

PHYSIQUE

Collection
BHDS

Terminale sciences Mathématiques et Expérimentales

MECANIQUE

ELECTROMAGNETISME/ELECTRICITE

OPTIQUE ONDULATOIRE

PHYSIQUE ATOMIQUE ET NUCLEAIRE

DIALLO BOUBACAR

2018

COURS DE PHYSIQUE

MECANIQUE

ELECTROMAGNETISME/ELECTRICITE

OPTIQUE ONDULATOIRE

PHYSIQUE ATOMIQUE ET NUCLEAIRE

EDITION

2018



M. Diallo Boubacar
Ingénieur Electrotechnicien

A VOTRE SERVICE POUR LA REUSITE

Chapitre 1 : MECANIQUE DU POINT

1) CINEMATIQUE DU POINT :

L'objet de la cinématique du point est d'étudier le mouvement d'un point au cours du temps indépendamment des causes qui produisent ce mouvement.

Les objectifs sont la détermination des grandeurs cinématiques telles que les vecteurs accélération, vitesse, position et l'équation horaire de la trajectoire de ce point par rapport à un référentiel choisi par l'observateur.

Généralités

Les référentiels et repères

Les référentiels :

On appelle **référentiel** un objet par rapport auquel on étudie un mouvement. On distingue trois types de référentiel :

- Le **référentiel terrestre** : le solide de référence est un objet fixe à la surface de la Terre. Les trois axes sont, par exemple, la verticale, les axes est-ouest et nord sud. Ce référentiel est adapté à l'étude des mouvements de faible amplitude et de courte durée à la surface de la Terre tels que les mouvements étudiés dans un laboratoire.
- Le **référentiel géocentrique** : le solide de référence est le centre de la Terre. Les trois axes sont dirigés vers trois étoiles fixes. Un tel référentiel subit le mouvement de révolution de la Terre autour du Soleil mais pas le mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. Il est adapté à l'étude du mouvement des satellites en orbite autour de la Terre.
- Le **référentiel héliocentrique** : le solide de référence est le centre du Soleil. Les trois axes sont les mêmes que ceux du référentiel géocentrique, dirigées vers trois étoiles fixes. Il est adapté à l'étude des astres en orbite autour du Soleil.

Les repères:

Pour les mouvements dans l'espace, on associe au référentiel un **repère cartésien** $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ défini par une origine et trois vecteurs unitaires deux à deux perpendiculaires. On réduit ce repère à (O, \vec{i}, \vec{j}) pour un mouvement plan et par (O, \vec{i}) pour un mouvement rectiligne.

1.1) Les paramètres cinématiques d'un mouvement

1.1.1 Vecteur de position :

Coordonnées cartésiennes :

À un référentiel galiléen (par exemple le référentiel terrestre) nous pouvons attacher un *repère cartésien* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont les vecteurs unitaires de base sont fixes par rapport au référentiel

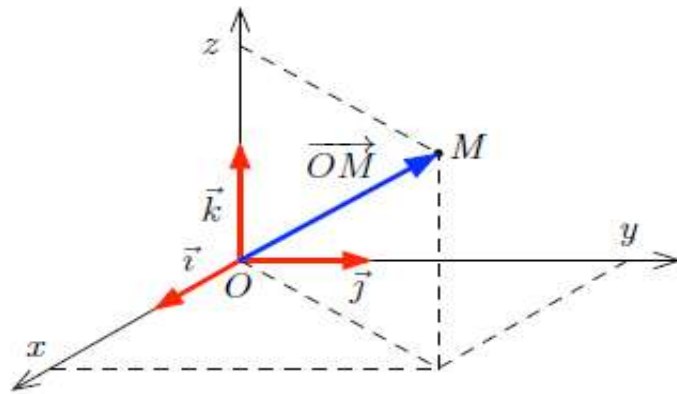


Figure1.2 vecteur position

la position du point M est repérée par son vecteur position :

$$\vec{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad OM = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

- Si le repère est orthonormé x, y, z sont appelés coordonnées cartésiennes du point M.
- Si M est en mouvement dans le repère ses coordonnées sont en fonction du temps. Ainsi $x(t)$ $y(t)$ et $z(t)$ sont appelées équations horaires ou paramétriques du mouvement .
- Pour déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire, on élimine la variable temps t entre les paramètre x y et z .

Exemple : Un point M a pour équations horaires dans le référentiel terrestre : $x(t) = t + 1$, $y(t) = 3t - 2$ et $z(t) = 2$.

- Décrire la trajectoire du point M
- Déterminer la distance OM à la date $t = 3$ s

- Pour déterminer la trajectoire du point M, il faut éliminer le temps en déterminant une relation entre x, y et z . Par exemple, on exprime t en fonction de x : $t = x - 1$ que l'on remplace dans l'expression de y . On obtient alors :

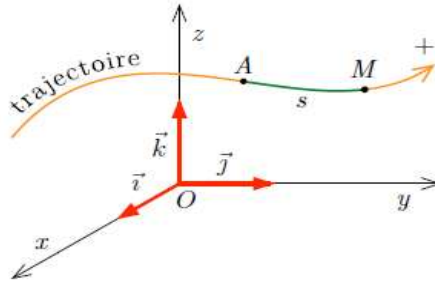
$$\begin{cases} y = 3(x - 1) - 2 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

La trajectoire du point M est donc une droite d'équation $y = 3x - 5$ dans le plan d'altitude 2

- Pour déterminer la distance OM, il faut calculer la norme du vecteur \vec{OM} à la date $t = 3$ s. On trouve alors $M(4;7;2)$, d'où :

$$OM = \sqrt{4^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{69} \simeq 8,31 \text{ m}$$

- Une autre façon de repérer la position d'un mobile M sur sa trajectoire est d'utiliser l'*abscisse curviligne*. Pour cela, on choisit arbitrairement :
 - une origine A sur la trajectoire,
 - un sens positif.



L'abscisse curviligne s est la mesure algébrique de l'arc \widehat{AM} . Il est à noter que pour pouvoir utiliser l'abscisse curviligne, il faut connaître la trajectoire du mobile.

1.1.2 Vecteur vitesse instantanée :

Le *vecteur vitesse* \vec{v} du mobile M à l'instant t , nous renseigne sur la rapidité du changement du vecteur position à cet instant. Il est défini par (figure 1.3) :

$$\vec{v} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\overrightarrow{MM'}}{t' - t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$



FIGURE 1.3 – Vecteur vitesse

En effet :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \Delta\overrightarrow{OM}$$

et

$$\lim_{t' \rightarrow t} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{t' - t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}.$$

le vecteur vitesse est défini comme la dérivée première du vecteur position par rapport au temps .

les caractéristiques du vecteur vitesse sont :

- **Point d'application** : point M ou l'on veut définir la vitesse.

- **Direction** : la tangente à la trajectoire en ce point M.
- **Sens** : celui du mouvement.
- **Norme** : l'intensité du vecteur vitesse. Elle s'exprime en m/s.

Vecteur vitesse et Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt}$$

et comme les vecteurs de base sont fixes :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

de sorte qu'on puisse écrire :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

Remarque :

On utilise souvent les notations \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} qui représentent exclusivement des dérivations par rapport au temps. Ainsi le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}.$$

Exemple : Un point M a pour équations horaires dans le référentiel terrestre :
 $x(t) = 2t^2 - 3t + 1$, $y(t) = 3t - 2$ et $z(t) = 2$.

- a) Calculer les coordonnées du vecteur vitesse au cours du temps
- b) Déterminer la vitesse du point M à l'instant $t = 5$ s

Résolution

- a) On dérive les coordonnées du point M en fonction du temps, on obtient alors :

$$\vec{v} = (4t - 3 ; 3 ; 0)$$

- b) Pour déterminer la vitesse du point M à l'instant $t = 5$ s, il faut calculer la norme du vecteur vitesse à l'instant $t = 5$ s

$$v(5) = \sqrt{17^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{298} \simeq 17,26 \text{ m.s}^{-1}$$

1.1.3 Vecteur accélération :

Le vecteur accélération \vec{a} à l'instant t , indique la rapidité de la variation du vecteur vitesse. Il est défini par (figure 1.4) :

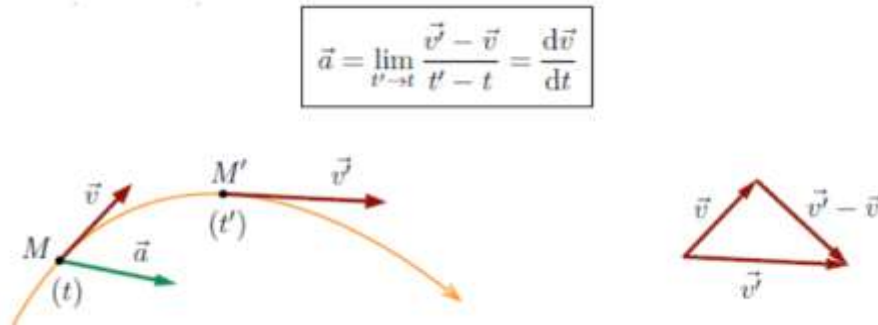


Figure 1.4 Vecteur accélération

Vecteur accélération et Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}$$

et :

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}$$

puisque les vecteurs de base sont fixes.

On peut alors écrire :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

Remarque : avec la notation pour les dérivations par rapport au temps, l'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \dot{v}_x \vec{i} + \dot{v}_y \vec{j} + \dot{v}_z \vec{k} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}.$$

Les coordonnées d'un mobile dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) , associé au référentiel terrestre, sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = 4t - 2 \\ y(t) = t^2 - 2t + 1 \end{cases}$$

- Déterminer la position du mobile aux instants $t = 0$ et $t = 2$ s
- Déterminer l'accélération du mobile à l'instant $t = 10$ s
- Établir l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile M et en donner une représentation en indiquant le sens de parcours du point M

Résolution

a) On détermine les coordonnées du point M aux instant $t = 0$ et $t = 2$ s

$$\vec{OM}(0) = (-2; 1) \quad \text{et} \quad \vec{OM}(2) = (6; 1)$$

b) Pour déterminer l'accélération à l'instant $t = 10$ s, il faut dériver deux fois le vecteur position :

$$\vec{v} = (4; 2t - 2) \quad \text{et} \quad \vec{a} = (0; 2)$$

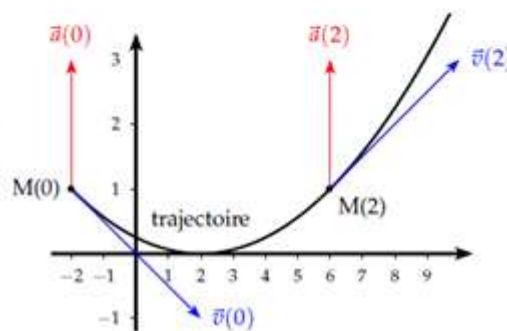
L'accélération est donc constante donc $a(10) = 2 \text{ m.s}^{-2}$

c) Pour déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire, il faut éliminer t des équations horaires. De l'expression de $x(t)$, on a : $t = \frac{x+2}{4}$ que l'on remplace dans l'expression de $y(t)$ en remarquant que :

$$t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2$$

$$y = \left(\frac{x+2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{x+2-4}{4}\right)^2$$

$$= \frac{(x - 2)^2}{16} = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$



La trajectoire est donc une parabole de sommet $S(2;0)$. Pour connaître le sens du parcours il suffit de repérer les points $M(0)$ et $M(2)$.

Base de Frenet :

Dans la suite nous allons nous limiter à une trajectoire plane. À une telle trajectoire nous pouvons attacher le repère (M, \vec{T}, \vec{N}) appelé *repère de Frenet* (figure 1.5).

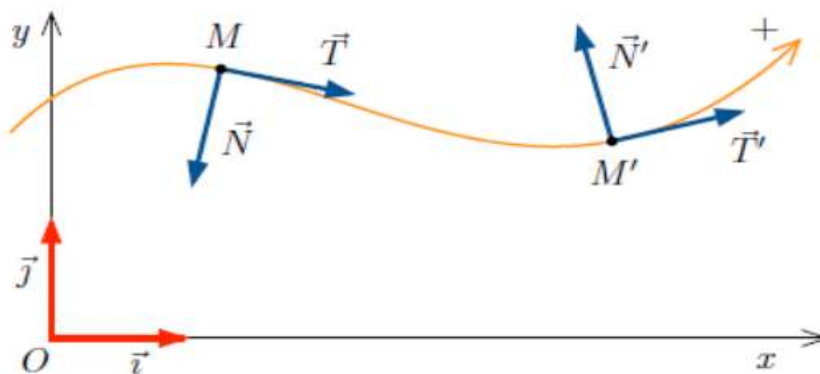


Figure 1.5 Repère de Frenet

Il s'agit d'un repère qui se déplace avec le mobile M ; les vecteurs de base varient par rapport au référentiel galiléen lors du déplacement du point mobile.

Les caractéristiques du repère de Frenet sont :

- son origine est le point mobile M ;
- le vecteur unitaire \vec{T} est tangent à la trajectoire en M et orienté dans le sens positif ;
- le vecteur unitaire \vec{N} est normal à la trajectoire en M (et donc aussi à \vec{T}) et orienté vers l'intérieur de la courbure de celle-ci.

Exprimer le vecteur accélération dans la base de Frenet revient à déterminer les coordonnées tangentielle a_T et normale a_N définies par (figure 1.6) :

$$\vec{a} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N}.$$

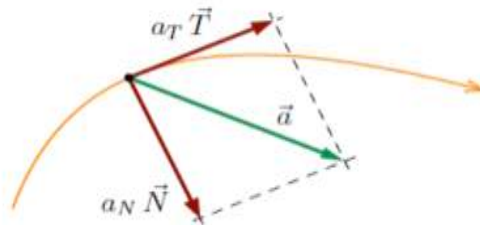


Figure 1.6 composantes du vecteur accélération

Comme le vecteur vitesse \vec{v} est tangent à la trajectoire, son expression dans la base de Frenet est :

$$\vec{v} = v_T \vec{T}$$

où v_T est la valeur algébrique de la vitesse en M .

On obtient le vecteur accélération par dérivation du vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v_T \vec{T})}{dt}$$

et en appliquant la règle sur la dérivée d'un produit :

$$\vec{a} = \frac{dv_T}{dt} \vec{T} + v_T \frac{d\vec{T}}{dt}.$$

Le vecteur accélération peut se décomposer en deux vecteurs :

_ l'accélération tangentielle : $\vec{a}_T = \frac{dv_T}{dt} \vec{T}$

_ l'accélération normale : $\vec{a}_N = \frac{d\vec{T}}{dt} v_T = \frac{v^2}{R} \vec{N}$

avec R le rayon de courbure de la trajectoire .

la base (\vec{T}, \vec{N}) constitue la base de Frenet.

1.1.4 EXERCICES :

Exercice 1 : Un point mobile a comme coordonnées cartésiennes dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) :

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = 2t - 2 \\ y = 3t^2 \end{array} \right.$$

Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération de ce point mobile.

Exercice 2 : La position d'un enfant sur un manège est repérée par rapport à un référentiel terrestre, en coordonnées cartésiennes, dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) par :

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = a \cos(\omega t) \\ y = a \sin(\omega t) \end{array} \right.$$

où a et ω sont des constantes positives.

1. Déterminer, dans le même système de coordonnées cartésiennes, les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération de l'enfant.

2. Exprimer le vecteur accélération en fonction du vecteur position \overrightarrow{OM} .

Exercice 3 : Un point a pour coordonnées dans un repère orthonormé : $x=3t+5$, $y=-3t+2$ et $z=0$

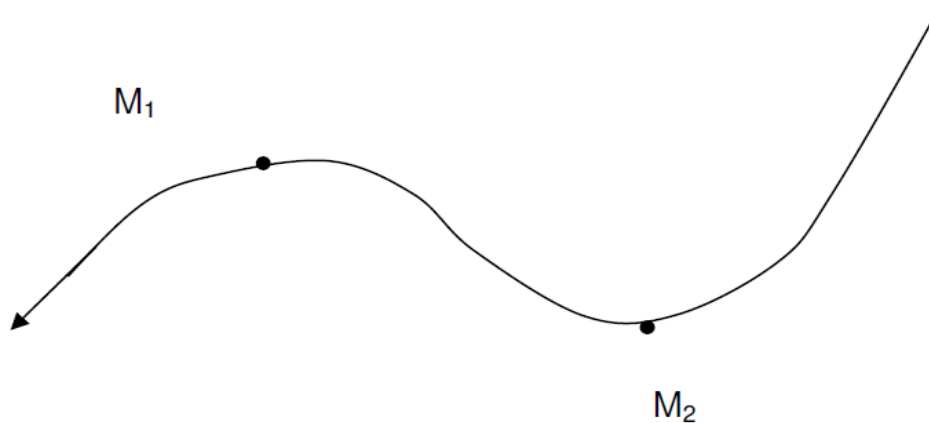
x , y et z s'expriment en m et t en s.

Etablir l'équation de la trajectoire de ce point et préciser sa nature.

Donner l'expression du vecteur vitesse de ce point et calculer la valeur de la vitesse.

Exercice 4 : Compléter le schéma en représentant en M_1 et en M_2 , les vecteurs unitaires, le vecteur vitesse, le vecteur accélération et ses composantes normale et tangentielle.

Le mobile accélère lors du passage en M_1 et décélère lors du passage en M_2 . Il se déplace de la gauche vers la droite.



Exercice 5 : Un point a pour coordonnées dans un repère orthonormé :

$$x=3 \sin 2t, y=3 \cos 2t \text{ et } z =0.$$

x, y et z s'expriment en m et t en s.

Etablir l'équation de la trajectoire de ce point et préciser sa nature.

Exercice 6 : Un point a pour coordonnées dans un repère orthonormé : $x=3t$,
 $y= - 3t^2+2$ et $z =0$

x, y et z s'expriment en m et t en s.

Etablir l'équation de la trajectoire de ce point et préciser sa nature.

Déterminer à la date $t= 2s$, la position du point mobile ainsi que les composantes des vecteurs vitesse et accélération, les valeurs des vitesse et accélération dans le repère cartésien .

Exercice 7 : Les coordonnées d'un mobile dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) , associé au référentiel terrestre, sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = 4t - 2 \\ y(t) = t^2 - 2t + 1 \end{cases}$$

- Déterminer la position du mobile aux instants $t = 0$ et $t = 2$ s
- Déterminer l'accélération du mobile à l'instant $t = 10$ s
- Établir l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile M et en donner une représentation en indiquant le sens de parcours du point M

Exercice 8 :

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) le vecteur position d'un mobile M est défini par:

$$\overrightarrow{OM} = 10t \vec{i} + (-5t^2 + 10t) \vec{j}.$$

Les coordonnées sont en mètres et le temps en secondes.

- 1) Déterminer l'équation de la trajectoire. La représenter.
- 2) Donner l'expression du vecteur vitesse du mobile de M.
- 3) En déduire :
 - La valeur de la vitesse à la date $t = 2s$
 - La valeur de la vitesse lorsque le mobile passe au sommet de sa trajectoire.

1. 2) Quelques mouvements classiques

1.2.1) Mouvement rectiligne uniforme :

a) Définition :

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniforme si sa trajectoire est une droite et son vecteur vitesse constant ($\vec{v} = v_0 \vec{i}$).

Si le mobile $M(x(t))$ se déplace sur l'axe (ox) on a alors le schéma suivant :



Figure 1.7

b) Equations horaires :

* Conditions initiales: A $t = 0 \Rightarrow x = x_0$ et $v = v_0$

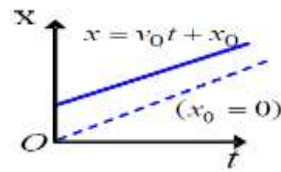
$$v = v_0 = cte \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0} \text{ et } v = v_0$$

$$\text{d'où } \boxed{x = v_0 t + x_0}$$

c) Diagrammes du mouvement :

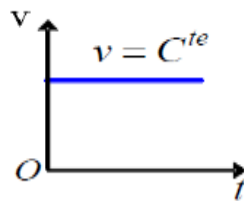
Les diagrammes du mouvement rectiligne uniforme sont la représentation graphique de l'accélération, de la vitesse et du déplacement en fonction du temps.

➤ Diagramme des espaces



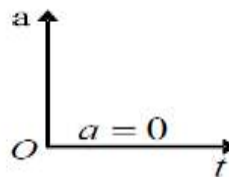
le diagramme des espaces est représenté par une fonction linéaire du temps.

➤ Diagramme des vitesses



le diagramme des vitesses est la droite parallèle à l'axe des temps d'ordonnée à l'origine V_0 .

➤ Diagramme des accélérations



Le diagramme des accélérations se réduit à l'axe des temps.

d) Exercices :

Exercice 1 :

Un mobile, animé d'un mouvement rectiligne uniforme, parcourt une distance de 10 m en 5 s. Il se déplace dans le sens négatif de l'axe $x'x$. Déterminer son équation horaire dans le cas où, à $t=0$, il passe au point d'abscisse $x=5m$.

Représenter, sur un même graphe, x , v et a en fonction du temps.

Quelle serait la nouvelle équation horaire si l'on déclenchait le chronomètre de telle manière qu'à $t=2s$ le mobile passe au point d'abscisse $x= - 2 m$?

Exercice 2 :

Un nageur traverse une rivière de largeur 50 m. La vitesse du courant v_c a pour valeur $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

La vitesse du nageur par rapport à l'eau v_n a pour valeur $2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et le vecteur vitesse correspondant est perpendiculaire aux berges de la rivière.

Quelle est la vitesse absolue du nageur ?

- Quelle est la distance dont il a dérivé ?
 Quelle est la distance réellement parcourue ?
 Combien de temps faut-il au nageur pour traverser la rivière ?
 2. Quelle devrait être la direction du vecteur vitesse du nageur par rapport au courant pour qu'il traverse la rivière sans dériver ?

Exercice 3 :

Les équations paramétriques du mouvement donnant le vecteur position \vec{OM} sont: $\vec{OM} \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 4 \\ z = 0 \end{cases}$

Montrer que ce point est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

1.2.2) Mouvement rectiligne uniformément varié :

a) Définition :

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est une droite et son vecteur accélération constant ($\vec{a} = a_0 \vec{i}$).

Si le mobile $M(x(t))$ se déplace sur l'axe (ox) on a alors le schéma suivant :



Figure 1.8

Deux cas peuvent se présenter :

- L'accélération et la vitesse ont le même sens : $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$. Le mouvement est alors uniformément accéléré
- L'accélération et la vitesse ont des sens contraires : $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$. Le mouvement est alors uniformément retardé

b) Equations horaires :

Le vecteur accélération est alors constant : $\vec{a} = \text{Cte}$ car sa norme et son sens sont constants (trajectoire rectiligne).

Pour trouver l'équation horaire, il faut intégrer deux fois le vecteur accélération

$$a = a_0 = \text{Cte} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

Vitesse instantanée :

Dans un mouvement rectiligne uniformément varié la vitesse est une fonction linéaire du temps.

$$v = at + v_0$$

Relation indépendante du temps (GALILEE) :

En éliminant t entre l'équation horaire et l'expression de la vitesse à l'instant t on obtient la relation :

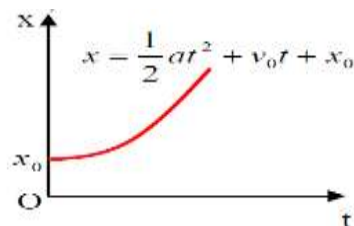
$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Cette relation donne la vitesse du mobile pour toute position de ce mobile sur sa trajectoire .

c) Diagrammes du mouvement :

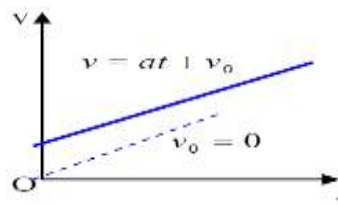
les diagrammes du mouvement rectiligne uniformément varié relatifs à l'accélération, la vitesse et le déplacement.

➤ **Diagramme des espaces**



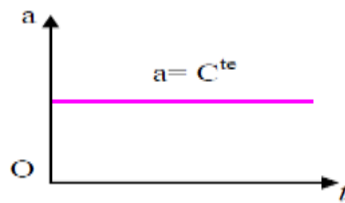
Le diagramme des espaces est une parabole à concavité tournée vers le haut si l'accélération est positive ou vers le bas si l'accélération est négative .

➤ **Diagramme des vitesses**



Le diagramme des vitesses, est une droite dont la pente est égale à l'accélération et dont l'ordonnée à l'origine est la vitesse initiale du mobile.

➤ **Diagramme des accélérations**



Le diagramme des accélérations, est la droite parallèle à l'axe des temps dont l'ordonnée à l'origine l'accélération du mouvement.

d) Autre propriété du mouvement uniformément varié :

Calculons les segments (*ou "espaces"*) que parcourt un mobile en mouvement uniformément varié pendant des intervalles de temps successifs de même durée (quelconque) θ à partir d'un instant t quelconque.

Utilisons l'équation horaire sous sa forme la plus simple : $x = \frac{1}{2}at^2$

$$X_1 = \frac{1}{2}a(t + \theta)^2 = \frac{1}{2}at^2 + at\theta + \frac{1}{2}a\theta^2$$

$$X_2 = \frac{1}{2}a(t + 2\theta)^2 = \frac{1}{2}at^2 + 2at\theta + \frac{4}{2}a\theta^2$$

$$X_3 = \frac{1}{2}a(t + 3\theta)^2 = \frac{1}{2}at^2 + 3at\theta + \frac{9}{2}a\theta^2$$

d'où:

$$x_1 - x = at\theta + \frac{1}{2}a\theta^2$$

$$x_2 - x_1 = at\theta + \frac{3}{2}a\theta^2$$

$$x_3 - x_2 = at\theta + \frac{5}{2}a\theta^2$$

les différences $x_1 - x, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots$ représentent respectivement les espaces parcourus entre les instants t et $t + \theta, t + \theta$ et $t + 2\theta, t + 2\theta$ et $t + 3\theta, \dots$

Ainsi dans un mouvement rectiligne uniformément varié les espaces parcourus pendant des intervalles de temps successifs de même durée θ forment une progression arithmétique de raison $a\theta^2$.

e) Exercices :

Exercice 1 :

Un mobile M se déplace sur $x'x$. A la date $t=0$, il passe au point d'abscisse $x=2\text{m}$ avec une vitesse égale à $+3 \text{ m.s}^{-1}$. Son accélération est constante et vaut -2 m.s^{-2} .

Etablir les expressions de v et de x en fonction du temps. Représenter les fonctions v et x au cours du temps. Décrire le mouvement de M

Exercice 2 :

Un point mobile M décrit sur un axe $O\vec{i}$ un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération $\vec{a} = 4\vec{i}$. A l'instant $t = 0$, le vecteur vitesse est $\vec{v}_0 = -8\vec{i}$ et le vecteur position de M est $\vec{OM}_0 = 2\vec{i}$.

- 1) Établir les équations horaires $x(t)$ et $v(t)$
- 2) Déterminer la date et la position pour lesquelles la vitesse s'annule.
- 3) Entre quelles dates le mouvement est-il accéléré? retardé?

EXERCICES :

Exercice 1 :

Deux points mobiles M_1 et M_2 se déplacent sur le même axe $x'x$. A la date $t=0$, M_1 a pour abscisse -4m et se déplace dans le sens positif de l'axe à la vitesse de 3 m.s^{-1} .

Le point M_2 se déplace en sens inverse ; la valeur de sa vitesse est 3 m.s^{-1} et à la date $t= 2\text{s}$ il a pour abscisse $+5\text{m}$.

Etablir les équations horaires de M_1 et de M_2 .

Vont-ils se rencontrer ? Si oui, où et quand ?

Exercice 2 :

Une bille est lancée verticalement vers le haut, à $t=0$, d'un point A situé à 2m au dessus du sol ($z_A=2\text{m}$) et son centre d'inertie se déplace sur l'axe $z'z$ orienté positivement vers le haut. La vitesse de la bille est $v = -10t + 20$

Etudier complètement le mouvement du centre d'inertie et représenter, sur un même graphe, x , v et a en fonction du temps.

Exercice 3 :

Un mobile M se déplace sur $x'x$. A la date $t=2\text{s}$, il passe au point d'abscisse $x=2\text{m}$ avec une vitesse égale à $+3 \text{ m.s}^{-1}$. Son accélération varie au cours du temps et a pour expression :

$$a = 0,5 t \quad (t \text{ en s}).$$

Etablir les expressions de v et de x en fonction du temps.

Exercice 4 :

Un lièvre s'éloigne d'un chasseur selon une ligne droite, sa vitesse est de 36km/h . Le chasseur tire lorsque la distance qui le sépare de sa future victime est de 98 m . Si la vitesse de la balle est de 500 m/s , quelle distance pourra encore

parcourir le lièvre avant d'être touché ?

Exercice 5 :

Sur une portion de route rectiligne, un camion passe au point A à midi et se dirige vers le point B, distant de 5 km, avec une vitesse constante de 54 km/h. A midi et deux minutes, une voiture quitte B pour se diriger vers A, à la vitesse constante de 72km/h.

A quelle distance de A les deux véhicules vont-ils se croiser ?

Exercice 6 :

Deux athlètes A et B courent sur une piste circulaire longue de 400 m. Ils partent ensemble et se déplacent à des vitesses respectivement égales à 10 et 9 m/s.

a) Au bout de combien de temps auront-ils un tour d'écart ?

b) Quelles distances les deux coureurs auront-ils alors parcourues ?

Exercice 7 :

Une automobile quitte Mamou à 9 heures 20 à la vitesse moyenne de 60 km à l'heure . Une seconde voiture quitte Mamou 10 minutes plus tard et se lance à la poursuite de la première à la vitesse de 72 km à l'heure . A quelle heure et à quelle distance de Mamou la deuxième automobile rejoindra-t-elle la première?

Exercice 8 :

Un rapide de 200 m de long roulant à 104 km à l'heure double un train de marchandises de 370 m de long marchant à 50 km à l'heure. Calculer la durée du dépassement.

Exercice 9 :

Un train de 225 m de long marchant à 72 km à l'heure rencontre un train de 300 m de long qui marche à 54 km à l'heure. Trouver la durée du croisement.

Exercice 10 :

À l'instant $t = 0$, deux navires, N' et N , sont situés sur un même méridien. Le navire N' est à une distance a au nord de N .

1) N se dirige vers le nord à la vitesse v , N' vers l'est avec la vitesse constante v' .

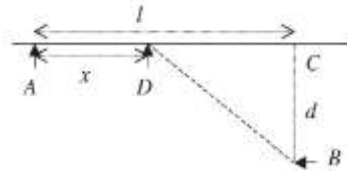
Quelle sera la distance minimale entre les deux navires ?

2) N' se dirige vers l'est avec la vitesse v' . constante. Quelle direction doit prendre N pour atteindre N' en ligne droite ? Calculer la durée correspondante.

Exercice 11 :

Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ à la distance $d = CB$ de la route, et ce, dans un temps minimal

(voir figure). On suppose les trajets successifs AD et DB rectilignes et parcourus à vitesse constante par le tracteur qui va deux fois moins vite dans le champ que sur la route. On pose $AC = l$ et $AD = x$.



- 1) Exprimer la durée t du trajet ADB en fonction de x .
- 2) En quel point D le tracteur doit-il quitter la route ?

Exercice 12 :

Sur le quai d'une gare, une voyageuse, en retard court, pour essayer de prendre son train, à une vitesse constante $v = 8 \text{ m.s}^{-1}$. Le train démarre alors qu'elle est encore à 100 mètres du dernier wagon. L'accélération constante du train est de $a = 0,5 \text{ m.s}^{-2}$.

- 1) La voyageuse rejoindra-t-elle son train ? Sinon, à quelle distance minimale s'en trouvera-t-elle ?
- 2) Reprendre la question 1 dans le cas où le démarrage du train a lieu lorsque le dernier wagon est à 40 m de la voyageuse.
- 3) Quelle devrait être, à l'instant du démarrage, la distance minimale entre le train et la voyageuse pour que celle-ci atteigne effectivement le dernier wagon ?

