathrm{e}^{-i\theta}$.

8.5.3 Relation entre forme exponentielle et forme trigonométrique

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$; $r\mathrm{e}^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

8.5.4 Forme polaire d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.
On appelle forme polaire du nombre complexe z l'écriture : $z = [r;\theta]$.

8.5.5 Formules de Moivre

Soit θ un nombre réel et n un entier relatif, on a : $\cos\theta + i\sin\theta = \mathrm{e}^{i\theta} \Longrightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$
On obtient la formule suivante, dite de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

8.5.6 Formules de Euler

Soit z un nombre complexe tel que : $z = \cos\theta + i\sin\theta = \mathrm{e}^{i\theta}$ et $\overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta = \mathrm{e}^{-i\theta}$

On a : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{z - \overline{z}}{2i} \end{cases}$; $\begin{cases} \cos n\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta} + \mathrm{e}^{-in\theta}}{2} \\ \sin n\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta} - \mathrm{e}^{-in\theta}}{2i} \end{cases}$

8.5.7 Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

8.5.8 Linéarisation

Pour Linéariser $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$ $(n \in \mathbb{N})$ on peut utiliser le procédé suivant, mettant en jeu les formules d'Euler et du binôme de Newton.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice

Linéariser les expressions suivantes

1. Exprimer $\cos 3x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
2. Exprimer $\cos^3\theta\sin^5\theta$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ si possible.

8.5.9 Factorisation de $\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{ib}$ et $\mathrm{e}^{ia}-\mathrm{e}^{ib}$

$$\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{ib}=\mathrm{e}^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\times\mathrm{e}^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}+\mathrm{e}^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\times\mathrm{e}^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$
$$\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{ib}=\mathrm{e}^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left[\mathrm{e}^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}+\mathrm{e}^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right]$$
$$\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{ib}=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

D'où $\boxed{\mathrm{e}^{ia}+\mathrm{e}^{ib}=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}}$

$$\mathrm{e}^{ia}-\mathrm{e}^{ib}=\mathrm{e}^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\times\mathrm{e}^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}-\mathrm{e}^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\times\mathrm{e}^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$
$$\mathrm{e}^{ia}-\mathrm{e}^{ib}=\mathrm{e}^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left[\mathrm{e}^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}-\mathrm{e}^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right]$$
$$\mathrm{e}^{ia}-\mathrm{e}^{ib}=2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

D'où $\boxed{\mathrm{e}^{ia}-\mathrm{e}^{ib}=2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}}$

8.6 Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

8.6.1 Définition

Soit n un nombre entier naturel non nul et Z un nombre complexe donné.
On appelle racine $n^{\text{ième}}$ du nombre complexe Z, tout nombre complexe z tel que $z^n=Z$.

8.6.2 Recherche des racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

Posons $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z=\varphi(\cos\phi+i\sin\phi)$ avec $\varphi=|z|$.
On sait que $z^n=Z$ et $z^n=\varphi^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)$
$z^n=Z\Longrightarrow\varphi^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
Par comparaison $\begin{cases}\varphi^n=r\\ n\phi=\theta+2k\pi\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}\Longrightarrow\begin{cases}\varphi=\sqrt[n]{r}\\ \phi=\dfrac{\theta}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$
Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$z_k=\left[\sqrt[n]{r};\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right]=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right],\quad\forall\,k\in\{0;1;\cdots;(n-1)\}$$

Remarques

▷ Si $Z=1$, on parle des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité qui sont de la forme $z_k=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}}$.
▷ La somme de n racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe est nulle.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

8.6.3 Interprétation géométrique

Les racines $n^{\text{ième}}$ du nombre complexe $Z = re^{i\theta}$ sont les affixes des sommets M_k d'un polygone régulier de côté n inscrit sur un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O origine du repère et de rayon $\sqrt[n]{r}$ tels que : $\left(\overrightarrow{OM}_k ; \overrightarrow{OM}_{k+1}\right) = \dfrac{2\pi}{n}[2\pi]$.

Exercice

1. Trouver les racines cubiques de l'unité.
2. Trouver les racines cubiques de $u = 1 + i$

8.6.4 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition

Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe non nul ; on appelle racine carrée de Z, le nombre complexe $z = x + iy$ tel que $Z = z^2$.

$$z^2 = Z \Longleftrightarrow (x+iy)^2 = a + ib \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = |Z| \quad (S) \\ 2xy = b \end{cases}$$

La résolution du système (S) permet de trouver deux nombres complexes conjugués z_1 et z_2 ; racines carrées du nombre complexe Z.

8.7 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

8.7.1 Équations à coefficients réels

Ce sont les équations de la forme $az^2 + bz + c = 0$ où a ; b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Pour résoudre cette équation, on calcule le discriminant Δ.
On a : $\Delta = b^2 - 4ac$ et trois cas peuvent se présenter :
▷ si $\Delta > 0$; on a deux solutions réelles : $\begin{cases} z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$
▷ si $\Delta < 0$; on a deux solutions complexes : $\begin{cases} z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \\ z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \end{cases}$
▷ si $\Delta = 0$; on a une solution double : $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$(E_1) : z^2 + z + 1 = 0$; $(E_2) : z^2 - 6z + 9 = 0$; $(E_3) : z^2 - z - 2 = 0$

8.7.2 Équations à coefficient complexe

Ce sont les équations de la forme $az^2 + bz + c = 0$ où a ; b et c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$.
Pour résoudre cette équation, on calcule le discriminant Δ et deux cas peuvent se présenter :
▷ si $\Delta \in \mathbb{R}$, on se ramène au cas précédent.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

▷ si $\Delta \in \mathbb{C}$, on cherche les racines carrées δ_1 et δ_2 du discriminant Δ.
L'équation admet deux solutions complexes telles que : $\begin{cases} z_1 = \frac{-b-\delta_1}{2a} \\ z_2 = \frac{-b+\delta_1}{2a} \end{cases}$ ou $\begin{cases} z_1 = \frac{-b-\delta_2}{2a} \\ z_2 = \frac{-b+\delta_2}{2a} \end{cases}$

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$(E) : z^2 - 5iz - 6 = 0$; $(E') : (-2+i)z^2 + (4-5i)z + 3 - i = 0$.

Exercice 2

Soient les nombres complexes suivants $z_1 = i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer $|z_1| \times |z_2|$.
2. (a) Calculer $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \times z_2}$.
   (b) Écrire Z sous la forme algébrique.
   (c) Calculer $|Z|$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} iz - 3z' = 2 - 3i \\ \\ (1+i)z + 2iz' = 5 - i \end{cases}$
4. Déterminer les racines carrées δ_1 et δ_2 du nombre complexe $u = 3 + 4i$.
5. Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   $(E) : (1+i)z^2 + 2(2+i)z + 4 = 0$; $(E') : z^2 - (5-4i)z + 3(1-3i) = 0$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes : $z + 2\overline{z} - 1 + 2i = 0$; $z + 2\overline{z} = 4 + i$ et $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

8.8 Équations complexe se ramenant au second degré

8.8.1 Équations complexe du troisième degré

a) Forme générale

Une équations du troisième degré dans $\mathbb{C}$ d'inconnue z est une équation de la forme :
$(E) : az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ où a, b, c et d des nombres complexes avec $a \neq 0$.

b) Résolution

La résolution d'une équation du troisième degré dans $\mathbb{C}$ nécessite la connaissance d'au moins une de ses racines appelée racine évidente souvent notée z_0, ainsi l'équation peut s'écrire sous la forme : $(z - z_0)(az^2 + \alpha z + \beta) = 0$ où a, α et β sont des nombres complexes $(a \neq 0)$
On utilise l'une des trois méthodes suivantes pour déterminer a, α et β :
▷ Méthode de Hörner ;
▷ Méthode de la division euclidienne ;
▷ Méthode d'identification des coefficients.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

▷ **Méthode de Hörner**

Si z_0 une solution de l'équation $az^3+bz^2+cz+d=0$ où $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$ et $a\neq 0$ alors l'équation peut s'écrire : $(z-z_0)(az^2+\alpha z+\beta)=0$ où $(a,\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^3$ et $a\neq 0$

	a	b	c	d
z_0	$\downarrow$	az_0	αz_0	βz_0
$\times$	a	$\alpha=b+az_0$	$\beta=c+\alpha z_0$	$d+\beta z_0=0$

on a : $\begin{cases} z-z_0=0 & (1)\\ az^2+\alpha z+\beta=0 & (2)\end{cases}$

Alors on résout l'équation du second degré $(az^2+\alpha z+\beta)=0$ (2).
Si l'équation (2) admet deux solutions z_1 et z_2 alors l'ensemble de solution de l'équation $az^3+bz^2+cz+d=0$ est $\boxed{S=\{z_0\,,\,z_1\,,\,z_2\}}$

▷ **Méthode de division euclidienne**

Si z_0 une solution de l'équation $(E):az^3+bz^2+cz+d=0$ où $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$ et $a\neq 0$ alors (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-z_0)(az^2+\alpha z+\beta)=0$ où $(a,\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^3$ et $a\neq 0$
On effectue la division euclidienne de (E) par $z-z_0$ pour déterminer a, α et β

$$\begin{array}{r|l}
\boldsymbol{az^3+bz^2+cz+d} & \boldsymbol{z-z_0}\\ \cline{2-2}
\boldsymbol{-az^3+az_0z^2} & \boldsymbol{az^2+\alpha z+\beta}\\ \cline{1-1}
\boldsymbol{\alpha z^2+cz+d} & \\
\boldsymbol{-\alpha z^2+\alpha z_0 z} & \\ \cline{1-1}
\boldsymbol{\beta z+d} & \\
\boldsymbol{-\beta z+\beta z_0} & \\ \cline{1-1}
\boldsymbol{0} &
\end{array}
\qquad \textbf{avec} \quad \left|\begin{array}{l} \boldsymbol{a=a}\\ \boldsymbol{\alpha=b+az_0}\\ \boldsymbol{\beta=c+\alpha z_0}\end{array}\right.$$

Alors (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-z_0)(az^2+\alpha z+\beta)=0$
on a : $\begin{cases} z-z_0=0 & (1)\\ az^2+\alpha z+\beta=0 & (2)\end{cases}$
Si l'équation (2) admet solutions racines z_1 et z_2 alors l'ensemble de solution de l'équation $az^3+bz^2+cz+d=0$ est $\boxed{S=\{z_0\,,\,z_1\,,\,z_2\}}$

▷ **Méthode de d'identification des coefficients**

Si z_0 une solution de l'équation $(E):az^3+bz^2+cz+d=0$ où $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$ et $a\neq 0$ alors (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-z_0)(az^2+\alpha z+\beta)=0$ où $(a,\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^3$ et $a\neq 0$
∘ On développe $(z-z_0)(az^2+\alpha z+\beta)=0$
∘ On identifie les coefficients pour déterminer a, α et β.

Exercice 1

Soit p un polynôme complexe défini par : $p(z)=z^3-(1+3i)z^2+(1+4i)z-3(i-1)$.

1. Montrer que i est une racine du polynôme $p(z)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z)=0$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice 2

Soit p un polynôme complexe d'inconnue z défini par : $p(z) = z^3+(4-5i)z^2+4(2-5i)z-40i$.

1. Démontrer que le polynôme $p(z)$ admet une racine imaginaire pure notée z_0 à déterminer.
2. Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que : $p(z) = (z-5i)(az^2+bz+c)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.

8.8.2 Équations complexe du quatrième degré

a) Forme générale

Une Équations complexe du quatrième degré est une équation de la forme :
$(E) : az^4+bz^3+cz^2+dz+\mathrm{e} = 0$ où a, b, c, d et e des nombres complexes avec $a \neq 0$.

b) Résolution

La résolution de cette équation consiste à faire un changement de variable d'inconnue, on distingue deux cas :
▷ Si $a = \mathrm{e}$ et $d = -b$, on a : $az^4+bz^3+cz^2-bz+a = 0$ avec $a \neq 0$.
On pose $t = z - \dfrac{1}{z}$ avec $z \neq 0$.
▷ Si $a = \mathrm{e}$ et $d = b$, on a : $az^4+bz^3+cz^2+bz+a = 0$ avec $a \neq 0$.
On pose $t = z + \dfrac{1}{z}$ avec $z \neq 0$.

Exercice

Soit l'équation $(E) : z^4-5z^3+6z^2-5z+1 = 0$.

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E).
2. Démontrer que l'équation (E) est équivalente au système : $\begin{cases} u = z+\frac{1}{z} \\ u^2-5u+4 = 0 \end{cases}$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

8.9 Utilisation des nombres complexes en géométrie

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soit quatre points A, B, C, Ω d'affixe z_A, z_B, z_C, z_Ω respectivement.

8.9.1 Distance de deux points

La distance AB est : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$

8.9.2 Affixe du milieu d'un segment et du centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle quelconque, on désigne par I et G respectivement le milieu du segment $[AB]$ et centre de gravité du triangle ABC.
L'affixe des points I et G sont : $z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2}$ et $z_G = \dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

8.9.3 Affixe du barycentre de n points pondérés

Soit $G = bary\{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2),(A_3,\alpha_3);...;(A_n,\alpha_n)\}$, alors on a :
$z_G = \dfrac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \alpha_3 z_{A_3} + ... + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n}$.

8.9.4 Interprétation géométrique de l'argument

Soit $(O; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct.
▷ Soit M un point du plan complexe d'affixe z, alors $arg z = \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.
▷ $arg(z_B - z_A) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$.
▷ $arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) = \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$.
▷ $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.
▷ L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $arg(z - z_A) \equiv \alpha[\pi]$ est la droite de repère $\left(A; \vec{i}\right)$, privée de A, avec $Mes\left(\widehat{\vec{i}; \vec{u}}\right) \equiv \alpha[\pi]$.
▷ L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $arg(z - z_A) \equiv \alpha[2\pi]$ est la demi- droite de repère $\left(A; \vec{i}\right)$, privée de A, avec $Mes\left(\widehat{\vec{i}; \vec{u}}\right) \equiv \alpha[2\pi]$.

8.9.5 Interprétation géométrique du module

Soit $(O; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct.
On considère les points A, B et M d'affixe z_A, z_B et z.
▷ L'ensemble des points M d'affixe z vérifie $|z - z_A| = k$ où $k > 0$ est le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon k. Son équation cartésienne est : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2$ où $z = x+iy$ et $z_A = a+ib$.
▷ L'ensemble des points M du plan tel que : $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 1

Déterminer l'ensemble des points M tels que : $z = 1 + 2e^{i\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit M un point d'affixe z et $z' = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ où $z_A = 2$ et $z_B = -4 + i$.
Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M tels que :
$a)$ $|z'| = 1$; $b)$ $|z'| = 2$; $c)$ z' est réel et $d)$ $arg z' = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Remarque

Si $k = 1$ et $z_A = z_O$, on a : $|z| = 1$ caractérise le cercle trigonométrique.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

8.9.6 Configurations du plan et nombres complexes

▷ **Triangle isocèle**

ABC est un triangle isocèle en $A \Longleftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A|$
où $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \mathrm{e}^{\pm \alpha i}$ avec $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

▷ **Triangle équilatéral**

ABC est un triangle équilatéral $\Longleftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_B| = |z_C - z_A|$
où $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \mathrm{e}^{\pm \frac{\pi}{3} i}$

▷ **Triangle rectangle**

ABC est un triangle rectangle en $A \Longleftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \lambda \mathrm{e}^{\pm \frac{\pi}{2} i}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^* - \{1; -1\}$

▷ **Triangle rectangle**

ABC est un triangle rectangle en $A \Longleftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \mathrm{e}^{\pm \frac{\pi}{2} i}$.

▷ **Carré**

$ABCD$ est un carré $\Longleftrightarrow \dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = \mathrm{e}^{\pm \frac{\pi}{2} i}$ et $|z_D - z_B| = |z_C - z_A|$.

▷ **Parallélogramme**

$ABCD$ est un parallélogramme $\Longleftrightarrow \dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = \mathrm{e}^{\pm \theta i}$ avec $\theta \neq 0[2\pi]$.

▷ **Points cocycliques**

Les points A, B, C et D sont cocycliques $\Longleftrightarrow \dfrac{z_C - z_B}{z_C - z_A} : \dfrac{z_D - z_B}{z_D - z_A} = \beta \in \mathbb{R}^*$

8.9.7 Colinéarité et orthogonalité

Soit A, B et C trois points du plan complexe.
▷ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Longleftrightarrow arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi]$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \beta \in \mathbb{R}^*$.
▷ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux $\Longleftrightarrow arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = i\beta$.

Conséquences

▷ Les points A, B et C sont alignés $\Longleftrightarrow arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi]$ ou $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \beta \in \mathbb{R}^*$.
▷ Les droites (AB) et (CD) sont orthogonaux $\Longleftrightarrow arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$
ou $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = i\beta$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

▷ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Longleftrightarrow arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0[2\pi]$
ou $arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \pi[2\pi]$

8.10 Nombres complexes et transformations du plan

8.10.1 Translation

$a)$ **Définition**

Translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul est l'application du plan dans lui même qui associe à tout point M, le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

$b)$ **Expression complexe d'une translation**

Soit M et M' des points d'affixe z et z', $\overrightarrow{u}$ un vecteur tel que $z_{\overrightarrow{u}} = b$.
L'expression complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est : $z' = z + b$.

$c)$ **Expression analytique d'une translation**

Posons $z' = x' + iy'$ et $b = x_0 + iy_0$
On a :
$x' + iy' = x + iy + x_0 + iy_0$
Par identification des deux membres, on a : $\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$

$d)$ **Élément caractéristique d'une translation**

L'élément caractéristique d'une translation est son vecteur.

Exercice 1

Soit f une transformation du plan dans le plan définie par son expression complexe suivante : $f : z' = z + 4 - 3i$.

1. Montrer que f est une translation.
2. Déterminer l'affixe de son vecteur $\overrightarrow{u}$.

Exercice 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit A et B deux points d'affixe respectives $2 - i$ et $5 + 3i$.

1. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer l'expression complexe de la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Donner l'expression analytique de la translation t.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

8.10.2 Homothétie

$a)$ **Définition**

Une homothétie de centre Ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ est l'application du plan dans lui même qui associe à tout point M, le point M' tel que : $\overrightarrow{\Omega M}' = k\overrightarrow{\Omega M}$.

$b)$ **Expression complexe d'une homothétie**

Soit M, M' et et Ω des points d'affixe respectives z et z' et z_Ω.
L'expression complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est :
$z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$ ou $z' = kz + (1-k)z_\Omega$.
En posant $k = a$ et $b = (1-k)z_\Omega$; on a : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$.

$c)$ **Éléments caractéristiques d'une homothétie**

Un homothétie est caractérisé par son rapport $k = a$ et son centre Ω a pour affixe $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$.

$d)$ **Expression analytique d'une homothétie**

$z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$

Posons $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$ et $z_\Omega = x_0 + iy_0$, alors on a : $\begin{cases} x' = kx + x_0(1-k) \\ y' = ky + y_0(1-k) \end{cases}$

Remarques

- Si $k = 1$, alors $h(\Omega;1) = Idp$ (Identité du plan).
- Si $k = -1$, alors $h(\Omega;-1) = S_\Omega$ (symétrie centrale).

Exercice 1

Soit h une transformation plane définie par : $h : z' = 3z + 2 - i$.

1. Montrer que h est une homothétie.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de l'homothétie h.

Exercice 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit A un point d'affixe $z_A = 1 + 2i$.

1. Déterminer l'expression complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $k = -\dfrac{1}{2}$.
2. Donner l'expression analytique de la translation h.

8.10.3 Rotation

$a)$ **Définition**

La rotation de centre Ω et d'angle θ est l'application du plan dans lui même qui associe à tout point M, le point M' tel que : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M}'\right) = \theta[2\pi] \end{cases}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

b) **Expression complexe d'une rotation**

Soit M, M' et Ω des points d'affixe respectives z, z' et z_Ω.

On a : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\,;\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta[2\pi] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega} = \mathrm{e}^{i\theta} \\ arg\left(\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right) = \theta[2\pi] \end{cases}$

$\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega} = \mathrm{e}^{i\theta} \Longleftrightarrow z' - z_\Omega = (z - z_\Omega)\mathrm{e}^{i\theta} \Longrightarrow z' = \mathrm{e}^{i\theta} z + (1-\mathrm{e}^{i\theta})z_\Omega$.

En posant $\mathrm{e}^{i\theta} = a$ et $b = (1-\mathrm{e}^{i\theta})z_\Omega$, on a la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| = 1$.

Remarques

▷ Si $\theta = \pi$, la rotation $r_{(\Omega;\theta)}$ est une symétrie centrale de centre Ω.

▷ Si $\theta = 0$, la rotation $r_{(\Omega;\theta)}$ est l'identité du plan.

c) **Éléments caractéristiques d'une rotation**

Une rotation r d'écriture complexe $z' = az + b$ est caractérisé par :
son angle θ tel que : $\theta = arg(a)[2\pi]$ et son centre Ω d'affixe $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$.

d) **Expression analytique d'une rotation**

Soit r la rotation d'écriture complexe : $z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$
Posons : $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z_\Omega = x_0 + iy_0$ et $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
$x' + iy' = (x - x_0)\cos\theta - (y - y_0)\sin\theta + x_0 + i\,[(x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta + y_0]$

Par égalité de deux nombres complexes, on a : $r : \begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\theta - (y - y_0)\sin\theta + x_0 \\ y' = (x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta + y_0 \end{cases}$

Remarques

▷ Si $\theta = \pi$, alors on a : $r : \begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$ c'est l'expression analytique d'une symétrie centrale de centre Ω d'affixe $z_\Omega = x_0 + iy_0$.

▷ Si $\theta = 0$, alors on a : $r : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ c'est l'expression analytique de l'identité du plan.

Exercice 1

Soit f une transformation du plan dans le plan définie par : $f : z' = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 - i\sqrt{3}$.

1. Montrer que f est une rotation.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de f.

Exercice 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Soit A un point d'affixe $z_A = -3 + 2i$.

1. Déterminer l'expression complexe de la rotation R de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.
2. Déterminer l'expression analytique de la rotation R.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

8.10.4 Symétries orthogonales

Définition

La symétrie orthogonale ou réflexion d'axe $(\mathscr{D})$ est l'application du plan dans lui même qui associe à tout point M, le point M' tel que $(\mathscr{D})$ soit la médiatrice du segment $[MM']$.

8.10.5 Symétries particulières

$a)$ **Symétrie par rapport à l'axe réel**

Soit M et M' deux points d'affixe respectives z et z'.
M' est le symétrique de M par rapport à l'axe réel si et seulement si $z' = \overline{z}$.

$b)$ **Symétrie par rapport à l'axe imaginaire**

Soit M et M' deux points d'affixe respectives z et z'.
M' est le symétrique de M par rapport à l'axe imaginaire si et seulement si $z' = -\overline{z}$.

$c)$ **Symétrie par rapport l'origine du repère**

Soit M et M' deux points d'affixe respectives z et z'.
M' est le symétrique de M par rapport à l'origine si et seulement si $z' = -z$.

$d)$ **Symétrie par rapport à la première bissectrice**

Soit M un point du plan complexe d'affixe $z = a + ib$.
M' d'affixe z' est le symétrique de M par rapport à la première bissectrice si et seulement si $z' = b + ia$.

e) Symétrie par rapport à un point

Soit A, B et C trois points d'affixe respectives z_A, z_B et z_C.
A est le symétrique que B par rapport à C si et seulement si $z_A = 2z_B - z_C$.

8.10.6 Similitude plane directe

$a)$ **Définition**

La similitude plane directe S de centre Ω, d'angle θ et de rapport k $(k > 0)$ est la composé commutative de la rotation de centre Ω et d'angle θ avec une homothétie de centre Ω et de rapport k, c'est-à-dire $S = h \circ r = r \circ h$.

$b)$ **Expression complexe d'une similitude plane directe**

Soit S la similitude plane directe de centre Ω, d'angle θ et de rapport $k > 0$.
L'expression complexe de S est : $z' - z_\Omega = ke^{i\theta}(z - z_\Omega)$ ou $z' = ke^{i\theta}z + \left(1 - ke^{i\theta}\right)z_\Omega$.
En posant $a = ke^{i\theta}$ et $b = \left(1 - ke^{i\theta}\right)z_\Omega$, on a la forme $z' = az + b$.

c) **Éléments caractéristiques d'une similitude plane directe**

Soit S la similitude plane directe d'écriture complexe : $z' = az + b$.
La similitude plane directe S est caractérisé par :
▷ son rapport k tel que : $k = |a|$;
▷ son angle θ tel que : $\theta = arg(a)[2\pi]$;
▷ son centre Ω d'affixe $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$.

d) **Expression analytique d'une similitude plane directe**

Soit S la similitude plane directe d'écriture complexe : $z' = ke^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$
Posons : $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z_\Omega = x_0 + iy_0$ et $ke^{i\theta} = k\cos\theta + ik\sin\theta$.
$x' + iy' = k(x - x_0)\cos\theta - k(y - y_0)\sin\theta + x_0 + i\,[k(x - x_0)\sin\theta + k(y - y_0)\cos\theta + y_0]$
Par égalité de deux nombres complexes, on a : $S : \begin{cases} x' = k(x - x_0)\cos\theta - k(y - y_0)\sin\theta + x_0 \\ y' = k(x - x_0)\sin\theta + k(y - y_0)\cos\theta + y_0 \end{cases}$

e) **Similitude plane directe particulière**

Soit S une similitude plane directe d'écriture complexe $z' = az + b$.
▷ si $a = 1$; on a : $z' = z + b$, alors S est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.
▷ si $a \neq 1$, $|a| = 1$ et $\theta \neq 0[2\pi]$, alors S est une rotation de centre Ω et d'angle θ.
▷ si $|a| \neq 1$ et $\theta \equiv 0[2\pi]$, alors S est une homothétie de centre Ω et de rapport k.
▷ si $a = -1$; on a : $z' = -z + b$, alors S est une symétrie centre de centre Ω.

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit A, B, C et D quatre points du plan d'affixe respectives $3 - 2i$; $6 + 4i$; $-3 + i$ et $7i$. On désigne S la similitude plane directe de centre C, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

1. Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z + 1 + 3i$.
2. Déterminer l'expression analytique de S.
3. Déterminer l'affixe du point E image du point D par S.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} (1+i)\alpha + \beta = -2 + i \\ (2-i)\alpha + \beta = -1 + 4i \end{cases}$.
2. Le plan complexe $(\mathscr{P})$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
   Soit A, B, C et D quatre points du plan complexe $(\mathscr{P})$ d'affixes respectives :
   $1 + i$, $2 - i$, $-2 + i$ et $-1 + 4i$. On désigne par S la similitude plane directe qui transforme A en C et B en D.
   (a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude S.
   (b) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S.
   (c) Déterminer analytiquement S puis donner la l'affixe de point E image de C par S.
3. Soit p un polynôme d'inconnue z défini par : $p(z) = z^3 - 3iz^2 - 4z + 2i$.
   (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $p(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

4. (a) Placer les points A, B, C et D dans le plan $(\mathscr{P})$.
   (b) Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   (c) Déterminer l'affixe du point G image C par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   (d) Quelle est la nature du quadrilatère $ACGB$?

8.10.7 Similitude plane indirecte

a) **Définition**

La similitude plane indirecte $\overline{S}$ de centre Ω, de rapport k est la composée commutative de l'homothétie de centre Ω, de rapport k et de la symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$ contenant Ω, c'est-à-dire $\overline{S} = h \circ S_{((\mathscr{D}))} = S_{((\mathscr{D}))} \circ h$.

b) **Expression complexe d'une similitude plane indirecte**

Une application du plan $\overline{S}$ est une similitude plane indirecte si et seulement si son expression complexe est de la forme $z' = a\overline{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

c) **Similitude plane indirecte particulière**

Soit $\overline{S}$ une similitude plane indirecte d'écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$.
▷ si $|a| = 1$ et $a\overline{b} + b = 0$, alors $\overline{S}$ est une symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$ avec $(\mathscr{D}) = \{M(z)/z = a\overline{z} + b\}$ qui est l'ensemble des points invariants par $\overline{S}$.
▷ si $|a| = 1$ et $a\overline{b} + b \neq 0$, alors $\overline{S}$ est une symétrie glissée c'est-à-dire $\overline{S} = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{(\mathscr{D})} = S_{(\mathscr{D})} \circ t_{\overrightarrow{u}}$.
$\overline{S}$ est caractérisé par :
• son vecteur de la translation $\overrightarrow{u}$ tel que : $z_{\overrightarrow{u}} = \dfrac{1}{2}\left(a\overline{b} + b\right)$.
• son axe de symétrie $(\mathscr{D})$ tel que : $(\mathscr{D}) = \left\{M(z)/z' - z = \dfrac{1}{2}\left(a\overline{b} + b\right)\right\}$.
▷ si $|a| \neq 1$, alors $\overline{S}$ est une similitude plane indirecte de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \dfrac{a\overline{b} + b}{1 - a\overline{a}}$, de rapport $k = |a|$ et d'axe $(\mathscr{D})$ tel que : $(\mathscr{D}) = \{M(z)/z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)\}$.

Exercice 1

Soit f une transformation du plane définie par : $f : z' = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} + 1 - i\sqrt{3}$.

1. Montrer que f est une symétrie axiale.
2. Caractériser f.

Exercice 2

Soit f une transformation du plane définie par : $f : z' = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} + \dfrac{3}{2} - i\dfrac{3}{2}$.

1. Montrer que f est une symétrie glissée.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de f.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice 3

Soit f une transformation du plane définie par : $f : z' = (1+i)\overline{z} + 2 - i$.

1. Montrer que f est une similitude plane indirecte.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de f.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Chapitre 9

ARITHMÉTIQUE

9.1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

9.1.1 Diviseur et Multiple d'un entier relatif

a) Définition

Soit a et b deux entiers relatifs tels que b soit non nul.
On dit que b est un diviseur de a si et seulement si il existe un entier k tel que $a = bk$.
On dit aussi que a est un multiple de b ou encore b divise a que l'on note b/a.
▷ L'ensemble des diviseurs de a se note $\mathscr{D}(a)$.
▷ L'ensemble des multiples de b se note $b\mathbb{Z}$.

Exemple

$\mathscr{D}(12) = \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$
$3\mathbb{Z} = \{...; -9; -6; -3; 0; 3; 6; 9; ...\}$.

b) Propriétés

p_1) a/a ; $1/a$ et $a/0$.

p_2) Tout entier relatif a possède un nombre fini de diviseurs et une infinité de multiples.

p_3) Tout entier relatif non nul b a pour diviseurs au moins -1 ; 1 ; $-b$ et b.

p_4) Si b/a, alors $1 \leq |b| \leq |a|$.

p_5) Si b/a et a/b, alors $|a| = |b|$.

p_6) Si a/b et b/c, alors a/c.

p_7) Si ac/ab et $a \neq 0$ alors c/b.

p_8) Si a/b alors pour tout entier k ; a/bk.

p_9) Si a/b et a/c alors il existe deux entiers p et q tels que $a/(pb + cq)$

9.1.2 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs tels que b soit non nul.
Il existe un couple unique $(q; r)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tels que $a = bq + r$ où $0 \leq r < |b|$.
Les nombres q et r s'appellent respectivement quotient et reste de la division euclidienne de a par b.

Remarque

Si $r=0$; on a : $a=bq$, on dit que a est divisible par b.

Exemple

$47=8\times 5+7$; on a : $q=5$ et $r=7$.

9.1.3 Plus grand commun diviseur

a) Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
On appelle plus grand commun diviseur de a et b note $PGCD(a,b)$ où $a\wedge b$, le plus grand entier naturel de $\mathscr{D}(a;b)$.

Exemple

$PGCD(24,30)=6$

b) Propriétés

p_1) $PGCD(a,b)=PGCD(b,a)=PGCD(|a|,|b|)$.

p_2) Si $PGCD(a,b)=d \Longrightarrow PGCD\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$.

p_3) $PGCD(ka,kb)=|k|PGCD(a,b)$ où $k\in\mathbb{Z}^*$.

p_4) Si b/a, $\mathscr{D}(a,b)=\mathscr{D}(b)$ où $\mathscr{D}(a,b)$ est l'ensemble de diviseurs communs à a et b.

p_5) Si $a=bq+r$ avec $a>b>0$
- $r\neq 0$, $\mathscr{D}(a,b)=\mathscr{D}(b,r)$ et $PGCD(a,b)=PCGD(b,r)$.
- $r=0$, $\mathscr{D}(a,b)=\mathscr{D}(b)$ et $PGCD(a,b)=b$.

p_6) Si $PGCD(a,b)=d$, un entier m est multiple de d s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au+bv=m$

p_7) Si $PGCD(a,b)=d$, on a : $\mathscr{D}(a,b)=\mathscr{D}(d)$.

p_8) $PGCD(a;(b,c))=PGCD((a,b);c)$.

p_9) $PGCD(a;1)=1$.

p_{10}) Si $a'=a/PGCD(a;b)$ et si $b'=b/PGCD(a;b)$, alors $PGCD(a';b')=1$.

c) Recherche du PGCD : Algorithme d'Euclide

Soit a et b deux entiers.
$a=bq_0+r_0$
$b=r_0q_1+r_1$
$r_0=r_1q_2+r_2$
$r_1=r_2q_3+r_3$
$\vdots$
$r_{n-2}=r_{n+1}q_n+r_n$
$r_{n-1}=r_nq_{n+1}$
On a : $PGCD(a,b)=r_n$. (le $PGCD$ de a et b est le dernier reste non nul).

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exemple

Déterminer le $PGCD(304939, 151097)$.

Solution

Déterminons le $PGCD(304939, 151097)$.

Dividende	304939	151097	2745	122
Diviseur	151097	2745	122	61
Reste	2745	122	61	0

D'où $PGCD(304939, 151097) = 61$

9.1.4 Nombres premiers entre eux

a) Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
On dit que a et b sont premiers entre eux si leur plus grand commun diviseur est égal à 1, c'est-à-dire $PGCD(a, b) = 1$.

Exemple

756 et 221 sont premiers entre eux.

b) Propriétés

p_1) $PGCD(a, b) = d \Longrightarrow \frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ sont premiers entre eux.

p_2) Si $PGCD(a, b) = d$, alors il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux tels que : $a = da'$ et $b = db'$.

9.1.5 Théorèmes

a) Identité de Bézout

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et $PGCD(a, b) = d$. Il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$.

b) Théorème de Bézout

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

c) Théorème de Gauss

Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

9.1.6 Application : Équation Diophantienne

a) Définition

Une équation diophantienne est une équation de la forme $ax+by=c$ avec a, b et c des entiers relatifs où a et b sont non nuls.

b) Résolution

Pour résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $ax+by=c$, on calculer le $PGCD(a,b)$.
Posons que $PGCD(a,b)=d$, on distingue deux cas :
▷ Premier cas : si d ne divise pas c
alors l'équation n'admet pas de solution.
▷ Deuxième cas : si d divise c
alors l'équation admet des solutions.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes : $(E): 12x+21y=2$ et $(E'): 45x-28y=1$

Solution

Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes : (E) et (E').
▷ Pour $(E): 12x+21y=2$
Calculons le $PGCD(12,21)$.
On a : $PGCD(12,21)=3$
Comme 3 ne divise pas 2, alors cette équation n'admet pas de solution.
D'où $S=\{\}$
▷ Pour $(E'): 45x-28y=1$
Calculons le $PGCD(45,28)$.
On a : $PGCD(45,28)=1$
Comme $PGCD(45,21)$ divise 1, l'équation admet des solutions
▷ Résolution de l'équation $(E'_0): 45x-28y=0$
$45x-28y=0 \Longrightarrow 45x=28y$
$45/28y$, comme $PGCD(45,28)=1$, donc d'après le théorème de Gauss $45/y$ donc il existe un entier relatif k tel que $y=45k$.
$45x=28y \Longrightarrow 45x=28\times 45k \Longrightarrow x=28k$.
La solution de l'équation (E'_0) est $(28k,45k)$; $k\in\mathbb{Z}$.
▷ Solution particulière de l'équation (E')
$45=28\times 1+17$
$28=17\times 1+11$
$17=11\times 1+6$
$11=6\times 1+5$
$6=5\times 1+1$
On a : $45(5)-28(8)=1$
La solution particulière de (E') est $(x_0;y_0)=(5,8)$.
▷ Solution générale
$45x-28y=1$ et $45(5)-28(8)=1 \Longrightarrow 28k=x-5$ et $45k=y-8$
D'où $S=\{(5+28k;8+45k);k\in\mathbb{Z}\}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

9.1.7 Plus petit commun multiple

a) Définition

Soit a et b deux entiers non nuls.
On appelle plus petit commun multiple de a et b noté $PPCM(a,b)$ ou $a \vee b$ le plus petit élément strictement positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

Exemple

$PPCM(7,8) = 56$

b) Propriétés

Soit a, b et k trois entiers relatifs non nuls.

p_1) $PPCM(a,b) = PPCM(b,a)$.

p_2) $PPCM(ka,kb) = |k|PPCM(a,b)$.

p_3) $PPCM(a,b) \times PGCD(a,b) = |a \times b|$.

9.1.8 Nombres premiers

a) Définition

Un nombre premier est un entier naturel qui admet deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 19 ; 23 ; 31 ; 37 sont des nombres premiers.

b) Théorèmes

T_1) Il existe une infinité de nombres premiers.

T_2) Tout entier naturel a supérieur ou égal à 2, admet au moins un diviseur premier.

T_3) Tout entier naturel a supérieur ou égal à 2 et non premier, admet au moins un diviseur premier p tel que : $2 \leq p \leq \sqrt{a}$.

T_4) Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2, alors il existe une famille de nombres premiers p_1, p_2, p_3,..., p_n et une famille d'entiers naturels α_1, α_2, α_3,..., α_n tels que : $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_n^{\alpha_n}$ avec $p_1 < p_2 < ... < p_n$.
On dit que a est décomposé en produit de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique.

Exemple

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$.

c) Nombre de diviseurs

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2 admettant pour décomposition en facteurs premiers ; on désigne par N le nombre de diviseurs positifs de a.
$N = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times (\alpha_3 + 1) \times ... \times (\alpha_n + 1)$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exemple

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$.
Déterminons le nombre de diviseurs positifs de 720
On a : $N = (4+1)(2+1)(1+1) = 30$

d) Diviseurs positifs d'un entier relatif

Les diviseurs positifs d'un entiers relatif a sont les termes de la somme, du développement du produit :
$S = \left(p_1^0 + p_1^1 + ... + p_1^{\alpha_1}\right) \times \left(p_2^0 + p_2^1 + ... + p_2^{\alpha_2}\right) \times ... \times \left(p_k^0 + p_k^1 + ... + p_k^{\alpha_k}\right)$.