Exercice 13 :

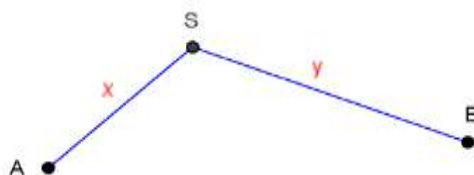
Le même jour deux trains ont été dirigés d'une ville A sur une ville B ; le premier T1 est parti à 8 heures avec une vitesse de 51 km à l'heure le deuxième T2

à 8 heures 20 mn avec une vitesse de 45 km à l'heure. La distance AB est de 237 km. Un troisième train T3 est parti à 8 heures de B pour A avec une vitesse de 54 km à l'heure . on demande :

- 1) A quelle heure le train T1 sera à égale distance des trains T2 et T3 ?
- 2) A quelles distances de A les trois trains se trouveront à ce moment?

Exercice 13 :

Pour aller de la ville A à la ville B, on doit gravir un col dont le sommet S est situé à x km de A et y km de B.



Pour aller de A vers B, un coureur cycliste met 1 h 30 mn ; pour aller de B vers A, il met 1 h 50 mn. Sachant que sa vitesse moyenne horaire en montée est de 15 km/h et sa vitesse moyenne horaire en descente est de 45 km/h, déterminer les distance x et y.

Exercice 14 :

Soit une route rectiligne passant par trois points : A B C ; B étant le milieu de AC ; on a $AB=BC=40$ km. A midi un cycliste part du point A ; à 13 heures un autre cycliste part du point B et à 14 heures une automobile part du point C les trois mobiles se déplaçant d'un mouvement uniforme sur la droite ABC.

Déterminer les vitesses algébriques de ces mobiles sachant que :

1. les vitesses des deux cyclistes sont égales et opposées ;
2. à 15 heures l'automobile est à égale distance des deux cyclistes ;
3. à 16 heures l'automobile se retrouve au même point que le cycliste venu de B.

Exercice 15 :

Une automobile démarre lorsque le feu passe au vert avec une accélération $a = 2,5$ m.s⁻² pendant une durée de 7,0 ; ensuite le conducteur maintient sa vitesse constante. Lorsque le feu passe au vert, un camion roulant à la vitesse de 45 km à l'heure est situé à une distance de 20 m du feu avant celui-ci. Il maintient sa vitesse constante. Dans un premier temps le camion va doubler l'automobile puis dans un deuxième temps celle-ci va le dépasser. En choisissant ;

- comme origine des dates l'instant où le feu passe au vert ;
- comme origine des espaces la position du feu tricolore.

Déterminer :

- a) les dates des dépassements ;
- b) les abscisses des dépassements ;
- c) les vitesses de l'automobile à ces instants.

Exercice 16 :

Un point mobile M a pour équation horaire :

$$\begin{cases} x = \cos(\pi + t) - \sin(\pi + t) \\ y = \cos(\pi + t) + \sin(\pi + t) \end{cases}$$

Etablir l'équation de la trajectoire de ce point et préciser sa nature.

1.2.3) Mouvement circulaire uniforme :

Un mobile décrit un mouvement circulaire uniforme si sa trajectoire est un cercle et la norme de son vecteur vitesse constante.

Remarque : Le vecteur vitesse n'est pas constant, car la direction de ce vecteur varie dans le temps. On a donc :

$$v = \text{Cte et } \vec{v} \neq \text{Cte}$$

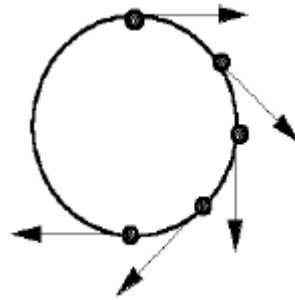
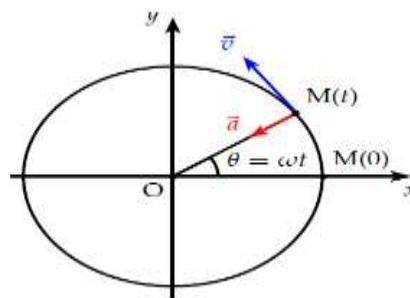


Figure 1.9

Si le point M se déplace dans le plan Oxy sur un cercle de centre O et de rayon R, on a alors la figure suivante :



b) Accélération :

Dans la base de Frenet, on a : $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \Leftrightarrow \vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \vec{T} = \vec{0}$ car v est une constante

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

Le vecteur accélération d'un mouvement circulaire uniforme est dirigé vers le centre de la trajectoire : on dit que l'accélération est **centripète** .

C) Equations horaires :

La position du point mobile M peut être repérée par l'angle θ , appelé *abscisse angulaire*. (figure)

Les coordonnées cartésiennes de la position du mobile sont :

$$x = R \cos \theta ; y = R \sin \theta$$

où R est le rayon de la trajectoire circulaire et l'angle θ est exprimé en radians.

Par définition la vitesse angulaire ω est l'angle balayé pendant l'unité de temps.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Elle s'exprime en radians par seconde.

Pour un mouvement circulaire uniforme : $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{cte}$; $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} (R\theta) = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$

$$v = R\omega$$

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{N} = R\omega^2 \vec{N}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{cte} \Rightarrow \theta = \omega t + \theta_0$$

exemple :

Montrer que dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est centripète (dirigée vers le centre du cercle).

Résolution :

Montrons que dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est centripète (dirigée vers le centre du cercle).

Supposons qu'à $t = 0$ s le point M soit sur l'axe Ox.

À un instant $t \neq 0$, le point M est repéré par l'angle θ sur le cercle. Comme le mouvement est uniforme, la vitesse angulaire ω est constante. On a donc : $\theta = \omega t$. Les équations horaires sont donc :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = R \cos \theta = R \cos \omega t \\ y(t) = R \sin \theta = R \sin \omega t \end{cases}$$

En dérivant une fois, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse, puis une seconde fois le vecteur accélération :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x(t) = -R\omega \sin \omega t \\ v_y(t) = R\omega \cos \omega t \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{a} \begin{cases} a_x(t) = -R\omega^2 \cos \omega t \\ a_y(t) = -R\omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

On remarque que : $\vec{a} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$. L'accélération est dirigé vers le centre du cercle. L'accélération est donc centripète.

Calculons les normes des vecteurs vitesse et accélération :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{R^2\omega^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = R\omega$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{R^2\omega^4(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)} = R\omega^2$$

On a alors $\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{N}$

Donc le vecteur accélération d'un mouvement circulaire uniforme est dirigé vers le centre de la trajectoire : on dit que l'accélération est **centripète** .

d) Période et Fréquence :

- **Période :**

Le mouvement circulaire uniforme est périodique de *période* **T**. La période est le temps nécessaire pour décrire un tour complet et s'exprime en seconde (s). Nous avons :

$$T = \frac{\text{périmètre du cercle}}{\text{vitesse linéaire}} = \frac{2\pi R}{v}$$

La vitesse linéaire et la vitesse angulaire peuvent s'exprimer en fonction de la période :

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

- **Fréquence :**

La *fréquence* **f** du mouvement circulaire uniforme est le nombre de tours effectués par seconde. La distance parcourue par seconde étant la vitesse linéaire v , nous avons :

$$f = \frac{\text{vitesse linéaire}}{\text{périmètre du cercle}} = \frac{v}{2\pi R}$$

Ainsi, la fréquence est l'inverse de la période :

$$f = \frac{1}{T}$$

La fréquence est exprimée en *hertz* (Hz) : 1 Hz = 1 s⁻¹. La vitesse angulaire peut s'écrire :

$$\omega = 2\pi f$$

e) Exercices :

Exercice 1 :

Une machine à laver essore la lessive avec une fréquence de 1000 tours par minute et le diamètre intérieur de son tambour est de 40 cm. déterminer la vitesse angulaire ω et la vitesse v d'un point du tambour.

Exercice 2 :

Calculer la vitesse moyenne d'un point de l'équateur terrestre lors de son mouvement de rotation autour de l'axe de la Terre. (Rayon = 6400 km)

Exercice 3 :

Si l'on admet que le système solaire fait un tour d'orbite circulaire de rayon de 30'000 années-lumière en 250 millions d'années, quelle est alors la vitesse du centre du système solaire dans la galaxie en km/s ? (1 année-lumière = 300'000'000 m/s * 365,25 j/an * 24 h/j * 3600 s/h)

Exercice 4 :

Le plateau d'un électrophone de rayon $R=15$ cm est animé d'un mouvement circulaire uniforme à la fréquence de $33,3$ tr.min⁻¹.
Calculer la période, la vitesse angulaire du plateau.
Quelles sont les caractéristiques du vecteur accélération d'un point P à la périphérie ?

Exercice 5 :

Deux cyclistes M1 et M2 se déplacent sur une piste circulaire de centre O et de rayon $R = 100$ m. La vitesse de M1 a pour valeur 18 km.h⁻¹ et celle de M2, 27 km.h⁻¹. A $t = 0$, M1 passe en W, origine des espaces sur la trajectoire, alors que M2 a pour élongation angulaire $\theta = \frac{\pi}{3}$.
M1 se déplace dans le sens trigonométrique et M2 en sens inverse.
Etablir les expressions des élongations angulaires des mobiles au cours du temps.
A quelles dates vont-ils se rencontrer ?

Exercice 6 :

Un mobile M est animé dans le plan rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) d'un mouvement circulaire. Ces coordonnées s'expriment par :

$$\begin{cases} x = 2\cos\omega t \\ y = 2\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow x \text{ et } y \text{ en mètre.}$$

- 1) Montrer que le mouvement est circulaire uniforme.
- 2) Déterminer les coordonnées du vecteur accélération.
- 3) Quelle est l'expression de l'abscisse curviligne s ? L'origine des abscisses curvilignes est prise au point A de coordonnées cartésiennes (2,0).

Exercice 7 :

Comment expliquez-vous qu'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme ait une accélération, bien que la valeur du module de sa vitesse soit constante ? Que savez-vous de cette accélération ?

2) DYNAMIQUE DU POINT :

La dynamique en physique est la science qui étudie la relation entre le corps en mouvement et les causes qui provoquent ce mouvement. Elle prédit aussi le mouvement du corps situé dans un milieu déterminé.

La dynamique, plus précisément, est l'analyse de la relation entre la force appliquée et les changements du mouvement du corps.

Généralités :**Notion de force**

Un point matériel G est rarement mécaniquement isolé mais subit des actions. Ces actions sont appelées **forces**. Lorsqu'on parle de force, il est important de voir que cela suppose l'existence d'un **acteur** (celui qui exerce la force) et un **receveur** (celui qui subit la force).

- **Caractérisation de la force**

La force est une grandeur vectorielle ; c'est-à-dire qu'il faut connaître pour la définir :

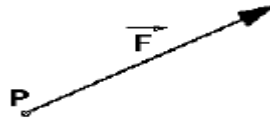
* sa droite d'action ou sa **direction** (NS, EW, oblique...)

* son **sens** (droite - gauche - bas - haut...)

* son **intensité** : Elle est mesurée au moyen d'un dynamomètre et s'exprime en Newton (symbole N) dans le système international d'unités.

* son **point d'application P** ; par exemple : La punaise exerce une force au point d'application de la force.

Une force sera donc matérialisée par un vecteur associé à un point d'application.



• **Les différents types de forces**

- a) La force de **pesanteur mg** , toujours verticale, est dirigée vers le bas, où g est la pesanteur terrestre (9,81 m/s/s ou N/kg). La pesanteur terrestre varie un peu selon l'endroit où l'on se trouve sur la Terre (9,761 à 9,832 N/kg). On peut prendre une valeur approchée de 10 N/kg et pour s'en souvenir : "Une force de 1 newton est la force avec laquelle la Terre attire une plaque de chocolat (100g) vers elle".
- b) La force de **traction T** peut être musculaire ou élastique (provoquée par un ressort où l'allongement est proportionnel à la force ($T = kx$)).
- c) La force de **soutien S** du plan sur lequel repose l'objet, permet à ce dernier de ne pas s'enfoncer dans le plan. C'est en général une force de pression.
- d) La force de **frottement f** s'oppose au mouvement de l'objet. Il peut y avoir un frottement entre deux surfaces ou dans un fluide (gaz ou liquide).
- e) Les forces **électriques**
- f) Les forces **magnétiques** étudiées ultérieurement dans le deuxième chapitre du cours.

• **Le poids (force de champ)**

Dans le référentielle terrestre, tout corps de masse m est soumis au champ pesanteur \vec{g} . Cette force correspond au poids du corps :

- origine : centre de gravité
- direction : verticale
- sens : vers le bas
- norme : $P = mg$ avec $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$

• **La réaction (force de contact)**

La force de réaction du sol \vec{R} en cas de frottement possède deux composantes : une composante normale au sol \vec{R}_N qui ne travaille pas et une composante parallèle au sol \vec{f} dans le sens contraire au déplacement (force de frottement)

$$\vec{R} = \vec{f} + \vec{R}_N$$

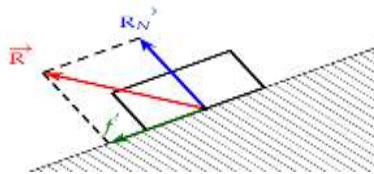


Figure 2.1

• **Tension d'un fil (force de contact)**

La force de tension \vec{T} d'un fil est une force qui s'exerce par un fil sur un système.

Ses caractéristiques sont :

- origine : point du système en contact avec le fil
- direction : le fil

- sens : du système vers le fil
- norme : T

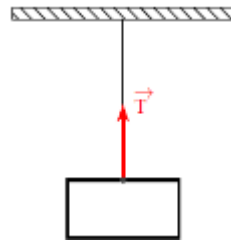


Figure 2.2

2.1) Mouvement du centre d'inertie d'un solide :

2.1.1) Relation fondamentale de la dynamique :

a) Principe d'inertie (1^{ère} loi de Newton) :

Un système de masse m n'est soumis à aucune force (isolé), ou s'il est soumis à un ensemble de forces dont la résultante est nulle (pseudo-isolé), alors le centre d'inertie G du système décrit un mouvement rectiligne et uniforme. En particulier, si un tel corps est au repos il restera au repos.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_G = \vec{0} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \vec{v} = cte \Rightarrow MRU \\ \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \text{immobilité} \end{cases}$$

Lorsqu'il ne subit aucune action venant de l'extérieur, un système matériel est dit **isolé** (ou fermé). C'est le cas d'un solide seul dans l'espace, loin de toute autre masse.

Si des actions extérieures agissant sur un système se compensent, alors on dit que le système est **pseudo-isolé**, c'est-à-dire que tout se passe comme s'il était isolé. Sur la Terre, il n'est pas possible de rencontrer des systèmes rigoureusement isolés. L'action de la Terre est une action extérieure pour tout système matériel. Par contre on peut rencontrer des systèmes pseudo-isolés chaque fois que l'action de la Terre est compensée.

C'est le cas des mobiles autoporteurs ou encore d'un système se trouvant sur une table soufflante. Dans ces cas, le coussin d'air compense l'action de la Terre et élimine les principales forces de frottements qui sont les frottements solide-solide. On retrouve la même situation sur une surface horizontale glissante comme la surface gelée d'une patinoire.

b) Référentiels galiléens :

On appelle référentiel galiléen, un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique.

Exemples de référentiels galiléens

L'expérience montre que le référentiel de Copernic est un excellent référentiel galiléen (malgré le mouvement du Soleil dans notre galaxie qui elle-même est en mouvement par rapport aux autres galaxies). Le référentiel géocentrique est en translation non rectiligne autour du Soleil (translation pratiquement circulaire uniforme). Il n'est donc pas rigoureusement galiléen. Cependant la révolution de la Terre s'effectue en 365 jours et 6 heures, ce qui fait que le référentiel géocentrique peut en première approximation être considéré comme galiléen lorsque le phénomène étudié se produit pendant un temps très court devant la période de révolution de la Terre.

Pour les mêmes raisons, le référentiel terrestre n'est pas galiléen mais s'y apparente lorsque le temps de l'expérience est très inférieur à 24 heures ou bien lorsque la précision des mesures ne permet pas de mettre en évidence ce mouvement.

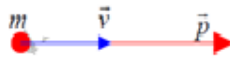
C) Quantité de mouvement :

- **Quantité de mouvement d'un point matériel :**

Soit un point matériel A de masse m animé d'une vitesse \vec{v} .

Dans un référentiel galiléen, le vecteur quantité de mouvement du point A noté \vec{P} est égal au produit de sa masse par son vecteur vitesse \vec{v} .

$$\vec{P} = m\vec{v} .$$



Cette quantité de mouvement s'exprime en kgm/s.

- **Quantité de mouvement d'un solide :**

Soit un solide de masse M animé d'une vitesse \vec{v}_G .

Dans un référentiel galiléen, le vecteur quantité de mouvement du solide est égal au produit de sa masse totale par le vecteur vitesse de son centre d'inertie G.

$$\vec{P} = M\vec{v}_G$$

Où \vec{v}_G est la vitesse du centre d'inertie du solide.

d) Relation fondamentale de la dynamique (RFD) :

- **Énoncé :**

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée par rapport au temps de son vecteur quantité de mouvement du centre d'inertie G.

$$\sum \vec{F}_{\text{appliquée}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

• **Conséquence :**

➤ **Théorème du centre d'inertie (2^{ème} loi de Newton) :**

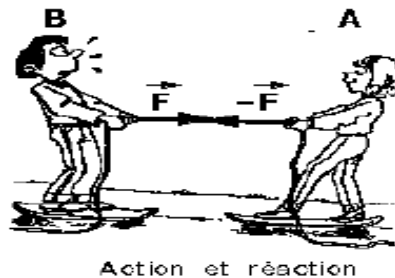
Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures s'exerçant sur un système est égale au produit de la masse du système par le vecteur accélération de son centre d'inertie G.

$$\sum \vec{F}_{\text{appliquée}} = m\vec{a}_G$$

e) **Principe des actions réciproques (3^{ème} loi de Newton) :**

Action et réaction : Si un corps A exerce une force $\vec{F}_{A/B}$ sur un corps B, alors le corps B exerce une force $\vec{F}_{B/A}$ sur le corps A telle que :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$



2.1.2) Théorème de l'énergie cinétique :

Énoncé :

La somme des travaux de toutes les forces extérieures appliquées à un solide est égale à la variation de l'énergie cinétique entre la position initiale et la position finale.

$$\sum W_{\vec{F}_{\text{appliquée}}} = \Delta E_C$$

2.1.3) Applications des bases de la dynamique :

• **Méthode de résolution générale de problèmes de mécanique :**

La méthode est la suivante :

- Lire la totalité de l'énoncé ; l'analyser
- Essayer de voir à quelle partie du cours se rapporte l'exercice ;
- Définir le système à étudier ;
- Choix du référentiel (généralement galiléen dans notre cas) ;
- Représentation du système dans le référentiel choisi ;
- Inventaires de toutes les forces extérieures appliquées au système ;

- Application des lois et résolution des équations en faisant preuve de rigueur mathématique ;
- Présenter le résultat avec une unité et voir si l'ordre de grandeur du résultat est conforme au bon sens.

NB : le repère choisi doit toujours suivre le sens du mouvement.

• **Applications :**

➤ **Application 1 : solide glissant sur un plan incliné**

Un solide de masse m abandonné sans vitesse initiale glisse sur un plan incliné non lisse d'un angle α par rapport à l'horizontale. En supposant que le solide est animé d'un mouvement de translation et que les forces qui lui sont appliquées sont constantes.

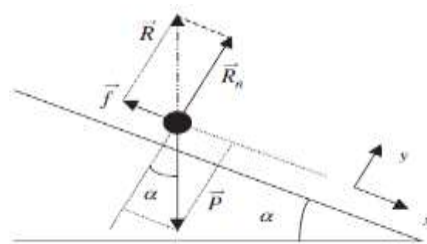
1. Etablir l'expression de l'accélération :
 - en appliquant le théorème du centre d'inertie.
 - en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.
2. Donner les équations horaires sachant qu'à $t = 0$, $x = 0$.

Résolution :

Système : solide de masse m ;

Référentiel : terrestre (supposé galiléen) ;

Représentation du système :



Forces appliquées : le poids \vec{P} , la réaction normale du plan \vec{R}_n et la force de frottement \vec{f} .

1. Détermination de l'expression de l'accélération :

- en appliquant le théorème du centre d'inertie.

En appliquant le théorème du centre d'inertie, on a: $\vec{P} + \vec{R}_n + \vec{f} = m\vec{a}$

on projette sur l'axe xx' : $m g \sin \alpha - f = m a \Rightarrow$ $a = g \sin \alpha - \frac{f}{m}$

g , α , m et f étant constants, a est constant. Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

- en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Soit x la distance parcourue à l'instant t .

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre t_0 et t , on a :

$$\sum W_{\vec{F}_{\text{appliquée}}} = \Delta E_C \Leftrightarrow W(\vec{P}) + W(\vec{R}_n) + W(\vec{f}) = E_C(t) - E_C(t_0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgx \sin \alpha - fx \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = \frac{d}{dt} [(mg \sin \alpha - f)x] \Rightarrow$$

$$mv \frac{dv}{dt} = (mg \sin \alpha - f) \frac{dx}{dt} \Rightarrow mva = (mg \sin \alpha - f)v$$

En simplifiant v on obtient :

$$a = g \sin \alpha - \frac{f}{m}$$

2. Les équations horaires sachant qu'à $t = 0$, $x = 0$:

Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré $\Rightarrow v = at + v_0$

or à $t = 0$, $v = v_0 = 0 \Rightarrow v = \left(g \sin \alpha - \frac{f}{m} \right) t$

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ avec $v_0 = 0$ et $x_0 = 0$ on obtient :

$$x = \frac{1}{2} \left(g \sin \alpha - \frac{f}{m} \right) t^2$$

Remarque :

Si les frottements sont négligeables, $f = 0$ et $a = g \sin \alpha$.

L'accélération ne dépend pas dans ce cas de la masse m .

➤ Application 2 : pendule dans un véhicule

Une bille de masse m est suspendue au plafond d'un véhicule par un fil inextensible de masse négligeable.

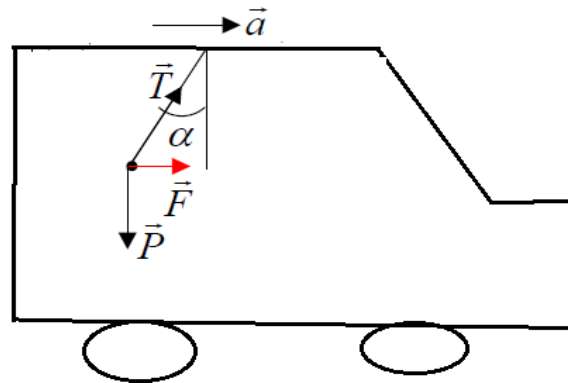
Déterminer l'angle d'écart du fil par rapport à la verticale quand le véhicule est mouvement.

Résolution :

Systeme : une bille de masse m ;

Référentiel : terrestre (supposé galiléen) ;

Représentation du système :



Forces appliquées : le poids \vec{P} et la tension \vec{T} et leur résultante $\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$.

Détermination de l'angle de d'écart du fil par rapport à la verticale quand le véhicule est en mouvement :

En appliquant le théorème du centre d'inertie , on a: $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$
 $\Leftrightarrow F = ma$

Dans le triangle rectangle inférieur, on a : $\tan \alpha = \frac{F}{P} = \frac{ma}{mg} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tan \alpha = \frac{a}{g}}$$

L'écart du fil avec la verticale est nul si le mouvement du véhicule est rectiligne uniforme.

➤ **Application 3 : solide glissant sur une sphère**

Soit un solide de masse m placé au sommet d'une sphère de rayon R . On déplace légèrement le solide pour qu'il quitte la position initiale avec une vitesse quasiment nulle et sans frottement le long de la piste.

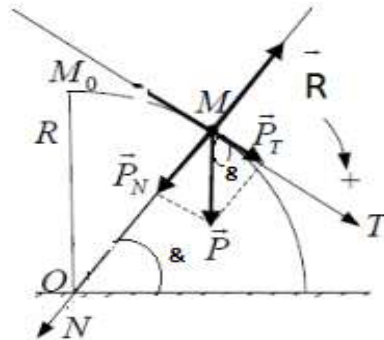
- 1 . Déterminer l'expression de la vitesse du solide avant de quitter la sphère.
- 2 Déterminer l'expression de la réaction exercée par la sphère.
- 3 Déterminer la position à partir duquel le solide quitte la sphère.

Résolution :

Système : un solide de masse m ;

Référentiel : terrestre (supposé galiléen) ;

Représentation du système :



Forces appliquées : le poids \vec{P} et la réaction \vec{R} .

1. Détermination de l'expression de la vitesse du solide avant de quitter la sphère.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre M_0 et M , on a :

$$\sum W_{\vec{F}_{\text{appliquée}}} = \Delta E_C \Leftrightarrow W(\vec{P}) + W(\vec{R}) = E_C(t) - E_C(t_0) \text{ mais } W(\vec{R}) = 0 \text{ et } E_C(t_0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v^2 = 2gh \text{ @}$$

Trouvons d'abord la hauteur h:

$$h = R - R\sin \alpha = R(1 - \sin \alpha)$$

En remplaçant h par son expression dans @, on obtient : $v^2 = 2gR(1 - \sin \alpha)$

$$v = \sqrt{2gR(1 - \sin \alpha)}$$

\Rightarrow

2. Détermination l'expression de la réaction exercée par la sphère.

En appliquant le théorème du centre d'inertie, on a: $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

on projette sur l'axe N : $P_N - R = ma_N \Leftrightarrow mg\sin \alpha - R = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = mg\sin \alpha - m\frac{v^2}{R}$

mais $v^2 = 2gR(1 - \sin \alpha) \Rightarrow R = mg\sin \alpha - 2mg + 2mg\sin \alpha$

$$R = mg(3\sin \alpha - 2)$$

3. Détermination de la position à partir duquel le solide quitte la sphère.

Lorsque le solide quitte la sphère, la réaction s'annule.

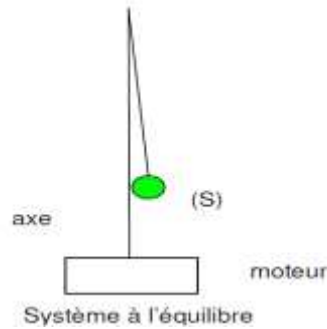
$$R = 0 \Rightarrow mg(3\sin \alpha - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} mg \neq 0 \\ 3\sin \alpha - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3\sin \alpha - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

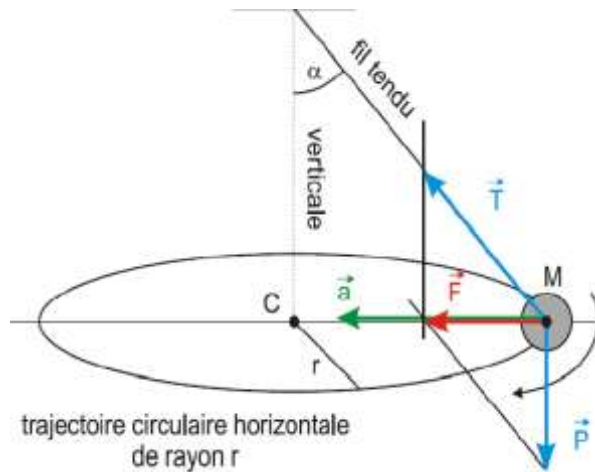
$$\alpha = 41,8^\circ$$

➤ **Application 4 : Pendule conique**

Une petite sphère métallique est suspendue par un fil inextensible et de masse négligeable à une tige verticale qu'un moteur peut faire tourner autour de son axe.



Si l'on fait démarrer très lentement le moteur, on observe que pour une certaine valeur de la vitesse angulaire ω le pendule s'écarte de la tige et la petite sphère décrit un cercle horizontal. L'angle α que fait le fil du pendule avec la verticale dépend de ω .



Les forces qui s'exercent sur M sont le poids \vec{P} et la tension du fil \vec{T} ;

Leur résultante : $\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$ est une force **centripète**.

En appliquant le théorème du centre d'inertie, on a: $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

$$\Leftrightarrow F = ma \text{ mais } a = \omega^2 r \text{ ((S) est animé d'un mouvement circulaire uniforme)}$$

$$\Leftrightarrow F = m\omega^2 r = m\omega^2 l \sin \alpha$$

Dans le triangle rectangle inférieur, on a : $\tan \alpha = \frac{F}{P} = \frac{m\omega^2 l \sin \alpha}{mg} = \frac{\omega^2 l \sin \alpha}{g}$

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$$

D'où l'on tire : cette relation permet de calculer l'angle d'écart α .

Lorsque ω augmente α augmente : $\cos \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{g}{\omega^2 l} \leq 1 \Leftrightarrow \omega \geq \sqrt{\frac{g}{l}} \Leftrightarrow \omega \geq \omega_0$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

ω_0 est la vitesse angulaire limite que ω doit dépasser pour que le pendule s'écarte de sa position initiale.

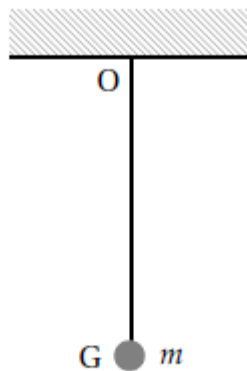
Dans le triangle rectangle supérieur, on : $\cos \alpha = \frac{P}{T} \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos \alpha} = \frac{mg}{g/\omega^2 l}$

$$T = m\omega^2 l$$

La tension du fil augmente comme le carré de la vitesse angulaire.

➤ Application 5 : Pendule oscillant

Il constitue d'un pendule simple de longueur L et une bille de masse m , suspendu à un support fixe par un fil très long par rapport à son rayon.



Pendule simple en position d'équilibre

Ecarté de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale lorsque le fil fait avec la verticale l'angle θ_m , le pendule oscille. A une date quelconque le fil fait avec la verticale l'angle θ .

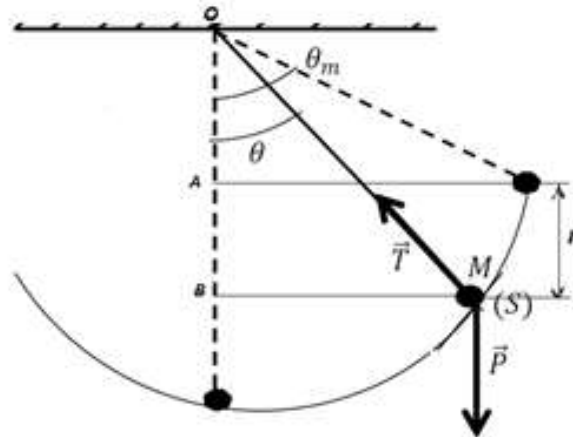
- 1 . Etablir l'expression de la vitesse du pendule simple.
- 2 Etablir l'expression de la tension du fil du pendule simple.

Résolution :

Système : pendule simple constitué d'une bille de masse m ;

Référentiel : terrestre (supposé galiléen) ;

Représentation du système :



Forces appliquées : le poids \vec{P} et la tension du fil \vec{T} .