Exercice

On donne $A = 72$

1. Décomposer A en produit de facteurs premiers.
2. Quel est le nombre de diviseurs positifs de A ?
3. Déterminer l'ensemble de diviseurs positifs de A.

Remarque

On dit que deux nombres sont amis si la somme des diviseurs positifs autres que lui-même de chacun de ces deux nombres est égale à l'autre nombre.

Exercice

Soit deux entiers relatifs α et β définis par : $\alpha = 220$ et $\beta = 284$.

1. Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de α et β.
2. Montrer que α et β sont amis.

e) PGCD et PPCM Connaissant la décomposition

Soit a et b deux entiers supérieurs ou égal à 2 tels que :
$a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_n^{\alpha_n}$ et $b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ... \times p_n^{\beta_n}$ avec $p_1 < p_2 < ... < p_n$.
$\triangleright$ $PGCD(a,b) = p_1^{\gamma_1} \times p_2^{\gamma_2} \times ... \times p_n^{\gamma_n}$ où $\gamma_i = min(\alpha_i, \beta_i)$.
$\triangleright$ $PPCM(a,b) = p_1^{\delta_1} \times p_2^{\delta_2} \times ... \times p_n^{\delta_n}$ où $\delta_i = max(\alpha_i, \beta_i)$.

9.2 Congruence modulo n avec $n \in \mathbb{N}$

9.2.1 Définition

Soit n un entier naturel non nul, a et b deux entiers relatifs.
On dit que a est congru à b modulo n si et seulement si a et b ont le même reste dans leurs divisions euclidienne par n ou si $a - b$ est un multiple de n.
On écrit $a \equiv b[n]$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

9.2.2 Propriétés

Soit n un entier naturel non nul, a, b et c trois entiers relatifs.

$P_1)$ $a \equiv a[n]$.

$P_2)$ Si $a \equiv b[n]$, alors $b \equiv a[n]$.

$P_3)$ Si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$, alors $a \equiv c[n]$.

$P_4)$ Soit a' un entier relatif, r et r' les restes respectifs de la division euclidienne de a et a' par n.
On a : $a \equiv a'[n] \Leftrightarrow r = r'$.

$P_{(5)})$ Si $a \equiv a'[n]$ et $b \equiv b'[n]$, alors
- ▷ $ab \equiv a'b'[n]$;
- ▷ $a + b \equiv a' + b'[n]$;
- ▷ $a^k \equiv a'^k[n]$ où $b' \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$.

9.2.3 Ordre modulo n

Définition

Soit n et a deux entiers naturels non nuls tel que a non divisible par n.
On appelle ordre de a modulo n, le plus petit entier naturel non nul k tel que $a^k \equiv 1[n]$.

Exemple

2 est l'ordre modulo 5 de 2004, car $2004^2 \equiv 1[5]$.

9.2.4 Petit théorème de Fermat

Si a est un entier naturel et p un nombre premier, alors $a^p \equiv a[p]$.
Si de plus a et p sont premiers entre eux, c'est-à-dire $PGCD(a, p) = 1$, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$

Application

Exercice 1

Trouver le reste le reste de la division euclidienne de $(2004)^{2020}$ par 5.

Exercice 2

1. Vérifier que 999 est divisible par 27.
2. En déduire que pour tout entier naturel n, $10^{3n} \equiv 1[27]$.
3. On donne $\alpha = 10^{100} + 100^{10}$. Quel est le reste de la division euclidienne de α par 27.
4. Comment faut-il choisir n pour que $\beta_n = 2^n - 1$ soit divisible par 9 ?

Exercice 3

On donne $B_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que B_n est divisible par 7.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de B_{2020} par 7.
3. (a) Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division de 5^n par 7.
   (b) En déduire le reste de la division de 5^{2020} et 5^{2021} par 7.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice 4

Étant donné deux entiers a et b et un entier naturel n non nuls.

1. (a) Démontrer que si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$, alors $ac \equiv bd[n]$.
   (b) En déduire que pour tout entier k, $a^k \equiv b^k[n]$.
2. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
   (a) Quel est l'ordre modulo 7 de 5 et de 4 ?
   (b) Montrer que $a^6 - 1$ est divisible par 7.
   (c) Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1[7]$.
   (d) En déduire que k divise 6.
3. On donne $A_n = 4^n + 5^n$. Montrer que $A_{2020} \equiv 6[7]$.

9.3 Ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

9.3.1 Classe de congruence modulo

Définition

Soit n un entier naturel non nul et x un entier relatif strictement inférieur à n.
La classe de congruence de x modulo n est l'ensemble des entiers relatifs a tels que : $a \equiv x[n]$.
On le note $\dot{x} = \{a \in \mathbb{Z}/a \equiv x[n]\}$.
$\dot{x} = \{a \in \mathbb{Z}/a = nk + x; k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemple

1. La classe de congruence de 2 modulo 5 est :
   $\dot{2} = \{a \in \mathbb{Z}/a \equiv 2[5]\}$.
   $\dot{2} = \{...., -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, ...\}$.
2. La classe de congruence de 3 modulo 4 est :
   $\dot{3} = \{a \in \mathbb{Z}/a \equiv 3[4]\}$.
   $\dot{3} = \{...., -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, ...\}$.

9.3.2 Définition de l'ensemble quotient

L'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes de congruences modulo n.
On a : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\dot{0}; \dot{1}; \dot{2}; ...; \dot{\widehat{n-1}}\right\}$.

9.3.3 Opérations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

a) Addition

Soit $\dot{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\dot{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
On a : $\dot{a} + \dot{b} = \dot{\widehat{a+b}}$.

b) Multiplication

Soit $\dot{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\dot{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
On a : $\dot{a} \times \dot{b} = \dot{\widehat{a \times b}}$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Application

Exercice

1. Définir l'ensemble $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Donner la table d'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
   (a) le système suivant : $\begin{cases} \dot{2}x + y = \dot{1} \\ \dot{3}x + \dot{2}y = \dot{0} \end{cases}$
   (b) Les équations suivantes : $\dot{3}x + \dot{2} = \dot{3}$ et $x^2 - \dot{3}x + \dot{2} = \dot{0}$.

9.4 Équations modulaires

9.4.1 Inverse modulo n

Définition

Soit a un entier relatif non nul et n un entier naturel.
On appelle inverse modulo n de a l'entier relatif a' tel que $a \times a' \equiv 1[n]$.
On le note $a' \equiv a^{-1}[n]$.

Exemple

$2 \times 3 \equiv 1[5]$
Donc l'inverse de 2 modulo 5 est 3
$3 \equiv 2^{-1}[5]$.

9.4.2 Recherche de l'inverse

Théorème

Un entier a est inversible modulo n, si et seulement si a et n sont premiers entre eux.

9.4.3 Application

$aa' \equiv 1[n] \Leftrightarrow aa' = 1 + kn \Leftrightarrow aa' - kn = 1\,;\ k \in \mathbb{Z}$
On se sert de l'algorithme d'Euclide.

Exemple

Trouver l'inverse module 55 de 24.

Solution

Trouvons l'inverse module 55 de 24.
Soit a' l'inverse l'inverse module 55 de 24, c'est-à-dire $24a' \equiv 1[55]$ ou $a' \equiv 24^{-1}[55]$.
Comme 55 et 24 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $55u + 24v = 1$
D'après l'algorithme d'Euclide, on a :
$55 = 24 \times 2 + 7 \Longrightarrow 7 = 55 - 24 \times 2$ (1)

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

$24 = 7 \times 3 + 3 \Longrightarrow 3 = 24 - 7 \times 3$ (2)
$7 = 3 \times 2 + 1 \Longrightarrow 7 - 3 \times 2 = 1$ (3)
(1) et (2) dans (3) ; $55 - 24 \times 2 - 2 \times (24 - 7 \times 3) = 1$
$55 - 24 \times 4 + 7 \times 6) = 1 \Longrightarrow 55 - 24(4) + 55(6) - 24(12) = 1$
$24(-16) = 1 - 55(7) \Longrightarrow 24(-16) \equiv 1[55] \Longrightarrow 24^{-1}[55] = -16$
Ou
$-16 \equiv 39[55] \Longrightarrow 24^{-1}[55] = 39$
D'où $a' = 39$

9.5 Équations linéaires modulo n

9.5.1 Définition

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle équation linéaire modulo n, toute expression de la forme $ax \equiv b[n]$ où a et b sont des entiers et x l'inconnue.

9.5.2 Résolution

Pour résoudre l'équation $ax \equiv b[n]$, on distingue deux cas :
▷ Premier cas : si a et n sont premiers entre eux
On a : $ax \equiv b[n] \Longrightarrow x = a^{-1}b[n]$
La solution de cette équation est $x = a^{-1}b + kn, k \in \mathbb{Z}$ où a^{-1} est l'inverse module n de a.
▷ Deuxième cas : si a et n ne sont pas premiers entre eux
Posons $PGCD(a,n) = d$;
• Si d divise b, il existe des entiers a', b' et n' tels que : $a = a'd$; $b = b'd$ et $n = n'd$.
L'équation devient
$a'dx \equiv b'd[dn'] \Longrightarrow a'x \equiv b'[n']$.
On se ramène au cas précèdent.
• Si d ne divise pas b, alors l'équation n'a pas des solutions.

9.5.3 Application

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes : $(E) : 5x \equiv 3[7]$ et $(E') : 60x \equiv 36[144]$

Solution

Résolvons dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes : $(E) : 5x \equiv 3[7]$ et $(E') : 60x \equiv 36[144]$
▷ Pour $(E) : 5x \equiv 3[7]$
Cherchons le $PGCD(5,7)$
On a : $PGCD(7,5) = 1$, alors 5 et 7 sont premiers entre eux
Cherchons l'inverse modulo 7 de 5
On a :

x	0	1	2	3	4	5	6
$5x$	0	5	3	1	6	4	2

On a : $5^{-1}[7] = 3$
$x \equiv 3 \times 3[7]$
$x \equiv 9[7]$
$x \equiv 2[7]$
D'où $S = \{2 + 7k; k \in \mathbb{Z}\}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

▷ Pour $(E'): 60x \equiv 36[144]$
Cherchons le $PGCD(60, 144)$
On a : $PGCD(60, 144) = 12$
Comme 12 divise 36, alors l'équation devient : $5x \equiv 3[12]$
Cherchons l'inverse modulo 12 de 5
On a : $5^{-1}[12] = 5$
$x \equiv 3 \times 5[12]$
$x \equiv 15[12]$
$x \equiv 3[12]$
D'où $S = \{3 + 12k; k \in \mathbb{Z}\}$

9.6 Système d'équations linéaires modulo n

9.6.1 Définition

Soit n_1, n_2,..., n_p des entiers supérieurs à 2, deux à deux premiers entres eux.
On appelle système d'équations linéaires modulo n tout système de congruence de la forme

$$(S): \begin{cases} x \equiv a_1[n_1] \\ x \equiv a_2[n_2] \\ \vdots \\ x \equiv a_p[n_p] \end{cases} \quad \text{où } x \in \mathbb{Z} \text{ est l'inconnue.}$$

9.6.2 Résolution

a) Méthode de substitution

Pratique d'un exemple

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant $\begin{cases} 2x \equiv 1[5] \\ 3x \equiv 2[7] \end{cases}$

Solution

Résolvons dans $\mathbb{Z}$ le système suivant $\begin{cases} 2x \equiv 1[5] \\ 3x \equiv 2[7] \end{cases}$
Transformons le système
▷ $2x \equiv 1[5]$
Cherchons l'inverse modulo 5 de 2
On a : $2^{-1}[5] = 3$
$2x \equiv 1[5] \Longrightarrow x \equiv 3[5]$
▷ $3x \equiv 2[7]$
Cherchons l'inverse modulo 7 de 3
On a : $3^{-1}[7] = 5$
$3x \equiv 2[7] \Longrightarrow x \equiv 10[7] \Longrightarrow x \equiv 3[7]$
Le système devient : $\begin{cases} x \equiv 3[5] \ (1) \\ x \equiv 3[7] \ (2) \end{cases}$
(1) $x \equiv 3[5] \Leftrightarrow x = 3 + 5p$, $p \in \mathbb{Z}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

(2) $x \equiv 3[7] \Leftrightarrow x = 3 + 7q,\ q \in \mathbb{Z}$
On a : $3 + 5p = 3 + 7q \Longrightarrow 5p = 7q$
Or $PGCD(5;7) = 1$, d'après le théorème de Gauss ; 5 divise q
5 divise $q \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $q = 5k$
(2) $x = 3 + 7(5k) \Longrightarrow x = 3 + 35k$
D'où $S = \{3 + 35k; k \in \mathbb{Z}\}$

b) Méthode des restes chinois

Le système (S) admet une solution x_0 modulo N tel que : $x_0 = \left(\sum_{i=1}^{p} a_i N_i y_i\right)[N]$
où $N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_p$; $N_i = \dfrac{N}{n_i}$ et $y_i = N_i^{-1}[n_i]$.

Pratique d'un exemple

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant $\begin{cases} 2x \equiv 1[5] \\ 3x \equiv 2[7] \end{cases}$

Solution

Résolvons dans $\mathbb{Z}$ le système suivant $\begin{cases} 2x \equiv 1[5] \\ 3x \equiv 2[7] \end{cases}$
Transformons le système
▷ $2x \equiv 1[5]$
Cherchons l'inverse modulo 5 de 2
On a : $2^{-1}[5] = 3$
$2x \equiv 1[5] \Longrightarrow x \equiv 3[5]$
▷ $3x \equiv 2[7]$
Cherchons l'inverse modulo 7 de 3
On a : $3^{-1}[7] = 5$
$3x \equiv 2[7] \Longrightarrow x \equiv 10[7] \Longrightarrow x \equiv 3[7]$
Le système devient : $\begin{cases} x \equiv 3[5]\ (1) \\ x \equiv 3[7]\ (2) \end{cases}$
$N = 5 \times 7 = 35$
$N_1 = \dfrac{N}{n_1} = \dfrac{35}{5} = 7$
$N_2 = \dfrac{N}{n_2} = \dfrac{35}{7} = 5$
$y_1 = N_1^{-1}[n_1] = 7^{-1}[5] \Longrightarrow y_1 = 3$
$y_2 = N_2^{-1}[n_2] = 5^{-1}[7] \Longrightarrow y_2 = 3$
$x_0 = \left(\sum_{i=1}^{2} a_i N_i y_i\right)[N] \Longrightarrow x_0 = (3 \times 7 \times 3) + (3 \times 5 \times 3)[35]$
$x_0 = 108[35]$
$x_0 = 3[35] \Longrightarrow x_0 = 3 + 35k,\ k \in \mathbb{Z}$
D'où $S = \{3 + 35k; k \in \mathbb{Z}\}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

9.7 Autres systèmes d'équations

Systèmes de types $\begin{cases} \text{PGCD}(x,y)=\alpha \\ x+y=\beta \end{cases}$; $\begin{cases} \text{PPCM}(x,y)=\alpha' \\ x\times y=\beta' \end{cases}$ ou $\begin{cases} \text{PPCM}(x,y)=\alpha'' \\ x+y=\beta'' \end{cases}$

Application

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivantes :
(S_1) : $\begin{cases} \text{PPCM}(x,y)=168 \\ x\times y=1008 \end{cases}$; (S_2) : $\begin{cases} \text{PGCD}(x,y)=354 \\ x+y=5664 \end{cases}$; (S_3) : $\begin{cases} \text{PPCM}(x,y)=504 \\ x+y=135 \end{cases}$ et
(S_4) : $\begin{cases} \text{PGCD}(x,y)=42 \\ \text{PPCM}(x,y)=1680 \end{cases}$

9.8 Systèmes de numérotations

9.8.1 Définition

Un système de numérotation est une manière de représenter un entier naturel.
On distingue :
▷ Le système de numérotation binaire ou système de base 2, l'ensemble de chiffres utilisés est $\{0:1\}$;
▷ Le système de numérotation décimal ou système de base 10, l'ensemble de chiffres utilisés est $\{0:1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$;
▷ Le système de numérotation hexadécimal ou système de base 16, l'ensemble de chiffres utilisés est $\{0:1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$ ou $\{0:1;2;3;4;5;6;7;8;9;A;B;C;D;E;F\}$ avec $A;B;C;D;E;F$ représentent respectivement 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 et 15.

9.8.2 Propriété

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Tous entier naturel non nul x peut s'écrire de façon unique $x=\sum_{k=0}^{n} a_k b^k$ où a_k sont des entiers tels que $0\leq a_k<b$ et $a_n\neq 0$.
On note alors $x=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}...a_1 a_0}^b$.
Cette écriture est appelée écriture de x en base b.

Remarque

Par convention, les écritures sans " barre " sont en base 10.

9.8.3 Changement de base de numérotation

a) Passage de la base décimal en base a

Exercice

Écrire les nombres 87 et 1337 en base 2.

b) Passage de la base a en base 10

Exercice

Écrire les nombres $\overline{10100111001}^2$ et $\overline{1010111}^2$ en base 10.

c) Passage de la base 10 en base 16

Exercice

Écrire le nombre suivant 64206 en base 16.

EXERCICES D'APPLICATIONS

Exercice 1

Soit l'équation $(E): 109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Déterminer le $PGCD(109; 226)$. Que peut-on en déduire pour (E).
2. (a) Vérifier que le couple $(141; 68)$ est une solution particulière de (E).
   (b) En déduire la solution générale de l'équation (E).
3. Dans la suite, A est l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 226.
   Pour tout $a \in A$, f et g sont deux fonctions définies de la manière suivante : f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227 et g le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.
   (a) Vérifier que $g[f(0)] = 0$.
   (b) Montrer que 227 est un nombre premier.
   (c) En déduire que pour $a \neq 0$, $a^{226} \equiv 1[227]$.
4. En déduire que pour $a \neq 0$, $g[f(a)] = a$.

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E): 148x - 97y = 1$.

1. Énoncer le théorème de Bézout.
2. a) Montrer que $(-19, -29)$ est une solution particulière de (E).
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E).
3. a) Déterminer l'inverse modulo 148 de l'entier naturel 97.
   b) Prouver que 149 est un nombre premier.
   c) Soit p un entier naturel non nul tel que : $p \leq 148$.
   Montrer, en utilisant le petit théorème de Fermat que : $p^{148} \equiv 1[149]$.
4. Soit $a \in \{2, 3, 4, ..., 148\}$. On pose $S(a) = 1 + a + a^2 + ... + a^{147}$.
   a) Montrer que a^{148} et $a - 1$ sont premier entre eux.
   b) Montrer que 149 divise $S(a)$.

Exercice 3

1. a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ?
   b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ?
   c) En déduire que $6^{40} \equiv 1[11]$ et que $6^{40} \equiv 1[5]$.
   d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.
2. Soit (S) et (S') deux systèmes définis par : $(S) : \begin{cases} a \equiv 3[65] \\ a \equiv 4[40] \end{cases}$ et $(S') : \begin{cases} b \equiv 3[17] \\ b \equiv 4[40] \end{cases}$
   (a) Montrer que les systèmes (S) et (S') sont équivalents respectivement aux équations $(E) : 65x - 40y = 1$ et $(E') : 17x - 40y = 1$ avec $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
   (b) Montrer que l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.
   (c) Montrer que l'équation (E') admet au moyen une solution dans $\mathbb{Z}^2$.
3. (a) Montrer que l'équation (E') est équivalente à l'équation $(E'') : 17x \equiv 1[40]$.
   (b) Donner l'inverse modulo 40 de 17.
   (c) En déduire les solutions de l'équation de (E'').
   (d) Déterminer les solutions de l'équation (E').

Exercice 4

On considère l'équation $(E) : 24x + 36y = 60$; où x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer le $PGCD$ de 24 et 36, puis simplifier l'équation (E).
2. Trouver une solution évidente pour l'équation (E) et résoudre cette équation. On appellera S l'ensemble des couples (x, y) solutions de l'équation (E).
3. Énumérer tous les couples de S tels que $-10 \leq x \leq 10$.
4. Donner ceux parmi eux, pour lesquels x et y sont multiples de 5.

Exercice 5

1. Trouver tous les diviseurs positifs de 21.
2. Trouver tous les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que : $a^2 - b^2 = 21$

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un, on considère les nombres a et b définis par : $a = 2n + 3$ et $b = 5n - 2$.

1. Montrer que tout diviseur de a et b est diviseur de 19.
2. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les entiers naturels n pour lesquels $PGCD(a; b) = 19$.

Exercice 7

1. Déterminer les diviseurs positifs de 85.
2. On considère dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système d'équations (S) suivant : $(S) : \begin{cases} x^2 - y^2 = 5440 \\ \text{PGCD}(x, y) = 8 \end{cases}$
   (a) Montrer que qu'il existe deux entiers naturels a et b premiers entre eux tels que le système (S) soit équivalent au système (S') : $(S) : \begin{cases} a^2 - b^2 = 85 \\ \text{PGCD}(a, b) = 1 \end{cases}$.
   (b) Résoudre le système (S').
   (c) En déduire les couples $(x; y)$, solution de système (S).

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice 8

Dans tout l'exercice, x et y désignent des entiers naturels non nuls avec $x < y$.
S est l'ensemble des couples (x, y) tels que $PGCD(x; y) = y - x$.

1. (a) Calculer le plus grand commun diviseur de 363 et 484.

   (b) Le couple $(363; 484)$ appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel non nul. Le couple $(n; n+1)$ appartient-il à S ? Justifier votre réponse.

3. (a) Démontrer que $(x; y)$ appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel non nul k tel que $\begin{cases} x = k(y-x) \\ y = (k+1)(y-x) \end{cases}$.

   (b) En déduire que $PPCM(x; y) = k(k+1)(y-x)$.

4. (a) Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

   (b) En déduire l'ensemble des couples $(x; y)$ de S tels que $PPCM(x; y) = 228$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Chapitre 10

ALGÈBRES LINÉAIRES

10.1 Structure d'un espace vectoriel

10.1.1 Définition

On dit qu'un ensemble E non vide est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si E est muni de deux lois : une loi de composition interne notée $(+)$ appelée addition et l'autre de composition externe notée $(\bullet)$ appelée multiplication : vérifiant les propriétés suivantes :

$\triangleright$ **Addition** : $\begin{cases} E \times E & \longrightarrow E \\ (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) & \longmapsto \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \end{cases}$

1. Associativité : $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E;\ (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.
2. Élément neutre : $\forall\ \overrightarrow{u} \in E,\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{O} = \overrightarrow{O} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
3. Élément symétrique ou opposé : $\forall \overrightarrow{v} \in E, \exists\, \overrightarrow{v}'$ tel que $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}' = \overrightarrow{v}' + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{O}$
4. Commutativité : $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E;\ \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$.

N.B : Ces propriétés font de $(E, +)$ un groupe commutatif ou Abélien.

$\triangleright$ **Multiplication** : $\begin{cases} \mathbb{R} \times E & \longrightarrow E \\ (\lambda, \overrightarrow{w}) & \longmapsto \lambda \overrightarrow{w} \end{cases}$

5. Associativité : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{v} \in E, \lambda(\mu \overrightarrow{v}) = (\lambda\mu)\, \overrightarrow{v}$
6. Élément neutre : $\forall \in E, 1.\, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$
7. Distributivité (1) : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \overrightarrow{v} \in E$; $(\lambda + \mu)\, \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{v}$
8. Distributivité (2) : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E$; $\lambda(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda \overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{w}$

Remarque

Les éléments d'un espace vectoriel sont des vecteurs et ceux de $\mathbb{R}$ sont des scalaires.

Exemples d'espaces vectoriels

1. $(\mathbb{R}^n, +, \bullet)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   $\triangleright$ Si $n = 2$; $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$ est le plan vectoriel.
   $\triangleright$ Si $n = 3$; $(\mathbb{R}^3, +, \bullet)$ c'est l'espace.

2. $(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\bullet)$ est un espace vectoriel avec $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions numériques à variable réelle.
3. $(\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R});+;\bullet)$ est un espace vectoriel avec $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$, l'ensemble des suites numériques.

10.1.2 Règles de calcul dans un espace vectoriel

1. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\ a \in E$; $\lambda \dot{.} a = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $a = \overrightarrow{0}$.
2. $\forall\ (a;b;c) \in E^3$; $a+c = b+c \Longleftrightarrow a = b$.
3. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\ a \in E$; $(-\lambda)a = \lambda(-a) = -(\lambda a)$.

10.2 Sous espace vectoriel

10.2.1 Définition

Soit $(E;+;\bullet)$ un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E.
On dit que F est un sous espace-vectoriel de E si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. F est non vide ; c'est-à-dire $F \neq \emptyset$;
2. $\forall\ (a;b) \in F^2$; $a+b \in F$ (stabilité de la loi $(+)$).
3. $\forall\ a \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; $\lambda a \in F$ (stabilité de la loi $(\bullet)$).

Remarques

Soit $(E;+;\bullet)$ un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E.
▷ Pour démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E, on peut aussi vérifier les conditions suivantes :

1. $F \neq \emptyset$;
2. $\forall\ (a;b) \in F^2$, $\forall\ (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$; $\alpha a + \beta b \in F$.

▷ Pour montrer que F est non vide, on peut montrer que l'élément neutre de la loi $(E,+)$ est contenu dans F

Exercice

1. On donne l'ensemble D défini par : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y = 0\}$
   Montrer que l'ensemble D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. On donne l'ensemble P défini par : $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 3z = 0\}$.
   Montrer que l'ensemble P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution

1. Montrons que l'ensemble (D) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
   ▷ $\overrightarrow{O}(0,0) \in D$ car $0+0 = 0$
   D'où D est non vide
   ▷ Soit $\overrightarrow{u}(x,y) \in D$ et $\overrightarrow{u'}(x',y') \in D$
   On a : $(x+x') + (y+y') = (x+y) + (x'+y') = 0$
   Donc $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in D$, D est stable par l'addition
   ▷ Soit $\overrightarrow{u}(x,y) \in D$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $\lambda x + \lambda y = \lambda(x+y) = 0 \Longrightarrow \lambda \overrightarrow{u} \in D$, D est stable par la multiplication par un scalaire.
   Par conséquent est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

10.2.2 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E

Définition

On appelle somme de F et G, et on note $F+G$, l'espace engendré par la famille des vecteurs de $F \cup G$ défini par : $F+G=\{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}/\overrightarrow{u}\in F, \overrightarrow{v}\in G\}$

10.2.3 Intersection, somme directe de deux sous-espaces

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition

L'intersection de F et G est l'ensemble défini par : $F\cap G=\{\overrightarrow{u}\in E/\overrightarrow{u}\in F \text{ et } \overrightarrow{u}\in G\}$.

Remarque

- ▷ Si $F\cap G=\{\overrightarrow{O}\}$, alors la somme est dite directe et on note : $F\oplus G$.
- ▷ Si $F\oplus G=E$, on dit que F et G sont **supplémentaires** dans E.

Théorème

- ▷ La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.
- ▷ L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E

10.2.4 Combinaison linéaire

Définition

Soit $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$, $\overrightarrow{u}_3$,..., $\overrightarrow{u}_n$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle combinaison linéaire de n éléments de E, tout élément de E qui s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{u}=\lambda_1\overrightarrow{u}_1+\lambda_2\overrightarrow{u}_2+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{u}_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{u}_i$$ où les λ_i sont des scalaires et les $\overrightarrow{u}_i$ sont des vecteurs.

Exemple

$\overrightarrow{u}=5\overrightarrow{v}-7\overrightarrow{w}$.
$\overrightarrow{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Exercice

Soit $\overrightarrow{u}(2;3)$; $\overrightarrow{v}(1;-2)$ et $\overrightarrow{w}(2;1)$ trois vecteurs du plan. Montrer que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

10.3 Famille des vecteurs

Soit E un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

10.3.1 Famille libre ou linéairement indépendant

Soit $F = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_n}\}$ une famille de n vecteurs.
F est libre si et seulement si la combinaison de ces vecteurs est nulle avec les coefficients tous nuls, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u}_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0$

Exercice

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^2$ définis par : $\overrightarrow{u}(-1; 1)$, $\overrightarrow{v}(3; 2)$
Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille libre.

Solution
Il s'agit de montrer que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$

$$\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}-\alpha + 3\beta = 0\\ \alpha + 2\beta = 0\end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Donc la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est libre

10.3.2 Famille liée ou linéairement dépendante

Soit $F = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_n}\}$ une famille de n vecteurs.
F est liée si elle n'est pas libre, c'est-à-dire une combinaison peut-être nulle avec de coefficients non tous nuls.
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u}_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i \neq 0$

Propriété

Une famille de vecteurs est liée si un vecteur de la famille est une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$, on donne dans la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ trois vecteurs $\overrightarrow{u}(-4; 1; 2)$; $\overrightarrow{v}(8; -2; -4)$.
On pose $F = \{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\}$ une famille de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Montrer que F est liée.

Propriétés

Si le déterminant de la famille F est calculable alors ;
▷ F est libre si et seulement si dét$F \neq 0$.
▷ F est liée si et seulement si dét$F = 0$.

Exercice

Soit $F = \{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}\}$ une famille de trois vecteurs tels que : $\overrightarrow{u}(1; 2; -1)$, $\overrightarrow{v}(0; 2; 1)$ et $\overrightarrow{w}(-1; 0; 3)$. Montrer que F est une famille libre.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

10.3.3 Famille génératrice

Soit $F = \{\overrightarrow{u}_1; \overrightarrow{u}_2; \overrightarrow{u}_3; ...; \overrightarrow{u}_p\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E ($E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$ ou $E = \mathbb{R}^4$) où $\overrightarrow{\alpha}_1; \overrightarrow{\alpha}_2; \overrightarrow{\alpha}_3; ...; \overrightarrow{\alpha}_p$ sont des nombres réels.
F est dite famille génératrice de E si tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}_1; \overrightarrow{u}_2; \overrightarrow{u}_3; ...; \overrightarrow{u}_p$ c'est-à-dire $\overrightarrow{u} = \alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{u}_2 + \alpha_3 \overrightarrow{u}_3 + ... + \alpha_p \overrightarrow{u}_p$; $p \in \mathbb{N}^*$.

Exemples

- ▷ Dans $\mathbb{R}^2$; on a : $\overrightarrow{u} = 5\,\overrightarrow{i} - 7\,\overrightarrow{j}$ où $\overrightarrow{i}(1;0)$ et $\overrightarrow{j}(0;1)$.
- ▷ Dans $\mathbb{R}^3$; on a : $\overrightarrow{u} = 6\,\overrightarrow{i} - 17\,\overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k}$ où $\overrightarrow{i}(1,0,0)$; $\overrightarrow{j}(0,1,0)$ et $\overrightarrow{k}(0,0,1)$.

Exercice

Dans $\mathbb{R}^2$ on donne dans la base canonique $(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j})$ deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que $\overrightarrow{u} = -\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = 2\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j}$. On pose $E = \{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\}$ une famille de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Montrer que E est génératrice.

10.4 Base et dimension

10.4.1 Base d'un espace vectoriel

Définition

On appelle base d'un espace vectoriel E toute famille de vecteur qui est à la fois libre et génératrice.
Une base est un $n-uplet$ de vecteur notée $\beta = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; ...; \overrightarrow{e_n})$

Propriété

- ▷ Si $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_n}\}$ est une base de E, alors tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E s'écrit de la manière unique $\overrightarrow{u} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{u_n}$.
- ▷ Si le déterminant de la famille F est calculable, alors F est une base si et seulement si dét$F \neq 0$.

10.4.2 Dimension d'un espace vectoriel

Définition

On appelle dimension d'un espace vectoriel E, le nombre de vecteurs contenus dans sa base. On note $\dim(E)$.

Remarques

Soit E un espace vectoriel.
▷ Si E se réduit à un singleton $\{\overrightarrow{0_E}\}$ alors $\dim(E) = 0$.
▷ L'équation d'une droite vectorielle dans le plan est de la forme $ax + by = 0$.
Dans l'espace elle est de la forme $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.
▷ Si $\dim(E) = 2$ ainsi E est appelé plan vectoriel.
▷ Si $\dim(E) = 3$ ainsi E est un espace vectoriel.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Propriétés de la dimension

Soit E un espace vectoriel.
▹ Si E est un espace vectoriel de dimension n alors toute famille libre a au plus n éléments.
▹ Si E est un espace vectoriel de dimension n toute famille libre a n éléments génératrice donc une base de E.
▹ Si E est un espace vectoriel de dimension n, toute famille génératrice a n éléments est libre donc une base de E.

Théorèmes

- ▹ Tout espace vectoriel admet une infinité de base ayant le même nombre d'éléments vecteurs.
- ▹ Tout vecteur d'un espace vectoriel E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs de base de E.

Exercice

Montrer que la famille $B = \{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}\}$ où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$; $\overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

10.5 Sous-espaces supplémentaires

Soit F et G les sous espaces vectoriels de E. F et G sont dits supplémentaires de E si

$$\begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{\overrightarrow{O}_E\} \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} dimF + dimG = dimE \\ F \cap G = \{\overrightarrow{O}_E\} \end{cases}$$

Exercice

Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites vectorielles du plan $(\mathscr{P})$ engendrées par les vecteurs respectifs $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

1. Déterminer les équations cartésiennes des droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.
2. Montrer que $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont supplémentaires.

10.6 APPLICATIONS LINÉAIRES

10.6.1 Définition

Soit E et F deux sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
Une application f de E dans F est dite linéaire si et seulement si :
▹ $\forall\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$; $f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})$.
▹ $\forall\ \overrightarrow{u} \in E$; $\lambda \in \mathbb{R}$; $f(\lambda \overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u})$.

10.6.2 Définition équivalente

Une application f de E dans F est linéaire si et seulement si :
$\forall\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$; $\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$; on a : $f(\alpha \overrightarrow{u}, \beta \overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + \beta f(\overrightarrow{v})$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

10.6.3 Vocabulaire

a) Homomorphisme

Un homomorphisme est une application linéaire de E dans F.

b) Isomorphisme

Un isomorphisme est une application linéaire bijective de E dans F.

c) Endomorphisme

Un endomorphisme est une application linéaire de E dans E. $(E = F)$

d) Automorphisme

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

Remarque

L'endomorphisme f de E est un automorphisme involutif si : $f \circ f = Id_E$

Exercice 1

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x; x + y)$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Solution de l'exercice 1

Montrons que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Il s'agit de montrer que f est linéaire.
Soit $\overrightarrow{u}(x; y) \in \mathbb{R}^2$; $\overrightarrow{v}(a; b) \in \mathbb{R}^2$; $\alpha \in \mathbb{R}$; $\beta \in \mathbb{R}$
f est linéaire $\Longleftrightarrow f(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + \beta f(\overrightarrow{v})$.
$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}(\alpha x + \beta a; \alpha y + \beta b)$
On a :
$f(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = f(\alpha x + \beta a; \alpha y + \beta b)$
$f(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = (\alpha x + \beta a; \alpha x + \beta a + \alpha y + \beta b)$
$f(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = (\alpha x; \alpha x + \alpha y) + (\beta a; \beta a + \beta b) = \alpha(x; x + y) + \beta(a; a + b)$
$f(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + \beta f(\overrightarrow{v}) \Longrightarrow f$ est linéaire
Conclusion : Comme f est linéaire et de plus f est définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, alors f est un endomorphisme.

10.6.4 Matrice d'une application linéaire

a) Définition

Soit f une application linéaire définie de E vers F, muni d'une base $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$.
On appelle matrice d'une application linéaire f relativement à la base B, la matrice dont les

colonnes sont constituées des composantes des vecteurs $f(\overrightarrow{e_1})$, $f(\overrightarrow{e_2})$,..., $f(\overrightarrow{e_n})$ dons cet ordre c'est-à-dire si $\begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} \\ f(\overrightarrow{e_2}) = a'\overrightarrow{e_1} + b'\overrightarrow{e_2} + c'\overrightarrow{e_3} \\ f(\overrightarrow{e_3}) = a''\overrightarrow{e_1} + b''\overrightarrow{e_2} + c''\overrightarrow{e_3} \end{cases}$, alors la matrice M de f est $M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^2$, muni d'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$; l'endomorphisme f tel que : $\begin{cases} f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} \\ f(\overrightarrow{j}) = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} \end{cases}$
a pour matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}^3$, muni d'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$; on considère l'endomorphisme f définie par :
$\begin{cases} f(\overrightarrow{i}) = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} \end{cases}$ la matrice de f est : $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Matrice carrée

Soit f un endomorphisme de E et M sa matrice.
▷ M est une matrice carrée si le nombre de ses colonnes est égal au nombre de ses lignes.
▷ Si M est une matrice carrée, alors f est bijectif si et seulement si dét$M \neq 0$.

c) Produit des matrices

Soit M et N deux matrices.
Le produit des matrices M et N noté $M \times N$ est possible que si le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N.
Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix}$; alors $M \times N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$

d) Produit d'une matrice par un réel λ

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice et λ un réel.
On a : $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$

e) Addition de deux matrices

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices ; on a :
$M + N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

f) matrice unitaire ou identité

Une matrice est dite unitaire lorsque sur sa diagonale principale on ne trouve que des un (1) et de part et d'autre on a des zéros.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemples

▷ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice identité d'ordre 2.

▷ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice identité d'ordre 3.

10.6.5 Expression analytique d'une application linéaire

Soit f une application linéaire définie de E vers F.
Soit $\overrightarrow{u}'$ l'image d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ par f.
Écrire l'expression analytique de f, revient à écrire les coordonnées de $\overrightarrow{u}'$ en fonction de celle de $\overrightarrow{u}$, en utilisant la relation $\overrightarrow{u}' = f(\overrightarrow{u})$; c'est-à-dire soit f une application linéaire telle que
$\begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} \\ f(\overrightarrow{e_2}) = a'\overrightarrow{e_1} + b'\overrightarrow{e_2} + c'\overrightarrow{e_3} \\ f(\overrightarrow{e_3}) = a''\overrightarrow{e_1} + b''\overrightarrow{e_2} + c''\overrightarrow{e_3} \end{cases}$; $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ et $\overrightarrow{u}' = x'\overrightarrow{e_1} + y'\overrightarrow{e_2} + z'\overrightarrow{e_3}$.
On a :

$$f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}' \Longleftrightarrow xf(\overrightarrow{e_1}) + yf(\overrightarrow{e_2}) + zf(\overrightarrow{e_3}) = x'\overrightarrow{e_1} + y'\overrightarrow{e_2} + z'\overrightarrow{e_3}$$
$$\Longrightarrow x'\overrightarrow{e_1} + y'\overrightarrow{e_2} + z'\overrightarrow{e_3} = (ax + a'y + a''z)\overrightarrow{e_1} + (bx + b'y + b''z)\overrightarrow{e_2} + (cx + c'y + c''z)\overrightarrow{e_3}$$

Par identification ; on a : $f : \begin{cases} x' = ax + a'y + a''z \\ y' = bx + b'y + b''z \\ z' = cx + c'y + c''z \end{cases}$ C'est l'expression analytique de f

Exercice

Soit f un endomorphisme de E muni de sa base canonique $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$
tel que $f(\overrightarrow{i}) = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $f(\overrightarrow{j}) = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$. Déterminer l'expression analytique de f.

Solution de l'exercice

Déterminons l'expression analytique de f.
Soit $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{u'} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$ son image par f.
Posons $\overrightarrow{u'} = f(\overrightarrow{u})$
On a : $x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} = xf(\overrightarrow{i}) + yf(\overrightarrow{j})$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

$x'\overrightarrow{i}+y'\overrightarrow{j}=(-x+3y)\overrightarrow{i}+(x+4y)\overrightarrow{j}$

Par identification, on a : $\begin{cases} x'=-x+3y \\ y'=x+4y \end{cases}$

10.6.6 Noyau et Image d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application linéaire de E vers F.

a) Noyau d'une application linéaire f

On appelle noyau de f noté $Kerf$, l'ensemble de vecteurs $\overrightarrow{u}$ de E qui ont pour image le vecteur $\overrightarrow{O}$ de F.

On a : $Kerf=\left\{\overrightarrow{u}\in E/f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{O}_F\right\}$

b) Image d'une application linéaire f

On appelle Image de f noté Imf, l'ensemble de vecteurs $\overrightarrow{u'}$ de F qui ont au moins un antécédent $\overrightarrow{u}$ de E.

On a : $Imf=\{\overrightarrow{u}'\in F/f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}'\}$

Théorème

Soit f une application linéaire de E dans F. Le noyau et l'image de f sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E. On a : $dimKerf+dimImf=dimE$.

Remarques

- Si f est injective, alors $Kerf=\left\{\overrightarrow{O}\right\}\Longrightarrow dimKerf=0$.
- Si f est surjective, alors $Imf=F\Longrightarrow dimImf=dimE$

Exercice

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'endomorphisme f définie analytiquement par : $f:\begin{cases} x'=x+y \\ y'=2x+2y \end{cases}$

1. Déterminer le noyau de f et en donner une base $\overrightarrow{\mathrm{e}}$.
2. Déterminer l'image de f et en donner une base $\overrightarrow{\mathrm{e}'}$.

Solution de l'exercice 1

1. Déterminons le noyau de f et en donnons une base $\overrightarrow{\mathrm{e}}$.
   $Kerf=\left\{\overrightarrow{u}\in E/f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{O}\right\}$
   Posons $x'=0$ et $y'=0$
   $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases}\Longrightarrow x+y=0$
   Le noyau de f est une droite vectorielle d'équation $x+y=0$ engendrée par
   $\overrightarrow{\mathrm{e}}=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

2. Déterminons l'image de f et en donnons une base $\overrightarrow{e'}$.
   $Imf = \left\{ \overrightarrow{u'} \in F / f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'} \right\}$
   $\begin{cases} x + y = x' \\ 2x + 2y = y' \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + 2y = 2x' \\ -2x - 2y = -y' \end{cases} \implies 2x' - y' = 0$
   L'image de f est une droite vectorielle d'équation $2x - y = 0$ engendrée par $\overrightarrow{e'} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.

10.6.7 Ensemble des vecteurs invariants par une application linéaire

On appelle vecteur invariant par un endomorphisme f, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E tel que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$.
On a : $Invf = \{ \overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \}$

10.7 Applications linéaires particulières

10.7.1 Projection vectorielle

a) Définition

Une application linéaire f de E dans F est une projection vectorielle si et seulement si $f \circ f = f$ ou $M_f \times M_f = M_f$ où M_f est la matrice de l'application linéaire f.

b) Éléments caractéristiques

Toute projection vectorielle se caractérise par :
▷ La base : Ensemble des vecteurs invariants par f
On a : $B = \{ \overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \}$
▷ La direction : L'ensemble des vecteurs qui ont pour image le vecteur nul.
On a : $D = \left\{ \overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{O} \right\}$

10.7.2 Symétrie vectorielle

a) Définition

Une application linéaire f de E dans F est une symétrie vectorielle si et seulement si $f \circ f = Id_E$ ou $M_f \times M_f = I_d$.

b) Éléments caractéristiques

Toute symétrie vectorielle se caractérise par :
▷ La base : Ensemble des vecteurs invariants par f
On a : $B = \{ \overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \}$
▷ La direction : L'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé.
On a : $D = \{ \overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u} \}$

Remarques

Soit f une application linéaire définie analytiquement.

▷ f est une projection vectorielle si : $\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \end{cases}$ (en base 2) ou $\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \\ z'' = z' \end{cases}$ (en base 3)

▷ f est une symétrie vectorielle si : $\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases}$ (en base 2) ou $\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \\ z'' = z \end{cases}$ (en base 3)

Exercices d'applications

Exercice 1

L'espace vectoriel E est muni d'une base $B = (\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$.

Soit g un endomorphisme défini analytiquement par : $\begin{cases} x' = 5x + 10y \\ y' = -2x - 4y \end{cases}$

1. (a) Exprimer le vecteurs $g(\overrightarrow{i})$ et $g(\overrightarrow{j})$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
   (b) Déterminer la matrice M de l'endomorphisme g dans la base $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j})$. .
   (c) g est-il un automorphisme de E ?
2. (a) Calculer $g \circ g(\overrightarrow{i})$ et $g \circ g(\overrightarrow{j})$.
   (b) En déduire la nature de l'endomorphisme g.
   (c) Déterminer les éléments caractéristiques de g.
3. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.
   (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base de E.
   (b) Exprimer $g(\overrightarrow{u})$ et $g(\overrightarrow{v})$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
   (c) Donner la matrice P de g dans la base $(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

***Exercice* 2**

L'espace vectoriel E est muni d'une base $B = \left\{ \overrightarrow{i} ; \overrightarrow{j} \right\}$.

On considère l'endomorphisme f de E tel que : $f \circ f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}$ et $f(\overrightarrow{i}) = -2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

1. (a) Qu'appelle-t-on dimension d'un espace vectoriel E ?
   (b) Donner la dimension de l'espace vectoriel E notée dim$E$.
   (c) Qu'appelle-t-on automorphisme ?
2. (a) Exprimer le vecteur $f(\overrightarrow{j})$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
   (b) Déterminer $f \circ f(\overrightarrow{j})$ puis en déduire la nature de l'endomorphisme f.
3. Soit $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{u'} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$ deux vecteurs de l'espace E tel que : $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'}$.
   (a) Montrer que l'expression analytique de l'endomorphisme f est : $\begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$
   (b) En déduire la matrice M de l'endomorphisme f.
   (c) Vérifier que f est un automorphisme.
   (d) Déterminer les éléments caractéristiques de f.
4. On considère les vecteurs $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
   (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base de E.
   (b) Exprimer $f(\overrightarrow{v})$ et $f(\overrightarrow{w})$ en fonction de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.
   (c) Donner la nouvelle matrice M' de f dans la base $(\overrightarrow{v};\overrightarrow{w})$.

***Exercice* 3**

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f : \begin{cases} x' = -2x + y + z \\ y' = x - 2y + z \\ z' = x + y - 2z \end{cases}$

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de f et en déduire une base $\overrightarrow{e_1}$.
3. Déterminer l'image de f et en déduire une base $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$.
4. (a) Montrer que $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice de f dans la base B.
5. Montrer que $Kerf$ et Imf sont deux sous-espace vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

***Exercice* 4**

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u_1}(1,1,0,0)$; $\overrightarrow{u_2}(0,1,1,0)$ et $\overrightarrow{u_3}(0,0,1,1)$.

1. Démontrer que la famille $F = \{\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_3}\}$ est une famille libre.
2. Soit $\overrightarrow{v}(x,y,z,t$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$, on suppose que $\overrightarrow{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$; $\overrightarrow{u_2}$; $\overrightarrow{u_3}$. Trouver une relation entre les réels x, y, z et t.
3. Soit $\overrightarrow{w}(1,-1,1,3)$. Déduire de la relation obtenue au 2. que $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$; $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$.
4. Déterminer les réels a, b et c tels que : $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u}_1 + b\overrightarrow{u}_2 + c\overrightarrow{u}_3$.

***Exercice* 5**

Sot $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base du plan vectoriel E, f désigne l'endomorphisme de E tel que $\begin{cases} f(\overrightarrow{i}) = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) \\ f(\overrightarrow{j}) = \dfrac{3}{4}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}). \end{cases}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

1. Donner la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
2. Déterminer l'expression analytique de f.
3. Déterminer le noyau de f et en donner une base $\overrightarrow{e}_1$.
4. Déterminer l'image de f et en donner une base $\overrightarrow{e}_2$.
5. Déterminer l'ensemble des vecteur invariant par f et en donner une base $\overrightarrow{e}_3$.
6. (a) Montrer que $B' = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ est une base de E.
   (b) Quelle est la matrice de f dans la base B' ?
7. (a) Calculer $f \circ f(\overrightarrow{i})$ puis en déduire la nature de f.
   (b) Caractériser l'endomorphisme f.

<u>Exercice</u> 6

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 muni de sa base canonique $B = (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u} = 5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ et f un endomorphisme de E tels que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ et $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.

1. (a) Montrer que $B' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de E.
   (b) En déduire la matrice P de f dans cette base.
   (c) Montrer que dans cette base f est un automorphisme.
2. (a) Déterminer $f(\overrightarrow{i})$ et $f(\overrightarrow{j})$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
   (b) Déterminer la matrice M de l'endomorphisme f.
   (c) Déterminer l'expression analytique de l'endomorphisme f.
3. (a) Calculer $f \circ f(\overrightarrow{j})$.
   (b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

Solution de l'exercice 1

1. (a) Exprimons $g(\overrightarrow{i})$ et $g(\overrightarrow{j})$ en fonction de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
   On a : $\overrightarrow{u'} = g(\overrightarrow{u}) \Longrightarrow x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} = xg(\overrightarrow{i}) + yg(\overrightarrow{j})$
   $(5\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j})x + (10\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j})y = xg(\overrightarrow{i}) + yg(\overrightarrow{j})$
   Par identification, on a : $g(\overrightarrow{i}) = 5\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ et $g(\overrightarrow{j}) = 10\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$
   (b) Déterminons la matrice M de l'endomorphisme g.
   On a : $M = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$
   (c) g n'est pas un automorphisme car $détM_g = 0$
2. (a) Calculons $g \circ g(\overrightarrow{i})$ et $g \circ g(\overrightarrow{j})$.
   On a : $g \circ g(\overrightarrow{i}) = g(\overrightarrow{i})$ et $g \circ g(\overrightarrow{j}) = g(\overrightarrow{j})$
   (b) Nature de l'endomorphisme g.
   Comment $g \circ g = g$, alors g est une projection vectorielle.
   (c) Déterminons les éléments caractéristiques de g.
   ▷ Base de g
   En posant $x' = x$ et $y' = y$, on trouve : $2x + 5y = 0$
   D'où la base g est une droite vectorielle d'équation $2x + 5y = 0$ engendrée par $\overrightarrow{\mathrm{e}} = -5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.
   ▷ Direction de g
   En posant $x' = 0$ et $y' = 0$, on trouve : $x + 2y = 0$
   D'où la direction g est une droite vectorielle d'équation $x + 2y = 0$ engendrée par $\overrightarrow{\mathrm{e}}' = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

3. On donne $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.
   (a) Montrons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base.
   Comment $dét(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 1 \neq 0$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base.
   (b) Exprimons $g(\overrightarrow{u})$ et $g(\overrightarrow{v})$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
   On a : $g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{O}$ et $g(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$.
   (c) Donnons la matrice P de g.
   On a : $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 2

1. (a) On appelle dimension d'un espace vectoriel E, le nombre d'éléments contenus dans une de ses bases.
   (b) Donnons la dimension de l'espace E.
   On a : $dimE = 2$.
   (c) On appelle automorphisme tout endomorphisme bijectif.
2. (a) Calculons $f(\overrightarrow{j})$ en fonction de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
   On a : $f \circ f(\overrightarrow{i}) = -2f(\overrightarrow{i}) - f(\overrightarrow{j}) \Longrightarrow f(\overrightarrow{j}) = -2f(\overrightarrow{i}) - f \circ f(\overrightarrow{i})$
   D'où $f(\overrightarrow{j}) = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.
   (b) Déterminons $f \circ f(\overrightarrow{j})$ puis déduisons la nature de f.
   $f \circ f(\overrightarrow{j}) = 3f(\overrightarrow{i}) + 2f(\overrightarrow{j}) = 3(-2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) + 2(3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{j}$
   D'où $f \circ f(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{j}$.
   f est une symétrie vectorielle.
3. (a) Montrons que l'expression analytique de f est : $\begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$
   $x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} = xf(\overrightarrow{i}) + yf(\overrightarrow{j}) \Longrightarrow x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} = (-2x + 3y)\overrightarrow{i} + (-x + 2y)\overrightarrow{j}$
   Par identification, on a : $\begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$
   (b) Déduisons-en la matrice de f
   On a : $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
   (c) vérifions que f est un automorphisme.
   Comme $détM = -1$, alors f est un automorphisme.
   (d) Déterminons les éléments caractéristiques de f.
   ▷ Base de f
   En posant $x' = x$ et $y' = y$, on trouve : $x - y = 0$
   D'où la base f est une droite vectorielle d'équation $x - y = 0$ engendrée par $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
   ▷ Direction de f
   En posant $x' = -x$ et $y' = -y$, on trouve : $x - 3y = 0$
   D'où la direction f est une droite vectorielle d'équation $x - 3y = 0$ engendrée par $\overrightarrow{e}' = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
4. On donne $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
   (a) Montrons que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base.
   Comment $dét(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -1 \neq 0$, alors $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

(b) Exprimons $f(\overrightarrow{v})$ et $f(\overrightarrow{w})$ en fonction de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.
On a : $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ et $f(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}$.

(c) Donnons la nouvelle matrice M' de f.
On a : $M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 3

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f : \begin{cases} x' = -2x + y + z \\ y' = x - 2y + z \\ z' = x + y - 2z \end{cases}$

1. Écrivons la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On a : $M_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

2. Déterminons le noyau une base $\overrightarrow{e_1}$.
Soit $\overrightarrow{u} \in Kerf$, alors $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{O}$
On a : $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \ (1) \\ x - 2y + z = 0 \ (2) \\ x + y - 2z = 0 \ (3) \end{cases}$
$(1) + 2 \times (2) : y - z = 0 \Longrightarrow y = z \ (4)$
$(1) + 2 \times (3) : y - z = 0 \Longrightarrow y = z \ (5)$
$(2) \ x = 2y - z \ (6)$
(4) dans (6), $x = y = z$
Le noyau de f est la droite vectorielle d'équation $x = y = z$ engendrée par $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

3. Déterminons l'image et une base $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$.
Soit $\overrightarrow{u}' \in Imf$, alors $\overrightarrow{u}' = f(\overrightarrow{u})$
On a : $\begin{cases} x' = -2x + y + z \ (1) \\ y' = x - 2y + z \ (2) \\ z' = x + y - 2z \ (3) \end{cases}$
$(1) + (2) + (3) : x' + y' + z' = 0$
L'image de f est le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$ engendrée par
$\overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$.

4. (a) Montrons que B est une base de $\mathbb{R}^3$.
On a : $det_B = 3$. Comme $det_B \neq 0$, alors B est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Matrice de f dans la base B.
On a $f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{0}$; $f(\overrightarrow{e_2}) = -3\overrightarrow{e_2}$ et $f(\overrightarrow{e_3}) = -3\overrightarrow{e_3}$
D'où $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

5. Montrons que $Kerf$ et Imf sont deux sous-espace vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
$Kerf$ et Imf sont deux sous-espace vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $dimKerf + dimImf = dim\mathbb{R}^3$ et $det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \neq 0$. Alors la décomposition est unique.
D'où $Kerf$ et Imf sont deux sous-espace vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Troisième partie

GÉOMÉTRIES

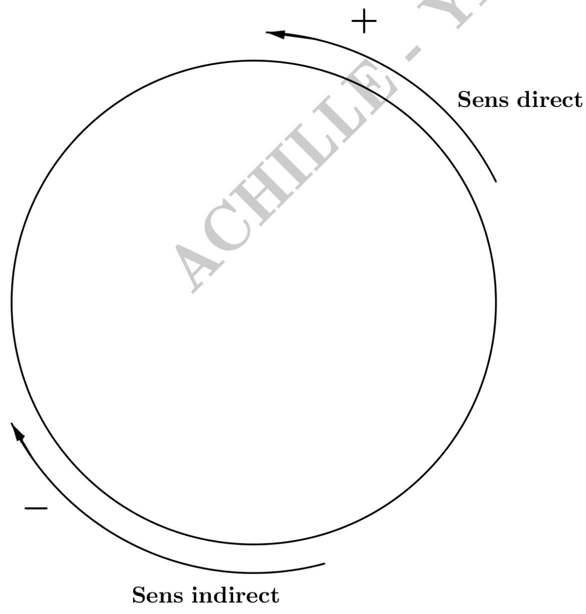
Chapitre 11

ANGLES ORIENTES

11.1 Angles orientés de vecteurs

11.1.1 Orientation du plan

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle du plan. Il existe deux sens de parcours sur le cercle $(\mathscr{C})$:
▹ le sens du mouvement des aiguilles d'une montre ;
▹ le sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre.
On appelle sens direct ou sens positif le sens contraire au mouvement des aiguilles d'une montre.
NB :
- Le sens direct est aussi appelé sens trigonométrique.
- Le sens contraire au sens direct est le sens indirect.

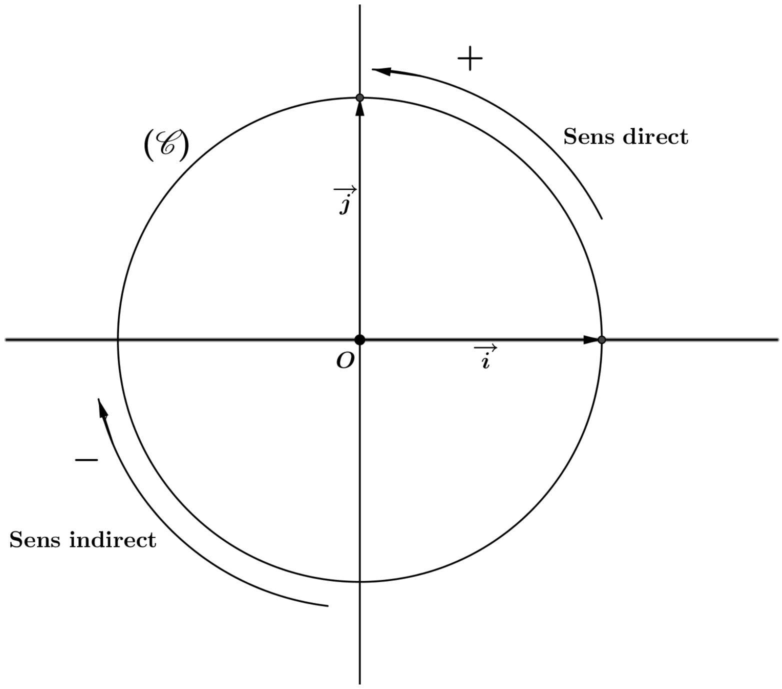


Un plan est dit orienté lorsqu'il est orienté à partir de ce choix.

11.1.2 Le cercle trigonométrique

Définition

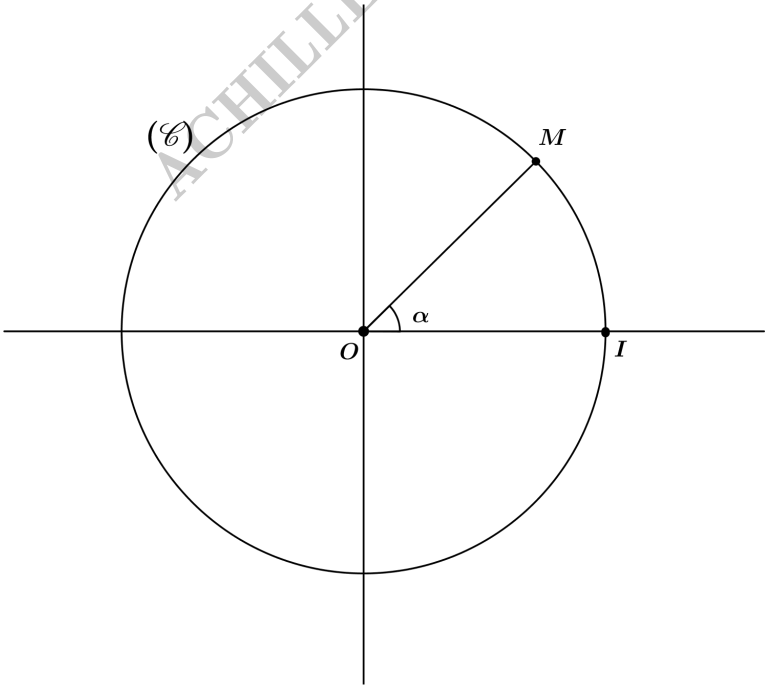
On appelle cercle trigonométrique, le cercle de centre O, de rayon 1 orienté dans le sens direct, où O est l'origine du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.



11.1.3 Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

$a)$ **Abscisse curviligne**

A tout point du cercle trigonométrique, on associe une famille de nombres réels appelés abscisses curvilignes de M.



Réciproquement

Sur un cercle trigonométrique, à tout nombre réel α exprimé en radian on associe un point M.

$b)$ **Propriété**

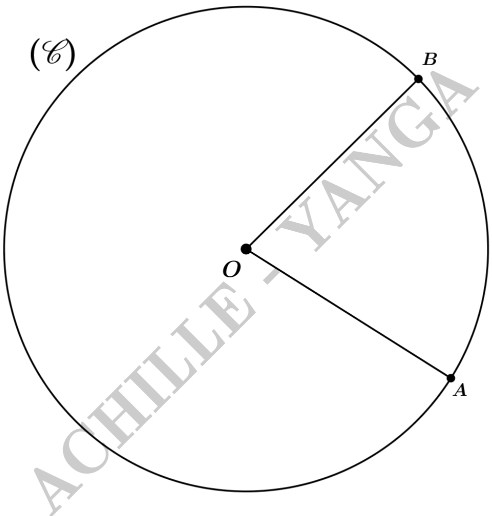
Si α est l'une de ces abscisses curvilignes, toutes les autres sont de la forme $\alpha' = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Il existe une abscisse curviligne et une seule appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
On l'appelle l'abscisse curviligne principale de M.

NB :
M est le point image de tous les réels de la forme $\alpha' = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

11.1.4 Arc orienté

$a)$ **Définition**

On appelle arc orienté d'un cercle $(\mathscr{C})$ tout couple de points de $(\mathscr{C})$. Étant donné deux points A et B du cercle $(\mathscr{C})$, l'arc orienté d'origine A et d'extrémité est noté $\overset{\frown}{AB}$.



b) Mesure d'un arc orienté

Soient A et B deux points du cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$, a et b les abscisses curvilignes respectives de A et B.
Une mesure de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est $b - a$.

c) Congruence modulo 2π

Un arc orienté a une infinité de mesures.
LA différence entre deux nombres quelconques α et β de l'arc est un multiple de 2π.
On dit que α est congru à β modulo 2π et on note $\alpha \equiv \beta[2\pi]$.
$\alpha \equiv \beta[2\pi] \Longleftrightarrow \alpha - \beta$ est un multiple de 2π c-à-d $\alpha = \beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Notation

$$\text{mes}\overset{\frown}{AB} = b - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \text{mes}\overset{\frown}{AB} = (b-a)[2\pi].$$

Exercice

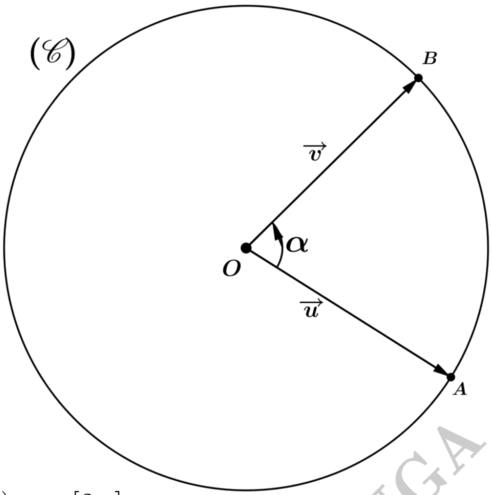
1. Placer sur le cercle trigonométrique les points $I(0)$, $J(\frac{\pi}{2})$, $I'(\pi)$, $J'(-\frac{\pi}{2})$, $A(\frac{\pi}{6})$ et $B(-\frac{\pi}{6})$.
2. Donner les mesures principales des arcs $\overset{\frown}{AJ}$, $\overset{\frown}{BJ}$, $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AI'}$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

11.1.5 Angles orienté d'un couple de vecteurs non nuls

$a)$ **Définition**

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs unitaires du plan, A et B deux points du cercle trigonométrique tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$.
On appelle angle orienté du couple de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ l'angle définit par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ tels que les mesures de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ soient celles de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.



On a : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha[2\pi]$.

NB :
La longueur de arc est $L = R\alpha$.

$b)$ **Propriétés**

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan.

- ▷ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})[2\pi]$. (angle opposé)
- ▷ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv 0[2\pi]$, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de même sens.
- ▷ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \pi[2\pi]$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de sens contraires.
- ▷ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + 2k\pi$. (Relation de Chasles)
- ▷ $(-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]$
- ▷ $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = \pi + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]$.
- ▷ $(k\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}) = \begin{cases} \pi + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi], \texttt{si } k < 0 \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi], \texttt{si } k > 0 \end{cases}$
- ▷ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0[2\pi]$

11.1.6 Mesure principale d'un angle orienté

$a)$ **Définition**

On appelle mesure principale d'un angle orienté l'unique mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

b) Détermination de la mesure principale d'un angle orienté

Toute mesure en radian θ d'un angle orienté s'écrit $\theta = \frac{a\pi}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$; $\beta \in \mathbb{N}^*$.
Notons par $\overline{\theta}$ la mesure principale de θ.
On distingue deux cas :
▷ premier cas : si $|a| < b$ alors θ est une mesure principale. On a : $\overline{\theta} = \theta$.
▷ deuxième cas : si $|a| > b$ alors θ n'est pas mesure principale.
Dans ce cas on note : $\overline{\theta} = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ avec $-\pi < \theta \leq \pi$.

Remarques

▷ $\forall n \in \mathbb{N}^*$; la mesure principale de $\theta = n\pi$ est $\begin{cases} \overline{\theta} = 0; \texttt{si } n \texttt{ est pair} \\ \overline{\theta} = \pi; \texttt{si } n \texttt{ est impair} \end{cases}$

▷ $\forall n \in \mathbb{Z}^*_-$, la mesure principale de $\theta = n\pi$ est $\begin{cases} \overline{\theta} = 0; \texttt{ si } n \texttt{ est pair} \\ \overline{\theta} = -\pi \texttt{ si } n \texttt{ est impair} \end{cases}$

▷ Pour $\theta = \frac{a\pi}{b}$, la mesure principale de θ est $\overline{\theta} = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $\frac{a}{b} > 0$; alors $k = E\left[-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{b}\right)\right]$.
- Si $a = \frac{a}{b} < 0$; alors $k = E\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{b}\right)\right]$ avec E est la partie entière.

NB : La partie entière de x est un nombre entier relatif n tel que $n \leq x \leq n+1$, elle est notée par $E(x) = n$.

Exercice 1

Déterminer la mesure principale des angles suivants : $\theta_1 = \frac{29\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{-101\pi}{9}$, $\theta_3 = 3\pi$, $\theta_4 = \frac{35\pi}{3}$, $\theta_5 = -3,5\pi$.

Exercice 2

On considère la ligne brisée A, B, C, D, E telle que :
$AB = 4cm$, $BC = 5cm$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$, $CD = 3cm$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $DE = 2cm$ et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

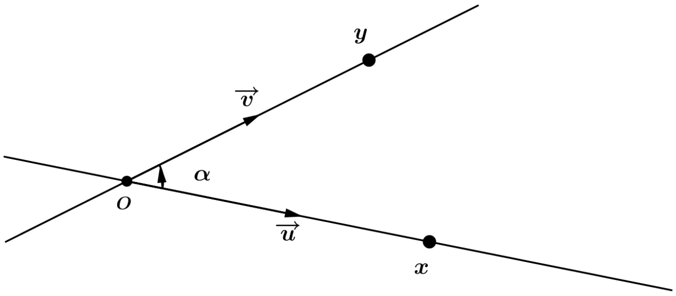
1. Construire avec soin cette ligne brisée.
2. Déterminer la mesure principale des angles $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD})$ et $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE})$.
3. Démontrer que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) \equiv -\pi[2\pi]$.
4. Que peu-on dire des :
   a) vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$?
   b) droites (AB) et (DE) ?

11.1.7 Angle Orienté d'un couple de demi-droites

$a)$ Définition

Soit $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites de même origine O, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs directeurs respectifs de $[Ox)$ et $[Oy)$.
L'angle orienté du couple de demi-droite (Ox,Oy) n'est autre que l'angle orienté des vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

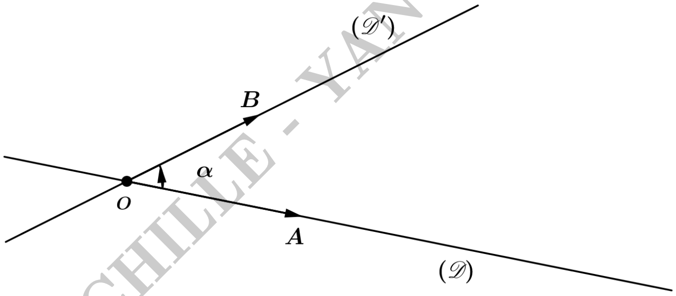
Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com



b) Mesure d'un angle des droites

Posons $(\overline{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = \alpha$. Calculons $(-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$
$(-\overline{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = (-\overline{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}}) + (\overline{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = \pi + (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \Longrightarrow (-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \pi + \alpha$.
Donc tout couple orienté $[Ox)$ et $[Oy)$ détermine deux angles orientés de vecteurs de mesures α et $\pi + \alpha$ qui ne diffèrent que de π.
$(\overline{Ox,Oy}) = \alpha + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ou $(\overline{Ox,Oy}) = \alpha[\pi]$.
Parmi toutes ces nombres de la forme $\alpha + k\pi$ une seule est comprise dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ on l'appelle mesure principale.

c) Relation entre $(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}})$ et $(\overline{OA,OB})$



▷ Si $(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \alpha[2\pi]$; alors $(\overline{OA,OB}) = \alpha[\pi]$
▷ Si $(\overline{OA,OB}) = \alpha[\pi]$, alors $(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \alpha[2\pi]$.

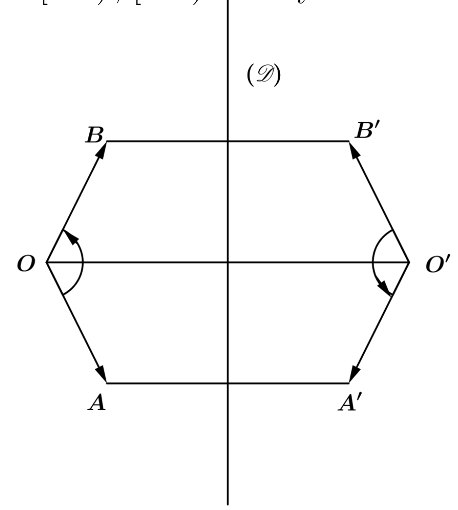
d) **propriétés**

Soient $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$, $(\mathscr{D}_3)$ et $(\mathscr{D}_4)$ quatre droites.

- ▷ $(\overline{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}) = -(\overline{\mathscr{D}_2,\mathscr{D}_1})[\pi]$.
- ▷ $(\overline{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_1}) = 0[2\pi]$.
- ▷ $(\overline{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}) = 0[\pi] \Longleftrightarrow (\mathscr{D}_1) \parallel (\mathscr{D}_2)$.
- ▷ $(\overline{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_4}) = (\overline{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}) + (\overline{\mathscr{D}_2,\mathscr{D}_4})[\pi]$. (Relation de Chasles)
- ▷ $(\overline{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2}) \equiv (\overline{\mathscr{D}_3,\mathscr{D}_4})[\pi] \Longleftrightarrow (\overline{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_3}) \equiv (\overline{\mathscr{D}_2,\mathscr{D}_4})[\pi]$.
- ▷ Si $(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{D}_2)$ et $(\mathscr{D}_3) \perp (\mathscr{D}_4)$ alors $(\overline{\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_3}) \equiv (\overline{\mathscr{D}_2,\mathscr{D}_4})[\pi]$.
- ▷ Les points A, B et C sont alignés $\Longleftrightarrow (\overline{AB,AC}) = 0[\pi]$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

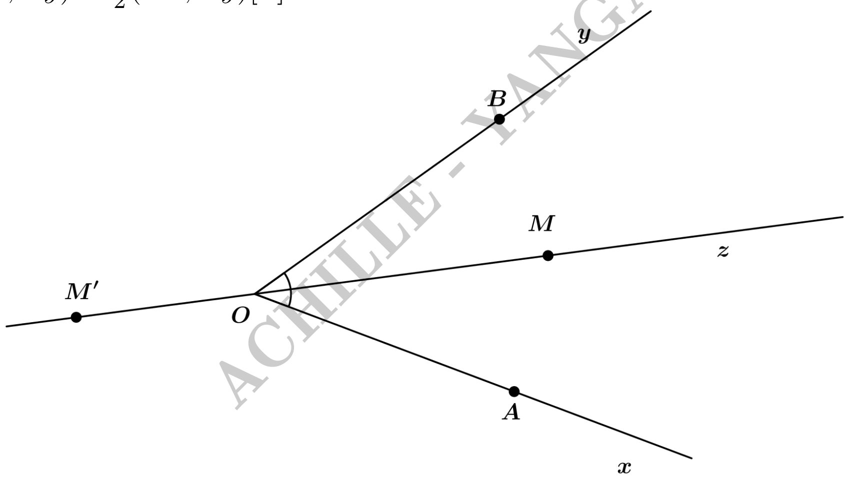
- ▷ Étant donné deux demi-droites $[OA)$; $[OB)$ et la symétrie orthogonale $S_{(\mathscr{D})}$.



$(\overline{OA,OB}) = (\overline{O'B';O'A'})[\pi]$
$(\overline{OA,OB}) = -(\overline{O'A';O'B'})[\pi]$

11.1.8 Bissectrice d'un angle de demi-droites

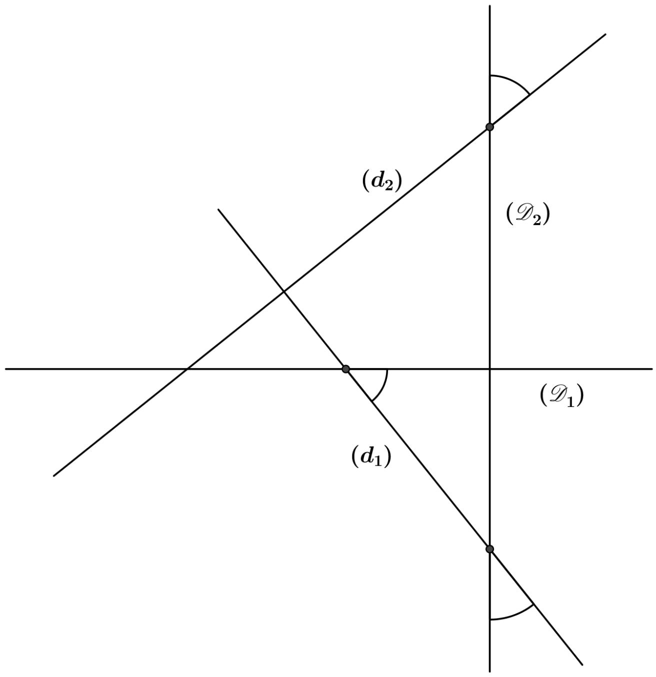
On appelle bissectrice d'un angle de demi-droite (Ox,Oy) la demi-droite $[Oz)$ telle que $(\overline{Ox,Oz}) = (\overline{Oz,Oy}) = \frac{1}{2}(\overline{Ox,Oy})[\pi]$.



Remarques

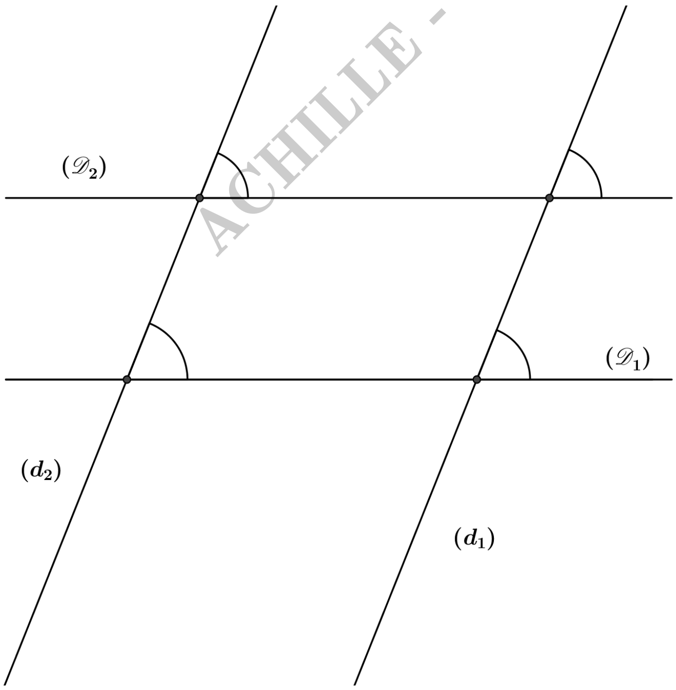
- ▷ Un point M distinct du sommet O d'un angle orienté $(\overline{OA;OB})$ appartenant à la bissectrice intérieure de cet angle $\Longleftrightarrow (\overline{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) = \frac{1}{2}(\overline{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})[2\pi]$.
- ▷ Un point M' distinct de O d'un angle orienté $(\overline{OA;OB})$ appartient à la bissectrice extérieure de cet angle $\Longleftrightarrow (\overline{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) = \dfrac{1}{2}(\overline{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}}) + \pi[2\pi]$.