1 . Etablissons l'expression de la vitesse du pendule simple.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre t_0 et t , on a :

$$\sum W_{\vec{F}_{\text{appliquée}}} = \Delta E_C \Leftrightarrow W(\vec{P}) + W(\vec{R}) = E_C(t) - E_C(t_0) \text{ mais } W(\vec{R}) = 0 \text{ et } E_C(t_0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v^2 = 2gh \text{ @}$$

Trouvons d'abord la hauteur h:

$$h = OB - OA \text{ mais } \begin{cases} \cos \theta = \frac{OB}{L} \\ \cos \theta_m = \frac{OA}{L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OB = L \cos \theta \\ OA = L \cos \theta_m \end{cases} \Rightarrow h = L(\cos \theta - \cos \theta_m)$$

En remplaçant h par son expression dans @ , on obtient : $v^2 = 2gL(\cos \theta - \cos \theta_m)$

$$v = \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_m)}$$

\Rightarrow

En particulier, au passage par la position d'équilibre : $\theta = 0$; $\cos \theta = 1$, la vitesse est maximale et a pour module :

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta_m)}$$

2 Etablissons l'expression de la tension du fil du pendule simple.

En appliquant le théorème du centre d'inertie , on a: $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

on projette sur l'axe N : $P_N - R = ma_N \Leftrightarrow -mg\cos\theta + T = m\frac{v^2}{L} \Rightarrow T = m\frac{v^2}{L} + mg\cos\theta$

mais $v^2 = 2gL(\cos\theta - \cos\theta_m) \Rightarrow T = 2mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_m + mg\cos\theta$

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_m)$$

• **Exercices :**

Exercice 1 :

Un skieur de 80 kg descend une piste de 150 m inclinée de 20° par rapport à l'horizontale.

Déterminer sa vitesse en bout de piste en considérant deux cas de figure :

1) *On néglige la force de frottement sur les skis*

2) *On considère que la force de frottement sur les skis est constante et vaut 150 N*

PS : On prendra $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. On négligera la résistance de l'air et on supposera que le skieur ne décolle pas et ne perd pas de ski en route !

Réponses : 1) $v = 114 \text{ km.h}^{-1}$; 2) $v = 21 \text{ m.s}^{-1}$

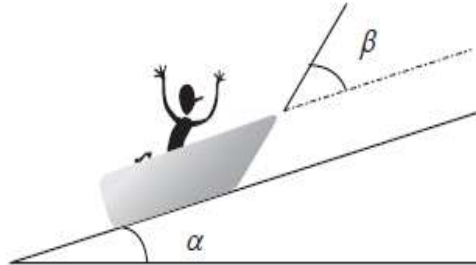
Exercice 2 :

Un traîneau de masse $m = 200 \text{ kg}$ est tiré suivant une ligne de plus grande pente d'un plan incliné par l'intermédiaire d'un câble faisant un angle β avec celui-ci (figure).

1) La tension du câble vaut $T = 1000 \text{ N}$. Le mouvement étant uniforme de vitesse $v = 10 \text{ km.h}^{-1}$, déterminer la réaction \vec{R} somme des forces de contact exercées par le sol sur le traîneau (norme et inclinaison par rapport à la normale au plan incliné).
Données : $\alpha = 20^\circ, \beta = 30^\circ; g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

2) On augmente la tension et le mouvement du traîneau devient uniformément accéléré.

- a) Le coefficient de frottement traîneau-sol restant identiques, la réaction \vec{R} est-elle modifiée ?
- b) La vitesse du traîneau passe de 10 km.h^{-1} à 20 km.h^{-1} sur une distance de 10 m . Calculer la puissance exercée par la tension du câble lorsque la vitesse vaut 15 km.h^{-1} .



Réponses : 1) $R = 1391,35 \text{ N}$; 2) $P = 4506,7 \text{ W}$.

Exercice 3 :

Un solide de masse $M = 500 \text{ g}$ arrive avec une vitesse de 2 m.s^{-1} au bas d'un plan incliné faisant un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale. Les frottements équivalent à une force opposée au vecteur vitesse et de valeur constante $f = 0,5 \text{ N}$. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

Etudier complètement le mouvement du solide. Déterminer la durée séparant les deux passages au bas du plan incliné.

Réponses : Etude de la montée : $a = -6 \text{ m/s}^2$; $x = 0,33 \text{ m}$.
Etude de la descente : $a = -4 \text{ m/s}^2$

Exercice 4 :

Un skieur chaussé de ses skis (de masse $M = 90 \text{ kg}$) remonte une piste inclinée de $\alpha = 20^\circ$ par rapport à l'horizontale, en télésiège à la vitesse constante $v = 3,5 \text{ m.s}^{-1}$. La force de frottement a la même direction que le vecteur vitesse et le sens inverse ; sa valeur constante vaut $f = 30 \text{ N}$.

La direction de la perche fait avec le plan incliné un angle $\beta = 60^\circ$.

Représenter les forces s'exerçant sur le système. Déterminer la valeur T de la force exercée par la perche sur le système.

$g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

Réponses : $T = 676 \text{ N}$

Exercice 5 :

Une voiture de masse M_1 tracte une caravane de masse M_2 . Sous l'action d'une force motrice de valeur constante F , l'ensemble gravit une côte de 5% et la vitesse croît de v_1 à v_2 sur un parcours de longueur d .

Les forces de frottements qui s'exercent sur la voiture équivalent à une force de valeur constante f_1 et celles qui s'exercent sur la caravane à une force f_2 . Ces forces sont opposées au vecteur vitesse de l'ensemble.

Etudier le mouvement de l'ensemble, déterminer son accélération. Calculer la valeur de la force motrice F ainsi que la tension du timon.

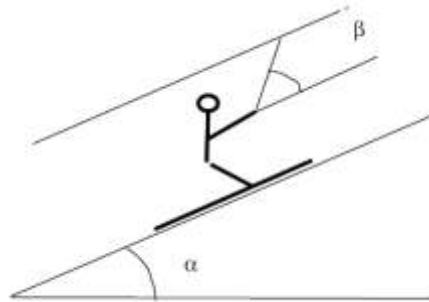
AN : $\sin\alpha = 0,05$ $M_1 = 1200 \text{ kg}$ $M_2 = 600 \text{ kg}$ $v_1 = 36 \text{ km.h}^{-1}$ $v_2 = 72 \text{ km.h}^{-1}$
 $d = 200 \text{ m}$ $f_1 = 1000 \text{ N}$ $f_2 = 500 \text{ N}$ $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

Réponses : $a = 0,75 \text{ m/s}^2$; $F = 3750 \text{ N}$; $T = T' = 1250 \text{ N}$;

Exercice 6 :

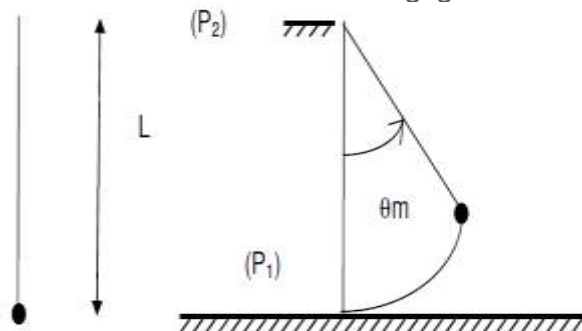
Un skieur de masse m est tiré par un remonte-pente sur une piste faisant avec le plan horizontal un angle α . La perche fait avec la piste un angle β . Il parcourt une distance D sur le plan incliné pendant une durée Δt à vitesse constante. Les frottements équivalent à une force constante de valeur f , opposée au vecteur vitesse.

Exprimer les travaux et les puissances de toutes les forces supposées constantes s'exerçant sur le skieur au cours de la montée.



Exercice 7 :

Un pendule simple est constitué d'un corps de masse m , supposé ponctuel, suspendu à un fil de longueur L , inextensible et de masse négligeable.



Ecarté de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale lorsque le fil fait avec la verticale l'angle θ_m , le pendule oscille. A une date quelconque le fil fait avec la verticale l'angle θ . Les frottements sont négligés.

Exprimer l'énergie mécanique du pendule en fonction de L , θ , m , g et de v , la

vitesse du corps de masse m lorsque l'angle d' écart est θ . On prendra un axe $z'z$ vertical ascendant et pour niveau de référence le plan horizontal P_1 puis le plan horizontal P_2 :

En déduire la valeur de v en fonction de L , θ , θ_m et g . Montrer que l'on obtient le même résultat dans les deux cas.

Exercice 8 :

Un mobile lance a la vitesse de 20m/s aborde un plan incliné à 10%

1. Déterminer l'accélération
2. Donner la distance parcourue avant l'arrêt
3. Donner la durée du parcours.

On donne : $m = 500$ kg

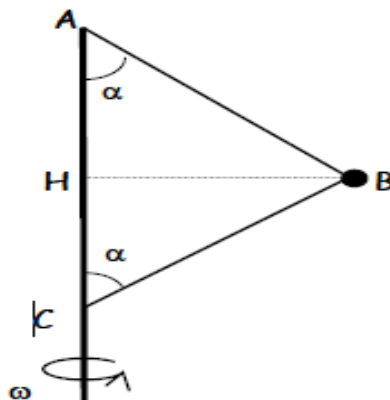
Réponses : 1) $a = - 1\text{m/s}^2$; 2) $x = 200$ m ; 3) $t = 20$ s .

Exercice 9 :

Une bille assimilable à un point matériel B, de masse m , est reliée par deux fils de masse négligeable à deux points A et C d'un axe Δ . On note : $AB = BC = l$ et $AC = a$.

- 1) La bille B tourne à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe Δ . Les fils restent constamment tendus. Calculer les tensions des fils en fonction de ω .
- 2) Montrer que le fil BC n'est tendu qu'à partir d'une certaine valeur ω_0 de la vitesse angulaire.

Application numérique : $m = 0,6$ kg ; $l = 0,7$ m ; $g = 9,8$ m ; $a = 1$ m ; $\omega = 8,0$ rad/s , puis 4,0 rad/s.



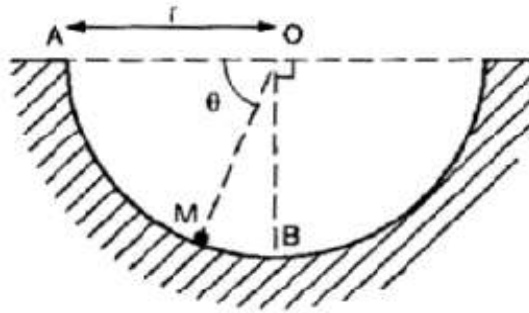
Réponses : $T_1 = 17,55$ N ; $T_2 = 9,32$ N

Exercice 10 :

Un solide S, assimilable à un point matériel de masse $m = 10$ kg, peut glisser à l'intérieur d'une demi – sphère de centre O et de rayon $r = 1,25$ m. On lâche du point

A sans vitesse initiale. Sa position à l'intérieur de la demi – sphère est repérée par l'angle θ .

- 1) On admet que le solide S glisse sans frottement.
 - a) Exprimer sa vitesse au point M en fonction de g , r et θ . Calculer sa valeur numérique au point B ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
 - b) Quelles sont, en M, les caractéristiques de la force exercée par la demi – sphère sur le solide ? Exprimer son intensité en fonction de g , r et θ . Calculer sa valeur numérique au point B.
- 2) En réalité, le solide S arrive en B avec une vitesse de $4,5 \text{ m/s}$. Il est donc soumis à une force de frottement \vec{f} dont on admettra qu'elle est de même direction que la vitesse \vec{v} du mobile, mais de sens opposé et d'intensité constante. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer l'intensité de cette force \vec{f} .

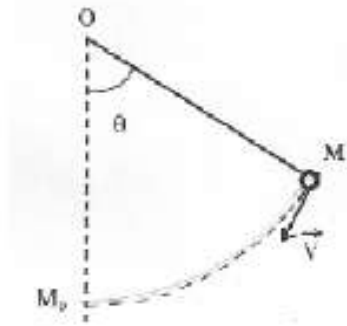


Réponses : 1) a) $v_M = \sqrt{2gr \sin \theta}$; $v_B = 5 \text{ m/s}$; b) $R = 0,3 \text{ N}$; 2) $f = 0,012 \text{ N}$

Exercice 11 :

Une bille de masse $m = 100 \text{ g}$ est suspendue en un point O par un fil inextensible de longueur $l = 1 \text{ m}$ et masse négligeable. Le pendule ainsi constitué peut effectuer des oscillations de part et d'autre de sa position d'équilibre. On l'écarte de la verticale d'un angle $\theta_0 = 45^\circ$ et on l'abandonne sans vitesse initiale. On suppose les frottements négligeables ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

- 1) A l'instant t , le fil fait un angle θ avec la verticale ; exprimer les coordonnées du vecteur accélération dans le repère de Frenet en fonction de θ , θ_0 et g .
- 2) Calculer $\|\vec{a}\|$ et représenter sur un schéma le vecteur \vec{a} dans trois cas : $\theta = \theta_0$; $\theta = 30^\circ$; $\theta = 0^\circ$.
- 3) Exprimer la norme de la tension du fil en fonction de θ , θ_0 et g , la calculer dans les trois cas précédents.



2. 2) Interaction et champ gravitationnel :

Pour étudier les mouvements des planètes et des satellites, un référentiel terrestre ne peut plus être considéré comme galiléen et, par conséquent, les lois de la dynamique n'y sont plus applicables.

Ces mouvements seront donc décrits :

- dans le référentiel héliocentrique (ou de Copernic) pour les planètes ;
- dans le référentiel géocentrique pour les satellites de la Terre.

2. 2.1) Interaction gravitationnelle : loi de Newton

On appelle **force de gravitation** ou **force d'interaction gravitationnelle**, la force exercée par une masse M sur une autre masse m . Cette force d'interaction a été découverte par Newton en 1665. Celui-ci a montré que deux masses m et M interagissent entre elles de façon d'autant plus forte que les masses sont grandes et que la distance qui les sépare est petite. La loi qu'il a formulée est dite **loi de Newton** et s'énonce de la façon suivante :

Énoncé : deux corps A et B quasi ponctuels, de masses M et m et dont les centres O_A et O_B sont distants de r , exercent l'un sur l'autre des forces attractives $F_{A/B}$ et $F_{B/A}$ de même direction $O_A O_B$, de même intensité mais de sens opposés (figure 2.3) :

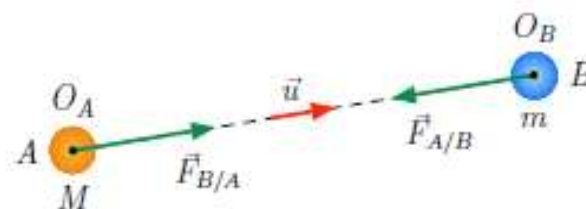


Figure 2.3 Forces d'interaction gravitationnelle

$$F_{A/B} = F_{B/A} = F = C \frac{mM}{r^2}$$

La constante G est appelée *constante de gravitation*. Sa valeur dans le Système international d'unités est :

$$C = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nkg}^{-2} \text{ m}^2.$$

Une expression vectorielle de la force gravitationnelle s'obtient en définissant un *vecteur unitaire* \vec{u} , directeur de la droite $O_A O_B$ et orienté de O_A vers O_B (figure 2.3) :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -C \frac{mM}{r^2} \vec{u}$$

Remarque : les forces de gravitations s'exercent aussi à des distances astronomiques entre les corps célestes qu'à des distances microscopiques entre des atomes, noyaux etc....

2.2.2) Champ gravitationnel :

a) Définition :

Il existe un champ de gravitation en un point de l'espace si une particule de masse m , placée en ce point est soumise à une force d'interaction gravitationnelle \vec{F} . Le *vecteur champ de gravitation* \vec{G} est défini par :

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}$$

L'intensité du champ de gravitation s'exprime en N/kg.

Le champ de gravitation dépend de la position du point de l'espace considéré ainsi que des positions et des valeurs des masses qui le créent.

b) Champ créé par une masse ponctuelle :

Considérons une masse ponctuelle M située en un point O de l'espace. On place une masse ponctuelle m en un point P à une distance $r = OP$ de la masse M .

La loi de Newton donne la force gravitationnelle exercée par la masse M sur la masse m :

$$\vec{F} = -C \frac{mM}{r^2} \vec{u}$$

où le vecteur unitaire \vec{u} est dirigé de M vers m . Le champ de gravitation créé par la masse M au point P est obtenu en divisant la force par m :

$$\vec{G} = -C \frac{M}{r^2} \vec{u}$$

Le vecteur champ de gravitation est dirigé vers la masse M (figure 2.4).

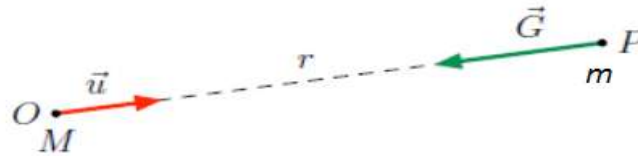


Figure 2.4 champ créé par une masse ponctuelle

Une masse m placée en P est alors soumise à la force gravitationnelle : $\vec{F} = m\vec{G}$

Remarque : le champ gravitationnel existe même à l'absence de masse m au point P .

c) Objet de symétrie sphérique :

Considérons une planète (ou le Soleil, . . .) que nous représentons par une boule de masse M , de rayon R et de centre O . Supposons qu'elle soit à symétrie sphérique, c'est-à-dire que la matière est distribuée identiquement dans toutes les directions.

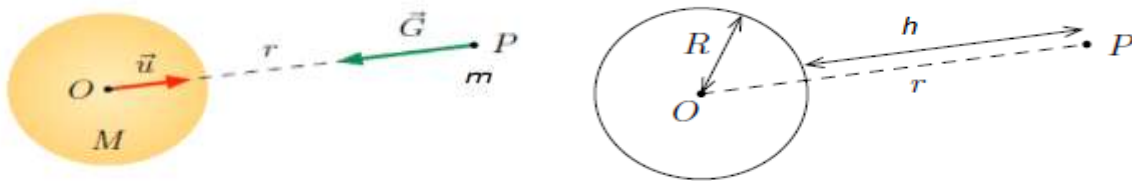


Figure 2.5 Champ créé par un corps à symétrie sphérique

Dans un tel cas on peut montrer que si le point P est extérieur à la distribution (figure 2.5), le champ de gravitation \vec{G} créé en P est égal au champ qui serait créé par une masse ponctuelle M située en O :

$$\vec{G} = -C \frac{M}{r^2} \vec{u}$$

On exprime souvent l'intensité du champ de gravitation d'une planète en fonction de l'altitude h du point P (figure 2.5). Avec $r = R + h$ on obtient :

$$G = C \frac{M}{(R+h)^2}$$

d) Champ gravitationnel terrestre :

La Terre peut être considérée comme un corps de répartition sphérique de masse, de centre O , de rayon R_T et de masse M_T .

En un point P tel que $r > R_T$ le champ créé par la Terre est :

$$\vec{G}(P) = -C \frac{M_T}{r^2} \vec{u}$$

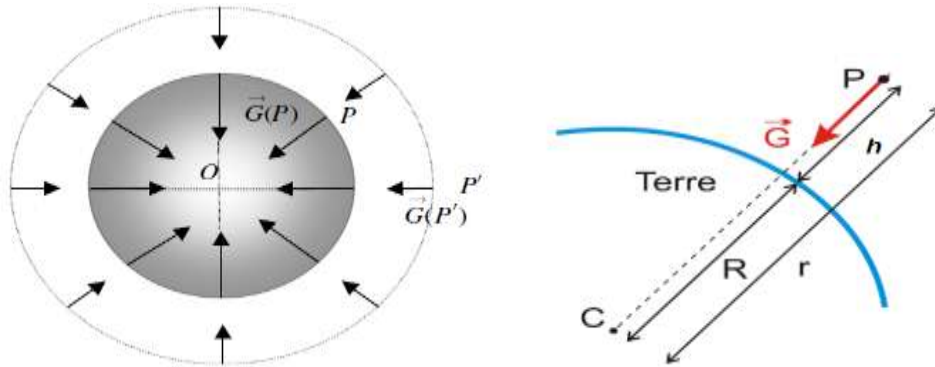


Figure 2.6 Champ de gravitation de la Terre.

- Si le point P est situé à la surface de la Terre, donc $r = R_T$, l'intensité du champ vaut :

$$g_o = C \frac{M_T}{R_T^2} = 9,8 \text{ m/s}^2 \Rightarrow g_o R_T^2 = C M_T \text{ avec } \begin{cases} M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\ R_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m} \end{cases}$$

Le champ de pesanteur est le champ de gravitation créé par la Terre sur sa surface.

- A une altitude h : $r = R_T + h$

$$G(P) = C \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = g_o \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

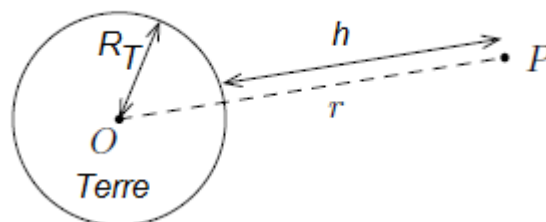


Figure 2.6

- Si l'on considère que h est très inférieur à R_T ($h \ll R_T$)

$$G(h) = \frac{CM_T}{R_T^2(1-\frac{h}{R_T})^2} = g_0 \frac{1}{(1-\frac{h}{R_T})^2} \Rightarrow G(h) \approx g_0(1 + \frac{2h}{R_T})$$

e) Champ gravitationnel et champ de pesanteur :

Le champ de pesanteur \vec{g} est défini par la relation $\vec{P} = m\vec{g}$ dans le référentiel terrestre non galiléen.

Le champ de gravitation \vec{G} par contre est défini par la relation $\vec{F} = m\vec{G}$ dans le référentiel géocentrique, qui est un référentiel galiléen (en tout cas « plus galiléen » que le référentiel terrestre).

Considérons l'exemple d'une boule suspendue à un ressort en un point de l'équateur terrestre (figure 2.7). Nous allons négliger l'influence de l'air.

Dans le référentiel terrestre, la boule est en équilibre : $P = T$.

Dans le référentiel géocentrique, la boule effectue un mouvement circulaire uniforme. La projection sur la direction normale donne : $ma_N = F - T \Rightarrow F > T$.

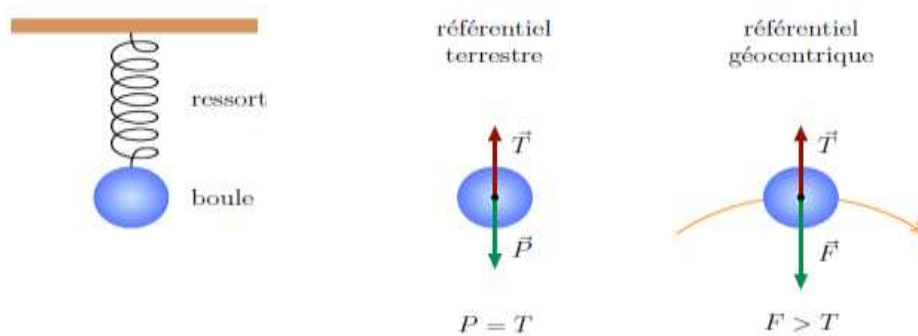


Figure 2.7

2.2.3) Mouvement circulaire des Satellites :

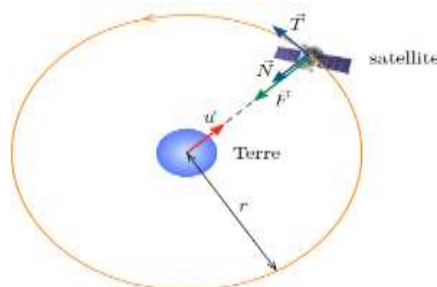
a) Accélération d'un satellite en orbite :

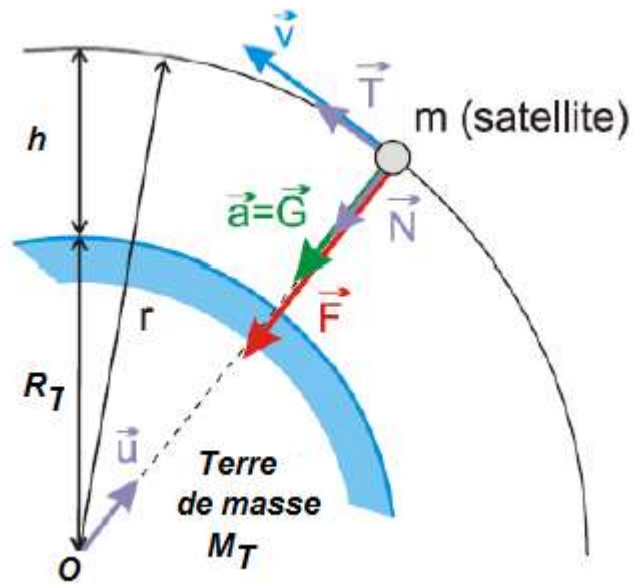
Considérons un satellite de masse m qui tourne autour de la Terre à une altitude h (le rayon de son orbite est r).

Système : un satellite de la Terre ;

Référentiel : géocentrique ;

Représentation du système :





Forces extérieures : \vec{F}

En appliquant le théorème du centre d'inertie, on a : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

$$\Leftrightarrow -C \frac{mM_T}{r^2} \vec{u} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = C \frac{M_T}{r^2} \vec{N}$$

\Rightarrow

\vec{a} est centripète donc le mouvement est circulaire de centre O confondu avec le centre de la Terre.

L'accélération est indépendante de la masse du satellite. Elle ne dépend que du rayon de l'orbite.

b) Satellites à trajectoire circulaire :

- Expression de la vitesse

Dans la base de Frenet : $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$ or $\vec{a} = C \frac{M_T}{r^2} \vec{N}$ donc $\frac{dv}{dt} \vec{T} = \vec{0}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v$ est constante ; Le mouvement est circulaire uniforme

$$\begin{cases} \vec{a} = \frac{v^2}{r} \vec{N} \text{ (Frenet)} \\ \vec{a} = \frac{CM_T}{r^2} \vec{N} \text{ (Newton)} \end{cases} \Rightarrow \frac{v^2}{r} \vec{N} = \frac{CM_T}{r^2} \vec{N} \Rightarrow v^2 = \frac{CM_T}{r}$$

\Rightarrow

$$v = \sqrt{\frac{CM_T}{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{CM_T}{R_T+h}} = \sqrt{\frac{g_o R_T^2}{R_T+h}} \text{ car } g_o R_T^2 = CM_T \text{ et } r = R_T + h$$

La vitesse dépend du rayon de l'orbite. Plus le rayon est grand, plus la vitesse est petite.

• **Expression de la période**

La période de révolution d'un satellite est la durée que met le satellite pour effectuer le tour de son astre attracteur. On la note T.

$$T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{CM_T}{r}}} \Rightarrow$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{CM_T}}$$

La période est indépendante de la masse et dépend de l'altitude. Cette durée, mesurée dans le référentiel géocentrique est différente de celle mesurée par un observateur terrestre, car celui-ci est entraîné par le mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

c) Satellites géostationnaires :

Un satellite est dit géostationnaire s'il reste en permanence à la verticale d'un point de la surface terrestre. Il occupe une position fixe dans le référentiel terrestre. Il sert de réflecteur d'ondes électromagnétiques, ce qui permet la transmission de ces ondes vers tous les points de la Terre : radio, télévision, téléphone.

- Un **satellite géostationnaire** est un satellite qui est **toujours positionné au dessus du même point de la surface terrestre** (à la même verticale).
- Un **satellite géostationnaire** est un satellite :
 - qui semble **immobile pour un observateur terrestre** ;
 - qui **tourne dans le même sens** que celui de la Terre **autour du même axe de rotation** (axe des pôles)
 - et qui a une **période de révolution T égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même.**

- Pour satisfaire les conditions citées précédemment, **l'orbite circulaire d'un satellite géostationnaire est donc contenue dans le plan équatorial de la Terre !**
- La période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même qui est $T = 23 \text{ h } 56 \text{ mn } 04 \text{ s} = 86\,164 \text{ s}$.
- Un satellite géostationnaire évolue en orbite circulaire à une altitude **d'environ $h = 36\,000 \text{ km}$ au-dessus de la surface terrestre** (il se situe donc à une orbite de $42\,000 \text{ km}$ par rapport au centre de la Terre) et avec une vitesse voisine de $3,1 \text{ km/s}$.

d)Etat d'impesanteur dans un satellite :

- L'**impesanteur** est caractérisée par **l'absence apparente de pesanteur**.
- Exemples :
 - Une personne dans une cabine d'ascenseur subit l'action de l'attraction terrestre (son poids) \vec{P} et la réaction de la cabine \vec{R} soit $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$. Lorsque la cabine tombe en chute libre la personne est alors soumise à la même accélération que la cage (chute libre $\vec{g} = \vec{a}$) soit $\vec{R} = 0$ et la personne semble « flotter » dans l'espace de la cabine.
 - Cas d'un spationaute qui se trouve dans un véhicule spatial en orbite autour de la Terre : le véhicule et le spationaute ont la même accélération, ils sont tous les deux soumis à la force d'attraction gravitationnelle. Le spationaute aura donc le même mouvement que sa cabine et ne ressent plus les effets de la pesanteur et semblera donc « flotter » dans le véhicule spatial.
 - L'impesanteur est due au fait que le spationaute subit la même accélération que le satellite : ils sont tous deux en « chute » par rapport à la Terre. Le spationaute n'a plus besoin d'aucun appui pour rester en équilibre dans la cabine, car la réaction exercée par la paroi est nulle.

2.2.4) Mouvement des planètes :

Lois de Kepler :

Tycho Brahé et ses assistants, parmi lesquels se trouvait Kepler, consignèrent de très nombreuses valeurs de positions de planètes dans le ciel au cours du temps. Kepler établit, à partir de ces observations très précises, trois lois qui régissent le mouvement des planètes. À l'époque, ces lois étaient donc purement expérimentales.

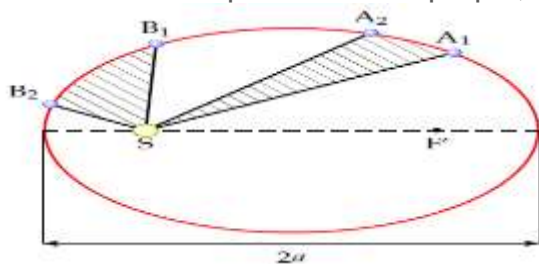


Figure 2.9

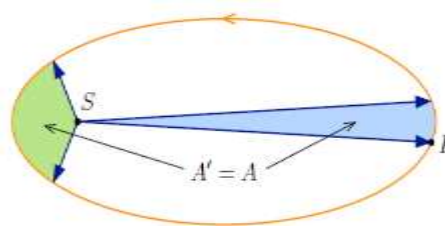


Figure 2.8 Les aires A et A' des surfaces colorées sont égales

- **Première loi de Kepler ou loi des orbites elliptiques (1609)**

Énoncé : Les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.

- **Seconde loi ou loi des aires (1609)**

Énoncé Le rayon vecteur \vec{SP} allant du Soleil à la planète balaye des surfaces d'aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

- **Troisième loi de Kepler ou loi des périodes (1618)**

Énoncé Le carré de la période de révolution d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube de la longueur du demi-grand axe de son orbite.

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}$$

T : période de révolution
 a : demi-grand axe de l'ellipse

Remarque : Quelles que soient les deux planètes (1) et (2) choisies, on peut écrire :

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

Ce rapport dépend uniquement des caractéristiques du Soleil. Si la trajectoire est circulaire, la longueur du demi-grand axe a est égale au rayon r .

2.2.5) Application :

La Terre est assimilée à une sphère homogène de masse M_T , de centre T et de rayon $R_T = 6\,380$ km.

La période de rotation de la Terre sur elle-même dans le référentiel géocentrique appelée jour sidéral vaut $T = 86\,164$ s.

On considère que le champ de pesanteur terrestre \vec{g}_0 au niveau du sol est égal à \mathcal{G}_0 champ de gravitation à la surface de la Terre et $\mathcal{G}_0 = 9,80 \text{ N.kg}^{-1}$

I - Pour lancer un satellite et le mettre sur orbite, on utilise une fusée. Cette fusée de centre d'inertie I , de masse $m = 300$ tonnes, est propulsée verticalement à partir du sol terrestre. Ses moteurs exercent une force de poussée de valeur $F = 4,30 \times 10^6$ N.

Dans un référentiel à préciser, établir l'expression de l'accélération initiale de la fusée si l'on néglige l'effet des forces de frottement. Calculer sa valeur numérique.

II - La fusée amène en quelques minutes le satellite hors de l'atmosphère et après passage sur une orbite de transfert, la satellite se retrouve sur son orbite circulaire.]