11.1.9 Angle de droites côté perpendiculaires



$$\begin{cases}(\mathscr{D}_1) \perp (\mathscr{D}_2) \\ (d_1) \perp (d_2)\end{cases} \iff (\overline{\mathscr{D}_1; d_1}) \equiv (\overline{\mathscr{D}_2; d_2})[\pi]$$

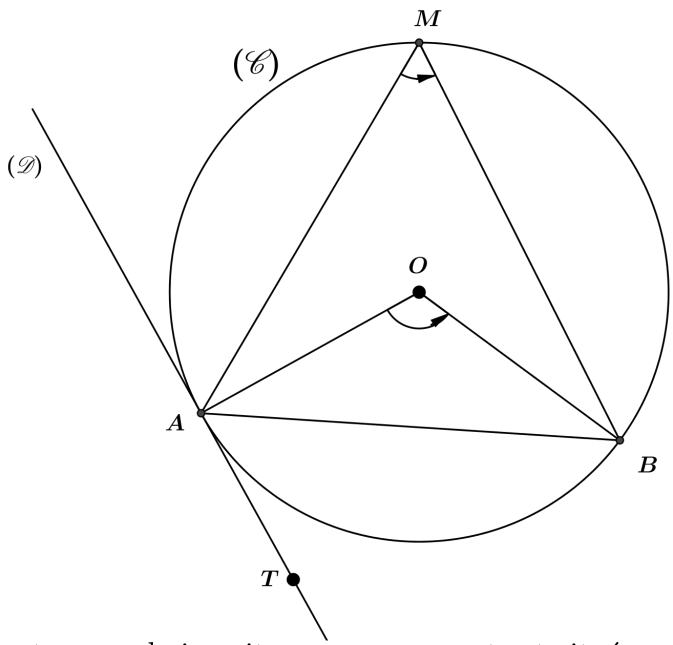
11.1.10 Angle de droites à côté parallèles



$$\begin{cases}(\mathscr{D}_1) \parallel (\mathscr{D}_2) \\ (d_1) \parallel (d_2)\end{cases} \iff (\overline{\mathscr{D}_1; d_1}) \equiv (\overline{\mathscr{D}_2; d_1})[\pi].$$

11.1.11 Angle inscrit et angle au centre

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O, A et B deux points distincts de $(\mathscr{C})$ et $M \in \mathscr{C}$ tels que : $M \neq A$ et $M \neq B$, $(\mathscr{D})$ la tangente en A au cercle $(\mathscr{C})$.



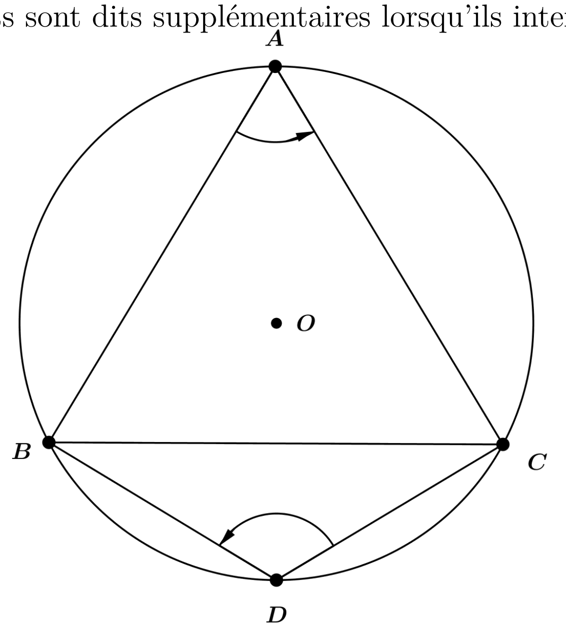
▷ $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est un angle inscrit, car son sommet est situé sur le cercle $(\mathscr{C})$.

▷ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un angle au centre, car son sommet est le centre du cercle $(\mathscr{C})$.
On a : $M \in (\mathscr{C}) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

▷ **Propriété de la tangente**
L'angle entre une tangente et une corde est égal à l'angle inscrit interceptant cette corde situé de l'autre coté, c'est-à-dire pour tout $T \in (\mathscr{D})$ distinct de A, on a :
$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]$
ou $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$.

▷ **Théorème fondamental**
Toute angle inscrit vaut la moité de l'angle au centre.

▷ **Propriétés**
- Deux angles inscrits interceptant le même arc sont égaux.
- Tout angle inscrit interceptant un diamètre est droit.
- Deux angles inscrits sont dits supplémentaires lorsqu'ils interceptent des arcs opposés.



$(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DB}) = \pi$

11.2 Points cocycliques

11.2.1 Définition

On appelle points cocycliques des points qui appartiennent à un même cercle.

11.2.2 Théorème

Quatre points A, B, C et D non alignés du plan sont cocycliques si et seulement $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{DB}\,;\overrightarrow{DC})[2\pi]$.

11.2.3 Propriétés

- ▷ Deux points distincts sont toujours cocycliques.
- ▷ Trois points distincts non alignés sont toujours cocycliques.
- ▷ Quatre points distincts A, B, C et D ne sont pas toujours cocycliques.

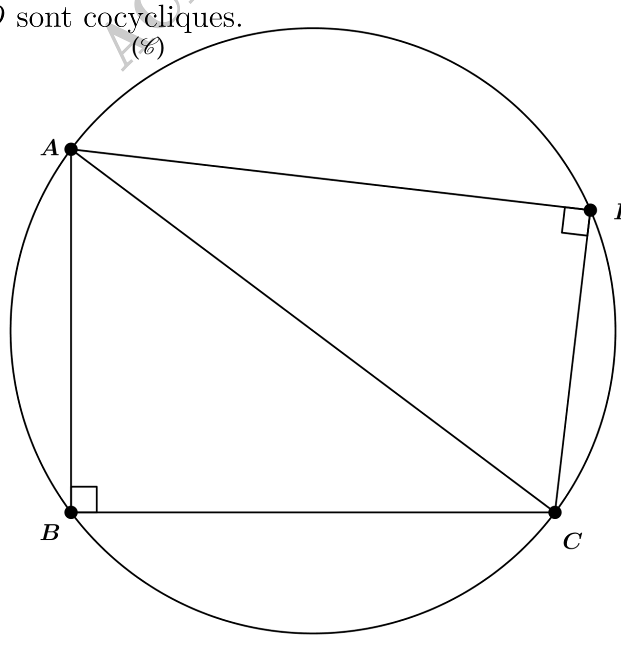
11.2.4 Points alignés

Trois points A, B et C sont alignés $\Longleftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pi[2\pi]$ ou $(\overline{AB, AC}) \equiv 0[\pi]$.

11.2.5 Configuration donnant quatre points cocycliques

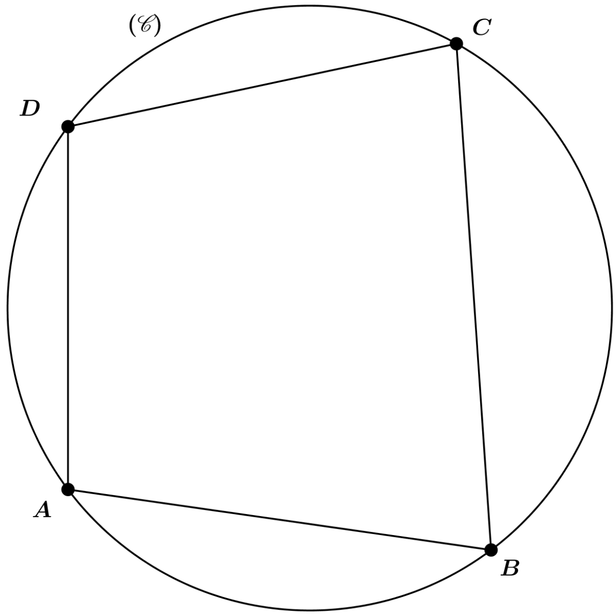
a) Deux triangles rectangles de même hypoténuse

Soit ABC et ACD deux triangles rectangles en B et D de même hypoténuse $[AC]$, alors les points A, B, C et D sont cocycliques.



b) Quadrilatères non croisé aux angles opposés supplémentaires

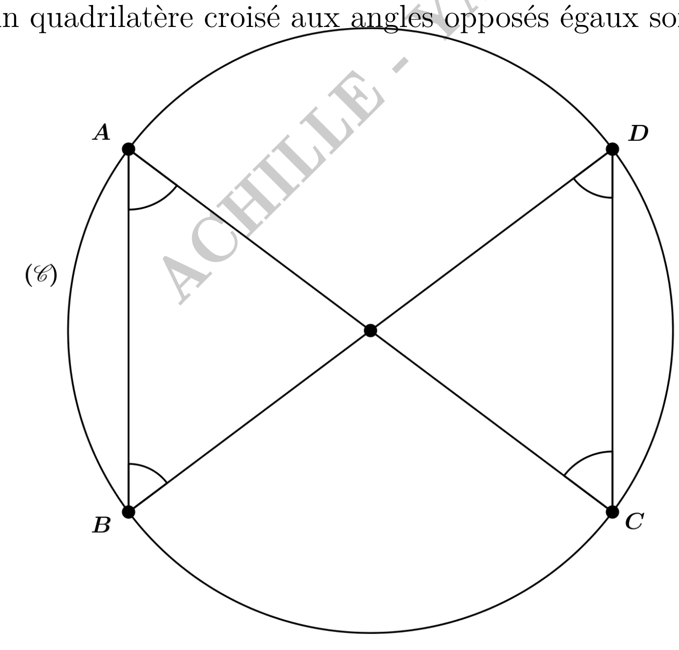
Les sommes d'un quadrilatères non croisé aux angles opposés supplémentaires sont cocycliques.



$\widehat{A}+\widehat{C}=\pi$ et $\widehat{B}+\widehat{D}=\pi$.

c) Quadrilatère croisé aux angles égaux

Les sommes d'un quadrilatère croisé aux angles opposés égaux sont cocycliques.



$\widehat{A}=\widehat{C}$ et $\widehat{B}=\widehat{D}$

Exercice 1

Deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent en A et en B. Une droite passant par A coupe $(\mathscr{C})$ en M et $(\mathscr{C}')$ en M'. Une droite passant par B coupe $(\mathscr{C})$ en N et $(\mathscr{C}')$ en N'.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice 2

Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles sécants en deux points A et B.
Soient I un point de $(\mathscr{C})$ distinct de A et de B, J un point de $(\mathscr{C}')$ distinct de A et de B, tels que I, J et A ne soient pas alignés. Une droite passant par B coupe $(\mathscr{C})$ en M et $(\mathscr{C}')$ en N.
On suppose que les droites (IM) et (JN) sont sécants en N.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que les points A, I, J et K sont cocycliques.

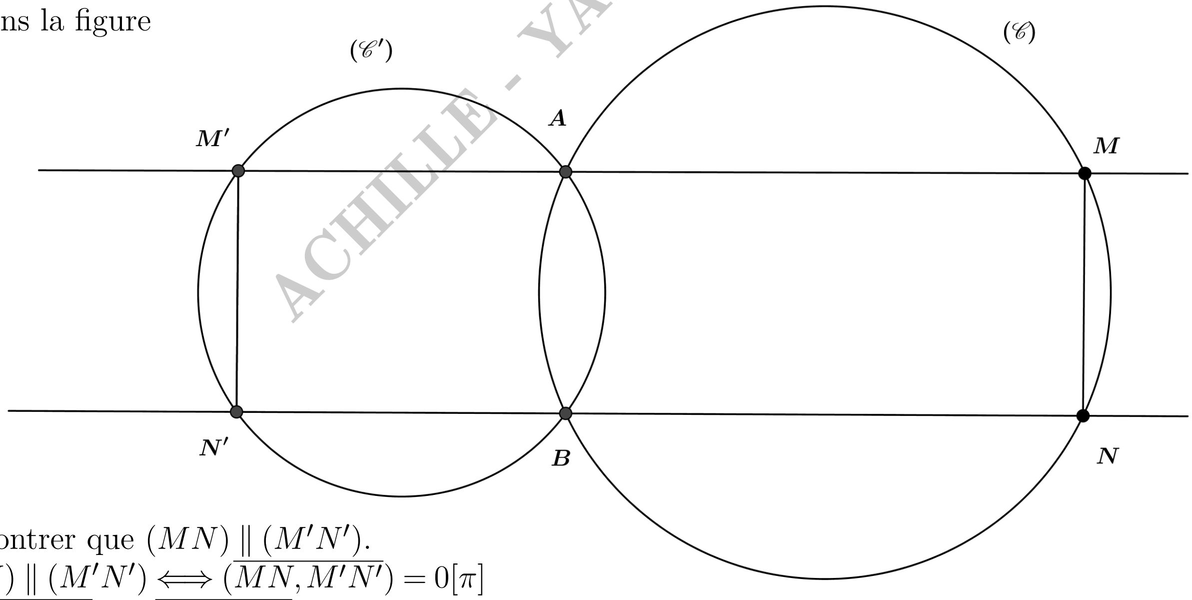
Exercice 3

Soit ABC un triangle quelconque. On désigne par A' ; B' et C' trois points appartenant respectivement aux droites (BC) ; (CA) et (AB).
Soit M le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles $BA'C'$ et $CA'B'$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que les points A, B', C' et M sont cocycliques.
3. Montrer que $(\overline{A'B', A'C'}) = (\overline{MB; MC}) + (\overline{AC, AB})[\pi]$.
4. Montrer que si A', B' et C' sont alignés, alors M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC

Solution 1

1. Faisons la figure

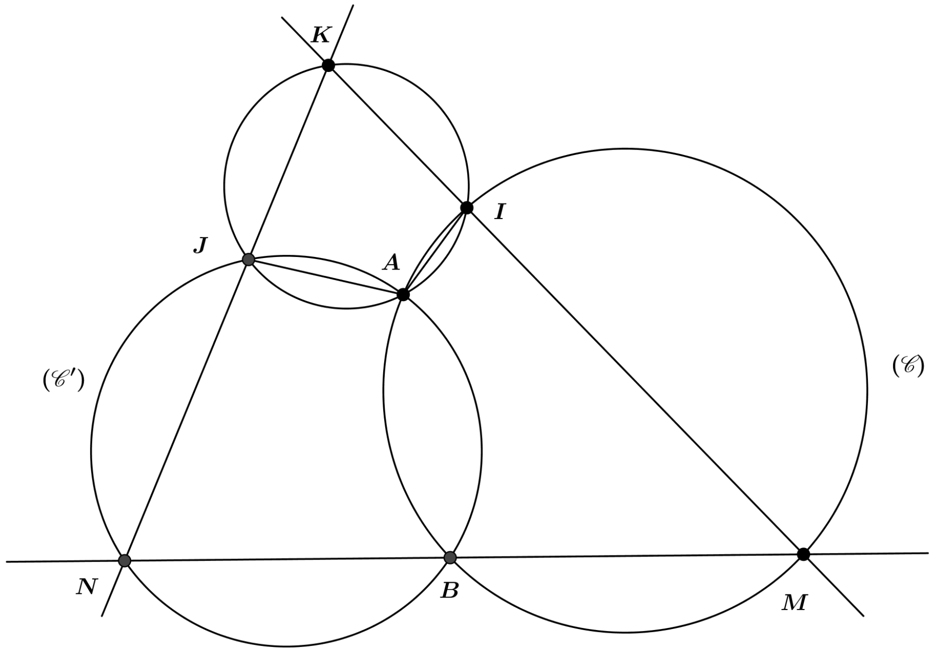


2. Démontrer que $(MN) \parallel (M'N')$.
   $(MN) \parallel (M'N') \Longleftrightarrow (\overline{MN, M'N'}) = 0[\pi]$
   $(\overline{MN, M'N'}) = (\overline{MN, NN'}) + (NN', M'N')[\pi] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}[\pi]$
   $\Longrightarrow (\overline{MN, M'N'}) = 0[\pi]$.
   D'où $(MN) \perp (M'N')$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Solution 2

1. Faisons la figure



2. Démontrons que les points A, I, J et K sont cocycliques.
   A, I, J et K cocycliques $\Longleftrightarrow (\overline{IA};\overline{IK}) = (\overline{JA};\overline{JK})[\pi]$.
   $(\overline{IA};\overline{IK}) = (\overline{IA};\overline{IM})[\pi]$ car M, I et K sont alignés.
   De même $(\overline{JA};\overline{JK}) = (\overline{JA};\overline{JN})[\pi]$ car N, J et K sont alignés.
   - Les points A, B, I et M sont cocycliques donc $(\overline{IA};\overline{IM}) = (\overline{BA};\overline{BM})[\pi]$.
   - Les A, B, J et N sont cocycliques donc $(\overline{JA};\overline{JN}) = (\overline{BA},\overline{BN})[\pi]$

     Donc $\begin{cases} (\overline{IA};\overline{IK}) = (\overline{BA};\overline{BM})[\pi] \\ (\overline{JA};\overline{JK}) = (\overline{BA},\overline{BN}[\pi]) \end{cases}$ or B, M et N sont alignés,

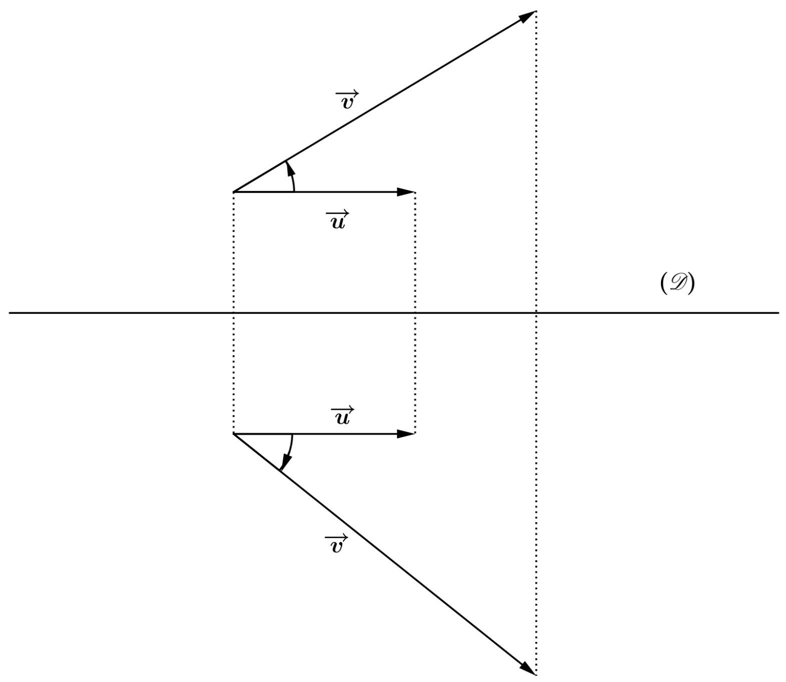
     $$\begin{cases} \overline{(IA;IK)} = (\overline{BA};\overline{BN})[\pi] \\ \overline{(JA;JK)} = (\overline{BA};\overline{BN})[\pi] \end{cases} \Longrightarrow (\overline{IA};\overline{IK}) = (\overline{JA};\overline{JK})[\pi]$$

     D'où les points I, A, J et K sont cocycliques.

11.2.6 Effet d'une réflexion et d'une homothétie sur les angles orientés

a) Angles et symétries orthogonale

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un angle orienté.
Une symétrie orthogonale change l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en son opposé.
$(\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}') = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

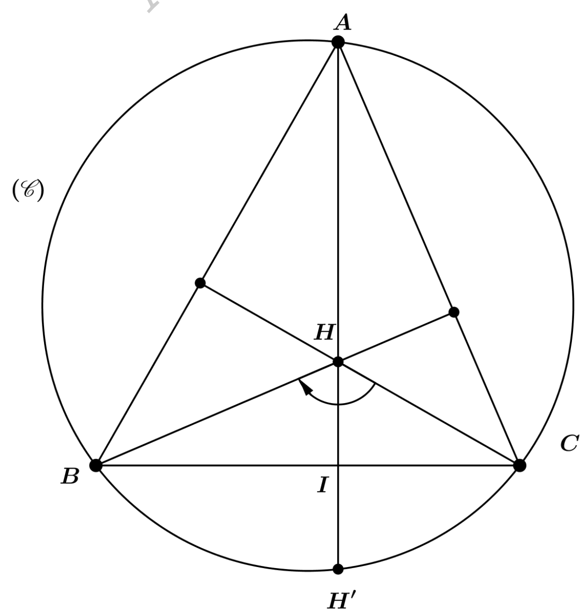


b) Angles et homothéties

Soit A, B et C trois d'images respectives A', B' et C' par l'homothétie h.
On a : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{C'A'}; \overrightarrow{C'B'})$

11.2.7 Propriétés de symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés du triangle

Soit ABC un triangle quelconque, $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC et soit H son orthocentre.
Les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle ABC appartiennent au cercle $(\mathscr{C})$.



On a : les points A, B, H' et C sont cocycliques.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

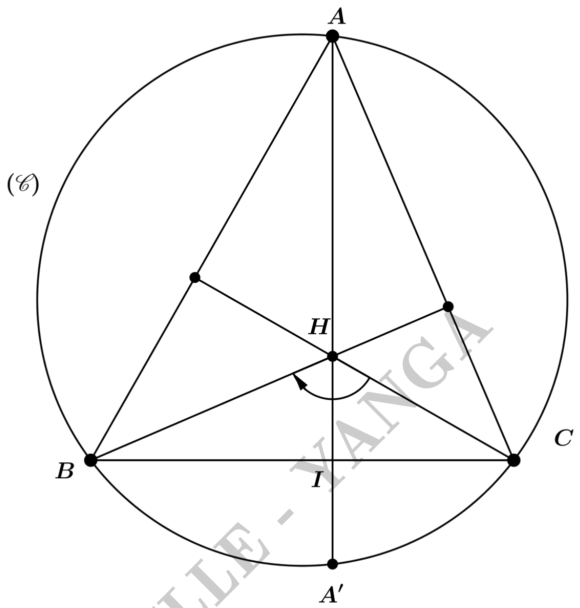
Exercice

Soit ABC un triangle quelconque et H son orthocentre. On noteA' le symétrique orthogonal de H par rapport à la droite (BC).

1. Faire la figure.
2. Établir que $(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}) = (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB})[\pi]$.
3. Montrer que les points A, B, C et A' sont cocycliques.

Solution

1. Faisons la figure

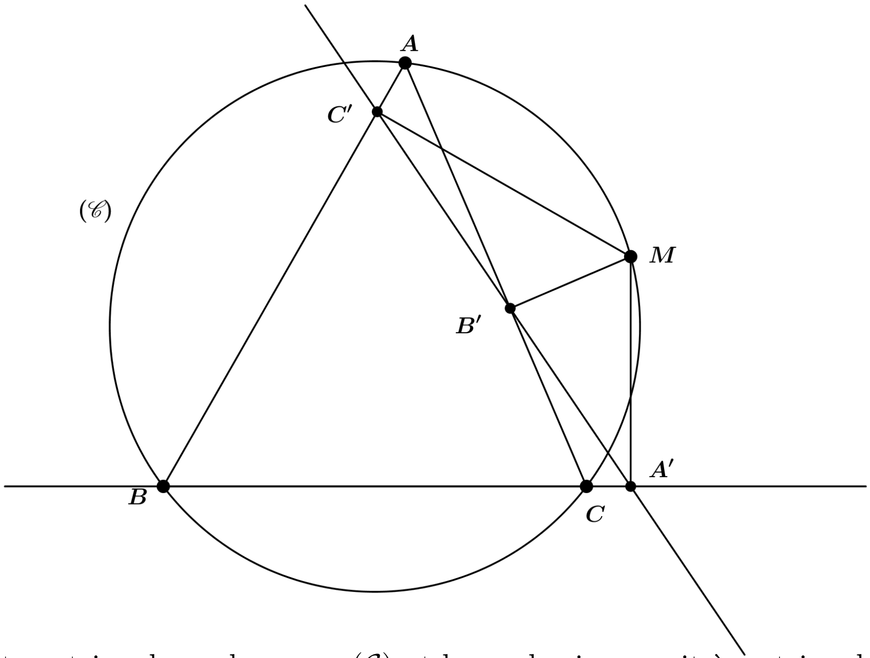


2. Établissons que : $(\overrightarrow{A'B}\,;\overrightarrow{A'C}) = (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB})[2\pi]$.
   Comme A' est l'image de H par rapport à l'axe (BC) et que la réflexion transforme un angle orienté en son opposé, on a :
   $(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}) = -(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC})[2\pi] \Longrightarrow (\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}) = (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB})[2\pi]$.
3. Montrons que les points A, B, C et A' sont cocycliques.
   Les points A, B, C et A' sont cocycliques $\Longleftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B}\,;\overrightarrow{A'C})[2\pi]$
   c'est-à-dire $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{HC}\,;\overrightarrow{HB})[2\pi]$
   Or $(\overrightarrow{HC}\,;\overrightarrow{HB}) = (\overrightarrow{HC}\,;\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{C}) + (\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{HB})[2\pi]$ comme $\begin{cases}(HC) \perp (AB)\\(HB) \perp (AC)\end{cases}$
   $(\overline{HC;HB}) = \frac{\pi}{2} + (\overline{AB,AC}) + \frac{\pi}{2}[\pi] \Longrightarrow (\overline{HC;HB}) = \pi + (\overline{AB;AC})[\pi]$
   $\Longrightarrow (\overline{HC;HB}) = (\overline{AB;AC})[\pi]$ alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C})[2\pi]$
   D'où A, B, C et A' sont cocycliques.

11.2.8 Droite de Simson

Soit ABC un triangle quelconque, non aplati, $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit à ce triangle et M un point du cercle $(\mathscr{C})$ distincts de A, B et C. Les projetés orthogonaux respectifs du point M sur les droites (AB), (BC) et (AC) sont alignés. La droite passant par ces points est appelée droite de Simson du triangle ABC relative au point M.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com



Exercice

ABC est un triangle quelconque, $(\mathcal{C})$est le cercle circonscrit à ce triangle et M un point du plan distinct de A, Bet C. Soit E, F et G les projetés orthogonaux respectifs du point M sur les droites (AB) ; (AC) et (BC).

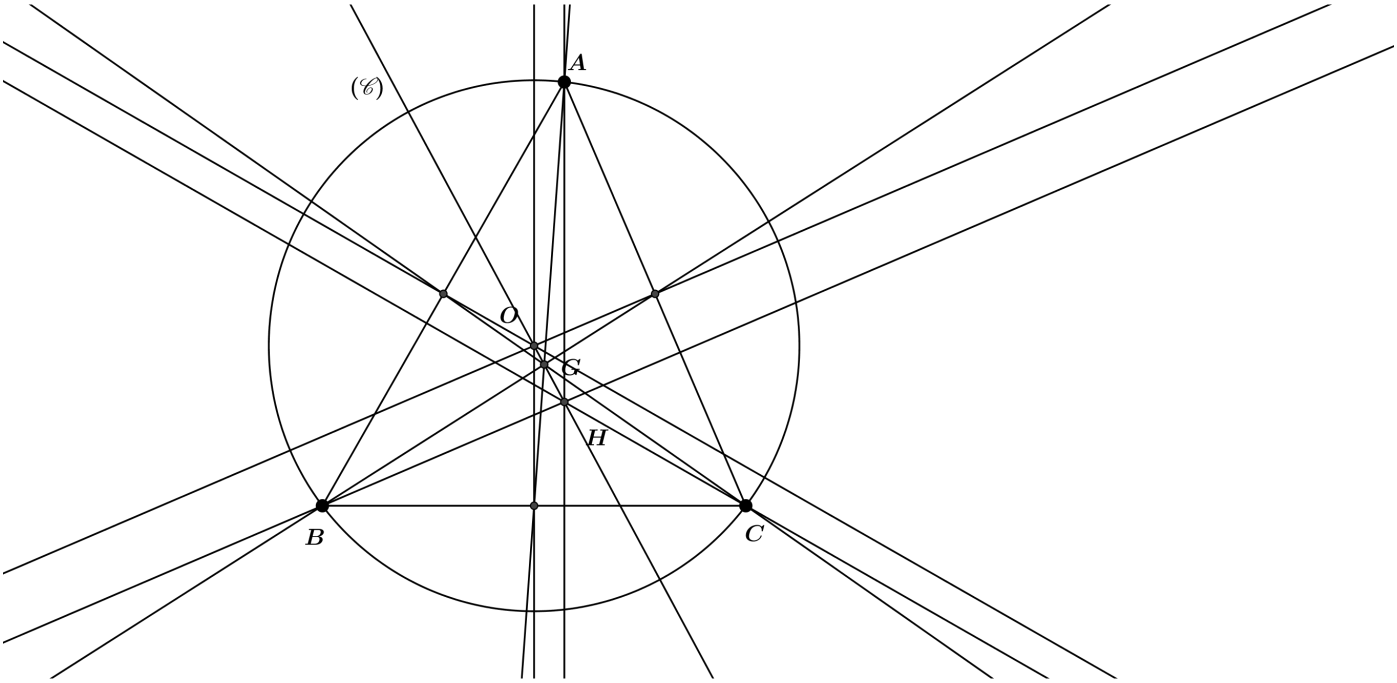
1. Faire une figure.
2. Démontrer que les points E, F et G sont alignés si et seulement si M appartient à $(\mathcal{C})$.
3. Comment appelle-t-on la droite passant par E, F et G ?

11.2.9 Droite de Steiner

On appelle droite de Steiner du point M, l'image de la droite de Simson du même point M par rapport de centre M et de rapport 2.
On a : $h(A') = A''$; $h(B') = B''$; $h(C') = C''$.
D'où la droite de Steiner est la droite passant par les points A'', B'' et C''.

Droite d'Euler

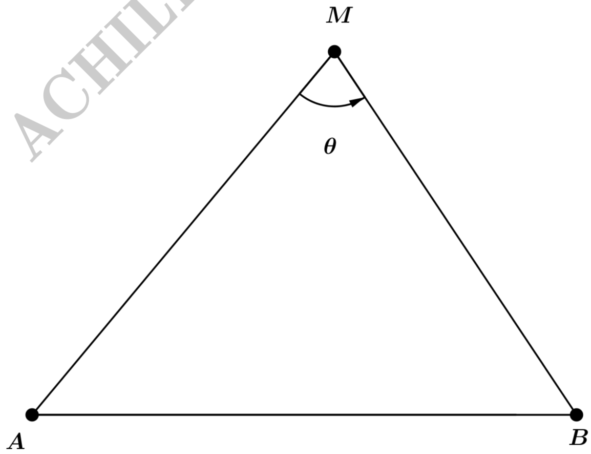
Soit ABC un triangle quelconque, $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O circonscrit au triangle ABC, H l'orthocentre du triangle ABC et G l'isobarycentre des points A, B et C.
La droite passant par les points H, G et O est appelé droite d'Eleur.



11.3 Arc capable

11.3.1 Définition

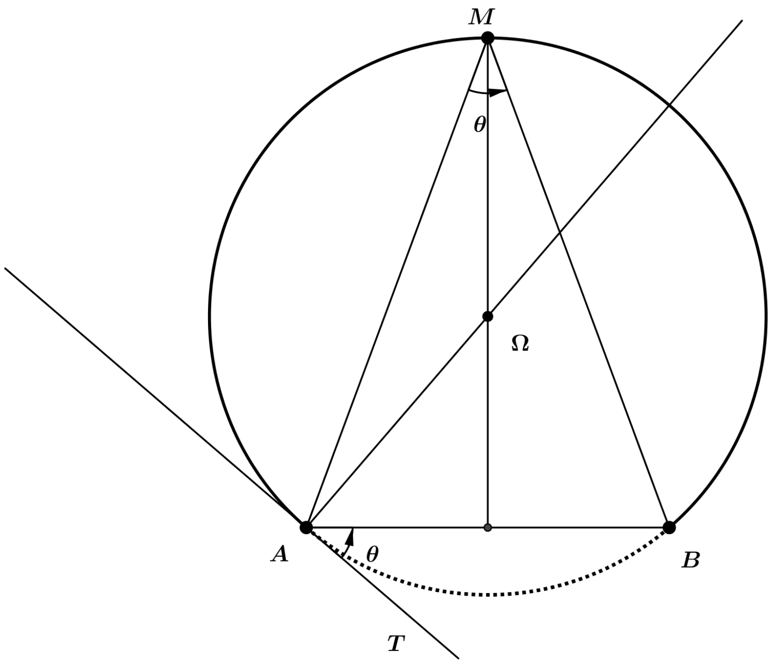
Soit $[AB]$ un segment de droite et M un point n'appartenant pas à $[AB]$.
Si l'angle $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \theta[2\pi]$, alors on dit que le segment $[AB]$ est vu du point M sous l'angle θ.



On appelle l'arc capable du segment $[AB]$ relatif à l'angle θ, l'ensemble des points M du plan d'où l'on voit le segment $[AB]$ sous l'angle θ.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

11.3.2 Construction de l'arc capable



11.3.3 Algorithme

- ▷ Tracer le segment $[AB]$;
- ▷ Tracer AT telle que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \theta[2\pi]$;
- ▷ Tracer la perpendiculaire en A à la droite (AT) ;
- ▷ Tracer la médiatrice de $[AB]$.
- ▷ Placer le centre Ω ;
- ▷ Tracer l'arc capable.

Exercice

Soit $[AB]$ un segment tel que $AB = 6$. Construire les arcs capables suivants :

1. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
2. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
3. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

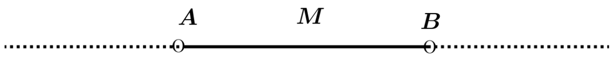
11.3.4 Ensemble des points M du plan tels que $(MA, MB) \equiv \theta[2\pi]$

Soit A et B deux points distincts du plan orienté, θ un réel donné.
Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta[2\pi]$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

- ▷ Si $\theta = 0[2\pi]$ alors (Γ) est la droite (AB) privée du segment $[AB]$.

- ▷ Si $\theta = \pi[2\pi]$ alors (Γ) est le segment $[AB]$ privée de A et B.



- ▷ Si $\theta \neq 0[2\pi]$ et $\theta = \pi[2\pi]$ alors (Γ) est l'arc capable relatif au segment $[AB]$ privé des points A et B et l'angle de mesure θ.

11.4 Cercle capable

11.4.1 Ensemble des points M du plan tels que $(MA, MB) \equiv \theta[\pi]$

Soit A et B deux points distincts du plan orienté, θ un réel donné.
Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta[\pi]$.

- ▷ Si $\theta = 0[\pi]$ alors (Γ) est la droite (AB) privée des points A et B.
- ▷ Si $\theta \neq 0[\pi]$ alors (Γ) est le cercle capable relatif au segment $[AB]$ privée de A et B.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Chapitre 12

TRANSFORMATIONS PLANES

12.1 Généralités

12.1.1 Définition

Une transformation f du plan est une application ponctuelle bijective du plan dans lui-même telle que pour tout point M' du plan, il existe un unique point M tel que $f(M) = M'$. On note :

$$\begin{aligned} f : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto f(M) = M' \end{aligned}$$

On dit que M' est l'image de M par la transformation f, ou aussi que M est l'antécédent de M' par f.

Exemples de transformations planes

L'identité, la translation, la symétrie, la rotation, l'homothétie.

Propriétés

Toute transformation du plane conserve :
▷ l'alignement des points ; le parallélisme des droites ; l'orthogonalité des droites.
▷ le milieu d'un segment.
▷ le barycentre.

12.1.2 Point invariant ou point fixe

▷ Un point M est dit fixe (ou invariant) par la transformation f si et seulement si $f(M) = M$.
On note l'ensemble des points invariants par f par :
$Invf = \{M \in \mathscr{P} / f(M) = M\}$.
▷ Un ensemble E est dit globalement invariant par f lorsque $f(E)$ est contenu dans E.
On note $f(E) \subset E$.

12.1.3 Transformation réciproque

Définition

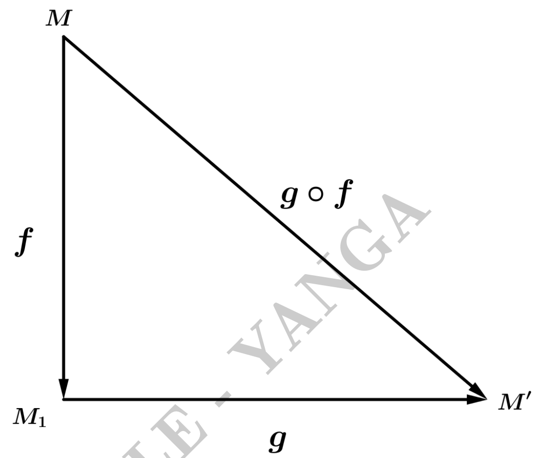
Soit f une transformation plane. La transformation réciproque de f notée f^{-1}
est l'application qui à tout point M' du plan , associe son unique antécédent M par f^{-1}.

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M' &\longmapsto f^{-1}(M') = M \end{aligned}$$

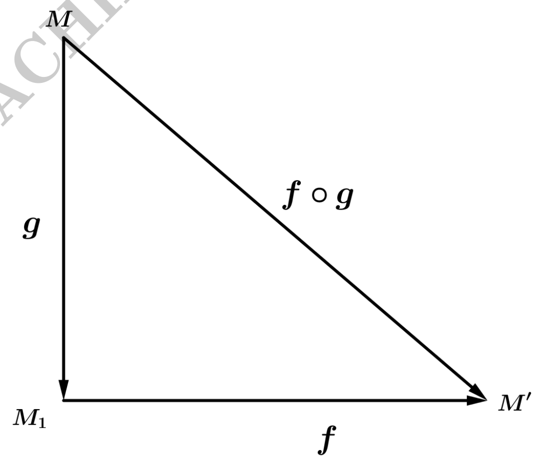
On a : $f(M) = M' \Longleftrightarrow f^{-1}(M') = M$

12.1.4 Composée de deux transformations

Si f et g sont des transformations planes, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont aussi des transformations planes.
Soit $M \overset{f}{\longmapsto} M_1 \overset{g}{\longmapsto} M'$



De même, on définit $f \circ g$
$M \overset{g}{\longmapsto} M_1 \overset{f}{\longmapsto} M'$



On a : $g \circ f(M) = g\,[f(M)]$ et $f \circ g(M) = f\,[g(M)]$

Exercice 1

Soit f une transformation plane et A un point tel que $f(A) = A'$

1. Déterminer $f^{-1}(A')$
2. Déterminer $f^{-1} \circ f(A)$ puis $f \circ f^{-1}(A')$
3. Que peut-on en déduire ?

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Solution 1

1. $f(A) = A' \Longrightarrow f^{-1}(A') = A$.
2. Déterminons $f^{-1} \circ f(A)$ puis $f \circ f^{-1}(A')$.
   $f^{-1} \circ f(A) = f^{-1}[f(A)] = f^{-1}(A') = A$
   $\Longrightarrow \boxed{f^{-1} \circ f(A) = A}$

   $f \circ f^{-1}(A') = f\left[f^{-1}(A')\right] = f(A) = A'$
   $\Longrightarrow \boxed{f \circ f^{-1}(A') = A'}$
3. Déduction.
   D'après ce qui précède, on a : $\begin{cases} f^{-1} \circ f(A) = A \\ f \circ f^{-1}(A') = A' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f^{-1} \circ f = Id_p \\ f \circ f^{-1} = Id_p \end{cases}$
   Ainsi $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id_p$

Où Id_p est la transformation qui, à tout point M du plan associe le point M lui-même et s'appelle la transformation identique ou identité du plan. $Id(M) = M$.

12.1.5 Transformation involutive

Une transformation f est dite involutive ou une involution si et seulement si :
$f = f^{-1}$ ou $f \circ f = Id$

12.1.6 Application affine

a) Définition

Une application $f : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$ est dite affine lorsqu'elle conserve le barycentre de tout système de points pondérés. c'est-à-dire : soit $G = bar\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$ avec $a+b+c \neq 0$

si $\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \\ f(C) = C' \\ f(G) = G' \end{cases}$ alors $G' = bar\{(A',a);(B',b);(C',c)\}$

b) Expression analytique d'une application affine

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère, on considère les points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$
et l'application affine f telle que $f(M) = M'$. Alors l'expression analytique de f est de la forme :
$f : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des réels.

Remarques

▷ Connaissant l'expression analytique de l'application affine f ; f est dite bijective
si et seulement si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$

▷ $f(M) = M \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les applications f et g définies par :

$f : \begin{cases} x' = -x - 3y + 5 \\ y' = -2x - 2y + 1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x' = 2x + 3y + 5 \\ y' = x + 4y + 5 \end{cases}$

Déterminer l'ensemble des points invariants des applications f et g.

Solution 2

Déterminons l'ensemble des points invariants des applications f et g.

▷ Pour f

M est invariant par $f \Longleftrightarrow f(M) = M$

$\Longrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

On a : $\begin{cases} x = -x - 3y + 5 \\ y = -2x - 2y + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

Le système est incompatible. Donc l'ensemble des points invariants par f est vide.

▷ Pour g

M est invariant par $g \Longleftrightarrow g(M) = M$

$\Longrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

On a : $\begin{cases} x = 2x + 3y + 5 \\ y = x + 4y + 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 3y + 5 = 0 \\ x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$ Le système se réduit à une seule équation : $x + 3y + 5 = 0$.

L'ensemble des points invariants par g est la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $x + 3y + 5 = 0$.

Exercice 3

Soit f et g deux applications définies par :

$f : \begin{cases} x' = x + y + 4 \\ y' = -2x + 3y + 7 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x' = 3x - 5y + 2 \\ y' = 2x - y + 5 \end{cases}$

1. Montrer que f et g sont des transformations planes
2. (a) Déterminer les coordonnées du point B , image du point $A(2;3)$ par f.
   (b) Soit $D(6;8)$. Déterminer les coordonnées du point C tel que $f(C) = D$
3. Déterminer les ensembles des points invariants par f et g.
4. Déterminer l'expression analytique de la réciproque f^{-1}.
5. Déterminer les expressions analytiques des applications : $g \circ f$; $f \circ g$; $g \circ f^{-1}$; $f \circ g \circ f$
6. Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $y = 3x - 1$.
   Déterminer la droite $(\mathscr{D})$, image de $(\mathscr{D})$ par f.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Solution 3

1. Montrons que f et g sont des transformations planes.
   ▷ Pour f
   $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3+2 = 5 \neq 0$
   $\Delta \neq 0$, alors f est bijective. Donc f est une transformation plane.
   ▷ Pour g
   $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$
   $\Delta \neq 0$, alors g est bijective. Donc g est une transformation plane.
2. (a) Déterminons les coordonnées du point B , image du point $A(2;3)$ par f.
   $$f(A) = B \Longrightarrow \begin{cases} x_B = x_A + y_A + 4 \\ y_B = -2x_A + 3y_A + 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_B = 2+3+4 \\ y_B = -2(2)+3(3)+7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_B = 9 \\ y_B = 12 \end{cases}$$
   $\boxed{B(9;12)}$
   (b) Déterminons les coordonnées du point C tel que $f(C) = D$.
   $$f(C) = D \Longrightarrow \begin{cases} x_D = x_C + y_C + 4 \\ y_D = -2x_C + 3y_C + 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_C + y_C + 4 = 6 \\ -2x_C + 3y_C + 7 = 8 \end{cases}$$
   $$\Longrightarrow \begin{cases} x_C + y_C = 2 \\ -2x_C + 3y_C = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = 1 \end{cases} \Longrightarrow C(1;1)$$
3. Déterminons l'ensemble des points invariants par f et g.
   On a : $f(M) = M \Longrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = x+y+4 \\ y = -2x+3y+7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = -4 \end{cases}$
   $\boxed{I\left(\dfrac{5}{2};-4\right) \text{ est l'unique point invariant par } f}$
   $g(M) = M \Longrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3x-5y+2 \\ y = 2x-y+5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7}{2} \\ y = -1 \end{cases}$
   $\boxed{I\left(-\dfrac{7}{2};-1\right) \text{ est l'unique point invariant par } g}$
4. Déterminons l'expression analytique de la réciproque f^{-1}.
   Exprimons x et y en fonction de x' et y'.
   $$\begin{cases} x' = x+y+4 \\ y' = -2x+3y+7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y = x'-4 \\ -2x+3y = y'-7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{1}{5}y' - 1 \\ \\ y = \frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' - 3 \end{cases}$$
   L'expression analytique de f^{-1} est :
   $$\boxed{f^{-1} : \begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{1}{5}y' - 1 \\ y = \frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' - 3 \end{cases}}$$
5. Expression analytique de $g \circ f$.
   $$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto{f} M_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \xmapsto{g} M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
   $$f(M) = M_1 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x+y+4 \\ y_1 = -2x+3y+7 \end{cases}$$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

$g(M_1) = M' \Longrightarrow \begin{cases} x' = 3x_1 - 5y_1 + 2 \\ y' = 2x_1 - y_1 + 5 \end{cases}$

$g \circ f(M) = M' \Longrightarrow \begin{cases} x' = 3(x + y + 4) - 5(-2x + 3y + 7) + 2 \\ y' = 2(x + y + 4) - (-2x + 3y + 7) + 5 \end{cases}$

On a : $\boxed{g \circ f : \begin{cases} x' = 13x - 12y - 21 \\ y' = 4x - y + 6 \end{cases}}$

Expression analytique de $f \circ g$.

$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto{g} M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \xmapsto{f} M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$g(M) = M_1 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x - 5y + 2 \\ y_1 = 2x - y + 5 \end{cases}$

$f(M_1) = M' \Longrightarrow \begin{cases} x' = x_1 + y_1 + 4 \\ y_1 = -2x_1 + 3y_1 + 7 \end{cases}$

$f \circ g(M) = M' \Longrightarrow \begin{cases} x' = 3x - 5y + 2 + 2x - y + 5 + 4 \\ y_1 = -2(3x - 5y + 2) + 3(2x - y + 5) + 7 \end{cases}$

On a : $\boxed{f \circ g : \begin{cases} x' = 5x - 6y - 11 \\ y' = 7y + 18 \end{cases}}$

6. $(\mathscr{D}) : y = 3x - 1$.
   Déterminons la droite $(\mathscr{D}')$, image de $(\mathscr{D})$ par f.
   L'expression analytique de f^{-1} est :
   $f^{-1} : \begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{1}{5}y' - 1 \\ y = \frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' - 3 \end{cases}$
   Alors :
   $(\mathscr{D}') : \dfrac{2}{5}x' + \dfrac{1}{5}y' - 3 = 3\left(\dfrac{3}{5}x' - \dfrac{1}{5}y' - 1\right) - 1$
   $(\mathscr{D}') : 2x' + y' - 15 = 9x' - 3y' - 3 - 1$
   $(\mathscr{D}') : 7x' - 4y' - 5 = 0$
   Par changement d'inconnue on obtient :
   $\boxed{(\mathscr{D}') : 7x - 4y - 5 = 0}$

12.2 Études de quelques transformations du plan

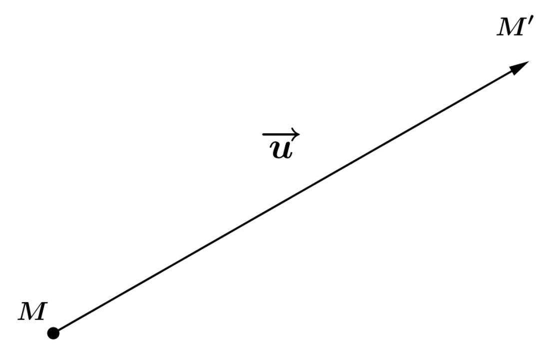
12.2.1 Translation

a) Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la transformation notée $t_{\overrightarrow{u}}$, qui à tout point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{u}} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto t_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \end{aligned}$$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com



Remarque

$t_{\overrightarrow{0}} = Id$

b) Propriétés

▷ si $\begin{cases} t_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \\ t_{\overrightarrow{u}}(N) = N' \end{cases}$ alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

▷ Par une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ aucun point du plan n'est invariant. L'ensemble des points invariants par $t_{\overrightarrow{u}}$ est vide.

▷ La translation conserve les angles orientés, le contact, le barycentre, le parallélisme, l'orthogonalité et la nature des figures géométriques.

c) Réciproque d'une translation

La réciproque de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$.
$(t_{\overrightarrow{u}})^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}}$
En effet :

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{u}}(M) = M' &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\overrightarrow{u} \\ &\Leftrightarrow t_{-\overrightarrow{u}}(M') = M. \end{aligned}$$

$$\text{Donc} \quad (t_{\overrightarrow{u}})^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}}$$

d) Expression analytique d'une translation

Dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x'-x = a \\ y'-y = b \end{cases}$

Ainsi : $t_{\overrightarrow{u}} : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Exemple

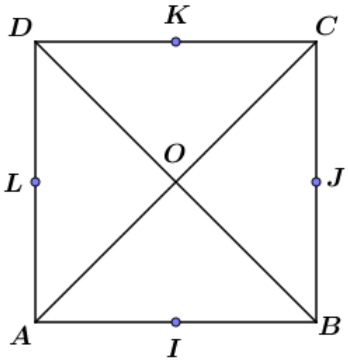
Déterminer l'expression de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(2; -3)$.

Exercice

$ABCD$ est un carré de centre O, de sens direct. On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Soit $T = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$ et $T' = t_{\overrightarrow{OA}}$

1. Déterminer les images des points A, I, O, D K et L par T.
2. Déterminer les images des points O, C, J et K par T'.

Solution



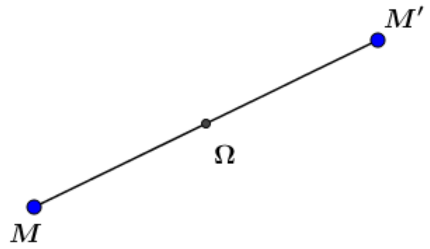
1. Déterminons les images des points A, I, O, D, K et L par T.
   $T(A) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(A) = I \Longrightarrow \boxed{T(A) = I}$
   $T(I) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(I) = B \Longrightarrow \boxed{T(I) = B}$
   $T(O) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(O) = J \Longrightarrow \boxed{T(O) = J}$
   $T(D) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(D) = K \Longrightarrow \boxed{T(D) = K}$
   $T(L) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(L) = O \Longrightarrow \boxed{T(L) = O}$
2. Déterminons les images des points O, C, J et K par T'.
   $T'(O) = t_{\overrightarrow{OA}}(O) = A \Longrightarrow \boxed{T'(O) = A}$
   $T'(C) = t_{\overrightarrow{OA}}(C) = O \Longrightarrow \boxed{T'(C) = O}$
   $T'(J) = t_{\overrightarrow{OA}}(J) = I \Longrightarrow \boxed{T'(J) = I}$
   $T'(K) = t_{\overrightarrow{OA}}(K) = L \Longrightarrow \boxed{T'(K) = L}$

12.2.2 Symétrie centrale

a) Définition

Soit Ω un point fixe, M est un point variable.
On appelle symétrie de centre Ω la transformation f qui transforme M en M' tel que Ω est le milieu de $[MM']$. On note : $f = S_{\Omega}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com



b) Expression analytique de la symétrie centrale

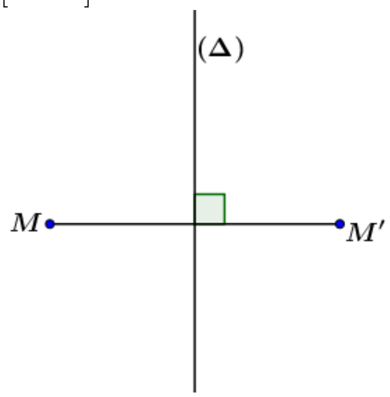
Soit $\Omega\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ milieu du segment $[MM']$.

On a : $\begin{cases} a = \dfrac{x+x'}{2} \\ b = \dfrac{y+y'}{2} \end{cases} \Longrightarrow S_{\Omega} : \begin{cases} x' = -x+2a \\ y' = -y+2b \end{cases}$

12.2.3 Réflexion ou symétrie orthogonale

12.2.4 a) Définition

(Δ) est une droite. On appelle réflexion d'axe (Δ), toute application du plan dans lui-même qui associe à tout point M du plan, le point M' tel que (Δ) soit la médiatrice du segment $[MM']$.



$S_{(\Delta)}(M) = M'$: on dit que M' est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

b) Propriétés

- ▷ Tout point de l'axes (Δ) est invariant par $S_{(\Delta)}$. (Δ) est donc l'ensemble des points invariants.
- ▷ $S_{(\Delta)}$ est une bijection. La réciproque de $S_{(\Delta)}$ est $S_{(\Delta)}$: $(S_{\Delta})^{-1} = S_{(\Delta)}$.
  On dit que $S_{(\Delta)}$ est involutive.
- ▷ Toute symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé.
- ▷ Toute symétrie orthogonale conserve le parallélisme , le contact, le barycentre, l'orthogonalité et la forme des figures.

c) Expression analytique d'une réflexion

Soit une droite $(\mathscr{D}) : ax+by+c=0$ et $\overrightarrow{u}(-b;a)$ un vecteur de $(\mathscr{D})$. $M'(x';y')$ le symétrique de $M(x;y)$ par $(\mathscr{D})$ la symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

$$S_{(\mathscr{D})}(M) = M' \iff \begin{cases} \text{le milieu I de } [MM'] \in (\mathscr{D}) \\ \overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{u} \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I \text{ milieu de } \left[MM'\right] &\Longleftrightarrow x_I = \frac{x+x'}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y+y'}{2} \\ I \in (\mathscr{D}) &\Longleftrightarrow a\left(\frac{x+x'}{2}\right) + b\left(\frac{y+y'}{2}\right) + c = 0 \\ &\Longrightarrow ax + ax' + by + by' + 2c = 0 \\ &\Longrightarrow ax' + by' = -ax - by - 2c \quad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow \quad -b(x'-x) + a(y'-y) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad -bx' + ay' = -bx + ay \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} ax' + by' = -ax - by - 2c \quad \textbf{(1)} \\ -bx' + ay' = -bx + ay \quad \textbf{(2)} \end{cases}$$

La résolution du système donne :

$$S_{(\mathscr{D})} : \begin{cases} x' = \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}x - \dfrac{2ab}{a^2+b^2}y - \dfrac{2ac}{a^2+b^2} \\ \\ y' = \dfrac{-2ab}{a^2+b^2}x + \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y - \dfrac{2bc}{a^2+b^2} \end{cases}$$

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale $S_{(\mathscr{D})}$ d'axe la droite $(\mathscr{D}) : 2x + 3y - 4 = 0$.

Solution

$(\mathscr{D}) : 2x + 3y - 4 = 0$.

$$\begin{aligned} x_I = \frac{x+x'}{2} &\quad \text{et} \quad y_I = \frac{y+y'}{2} \\ I \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow 2\left(\frac{x+x'}{2}\right) &+ 3\left(\frac{y+y'}{2}\right) - 4 = 0 \\ \Longrightarrow 2x &+ 2x' + 3y + 3y' - 8 = 0 \\ \Longrightarrow 2x' + 3y' &= -2x - 3y + 8 \quad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow \quad -3(x'-x) + 2(y'-y) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad -3x' + 2y' = -3x + 2y \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

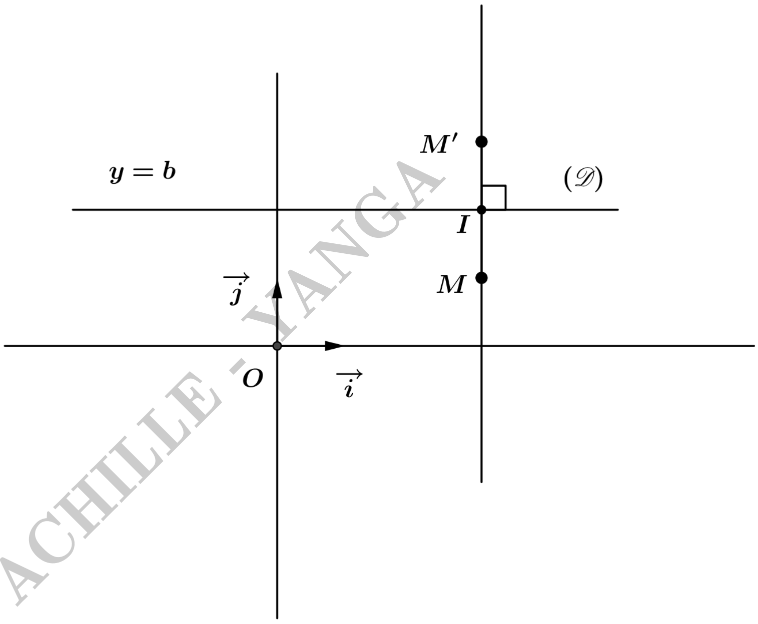
$$\begin{cases} 2x' + 3y' = -2x - 3y + 8 & \textbf{(1)} \\ -3x' + 2y' = -3x + 2y & \textbf{(2)} \end{cases}$$

La résolution du système donne :

$$\boxed{S_{(\mathscr{D})} : \begin{cases} x' = \dfrac{5}{13}x - \dfrac{12}{13}y + \dfrac{16}{13} \\ \\ y' = -\dfrac{12}{13}x - \dfrac{5}{13}y + \dfrac{24}{13} \end{cases}}$$

12.2.5 Expression analytique des symétries orthogonales particulières

a) l'axe est parallèle à l'axe des abscisses ($y = b$)



La droite $(\mathscr{D}) : y = b$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1;0)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \quad -1(x' - x) + 0(y' - y) = 0 \\ &\Rightarrow \quad -x' + x = 0 \end{aligned}$$

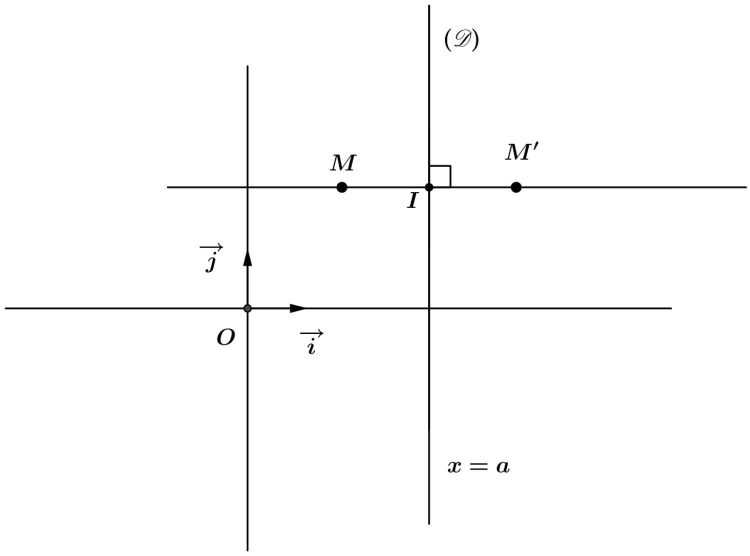
$$x_I = \frac{x + x'}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y + y'}{2}$$

$$I \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \frac{y + y'}{2} = b$$

On a :

$$S_{(\mathscr{D})} : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

b) l'axe est parallèle à l'axe des ordonnées $(x = a)$



La droite $(\mathscr{D}) : x = a$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(0;1)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \quad 0(x'-x) + 1(y'-y) = 0 \\ &\Rightarrow \quad y' - y = 0 \end{aligned}$$

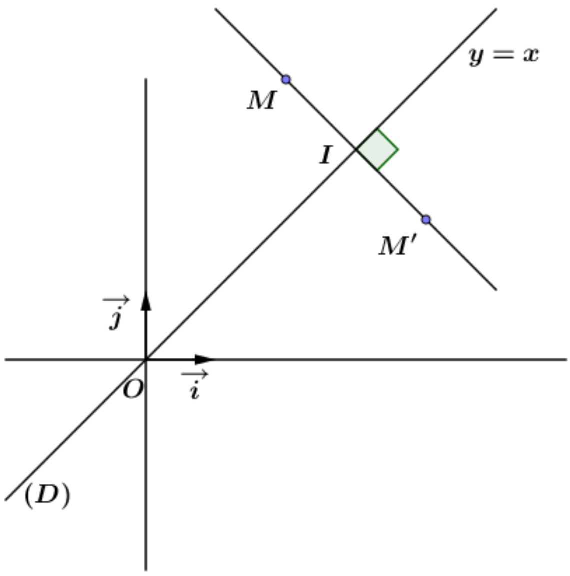
$$x_I = \frac{x+x'}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y+y'}{2}$$

$$I \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \frac{x+x'}{2} = a$$

On a :

$$S_{(\mathscr{D})} : \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y \end{cases}$$

c) l'axe est la première bissectrice $(y = x)$



La droite $(D) : y = x$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1;1)$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\
&\Rightarrow \quad 1(x' - x) + 1(y' - y) = 0 \\
&\Rightarrow \quad x' + y' = x + y
\end{aligned}$$

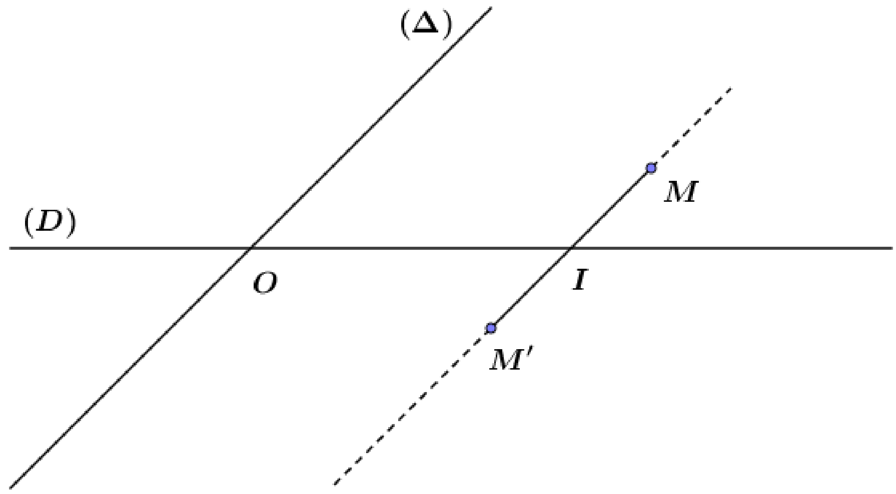
$$\begin{aligned}
x_I = \frac{x + x'}{2} \quad \text{et} \quad y_I &= \frac{y + y'}{2} \\
I \in (D) \Leftrightarrow \frac{x + x'}{2} - \frac{y + y'}{2} &= 0 \\
x' - y' &= -x + y
\end{aligned}$$

On a :
$$\begin{cases} x' + y' = x + y \\ x' - y' = -x + y \end{cases}$$

La résolution de ce système donne : $S_{(D)} : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

12.2.6 Symétrie par rapport à $(\mathscr{D})$ et parallèlement à une droite (Δ)

Soit $(\mathscr{D})$ et (Δ) deux droites sécantes en O, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de (Δ).



$S_{(\mathscr{D})} : \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \lambda \overrightarrow{u} \\ I \quad \text{milieu de} \quad \overrightarrow{MM'} \\ I \in (\mathscr{D}) \end{cases}$ On dit aussi symétrie d'axe $(\mathscr{D})$ et de direction (Δ).

Remarque

Si $(\mathscr{D})$ et (Δ) sont perpendiculaires, on obtient une symétrie orthogonale d'axe (D).

Exercice

On donne $(\mathscr{D}) : y = 2x + 4$ et $(\Delta) : x + 3y - 5 = 0$.
Déterminer l'expression analytique de la symétrie d'axe $(\mathscr{D})$ et de direction (Δ).

Solution

Soit $M(x;y) \in \mathscr{P}$; $M'(x;y) \in \mathscr{P}$, I milieu de $[MM']$ et $I \in (\mathscr{D})$.
$\overrightarrow{u}(-3;1)$ un vecteur directeur de (Δ).

$$\overrightarrow{MM'} = \lambda \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x - 3\lambda \\ y' = y + \lambda \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

$$x_I = \frac{x + x'}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y + y'}{2}$$

$$\begin{aligned} I \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \frac{y' + y}{2} &= 2\left(\frac{x + x'}{2}\right) \\ y' + y &= 2x' + 2x + 8 \end{aligned}$$

$$y' - 2x' = 2x - y + 8 \quad \textbf{(2)}$$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

(1) dans **(2)** donne :

$$\begin{aligned} y+\lambda-2(x-3\lambda) &= 2x-y+8 \\ 7\lambda &= 4x-2y+8 \\ \lambda &= \frac{1}{7}(4x-2y+8) \quad \textbf{(3)} \end{aligned}$$

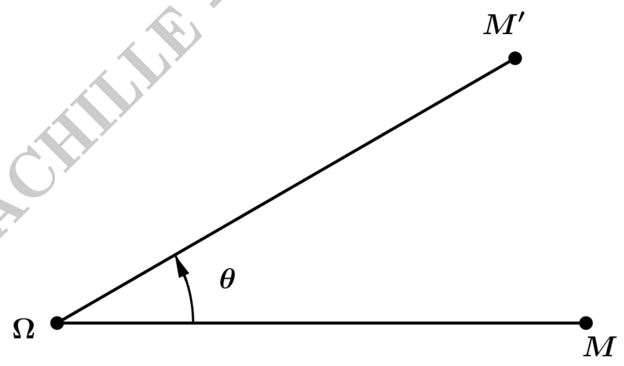
En remplaçant **(3)** dans **(1)**, on obtient :

$$\boxed{S : \begin{cases} x' = -\dfrac{5}{7}x + \dfrac{6}{7}y - \dfrac{24}{7} \\ \\ y' = \dfrac{4}{7}x + \dfrac{5}{7}y + \dfrac{8}{7} \end{cases}}$$

12.3 Rotation

a) Définition

Soit Ω un point et θ un nombre réel. On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ , l'application , qui à tout point M distinct de Ω , associe le point M' telle que $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta\,[2\pi] \end{cases}$



b) Propriétés

p_1) Le centre de la rotation est l'unique point invariant par $R(\Omega,\theta)$

p_2) $R(\Omega,\theta)$ est une bijection. La réciproque de $R(\Omega,\theta)$ est $R(\Omega,-\theta)$. $[R(\Omega,\theta)]^{-1} = R(\Omega,-\theta)$

p_3) La rotation conserve les angles orientés, le parallélisme, l'orthogonalité, le barycentre, le contact et la nature des figures géométriques.

c) Rotations particulières

- ▷ Si $\theta = \pi\,[2\pi]$, il s'agit d'un **demi-tour** ou une symétrie centrale de centre Ω.
- ▷ Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$, il s'agit d'un **quart de tour direct** de centre Ω
- ▷ Si $\theta = -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$, il s'agit d'un **quart de tour indirect** de centre Ω
- ▷ Si $\theta = 0\,[2\pi]$, il s'agit d'une translation de vecteur nul ou l'identité du plan.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

d) Détermination géométrique d'une rotation

Si A' et B' sont les images de deux points distincts de A et B par la rotation de centre Ω et d'angle θ.

$$\begin{cases} r(A) = A' \\ r(B) = B' \end{cases}$$

alors :

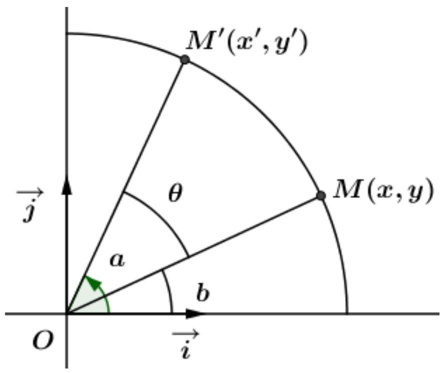
-Existence : r existe si $A'B' = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'} \neq 0\,[2\pi]$

-Centre Ω : Ω est le point de concours des médiatrices des segments $[AA']$ et $[BB']$

e) Expression analytique

▷ **Rotation de centre O :**

Considérons le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit la rotation $r(O,\theta)$ de centre O et d'angle θ, les points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ du plan, a et b des mesures des angles de vecteurs.



On a : $\theta = (a - b)\,[2\pi] \Rightarrow a = (\theta + b)\,[2\pi]$

$$\begin{cases} x = OM\cos b \\ y = OM\sin b \end{cases} \quad \textbf{(1)} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = OM\cos a \\ y' = OM\sin a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = OM\cos a \\ y' = OM\sin a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = OM\cos(\theta + b) \\ y' = OM\sin(\theta + b) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = OM(\cos\theta\cos b - \sin\theta\sin b) \\ y' = OM(\sin\theta\cos b + \sin b\cos\theta) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x' = (OM\cos b)\cos\theta - (OM\sin b)\sin\theta \\ y' = (OM\cos b)\sin\theta + (OM\sin b)\cos\theta \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

(1) dans **(2)** donne :

$$r(O,\theta) : \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

▷ **Rotation de centre Ω :**

Soit $r(\Omega,\theta)$ la rotation de centre Ω et d'angle θ.
Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, M et M' ont pour coordonnées : $M(X,Y)$ et $M'(X',Y')$.

Ainsi on a : $\begin{cases} X' = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ Y' = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases}$ **(1)**

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Changement de repère :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega M} &= -\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{OM} \\
X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j} &= -x_\Omega \overrightarrow{i} - y_\Omega \overrightarrow{j} + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} \\
X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j} &= (x - x_\Omega)\overrightarrow{i} + (y - y_\Omega)\overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

Par identification on a : $\begin{cases} X = x - x_\Omega \\ Y = y - y_\Omega \end{cases}$ **(2)**

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega M'} &= -\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{OM'} \\
X'\overrightarrow{i} + Y'\overrightarrow{j} &= -x_\Omega \overrightarrow{i} - y_\Omega \overrightarrow{j} + x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} \\
X'\overrightarrow{i} + Y'\overrightarrow{j} &= (x' - x_\Omega)\overrightarrow{i} + (y' - y_\Omega)\overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

Par identification on a : $\begin{cases} X' = x' - x_\Omega \\ Y = y' - y_\Omega \end{cases}$ **(3)**

(2) et **(3)** dans **(1)** donne :

$\begin{cases} x' - x_\Omega = (x - x_\Omega)\cos\theta - (y - y_\Omega)\sin\theta \\ y' - y_\Omega = (x - x_\Omega)\sin\theta + (y - y_\Omega)\cos\theta \end{cases}$

Ainsi, l'expression analytique de la rotation $r(\Omega, \theta)$ de centre Ω et d'angle θ dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ donnée par :

$$\begin{cases} x' = (x - x_\Omega)\cos\theta - (y - y_\Omega)\sin\theta + x_\Omega \\ y' = (x - x_\Omega)\sin\theta + (y - y_\Omega)\cos\theta + y_\Omega \end{cases}$$

Cas particulier :

Si $\theta = \pi$; alors $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$.
On retrouve l'expression analytique d'une symétrie centrale de centre Ω.

$$\boxed{r(\Omega, \pi) : \begin{cases} x' = -x + 2x_\Omega \\ y' = -y + 2y_\Omega \end{cases}}$$

f) Détermination de l'angle de la rotation

Si A' et B' sont les images de deux points distincts de A et B par la rotation de centre Ω et d'angle θ, alors l'ange θ de cette rotation est déterminé par les relations :

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'B'}}{\parallel \overrightarrow{AB} \parallel \times \parallel \overrightarrow{A'B'} \parallel} \\
\sin\theta &= \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})}{\parallel \overrightarrow{AB} \parallel \times \parallel \overrightarrow{A'B'} \parallel}
\end{aligned}$$

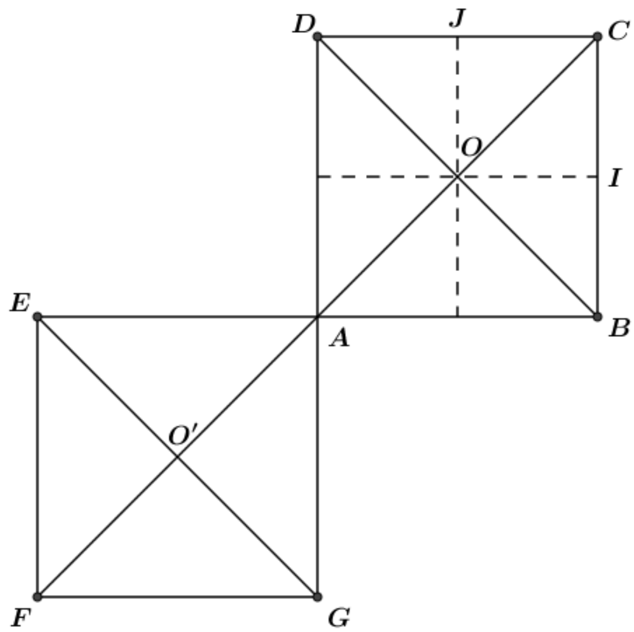
Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice

$ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés de sens direct de côté a , de centres respectifs O et O'. On désigne par I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[DC]$.
Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les images par r des points A, D et E.
2. Prouver l'existence de la rotation r' qui transforme C en F et D en G.
3. Donner les éléments caractéristiques de r' puis préciser sa nature exacte.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$.
   Déterminer les expressions analytiques de suivantes :
   (a) $r(A, \frac{\pi}{2})$
   (b) $r(A, \pi)$
   (c) $r(F, \frac{\pi}{4})$

Solution



1. Déterminons les images par r des points A, D et E.
   $r = rot(A, \frac{\pi}{2})$
   $\boxed{r(A) = A; \quad r(D) = E; \quad r(E) = G}$
2. Prouvons l'existence de la rotation r' qui transforme C en F et D en G.
   $\begin{cases} r'(D) = G \\ r'(C) = F \end{cases}$

   ▷ $ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés de côté a.
   Donc $GF = DC$
   ▷ Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont colinéaires de sens contraires.
   Donc $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{GF}) = \pi\,[2\pi]$

   $\boxed{\begin{cases} GF = DC \quad \textbf{(1)} \\ (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{GF}) = \pi\,[2\pi] \quad \textbf{(2)} \end{cases}}$
   Les relations **(1)** et **(2)** prouvent que r' existe.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

3. Donnons les éléments caractéristiques de r' puis précisons sa nature exacte.
   • **éléments caractéristiques :**
   -centre : les médiatrices des segments $[DG]$ et $[CF]$ se coupent en A. Le centre de r' est le point A.
   -Angle : $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{GF}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})\pi\,[2\pi]$. L'angle de r' est π.
   $\boxed{r' = rot(A,\pi)}$.
   • **Nature exacte de** r' **:** r' est la symétrie centrale de centre A.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). Déterminons les expressions analytiques de
   a) Expression analytique de : $r(A,\frac{\pi}{2})$
   Le A a pour coordonnées $A(-1;-1)$ dans le repère (O,I,J) et $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.
   On a : $\boxed{r(A,\frac{\pi}{2}) : \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}}$
   b) Expression analytique de : $r(A,\pi)$
   $A(-1;-1)$ et $\cos\pi = -1$; $\sin\pi = 0$.
   On a : $\boxed{r(A,\pi) : \begin{cases} x' = -x-2 \\ y' = -y-2 \end{cases}}$
   c) Expression analytique de : $r(F,\frac{\pi}{4})$
   $F(-3;-3)$ et $\cos\frac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   On a :
   $$\boxed{r(F,\tfrac{\pi}{4}) : \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - 3 \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - 3 + 3\sqrt{2} \end{cases}}$$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

CHAPITRE 13

ISOMÉTRIES DU PLAN

I) Généralités

13.1 Définition

Un isométrie du plan est une transformation du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui conserve les distances. C'est-à-dire, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' ;
on a : $M'N' = MN$.

13.1.1 Exemples des isométries

Les isométries du plan sont :
- ▷ l'identité du plan : Id_p
- ▷ la translation de vecteur non nul $\overrightarrow{u}$: $t_{\overrightarrow{u}}$
- ▷ la rotation de centre Ω et d'angle θ : $r(\Omega, \theta)$
- ▷ la symétrie orthogonale ou réflexion d'axe $(\mathscr{D})$: $S_{(\mathscr{D})}$
- ▷ la symétrie glissée.

13.2 Égalités de deux isométries

f et g sont deux isométries égales si elles prennent les même images de trois points non alignés. C'est -à-dire, si A, B , C sont trois points non alignés, alors : $f = g \Leftrightarrow \begin{cases} f(A) = g(A) \\ f(B) = g(B) \\ f(C) = g(C) \end{cases}$

13.3 Différentes types des isométries

On distingue deux types d'isométries :
- ▷ les isométries positives ou déplacements ;
- ▷ les isométries négatives ou antidéplacements.

13.3.1 Isométries positives ou déplacements

a) Définition

Une isométrie positive ou déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés. C'est-à-dire, si $\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \\ f(C) = C' \end{cases}$ alors ; $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\,[2\pi]$

Exemple

L'identité du plan, la rotation et la translation.

b) Expression analytique d'un déplacement

Soit f un déplacement.

Son expression analytique est de la forme : $f : \begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + d \end{cases}$

avec $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = 1$ où a, b, c et d sont des nombres réels.

13.3.2 Isométries négatives ou antidéplacements

a) Définition

Un isométrie négative ou antidéplacement est une isométrie qui transforme les angles orientés en leurs opposés. C'est-à-dire,

si $\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \\ f(C) = C' \end{cases}$ alors $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\,[2\pi]$

Exemple

La symétrie orthogonale ou réflexion, la symétrie glissée.

b) Expression analytique d'un antidéplacement

Soit f un antidéplacement .

Son expression analytique est de la forme : $f : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + d \end{cases}$ avec $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -1$

Où a, b, c et d sont des nombres réels.