- 1) Faire un schéma (sans respecter l'échelle) sur lequel apparaîtra le vecteur champ de gravitation terrestre \vec{g} en I.
- 2) Montrer que l'expression de la valeur de ce champ de gravitation $\mathcal{G}(h)$ à l'altitude h peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{G}(h) = \frac{g_0 R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

Faire une application numérique pour $h = 820$ km.

- 3) Montrer que dans le référentiel géocentrique, le mouvement de ce satellite est uniforme.
 - 4) Établir l'expression de la vitesse de ce satellite sur son orbite ainsi que celle de sa période, en fonction de g_0 , R_T et h .
- III - La fusée peut libérer plusieurs types de satellites artificiels, les données relatives à 2 de ces satellites figure dans le tableau ci-dessous :

	Météosat	Spot
Altitude h en km	35 800	820
Période T en min	1 436	
Vitesse v en m.s^{-1}		

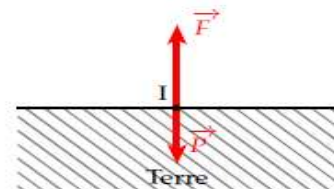
- 1) Calculer les valeurs manquantes du tableau.
- 2) L'un des deux satellites est dit géostationnaire. Indiquer lequel et justifier la réponse.
- 3) Expliquer pourquoi la trajectoire de ce satellite géostationnaire est nécessairement dans le plan équatorial

Résolution

- I - Comme la fusée au démarrage se trouve sur le sol terrestre et que la période de décollage dure peu de temps, on se trouve dans les conditions de laboratoire, le référentiel terrestre peut donc être considéré comme galiléen.

Comme la fusée décolle verticalement, les forces en présence, le poids et la poussée de la fusée, sont situées sur la verticale du lieu. On a alors le schéma ci-contre. D'après le PFD, on a :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} + \vec{P} = m\vec{a}$$

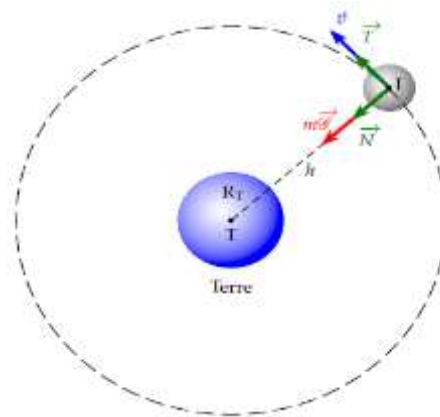


On projette sur l'axe vertical orienté vers le haut

$$F - P = ma \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{F - P}{m} = \frac{F - mg_0}{m} = \frac{F}{m} - g_0$$

$$a = \frac{4,30 \times 10^6}{300 \times 10^3} - 9,80 = 4,53 \text{ m.s}^{-1}$$

- II - 1) On a le schéma suivant :



2) En égalisant la force de gravitation avec la force de pesanteur, on a :

$$G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} = m \mathcal{G}(h)$$

$$\mathcal{G}(h) = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$$

or $g_0 = \mathcal{G}(0) = \frac{GM_T}{R_T^2}$ donc $GM_T = g_0 R_T^2$

$$\mathcal{G}(h) = \frac{g_0 R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

$$\mathcal{G}(820 \times 10^3) = \frac{9,80 \times 6380^2}{(6380 + 820)^2} = 7,69 \text{ m.s}^{-2}$$

3) Dans le repère géocentrique, on étudie le système dans le repère de Frenet. Comme la seule force en présence, la force de gravitation, est normale, l'accélération tangentielle est nulle et donc $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$. Le mouvement du satellite est donc un mouvement circulaire uniforme.

4) Dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération normale $\mathcal{G}(h)$ obéit à la relation :

$$\mathcal{G}(h) = \frac{v^2}{R_T + h} \Leftrightarrow v = \sqrt{\mathcal{G}(h)(R_T + h)} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T + h}}$$

On trouve alors pour Spot : $v = 7\,443 \text{ m.s}^{-1}$

On a la relation entre la vitesse v et la période de révolution T suivante :

$$v = \frac{2\pi(R_T + h)}{T} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T + h}} = \frac{2\pi(R_T + h)}{T} \Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0 R_T^2}}$$

On trouve alors pour Spot : $T = 6\,078 \text{ s}$

III - 1) On obtient le tableau ci-dessous :

	Météosat	Spot
Altitude h en km	35 800	820
Période T en min	1 436	101
Vitesse v en m.s^{-1}	3 075	7 443

- 2) Pour savoir si un satellite est géostationnaire, il faut connaître sa période de révolution en seconde et la comparer au jour sidéral 86 164 s.

Pour Météosat : $1\,436 \times 60 = 86\,160$ s

Météosat est donc géostationnaire.

- 3) Si un satellite est géostationnaire, son axe de révolution doit être l'axe de rotation de la Terre et comme le satellite tourne dans un plan passant par le centre de la Terre, le satellite se trouve donc dans le plan équatorial.

2. 3) Mouvement dans un champ uniforme :

Considérons un point mobile M sur lequel agit, en tout point de l'espace, une force \vec{F} . On parle d'un *champ de force* agissant à distance. Si en tout point de l'espace le vecteur force est le même, le champ de force est dit *constant*.

Nous allons établir les équations horaires du mouvement dans les deux cas suivants :

- mouvement d'une masse ponctuelle dans un champ de pesanteur uniforme ;
- mouvement d'une charge ponctuelle dans un champ électrostatique uniforme.

2.3.1) Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme :

Le champ de pesanteur terrestre est caractérisé par le *vecteur champ de pesanteur* \vec{g} dirigé vers le centre de la terre.

Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur :

Un projectile, de masse m est lancé dans le champ de pesanteur \vec{g} avec une vitesse initiale de lancement \vec{v}_0 . Ce vecteur fait avec l'horizontale un angle aigu α appelé angle de tir.

a) Étude dynamique :

Le système étudié est un projectile ponctuel de masse m . L'étude de son mouvement se fera dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Nous négligeons ici le frottement de l'air et la poussée d'Archimède. La seule force appliquée est le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ du projectile.

L'origine du repère cartésien ne coïncide pas forcément avec le point de lancement.

En appliquant le théorème du centre d'inertie, on a : $\vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$

L'accélération du projectile est donnée par :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

Le vecteur accélération est indépendant de la masse du projectile et égal au vecteur champ de pesanteur. C'est un vecteur constant.

b) Étude cinématique :

Nous allons choisir le repère cartésien le plus adapté à l'étude du mouvement (figure 2.10) :

- l'axe Oz est vertical et dirigé vers le haut ;

- la position M_0 du projectile à l'instant $t = 0$ est sur l'axe Oz ;

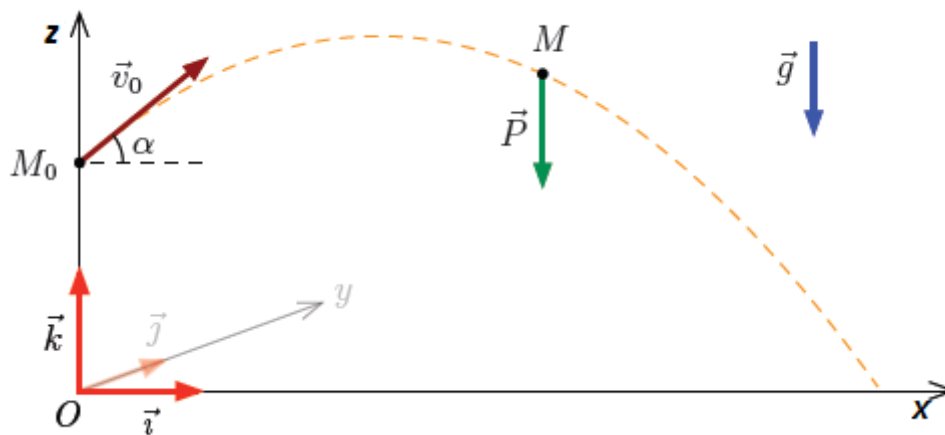


Figure 2.10 Conditions initiales

- le vecteur vitesse \vec{v}_0 du projectile à l'instant $t = 0$ est contenu dans le plan Oxz et fait l'angle α avec l'axe Ox ;
- le plan Oxy est un plan horizontal.

Les coordonnées du vecteur accélération dans la base cartésienne sont :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

Le vecteur vitesse à l'instant t s'écrit donc :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = 0 \\ v_z = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Nous obtenons finalement les *équations paramétriques* ou *horaires* du mouvement :

$$\overline{OM} \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t + z_0 \end{cases}$$

Remarques :

- le mouvement suivant l'axe Ox est uniforme ;
- il n'y a pas de mouvement suivant l'axe Oy ; le mouvement s'effectue donc dans le plan Oxz ;
- le mouvement suivant l'axe Oz est uniformément varié ;

- Le mouvement est *indépendant de la masse m* du projectile et ne dépend que des conditions initiales.

c) Équation de la trajectoire :

L'équation de la trajectoire ou *équation cartésienne* est obtenue en éliminant le temps t entre $x(t)$ et $z(t)$:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right)^2 + v_0 \sin \alpha\left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right) + z_0$$

Finalement :

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g}{(v_0 \cos \alpha)^2} x^2 + x \cdot \tan \alpha + z_0$$

La trajectoire du projectile est une *parabole* d'axe vertical contenue dans le plan Oxz et dont la concavité est orientée vers le bas.

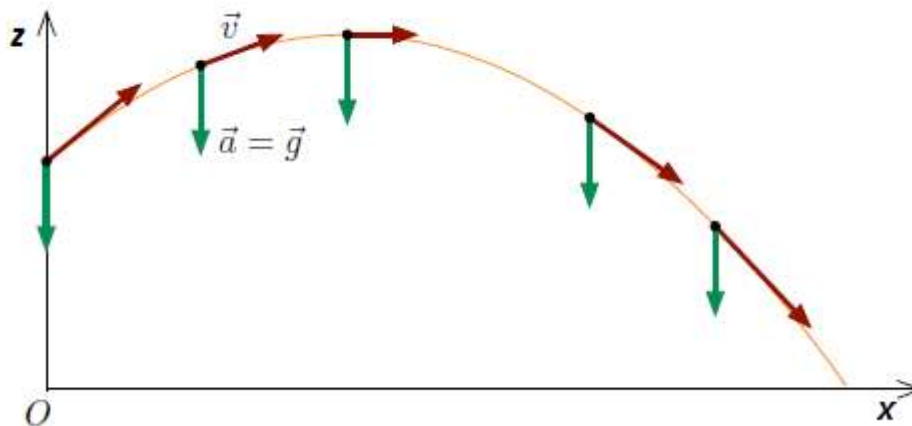


Figure 2.11 Trajectoire du projectile dans le champ de pesanteur

La figure 2.11 montre les vecteurs vitesse et accélération en différents points de la trajectoire.

d) Portée horizontale et flèche de la trajectoire :

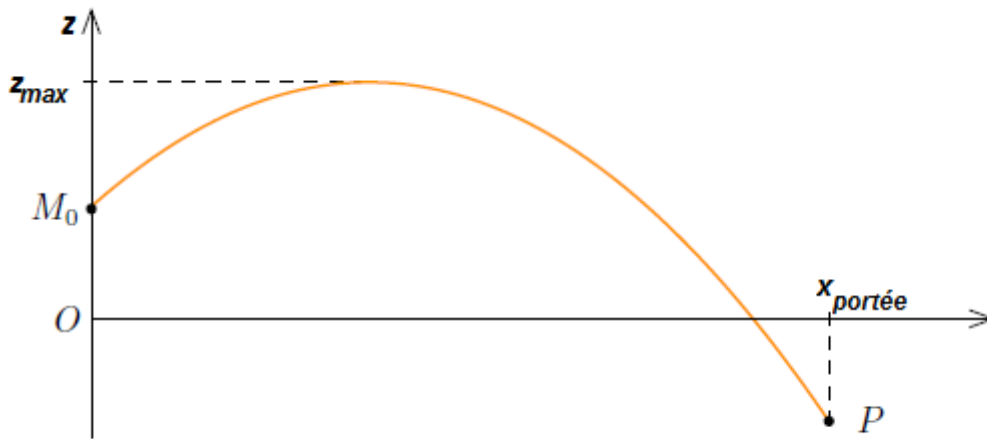


Figure 2.12 Portée horizontale et flèche de la trajectoire

➤ Portée horizontale

La *portée horizontale* est la distance horizontale entre le point de lancement M_0 du projectile et le point d'impact P (figure 2.12).

Pour déterminer la portée horizontale, on résout l'équation $z = 0$. On traitera pour simplifier le cas où $z_0 = 0$.

On applique l'équation de la trajectoire au point P :

$$-\frac{1}{2} \frac{g}{(v_0 \cos \alpha)^2} x_P^2 + x_P \cdot \tan \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad x_P = 2v_0^2 (\cos \alpha)^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{g \cos \alpha} = v_0^2 \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}$$

$$x_P = d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Or $\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$ d'où

➤ Pour une vitesse initiale donnée, la portée est maximale lorsque $\sin 2\alpha = 1$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \alpha = 45^\circ \quad \text{d'où} \quad d_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

➤ flèche

La flèche est l'altitude maximale atteinte par le projectile (figure 2.12). On peut la déterminer par la méthode suivante.

Au sommet de la trajectoire la vitesse verticale est nulle : $v_z = 0 \Leftrightarrow -gt + v_0 \sin \alpha = 0$

$$\Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

On obtient la flèche en substituant t dans l'équation horaire de z :

$$z_F = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2 + v_0 \sin \alpha\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right) + z_0$$

$$z_F = h = z_0 + \frac{v^2(\sin \alpha)^2}{2g}$$

d'où

Dans le cas où $z_0 = 0$, on obtient : $z_F = \frac{v^2(\sin \alpha)^2}{2g}$

e) Problème du tir :

Soit une cible $A\left(\begin{smallmatrix} x_A \\ z_A \end{smallmatrix}\right)$ contenue dans le plan du tir. En appliquant l'équation de la trajectoire au point A, on obtient : $z_A = -\frac{g}{2v_0^2}[1 + (\tan \alpha)^2]x_A^2 + x_A \cdot \tan \alpha$ avec $\frac{1}{(\cos \alpha)^2} = 1 + (\tan \alpha)^2$

Finalement : $-\frac{g}{2v_0^2}x_A^2(\tan \alpha)^2 + x_A \cdot \tan \alpha - \left(\frac{g}{2v_0^2}x_A^2 + z_A\right) = 0$

C'est une équation du second degré en $\tan \alpha$ à deux solutions si son discriminant est positif. A ces deux solutions correspondent deux réglages possibles du tir α_1 (tir tendu) et α_2 (tir en cloche).

Remarque :

Pour $x_p < \frac{v_0^2}{g}$, l'équation $x_p = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ admet deux solutions α_1 et α_2 telles que :

$$\alpha_1 = \alpha \text{ et } \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

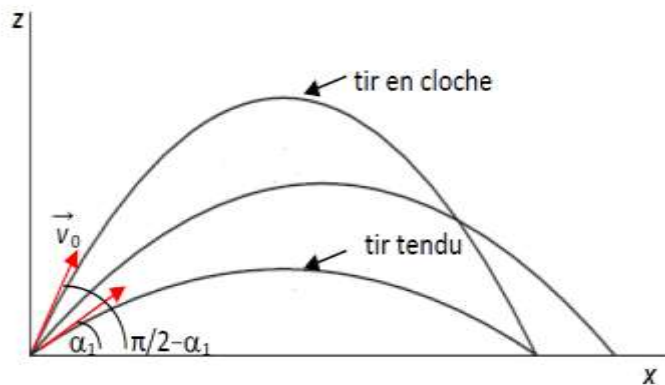


Figure 2.13

f) Energie mécanique :

Soit un projectile de masse m qui passe d'un point A de cote z_A à un point B de cote z_B .

L'application du théorème de l'énergie cinétique donne : $E_{CB} - E_{CA} = mg(z_A - z_B)$

$$\Rightarrow E_{MB} = E_{MA} = \text{constante}$$

L'énergie mécanique se conserve.

2.3.2) Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme :

Considérons le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique \vec{E} uniforme. Un tel champ règne par exemple entre les armatures d'un condensateur plan.

On considère un champ électrostatique uniforme \vec{E} produit par deux plaques parallèles (A) et (B) entre lesquelles il est établi une différence de potentiel $V_A - V_B$ constante. Une particule de charge q lancée d'un point O dans le champ avec une vitesse v_0 est soumise à la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$. Le poids de la charge est négligeable devant \vec{F} .

a) Étude dynamique :

Le système étudié est la particule de charge q et de masse m . L'étude de son mouvement se fera dans un référentiel galiléen.

Les forces exercées sur la particule chargée sont le poids et la force électrostatique. L'effet du poids est en général négligeable devant l'effet de la force électrostatique.

En appliquant le théorème du centre d'inertie, on a: $\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow q\vec{E} = m\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

\Rightarrow

b) Étude cinématique

➤ V_0 Perpendiculaire aux plaques

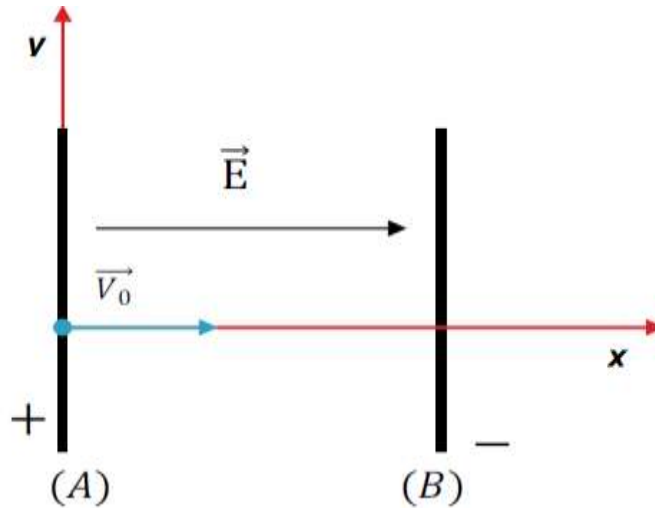


Figure 2.14

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{q}{m} E \\ a_y = 0 \end{cases} \quad \vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 \\ V_{0y} = 0 \end{cases} \quad \vec{V} \begin{cases} V_x = \frac{qE}{m} t + V_0 \\ V_y = 0 \end{cases}$$

Finalemment, on obtient : $\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 + V_0 t \\ y = 0 \end{cases}$

Le mouvement s'effectue suivant l'axe OX ; c'est un mouvement rectiligne uniformément varie.

➤ Appareil à déviation électrostatique (V_0 parallèle aux plaques)

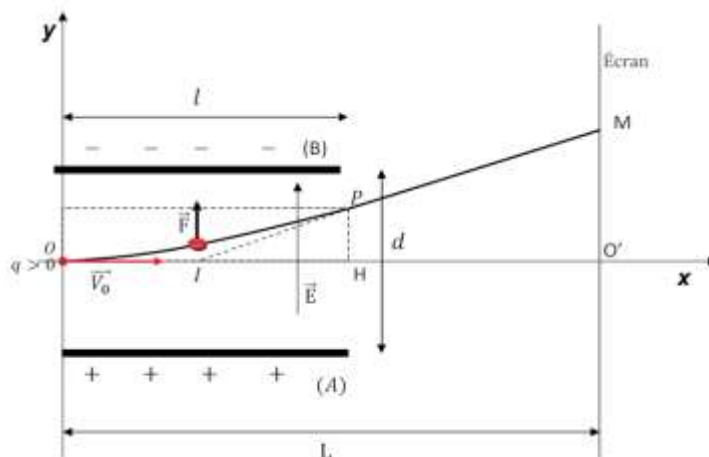


Figure 2.15

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{q}{m} E \end{cases} \quad \vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 \\ V_{0y} = 0 \end{cases} \quad \vec{V} \begin{cases} V_x = V_0 \\ V_y = \frac{qE}{m} t \end{cases}$$

Finalement, on a les équations horaires : $\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = V_0 t \\ y = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \end{cases}$

❖ **Équation de la trajectoire**

$$x = V_0 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{V_0} \quad \text{donc} \quad y = \frac{1}{2} \frac{qE}{mV_0^2} x^2 \quad 0 \leq x \leq l$$

A l'intérieur d'un champ \vec{E} uniforme, la trajectoire d'une particule de charge q est une parabole.

❖ **Déviation et déflexion électrostatiques**

a) **Déviation angulaire :**

Au point P : $\tan \alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{\frac{qE}{m} t}{V_0}$ mais $x = l = V_0 t \Rightarrow t = \frac{l}{V_0}$

donc la déviation angulaire est obtenue par sa tangente : $\tan \alpha = \frac{qEl}{mV_0^2} = \frac{qUl}{dmV_0^2}$

b) **Déflexion électrostatique :**

A la sortie des armatures, on est au point P c'est-à-dire $x=l$ et $y=HP$.

Pour trouver l'ordonnée M de l'impact sur l'écran, on utilise les triangles IMO' et IPH.

$$\frac{O'M}{HP} = \frac{O'I}{HI} \quad \Rightarrow \quad O'M = HP \frac{O'I}{HI} \quad \text{or} \quad HI = \frac{l}{2} \quad ; \quad O'I = L - \frac{l}{2} \quad \text{et} \quad HP = \frac{1}{2} \frac{qE}{mV_0^2} l^2$$

Finalement, on obtient : $O'M = \frac{qEl}{mV_0^2} (L - \frac{l}{2})$

❖ **Condition pour que la particule émerge du champ \vec{E}**

Pour que la particule sorte du condensateur sans heurtée l'une des plaques, il faut

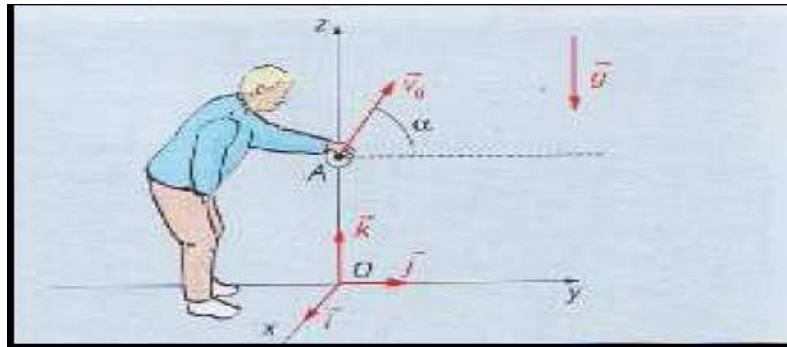
que : $x=l$ et $y < \frac{d}{2}$.

$$\text{Résolvons } y(l) < \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{qUl^2}{mdV_0^2} < \frac{d}{2} \Rightarrow U < \frac{md^2V_0^2}{ql^2} \text{ et } V_0 > \frac{l}{d} \sqrt{\frac{qU}{m}}$$

2.3. 3) Exercices :

Exercice 1 :

Un joueur de pétanque veut pointer sa boule pour l'amener près du cochonnet. Il veut l'envoyer à une distance de 6m, mais il ne doit pas dépasser une hauteur de 3m du sol, car un arbre peut gêner sa progression. La main du joueur lâche la boule à une hauteur de 1,2m du sol avec un angle de 40°. **Est-ce possible ?**



Réponse : La seule condition initiale qui nous manque est la vitesse initiale V_0 , on comprend donc que nous allons travailler sur cette vitesse pour savoir si la situation est possible.

- La boule ne doit pas monter plus haut que 3m : $z(t) < 3m$. Lorsqu'elle est au plus haut, on a $v_z(t) = 0$. $V_0 < 9,2m/s$
- La boule doit atteindre une portée de 6m : $y(t) = 6m$. Quand elle tombe au sol : $z(t) = 0$. $V_0 = 6,9m/s$

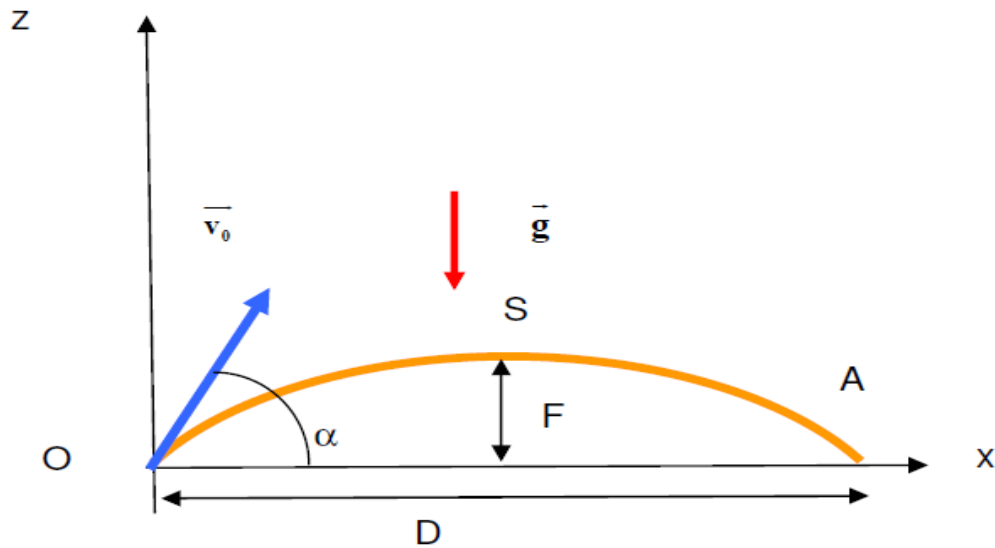
Les deux conditions peuvent être respectées, le joueur pourra réaliser son tir.

Exercice 2 :

Une balle est tirée d'un point O avec une vitesse initiale oblique \vec{V}_0 contenue dans le plan (Ox,Oz). Déterminer la portée horizontale du tir D ainsi que la flèche F (portée verticale)

Pour une valeur de V_0 .donnée, déterminer la valeur de l'angle de tir pour que la portée D soit maximale.

Montrer que pour deux angles de tirs complémentaires, V_0 étant donnée, la portée D est la même.

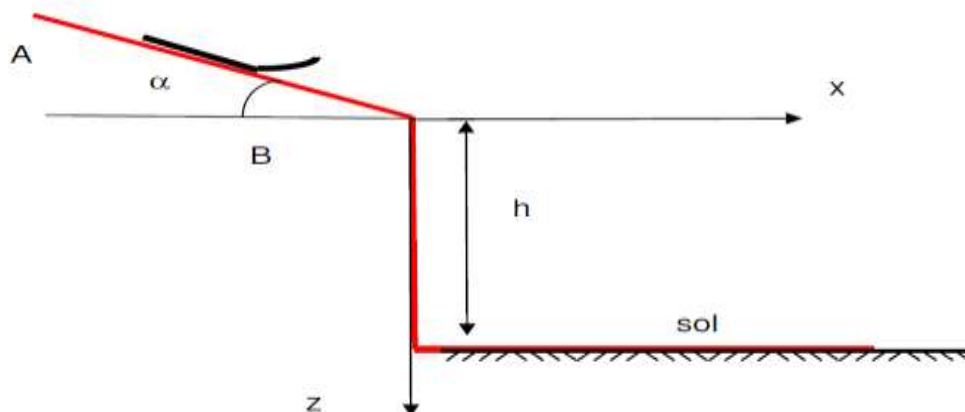


Exercice 3 :

Une luge dévale la piste inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Arrivée en B à la vitesse v_0 , elle tombe en chute libre et s'écrase en M sur le sol.

Dans le repère (Bx, Bz) :

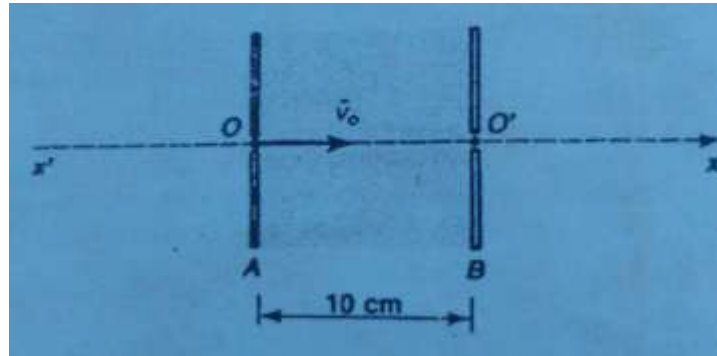
- établir l'équation de la trajectoire du centre d'inertie de la luge,
- Déterminer la position de M
- Déterminer la durée t du trajet entre B et M
- Déterminer la vitesse de la luge à son arrivée en M



Exercice 4 :

Un proton H^+ est animé d'une vitesse $V_0 = 1500 \text{ km.s}^{-1}$: il pénètre entre deux électrodes A et B, sous tension et distantes de 10 cm, parallèlement aux ligne de champ électrostatique. Il décrit un mouvement rectiligne suivant OO' (figure). On

admettra que le champ est uniforme entre les deux plaques et que le poids du proton est négligeable.



1) Le proton arrive en O' avec la vitesse de $2000 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.
Calculer la tension $U_{AB} = V_A - V_B$.

2) Quelle est la durée du trajet OO' ?

Donnée : $m_p = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Réponses : 1) $U_{AB} = 9078 \text{ v}$; 2) $t = 57 \text{ ns}$.

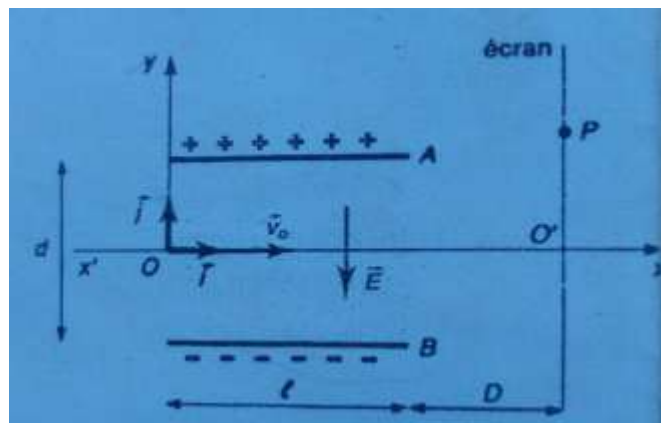
Exercice 5 :

On maintient entre les plaques (figure) une différence de potentiel U . La longueur de ces plaques est l et leur distance est d . Un électron est injecté dans une direction perpendiculaire au champ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$, au point O milieu des plaques.

Données : $l = 2 \text{ cm}$; $d = 1 \text{ cm}$; $D = 50 \text{ cm}$; $U = 100 \text{ v}$; $v_0 = 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$;

$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

On négligera le poids de l'électron.



1) Calculer le champ électrique (supposé uniforme) entre les deux plaques.

2) L'électron sort de la région où règne le champ électrique en un point S.

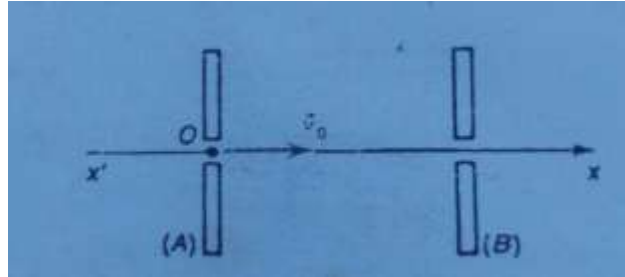
Calculer les coordonnées de S et celles du vecteur vitesse \vec{v}_S en ce point. En déduire v_S .

- 3) On place un écran à la distance D de l'extrémité des plaques. Quelle est la position du point d'impact de l'électron sur l'écran ?

Réponses : 1) $E = 10^4 \text{ v/m}$; 2) S (2 cm ; 0,35 cm) ; $v_s = 1,06 \cdot 10^7 \text{ m/s}$; 3) 18 cm.

Exercice 6 :

Une particule α (ion H^{2+}), animée d'une vitesse $v_0 = 1500 \text{ km.s}^{-1}$, est accélérée entre deux électrodes A et B distantes de 10 cm (figure).



- 1) Quel doit être le signe de la tension U_{AB} ?
- 2) Donner la valeur de U_{AB} sachant qu'en B la vitesse de la particule est égale à 2000 km.s^{-1} .
- 3) En admettant que le champ électrique est uniforme entre A et B, calculer la durée du trajet AB.

Donnée : $m_\alpha = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Réponses : 1) $U_{AB} > 0$; 2) $U_{AB} = 18156 \text{ v}$; 3) $t = 57 \text{ ns}$.

Exercice 7 :

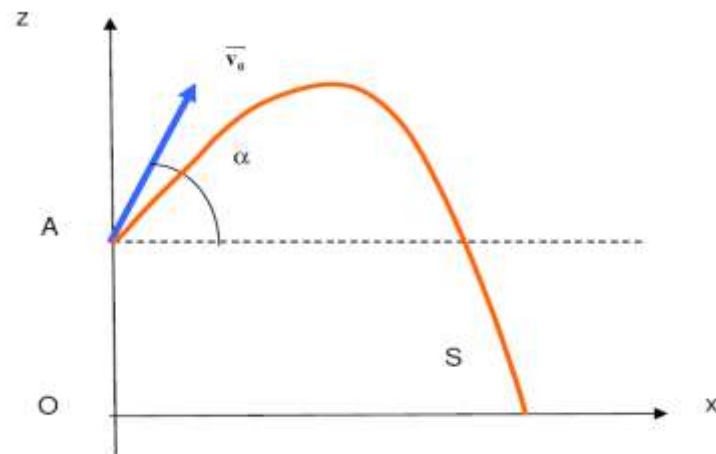
Un avion, en vol horizontal, à l'altitude de 2000 m, lâche une bombe en passant à la verticale d'un point P du sol. Initialement, la bombe a une vitesse nulle par rapport à l'avion. Par rapport au sol, plan et horizontal, l'avion a une vitesse de 720 km/h, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 1) Choisir un repère, déterminer l'équation de la trajectoire de la bombe.
- 2) Au bout de combien de temps, après son lâcher, la bombe touche t – elle le sol ?
- 3) A quelle distance de P tombe t – elle ?
- 4) Quelle est la vitesse de la bombe en arrivant au sol ? sous quel angle, par rapport à la verticale, heurte t – elle le sol.
- 5) Où se trouve l'avion quand la bombe touche le sol ?

Réponses : 2) $t = 20\text{s}$; 3) 4km ; 4) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; 5) 4km.

Exercice 8 :

Un projectile de masse m, supposé ponctuel, est lancé à $t=0$ de A ($x_A=0$; $z_A=h$) avec la vitesse \vec{v}_0 contenue dans le plan (Ox, Oz) et faisant avec l'axe Ox horizontal l'angle α . En utilisant l'énergie mécanique, déterminer la valeur de la vitesse d'arrivée du projectile au sol en S ($z_S = 0$).



Réponse :

$$v_s = \sqrt{v_A^2 + 2g(z_A - z_s)} = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$$

2.4) Dynamique du solide en rotation : (Uniquement pour la série Sciences Mathématiques)

Un solide est en mouvement de rotation lorsque ses différents points décrivent des trajectoires circulaires par rapport à un point ou un axe fixe dans un repère donné.

2.4.1) Relation fondamentale de la Dynamique de rotation :

a) Notion de moment d'inertie :

La masse d'un corps est un facteur d'inertie ; plus elle est importante plus il est difficile de mettre le corps en mouvement. Dans le cas du mouvement de rotation autour d'un axe, la masse intervient mais également sa répartition par rapport à l'axe. A masse égale, plus les points matériels constituant le solide seront écartés de l'axe plus il sera difficile de mettre le solide en mouvement de rotation. Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe, dépendant de la constitution et de la géométrie et par conséquent de la répartition de la masse autour de l'axe, est un facteur qui s'oppose d'autant plus à la mise en rotation autour de l'axe qu'il est plus important.

➤ Cas d'un point matériel

Si un point matériel de masse m décrit un cercle de rayon r autour d'un axe Δ , son moment d'inertie par rapport à cet axe est défini par la relation suivante :

$$J_{\Delta} = mr^2 \quad \text{avec } m \text{ en kg ; } r \text{ en m ; } J_{\Delta} \text{ en kg.m}^2$$

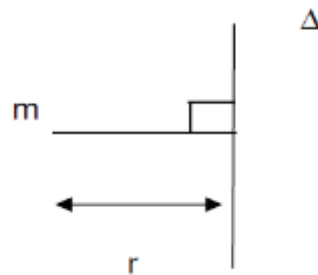


Figure 2.16

➤ **Cas d'un solide**

Soit un solide tournant autour d'un axe fixe Δ . Il est constitué d'un ensemble de n points matériels de masses m_i décrivant autour de Δ des cercles de rayons r_i .

Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ est : $J_{\Delta} = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$

➤ **Expression du moment d'inertie de quelques solides homogènes**

Il s'agit de solides présentant une symétrie par rapport à Δ

- ❖ Cylindre plein ou disque

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} MR^2$$

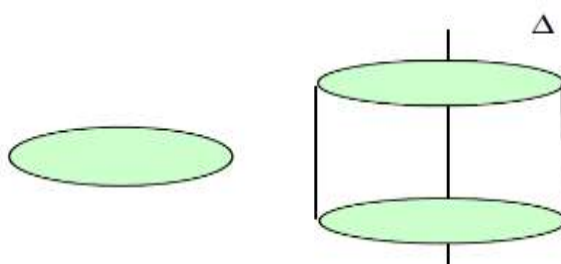


Figure 2.17

- ❖ Sphère pleine (boule) de rayon R

$$J_{\Delta} = \frac{2}{5} MR^2$$

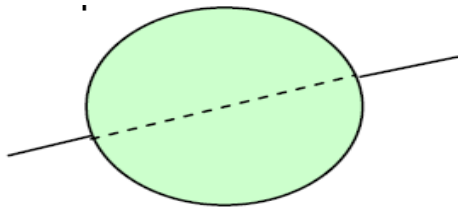


Figure 2.18

- ❖ Circonférence de masse M et de rayon R

$$J_{\Delta} = MR^2$$

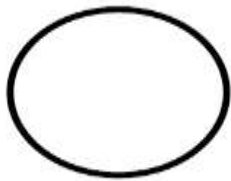


Figure 2.19

M en kg ; R en m ; J_{Δ} en kg.m^2

b) **Relation fondamentale de la Dynamique de rotation :**

- ❖ **Cas d'un point matériel**

Sous l'action de forces admettant pour résultante F , un point matériel de masse m décrit un cercle de rayon r dans un référentiel supposé galiléen. Cette résultante est contenue dans le plan du cercle et perpendiculaire à l'axe de rotation Δ .

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

En appliquant le théorème du centre d'inertie , on a: $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}_T + m\vec{a}_N$

$$\Rightarrow \vec{F} = mR\ddot{\theta}\vec{T} + m\theta'^2\vec{N} \quad \Rightarrow \quad M_{\Delta}(\vec{F}) = mR^2\ddot{\theta}$$

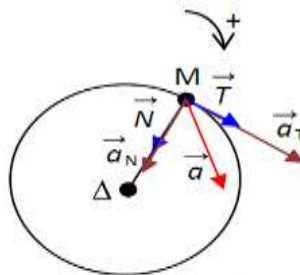


Figure 2.20

❖ **Cas d'un solide**

On applique à chaque point matériel la relation précédente

Pour le point matériel A : $M_{1(\Delta)} = m_1 R_1^2 \ddot{\theta}$

Pour le point matériel B : $M_{2(\Delta)} = m_2 R_2^2 \ddot{\theta}$

En faisant la somme membre à membre pour les n points du solide on obtient :

$$\boxed{\sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}}$$

avec $\ddot{\theta} = \theta''$

$$\sum_{i=1}^n M_{i(\Delta)} = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \ddot{\theta} \quad \Rightarrow$$

$\ddot{\theta}$ (rad/s²) Accélération angulaire ; J_{Δ} (kg.m²) Moment d'inertie du solide.

Enoncé

Le produit d'un moment d'inertie d'un solide en mouvement de rotation par rapport a un axe (Δ) par la variation temporelle de sa vitesse angulaire est égale au moment de la force extérieure qui lui exprime ce mouvement.

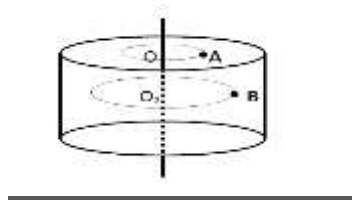


Figure 2.21

2.4.2) Théorème de Huyghens :

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ est égal à la somme du moment d'inertie de ce solide par rapport à un axe ΔG parallèle à Δ et passant par le centre d'inertie G du solide et du produit de la masse du solide par le carré de la distance d entre les axes.

$$J_{\Delta} = J_{\Delta G} + M d^2$$

avec J_{Δ} et $J_{\Delta G}$ en (kg.m²) ; M en (m) ; d en (m).

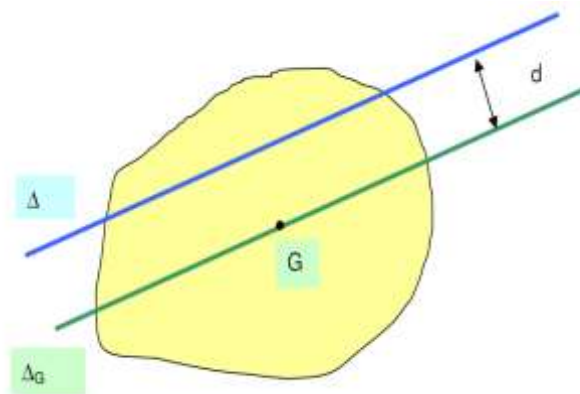
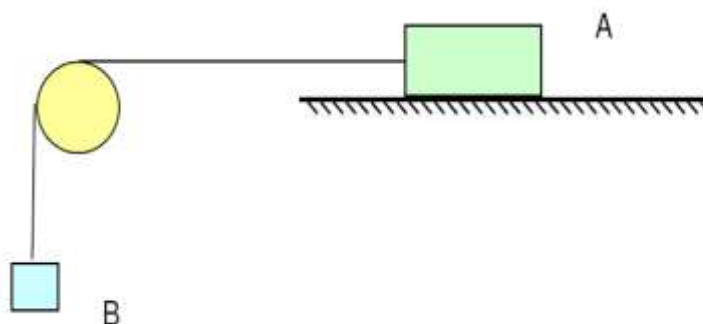


Figure 2.22

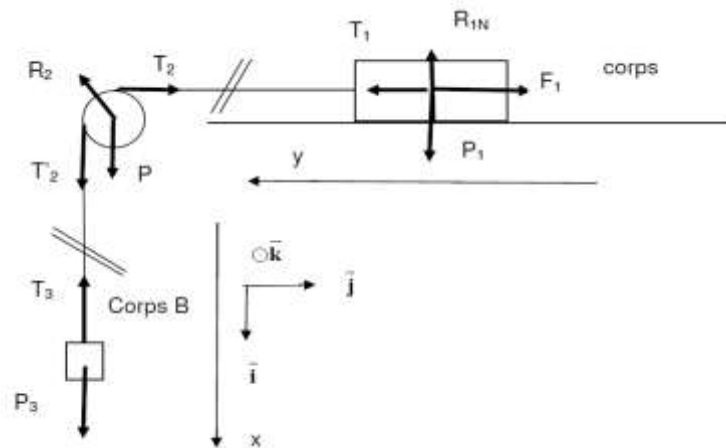
2.4.3) Exercices :

Exercice 1 :

On considère l'ensemble représenté, constitué de deux corps A et B de masses respectives M et m reliés par un fil inextensible et de masse négligeable passant sur la gorge d'une poulie assimilable à un disque de masse m' et de rayon r . Les frottements s'exerçant sur la poulie équivalent à un couple dont le moment par rapport à l'axe est constant et a pour valeur C . Ceux qui s'exercent sur A équivalent à une force opposée à la vitesse et de valeur constante f . Le système, maintenu en équilibre, est abandonné. Déterminer l'accélération de B.



Réponse :



Mouvement de B :

$$\overline{T_3} + \overline{P_3} = m\overline{a_B} \quad -T_3 + P_3 = ma_B$$

Mouvement de la poulie de centre O

$$\overline{M_O T'_2} + \overline{M_O T_2} + \overline{M_O R_2} + \overline{M_O P_2} + \overline{M_{couple}} = J_A \ddot{\theta} \overline{k}$$

$$T'_2 r - T_2 r - C = J_A \ddot{\theta} = \frac{1}{2} m' r^2 \ddot{\theta} \quad \text{ici } C > 0$$

Mouvement de A :

$$\overline{T_1} + \overline{P_1} + \overline{R_{1N}} + \overline{F_1} = M\overline{a_A} \quad T_1 - F_1 = Ma_A$$

A et B ont même vitesse ; cette vitesse est égale à la vitesse d'un point à la périphérie de la poulie. La condition de non glissement du fil sur la poulie

s'écrit : $\mathbf{v} = \mathbf{r} \dot{\theta}$ en dérivant par rapport au temps : $\mathbf{a} = \mathbf{r} \ddot{\theta}$

$$T_1 - F_1 = Ma \quad \Rightarrow T_1 = F_1 + Ma$$

$$-T_3 + P_3 = ma \quad \Rightarrow T_3 = mg - ma$$

$$T'_2 r - T_2 r - |C| = \frac{1}{2} m' r^2 \frac{a}{r}$$

Les fils sont inextensibles et de masses négligeables

$$T_1 = T_2 \quad \text{et} \quad T'_2 = T_3$$

$$(mg - ma)r - (F_1 + Ma)r - |C| = \frac{1}{2} m' r^2 \frac{a}{r}$$

$$a = \frac{mg - F_1 - \frac{C}{r}}{m + M + \frac{m'}{2}} = \frac{2(mgr - F_1 r - C)}{r(2m + 2M + m')}$$

Exercice 2 :

Au deux extrémités d'un fil de masse négligeable passant sur la gorge d'une poulie mobile autour d'un axe horizontal sont accrochées deux masses $M = 637 \text{ g}$, $m = 343 \text{ g}$.

- 1) En négligeant la masse de la poulie, calculer :
 - a) L'accélération que prend le système abandonné à lui-même ;
 - b) La tension du fil.
- 2) En faites la poulie a un moment d'inertie $J = 1,96 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$, son rayon est 10cm et toute la masse est supposée répartie à la même distance de l'axe. Calculer :
 - a) La nouvelle valeur de l'accélération ;
 - b) Les tensions des deux brins de fil ; les comparer.
- 3) La masse (m) se déplace suivant la ligne de plus grande pente d'un plan parallèle à l'axe de la poulie et incliné sur le plan horizontal de 30° . Quelle valeur doit-on donner aux masses m et M ; leur somme est la même, pour que l'accélération prenne la même valeur pour 1). On négligera la masse de la poulie.

Réponses : 1) a) $a = 2,94 \text{ m/s}^2$; b) $T = 4,37 \text{ N}$; 2) a) $a = 2,45 \text{ m/s}^2$; 3) $m = 457,3 \text{ g}$;
 $M = 522,7 \text{ g}$.

2.5) Oscillations mécaniques libres : (Uniquement pour la série Sciences Mathématiques) Généralités :

- Un oscillateur est un système physique manifestant la variation d'une grandeur physique de part et d'autre d'un état d'équilibre. Si les variations se reproduisent identiques à elles-mêmes, l'oscillateur est dit périodique.
- Les oscillations sont dites libres lorsque le système une fois, le système, écarté de sa position d'équilibre est abandonné à lui-même.
- Un oscillateur *libre* effectue des oscillations correspondant à ses propres caractéristiques.
- Un oscillateur mécanique effectue un mouvement d'aller-retour de part et d'autre de sa position d'équilibre.
- La *période* T est la durée d'une oscillation. C'est la plus courte durée après laquelle le phénomène oscillatoire se reproduit identique à lui-même. L'unité de la période est la seconde (s).
- La *fréquence* f est le nombre de fois que le phénomène oscillatoire se reproduit par seconde. L'unité de la fréquence est le hertz (Hz).
- S'il n'existe aucune force de frottement (énergie mécanique constante : $\Delta E = 0$) les oscillations ne sont pas amorties et le mouvement continu indéfiniment.
- S'il existe des forces de frottement le système perd de l'énergie mécanique ($\Delta E = W(\vec{f})$) les oscillations sont progressivement amorties et le système finit par s'arrêter.

Exemples d'oscillateurs mécaniques

Certains solides sont animés d'un mouvement oscillatoire après avoir été écarté de leur position d'équilibre : ce sont des oscillateurs mécaniques tendus.

Exemple : la balance d'une horloge, le diapason, les tambours, le véhicule sur ses amortisseurs etc...

2.5.1) Pendule élastique horizontal :(oscillateurs en translation)

➤ Etude expérimentale

Ce système oscillant simple est composé d'un solide de masse m accroché à un ressort à spires non jointives de raideur k . Le solide peut se déplacer sans frottements sur un support horizontal.

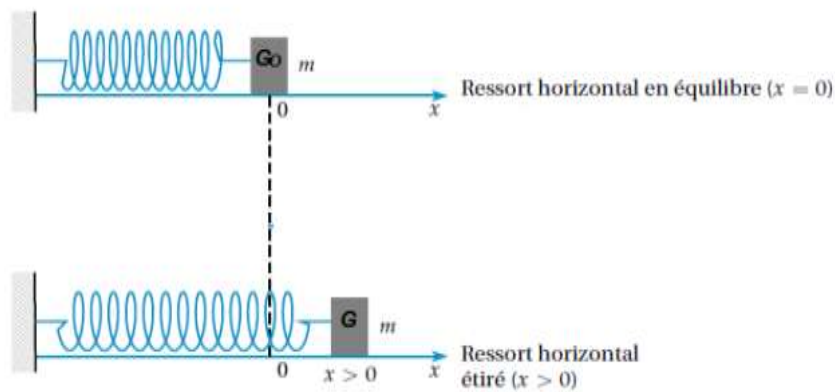
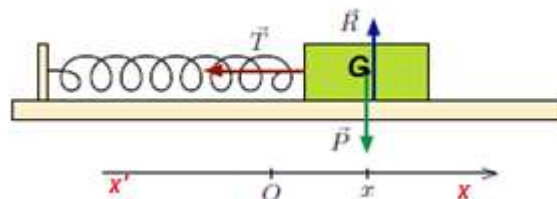


Figure 2.23

En position d'équilibre, lorsque le ressort n'est ni étiré ni comprimé, le centre d'inertie G solide occupe la position G_0 d'abscisse $x = 0$. Quand le solide se déplace jusqu'en G son abscisse est x (variation de la longueur du ressort).

x est appelé allongement du ressort ou élongation du mouvement.

➤ Equation différentielle du mouvement



Système : une masse m ;

Référentiel : laboratoire (galiléen) ;

Forces appliquées : son poids \vec{P} , la réaction \vec{R} du support horizontal et la tension \vec{T} du ressort de raideur k .

En appliquant le théorème du centre d'inertie, on a: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}_G$

Projetons la relation vectorielle sur l'axe xx' : $0 + 0 - T = m\ddot{x} \Rightarrow -kx = m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

\Rightarrow C'est l'équation différentielle d'un mouvement harmonique.

➤ **Equation et caractéristiques du mouvement : pulsation, période, représentation graphique**

➤ **Solution de l'équation différentielle**

Une solution de l'équation différentielle est une fonction du temps ; c'est l'équation horaire $x(t)$ de l'oscillateur.

L'équation horaire du pendule élastique horizontal est une sinusoïde de la forme :

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi) ;$$

Vérifions qu'une expression sinusoïdale est effectivement solution de l'équation différentielle du mouvement. En dérivant une première fois par rapport à t :

$$\dot{x} = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

et une deuxième fois : $\ddot{x} = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x \Rightarrow \ddot{x} = \omega_0^2 x$

Calculons $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{K}{m}x_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$ car $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$
on constate que l'équation différentielle du mouvement est vérifiée par l'expression sinusoïdale *sous condition que* :

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est bien solution de l'équation d'équation différentielle.

Après avoir lâché le solide, le pendule effectue des oscillations sans aucune influence de l'extérieur ; c'est donc un oscillateur libre. Pour cette raison la constante ω_0 est appelée *pulsation propre* de l'oscillateur.

La pulsation propre ω_0 est déterminée par les grandeurs caractéristiques du pendule élastique, à savoir la raideur du ressort et la masse du solide. L'amplitude x_m ($x_m > 0$) et la phase initiale $\varphi \in [0; 2\pi[$ sont déterminées par les conditions initiales.

❖ **Pulsation propre :**

La pulsation propre du pendule élastique est :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

❖ **Période propre :**

La période propre du pendule élastique est :

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

❖ **Fréquence propre :**

La fréquence propre du pendule élastique est :

$$N_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Application : Montrer que $x(t) = x_m \sin(\omega_o t + \varphi)$ est également solution de l'équation différentielle du mouvement.

Remarque : l'amplitude des oscillations dépend des conditions initiales sur la vitesse et la position.

$$\begin{cases} x = x_m \cos(\omega_o t + \varphi) \\ \dot{x} = -x_m \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \text{à l'instant } t = 0 \begin{cases} x(0) = x_o = x_m \cos \varphi \\ \dot{x}(0) = v_o = -x_m \omega_o \sin \varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_m \cos \varphi = x_o \\ x_m \sin \varphi = -\frac{v_o}{\omega_o} \end{cases} \text{ comme } (x_m \cos \varphi)^2 + (x_m \sin \varphi)^2 = x_m^2, \text{ on obtient :}$$

$$x_m = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega_o}\right)^2}$$

➤ **Représentation graphique**

$$x = x_m \cos(\omega_o t + \varphi) ;$$

$\dot{x} = -x_m \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi) = x_m \omega_o \cos\left(\omega_o t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$; \dot{x} est en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à x (quadratures de phase).

$\ddot{x} = -x_m \omega_o^2 \cos(\omega_o t + \varphi) = -\omega_o^2 x$; \ddot{x} et x sont en opposition de phase.

Les facteurs qui multiplient les fonctions trigonométriques sont les valeurs maximales de la vitesse $v_{max} = x_m \omega_o$ et de l'accélération $a_{max} = x_m \omega_o^2$

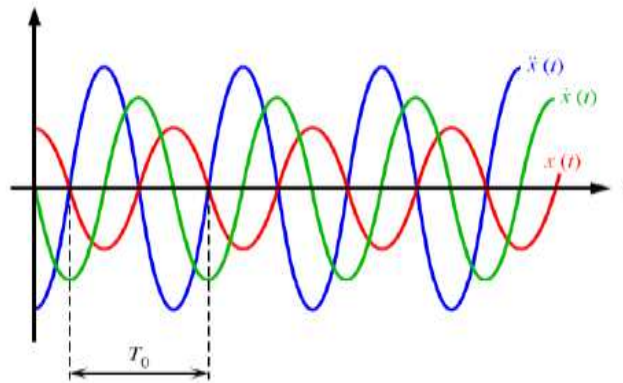


Figure 2.23 Représentation graphique de $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$

2.5.2) Etude énergétique :

L'énergie cinétique du solide à l'instant t est donnée par :

$$E_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m[-x_m\omega_o \sin(\omega_o t + \varphi)]^2$$

L'expression pour l'énergie potentielle élastique du ressort devient :

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k[x_m \cos(\omega_o t + \varphi)]^2$$

L'énergie mécanique E est égale à la somme de E_C et de E_P .

$$E = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}m\omega_o^2 x_m^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \text{ avec } v_{max} = x_m\omega_o$$

Le système est conservatif car l'énergie mécanique est constante. Donnons une représentation graphique de E_C , E_P et E dans le cas où $x = x_m \cos(\omega_o t)$

$$E_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_o^2 x_m^2 (\sin \omega_o t)^2 = \frac{1}{4}kx_m^2 (1 - \cos 2\omega_o t)$$

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 (\cos \omega_o t)^2 = \frac{1}{4}kx_m^2 (1 + \cos 2\omega_o t)$$

Les deux fonctions sont périodiques de période $\frac{\pi}{\omega_o} = \frac{T_o}{2}$

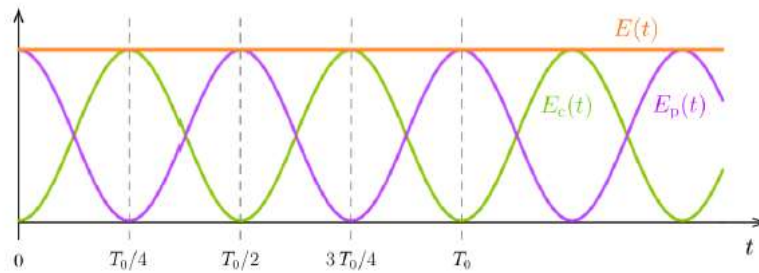


Figure 2.24 Représentation graphique de $E_C(t)$, $E_P(t)$ et $E(t)$

Au cours du mouvement, il y a échange mutuel et permanent des formes cinétique et potentielle de l'énergie.

Réciproque : $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$$E = \text{cte} \implies \frac{dE}{dt} = 0 = m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0 \implies x \neq 0$$

Donc $m\ddot{x} + kx = 0$

2.5.3) Oscillations mécaniques amorties :

L'expérience avec le pendule élastique a montré qu'une augmentation progressive de la force de frottement provoque une diminution de l'amplitude à chaque aller retour (figure 2.25a). Les oscillations du pendule sont amorties et le mouvement n'est pas périodique au sens strict. On le qualifie de *pseudo-périodique* et on appelle *pseudo-période* la durée d'une oscillation.

Dans le cas d'un faible amortissement, la pseudo-période est légèrement supérieure à la période propre du pendule. La valeur de la pseudo-période, donc le temps pour un aller retour, ne change pas durant le mouvement.

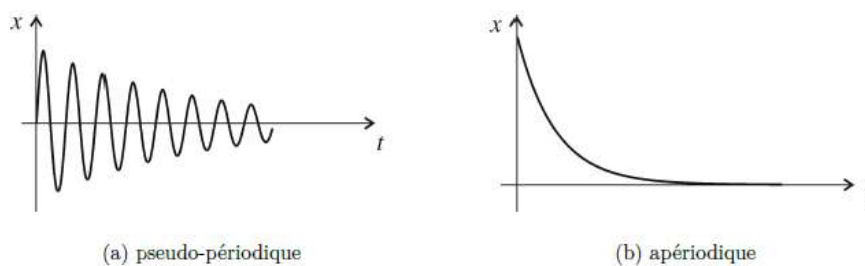


Figure 2.25 Régimes oscillatoires en cas de frottements

Lorsque l'intensité de la force de frottement dépasse une valeur critique, il n'y a plus d'oscillations. Écarté de sa position d'équilibre, le pendule y revient lentement sans osciller (figure 2.25b). On qualifie alors le mouvement d'*apériodique*.

Exemples : les aiguilles d'instruments à cadre mobile et les amortisseurs d'automobile effectuent des mouvements apériodiques.

2.5.4) Exercice :

Une pendule élastique horizontale de masse M , de raideur k effectue un mouvement sinusoïdal autour de sa position d'équilibre O .

- 1) Etablir l'équation différentiel du mouvement.
 - 2) On tire le solide à partir de sa position d'équilibre l'une longueur de 11,2 cm et on lâche sans vitesse initiale.
 - a) Calculer la pulsation propre et la période de l'oscillateur.
 - b) Donner l'équation horaire du mouvement du solide en précisant bien les origines spatiale et temporelle.
 - c) Calculer l'énergie mécanique du système.
- On donne : $M = 200\text{g}$; $k = 26\text{N/m}$. les forces de frottement sont nulles

Chapitre 2 :

ELECTROMAGNETISME/ELECTRICITE

Le magnétisme se manifeste par exemple lorsqu'un aimant attire un clou en fer. C'est un phénomène distinct de la gravitation, laquelle est une interaction due la masse des corps. En effet, **les phénomènes liés à l'électricité et au magnétisme ont la même cause : la charge électrique**. Ils sont réunis sous l'appellation plus générale d'électromagnétisme.

L'électromagnétisme a pour objet l'étude des champs magnétique créé par les aimants et les courants, leurs interactions ainsi que les appareils basés sur eux.

1) Champ magnétique :

a) Mise en évidence expérimentale

Soit une aiguille aimantée (boussole mobile) autour d'un axe passant par son centre de gravité, éloignée de tout conducteur et tous matériaux ferromagnétiques.

En la tournant plusieurs fois, elle s'immobilise toujours en indiquant la même direction : le Nord magnétique de la Terre.

La boussole permet donc de déceler le champ magnétique terrestre.

Plaçons maintenant une bobine traversée par courant au voisinage de la boussole précédente. En la déplaçant autour de son axe, la boussole indique une nouvelle direction. Elle détecte le champ magnétique résultant créé par la bobine et la Terre.

Un aimant agit à distance sur un autre aimant : il modifie les propriétés de l'espace qui l'entoure.

Nous dirons que l'espace environnant un aimant ou une bobine parcourue par un courant est le siège d'un champ magnétique.

Le champ magnétique en un point P est caractérisé par son **vecteur champ magnétique** $\vec{B}(P)$ dont :

- ✓ Le point d'application est le point P
- ✓ La direction est celle de l'aiguille aimantée (boussole) placée en P
- ✓ Son sens est dirigé du pôle sud vers le pôle nord de l'aiguille aimantée
- ✓ Sa norme peut être déterminée par le calcul ou par mesure à l'aide d'un teslamètre à sonde de Haull. L'unité du champ magnétique dans le SI est le Tesla (symbole T).

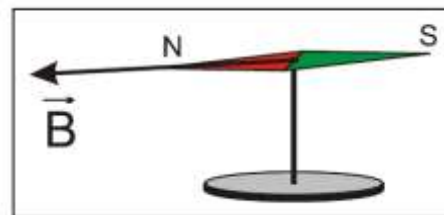


Figure 1.1

b) Champ magnétique engendré par un aimant :

Expérience :

Approchons plusieurs aiguilles aimantées d'un aimant droit (figure 1.2).

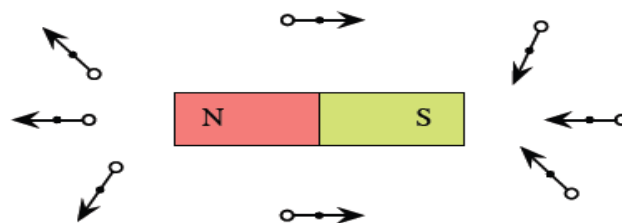


Figure 1.2 Aiguilles aimantées placées au voisinage d'un aimant droit

Observations :

- Lorsque nous approchons les aiguilles de l'aimant, leurs orientations changent.
- Les aiguilles prennent chacune des directions et des sens bien déterminés différents d'une aiguille à une autre.

Interprétation :

Les aiguilles ont détecté ainsi le champ magnétique de l'aimant : les aimants sont des sources de **champ magnétique**.

c) Champ magnétique créé par un courant électrique

Expérience : L'expérience d'Ørsted



Figure 1.3 Expérience d'Ørsted

L'aiguille aimantée (figure 1.3) horizontale et mobile autour d'un axe vertical étant orientée, nous plaçons, parallèlement à cette aiguille et légèrement au-dessus, un fil rectiligne en cuivre (métal non magnétique).

L'effet magnétique du courant électrique fut découvert par Christian Ørsted.

Observations :

- Lorsque nous faisons passer un courant dans le fil en fermant l'interrupteur ; aussitôt, l'aiguille aimantée dévie.
- Si l'on intervertit les connexions du circuit avec les bornes du générateur de façon que le sens du courant soit inversé, on constate que la déviation de l'aiguille aimantée change de sens.

Conclusion :

Une aiguille placée au voisinage immédiat d'un fil conducteur parcouru par un courant électrique subit une déviation. Donc l'aiguille indique la présence d'un champ magnétique engendré par le courant électrique dans le conducteur.

d) Interprétation microscopique

Un atome peut être représenté par une boucle de courant de vecteur induction magnétique \vec{B}_i . Dans la matière non aimantée les vecteurs \vec{B}_i sont orientés pêle-mêle et à l'échelle macroscopique l'aimantation est nulle.