13.4 Propriétés

Si f est une isométrie du plan :

p_1) L'image du segment $[AB]$ est le segment $[f(A)f(B)]$.

p_2) L'image de la droite (AB) est la droite $(f(A)f(B))$.

p_3) L'image du cercle de centre Ω et de rayon r est le cercle de centre. $f(\Omega)$ et de centre r.

p_4) f conserve le parallélisme : deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.

p_5) f conserve l'orthogonalité : deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.

p_6) f conserve les milieux : si I est le milieu de $[AB]$, alors $f(I)$ est le milieu $[f(A)f(B)]$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

p_7) f conserve les barycentres :
si $G = bar\{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2)\cdots(A_n,\alpha_n)\}$, alors
$f(G) = bar\{(f(A_1),\alpha_1);(f(A_2),\alpha_2)\cdots(f(A_n),\alpha_n)\}$.

p_8) f conserve les angles géométriques :
si $A' = f(A)$; $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$, alors $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.

p_9) f est bijective.

p_{10}) La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.

p_{11}) La composée d'un déplacement par un antidéplacement est un antidéplacement.

13.5 Isométries et points invariants

Soit f une isométrie du plan.

a) Si f laisse invariant trois points A, B, C non alignés, alors f est l'application identique.

b) Si f laisse invariant deux points A, B et n'est pas l'application identique, alors f est une symétrie orthogonale d'axe la droite (AB).

c) Si f laisse invariant un seul point A, alors f est une rotation de centre A.

d) Si f n'admet aucun point invariant, alors f est soit une translation, ou soit une symétrie glissées.

13.6 Triangles isométriques

13.6.1 Définition

On dit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques ou superposables s'il existe une isométrie f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

- Si f est un déplacement, on dit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement superposables.
- Si f est un antidéplacement, on dit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont superposables après retournement.

13.6.2 Théorème

Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles.
Si $AB = A'B'$; $BC = B'C'$; $AC = A'C'$; alors les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques.

Exercice 1

Soit f une transformation plane définie analytiquement par :

$$f : \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y - 2 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie du plan.
2. Montrer que f est un déplacement.
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
4. En déduire la nature exacte de f.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice 2

Soit g une transformation plane définie analytiquement par :

$$g : \begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}$$

1. Montrer que g est une isométrie
2. Montrer que g est un antidéplacement
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par g
4. En déduire la nature exacte de g

Solution 1

$$f : \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y - 2 \end{cases}$$

1. Montrons que f est une isométrie du plan.
   Soit $M(x,y)$ et $N(x_1,y_1)$ deux points d'images respectives $M'(x',y')$ et $N'(x'_1,y'_1)$

   $$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y - 2 \end{cases}$$

   $$f(N) = N' \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = -x_1 + 2 \\ y'_1 = -y_1 - 2 \end{cases}$$

   $MN^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \quad$ **(1)**.

   $$\begin{aligned} M'N'^2 &= (x'_1 - x')^2 + (y'_1 - y')^2 \\ &= (-x_1 + 2 + x - 2)^2 + (-y_1 - 2 + y + 2)^2 \\ &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \quad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

   (2)=**(1)** $\Longrightarrow M'N'^2 = MN^2 \Longrightarrow$ $\boxed{\text{M'N'=MN}}$
   f est donc une isométrie.
2. Montrons que f est un déplacement.
   $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$
   Donc f est un déplacement.
3. Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

   $$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x + 2 \\ y = -y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = +2 \\ 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

   $\boxed{\Omega(1;-1) \text{ est le seul point invariant par } f}$
4. Déduisons la nature exacte de f.
   Comme f admet un seul point invariant , f est donc une rotation de centre Ω.

Solution 2

$$g : \begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = x + 2 \end{cases}$$

1. Montrons que g est une isométrie
   Soit $M(x,y)$ et $O(0,0)$ deux points d'images respectives $M'(x',y')$ et $O'(-2;2)$.

   $OM^2 = x^2 + y^2 \quad \textbf{(1)}$

   $$\begin{aligned} O'M'^2 &= (x'+2)^2 + (y'-2)^2 \\ &= (y-2+2)^2 + (x+2-2)^2 \\ &= y^2 + x^2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

   $O'M'^2 = x^2 + y^2 \quad \textbf{(2)}$

   (2)=(1) $\Leftrightarrow \boxed{O'M' = OM}$

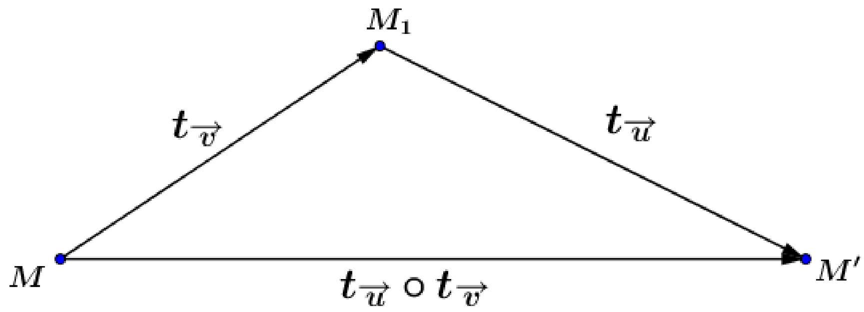
   f est donc une isométrie.
2. Montrons que g est un antidéplacement
   $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$
   g est donc un antidéplacement.
3. Déterminons l'ensemble des points invariants par g
   $g(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 2 \\ y = -x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$
   Le système se réduit à une seule équation $x + y - 2 = 0$.

   L'ensemble des points invariants par g est la droite droite
   $\boxed{(\mathscr{D}) : y = x + 2}$
4. Déduisons la nature exacte de g
   Comme l'ensemble des points invariants par g est une droite, g est donc une symétrie orthogonale.

II) Compositions et décompositions des isométries

13.7 Composée de deux translations

Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Soit M un point du plan, M_1 son image par $t_{\overrightarrow{v}}$ et M' l'image de M_1 par $t_{\overrightarrow{u}}$.



La question qui se pose est : quelle est la transformation $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}$?

$\begin{cases} t_{\overrightarrow{v}}(M) = M_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{v} & \textbf{(1)} \\ t_{\overrightarrow{u}}(M_1) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{u} & \textbf{(2)} \end{cases}$

(1)+(2) $\Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

Donc $\underline{M' = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}(M)}$ **(i)**

Pour tout point M du plan on a :

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}(M) &= t_{\overrightarrow{u}}[t_{\overrightarrow{v}}(M)] \\ &= t_{\overrightarrow{u}}(M_1) \\ &= M' \end{aligned}$$

Donc $\underline{t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}(M) = M'}$ **(ii)**

(i) = **(ii)** $\Rightarrow t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}(M) = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}(M)$

D'où $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$

Propriété

La composée de deux translations de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$.

Remarques

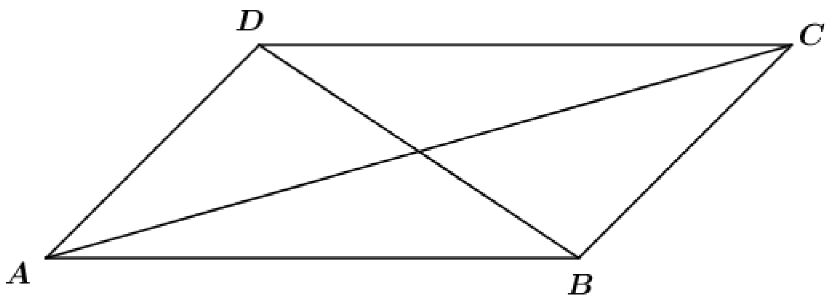
- ▷ $\forall \quad \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, on a : $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ (Commutativité)
  Donc $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$
  On dit que la composée de deux translations est commutative.
- ▷ $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{-u}} = t_{\overrightarrow{-u}} \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{o}} = I_d$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Caractériser les transformations ponctuelles suivantes :
$t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$; $t_{\overrightarrow{BD}} \circ t_{\overrightarrow{DA}}$; $t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$; $t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BD}}$

Solution



$t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}} = t_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}} = t_{\overrightarrow{AC}}$

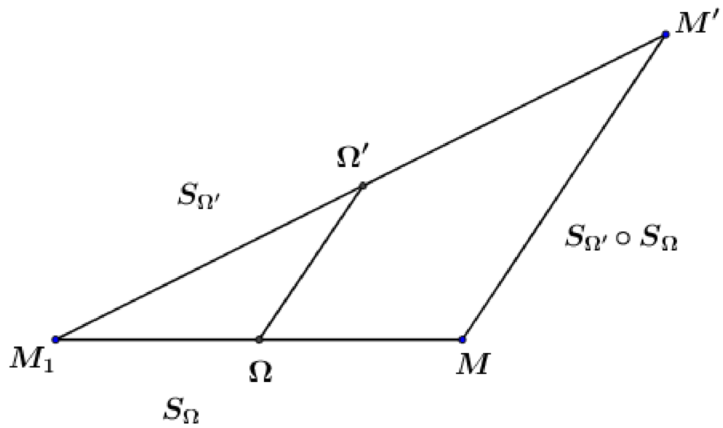
$t_{\overrightarrow{BD}} \circ t_{\overrightarrow{DA}} = t_{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}} = t_{\overrightarrow{BA}}$

$t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}} = t_{\overrightarrow{AC}}$

$t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BD}} = t_{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}} = t_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}} = t_{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}} = t_{2\overrightarrow{AD}}$

13.8 Composée de deux symétries centrales

On considère deux symétries centrales S_Ω et $S_{\Omega'}$. On note M_1 l'image de M par la symétrie de centre Ω et M' l'image de M_1 par la symétrie de centre Ω'.



$$\begin{cases} M_1 = S_\Omega(M) \\ M' = S_{\Omega'}(M_1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega M_1} = -\overrightarrow{\Omega M} \\ \overrightarrow{\Omega' M'} = -\overrightarrow{\Omega' M_1} \end{cases}$$

Soit $\begin{cases} \overrightarrow{\Omega M_1} = \overrightarrow{M\Omega} \\ \overrightarrow{\Omega' M'} = \overrightarrow{M_1\Omega'} \end{cases}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

La relation de Chasles permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} \\
&= \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{\Omega' M'} \\
&= \overrightarrow{\Omega M_1} + \overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{M_1\Omega'} \\
&= \overrightarrow{\Omega\Omega'} + \overrightarrow{\Omega\Omega'} \\
&= 2\overrightarrow{\Omega\Omega'} \\
\overrightarrow{MM'} &= 2\overrightarrow{\Omega\Omega'}
\end{aligned}$$

Donc $\quad M' = t_{2\overrightarrow{\Omega\Omega'}}(M) \quad \mathbf{(1)}$

D'autre part :
$S_{\Omega'} \circ S_\Omega(M) = S_{\Omega'}[S_\Omega(M)] = S_{\Omega'}(M_1) = M'$

$S_{\Omega'} \circ S_\Omega(M) = M' \quad \mathbf{(2)}$

$\mathbf{(1)} = \mathbf{(2)} \Longrightarrow S_{\Omega'} \circ S_\Omega(M) = t_{2\overrightarrow{\Omega\Omega'}}(M)$

D'où $\quad S_{\Omega'} \circ S_\Omega = t_{2\overrightarrow{\Omega\Omega'}}$

Propriété

La composée de deux symétries centrales de centre différent est une translation.

Remarques

▷ Si $\Omega' = \Omega$, on a : $\quad S_\Omega \circ S_\Omega = t_{2\overrightarrow{\Omega\Omega}} = t_{\overrightarrow{O}} = I_d$

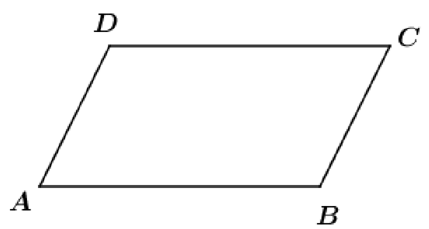
▷ $S_\Omega \circ S_{\Omega'} = t_{2\overrightarrow{\Omega'\Omega}}$ donc $\quad S_\Omega \circ S_{\Omega'} \neq S_{\Omega'} \circ S_\Omega$
On dit que la composée de deux symétries centrales n'est pas commutative.

Exercice

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Montrer que $f = S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A$ est l'application identique.
2. Montrer que $S_C \circ S_B \circ S_A = S_D$.

Solution



1. Montrons que $f = S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A$ est l'application identique.

$$\begin{aligned} f &= S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A \\ &= t_{2\overrightarrow{CD}} \circ t_{2\overrightarrow{AB}} \\ &= t_{2(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB})} \\ &= t_{2(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB})} \\ &= t_{\overrightarrow{O}} = Id \end{aligned}$$

2. Montrons que $S_C \circ S_B \circ S_A = S_D$.

$$\begin{aligned} S_C \circ S_B \circ S_A &= S_D \circ \underbrace{S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A}_{Id} \\ &= S_D \circ Id \\ &= S_D \end{aligned}$$

13.9 Composée d'une translation et d'une symétrie centrale

Soit $t_{\overrightarrow{u}}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, S_Ω une symétrie centrale de centre Ω et $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_\Omega$.

$$\begin{aligned} f &= t_{\overrightarrow{u}} \circ S_\Omega \\ &= S_{\Omega'} \circ \underbrace{S_\Omega \circ S_\Omega}_{Id} = S_{\Omega'} \end{aligned}$$

Cherchons Ω'.
$t_{\overrightarrow{u}} = S_{\Omega'} \circ S_\Omega$ avec $2\overrightarrow{\Omega\Omega'} = \overrightarrow{u} \quad \Rightarrow \overrightarrow{\Omega\Omega'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$.

Propriété

La composée d'une translation et d'une symétrie centrale est une symétrie centrale.

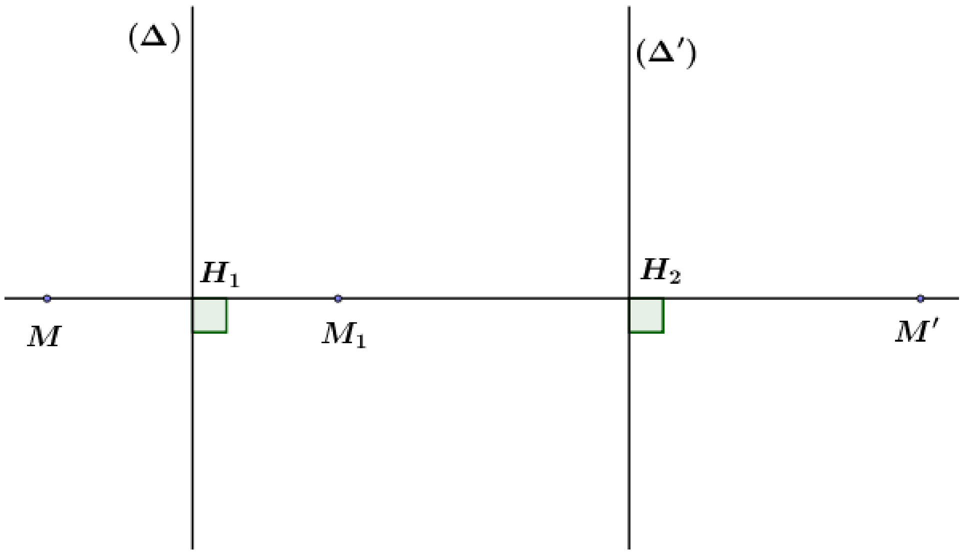
Remarque

Cette composée n'est pas commutative ; C'est-à-dire , $t_{\overrightarrow{u}} \circ S_\Omega \neq S_\Omega \circ t_{\overrightarrow{u}}$

13.10 Composée de deux symétries orthogonales d'axes S_Δ et $S_{\Delta'}$

13.10.1 Cas où (Δ) et (Δ') sont parallèles

Soit (Δ) et (Δ') deux droites parallèles, H_1 un point de (Δ) et H_2 son projeté orthogonal sur (Δ').
Soit M un point , M_1 son symétrique par rapport à (Δ), M' le symétrique de M_1 par rapport à (Δ') , H_1 et H_2 les milieux respectifs des segments $[MM_1]$ et $[M_1M']$.



$$\begin{cases} M_1 = S_\Delta(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_1} = 2\,\overrightarrow{H_1M_1} \quad \mathbf{(1)} \\ M' = S_{\Delta'}(M_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M'} = 2\,\overrightarrow{M_1H_2} \quad \mathbf{(2)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{(1)} + \mathbf{(2)} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} &= 2\,\overrightarrow{H_1H_2} \\ &\Rightarrow \underline{M' = t_{2\,\overrightarrow{H_1H_2}}} \quad \mathbf{(3)} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} S_{\Delta'} \circ S_\Delta(M) &= S_{\Delta'}\left[S_\Delta(M)\right] \\ &= S_{\Delta'}(M_1) \\ &= M' \\ &\Rightarrow \underline{S_{\Delta'} \circ S_\Delta(M) = M'} \quad \mathbf{(4)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{(3)} = \mathbf{(4)}$ donne :

$S_{\Delta'} \circ S_\Delta = t_{2\,\overrightarrow{H_1H_2}}$

Propriété

La composée de deux symétries orthogonales $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ d'axes parallèles est une translation de vecteur $\overrightarrow{u} = 2\,\overrightarrow{H_1H_2}$ où $H_1 \in (\Delta)$ et $H_2 \in (\Delta')$

Remarques

- ▷ La composée de deux symétries orthogonales n'est pas commutative : $S_{\Delta'} \circ S_\Delta \neq S_\Delta \circ S_{\Delta'}$
- ▷ Lorsque les axes (Δ) et (Δ') sont confondus , on obtient : $S_\Delta \circ S_\Delta = Id_p$
- ▷ (Δ') est l'image de (Δ) par la translation du vecteur $\overrightarrow{H_1H_2}$: $(\Delta') = t_{\overrightarrow{H_1H_2}}(\Delta)$

Théorème : Décomposition d'une translation

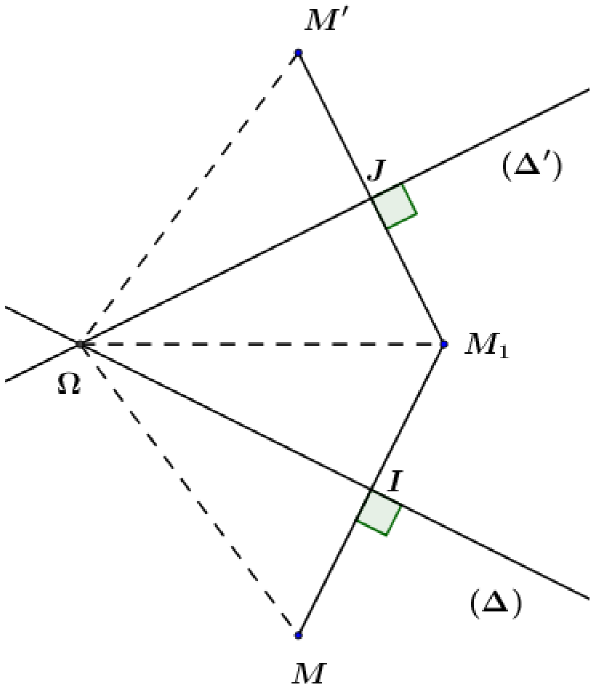
Soit $t_{\overrightarrow{u}}$ une translation de vecteur non nul $\overrightarrow{u}$.
Pour toute droite (Δ) de vecteur normal $\overrightarrow{u}$, il existe une droite (Δ') et une seule telle que : $t_{\overrightarrow{u}} = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ avec :

$$\begin{cases} (\Delta)//(\Delta') \\ \overrightarrow{u} \text{ est normal à } (\Delta) \\ (\Delta') = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(\Delta) \end{cases}$$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

13.10.2 Cas où les axes (Δ) et (Δ') sont sécants

Considérons deux droites (Δ) et (Δ') telles que $(\Delta)\cap(\Delta') = \{\Omega\}$. M est un point quelconque du plan, $M_1 = S_\Delta(M)$ et $M' = S_{\Delta'}(M_1)$. I et J sont des milieux respectifs des segments $[MM_1]$ et $[M_1M']$.



$S_{\Delta'} \circ S_\Delta(\Omega) = S_{\Delta'}\left[S_\Delta(\Omega)\right] = S_{\Delta'}(\Omega) = \Omega$
Ω est donc l'unique point invariant.

S_Δ et $S_{\Delta'}$ étant des isométries, on : $\Omega M = \Omega M_1$ et $\Omega M_1 = \Omega M'$.
Donc

$$\underline{\Omega M = \Omega M'}$$

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) &= (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1}) + (\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M'}) \\
&= 2(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega M_1} + 2(\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega J}) \\
&= 2(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega J}) \\
(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) &= 2\overline{(\Delta, \Delta')}\,[2\pi]
\end{aligned}$$

Donc, $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = \text{Rot}\left(\Omega; 2\overline{(\Delta, \Delta')}\right)$

Propriété

La composée $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ de deux symétries orthogonales d'axes sécants en Ω est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta = 2\overline{(\Delta, \Delta')}$.

Cas particulier

Si (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires , alors $2\overline{(\Delta, \Delta')} = \pi\,[2\pi]$ et $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ est la symétrie centrale de centre Ω.
$S_{\Delta'} \circ S_\Delta = R(\Omega; \pi) = S_\Omega$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Théorème : Décomposition d'une rotation

Soit $r = R(\Omega;\theta)$ une rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ.

Pour toute droite (Δ), il existe une droite (Δ') telle que $r = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ et $\begin{cases} (\Delta) \cap (\Delta') = \{\Omega\} \\ \overline{(\Delta, \Delta')} = \dfrac{\theta}{2}\,[2\pi] \end{cases}$

Exercice 1

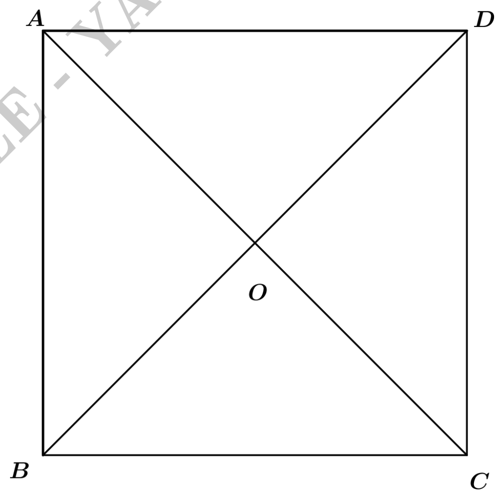
$ABCD$ est un carré de sens direct et de centre O. Identifier et caractériser les transformations ponctuelles suivantes :
$f_1 = S_{DC} \circ S_{AB}$; $f_2 = S_{AC} \circ S_{AB}$; $f_3 = S_{DC} \circ S_{AC}$; $f_4 = S_{BD} \circ S_{AC}$.

Exercice 2

Soit ABC un triangle équilatéral et A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

1. Quelle est la nature de la transformation
   $g = S_{BC} \circ S_{B'C'}$
2. Déterminer la droite (Δ) telle que :
   $S_{AA'} \circ S_{\Delta} = t_{\overrightarrow{BC}}$

Solution 1



• $f_1 = S_{DC} \circ S_{AB}$
$(DC)//(AB)$: f_1 est donc une translation.
$f_1 = S_{DC} \circ S_{AB} = t_{2\overrightarrow{AD}} = t_{2\overrightarrow{BC}}$

• $f_2 = S_{AC} \circ S_{AB}$
$(AC) \cap (AB) = \{A\}$, f_2 est donc une rotation de centre A.
$f_2 = R\left(A; 2\overline{(AB, AC)}\right) = R(A; 2 \times \frac{\pi}{4}) = R(A; \frac{\pi}{2})$

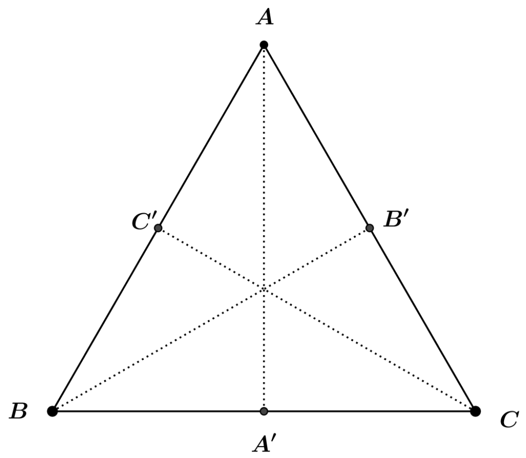
• $f_3 = S_{DC} \circ S_{AC}$
$(DC) \cap (AC) = \{C\}$, f_3 est donc une rotation de centre C.
$f_3 = S_{DC} \circ S_{AC} = R\left(C; 2\overline{(AC, DC)}\right)$
$= R(C; 2 \times (-\frac{\pi}{4})) = R(C; -\frac{\pi}{2})$

• $f_4 = S_{BD} \circ S_{AC}$
$(BD) \cap (AC) = \{O\}$, f_4 est donc une rotation de centre O.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

$f_4 = R\left(O; 2\overline{(AC, BD)}\right) = R(O; 2 \times \frac{\pi}{2}) = R(O; \pi) = S_O$.
f_4 est donc une symétrie centrale de centre O.

Solution 2



1. nature de la transformation $g = S_{BC} \circ S_{B'C'}$.
   $(BC)//(B'C')$, g est donc une translation.
2. Déterminons la droite (Δ) telle que :
   $S_{AA'} \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{BC}}$
   $\begin{cases} (AA')//(\Delta) \\ (AA') = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(\Delta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (AA')//(\Delta) \\ (\Delta) = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(AA') \end{cases}$
   (Δ) est la droite passant par B et parallèle à (AA').

13.11 Composée de deux rotations

13.11.1 De même centre

Soit r_1 et r_2 deux rotations de centre Ω et d'angles respectifs θ_1 et θ_2.
$r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.
$r_2(\Omega, \theta_2) \circ r_1(\Omega, \theta_1) = r(\Omega, \theta_1 + \theta_2)$

Cas particuliers

▷ Si $\theta_1 + \theta_2 = 0\,[2\pi]$, alors $r_2 \circ r_1$ est l'application identité : $r_2 \circ r_1 = Id_p$
▷ Si $\theta_1 + \theta_2 = \pi\,[2\pi]$, alors $r_2 \circ r_1$ est la symétrie de centrale de centre Ω.

13.11.2 De centre distincts

Soit Ω_1 et Ω_2 les centres respectifs des rotations r_1 et r_2.
$r_2(\Omega_2, \theta_2) \circ r_1(\Omega_1, \theta_1) = r(\Omega, \theta_1 + \theta_2)$
où Ω est un point à déterminer.

Comment Déterminer le centre Ω ?

▷ **Première méthode :**
Soit A et B les points du plan tels que
$r_2 \circ r_1(A) = A'$ et $r_2 \circ r_1(B) = B'$, avec $(\theta_1 + \theta_2 \neq 0)$. Le centre Ω de $r_2 \circ r_1$ est le point de

concours des médiatrices des segments $[AA']$ et $[BB']$.

▷ **Deuxième méthode :**

- On décompose la rotation $r_2(\Omega_2,\theta_2)$ en deux symétries orthogonales telle que :
  $r_2(\Omega_2,\theta_2) = S_{\Delta'} \circ S_{(\Omega_1\Omega_2)}$ et $\overline{(\Omega_1\Omega_2,\Delta')} = \dfrac{\theta_2}{2}$
- On décompose la rotation $r_1(\Omega_1,\theta_1)$ en deux symétries orthogonales telle que :
  $r_1(\Omega_1,\theta_1) = S_{(\Omega_1\Omega_2)} \circ S_{\Delta}$ et $\overline{(\Delta,\Omega_1\Omega_2)} = \dfrac{\theta_1}{2}$
  On a :

$$r_2(\Omega_2,\theta_2)\circ r_1(\Omega_1,\theta_1) = S_{\Delta'} \circ \underbrace{S_{(\Omega_1\Omega_2)} \circ S_{(\Omega_1\Omega_2)}}_{Id_p} \circ S_{\Delta}$$

$$r_2(\Omega_2,\theta_2)\circ r_1(\Omega_1,\theta_1) = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$$

Le centre Ω de la rotation $r_2 \circ r_1$ est le point de concours des droites (Δ) et (Δ') :
$\{\Omega\} = (\Delta) \cap (\Delta')$

Propriété

Si $\theta_1 + \theta_2 = 0$, alors $r_2 \circ r_1$ est une translation dont le vecteur a pour origine le centre Ω_1 de r_1 et a pour extrémité l'image de Ω_1 par $r_2 \circ r_1$.

Remarque

La composée de deux rotations n'est pas commutative : $r_2 \circ r_1 \neq r_1 \circ r_2$.

13.12 Composée d'une translation et d'une rotation

Soit $t_{\overrightarrow{u}}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $r(A,\theta)$ une rotation de centre A et d'angle $\theta \neq 0$.
On pose : $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ r(A,\theta)$

- On décompose $t_{\overrightarrow{u}}$ en deux symétries orthogonales : $t_{\overrightarrow{u}} = S_{\Delta'} \circ S_D$ avec
  $\begin{cases} (\Delta')//(D) \\ (\Delta') = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(D) \\ (D) \text{ passe par A et a pour vecteur normal } \overrightarrow{u} \end{cases}$
- On décompose $r(A,\theta)$ en deux symétries orthogonales : $r(A,\theta) = S_D \circ S_{\Delta}$ avec
  $\begin{cases} (D)\cap(\Delta) = \{A\} \\ \overline{(\Delta,D)} = \dfrac{\theta}{2}\,[2\pi] \end{cases}$

Donc,

$$\begin{aligned} f &= t_{\overrightarrow{u}} \circ r(A,\theta) \\ &= S_{\Delta'} \circ \underbrace{S_D \circ S_D}_{Id_p} \circ S_{\Delta} \\ &= S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} \end{aligned}$$

$$\{\Omega\} = (\Delta) \cap (\Delta')$$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Propriété

La composée d'une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ et d'une rotation $r(A,\theta)$ est une rotation de centre Ω et d'angle θ.
$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ r(A,\theta) = r(\Omega,\theta)$

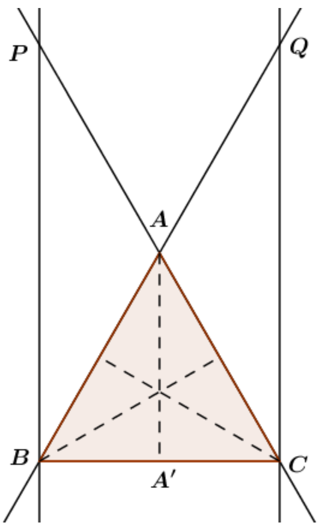
Remarque

En générale, cette composée n'est pas commutative. $t_{\overrightarrow{u}} \circ r(A,\theta) \neq r(A,\theta) \circ t_{\overrightarrow{u}}$

Exercice

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et A' milieu de $[BC]$. Q est le point d'intersection de La droite (AB) avec celle passant par C et parallèle à (AA'). P est le point d'intersection de La droite (AC) avec celle passant par B et parallèle à (AA').
Déterminer les applications suivantes :
a) $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ r(A, \frac{\pi}{3})$
b) $g = r(A, \frac{\pi}{3}) \circ t_{\overrightarrow{BC}}$

Solution



a) $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ r(A, \frac{\pi}{3})$

- $t_{\overrightarrow{BC}} = S_{\Delta'} \circ S_D$ avec
$$\begin{cases} (\Delta') // (D) \\ (\Delta') = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(D) \\ (D) \text{ passe par A et a pour vecteur normal } \\ \overrightarrow{BC} \end{cases}$$
Donc $(D) \perp (BC) \Rightarrow (D) = (AA')$.
$(\Delta') = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(AA') \Rightarrow (\Delta') = (CQ)$
$$\underline{t_{\overrightarrow{BC}} = S_{(CQ)} \circ S_{(AA')}}$$

- $r(A, \frac{\pi}{3}) = S_D \circ S_\Delta$ avec
$$\begin{cases} (D) \cap (\Delta) = \{A\} \\ (\overline{\Delta, D}) = \frac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (AA') \cap (\Delta) = \{A\} \\ (\overline{\Delta, AA'}) = \frac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases}$$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

$$(\Delta) = (AB)$$

$$\underline{r(A, \frac{\pi}{3}) = S_{(AA')} \circ S_{(AB)}}$$

$$f = S_{(CQ)} \circ \underbrace{S_{(AA')} \circ S_{(AA')}}_{Id_p} \circ S_{(AB)} = S_{(CQ)} \circ S_{(AB)}$$

$$(CQ) \cap (AB) = \{Q\}$$

$\boxed{f = r(Q, \frac{\pi}{3})}$

b) $g = r(A, \frac{\pi}{3}) \circ t_{\overrightarrow{BC}}$

- $t_{\overrightarrow{BC}} = S_D \circ S_{\Delta'}$ avec

$$\begin{cases} (D)//(\Delta') \\ (D) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(\Delta') \\ (D) \text{ passe par A et a pour vecteur normal} \\ \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

$$(D) = (AA')$$

$$(\Delta') = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}(AA') \Rightarrow (\Delta') = (BP)$$

$$\underline{t_{\overrightarrow{BC}} = S_{(AA')} \circ S_{(BP)}}$$

- $r(A, \frac{\pi}{3}) = S_\Delta \circ S_D$ avec

$$\begin{cases} (\Delta) \cap (D) = \{A\} \\ (\overline{D, \Delta}) = \dfrac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\Delta) \cap (AA') = \{A\} \\ (\overline{AA', \Delta}) = \dfrac{\pi}{6}\,[2\pi] \end{cases}$$

$$(\Delta) = (AC)$$

$$\underline{r(A, \frac{\pi}{3}) = S_{(AC)} \circ S_{(AA')}}$$

$$\begin{aligned} g &= S_{(AC)} \circ \underbrace{S_{(AA')} \circ S_{(AA')}}_{Id_p} \circ S_{(BP)} \\ &= S_{(AC)} \circ S_{(BP)} \end{aligned}$$

$$(AC) \cap (BP) = \{P\}$$

$\boxed{f = r(P, \frac{\pi}{3})}$

13.12.1 Composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation

Soit $t_{\overrightarrow{u}}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $S_{(\Delta)}$ une symétrie orthogonale d'axe (Δ).
On pose : $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{(\Delta)}$
▷ Premier cas :
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal à (Δ), alors
$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{(\Delta)}$ est une symétrie orthogonale d'axe (Δ') parallèle à (Δ).

$t_{\overrightarrow{u}} = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ avec

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

$$\begin{cases}(\Delta)//(\Delta') \\ (\Delta') = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}(\Delta)\end{cases}$$

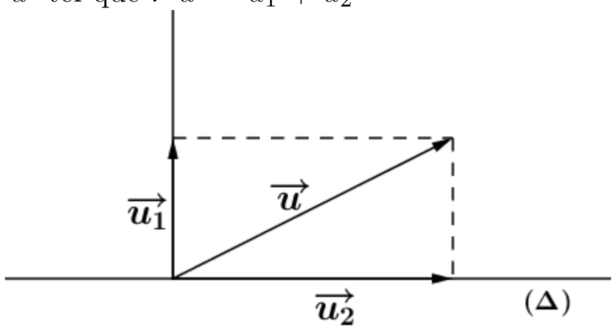
On a : $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{(\Delta)} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} \circ S_{(\Delta)} = S_{\Delta'}$

▷ Deuxième cas :

Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (Δ), alors

$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{u}}$ est une symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{u}$. On note : $f = G((\Delta), \overrightarrow{u})$ ▷ Troisième cas :

Si $\overrightarrow{u}$ n'est ni un vecteur normal, ni un vecteur directeur de (Δ), alors on décompose le vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$



$$\begin{aligned} f &= S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{u}} = S_{(\Delta)} \circ t_{(\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2})} \\ &= \underbrace{S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{u_1}}}_{S_{(\Delta')}} \circ t_{\overrightarrow{u_2}} \\ &= S_{(\Delta')} \circ t_{\overrightarrow{u_2}} \end{aligned}$$

$f = S_{(\Delta')} \circ t_{\overrightarrow{u_2}}$ où $\overrightarrow{u_2}$ est un vecteur directeur de (Δ')

f est donc une symétrie glissée d'axe (Δ') et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$.

13.12.2 Composée d'une rotation et une symétrie orthogonale

Soit $r(\Omega, \theta)$ une rotation de centre Ω et d'angle θ et $S_{(\Delta)}$ une symétrie orthogonale d'axe (Δ).

On pose : $f = r(\Omega, \theta) \circ S_{(\Delta)}$

▷ Premier cas :

Si $\Omega \in (\Delta)$, alors $f = r(\Omega, \theta) \circ S_{(\Delta)}$ est une symétrie orthogonale.

En effet,

$$\begin{aligned} f = r(\Omega, \theta) \circ S_{(\Delta)} &= S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)} \\ &= S_{(\Delta')} \end{aligned}$$

avec $r(\Omega, \theta)$: $\begin{cases}(\Delta) \cap (\Delta') = \{\Omega\} \\ (\overline{\Delta, \Delta'}) = \dfrac{\theta}{2}[2\pi]\end{cases}$

▷ Deuxième cas :

Si Ω

cancel$\in$ (Δ), alors $f = r(\Omega, \theta) \circ S_{(\Delta)}$ est une symétrie glissée

Exercice 1

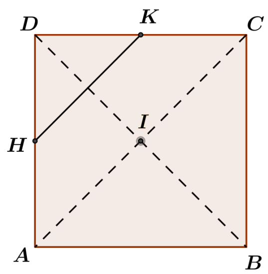
$ABCD$ est un carré de sens direct et de centre I. H et K sont les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[DC]$.

Identifier et caractériser les transformations suivantes : $f_1 = S_{(HK)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$; $f_2 = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)}$; $f_3 = S_{(HK)} \circ t_{\overrightarrow{ID}}$; $f_4 = t_{\overrightarrow{HK}} \circ S_{(AB)}$

Exercice 2

$ABCD$ est un carré de sens direct et de centre O. I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Donner la nature puis caractériser les applications :
$f = r(A, \frac{\pi}{2}) \circ S_{(AC)}$ et $g = r(O, \frac{\pi}{2}) \circ S_{(BC)}$

Solution 1



a) $f_1 = S_{(HK)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$
$\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de la droite (HK). On en déduit que f_1 est la symétrie glissée d'axe (HK) et de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
b) $f_2 = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)}$

$$\begin{aligned} f_2 = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)} &= t_{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})} \circ S_{(AB)} \\ &= t_{\overrightarrow{AB}} \circ \underbrace{t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)}}_{S_\Delta} \\ &= t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_\Delta \end{aligned}$$

Car le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est normal à (AB).
$t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)} = S_\Delta \quad \Rightarrow \quad t_{\overrightarrow{AD}} = S_\Delta \circ S_{(AB)}$
avec $\Delta = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}(AB) = (IH)$

$$\boxed{f_2 = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(IH)}}$$

f_2 est donc la symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et d'axe (IH).

c) $f_3 = S_{(HK)} \circ t_{\overrightarrow{ID}}$
f_3 est une symétrie orthogonale car, $\overrightarrow{ID}$ est normal à (HK).
$f_3 = S_{(HK)} \circ t_{\overrightarrow{ID}} = S_{(HK)} \circ (S_{(HK)} \circ S_\Delta) = S_\Delta$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

avec $\begin{cases} (\Delta)//(HK) \\ (\Delta) = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{ID}}(HK) = (AC) \end{cases}$

$$\boxed{f_3 = S_{(AC)}}$$

f_3 est donc une symétrie orthogonale d'axe (AC).

d) $f_4 = t_{\overrightarrow{HK}} \circ S_{(AB)}$

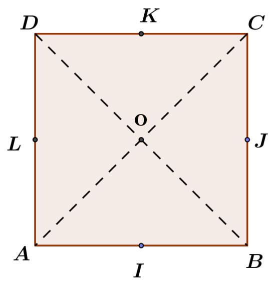
$$\begin{aligned} f_4 = t_{\overrightarrow{HK}} \circ S_{(AB)} &= t_{(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DK})} \circ S_{(AB)} \\ &= t_{\overrightarrow{DK}} \circ t_{\overrightarrow{HD}} \circ S_{(AB)} \\ &= t_{\overrightarrow{DK}} \circ \underbrace{t_{\overrightarrow{AH}} \circ S_{(AB)}}_{S_{(\Delta)}} \\ &= t_{\overrightarrow{DK}} \circ S_{(\Delta)} \end{aligned}$$

Car $\overrightarrow{AH}$ est normal à (AB).
$t_{\overrightarrow{AH}} \circ S_{(AB)} = S_{(\Delta)} \quad \Rightarrow \quad t_{\overrightarrow{AH}} = S_{(\Delta)} \circ S_{(AB)}$
avec $\begin{cases} (\Delta)//(AB) \\ (\Delta) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}}(AB) \end{cases}$
(Δ) est donc la médiatrice de $[AH]$.

$$\boxed{f_4 = t_{\overrightarrow{DK}} \circ S_{(\Delta)}}$$

f_4 est donc une symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{DK}$ et d'axe (Δ) la médiatrice du segment $[AH]$.

Solution 2



a) $f = r(A, \frac{\pi}{2}) \circ S_{(AC)}$
$A \in (AC)$, f est donc une symétrie orthogonale.
$f = S_{(AD)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)} = S_{(AD)}$

$\boxed{f = S_{(AD)}}$

b)$g = r(O, \frac{\pi}{2}) \circ S_{(BC)}$
$O \notin$, g est donc une symétrie glissée.
$r(O, \frac{\pi}{2}) = S_{(OD)} \circ S_{(OK)}$

$$\begin{aligned} g &= S_{(OD)} \circ S_{(OK)} \circ S_{(BC)} \\ &= S_{(OD)} \circ t_{2\overrightarrow{JO}} \quad \text{car} \quad (OK)//(BC) \\ &= S_{(OD)} \circ t_{\overrightarrow{CD}}, \quad \text{or} \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} \\ &= \underbrace{S_{(OD)} \circ t_{\overrightarrow{CO}}}_{S_{(\Delta)}} \circ t_{\overrightarrow{OD}} \\ g &= S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{CO}} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{CO} \quad \text{est normal à} \quad (OD) \end{aligned}$$

$S_{(OD)} \circ t_{\overrightarrow{CO}} = S_{(\Delta)} \quad \Rightarrow \quad t_{\overrightarrow{CO}} = S_{(CO)} \circ S_{(\Delta)}$
avec $\begin{cases} (\Delta)//(OD) \\ (\Delta) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{CO}}(OD) = (JK) \end{cases}$
D'où

$$\boxed{g = S_{(JK)} \circ t_{\overrightarrow{OD}}}$$

g est donc une symétrie glissée d'axe (JK) et de vecteur $\overrightarrow{OD}$.

13.13 Étude d'une symétrie glissée

13.13.1 Définition

Soit (Δ) est droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
On appelle symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{u}$ la composée commutative d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) et la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
On note :
$f = S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{(\Delta)} = G((\Delta), \overrightarrow{u})$.

13.13.2 Éléments caractéristiques

Une symétrie glissée f est caractérisée par son axe et son vecteur.

Vecteur de la translation

Si f est une symétrie glissée, alors $f \circ f = t_{2\overrightarrow{u}}$

Axe de la symétrie

$$\begin{aligned} f &= S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{u}} \\ f \circ t_{-\overrightarrow{u}} &= S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{-\overrightarrow{u}} \\ &= S_{(\Delta)} \end{aligned}$$

D'où $S_{(\Delta)} = f \circ t_{-\overrightarrow{u}}$

$\boxed{(\Delta) : \left\{ M \in \mathscr{P} / \det(\overrightarrow{MM'}; \overrightarrow{u}) = 0 \right\}}$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

13.13.3 Réciproque d'une symétrie glissée

La réciproque d'une symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{u}$ est une symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $-\overrightarrow{u}$.
$G((\Delta);\overrightarrow{u})^{-1} = G((\Delta);-\overrightarrow{u})$

Propriétés

Soit f une symétrie glissée définie par : $f = S_{(\mathscr{D})} \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{(\mathscr{D})}$.
▷ Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{O}$, alors f n'a pas des points invariants.
▷ $Invf = \{\}$.
▷ Si $S_{(\mathscr{D})}(M) = f \circ t_{-\overrightarrow{u}}(M) = M'$, alors $(\mathscr{D})$ est la médiatrice du segment $[MM']$.
▷ Si $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$, alors f est une symétrie glissée d'axe $(\mathscr{D})$ passant par les milieux des segments $[AA']$ et $[BB']$ et de vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ avec $f \circ f(A) = C$; $C \neq A$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Chapitre 14

HOMOTHÉTIES

14.1 Définition

Soit Ω un point du plan et k un nombre réel non nul. On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k notée $h_{(\Omega;k)}$, toute application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

Remarques

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
▷ si $k = 1$, alors h est une application identique.
▷ si $k = -1$, alors h est une symétrie centrale de centre Ω.

14.2 Propriétés

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
▷ si $k \neq 1$, h admet un point invariant qui est son centre Ω.
▷ si $k = 1$, tous les points du plan sont invariants par h.
▷ Toute homothétie h du plan est une transformation du plan. La transformation réciproque de h est $h^{-1}_{(\Omega;\frac{1}{k})}$.
▷ si M a pour image M' par h, alors les points M, M' et Ω sont alignes.
▷ Si pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par h, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.
▷ Une homothétie h multiplie les longueurs par $|k|$ et les aires par k^2.
▷ Une homothétie conserve : les angles orientés ; le barycentre ; le contact ; le milieu ; le parallélisme ; l'orthogonalité.

14.3 Expression analytique

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points $M(x,y)$, $M'(x',y')$ et $\Omega(x_0,y_0)$ trois points du plan.
Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ telle que $h(M) = M'$.

$$h(M) = M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x'-x_0 \\ y'-y_0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$$

D'où l'expression analytique de h est : $\boxed{h : \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}}$

En posant $p = (1-k)x_0$ et $q = (1-k)y_0$; on a : $h : \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$

Propriétés

Soit h une homothétie définie analytiquement par : $h : \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$

▷ si $k = 1$, alors h est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}(p; q)$.

▷ si $k \neq 1$, alors h est une homothétie de rapport k et de centre $\Omega\left(\dfrac{p}{1-k}; \dfrac{q}{1-k}\right)$.

Exercice 1

Le plan $(\mathscr{P})$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit A un point du plan tel que : $A(3, -2)$. Déterminer l'expression analytique de l'homothétie h de centre A et de rapport $k = -5$.

Exercice 2

Soit h un transformation plane définie analytiquement par : $h : \begin{cases} x' = 7x - 6 \\ y' = 7y + 12 \end{cases}$
Montrer que h est une homothétie dont on précisera le rapport k et le centre B.

14.4 Détermination géométrique d'une homothétie

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan. On veut déterminer l'homothétie h qui transforme A en A' et B' en B c'est-à-dire

$$\begin{cases} h(A) = A' \\ h(B) = B' \end{cases}$$

▷ **Existence**
h existe si et seulement si : $A \neq A'$ et $B \neq B'$ de plus $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

▷ **Centre**
Soit Ω le centre de h. Ω est le point d'intersection des droites $(A'A) \cap (BB') = \{\Omega\}$.

▷ **Rapport**
Soit Ω le centre de l'homothétie h et k son rapport.
On a : $\overrightarrow{\Omega A}' = k\overrightarrow{\Omega A}$ ou $k = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

14.5 Composée de deux homothéties

14.5.1 Composée de deux homothéties de même centre

Soit $f = h_1(\Omega; k_1) \circ h_2(\Omega; k_2)$.

Propriété

f est une homothétie de centre Ω et rapport $\alpha = k_1 k_2$.
On a : $f = h(\Omega; \alpha)$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Remarques

Soit $f = h_1(\Omega; k_1) \circ h_2(\Omega; k_2)$.
▷ Si $\alpha = 1$, alors f est l'application identique.
▷ Si $\alpha = -1$, alors f est une symétrie centrale de centre Ω.
N.B :
La composée de deux homothéties de même centre est commutative.

14.5.2 Composée de deux homothéties de centre distincts

Propriétés

Soit $f = h_1(O; k_1) \circ h_2(O'; k_2)$. On distingue trois cas.
▷ premier cas : si $k_1 \times k_2 = 1$
f est une translation de vecteur $\vec{u}$ tel que : $\overrightarrow{u} = (1 - k_1)\overrightarrow{O'O} \Longrightarrow f = t_{\vec{u}}$.
▷ deuxième cas : si $k_1 \times k_2 \neq 1$.
f est une homothétie de rapport $k = k_1 \times k_2$ et de centre Ω tel que $\overrightarrow{O'\Omega} = \dfrac{1 - k_1}{1 - k_1 \times k_2}\overrightarrow{O'O}$.
▷ troisième cas : si $k_1 \times k_2 = -1$
f est une symétrie centrale de centre Ω tel que $\overrightarrow{O'\Omega} = \dfrac{1 - k_1}{2}\overrightarrow{O'O}$.
NB : $h_1 \circ h_2 \neq h_2 \circ h_1$.

Exercice 1

Soit ABC un triangle quelconque. On désigne par h et h' les homothéties de centres respectifs 2 et $-\frac{1}{3}$.

1. Démontrer que $h' \circ h = f$ est une homothétie dont on déterminer ale centre et le rapport.
2. Construire l'image du point A par f.
3. En déduire une détermination du centre de f.

Exercice 2

Soit ABC un triangle quelconque. On désigne par h et h' les homothéties de centres respectifs B et C de rapport respectifs $\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{3}$.

1. Démontrer que $g = h' \circ h$ est une translation.
2. Construire l'image de A par g.
3. En déduire une détermination du vecteur de g.
4. Exprimer ce vecteur en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

14.6 Composée d'une homothétie et d'une translation

14.6.1 Propriété

Soit h une homothétie de centre A et de rapport k avec $k \neq 1$ et une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul.
$h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport k.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

14.6.2 Détermination du centre de $h\circ t$ et $t\circ h$

▷ Pour $h\circ t$

Soit $f=h\circ t$ et Ω le centre de f.
Soit Ω_1 un point du plan tel que $t_{\overrightarrow{u}}(\Omega)=\Omega_1$ et $h(\Omega_1)=\Omega$.
$\bullet\, t_{\overrightarrow{u}}(\Omega)=\Omega_1 \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega\Omega}_1=\overrightarrow{u}$
$\bullet\, h(\Omega_1)=\Omega \Longrightarrow \overrightarrow{A\Omega}=k\overrightarrow{A\Omega}_1$.
$\overrightarrow{A\Omega}=k(\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega\Omega}_1) \Longrightarrow \overrightarrow{A\Omega}=k\overrightarrow{A\Omega}+k\overrightarrow{\Omega\Omega}_1=k\overrightarrow{A\Omega}+k\overrightarrow{u}$
On a $\overrightarrow{A\Omega}=\dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{u}$.

▷ Pour $t\circ h$

Soit $f=t\circ th$ et Ω le centre de f.
Soit Ω_1 un point du plan tel que $h(\Omega)=\Omega_1$ et $t_{\overrightarrow{u}}(\Omega_1)=\Omega$.
$\bullet\, h(\Omega)=\Omega_1 \Longrightarrow \overrightarrow{A\Omega}_1=k\overrightarrow{A\Omega}$
$\bullet\, t(\Omega_1)=\Omega \Longrightarrow \Omega_1\Omega=\overrightarrow{u}$
$\overrightarrow{\Omega_1\Omega}=\overrightarrow{\Omega_1 A}+\overrightarrow{A\Omega}=-\overrightarrow{A\Omega_1}+\overrightarrow{A\Omega}$
$\overrightarrow{\Omega_1\Omega}=-k\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{A\Omega} \Longrightarrow \overrightarrow{A\Omega}=\dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{u}$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Quatrième partie

ORGANISATION DES DONNÉES

Chapitre 15

STATISTIQUE

15.1 GÉNÉRALITÉS

15.1.1 La statistique

La statistique est une science qui a pour objet de collecter, classer, analyser et présenter de façon compréhensible un ensemble de données. Ces données peuvent prévenir de plusieurs domaines comme : la médecine, l'éducation, l'économie,...

15.1.2 Les statistiques

Les statistiques sont les résultats produit par la statistique entant que science.

15.1.3 Collecte des données

Elle se fait au moyen de deux approches : le recensement et le sondage.

a) Le recensement

Il consiste à interroger chaque individu de la population cible.

b) Le sondage

Il consiste à interroger une partie de la population qu'on appelle échantillon.

15.2 Série statistique à un seul caractère

15.2.1 Définition

On appelle série statistique à un seul caractère ou à une variable X, l'ensemble des couples (x_i, n_i) souvent données sous la forme suivante :

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	....	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	...	n_k

15.2.2 Effectif relatif

On appelle effectif relatif noté n_i, le nombre d'individus d'une population présentant la modalité x_i du caractère X.

15.2.3 Effectif total

L'effectif total noté N est la des effectifs relatifs.
On a : $N = \sum_{k=1}^{p} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_p$.

15.2.4 Fréquence relative

On appelle fréquence relative, le quotient entre l'effectif relatif et l'effectif total.
On a : $f_i = \frac{n_i}{N} \times 100$.
N.B : La somme de toutes les fréquences d'une série statistique est égale à 1.

15.2.5 Moyenne arithmétique

On appelle moyenne arithmétique le nombre réel noté $\overline{x}$ défini par : $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$.

15.2.6 Variance

On appelle variance le nombre réel positif noté $V(x)$ défini par :
$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \overline{x}^2$.

15.2.7 Écart-type

C'est la racine carré de la variance.
On a : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$.

Exercice

Soit la série statistique suivante :

x_i	59	62	65	68	71	74	77
n_i	1	4	6	7	5	5	2

1. Donner l'effectif total de cette série.
2. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série.

15.3 Série statistique à deux variables

15.3.1 Définition

On appelle série statistique double ou à deux variables (X, Y), l'ensemble des triplets $(x_i; y_j; n_{ij})$. On parle aussi de distribution double, avec n_{ij} l'effectif du couple $(x_i; y_j)$.
On distingue deux types de séries statistiques à double caractères :
▷ série statistique double linéaire ;
▷ série statistique à double entrée où pondérée.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

15.3.2 Série statistique double linéaire

Définition

Une série statistique double est dite linéaire lorsque une seule valeur du caractère x correspond à une seule valeur du caractère y et inversement.

Elle se présente sous la forme suivante :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_p
y_i	y_1	y_2	y_3	...	y_p

N.B : Dans cette série les effectifs partiels sont partout identiques et égaux à 1.

15.3.3 Série statistique à double entrée

Définition

Une série statistique est dite à double entrée lorsque une valeur du caractère X correspond à plusieurs valeurs du caractère Y et inversement.
Elle se présente sous la forme suivante :

y_j \ x_i	x_1	x_2	...	x_p
y_1	n_{11}	n_{21}	...	n_{p1}
y_2	n_{12}	n_{22}	...	n_{p2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	n_{1q}	n_{2q}	...	n_{pq}

15.3.4 Nuage des points associés à une série double

Soit $(x_i; y_j; n_{ij})$ une série statistique à deux caractères quantitatifs.
On appelle nuage des points l'ensemble des points $M_{ij}(x_i, y_i)$.
N.B : Dans le cas d'une série double linéaire, le nuage des points est l'ensemble des points $M_i(x_i, y_i)$.

15.3.5 Représentation graphique du nuage des points

Le nuage des points est représenté de deux manières :

a) Représentation par points pondérés

On indique à côté de chaque point M_{ij} l'effectif n_{ij}.

b) Représentation par tâches

Chaque point M_{ij} est remplacé par un disque dont l'aire est proportionnelle à n_{ij}.

Exemple

Soit la série double suivante :

y_j \ x_i	0	2	3	4
1	1	2	3	5
3	5	2	8	6

1. Déterminer le nuage des points de cette série statistique.
2. Représenter le nuage des points dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

15.3.6 Lois marginales ou distributions marginales

On appelle loi marginale de X ou de Y, la loi de X ou Y extraite d'un tableau statistique à double entrée.

a) Loi marginale dans le cas d'un tableau à double entrée

Exemple

Soit la série double suivante :

$Y \backslash X$	0	2	3	4
1	1	2	3	5
3	5	2	8	6

Donner les lois marginales de X et Y.

Solution

Donnons les lois marginales de X et Y

▷ Pour X

x_i	0	2	3	4	$\sum$
n_i	6	4	11	11	$N = 32$

▷ Pour Y

y_j	1	3	$\sum$
n_j	11	21	$N = 32$

b) Loi marginale dans le cas d'un tableau linéaire

Exercice

Soit la série statistique suivante :

X	59	62	65	68	71	74	77
Y	12	43	46	54	55	60	62

Donner les lois marginales de X et Y.

Solution

Donnons les lois marginales de X et Y

▷ Pour X

x_i	59	62	65	68	71	74	77	$\sum$
n_i	1	1	1	1	1	1	1	$N = 7$

▷ Pour Y

y_i	12	43	46	54	55	60	62	$\sum$
n_i	1	1	1	1	1	1	1	$N = 7$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

15.3.7 Point moyen

Définitions

▷ Cas d'une série statistique à double entrée
Soit $(x_i;y_j;n_{ij})$ une série statistique à deux caractères quantitatifs.
On appelle point moyen du nuage le point $G(\overline{x},\overline{y})$ barycentre de tous les points du nuage de cette série, avec $\overline{x}=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_ix_i$ et $\overline{y}=\dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{q}n_jx_j$.
▷ Cas d'une série statistique double linéaire
Soit $(x_i;y_j)$ une série statistique à deux caractères quantitatifs.
On appelle point moyen du nuage le point $G(\overline{x},\overline{y})$ barycentre de tous les points du nuage de cette série, avec $\overline{x}=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}x_i$ et $\overline{y}=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{q}y_i$

15.3.8 Transformation des tableaux statistiques doubles

a) Passage d'un tableau à double entrée à un tableau linéaire

Exercice

Soit la série double suivante :

y_j \ x_i	0	2	3	4
1	1	2	3	0
3	0	2	1	1

1. Donner l'effectif total de cette série statistique.
2. Transformer ce tableau à un tableau linéaire.

Solution

1. Donnons l'effectif total de cette série statistique.
   $N=1+2+3+0+0+2+1+1=10$
2. Transformons ce tableau à un tableau linéaire.
   $(0,1)\longrightarrow 1$, $(0,3)\longrightarrow 0$, $(2,1)\longrightarrow 2$, $(2,3)\longrightarrow 2$, $(3,1)\longrightarrow 3$, $(3,3)\longrightarrow 1$, $(4,1)\longrightarrow 0$ et $(4,3)\longrightarrow 1$.
   On a le tableau suivant :

X	0	2	2	2	2	3	3	3	3	4
Y	1	1	1	3	3	1	1	1	3	3

b) Passage d'un tableau linéaire à un tableau à double entrée

Exercice

Soit la série double suivante :

X	0	2	1	0	2	3	3	3
Y	1	1	0	1	1	1	2	1

1. Donner l'effectif total de cette série statistique.
2. Transformer ce tableau à un tableau à double entrée.

Solution

1. Donnons l'effectif total de cette série statistique.
   $N=8$

2. Transformons ce tableau à un tableau double entrée.

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0	1	0	0
1	2	0	2	2
2	0	0	0	1

15.4 Inerties du nuage des points

15.4.1 Inertie minimale

Définition

On appelle inertie minimale, l'inertie par rapport au point moyen $G(\overline{x}, \overline{y})$.
On le note par I_G et est définie par : $I_G = N\left[V(x) + V(y)\right]$.

15.4.2 Inertie par rapport à un point

Définition

Soit $A(a,b)$ un point du plan. On appelle inertie du nuage par rapport au point A, le nombre réel positif noté I_A défini par :
$I_A = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij} \| \overrightarrow{AM_{ij}} \|^2$ ou $I_A = I_G + NAG^2$ (Théorème de Huyguens).

15.4.3 Propriétés

▷ L'inertie du nuage par rapport au point A est dite minimale, si et seulement si $A = G$.
▷ L'inertie du nuage par rapport au point A est dite maximale, si et seulement si $A \neq G$.

15.5 Ajustement linéaire : Méthode de moindres carrées

15.5.1 Covariance

Soit $(x_i; y_j; n_{ij})$ une série statistique à deux caractères x et y d'effectif total N.
On appelle covariance du couple (x,y) le nombre réel noté $cov(x,y)$ tel que :
$cov(x,y) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$.

Formule de Koenig

On a : $cov(x,y) = \dfrac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} n_{ij}x_iy_j - \overline{x} \times \overline{y}$.

15.5.2 Droite de régression de y en x

La droite de régression de y en x est la droite (D) passant par le point moyen G associé à la série statistique double (x_i, y_j, n_{ij}) et dont le coefficient directeur est $a = \dfrac{cov(x,y)}{V(x)}$. Une

équation cartésienne de cette droite est : $(\mathscr{D}) : y - \overline{y} = \dfrac{cov(x,y)}{V(x)}(x - \overline{x})$.
Cette droite peut s'écrire sous la forme $(\mathscr{D}) : y = ax + b$ avec $a = \dfrac{cov(x,y)}{V(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

15.5.3 Droite de régression de x en y

La droite de régression de x en y est la droite $(\mathscr{D}')$ passant par le point moyen G associé à la série statistique double (x_i, y_j, n_{ij}) et dont le coefficient directeur est $a' = \dfrac{cov(x,y)}{V(y)}$. Une équation cartésienne de cette droite est : $(\mathscr{D}') : x - \overline{x} = \dfrac{cov(x,y)}{V(y)}(y - \overline{y})$. Cette droite peut s'écrire sous la forme $(\mathscr{D}') : x = a'y + b'$ avec $a' = \dfrac{cov(x,y)}{V(y)}$ et $b' = \overline{x} - a'\overline{y}$.

15.5.4 Droite de régression par la méthode de Mayer

Le principe de cette méthode est le suivant : On partage le nuage de points en deux sous-nuages d'effectifs égaux si l'effectif total est pair ou égaux à une unité près si l'effectif total est impair. On considère pour chaque sous-nuage, un point moyen. On désigne par G_1 le point moyen du premier sous-nuage et G_2 celui du deuxième sous-nuage. La droite de Mayer est la droite (G_1G_2). Cette droite passe par le point moyen G du nuage des points de la série double. On a : $(G_1G_2) : \dfrac{x - \overline{x}_1}{\overline{x}_2 - \overline{x}_1} = \dfrac{y - \overline{y}_1}{\overline{y}_2 - \overline{y}_1}$ avec $G_1(\overline{x}_1; \overline{y}_1)$ et $G_2(\overline{x}_2; \overline{y}_2)$. Cette droite est de la forme $y = \alpha x + \beta$ où α et β sont des réels.

Remarque

Le point G appartient à la droite (G_1G_2), car $G = bar\{(G_1, \alpha); (G_2, \beta)\}$. Si l'effectif total est pair, alors $\alpha = \beta$ et G est le milieu du segment $[G_1G_2]$.

15.5.5 Coefficient de corrélation

a) Définition

Soit $(x_i; y_j; n_{ij})$ une série statistique à deux caractères x et y telles que $V(x)$ et $V(y)$ non nulles. Le coefficient de corrélation linéaire de cette série est le nombre réel noté r tel que : $r = \dfrac{cov(x,y)}{\sqrt{V(x) \times V(y)}} = \dfrac{cov(x,y)}{\sigma(x) \times \sigma(y)}$.

b) Propriétés

▷ $r = a.a' \Longrightarrow |r| = \sqrt{a.a'}$;
▷ $-1 \leq r \leq 1$, c'est-à- dire $0 \leq |r| \leq 1$;
▷ Si $|r| = 1$, alors tous les points du nuage sont alignés. L'ajustement est dit parfait (les résultats sont fiables), droites de régressions $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont confondues ;
▷ Si $0,87 \leq |r| \leq 1$, on dit qu'il y a une forte corrélation entre x et y (l'ajustement se justifie) ;
▷ Si $|r|$ est très voisin de 0, alors il y a indépendance linéaire statistique ;
▷ Si $|r| < 0,87$, on dit qu'il y a une faible corrélation entre x et y (l'ajustement n'est pas justifie).

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercices d'applications

Exercice 1

Les résultats d'une étude statistique effectuée sur une population féminine sont confinés dans le tableau ci-dessous :

Age : x	36	42	48	54	60
Tension artérielle : y	11,7	14	12,5	15	15,6

Les résultats des calculs seront donnés sous forme décimale et à 10^{-2} près.

1. Représenter le nuage de points de cette série statistique double.
   On prendra $1,5cm$ pour 12 ans et $0,5cm$ pour l'unité de tension artérielle.
2. Calculer l'âge moyen et la tension moyenne de cette série statistique.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
5. Si l'évolution de la valeur de la tension artérielle se poursuit de la même manière, une personne âgée de 65 ans pourrait-elle avoir une tension artérielle de 17 ? Justifier votre réponse.

Exercice 2

Soit le tableau statistique à double entrée suivant :

Y \ X	0	2
-1	3	2
α	1	4

avec α un entier naturel non nul.

1. Donner les lois marginales de X et Y.
2. Déterminer le réel α pour que le point moyen G ait pour coordonnées $\left(\frac{6}{5};\frac{1}{2}\right)$.
3. Calculer la covariance de (X,Y).
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

Exercice 3

La série statistique ci-dessous concerne les ventes annuelles exprimées en milliers de francs CFA de 2014 à 2019 d'un magasin de pagnes, x_i en année et y_i vente en milliers de francs CFA.

x_i	2014	2015	2016	2017	2018	2019
y_i	3400	2800	3200	3800	4300	4700

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G.
2. Déterminer la variance de X et Y puis la covariance de (X,Y).
3. Déterminer la droite de régression de y en x.
4. Quelle prévision de vente annuelle le magasin de pagne peut-il espérer atteindre en 2025 ?

Exercice 4

A l'oral d'un examen, chaque candidat est interrogé en première langue où il obtient la note X et en seconde langue où il obtient la note Y (notes sur 20). Les résultats obtenus par 100 candidat sont donnes ci-dessous :

Y \ X	[0, 4[	[4, 8[	[8, 12[	[12, 16[	[16, 20[
[0, 4[	2	5	2	0	0
[4, 8[	1	12	10	3	0
[8, 12[	0	3	28	12	0
[12, 16[	0	1	5	10	2
[16, 20[	0	0	0	1	2

1. Représenter graphiquement la statistique double (X,Y) par un nuage de points pondérés.
2. (a) Déterminer les distributions marginales de X et Y.
   (b) Calculer les notes moyennes de X et Y.
   (c) Calculer la variance de X et Y.
   (d) En déduire l'inertie minimale de cette série statistique.
3. (a) Calculer la covariance de couple (X,Y).
   (b) Déterminer les droites de régressions linéaires de y en x et de x en y
   (c) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire puis interpréter.

Exercice 5

On considère la série statistique à deux caractères présentée dans le tableau suivant :

x_i	4	20	1	10	9	5	2	2	6	5	11	15
y_i	3,3	0,6	10,5	1,3	1,3	2,2	5	8	1,8	2	1,2	0,9

1. Représenter le nuage de points associés à cette série.
2. La forme du nuage suggère-t-elle un ajustement linéaire ?
3. On pose $z_i = \dfrac{1}{y_i}$.
   (a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique du couple (x_i, z_i).
   (b) La valeur de ce coefficient justifie-t-elle un ajustement linéaire ?
   (c) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.

Exercice 6

Soit le tableau statistique linéaire suivant :

x	0	1	0	1	0	-1	1	0
y	0	0	α	α	0	0	0	0

où α est un entier nature non nul.

1. Convertir ce tableau en un tableau à double entrée.
2. Déterminer α sachant que $G\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ est un point moyen de cette série.
3. Dans la suite de l'exercice, on donne $\alpha = 2$.
   (a) Déterminer l'inertie minimale.
   (b) En déduire l'inertie du nuage par rapport au point $P(1,1)$.
4. Déterminer la droite $(\mathscr{D})$ de régression de y en x.
5. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série.
6. Donner une interprétation de cette corrélation.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice 7

Une entreprise achète, utilise et vend des machines après un certain nombres x_i d'années. Après six années, l'évolution y_i en milliers de $FCFA$ du prix de vente d'une machine en fonction du nombre d'années d'utilisation, se présente comme suite :

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	150	125	90	75	50	45

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G, puis les variances de X et Y
2. Calculer l'inertie par rapport au point moyen G, puis déduire celui du point $A(0,-1)$.
3. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.
4. En déduire une estimation du prix de vente d'une machine après 7 ans d'utilisation.

Exercice 8

Une série statistique est distribuée selon le tableau ci-dessous.

Une mauvaise manipulation a effacé une donne et on se propose de reconstituer la série en déterminant la donnée manquante.

x \ y	-1	1	2
1	3	2	1
-1	β	1	1

où β est entier naturel.

1. Déterminer en fonction de β les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$, les variances $V(x)$ et $V(x)$ respectives des caractères X et Y.
2. Déterminer β sachant que la covariance de la série est $cov(x,y) = -0,5$.
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique.

Exercice 9

Une série statistique double d'effectif total 100 est ajustée par la méthode des moindres carrés par les droites de régression dont les équations sont les suivantes :

$(\mathscr{D}_{y/x}) : y = \dfrac{1}{14}x + \dfrac{3}{14}$ et $(\mathscr{D}_{x/y}) : x = \dfrac{1}{4}y - \dfrac{1}{4}$.

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G.
2. Sachant que la variance de la variable X est : $V(X) = \dfrac{14}{25}$, déterminer la covariance de (X,Y).
3. Déterminer la variance de la variable Y et l'inertie minimale du nuage des points de la série.

Exercice 10

Le tableau à double entrée ci-dessous présente les résultats d'une étude faite sur un échantillon des ménages d'une ville.

Les x et y sont respectivement les revenus et épargnes mensuels de ces ménages. x et y sont en milliers de francs cfa.

x \ y	45	75	125
14	4	24	2
25	4	36	0
40	0	12	18

1. Donner les deux séries marginales associées à ce tableau.
2. Calculer le revenu moyen et l'épargne moyenne.
3. Calculer les variances de x et de y puis déduire l'inertie minimale.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

4. (a) Déterminer l'équation de la droite (D) de régression qui permet d'estimer le revenu mensuel à partir de l'épargne mensuelle.
   (b) En déduire une estimation du revenu mensuel d'un ménage ayant réalisé une épargne mensuelle de $50.000 fcfa$.
5. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r, puis interpréter le résultat.

Exercice 11

Dans une classe de terminale au lycée Emery Patrice LUMUMBA, deux élèves de la série D se disputent sur un problème statistique à deux variables X et Y de dix individus. Dans ce problème, il est question de calculer les variances de X et Y connaissant la droite de régression linéaire de y par rapport à x $(\mathscr{D}) : y = \frac{1}{2}x$, l'inertie par rapport au point $A(1;2)$ et l'inertie par rapport au point G qui sont respectivement $I_A = 100$ et $I_G = 50$ et le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est $r = \frac{9}{10}$.

Pour les aider, votre enseigne vous demande de :

1. Déterminer les coordonnées du point moyen $G(\overline{x}, \overline{y})$ où $\overline{x} \in \mathbb{R}^*$ et $\overline{y} \in \mathbb{R}$.
2. Soit $(\mathscr{D}')$ la droite de régression linéaire de x par rapport à y d'équation cartésienne $(\mathscr{D}') : x = a'y + b'$ où a' et b' sont des réels.
   (a) Déterminer les réels a' et b'.
   (b) Montrer que $V(x) - 2a'V(y) = 0$ où $V(x)$ et $V(y)$ les variances de X et Y et a' le coefficient directeur de la droite $(\mathscr{D}')$.
   (c) Calculer les variances de X et Y.

Exercice 12

Le tableau ci-dessous représente le couple (X, Y) des deux caractères d'une série statistique. X est le nombre de jours et Y le poids en mg d'une larve.

X	1	2	3	4	5	6
Y	0,2	1,4	1,8	2	2,6	3

1. Calculer les coordonnées du point moyen G.
2. Calculer les variances de X et Y puis la covariance de (X, Y).
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire puis interpréter.
4. Calculer l'inertie minimale puis déduire l'inertie par rapport au point $B(1;-1)$.
5. Déterminer l'équation de la droite $(\mathscr{D})$ de régression linéaire de y en x.
6. Estimer le poids de la larve au septième jour.

Exercice 13

Le directeur des ressources humaines de l'entreprise $\ll EMERGENCE\, 2025 \gg$ doit embaucher des ouvriers. Lors de la précédente campagne de recrutement pour les postes analogues, il fait une étude statistique sur le nombre des candidatures y en fonction des salaires proposés x. Il a eu les résultats suivants :
▹ Salaire moyen : $\overline{X} = 660.000 fcfa$.
▹ Variance de X : $V(X) = 20.000$.
▹ Équation de la droite de régression de y en x : $y = 0,001125x - 56$.
▹ Coefficient de corrélation linéaire : $r = 0,922$.

1. Déterminer le nombre moyen de candidatures $\overline{Y}$.
2. Déterminer la covariance de (X, Y) de la série.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de x en y.
4. En déduire une estimation de salaire que doit proposer le Directeur s'il veut embaucher 30 ouvriers.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercice 14

Un laboratoire étudie la croissance d'une souche de bactéries. Il obtient les résultats suivants :

Temps x_i (en heures)	4	5	6	7	8	9
Nombre N_i de bactéries (en milliers)	13,6	21,3	70,9	121,5	383	590

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Donner les valeurs arrondies à 10^{-2} près.

Temps x_i (en heures)	4	5	6	7	8	9
Nombre N_i de bactéries (en milliers)	13,6	21,3	70,9	121,5	383	590
$y_i = \ln(N_i)$	2,61			4,80		

2. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$. On prendra pour unités : $1cm$ en abscisse pour 1 heure, $1cm$en ordonnée pour une unité.
3. On note G_1 et G_2 les points moyens du point moyen des trois premiers points du nuage et des trois derniers points du nuage respectivement.
   (a) Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2.
   (b) Placer G_1 et G_2 sur le graphique précédent, puis tracer la droite (G_1G_2).
   (c) Déterminer l'équation réduite de la droite (G_1G_2).
4. (a) Donner la valeur approchée à 10^{-2} près de $\ln(100)$.
   (b) A l'aide de cette valeur, déterminer le temps nécessaire qu'il faut pour obtenir 100000 bactéries.

Exercice 15

On appelle capacité vitale chez homme, le volume d'air maximum pouvant être mobilisé par une inspiration forcée suivie d'une expiration forcée. Le tableau ci-dessous donne la capacité vitale c, exprimée en cm^3, chez des hommes âgés de 40 ans en fonction de leur taille t, exprimée en cm.

t (cm)	152	156	160	166	170	174	178	180	182
c (cm^3)	3525	3620	3710	3850	3945	4035	4130	4175	4220

1. (a) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près du coefficient de corrélation linéaire entre t et c.
   (b) Justifier que l'on peut procède à un ajustement linéaire affine par la méthode de moindres carrés de la série $(t; c)$.
   (c) Donner une équation de la droite de régression de c et t. (les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près).
   (d) En déduire de cet ajustement une estimation de la capacité vitale d'un homme âgé de 40 ans et de taille égale $188cm$.
2. En fait, la capacité vitale c (exprimée en cm^3) chez l'homme dépend de sa taille t (exprimée en cm) et de son âge g (exprimé en années). De nombreuses expériences ont permis d'exprimer c en fonction de t et g selon la relation $c = \alpha t + \beta g + 754$, où α et β sont des constantes (ne dépendant pas de t et g).
   (a) Donner l'expression de c pour 40.
   (b) En déduire les valeurs de α et β.
3. Estimer la capacité vitale d'un homme âgé de 50 ans et mesurant $188cm$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Chapitre 16

DÉNOMBREMENTS

16.1 Ensembles

Définition

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments.

Remarques

Soit E un ensemble.
▷ Lorsqu'un objet x appartient à l'ensemble E, on note $x \in E$.
▷ S'il n'appartient pas à l'ensemble E, on note $x \notin E$.

16.2 Ensembles finis

16.2.1 Définition

Un ensemble E est fini lorsqu'il est constitué de n éléments avec $n \in \mathbb{N}$ ou un ensemble E est dit fini lorsqu'on peut compter ses éléments.

Exemple

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

16.2.2 Réunion de deux ensembles finis

Soit A et B deux ensembles finis. On appelle réunion des ensembles A et B, l'ensemble formé des éléments appartenant à A ou à B. On note $A \cup B$.
$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

16.2.3 Intersection de deux ensembles finis

Soit A et B deux ensembles finis. On appelle intersection des ensembles A et B, l'ensemble des éléments communs à A et B. On note $A \cap B$
$A \cap B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$.

Remarque

Si $A \cap B = \{\ \}$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

16.2.4 Ensemble $A \setminus B$ ou $A - B$

Soit A et B deux ensembles finis. L'ensemble $A \setminus B$ ou $A - B$ c'est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas dans B.

Exemple

On donne $A = \{0, 1, 2, 5, 7\}$ et $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$.
Déterminer les ensembles $A \setminus B$ et $B \setminus A$.

16.2.5 Partie d'un ensemble fini

Soit A et B deux ensembles non vides. On dit que A est une partie de B ou un sous ensemble de B si tout élément de A est un élément de B. On écrit $A \subset B$.

Exemple

$A = \{0, 1, 2, 3, 6, 5\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3, 6, 5, 6, 7, 8\}$.
On a : $A \subset B$

Remarque

Soit E un ensemble non vide. On note $\mathscr{P}(E)$, l'ensemble des parties de E.
Ainsi $A \in \mathscr{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$. On a donc : $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.
Si A et B sont deux éléments de $\mathscr{P}(E)$, alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont les éléments de $\mathscr{P}(E)$.