Par contre dans la matière aimantée, il existe une orientation préférentielle des boucles de courant : les vecteurs \vec{B}_i s'additionnent en donnant une aimantation permanente ou temporaire.

1.1) Action d'un champ magnétique sur un aimant et sur un courant :

a) Pôles d'un aimant :

Plaçons un aimant droit devant une boussole. Si l'extrémité de l'aimant repousse le pôle nord de la boussole par exemple, cette extrémité est donc un pôle nord. Par contre s'il attire le pôle nord de la boussole alors l'extrémité est un pôle sud. Un aimant a donc deux pôles : le pôle nord(N) et le pôle sud(S).

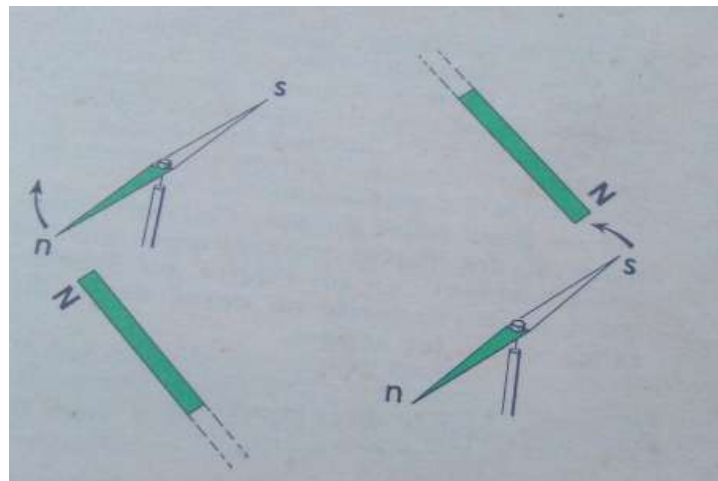


Figure 1.4

Remarques :

- Deux pôles de même nom se repoussent ;
- Deux pôles de noms différents s'attirent.

b) Action d'un champ magnétique sur un aimant :(faces d'une bobine)

Plaçons un aimant droit devant une bobine parcourue par un courant contenu. On constate que l'un des pôles est attiré par la bobine (par exemple le pôle sud est repoussé par la même face de la bobine). La face de la bobine qui attire le pôle nord est la face sud et celle qui la repousse est la face nord.

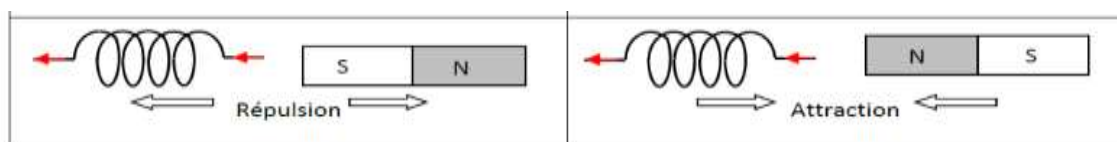


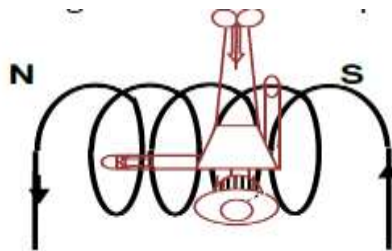
Figure 1.5

L'action d'un pôle d'aimant sur une bobine dépend du sens du courant qui le parcourt. Les faces d'une bobine se comportent alors comme les pôles d'un aimant.

On détermine les noms des faces d'une bobine par la règle du bonhomme d'Ampère selon le sens du courant.

➤ **La règle du bonhomme d'Ampère**

Le bonhomme d'Ampère couché sur le fil regarde vers l'intérieur de la bobine. Le courant lui entre par les pieds et sort par la tête. Son bras gauche tendu indique la face Nord.



c) Lignes de champ et Spectres magnétiques :

- Une ligne de champ est une courbe tangente en chacun de ses points avec le vecteur champ magnétique \vec{B} . Elle est orientée dans le sens de \vec{B} .
- Deux lignes de champ ne se coupent jamais parce qu'il n'existe qu'un seul vecteur champ magnétique en un point.
- L'ensemble des lignes de champ magnétique constitue le spectre du champ magnétique.

- **Spectre d'un champ magnétique créé par un aimant droit**

- Près des pôles les lignes de champ sont resserrées : le champ y est plus intense.
- Les lignes de champ quittent le pôle nord pour converger vers le pôle sud.

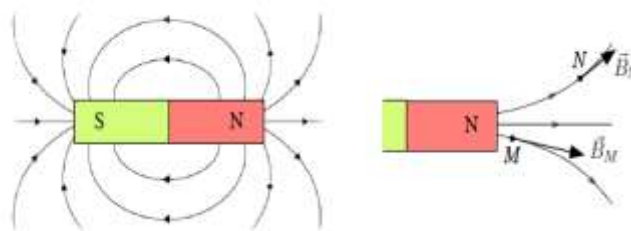


Figure 1.6 Spectre magnétique

- **Spectre d'un champ magnétique créé par un aimant en U**

- Le spectre magnétique fait apparaître des lignes de champ parallèles entre elles et perpendiculaires aux branches de l'aimant.

- Des mesures précises montrent que le champ magnétique a la même valeur en tout point de l'entrefer. On dit qu'il y est *uniforme*.

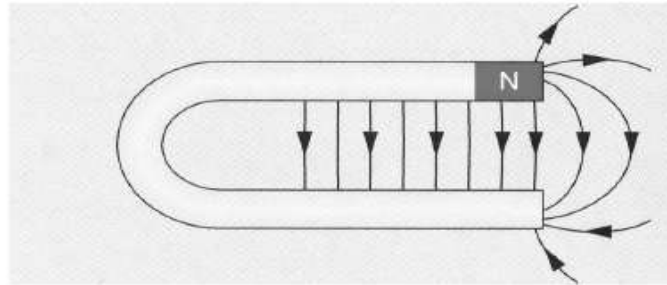


Figure 1.7 Spectre magnétique d'un aimant en U

d) Spectres magnétiques engendrés par un courant : règle du bonhomme d'Ampère :

Nous allons étudier les spectres magnétiques d'un fil rectiligne, d'une bobine plate et d'un solénoïde parcourus par un courant électrique.

- **Fil rectiligne**

Expérience

Formons le spectre magnétique du champ créé par un fil rectiligne vertical parcouru par un courant. Saupoudrons de la limaille de fer dans un plan perpendiculaire au fil. Plaçons également quelques aiguilles aimantées au voisinage du fil.

Observation :

Le spectre magnétique fait apparaître des lignes de champ en forme de cercles centrés sur le fil. L'orientation des aiguilles aimantées s'inverse lorsque nous changeons le sens du courant.

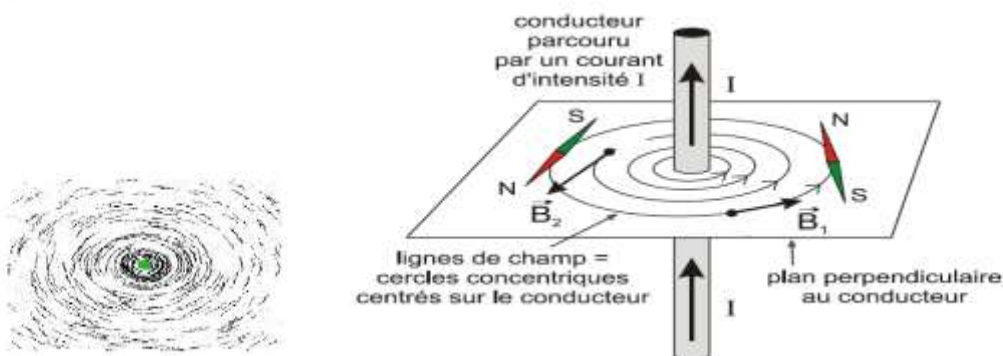


Figure 1.8 Spectre magnétique d'un fil rectiligne

Les lignes de champ magnétique d'un courant électrique rectiligne sont des cercles ayant pour axe le fil transportant le courant.

Le sens du champ magnétique peut être déterminé à l'aide de la règle du **bonhomme d'Ampère** (le bras gauche indique le sens de \vec{B}).

La valeur du vecteur champ est proportionnelle à l'intensité du courant.

- **Bobine plate**

Une bobine plate est constituée d'un fil conducteur enroulé de façon à former une bobine dont la longueur est petite par rapport à son rayon. La figure 1.9 montre le spectre d'une bobine plate.

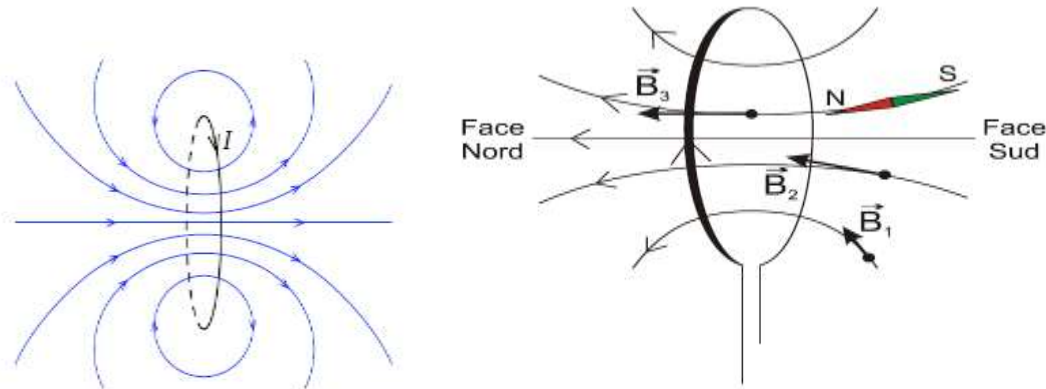


Figure 1.9 Spectre magnétique d'une bobine plate

Une bobine plate parcouru par un courant électrique crée un champ magnétique dont la direction est l'axe de la bobine.

Le sens du champ magnétique peut être déterminé à l'aide de la règle du **bonhomme d'Ampère** (un bonhomme d'Ampère placé sur la bobine, le courant entrant par ses pieds et sortant par sa tête, indique le sens du champ magnétique par son bras gauche lorsqu'il regarde le centre de la bobine).

La configuration dite « bobines de Helmholtz » est l'association de deux bobines plates identiques séparées par une distance égale à leur rayon sur leur axe commun (figure 1.10).

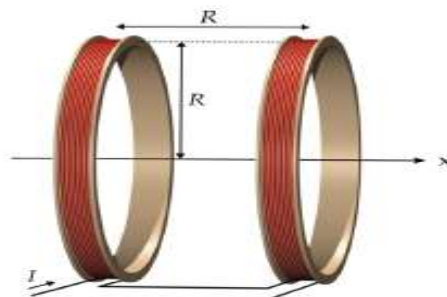


Figure 1.10 dispositif

En faisant circuler des courants de même intensité et de même sens dans ces bobines, un champ magnétique est créé qui a la particularité d'être relativement uniforme au centre du dispositif (figure 1.11).

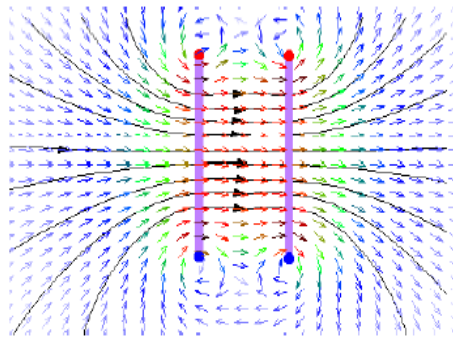


Figure 1.11 spectre magnétique

e) Champ magnétique terrestre :

Plaçons plusieurs boussoles (aiguilles aimantées) dans une région de l'espace loin de toute source apparente de champ magnétique. Nous constatons qu'elles s'orientent toutes suivant la même direction. Cette direction particulière est due à la présence dans l'espace d'un champ magnétique : c'est le champ magnétique terrestre \vec{B}_T .

Le champ magnétique terrestre est approximativement celui d'un aimant droit (figure 1.12). Le pôle nord magnétique de cet aimant terrestre pointe vers le sud géographique.

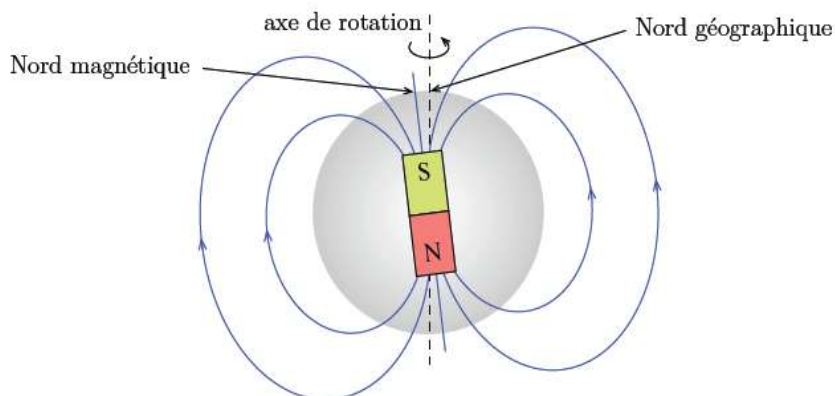


Figure 1.12 Champ magnétique terrestre

- Le méridien géographique est le plan vertical qui contient le point considéré et l'axe nord sud des pôles.
- Le plan du méridien magnétique est le plan vertical contenant la direction du champ magnétique du point considéré.
- L'angle formé par les deux plans s'appelle la déclinaison (D).
- L'angle que fait \vec{B}_T et l'horizontal du point considéré est appelé inclinaison (i).

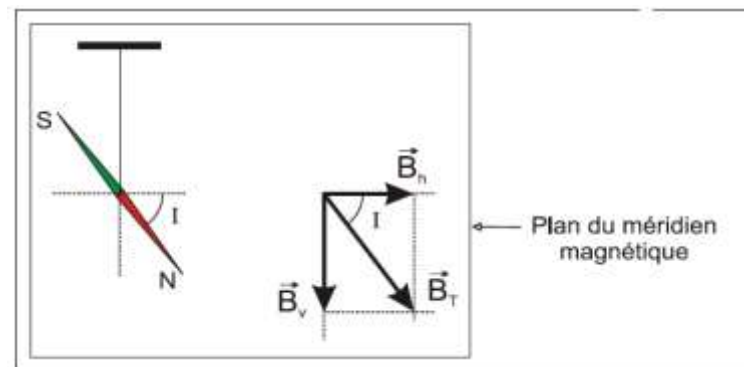


Figure 1.13 Orientation du vecteur champ magnétique terrestre

Le champ magnétique terrestre est la résultante de deux composantes :

- \vec{B}_h : composante horizontale du champ magnétique terrestre en un point.
- \vec{B}_v : composante verticale du champ magnétique terrestre en un point.

$$\vec{B}_T = \vec{B}_h + \vec{B}_v$$

Dans nos régions (par exemple Paris $i = 65^\circ$), la valeur du vecteur champ est approximativement $B \approx 4 \cdot 10^{-5}$ T. Les valeurs des composantes du vecteur champ sont respectivement : $B_h = B \cos i \approx 2 \cdot 10^{-5}$ T et $B_v = B \sin i \approx 3,5 \cdot 10^{-5}$ T.

Remarque : le champ magnétique terrestre se superpose toujours aux champs créés par les autres sources (aimants, courant) devant lesquels il d'ailleurs souvent négligeable.

1.2) Champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde long :

Définition : un solénoïde est une bobine longue dont sa longueur est supérieure à 10 fois son rayon.

Expérience : Formons le spectre magnétique du champ créé par un solénoïde d'axe horizontal parcouru par un courant électrique. Saupoudrons de la limaille de fer dans un plan horizontal contenant l'axe du solénoïde. Plaçons également quelques aiguilles aimantées à l'intérieur du solénoïde.

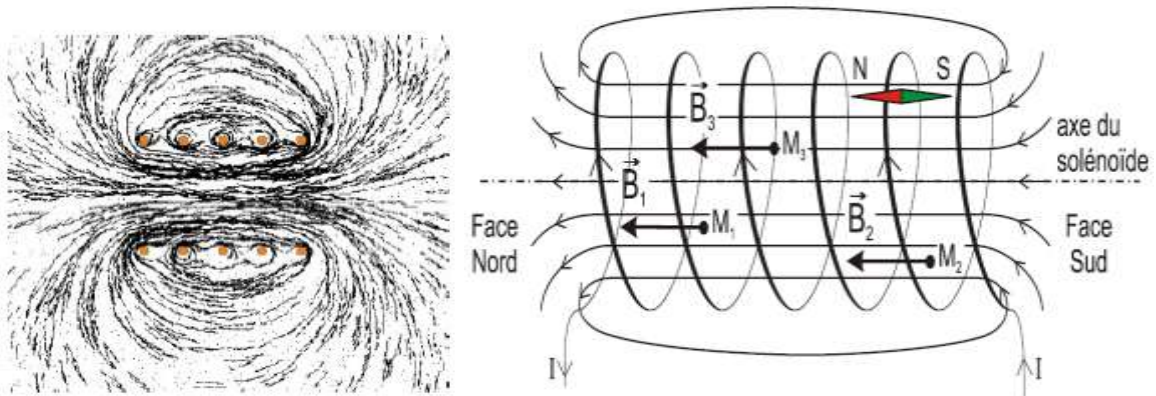


Figure 1.14 Spectre magnétique d'un solénoïde

Observations :

- Le spectre magnétique à l'extérieur du solénoïde a la même allure que celui d'un aimant droit. À l'intérieur du solénoïde et suffisamment loin des extrémités, les lignes de champ sont parallèles à l'axe du solénoïde.
- L'orientation de l'aiguille aimantée s'inverse lorsque nous changeons le sens du courant.

Orientation du champ magnétique :

Un solénoïde parcouru par un courant électrique crée un champ magnétique uniforme et de même direction que l'axe du solénoïde.

Le sens du champ magnétique est de la face sud vers la face nord et peut être déterminé à l'aide de la règle du bonhomme d'Ampère :

Un bonhomme d'Ampère placé sur les fils du solénoïde, le courant entrant par ses pieds et sortant par sa tête, indique le sens du champ magnétique par son bras gauche lorsqu'il regarde le centre du solénoïde.

Intensité du champ magnétique :

À l'intérieur d'un solénoïde de longueur L comprenant N spires :

Le champ magnétique B est proportionnel :

- à l'intensité I du courant qui le parcourt ;
- au rapport $n = \frac{N}{L}$ indiquant le nombre de spires par unité de longueur.

Le champ magnétique B conserve la même valeur, on dit qu'il est uniforme.

La valeur du vecteur champ est donnée par l'expression :

$$B = \mu_0 n I$$

avec $\begin{cases} I : \text{Intensité du courant circulant dans le solénoïde en ampères (A)} \\ n : \text{nombre de spires par mètre du solénoïde (spires.m}^{-1}\text{)} \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI (perméabilité magnétique du vide)} \end{cases}$

1. 3) Exercices :

Exercice 1 :

On veut obtenir au centre d'un solénoïde de longueur $l = 50$ cm, un champ magnétique d'intensité 2mT, l'intensité du courant étant de 1A. Déterminer le nombre de spires nécessaires.

Exercice 2 :

Un solénoïde comportant $N = 1000$ spires jointives a pour longueur $L = 80$ cm. Il est parcouru par un courant d'intensité I .

a) Faire un schéma sur lequel vous représenterez :

- le spectre magnétique du solénoïde
- les faces Nord et Sud
- le vecteur champ magnétique au centre du solénoïde

On suppose le solénoïde suffisamment long pour être assimilable à un solénoïde de longueur infinie.

b) Quelle est l'expression de l'intensité du champ magnétique au centre du solénoïde?

A.N. Calculer B si $I = 20$ mA.

L'axe du solénoïde est placé perpendiculairement au plan du méridien magnétique. Au centre du solénoïde on place une petite boussole mobile autour d'un axe vertical.

c) Quelle est l'orientation de la boussole pour $I = 0$?

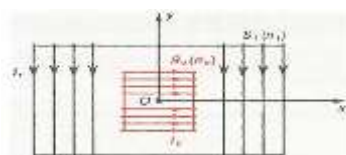
Quand le courant d'intensité $I = 20$ mA parcourt le solénoïde, la boussole tourne d'un angle $\alpha = 57,5^\circ$.

En déduire l'intensité B_h de la composante horizontale du champ magnétique terrestre.

Exercice 3 :

A l'intérieur d'un solénoïde S_1 comportant 1000 spires par mètre et parcouru par un courant d'intensité 2 A, on a placé un solénoïde S_2 dont l'axe est perpendiculaire à celui de S_1 (cf figure). Le solénoïde S_2 est formé de 200 spires régulièrement enroulées sur une longueur de 5 cm et l'intensité du courant qui y circule vaut 1 A.

Les sens des courants étant ceux qui sont indiqués à la figure, déterminer les caractéristiques du vecteur champ magnétique au point O



Réponses : 5,6 mT ; $\alpha = 63,4^\circ$.

Exercice 4 :

Un solénoïde (bobine longue) est branché à un générateur de courant.

a) Effectuer un schéma du montage et y insérer le générateur, le courant électrique à travers la bobine, les lignes de champ magnétique ainsi que les pôles des deux faces de la bobine.

b) Déterminer la valeur du champ magnétique si le solénoïde à une longueur de 5 cm, contient 1000 spires et est parcourue par un courant de 6 A.

Réponse : (151 mT)

Exercice 5 :

Un solénoïde de 60 cm de long comporte 650 spires. Son axe est horizontal et perpendiculaire au plan du méridien magnétique terrestre. Au centre de ce solénoïde, on place une petite aiguille aimantée horizontale, mobile librement autour d'un axe vertical.

a) En absence de courant électrique dans le solénoïde, préciser l'orientation de l'aiguille.

b) Un courant d'intensité I traverse le solénoïde. La petite aiguille dévie d'un angle de 78° par rapport à sa position initiale.

Interpréter l'expérience.

Préciser sur un schéma clair le sens de circulation du courant et justifier la nouvelle position de l'aiguille.

c) Déterminer l'intensité du courant dans le solénoïde.

Réponse : (69,1 mA)

2) Particule chargée en mouvement dans un champ magnétique uniforme :

2.1) Etude expérimentale :

Expérience :

- Deux bobines de Helmholtz créent un champ magnétique \vec{B} uniforme parallèle à l'axe des bobines.
- Un canon à électrons produit un faisceau d'électrons de vitesse v à l'intérieur d'une ampoule de verre. Les quelques molécules de gaz, excitées par des chocs avec les électrons, émettent ensuite un rayonnement lumineux permettant de visualiser la trajectoire du faisceau d'électrons.
- L'ampoule peut tourner autour d'un axe, de telle manière que l'angle α entre la vitesse \vec{V} des électrons et le champ \vec{B} puisse être varié.

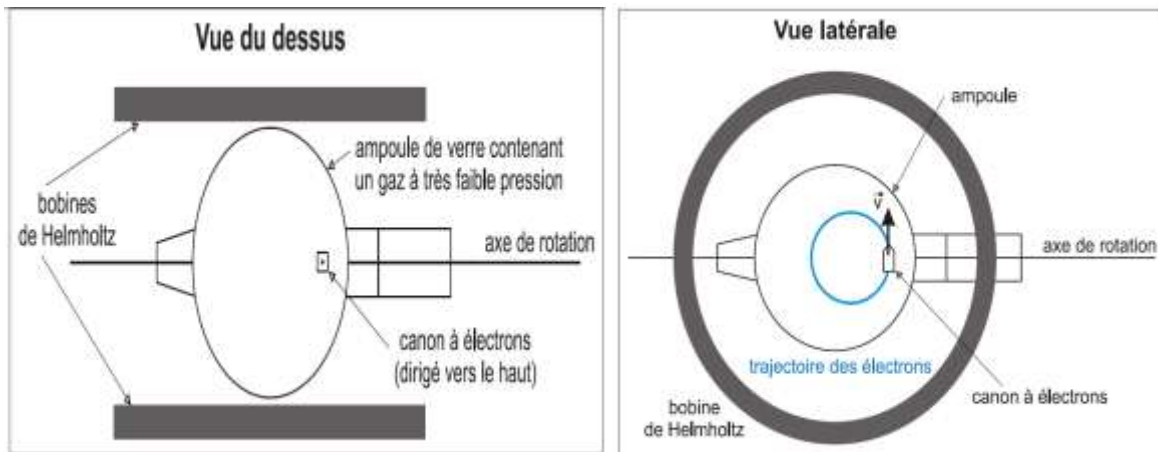


Figure 2.1

Observations

1. En absence d'un champ \vec{B} la trajectoire des électrons est rectiligne.
2. En présence d'un champ $\vec{B} \perp \vec{v}$ les électrons décrivent une trajectoire circulaire. Plus le champ est intense, plus le rayon de la trajectoire est petit. Plus la vitesse des électrons est grande, plus le rayon est grand.
3. En présence d'un champ $\vec{B} \parallel \vec{v}$ les électrons décrivent une trajectoire rectiligne.
4. En présence d'un champ \vec{B} faisant un angle α quelconque par rapport à \vec{v} , les électrons décrivent une hélice.

Interprétations

1. En absence d'un champ \vec{B} il n'y a pas de forces s'exerçant sur les électrons. (Le poids des électrons peut être négligé !) En vertu du principe d'inertie le mouvement des électrons est rectiligne et uniforme.
2. En présence d'un champ \vec{B} une force magnétique s'exerce sur les électrons et dévie constamment leur direction. Cette force est toujours perpendiculaire à la vitesse (elle-même tangente au cercle). En plus la force est perpendiculaire au champ \vec{B} . Cette force augmente avec l'intensité du champ \vec{B} et dépend également de la vitesse v des électrons.
3. Lorsque \vec{B} et \vec{v} sont parallèles il n'y a pas de force magnétique.
4. Nous n'interpréterons pas l'observation 4.

Conclusions

la modification de la trajectoire du faisceau d'électrons est due à l'action de la force de Lorentz.

2.2) Force de Lorentz :

1) Définition

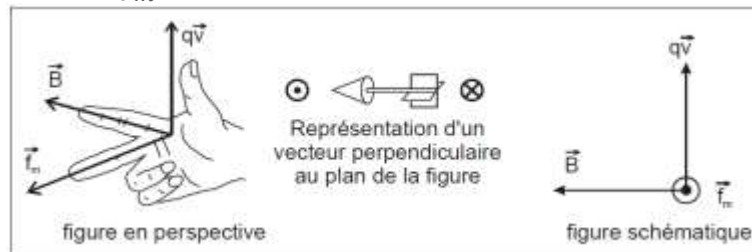
Une charge q qui se **déplace** avec une vitesse \vec{v} dans un champ magnétique caractérisé par le vecteur \vec{B} subit une force magnétique appelée **force de Lorentz** \vec{f}_m donnée par :

$$\vec{f}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

\vec{f}_m est le **produit vectoriel** de $q \vec{v}$ par \vec{B}

2) Caractéristiques de la force de Lorentz

- **Point d'application** : c'est la particule elle-même considérée comme ponctuelle
- **Direction** : perpendiculaire à $q \vec{v}$ et à \vec{B} , donc au plan formé par $q \vec{v}$ et \vec{B}
Sens : déterminé par la **règle des trois doigts de la main droite** :
 pouce : sens de $q \vec{v}$ (même sens que \vec{v} si $q > 0$; sens opposé à \vec{v} si $q < 0$)
 index : sens de \vec{B}
 majeur : sens de \vec{f}_m



- **Norme** : $f_m = |qvB \sin \alpha|$

où q est la charge (C)

v est la vitesse de la charge (m/s)

B est l'intensité (la norme) du vecteur champ magnétique (T)

α est l'angle formé par $q \vec{v}$ et \vec{B}

Remarque :

- La force de Lorentz est nulle si la charge est au repos ou si son vecteur vitesse est parallèle au vecteur champ.

2. 3) Etude théorique du mouvement dans le cas où la vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique :

A l'instant initial une particule de masse m et de charge électrique q pénètre avec la vitesse \vec{v}_0 dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} . On suppose que \vec{v}_0 est perpendiculaire à \vec{B} .

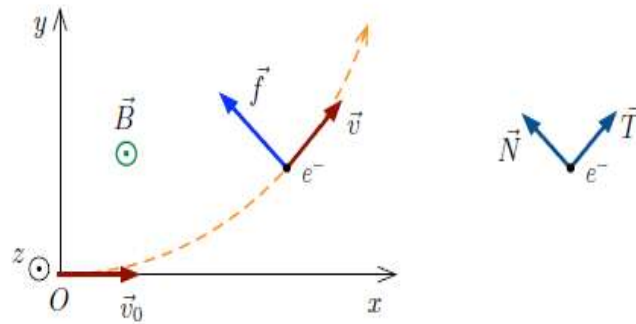


Figure 2.2 Force de Lorentz et base de Frenet

1) Expression de l'accélération

Système : particule chargée ;

Référentiel : terrestre (supposé galiléen) ;

Forces appliquées : la force de Lorentz \vec{f}_m en un point de la trajectoire où la vitesse de la particule est \vec{v} et le poids de la particule \vec{P} (négligeable devant \vec{f}_m).

En appliquant le théorème du centre d'inertie, on a : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{f}_m = m\vec{a}$

$$\Leftrightarrow q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$\vec{a} = \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{m}$$

L'accélération est perpendiculaire aux vecteurs vitesse et champ magnétique. Son sens dépend du signe de q .

2) Nature du mouvement

- Le mouvement est uniforme :

La force de Lorentz est à tout instant perpendiculaire au vecteur vitesse. Elle est donc normale à la trajectoire et ne travaille pas.

$$\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} ; \vec{f}_m \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{p}(\vec{f}_m) = \vec{f}_m \cdot \vec{v} = 0 \text{ or } \vec{p}(\vec{f}_m) = \frac{dE_C}{dt} = 0$$

$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \text{cte} \Rightarrow v = v_0 = \text{cte}$. La vitesse v est égale à la vitesse v_0 au point d'entrée dans le champ magnétique.

- Le mouvement est plan :

La figure 2.2 montre le repère orthonormé utilisé. Son origine coïncide avec la position de la particule à l'instant $t = 0$.

L'accélération est à tout instant perpendiculaire au vecteur champ ($\vec{a} \perp \vec{B}$), donc :

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow v_z = \text{cte}$$

Comme $v_{0z} = 0$ à l'instant $t = 0$, nous avons à tout instant :

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow z = \text{cte}$$

En considérant les conditions initiales, il vient $z = 0$.

Au cours du mouvement le vecteur \vec{v} reste dans le plan (\vec{N}, \vec{T}) : la trajectoire de la particule est située dans le plan orthogonal à \vec{B} passant par O et contenant \vec{v}_0 .

- La trajectoire est circulaire

Dans ce plan, nous allons exprimer le vecteur accélération dans la base de Frenet.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N} \quad , \text{ la vitesse est constante donc } \frac{dv}{dt} = 0 \text{ d'où } \vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

$$\vec{a} = \frac{q \vec{v} \wedge \vec{B}}{m} = \frac{v^2}{R} \vec{N} \Rightarrow \frac{|q|v_0 B}{m} = \frac{v_0^2}{R} \quad \text{d'où} \quad R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

Comme les grandeurs m , v_0 , $|q|$ et B sont constantes, le rayon R de courbure est constant. Le mouvement de la particule chargée est donc circulaire.

- Conclusion

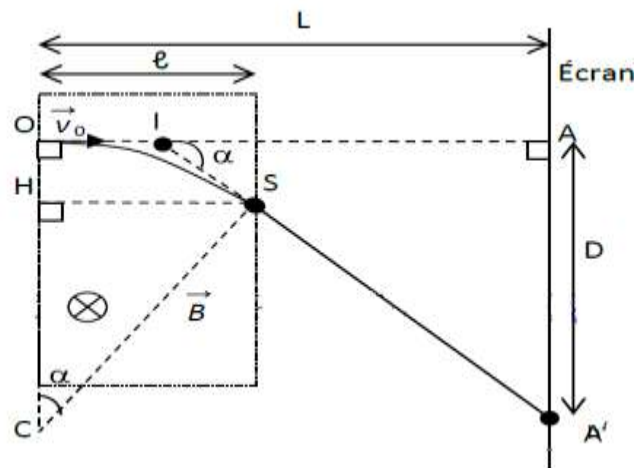
Une particule chargée entrant dans un champ magnétique avec une vitesse perpendiculaire au champ décrit un mouvement circulaire et uniforme dans un plan perpendiculaire au champ.

2. 4) Quantité de mouvement, vitesse angulaire, période de révolution :

- Quantité de mouvement : $P = mv = R|q|B$
- La vitesse angulaire est reliée à la vitesse linéaire par $\omega = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m}$
- La période est reliée à la vitesse angulaire par $T = 2\pi \frac{m}{|q|B}$

La période est indépendante de la vitesse de la particule et ne dépend que de sa nature et de l'intensité du champ magnétique.

2. 5) Déviations et déflexions magnétiques :



$l \ll L$ et α est très petit. En absence de champ les particules arrivent en A.

$\alpha = (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CS}) = (\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IA})$ sont deux angles à cotés perpendiculaire.

Pour le triangle HCS : $\sin \alpha = \frac{HS}{CS} = \frac{l}{R}$ comme $\alpha \leq 10^\circ \Rightarrow \alpha(\text{rad}) \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha$
 $\Rightarrow \alpha = \frac{l}{R}$ or $R = \frac{mv_0}{|q|B}$

d'où

$$\alpha_m = \frac{|q|Bl}{mv_0}$$

α_m est la déviation magnétique angulaire.

Pour le triangle A'IA : $\tan \alpha = \frac{AA'}{IA} = \frac{D}{L}$ comme $l \ll L \Rightarrow IA \approx OA = L$

Donc $\alpha = \frac{D}{L} \Rightarrow D = \frac{|q|BLl}{mv_0}$

C'est la déflexion magnétique sur l'écran.

Conclusion :

La déviation et la déflexion magnétiques sont proportionnelles au champ magnétique qui les a engendré.

La mesure de la déflexion magnétique sur l'écran permet de déterminer la charge massique $\left(\frac{q}{m}\right)$. Elle est utilisée dans les tubes récepteurs de télévision.

2. 6) Spectrographe de masse et cyclotron :

L'action d'un champ magnétique sur une particule chargée en mouvement et le mouvement qui en résulte est à la base de nombreuses applications : spectrographe de masse, cyclotron pour n'en citer que quelques unes.

- **Spectrographe de masse**

Les physiciens et les chimistes utilisent quotidiennement une application importante de la déviation des particules dans un champ magnétique : le spectrographe de masse.

Cet appareil permet de séparer des ions de masses différentes et donc d'analyser la composition atomique et isotopique de la matière.

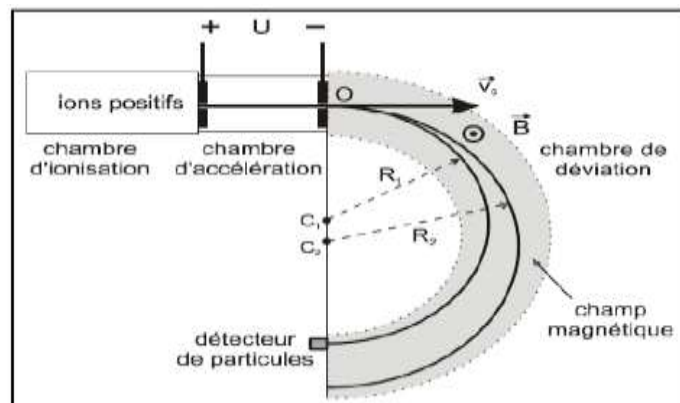


Figure 2.3

Chambre d'ionisation : On y produit des ions de même charge q mais de masses différentes.

Chambre d'accélération : A travers une première fente, les ions pénètrent dans cette chambre avec une vitesse quasi nulle. Ils sont accélérés par la tension $U > 0$ et sortent avec une vitesse

$$v_0 = \sqrt{(2|q|) \frac{U}{m}}$$

Chambre de déviation : Les ions sont déviés par un champ magnétique \vec{B} et on pour trajectoire des demi-cercle dont les rayons R_1 et R_2 dépendent des masses m_1 et m_2 .

$$R_1 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Um_1}{|q|}} \quad R_2 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Um_2}{|q|}}$$

Le rayon de la trajectoire augmente avec la masse.

Zone de réception : est la distance entre les deux points d'impact :

$$C_1C_2 = 2R_2 - 2R_1 = \sqrt{\frac{8U}{|q|B^2}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$$

• **Cyclotron**

Le cyclotron est un accélérateur de particules chargées comme des protons ou des deutérons.

Ces particules sont accélérées à grande vitesse dans le vide et servent de projectiles que l'on envoie sur des cibles de matière. Les collisions qui en résultent permettent d'étudier la structure de la matière.

Un cyclotron est constitué de deux parties creuses hémicylindriques (figure 1.18) dont la forme rappelle celle de la lettre D ; en raison de cette forme particulière, on les appelle « dés ».

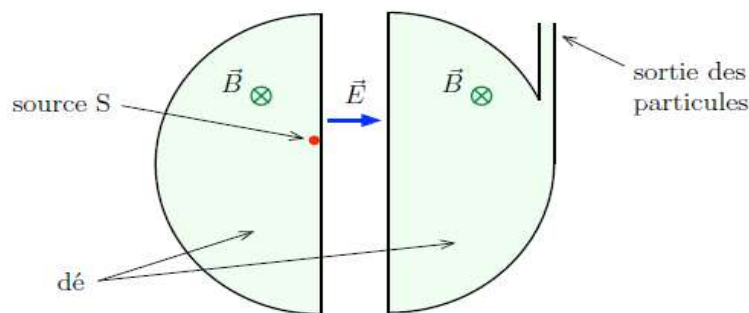


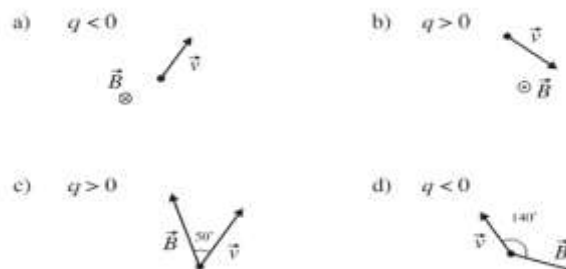
Figure 2.4

Un champ magnétique uniforme est appliqué perpendiculairement aux dés. Un champ électrique est établi entre les dés en leur appliquant une différence de potentiel. La source S de particules à accélérer est placée près du centre de l'appareil.

2. 7) Exercices :

Exercice 1 :

Déterminer dans les cas suivants la direction, le sens et l'intensité de la force de Lorentz si $v = 2 \cdot 10^4$ m/s, $B = 0,1$ T et $|q| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C :



Exercice 2 :

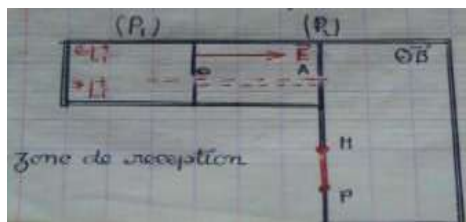
On considère un faisceau d'électrons homocinétique de vitesse 10000 km/s, dans le vide. Il aborde un champ magnétique uniforme orthogonal à la vitesse des électrons et d'intensité $1,1 \cdot 10^{-3}$ T.

- 1) Déterminer les caractéristiques de la force magnétique qui s'exerce sur les électrons ; sur un schéma indiqué les vecteurs vitesse et champ magnétique.
- 2) Déterminer la nature du mouvement des électrons sous l'action de cette force en précisant le plan de la trajectoire et le rayon R.
- 3) Calculer le temps mis par les électrons pour accomplir un tour complet sur la trajectoire.
- 4) Quel doit être la valeur de la vitesse pour que le rayon de la trajectoire soit égal à 8 cm.

Exercice 3 :

A l'aide d'un spectrographe de masse (figure) on veut séparer des ions lithium ${}^6\text{Li}^+$ et ${}^7\text{Li}^+$ de masses respectives m et m'. Les ions pénètrent en O dans un champ électrique uniforme créé par deux plaques conductrices où ils sont accélérés jusqu'en A.

- 1) \vec{V} et \vec{V}' sont les vitesses de sorties des ions du champ électrique. Etablir la relation $\frac{V}{V'} = \sqrt{\frac{m'}{m}}$.
- 2) Les ions pénètrent en A dans un champ magnétique orthogonal à v et v' et, parviennent dans la zone de réception MP indiquée. Exprimer MP en fonction de (B, m, m', U et e) ; e étant la charge élémentaire.
- 3) Calculer MP sachant que : $U = 10^4$ v ; $B = 2 \cdot 10^{-1}$ T ; $m = 6u \cdot m_a$; $m' = 7u \cdot m_a$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C ; $1u \cdot m_a = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.



3) Loi de LAPLACE :

a) Etude expérimentale :

- **Expérience des rails de Laplace**

Un conducteur mobile est placé sur deux rails horizontaux connectés à un accumulateur, et dans le champ magnétique d'un aimant en U.

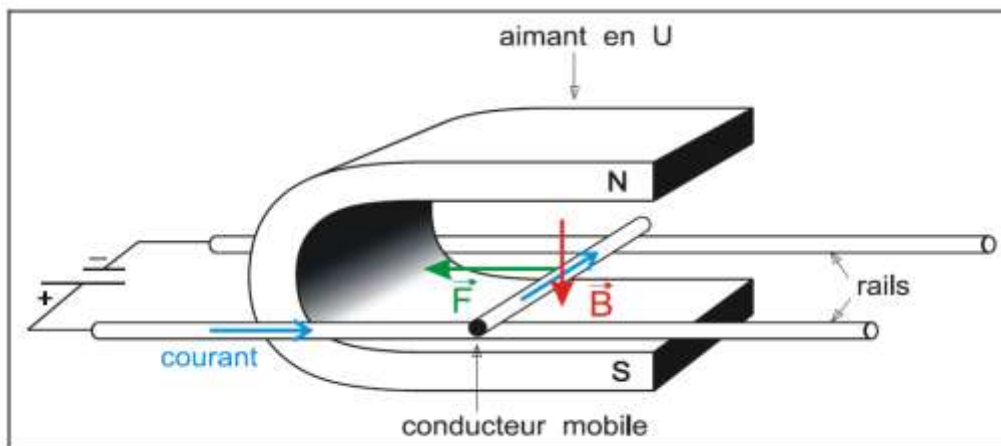


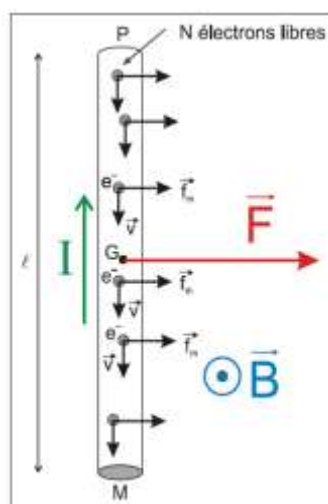
Figure 3.1

• **Observations :**

- Lorsqu'on établit un courant électrique dans le circuit, le conducteur se met en mouvement.
- La direction du déplacement est parallèle au rails.
- Le sens du déplacement change si :
 - le sens du courant électrique est inversé ;
 - les pôles de l'aimant sont permutés.

• **Interprétation**

Le passage du courant dans le conducteur est dû à un déplacement de porteurs de charge qui sont des électrons. Sur chaque électron s'exerce une force de Lorentz. Donc le conducteur est soumis à un ensemble de forces réparties dont la résultante est appelé force de Laplace.



b) Loi de LAPLACE :

• **Enoncé :**

Un conducteur rectiligne de longueur l parcouru par un courant d'intensité I placé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} est soumis à la force électromagnétique appelé force de Laplace.

$$\vec{F} = I \vec{l} \wedge \vec{B}$$

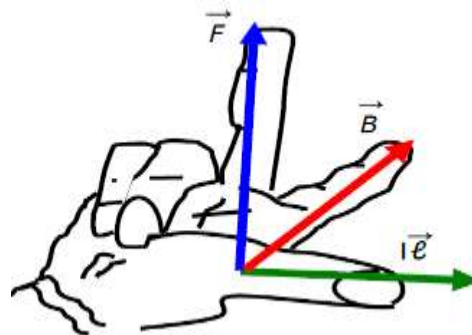
Où \vec{l} est un vecteur de longueur l , parallèle au conducteur et orienté dans le sens du courant.

Remarque :

$$\vec{F} = \sum \vec{f}_m = \sum q \vec{v} \wedge \vec{B} = - \sum (e) \vec{v} \wedge \vec{B} = \sum (e) \vec{v}_i \wedge \vec{B} = Q \vec{v}_i \wedge \vec{B} = I \vec{l}_i \wedge \vec{B} = I \vec{l} \wedge \vec{B}$$

• **Caractéristiques de la force de Laplace :**

- **Son point d'application :** est situé au milieu de la portion de conducteur soumis au champ magnétique ;
- **Direction :** \vec{F} est perpendiculaire à \vec{l} et à \vec{B} ;
- **Sens :** tel que le trièdre $(I \vec{l}, \vec{B}, \vec{F})$ soit direct (règle des trois doigts de la main droite);
 - pouce* → sens de $I \vec{l}$
 - index* → sens du champ magnétique \vec{B}
 - majeur* → sens de la force de Laplace \vec{F}



- **Norme :** $F = I l B |\sin \alpha|$, où α est l'angle formé par \vec{l} et \vec{B} .

3. 1) Action d'un champ magnétique sur un circuit :

a) Action sur une bobine :

Soit une bobine ou un cadre métallique traversé par un courant d'intensité I , suspendu à une ficelle souple. Choisissons un vecteur unitaire \vec{n} dont la direction et l'axe de la bobine est le sens de S vers N. plongeons entièrement la bobine dans un champ magnétique uniforme \vec{B} (figure 3.2 a). La bobine tourne de sorte qu'à sa position finale le vecteur \vec{n} tend à devenir colinéaire et de même sens que \vec{B} (figure 3.2b).

b) Notion de flux magnétique :

Soit un circuit plan fermé (spire par exemple) pour lequel on définit arbitrairement une orientation positive. Déterminons pour ce contour limitant à la surface (S) un vecteur surface $\vec{S} = S\vec{n}$ caractérisé par :

- sa direction orthogonale au plan du contour ;
- son sens de la face sud vers la face nord ;
- sa norme égale à la surface limitée S exprimée en m^2 ;
- son origine le centre du contour.

Définition :

Le flux magnétique Φ à travers un contour délimité par une surface S, plongé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} est le nombre de lignes de champ magnétiques qui traverse ce contour fermé. Son expression est :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B S \cos\theta$$

où θ est l'angle formé par \vec{B} et \vec{S} .

L'unité de flux magnétique est le *weber* (Wb) : $1\text{Wb} = 1\text{Tm}^2$.

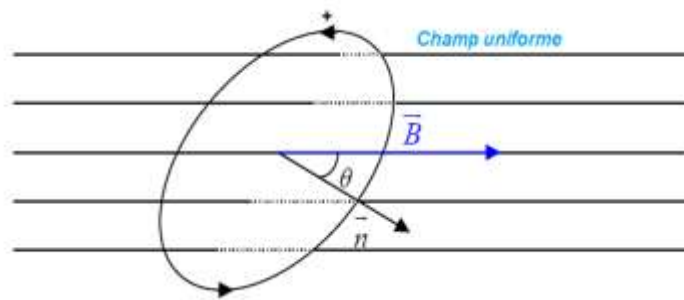


Figure 3.3 Flux magnétique à travers une surface plane

Remarques :

- si $\vec{B} \parallel \vec{S}$ et de sens contraire : $\Phi = - BS$;
- Pour calculer le flux magnétique à travers une bobine de N spires, on multiplie par N le flux traversant une seule spire.

$$\Phi_T = N\Phi = NBS\cos \theta$$

c) Flux maximal :

Le flux magnétique est maximal pour $\theta = 0^\circ$: $\Phi_{max} = NBS$

Règle du flux maximal :

Un circuit plan, libre de se déplacer, placé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} tant à se déplacer de façon que le flux magnétique qui le traverse soit maximal ($\vec{B} \parallel \vec{S}$ et de même sens). Le sens du parcours choisi étant celui du courant.

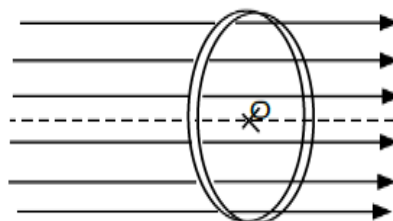


Figure 3.4

d) Applications :

Les appareils de mesures en courant continu

L'ampèremètre et le voltmètre magnétoélectriques sont basés sur un cadre métallique mobile qui tourne sous l'action des forces de Laplace.



Figure 3.5

Le moteur électrique

Il comprend un aimant fixe (le stator) et un électroaimant qui tourne (le rotor) sous l'action des forces de Laplace.

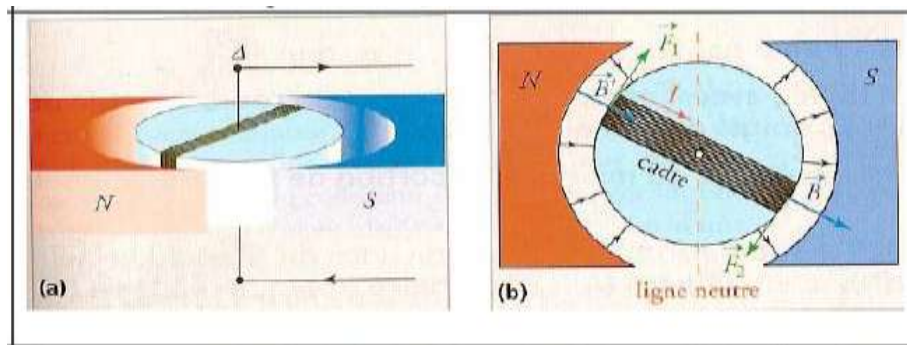


Figure 3.6

Le haut-parleur électrodynamique

Le haut-parleur est une bobine de membrane, placé à l'intérieur d'un aimant particulier, cet aimant crée un champ magnétique uniforme \vec{B} et radical (\vec{B} parallèle au plan des spires). Lorsque la bobine est parcourue par un courant d'intensité I , chaque élément de longueur l (assimilable à un segment de droite) appartenant à une spire subit la force de Laplace perpendiculairement au plan de la spire. Suivant que le sens de I soit entrant ou sortant, la membrane est attirée ou repoussée. Si I varie alternativement la membrane vibre et émet un son de même fréquence que le courant alternatif.

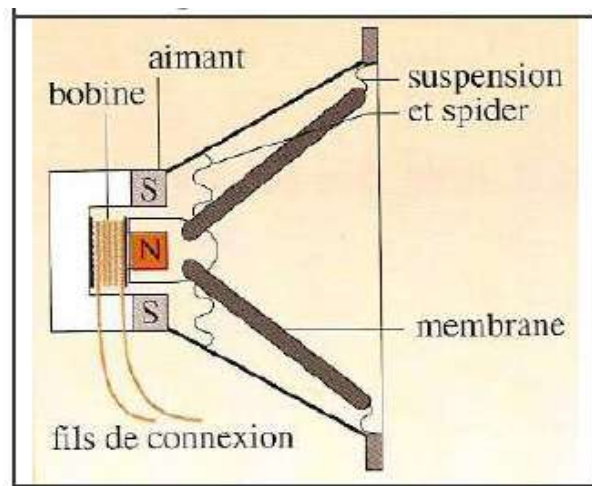


Figure 3.7

La balance de Cotton

C'est un dispositif utilisé pour mesurer l'intensité du champ magnétique.

On pose $NP = l$. Une surcharge de m est placée dans une nacelle et déséquilibre la balance.

Un courant de sens convenable est envoyé dans le conducteur MNPQ. On règle son intensité pour rétablir l'équilibre.

Compte tenu de la forme des conducteurs MN et PQ (arcs de cercle de centre O), les moments forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 sont nuls. La condition d'équilibre s'écrit :

$$\mathcal{M}(\vec{R}) + \mathcal{M}(\vec{P}_0) + \mathcal{M}(\vec{F}) + \mathcal{M}(\vec{F}_1) + \mathcal{M}(\vec{F}_2) + \mathcal{M}(\vec{P}) = 0, \text{ soit } l\ell B d = mgd \text{ d'où } B = \frac{mg}{l\ell}$$

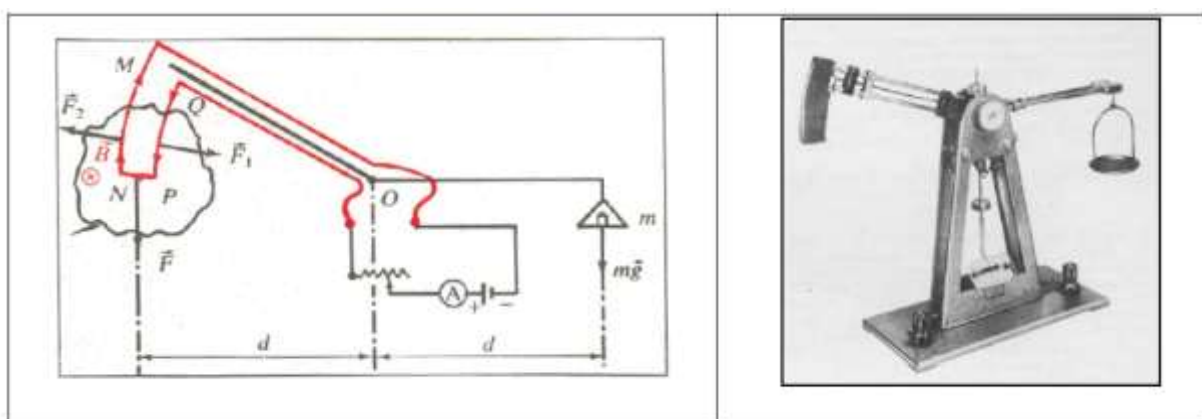
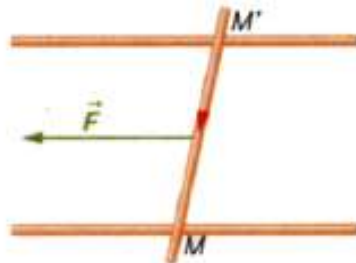


Figure 3.8

3. 2) Exercices :

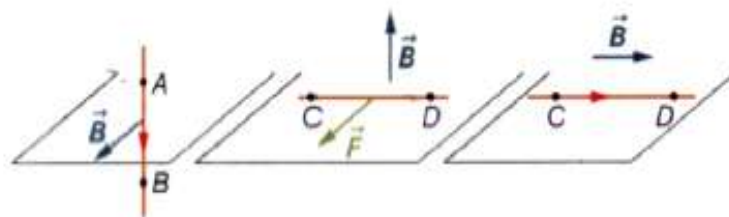
Exercice 1 :

La direction du champ magnétique uniforme \vec{B} est verticale, préciser, en le justifiant, quel est son sens.



Exercice 2 :

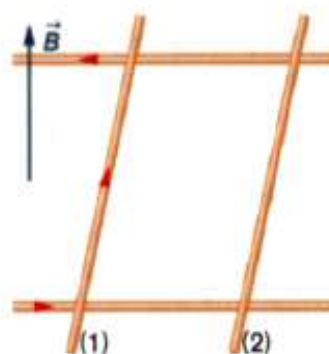
En appliquant dans chaque cas la loi de Laplace, trouver les caractéristiques manquantes.



Exercice 3 :

Sous l'effet de la force de Laplace, la tige se déplace de (1) en (2).

1. Représenter la force de Laplace.
2. Exprimer le travail de la force de Laplace au cours du déplacement.



Exercice 4 :

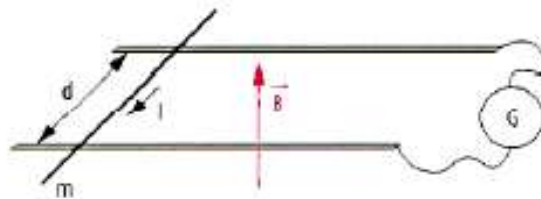
Une tige conductrice de longueur $l = 10$ cm, parcourue par un courant d'intensité

$I = 3A$, fait un angle de 65° avec la direction d'un champ magnétique uniforme de valeur $B = 150mT$. Calculer la valeur de la force de Laplace qui s'applique sur la tige.

Exercice 5 :

Un conducteur de masse m glisse sans frottement sur deux rail horizontaux écartés d'une distance d et placés dans un champ magnétique uniforme. Un courant d'intensité I circule dans le conducteur et dans les rails.

Déterminer le sens et la valeur de la vitesse du conducteur en fonction du temps s'il est au repos à l'instant $t = 0$.



Exercice 6 :

Un solénoïde de 40cm de longueur comporte 750 spires de 2cm de diamètre, traversé par courant de 2A.

- 1) Calculer la valeur B_0 du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde ;
- 2) Quel est le flux magnétique à travers la section droite et quel est le flux total à travers la bobine.

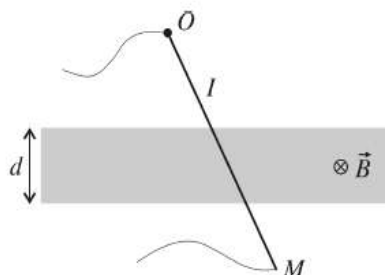
Exercice 7 :

Calculer la puissance développée par la force de Laplace qui déplace une tige de 7 cm, parcourue par un courant d'intensité $I = 5A$, dans un champ magnétique perpendiculaire à la tige de valeur $B = 220mT$, d'une distance de 10 cm en 1,2 s.

Exercice 8 :

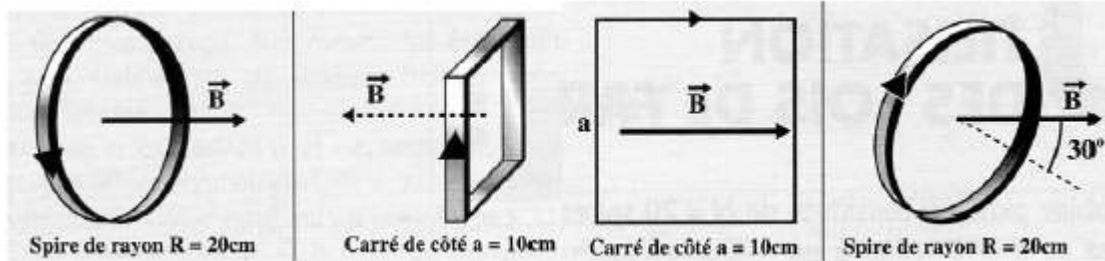
Un conducteur en cuivre de masse $m = 100$ g, de longueur $OM = 25$ cm, mobile autour de O , est placé entre les pôles d'un aimant en U. Il est parcouru par un courant électrique d'intensité $I = 2A$. La valeur du champ magnétique uniforme qui s'étend sur $d = 4$ cm est $B = 0,8T$.

1. Représenter sur une figure les forces qui agissent sur le conducteur.
2. Déterminer le sens du courant électrique.
3. Calculer, à l'équilibre, l'angle θ entre le conducteur et la verticale.



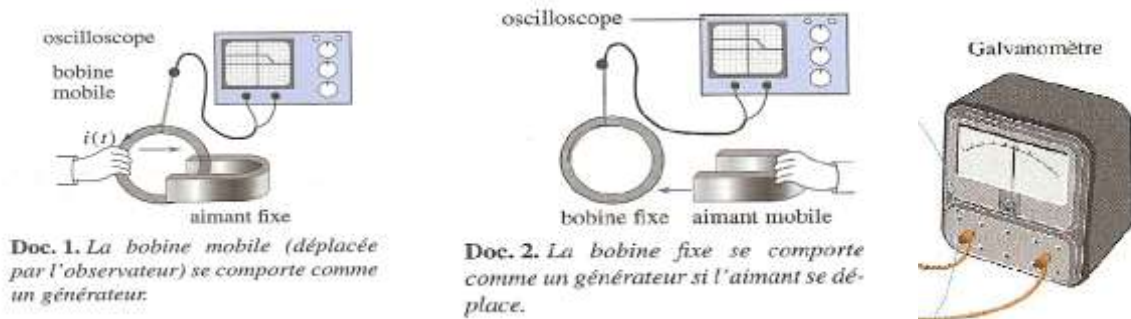
Exercice 9 :

Calculer le flux dans chacun des cas représentés sur les figures. On supposera le champ \vec{B} uniforme et de valeur égale à 10mT.



4) Induction électromagnétique :

Un courant électrique produit un champ magnétique. Le processus inverse est-il également possible ? Joseph Henry (en 1830) et Michael Faraday (en 1831) réalisèrent indépendamment des expériences qui montrèrent qu'il est possible de produire des effets électriques à partir de champs magnétiques. Ce phénomène, appelé *induction électromagnétique*, fut une des majeures découvertes en vue de la production de l'électricité utilisée dans la vie de tous les jours.



Doc. 1. La bobine mobile (déplacée par l'observateur) se comporte comme un générateur.

Doc. 2. La bobine fixe se comporte comme un générateur si l'aimant se déplace.

4. 1) Algébrisation des forces électromotrices (f.é.m) :

a) Tension et intensité algébriques :(convention récepteur)

- **Tension algébrique**

Soit un dipôle (AB) orienté de A vers B. La différence de potentiel (d.d.p) entre les deux points A et B du dipôle est algébrique. On la représente par une flèche dont la pointe est tournée vers A : $u_{AB} = - u_{BA} = (V_A - V_B)$



- **Intensité algébrique**

L'intensité i du courant électrique traversant un dipôle (AB) est algébrique. Elle est accompagnée du signe (+) ($i > 0 \Rightarrow u_{AB} > 0$) quand elle circule dans le sens positif de l'orientation choisie du dipôle, dans le cas contraire elle est accompagnée du signe (-) ($i < 0 \Rightarrow u_{AB} < 0$).

b) Loi d'ohm pour un conducteur ohmique :

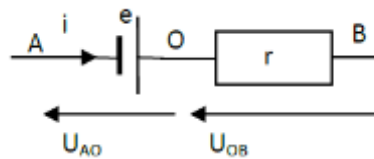
La tension ou (d.d.p) aux bornes d'un conducteur de résistance R est égale au produit de cette résistance R par l'intensité algébrique i du courant qui le traverse.

$$u_{AB} = Ri$$

Cette tension est algébrique

c) Loi d'ohm généralisée :

Un générateur peut être représenté par une f.é.m. et une résistance interne r.



$u_{AB} = u_{AO} + u_{OB} = -e + ri$ donc la tension positive est $u = e - ri$

d) Force électromotrice d'un générateur :

Elle est comptée positivement ($e > 0$) si le générateur tend à faire circuler le courant dans le sens positif de l'orientation choisie. Elle est comptée négativement ($e < 0$) s'il tend à faire circuler le courant dans le sens contraire de l'orientation choisie. La force électromotrice d'un générateur est donc algébrique.

4. 2) Induction électromagnétique :

a) Etude expérimentale :

- **Expérience :**
Déplacement relatif de l'inducteur et de l'induit

➤ Bobine fixe – aimant mobile

Lorsqu'on approche l'aimant de la bobine, le galvanomètre indique le passage d'un courant qui s'annule dès que le déplacement cesse. Eloignons l'aimant de la bobine

le courant circule dans celle-ci en sens inverse. L'intensité du courant est d'autant plus grande que le déplacement est plus rapide.