16.2.6 Complémentaire d'un ensemble fini

Soit A et Ω deux ensembles non vides tels que $A \subset \Omega$.
Le complémentaire de A dans Ω noté $\overline{A}$ ou C_{Ω}^{A} est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

Exemple

Soit $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et $A = \{3, 4, 5\}$. Déterminer le complémentaire de A.

Remarque

$\triangleright$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$, on dit que A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.
$\triangleright$ $A \cap \Omega = A$
$\triangleright$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$\triangleright$ Pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, alors $\overline{A}$ est une partie de $\mathscr{P}(E)$.

16.3 Dénombrement

16.3.1 Définition

Dénombrer un ensemble fini revient à compter ou à déterminer le nombre de ses éléments.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

16.3.2 Dénombrement de parties d'un ensemble finis

Définition

Soit E un ensemble fini. On appelle cardinal de E et on note card(E), le nombre d'éléments de l'ensemble E.

Exemples

On donne les ensembles E ; F et G définis par :
$E = \{a, b; c, d\}$; $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $G = \{a\}$.
Calculer le cardinal des ensembles E ; F et G.

Remarque

Le cardinal de l'ensemble vide est nul.

16.3.3 Cardinal de la réunion finis

Soit A et B deux ensembles finis. Le cardinal de $A \cup B$ noté $card(A \cup B)$ est tel que :
▷ si $A \cap B = \emptyset$, alors $card(A \cup B) = \text{card(A)} + \text{card(B)}$;
▷ si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $card(A \cup B) = \text{card(A)} + \text{card(B)} - card(A \cap B)$;
▷ $card(A \cup B) = card(A \setminus B) + card(B \setminus A) + card(A \cap B)$;
▷ $card(A) = card(A \setminus B) + card(A \cap B)$;
▷ $card(B) = card(B \setminus A) + card(A \cap B)$.

Exemple

On donne $A = \{1, 2, 4, 6\}$ et $B = \{0, 3, 7\}$. Déterminer $card(A \cup B)$.

16.3.4 Cardinal du complémentaire

Soit A et Ω deux ensembles non vides tels que $A \subset \Omega$.
On a $card(\overline{A}) = card(\Omega) - card(A)$.

Exemple

Soit $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et $A = \{3, 4, 5\}$.
Déterminer le cardinal du complémentaire de A.

16.3.5 Cardinal de l'ensemble des parties finis

Soit E un ensemble non vide tel que $\text{card(E)} = n$, alors $card(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.

Exercice

Soit E un ensemble tel que $E = \{a, b, c\}$.

1. Calculer le cardinal de E.
2. Calculer le cardinal de l'ensemble des parties de E.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{P}(E)$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

16.3.6 Dénombrement de parties d'un ensemble finis

Définition

Soit E un ensemble fini. On appelle cardinal de E et on note card(E), le nombre d'éléments de l'ensemble E.

Exemples

On donne les ensembles E ; F et G définis par :
$E = \{a, b; c, d\}$; $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $G = \{a\}$.
Calculer le cardinal des ensembles E ; F et G.

Remarque

Le cardinal de l'ensemble vide est nul.

16.3.7 Cardinal de la réunion finis

Soit A et B deux ensembles finis. Le cardinal de $A \cup B$ noté $card(A \cup B)$ est tel que :
▷ si $A \cap B = \emptyset$, alors $card(A \cup B) = \text{card(A)} + \text{card(B)}$;
▷ si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $card(A \cup B) = \text{card(A)} + \text{card(B)} - card(A \cap B)$;
▷ $card(A \cup B) = card(A \setminus B) + card(B \setminus A) + card(A \cap B)$;
▷ $card(A) = card(A \setminus B) + card(A \cap B)$;
▷ $card(B) = card(B \setminus A) + card(A \cap B)$.

Exemple

On donne $A = \{1, 2, 4, 6\}$ et $B = \{0, 3, 7\}$. Déterminer $card(A \cup B)$.

16.3.8 Cardinal du complémentaire

Soit A et Ω deux ensembles non vides tels que $A \subset \Omega$.
On a $card(\overline{A}) = card(\Omega) - card(A)$.

Exemple

Soit $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et $A = \{3, 4, 5\}$.
Déterminer le cardinal du complémentaire de A.

16.3.9 Cardinal de l'ensemble des parties finis

Soit E un ensemble non vide tel que $\text{card(E)} = n$, alors $card(\mathscr{P}(E)) = 2^n$.

Exercice

Soit E un ensemble tel que $E = \{a, b, c\}$.

1. Calculer le cardinal de E.
2. Calculer le cardinal de l'ensemble des parties de E.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{P}(E)$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Solution

1. Calculons le cardinal de E
   On a : card(E) $= 3$
2. Calculons le cardinal de l'ensemble des parties de E.
   On a : $card(\mathscr{P}(E)) = 2^3 = 8 \Longrightarrow card(\mathscr{P}(E)) = 8$.
3. Déterminons l'ensemble $\mathscr{P}(E)$.
   $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a,b\}; \{a,c\}; \{b,c\}; \{a,b,c\}\}$.

16.4 Dénombrement de listes

16.4.1 Produit cartésien de deux ensembles

a) Définition

Soit A et B deux ensembles non vides. On appelle produit cartésien de A et B et on note $A \times B$ (lire A croix B) l'ensemble suivant : $A \times B = \{(x,y)/x \in A \text{ et } y \in B\}$.

b) Propriétés

▷ Pour tous ensembles A et B, on a : $A \times B \neq B \times A$;
▷ $card(A \times B) = card(B \times A) = card(A) \times card(B)$.

16.4.2 Produit cartésien d'un ensemble finis

a) Définition

Soit E_1, E_2,..., E_p p ensembles non vides. L'ensemble $E_1 \times E_2 \times E_3 \times ... \times E_p$ est l'ensemble de tous les p-uplet $(a_1, a_2, ..., a_p)$ telles que $a_i \in E_i$ avec $i \in \{1, 2, ..., p\}$. On a : $card(E_1 \times E_2 \times E_3 \times ... \times E_p) = card(E_1) \times card(E_2) \times ... \times card(E_p) = card(E_1).card(E_2)....card(E_p)$.
En particulier si $card(E_1) = card(E_2) = ... = card(E_p) = n$, alors
$card(E_1 \times E_2 \times E_3 \times ... \times E_p) = n^p$.

b) Propriété

Le nombre d'application d'un ensemble A à p éléments vers un ensemble B à n éléments est égal à n^p.

Exercice

A une soirée on a trois filles et deux garçons. Combien de couples peut on former ?

16.5 Factorielle

16.5.1 Définition

Soit n un entier naturel. On appelle factorielle n, le nombre noté $n!$ défini par :
$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)... \times 2 \times 1$.
Par convention : $0! = 1$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exemple

Calculer 3! ; 5! et 9!

16.6 Arrangements

16.6.1 Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier non nul tel que $n \geq p$. On appelle arrangement de p éléments de E, tout p-uplet d'élément de E deux à deux distincts. Il s'agit de l'arrangement sans répétition.

16.6.2 Nombre d'arrangements

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments, noté A_n^p, est tel que : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$.

Exemples

$A_5^2 = 20$ et $A_6^5 = 720$

Remarque

$A_n^n = n!$

16.6.3 Nombre d'arrangements avec répétition

Le nombre d'arrangement avec répétition de p éléments d'un ensemble à n éléments est : n^p.

Exercice

On donne les chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.
Combien de nombre de 3 chiffres peut-on former avec ces nombres ?

1. si les chiffres peuvent se répéter ?
2. si les chiffres sont deux à deux distincts ?

16.7 Permutations des n éléments d'un ensemble

16.7.1 Définition

Soit E un ensemble non vide tel que card(E) $= n$.
On appelle permutation des n éléments de E tout arrangement des n éléments de E.
Il s'agit de la permutation sans répétition.

16.7.2 Nombre de permutations

Le nombre de permutations de n éléments de E est : $p_n = n!$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

16.7.3 Nombre de permutations avec répétition

Si parmi les éléments à permuter, un se répète jusqu'à r_1 fois et les autres se répètent jusqu'à r_p, fois, alors le nombre de permutation est : $p_n(r_1;r_2) = \dfrac{n!}{r_1! \times r_2! \times ... \times r_p!}$.

Exercice

1. Combien de mots différents peut-on former avec le nom ANE ?
2. Combien de mots différents peut-on former avec le nom AABCCC ?

16.8 Combinaisons

16.8.1 Définition

Soit E un ensemble non vide tel que card(E) $= n$.
On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments.

16.8.2 Nombre de combinaisons

Le nombre de combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments, noté C_n^p tel que : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ avec $p \leq n$.

16.8.3 Propriétés

Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$, on a :
▷ $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$ et $C_n^0 = 1$;
▷ si $0 < p < n$, alors $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$;
▷ $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

16.8.4 Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel non nul.
On a $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$.

Exemple

Calculer $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ et $(a+b)^5$.

16.9 Notions de tirages

Soit E un ensemble fini, p et n deux entiers naturels.

16.9.1 Tirages successifs avec remise

C'est un tirage qui consiste à tirer p éléments de E ordonnés et distincts, le nombre de tirages est un arrangement avec répétition, c'est-à-dire : n^p.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

16.9.2 Tirages successifs sans remise

C'est un tirage qui consiste à tirer p éléments de E ordonnés et distincts, le nombre de tirages est un arrangement sans répétition, c'est-à-dire : A_n^p.

16.9.3 Tirages simultanés

C'est un tirage qui consiste à tirer p éléments de E distincts, non ordonnés le nombre de tirages est la combinaison de p éléments de E, c'est-à-dire : C_n^p.

Exercice 1

Un sac contient 26 jetons représentant les 26 lettres d'alphabet français, dont 20 consonnes et 6 voyelles.

1. On tire simultanément 5 jetons du sac.
   (a) Déterminer le nombre total de tirages possibles.
   (b) Déterminer le nombre de tirages contenant que des consonnes.
   (c) Déterminer le nombre de tirages contenant exactement 2 voyelles.
   (d) Déterminer le nombre de tirages contenant au moins une voyelle.
2. On tire successivement 5 jetons du sac avec remise.
   (a) Déterminer le nombre total de tirages possibles.
   (b) Déterminer le nombre de tirages contenant que des consonnes.
   (c) Déterminer le nombre de tirages contenant exactement 2 voyelles.
3. On tire successivement 5 jetons du sac sans remise.
   (a) Déterminer le nombre total de tirages possibles.
   (b) Déterminer le nombre de tirages contenant que des consonnes.
   (c) Déterminer le nombre de tirages contenant exactement 2 voyelles.

Exercice 2

Les numéros de téléphones au Congo Brazzaville de la société MTN sont des nombres entiers naturels à 9 chiffres. Déterminer le nombre de numéros de téléphone que la société MTN peut avoir au maximum.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Chapitre 17

PROBABILITÉS

17.1 Vocabulaires des événements

17.1.1 Expérience aléatoire ou épreuve

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat.

Exemple

Le jet d'un dé parfait à six faces.

17.1.2 Univers

C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
On le note souvent par Ω.

Exemple

Lors d'un jet de dé parfait à six faces, les résultats possibles sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, alors on écrit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

17.1.3 Événement

On appelle événement, une partie ou un sous ensemble de l'univers Ω.

Exemple

Soit A l'événement " obtenir les nombres pairs lors d'un jet de dé à 6 faces ", on a : $A = \{2,4,6\}$.

17.1.4 Éventualité

Une éventualité est un résultat possible d'une expérience aléatoire.

Exemple

On lance un dé bien équilibré à 6 faces, on a 6 éventualités : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

17.1.5 Événement élémentaire

Un événement élémentaire est un événement qui ne contient qu'une seule éventualité.

Exemple

Soit B l'événement " obtenir un nombre premier et pair lors d'un jet d'un dé non pipé à 6 faces ", on a : $B = \{2\}$.

17.1.6 Événement certain

Un événement certain est un événement qui est toujours réalisé : c'est l'univers Ω.

17.1.7 Événement incertain

Un événement incertain est un événement dont on connait pas le résultat.

17.1.8 Événement impossible

L'événement impossible est la partie vide de Ω.

Exemple

Obtenir le chiffre 7 lors d'un jet de dé de six faces numérotées de 1 à 6.

17.1.9 Événements compatibles

Deux événements sont dits compatibles lorsqu'ils se réalisent ensemble. Le contraire est dit événement incompatible.

17.2 Probabilité d'un événement

17.2.1 Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
Une probabilité sur l'univers Ω, l'application p de $\mathscr{P}(\Omega)$ vers $[0;1]$, qui à toute partie A de Ω associe le nombre réel $p(A)$ appelé probabilité de l'événement A.

17.2.2 Propriétés

1. $p(\Omega) = 1$;
2. $p(\varnothing) = 0$; c'est la probabilité de l'événement impossible ;
3. si $A \cap B \neq \varnothing$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
4. si $A \cap B = \varnothing$, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$;
5. $p(A) + p(\overline{A}) = 1$; $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$;
6. $\forall\ A \in \mathscr{P}(\Omega)$; $p(A) \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$;
7. Si $A \subseteq B$; alors $p(A) \leq p(B)$.

$N.B$: Le couple $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est appelé espace probabilisé.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

17.2.3 Équiprobabilité ou probabilité uniforme

a) Définition

Soit Ω l'univers ayant n éventualités w_1, w_2....,w_n et p une probabilité sur Ω.
On dit qu'il y a équiprobabilité ou que les événements élémentaires sont équiprobables lorsque chaque événement élémentaire à la même probabilité, c'est- à - dire
$p(w_1) = p(w_2) = ... = P(w_n)$.

b) Propriétés

Soit Ω l'univers de n éventualités et p une probabilité sur Ω.
▷ $p(w_1) = p(w_2) = ... = p(w_n) = \frac{1}{n}$.
▷ Si un événement A contient k éventualités ($cardA = k$), alors
$p(A) = \dfrac{k}{n} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{cardA}{card\Omega}$

Remarque

On reconnait qu'il y a équiprobabilité par l'emploi des expressions telles que : parfaitement équilibré ; non truqué ; indiscernable au toucher ; au hasard ; bien battu ; pièce parfaitement symétrique ; pièce parfaite ; non pipé.

Exercice 1

Une boite contient 10 piles électriques dont 3 sont défectueuses.
On tire au hasard et simultanément 2 piles de cette boite. Calcule la probabilité pour que :

1. Aucune pile tirée soit défectueuse.
2. Exactement une pile soit défectueuse.
3. Au moins une pile défectueuse.
4. Au plus deux piles soit défectueuses.

Exercice 2

Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. On tire au hasard une boule et on note son numéro N. Les boules ont la même probabilité d'être tirées. On désigne respectivement par A et B les événements " N est pair " et " N est multiple de trois ".

1. Calculer le nombre de cas possibles.
2. Calculer le cardinal de $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Calculer la probabilité des événements suivants : A ; B ; $A \cap B$; $A \cup B$; $\overline{A} \cap \overline{B}$.
4. Calculer la probabilité des événements suivants : $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A \cup B}$.

17.3 Conditionnement

17.3.1 Probabilités conditionnelles

a) Définition

Soient Ω un univers fini ; p une probabilité sur Ω et A et B deux événements de Ω tels que $p(B) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que B est réalisé ou

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

de A sachant B le nombre réel noté $p_B(A)$ ou $p(A \setminus B)$ défini par :
$p(A \setminus B) = p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Remarque

Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$; alors :
▷ $p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$;
▷ $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} \Rightarrow p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$

b) Événements indépendants

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.
▷ A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre.
▷ A et B sont indépendants si et seulement si : $p(A \setminus B) = p(A)$ ou $p(B \setminus A) = P(B)$.

Théorème

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si et seulement si ils vérifient une trois conditions.
▷ $p(A \setminus B) = p(A)$;
▷ $p(B \setminus A) = P(B)$;
▷ $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Attention

Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles.
▷ Deux événements A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$;
▷ Deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire $p(A \cap B) = 0$

17.3.2 Arbres pondérés

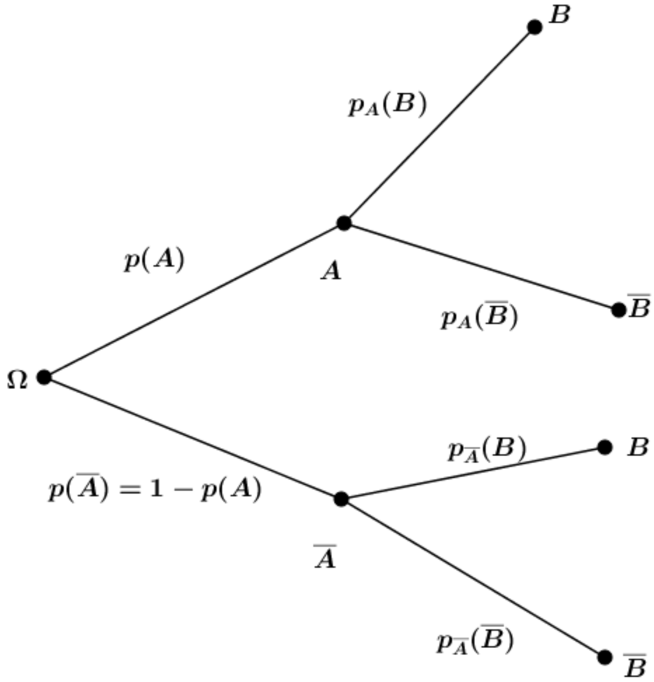
a) Règles de construction

▷ La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est 1.
▷ La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différents branches composant ce trajet.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

b) Cas de deux événements

Soit A et B deux événements.



17.3.3 Probabilités totales

En considérant l'arbre pondéré défini ci-dessus, on a :
$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$; $p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times p_A(\overline{B})$; $p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$ et
$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(\overline{B})$.
$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ et $\overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$
$p(B) = p[(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})]$
$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$ ou $p(B) = p_A(B) \times p(A) + p_A(B) \times p(\overline{A})$
$p(\overline{B}) = p[(\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap \overline{A})]$
$p(\overline{B}) = p(\overline{B} \cap A) + p(\overline{B} \cap \overline{A})$ ou $p(\overline{B}) = p_A(\overline{B}) \times p(A) + p_{\overline{A}}(\overline{B}) \times p(\overline{A})$

17.3.4 Formule de Bayes

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.
$p_B(A) = \dfrac{p_A(B) \times p(A)}{p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}(B)} \times p(\overline{A})}$ et $p_A(B) = \dfrac{p_B(A) \times p(B)}{p_B(A) \times p(B) + p_{\overline{B}}(A) \times p(\overline{B})}$

Théorème

Soit $A_1, A_2, \ldots.., A_n$ un système complet d'événements de l'univers Ω et B un événement quelconque dans Ω. On a :
$p(B) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + P_{A_2}(B) \times p(A_2) + \ldots. + p_{A_n}(B) \times p(A_n)$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

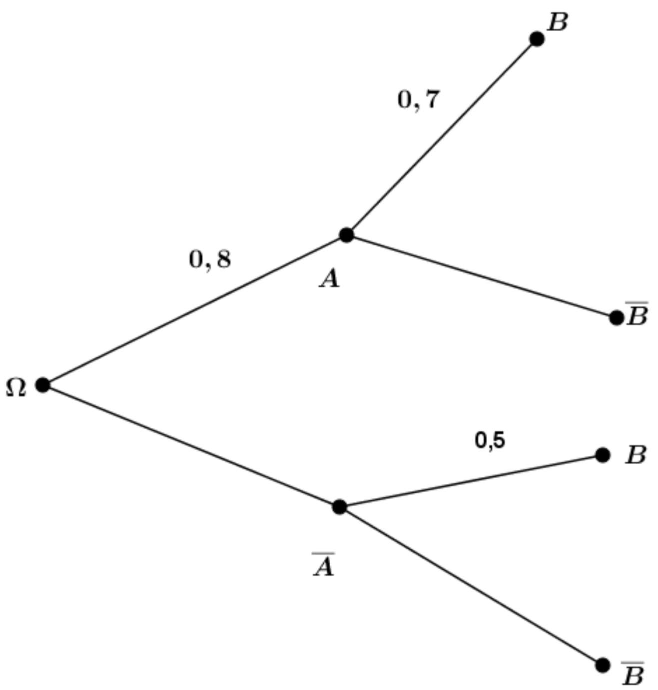
Exercice 1

Dans un département congolais, il a été établi que :
▷ 80% des salariés sont dans le secteur privé, le reste des salariés étant dans le secteur public ;
▷ parmi les salariés du secteur privé, 5% sont syndiqués ;
▷ parmi les salariés du secteur public, 15% sont syndiqués.
On choisit une personne au hasard parmi les salariés de ce département.
On note A l'événement " la personne est salariée du secteur privé " et S l'événement " la personne est syndiquée ".

1. Calculer les probabilités suivantes : $p(A)$; $p(\overline{A})$; $p_A(S)$ et $p_{\overline{A}}(S)$.
2. Construire un arbre de probabilité correspondant à cette situation.
3. Calculer la probabilité que la personne choisie soit salariée du secteur privé et elle soit syndiquée.
4. Déterminer la probabilité que la personne choisie soit un salarié syndiqué du secteur public.
5. Calculer les probabilités suivantes : $p(S)$ et $p(\overline{S})$.

Exercice 2

On considère deux événements A et B liés à une expérience aléatoire modélisée par l'arbre ci-contre.



1. Indiquer la signification des nombres suivants : $0,8$; $0,7$ et $0,5$.
2. Compléter cet arbre avec les probabilités manquantes.
3. Déterminer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
4. (a) Calculer les probabilités suivantes : $p(B)$ et $p(\overline{B})$.
   (b) Calculer les probabilités suivantes : $p(\overline{A \cup B})$ et $p(A \cup B)$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

17.4 Variable aléatoire réelle discrète

17.4.1 Définition

Une variable aléatoire X est une application définie sur Ω muni d'une probabilité p a valeurs dans $\mathbb{R}$
Soit

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ w_i &\longmapsto X(w_i) = x_i \end{aligned}$$

17.4.2 Univers image

On appelle univers image l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.
On le note $X = X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; .....; x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < x_3 < .... < x_n$.
On note :
▷ $(X = x_i)$ et on lit événement $\ll X$ prend la valeur $x_i \gg$
▷ $(X < \alpha)$ et on lit l'événement $\ll X$ prend la valeur strictement inférieure à $\alpha \gg$; $\alpha \in \mathbb{R}$

Remarques

Soit $\Omega(X) = \{x_1; x_2; x_3; x_4; ....; x_n\}$.
▷ $p(X = x_1) = \dfrac{card(X = x_1)}{card\Omega} = p_1$;
▷ $p(X = x_2) = \dfrac{card(X = x_2)}{card\Omega} = p_2$;
▷ $p(X < x_4) = p(X = x_1) + p(X = x_2) + p(X = x_3)$ ou $p(X < x_4) = p_1 + p_2 + p_3$;
▷ $p(X > x_4) = 1 - p(X \leq 4) = 1 - [p_1 + p_2 + p_3 + p_4]$
ou $p(X > x_4) = 1 - [p(X = x_1) + p(X = x_2) + p(X = x_3) + p(X = x_4)]$ ou encore
$p(X > x_4) = p(X = x_5) + p(X = x_6) + ... + p(X = x_n)$;
▷ $p(X \geq x_4) = p(X = x_4) + p(X = x_5) + p(X = x_6 + ... + p(X = x_n)$
ou $p(X \geq x_4) = p_4 + p_5 + p_6 + ... + p_n$
ou encore $p(X \geq x_4) = 1 - p(X < x_4) = 1 - [p_1 + p_2 + p_3]$;
▷ **Événement obtenir au plus** x_3
Il s'agit de l'événement $(X \leq x_3)$ et sa probabilité est $p(X \leq x_3) = p_1 + p_2 + p_3$;
▷ **Événement obtenir au moins** x_3
Il s'agit de l'événement $(X \geq x_3)$ et sa probabilité est $p(X \geq x_3) = 1 - p_1 + p_2$
ou $p(X \geq x_3) = p(X = x_3) + p(X = x_4) + ... + p(X = x_n)$.

17.4.3 Loi de probabilité

Définition

Soit p une probabilité définie sur l'univers Ω. On appelle loi de probabilité de la variable X sur Ω l'application qui à toute valeur x_i prise par X associe $p(X = x_i)$. Elle est représentée dans un tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	.....	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	p_4	.....	p_n

N.B : Dans une loi de probabilité la somme des probabilités est égale à 1.

17.4.4 Espérance mathématique ; variance et Écart-type

a) Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est le nombre réel noté $E(X)$ défini par : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.
NB : si $E(X) = 0$, alors la variable aléatoire est dite centrée.

Remarques

Dans le cas d'une variable aléatoire X associe à un jeu ;
▷ si $E(X) > 0$, alors le jeu est favorable au joueur ;
▷ si $E(X) < 0$; alors le jeu est défavorable au joueur ;
▷ si $E(X) = 0$; alors le jeu est équilibré.

b) Variance

La variance d'une variable aléatoire X est le nombre d'une variable aléatoire X est le nombre réel positif noté $V(X)$ défini par : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$.

Théorème de KOENIG

$v(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ avec $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$.

c) Écart-type

L'écart-type d'une variable aléatoire X est le nombre réel strictement positif noté $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

17.4.5 Fonction de répartition

a) Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité p.
La fonction de répartition de X est l'application F de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$ définie par :
$F(x) = p(X \leq x)$
Dans la pratique : on a :

$$\begin{cases} F(x) = 0; si\ x \in]-\infty; x_1[\\ F(x) = p_1, si\ x \in [x_1; x_2[\\ F(x) = p_1 + p_2; si\ x \in [x_2; x_3[\\ F(x) = p_1 + p_2 + p_3; si\ x \in [x_3; x_4[\\ \vdots \\ F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1, si\ x \in [x_n; +\infty[\end{cases}$$

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

b) Propriétés

▷ F est une fonction croissante en escalier ;
▷ La représentation graphique de F correspond, en statistique à la courbe des fréquences cumulées croissantes ;
▷ A partir de F on peut retrouver la loi de probabilité et vice versa.

Exercice

Une urne contient trois boules rouges et quatre boules bleues.
On tire deux boules simultanément et au hasard. On gagne $100fcfa$ par boule rouge tirée et une partie est fixée à $100fcfa$.
On désigne par X la variable aléatoire associée à la somme gagné en francs.

1. Déterminer le nombre de cas possible.
2. Déterminer les valeurs prises par X.
3. Donner la loi de probabilité de X.
4. Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.
5. Un joueur avisé accepterait-il de miser ?
6. (a) Définir la fonction F de répartition de X.
   (b) Représenter cette fonction de répartition.

17.5 Lois de probabilité d'une variable aléatoire réelle discrète

17.5.1 Loi de Bernoulli

a) Définition d'une épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues ou éventualités possibles :
▷ le succès, noté S de probabilité p ;
▷ l'échec, noté E de probabilité $q = 1 - p$.
Sa loi de probabilité est appelée loi de Bernoulli de paramètre p.

b) Théorème

Pour une loi de Bernoulli de paramètre p, on a : $E(X) = p$; $V(X) = pq$ et $\sigma(X) = \sqrt{pq}$.

c) Définition du schéma de Bernoulli

Un schéma est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois, de façons indépendante, une épreuve de Bernoulli.

d) Propriété

Soit un schéma de Bernoulli a n épreuves où pour chaque épreuve la probabilité du succès est p et celle de l'échec est $q = 1 - p$.
La probabilité d'obtenir exactement k succès au cours de ces n épreuves est :
$p_k = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ avec $0 \leq k \leq n$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

17.5.2 Loi Binomiale

a) Définition

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès réalisés sur n répétitions. Cette loi est appelé loi Binomiale de paramètre n et p, on note $X \sim \beta(n,p)$ avec p la probabilité du succès.
La probabilité de réaliser k fois le succès au cours de n répétitions est :
$p(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ avec $0 \leq k \leq n$.

b) Théorème

Pour une loi Binomiale de paramètres n et p, on a :
$E(X) = np$; $V(X) = npq = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Exercice

Une usine fabrique des pièces dont $1,8\%$ sont défectueuses. Le contrôle des pièces s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :
▷ sachant qu'une pièce est bonne, on l'accepte avec une probabilité de $0,97$.
▷ sachant qu'une pièce est mauvaise, on la refuse avec une probabilité de $0,99$.
On choisit une pièce au hasard et on note A l'événement " la pièce est défectueuse " et B l'événement " la pièce est refusée ".

1. (a) Déterminer les probabilités suivantes : $p(A)$, $p_A(B)$ et $p_{\overline{A}}(\overline{B})$.
   (b) Construire l'arbre de probabilité correspond à cette situation.
2. (a) Démontrer que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée est 0,00018.
   (b) Démontrer que la probabilité qu'une pièce soit bonne et refusée est 0,02946.
   (c) Soit C l'événement " avoir une erreur dans le contrôle ". Calculer $p(C)$.
3. Si on contrôle 5 pièces de façon indépendante. On désigne par X la variable aléatoire associée à cette expérience.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivi par la variable X ?
   (b) Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
   (c) Déterminer la probabilité des événements suivants :
   ▷ D " qu'il y ait exactement deux erreurs " ;
   ▷ E " qu'il y ait exactement trois erreurs ".

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

17.6 Lois de probabilité d'une variable aléatoire réelle continue

17.6.1 Variable aléatoire continue

Définition

Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné (borné ou non borné).

17.6.2 Fonction densité de probabilité

a) Définition

On appelle fonction densité de probabilité, toute application continue par morceaux f telle que :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

b) Propriétés

▷ Pour tout réel x, $f(x) \geq 0$;
▷ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, en supposant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existe.

17.6.3 Fonction de répartition

a) Définition

On appelle fonction de répartition de la variable X la fonction F_X définie par :

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto F_X(t) = p(X < t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \end{aligned}$$

Remarque

La fonction de répartition est la primitive de la fonction densité de probabilité $f(x)$ et permet d'obtenir les probabilités associées à la variable X.

b) Propriétés

▷ F_X est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout point où f est continue et on a : $F_X^{'} = f$;
▷ F_X est à valeur dans $[0;1]$;
▷ $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$;
▷ $p(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$;
▷ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $p(X = a) = 0$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

17.6.4 Espérance mathématique

a) Définition

Soit X une variable aléatoire réelle de densité de probabilité f. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge, X admet une espérance mathématique noté $E(X)$ définie par : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

b) Propriétés

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles à densité de probabilité admettant chacune une espérance mathématique, a et b deux nombres réels. Alors la variable aléatoire réelle $aX + bY$ admet une espérance mathématique telle que :
▷ $E()aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$;
▷ $E(aX + b) = aE(X) + b$.

17.6.5 Variance et écart-type

a) Définition

▷ On appelle variance de la variable aléatoire réelle X le nombre réel positif noté $V(X)$ défini par : $V(X) = E[X - E(X)]^2$.

Théorème

On a : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ avec $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$.
▷ On appelle écart-type la variable aléatoire réelle X la racine carrée de sa variance.
On a : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

b) Propriétés

▷ $V(aX + b) = a^2 V(X)$ avec a non nul ;
$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

Exercice

Une variable aléatoire continue X, de densité de probabilité $f(x) = \alpha(4x - x^2)$ est définie sur l'intervalle $[0; 4]$.

1. Déterminer le réel α de façon à ce que f soit effectivement une fonction densité de probabilité sur l'intervalle $[0; 4]$.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.
3. Déterminer la probabilité pour que X soi comprise entre 1 et 3.
4. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

17.6.6 Loi uniforme

a) Définition

Une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ que l'on note $\mathcal{U}([a;b])$ lorsque X admet pour densité de probabilité f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b) Propriétés

Si X suit la loi uniforme sur $[a;b]$; alors X admet une espérance mathématique et une variance et on a : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

17.6.7 Loi exponentielle

a) Définition

Soit α un réel strictement positif.
Une variable aléatoire réelle X suit la loi exponentielle de paramètre α que l'on note $\varepsilon(\alpha)$ lorsque X admet pour densité de probabilité f définie par : $\begin{cases} f(x) = \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) Propriétés

Si X suit la loi exponentielle de paramètre α ; alors X admet une espérance mathématique et une variance et on a : $E(X) = \dfrac{1}{\alpha}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\alpha^2}$.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

Exercices d'applications

Exercice 1

Soit A et B deux événements tels que : $P(A) = \dfrac{1}{2}$; $P(B) = \dfrac{3}{4}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{2}{5}$.

1. a) Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
   b) Calculer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.
2. Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

x_i	-100	0	100	150
$p(X = x_i)$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{5}{9}$	α	$\dfrac{1}{9}$

où α est un réel positif.

   a) Déterminer le nombre réel α.
   b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.
   c) Déterminer et construire la fonction de répartition F de X.

Exercice 2

Dans une classe de 60 élèves, un sondage d'opinion sur l'utilisation du préservatif a donné les résultats suivants :

	Filles	Garçons
Pour	24	16
Contre	12	8

On définit les événements suivants :
P : " l'élève est pour l'utilisation du préservatif " ; G : " l'élève est un garçon" et F : " l'élève est une fille "

1. Construire l'arbre pondéré des probabilités traduisant la situation.
2. a) Déterminer les probabilités des événements P, G, F, $P \cap G$ et $P \cap F$.
   b) Les événements P et G sont-ils indépendants ?
   c) Les événements P et F sont-ils indépendants ?
3. On choisit une fille au hasard.
   Déterminer la probabilité qu'elle soit pour l'utilisation du préservatif.
4. On choisit un garçon au hasard.
   Déterminer la probabilité qu'elle soit pour l'utilisation du préservatif.
5. Les garçons utilisent-ils plus le préservatif que les filles ?

Exercice 3

Un sondage effectué à la ville de Brazzaville à propos de la construction d'un pont reliant Brazzaville et Kinshasa donne les résultats suivants : 60% des personnes interrogées sont contre la construction de ce pont. Parmi les personnes qui sont contre cette construction, 80% sont des écologistes.
Parmi les personnes favorables à la construction, 35% sont des écologistes.
On note C l'événement " la personne interrogée est contre la construction " et
E l'événement " la personne interrogée est écologiste ".

1. Traduire les pourcentages de l'énoncé en langage des probabilités.
2. Construire l'arbre pondéré illustrant cet événement.
3. Déterminer les probabilités suivantes : $P(E \cap C)$ et $P(E \cap \overline{C})$.
4. Déterminer la probabilité que la personne interrogée est écologiste.
5. Déterminer la probabilité que la personne interrogée est favorable à la construction du pont.
6. Déterminer la probabilité de l'événement " la personne interrogée est favorable à la construction sachant qu'elle n'est pas écologiste ".

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com

7. Déterminer la probabilité de l'événement " la personne interrogée est contre la construction sachant qu'elle est écologiste ".

Exercice 4

Dans tout l'exercice, A et B étant deux événements, $P(A)$ désigne la probabilité de A ; $P\left(B/A\right)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé. Le nombre de clients se présentant en présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité :

$p_i = P(X = i)$

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

1. Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Déterminer la variance et l'écart-type de X.
3. Déterminer et représenter la fonction de répartition F de X.
4. Dans cette station-service, la la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients.
   On considère les évènements suivants :
   C_1 : " en cinq minutes, un seul client se présent " ;
   C_2 : " en cinq minutes, deux clients se présentent " ;
   E : " en cinq minutes, un seul client achète de l'essence ".
   (a) Calculer $P(C_1 \cap E)$.
   (b) Montrer que $P\left(E/C_2\right) = 0,42$ et calculer $P(C_2 \cap E)$.
   (c) En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

Exercice 5

Chaque jour, Prince premier ne peut pas utiliser son portable au travail lorsque l'un des deux événements suivants se produit :
▷ D : " Son portable est déchargé "
▷ O : " Il a oublié son portable chez lui ".
On suppose que ces deux événements sont indépendants.
Il a observé, d'une part, que la probabilité de D est égale à $\dfrac{1}{20}$ et, d'autre part, qu'il oublie son portable chez lui un jour sur dix.

1. Répondre par vrai ou faux, si les événements D et O sont indépendants, alors les événements $\overline{D}$ et O sont aussi indépendants.
2. Un jour de travail donné, quelle est la probabilité que prince premier oublie son portable chez lui et qu'il ne soit pas déchargé ?
3. Un jour de travail donné, quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas se servir de son portable ?
4. Au cours d'une semaine, il travaille 5 jours. On admet que le fait qu'il oublie son portable chez lui un jour donné est indépendant du fait qu'il l'oublie ou non les autres jours. Quelle est la probabilité de l'événement A : " Il a oublié son portable chez lui au moins une fois dans la semaine " ?

Exercice 6

Une machine de production d'une usine fabrique des vêtements pour nourrissons. Une étude statistique a montré que :

▷ 12% des vêtements fabriqués ont un défaut dans la couleur ;

▷ parmi les vêtements ayant un défaut dans la couleur, 20% ont un défaut dans la forme ;

▷ parmi les vêtements n'ayant pas un défaut dans la couleur, 8% présentent un défaut dans la forme.

On appelle C l'événement " le vêtement présente un défaut dans la couleur "
et $\overline{C}$ l'événement contraire.

On appelle F l'événement " le vêtement présente un défaut dans la forme "
et $\overline{F}$ l'événement contraire.

Un employé choisit un vêtement au hasard, dans un lot de vêtements fabriqués et conformes à l'étude statistique ci-dessus.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de l'événement A " le vêtement choisit ait un défaut dans la couleur et un défaut dans la forme ".
3. Calculer la probabilité que le vêtement choisit ait un défaut dans la forme.
4. Le directeur de l'usine affirme que 92% des vêtements fabriqués ne présentent aucun défaut. Cette affirmation est-elle correcte ? expliquer

Exercice 7

Dans une mare d'eau vivent des grenouilles vertes et des rainettes. 30% des grenouilles sont des rainettes et 70% des grenouilles sont des grenouilles vertes.

Un héron mange 10% des rainettes et 20% des grenouilles vertes de cette mare d'eau.

On considère les événements suivants :

R : " la grenouille est une rainette "

V : " la grenouille est une grenouille verte "

M : " la grenouille est mangée par le héron ".

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
2. Déterminer la probabilité qu'une rainette soit mangée par le héron.
3. Déterminer la probabilité qu'une grenouille soit mangée par le héron.
4. Déterminer la probabilité qu'aucune grenouille soit mangée par le héron.
5. Déterminer la probabilité qu'une grenouille soit une rainette et mangée par le héron.
6. Déterminer la probabilité qu'une grenouille mangée par le héron soit une rainette.

Réalisé par : ACHILLE YANGA Tel(+242) 068080781
Email : achilleyanga@gmail.com