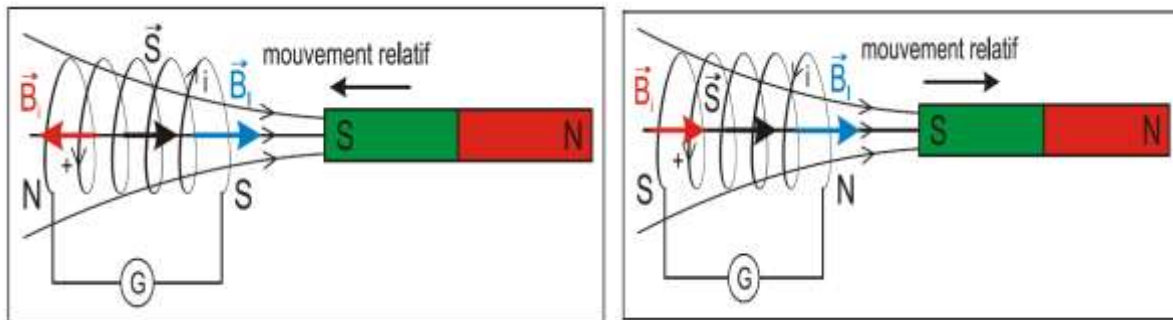


Figure 4.1

➤ Bobine mobile – aimant fixe

On observe les mêmes faits expérimentaux.

Le courant qui apparaît dans la bobine alors que le circuit ne comporte pas de générateur est le courant induit. La bobine dans laquelle circule le courant induit est l'induit. La source de champ magnétique (l'aimant) est l'inducteur. Ce phénomène est appelé induction électromagnétique.

• Interprétation :

- Dans l'expérience, en déplaçant l'aimant le nombre de lignes de champ qui traverse la bobine augmente ou diminue. Donc il y a variation du flux magnétique à travers la bobine. Cette variation de flux magnétique est la cause du courant induit.
- Quand on déplace l'aimant ou la bobine, il apparaît une tension aux bornes de la bobine : c'est une **fem induite**.
Si on ferme la bobine, la fem induite engendre un courant : c'est un **courant induit**.

• Conclusion :

Dans toute variation du flux magnétique à travers un circuit fermé s'accompagne de la production d'un courant induit dans le circuit. Le courant induit apparaît dès que commence les variations du flux et disparaît dès que cesse cette variation : la cause et l'effet ont la même durée.

b) Loi de Lenz :

Le phénomène d'induction électromagnétique est tel que par ses effets il s'oppose à la cause qui lui donne naissance.

Exemple 1 : expérience des « rails de Laplace »

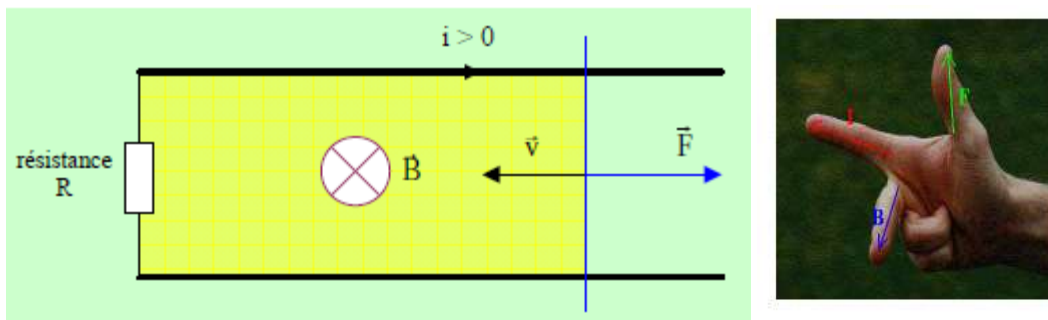


Figure 4.2

Le courant induit provoque dans le rail une force de Laplace qui s'oppose au mouvement de celui-ci.

Exemple 2 :

Si on approche un pôle Nord d'un aimant devant une bobine, le courant induit produit une face Nord qui tend à repousser l'aimant.

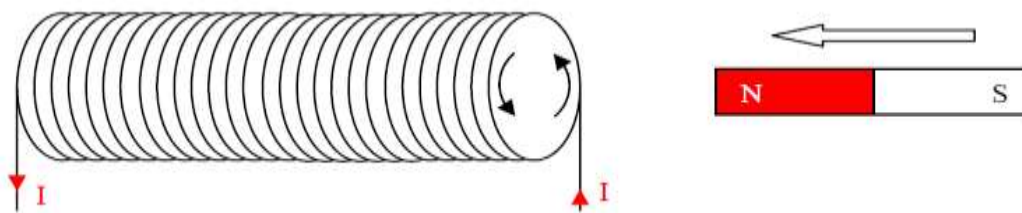


Figure 4.3

Exemple 3 :

Si on éloigne un pôle Nord d'un aimant devant une bobine, le courant induit produit une face Sud qui tend à attirer l'aimant.

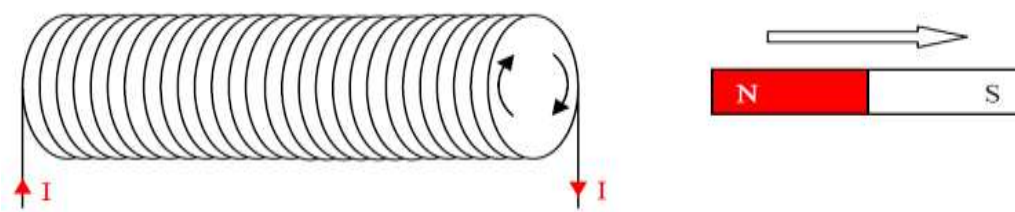


Figure 4.4

Remarque : on utilise la loi de Lenz pour faire découvrir le sens du courant induit.

4. 3) Force électromotrice d'induction :

a) Etude expérimentale :

Déplaçons lentement un aimant droit vers une bobine fixe, l'aiguille du galvanomètre dévie faiblement. Ensuite, déplaçons rapidement l'aimant vers la bobine fixe, on constate que la déviation est plus grande : l'intensité du courant induit est nettement supérieure. Alors la force électromotrice et le courant induit sont d'autant plus grands que la variation de Φ dans le temps est rapide.

b) Relation de Faraday- Lenz :

- **Loi de Faraday**

La f.é.m. induite (instantanée) dans un circuit est égale à l'opposé de la dérivée rapport au temps du flux inducteur à travers ce circuit.

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

le signe moins (-) traduit la loi de Lenz

- **Signe de e**

Il découle de la loi de Lenz.

- Si $e > 0 \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} < 0$: le courant induit circule dans le sens positif et s'oppose à la diminution du flux.
- Si $e < 0 \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} > 0$: le courant induit circule dans le sens négatif et s'oppose à l'augmentation du flux.

- **Exemple : expérience des « rails de Laplace »**

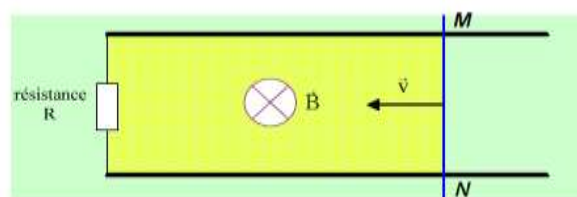
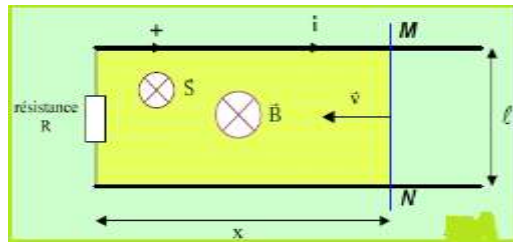


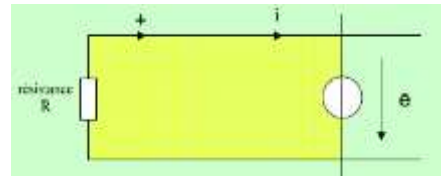
Figure 4.5

- ❖ Si nous déplaçons la tige MN avec une vitesse constante \vec{v} parallèle aux rails, le flux magnétique dans le circuit varie en donnant naissance à la fem induite e . Puisque le circuit est fermé, donc la fem induite engendre un courant induit dans le circuit de la tige et des rails.
- ❖ Pendant le déplacement la tige MN reçoit du travail mécanique et fournit au circuit du travail électrique donc elle se comporte comme un générateur.



$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = Blx$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(Blx)}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv \Rightarrow e = Blv$$



Autre méthode :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ or } \Phi = BS$$

A l'instant $t = 0$; $\Phi_0 = BS_0$ et à une date t ; $\Phi(t) = B(S_0 + lx) = BS_0 + Blx$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi_0}{dt} - Bl \frac{dx}{dt} = -Blv \Rightarrow e = Blv$$

- **Intensité du courant induit**

Si R est la résistance totale du circuit, l'intensité du courant induit est donnée par la loi de Pouillet :

$$i = \frac{\sum e - \sum e'}{\sum R} = \frac{e}{R} \Rightarrow i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \|i\| = \frac{1}{R} \left\| \frac{d\Phi}{dt} \right\|$$

- **Tension induite en circuit ouvert**

Elle est égale à la force électromotrice induite.

- **Quantité d'électricité induite**

Le courant induit i circule pendant une durée dt et chaque section du conducteur est traversée par la quantité d'électricité $dq = i dt$.

En fonction de la variation du flux embrassé, cette quantité d'électricité peut s'écrire :

$$dq = \frac{e}{R} dt = -\frac{d\Phi}{R}$$

Si le déplacement d'un circuit dure de l'instant t_1 à l'instant t_2 et que les flux embrassés à ces instants soient respectivement Φ_1 et Φ_2 , la quantité Q d'électricité induite est :

$$Q = \frac{|\Delta\Phi|}{R} = \frac{|\Phi_2 - \Phi_1|}{R} \quad Q \text{ est en coulombs}$$

4. 4) Applications de l'induction électromagnétique :

a) Transformateur

Un transformateur est constitué de deux bobines enroulées sur un même cadre en fer (figure 4.6).

La bobine primaire de N_1 spires est reliée à un générateur qui tension alternative U_1 . Un récepteur est branché à la bobine secondaire de N_2 spires.

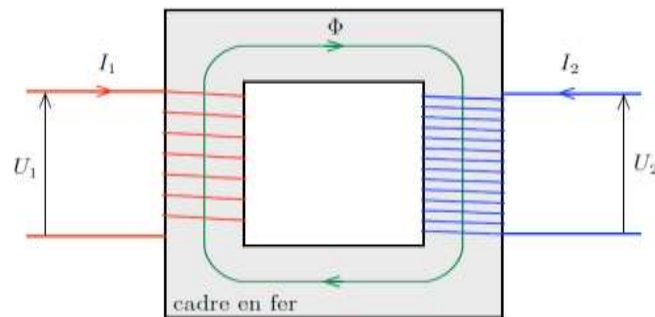


Figure 4.6 Schéma d'un transformateur idéal

Le rôle du cadre est de canaliser les lignes de champ magnétique et de créer un circuit magnétique dans lequel le flux magnétique Φ est le même à travers toute section du cadre.

Le flux variable créé à travers la bobine primaire est transmis à travers la bobine secondaire.

La variation du flux crée un courant induit dans la bobine secondaire et une tension U_2 à ses bornes.

Lorsqu'on néglige les fuites de flux magnétique et les pertes par effet Joule dans les bobines, le rapport des tensions vérifie la relation :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Selon le rapport du nombre de spires, un transformateur permet d'élever ou d'abaisser une tension alternative.

En négligeant les pertes et les fuites, la puissance électrique est transmise intégralement.

Soient respectivement I_1 et I_2 les intensités des courants dans les circuits primaire et secondaire.

L'égalité des puissances permet d'écrire :

$$P_{\text{él}2} = P_{\text{él}1} \implies U_2 I_2 = U_1 I_1$$

d'où le rapport des intensités :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Le rapport des intensités est l'inverse du rapport des tensions.

b) Alternateur

Un *alternateur* est une machine rotative qui convertit l'énergie mécanique fournie au rotor en énergie électrique. Plus de 95% de l'énergie électrique est produite par des alternateurs.

- **Expérience :**

Un aimant entraîné par un moteur à vitesse réglable tourne devant une bobine reliée à une lampe. Pour visualiser la tension aux bornes de la bobine on y branche un oscilloscope en parallèle (figure 4.7).

- **Observations :**

- ❖ Il apparaît une tension aux bornes de la bobine. On constate que cette tension varie de façon sinusoïdale en fonction du temps. C'est une tension *alternative*.
- ❖ Lorsqu'on augmente la vitesse de rotation de l'aimant, la fréquence de variation de la tension augmente aussi de même que sa valeur maximale.

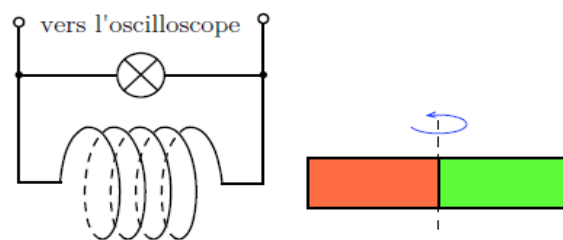


Figure 4.7 Principe de fonctionnement d'un alternateur

- **Interprétation :**

Le flux à travers la bobine varie lorsque l'aimant tourne. Cette variation crée un courant induit dans le circuit et une tension aux bornes de la bobine. Plus la rapidité de la variation du flux est grande, plus la f.é.m. est importante.

c) Courants de Foucault

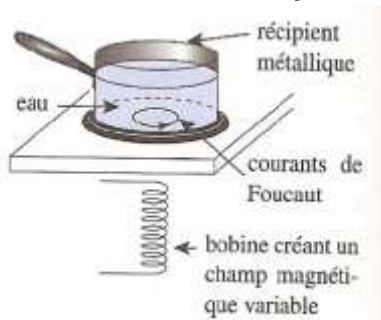
- **Mise en évidence des courants de Foucault**

On utilise à nouveau un aimant que l'on laisse tomber dans un épais tube de cuivre (si besoin est, on peut utiliser deux tubes emboîtés l'un dans l'autre). On fixe ce tube perpendiculairement au sol. On y laisse tomber simultanément un aimant et un autre petit bout de cuivre. On observe alors que si le bout de cuivre ressort du tube rapidement (une à deux secondes), l'aimant met beaucoup plus de temps (on compte jusqu'à 9 secondes).

On explique cela par l'apparition de courants de Foucault au sein du tube au passage de l'aimant. Ces courants créent eux-mêmes un champ magnétique opposé à celui de l'aimant et qui tend donc à le ralentir.

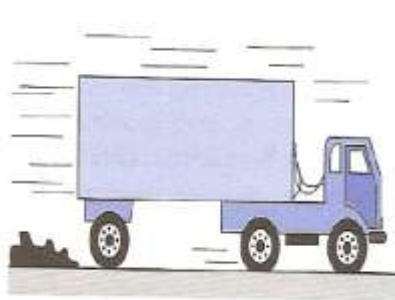
Ce principe est communément utilisé pour freiner des appareils. Cette fois c'est un électroaimant (donc contrôlable) qui est fixé et va ralentir le reste de l'appareil. On retrouve ce système dans certains trains comme freinage principal ou d'urgence. Ce genre de système ne demande en effet que très peu de réglages et, comme il n'y a aucun contact, il ne s'use pratiquement pas.

Leur inconvénient majeur est l'échauffement qu'ils produisent par effet joule.



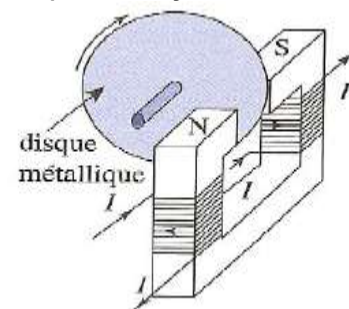
Principe d'une plaque à induction : des courants apparaissent dans le récipient métallique soumis à un champ magnétique variable.

Figure 4.8



Freinage par induction pour certains poids lourds : des courants de Foucault apparaissent dans une pièce (solidaire des roues) en mouvement dans un champ magnétique.

Figure 4.9



Si aucun courant ne passe dans l'électro-aimant, le disque tourne librement ; dès que l'électro-aimant est excité, le disque est freiné.

Figure 4.10

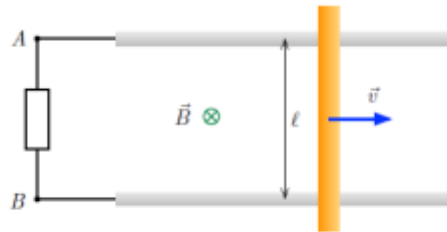
4. 5) Exercices :

Exercice 1 :

Une tige en cuivre se déplace à la vitesse constante \vec{V} sur des rails placés dans un champ magnétique uniforme \vec{B} . Les rails, distants de l , sont reliés à une résistance.

- Expliquer pourquoi un courant induit apparaît dans le circuit. Déterminer le sens du courant.

- Appliquer la loi de Faraday pour calculer la tension U_{AB} aux bornes de la résistance en fonction de B , l et v .
- Calculer la tension si $B = 200\text{mT}$, $v = 1,5\text{m/s}$ et $l = 10\text{ cm}$.



Exercice 2 :

Les extrémités d'une bobine de 1000 spires de 5 cm de rayon sont reliées à un galvanomètre ; la bobine est amenée en 0,5 seconde dans un champ uniforme dont les lignes d'induction sont parallèles à son axe et dont le vecteur induction magnétique a pour intensité $B = 0,01\text{T}$; calculer l'intensité moyenne du courant induit sachant que la résistance du circuit est 50 ohms.

Réponse : $I \approx 3,14 \cdot 10^{-3}\text{ A}$

Exercice 3 :

Sur deux rails conducteurs rectilignes parallèles situés dans un plan horizontal peut glisser une tige conductrice MN qui leur est perpendiculaire. Le tout est immergé dans un champ magnétique vertical dont l'induction magnétique a une intensité $B = 0,5\text{ T}$ et est dirigée vers le haut. Sauf dans la deuxième partie du problème, les extrémités des rails sont reliées aux pôles + et - d'une batterie d'accumulateurs de f.e.m. $E_o = 6\text{ volts}$, et le circuit a une résistance constante $R = 2\text{ ohms}$. L'écartement des rails est $a = 20\text{ cm}$.

- 1) Quelle est la force électromagnétique qui s'exerce sur la tige MN supposée immobile ? Quel est le travail de cette force lorsqu'on déplace MN de $x = 1\text{ cm}$?
- 2) La batterie d'accumulateurs est retirée du circuit ; le circuit, fermé de nouveau, ayant encore la résistance $R = 2\text{ ohms}$, on déplace MN avec la vitesse $v = 5\text{ m/s}$. Calculer l'intensité du courant dans le circuit.
- 3) Même question, la batterie étant rétablie (on distinguera les deux sens de déplacement possible pour MN).

Réponses : 1) $F = 0,3\text{ N}$; $W = 0,003\text{ joule}$. 2) $I = 0,25\text{ A}$. 3) $I = 2,75\text{ A}$ ou $I = 3,25\text{ A}$.

5) Auto-Induction électromagnétique :

a) Etude expérimentale

Mise en évidence expérimentale du phénomène d'auto-induction

Avec un générateur de courant continu, un interrupteur, deux lampes identiques, un conducteur ohmique de résistance R et une bobine de même résistance que le conducteur, réalisons le montage ci-dessous.

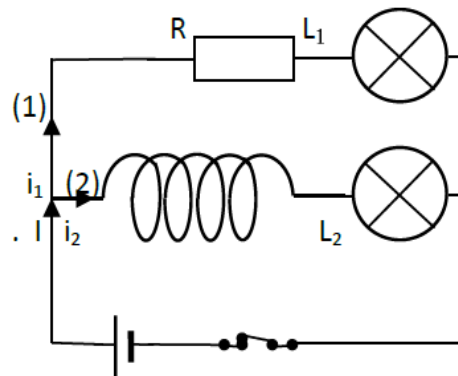


Figure 5.1

- **Influence de la bobine dans le circuit**

- Si on ferme l'interrupteur, La lampe L_1 s'allume instantanément mais La lampe L_2 s'allume progressivement.
- Si on ouvre l'interrupteur, La lampe L_1 s'éteint très tôt mais La lampe L_2 s'éteint progressivement.

La bobine est donc la cause du retard à l'établissement ou l'annulation du courant dans la branche 2.

Définition

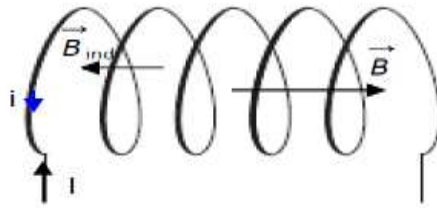
Une bobine placée dans un circuit s'oppose à l'établissement et à l'annulation du courant : c'est le phénomène d'auto-induction.

- **Interprétation**

- ❖ A la fermeture le courant est établi dans le circuit. Dans la branche 2 le courant varie de $I = 0$ à I , le champ magnétique induit créé par la variation de courant à tendance à s'opposer au courant qu'on veut lui imposer d'où un retard à l'établissement du courant dans la branche 2. Comme c'est le courant qui crée le champ magnétique qui lui-même le fait varier.
- ❖ A l'ouverture de l'interrupteur le courant établi dans la branche 2 passe de la valeur I à 0 , le champ magnétique créé par ce courant à tendance à s'opposer à la variation qu'on veut lui imposer, la bobine produit alors un *courant induit* de même sens pour compenser la diminution du courant déjà existant dans la branche. Comme le circuit est ouvert ce *courant induit* se superpose au courant déjà existant et la lampe éclair vivement avant de s'éteindre définitivement.

Remarque :

Lorsque i varie, le champ magnétique créé par le courant varie dans le circuit, donc le flux propre à travers le circuit varie, ce qui engendre une f.é.m. induite qui par ses effets va s'opposer à la cause qui lui a donné naissance (loi de Lenz) : c'est le phénomène d'auto-induction.



- **Visualisation à l'oscilloscope**



Figure 5.2

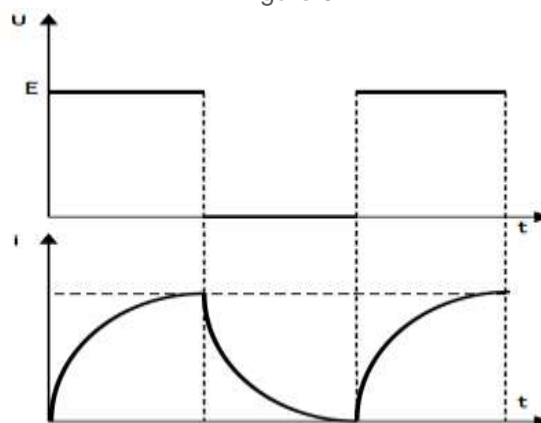


Figure 5. 3 Tension appliquée et courant obtenu.

Nous observons alors deux régimes : le régime transitoire de courte durée (RT) et le régime permanent (RP).

Lorsque la tension aux bornes du générateur est maximale, l'intensité du courant n'atteint pas immédiatement sa valeur maximale. De même si la tension est nulle, le courant i diminue progressivement avant de s'annuler.

b) Flux propre et inductance

- **Flux propre**

Définition : c'est le flux magnétique envoyé par un courant à travers son propre circuit. Il est donc proportionnel à l'intensité du courant.

- **Inductance d'une bobine**

Définition :

L'inductance (L) d'un circuit électrique est le quotient du flux propre total à travers le circuit par le courant qui y circule.

$$L = \frac{\Phi}{i}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \text{ en webers} \\ i \text{ en ampères} \\ L \text{ en henrys (H)} \end{array} \right.$$

L est appelé auto induction ou inductance ou coefficient de self inductance ou self. L ne dépend que de la géométrie du circuit.

Considérons un solénoïde de rayon R et de longueur l comportant N spires et parcouru par un courant variable i.

$$\Phi = Li = NBS \Rightarrow L = \frac{NBS}{i} \text{ or } B = \mu_0 ni = \mu_0 \frac{N}{l} i$$

$$L = N^2 \mu_0 \frac{S}{l} \Rightarrow \boxed{L = \frac{N^2 \mu_0 \pi R^2}{l}}$$

c) Loi de Faraday-Lenz

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (Li) = -L \frac{di}{dt} \Rightarrow \boxed{e = -L \frac{di}{dt}}$$

d) Tension aux bornes d'une bobine

Si la résistance de la bobine n'est pas négligeable, celle-ci peut-être considérée comme l'association en série d'un conducteur ohmique et d'une bobine de résistance nulle.

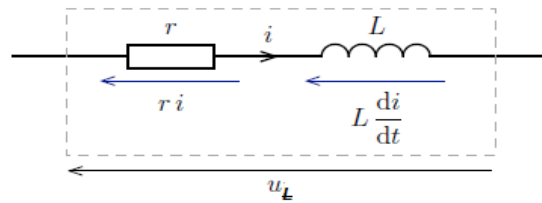


Figure 5.4

$$U_L = ri - e = ri + \frac{Ldi}{dt} \Rightarrow \boxed{U_L = ri + \frac{Ldi}{dt}}$$

Remarques :

- Dans le cas où la bobine est une inductance pure, sa résistance est nulle et la tension à ses bornes s'écrit :

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

- En régime permanent, le courant est constant ($i = \text{cte}$), la tension aux bornes de la bobine s'écrit :

$$u_L = ri$$

La bobine se comporte comme un conducteur ohmique.

e) Energie magnétique emmagasinée dans une bobine

La bobine possède de l'énergie magnétique E_L lorsqu'elle est parcourue par un courant électrique. Cette énergie est égale au travail électrique que doit effectuer le générateur lors de l'établissement de ce courant.

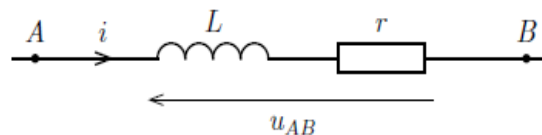


Figure 5.5 Bobine traversée par un courant

La puissance électrique P fournie par le générateur pour faire circuler un courant d'intensité i de A vers B (figure 5.5) à travers la bobine est :

$$P = u_{AB} i.$$

Avec la loi d'Ohm pour une bobine :

$$u_{AB} = r i + L \frac{di}{dt}$$

la puissance s'écrit :

$$P = r i^2 + L i \frac{di}{dt}$$

Le premier terme correspond à la puissance dissipée par effet Joule et ne contribue pas à l'énergie magnétique de la bobine. Le deuxième terme est égal au taux de variation de l'énergie magnétique :

$$\frac{dE_L}{dt} = L i \frac{di}{dt}$$

L'énergie magnétique est donc une primitive par rapport au temps de l'expression $L i \frac{di}{dt}$.

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2 + \text{constante.}$$

Nous avons :

La constante d'intégration est choisie de sorte que l'énergie d'une bobine qui n'est pas parcourue par un courant, c'est-à-dire lorsque $i = 0$, soit nulle.

L'énergie magnétique emmagasinée dans une bobine d'inductance L parcourue par un courant d'intensité i est :

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2$$

- ✓ Lorsque le courant s'établit, la bobine emmagasine de l'énergie E_L : ceci crée un retard à l'établissement du courant.
- ✓ Quand il y a rupture du courant, la bobine restitue l'énergie emmagasinée : ceci entraîne un retard à l'annulation du courant.

f) Exercice

Un solénoïde de 1 m de longueur est formé par une seule couche de spires jointives de 5 cm de rayon faites d'un fil conducteur de 1 mm de diamètre et de résistivité $\rho = 10^{-6}$ ohm-mètre.

On demande :

- 1) La résistance R du solénoïde ;
- 2) Son inductance L ;
- 3) L'expression de la f.é.m. d'auto-induction dont il est le siège lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité $i = 5t^2$ (A) et la valeur de cette f.é.m. 10 secondes après l'instant initial $t = 0$.

6) Oscillations électriques libres : (Uniquement pour la série Sciences Mathématiques)

Généralités

Rappel sur le condensateur

Les armatures d'un condensateur portent des charges opposées. La tension u_{AB} entre les armatures A et B est reliée à la charge q de l'armature A par :

$$u_{AB} = \frac{q}{C}$$

où C est la capacité du condensateur.

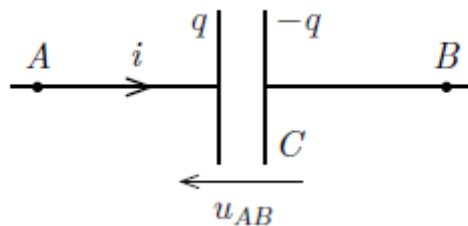


Figure 6.1 Conventions pour le condensateur

La variation de la charge du condensateur est due à un courant électrique d'intensité i . Avec les conventions de la figure 6.1 nous avons :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

L'énergie potentielle électrique E_c d'un condensateur chargé est égale au travail électrique effectué pour le charger.

La puissance électrique fournie au condensateur est :

$$P = u_{AB} i.$$

Elle est égale au taux de variation de l'énergie électrique. En utilisant les relations précédentes il vient :

$$\frac{dE_C}{dt} = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$$

L'énergie électrique est une primitive par rapport au temps de l'expression $\frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$. Nous avons :

$$E_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \text{constante.}$$

La constante d'intégration est choisie de sorte que l'énergie d'un condensateur non chargé, c'est-à-dire lorsque $q = 0$, soit nulle.

L'énergie électrique emmagasinée dans un condensateur de capacité C portant la charge q est :

$$E_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

a) Etude expérimentale

Expérience :

Réalisons le montage suivant constitué d'une bobine d'inductance L et de résistance négligeable avec un condensateur de capacité C .

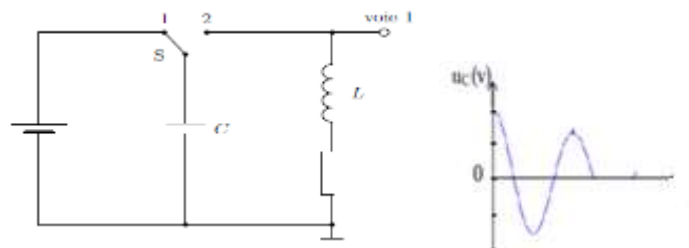


Figure 6.2 Décharge d'un condensateur dans une bobine

Lorsque l'interrupteur S est basculé dans la position 1, le condensateur se charge. En basculant S en position 2, on isole le générateur, le condensateur se décharge dans la bobine, on obtient l'oscillogramme suivant relatif à la décharge. Sur l'écran on observe une sinusoïde légèrement amortie : la décharge du condensateur est donc oscillante.

b) Décharge d'un condensateur dans une inductance pure

b.1) Equation de décharge :

Considérons le circuit LC de la figure 6.3 constitué d'une bobine d'inductance L et de résistance négligeable et d'un condensateur de capacité C .

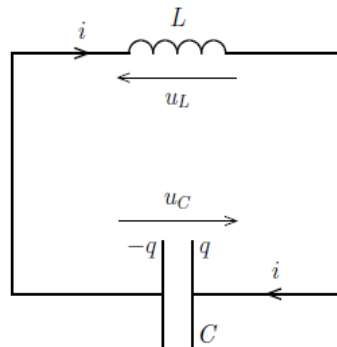


Figure 6.3 Circuit oscillant LC

L'application de la loi des mailles donne : $u_L + u_C = 0$.

Avec

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{et} \quad u_C = \frac{q}{C} \quad (1)$$

Cette équation s'écrit :

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (2)$$

La variation de la charge du condensateur est due à un courant électrique d'intensité i . Avec les conventions de la figure 6.2 nous avons :

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (3)$$

En utilisant la relation (3) entre charge et intensité du courant, la dérivée par rapport au temps de l'intensité est :

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}.$$

En divisant l'équation (2) par L et en réarrangeant les termes, l'équation différentielle pour le circuit LC devient :

$$\boxed{\ddot{q} = -\frac{1}{LC} q}$$

Conservation de l'énergie

Nous allons établir cette même équation différentielle à partir de considérations énergétiques.

L'énergie électromagnétique E du système est la somme de l'énergie électrique E_C du condensateur et de l'énergie magnétique E_L de la bobine :

$$E = E_C + E_L = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2.$$

Lorsque la dissipation d'énergie par effet Joule peut être négligée, l'énergie du système reste constante :

$$E = \text{constante} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2\right)}{dt} = 0$$

d'où :

$$\frac{1}{2} 2 \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{2} L 2 i \frac{di}{dt} = 0.$$

Avec $\frac{dq}{dt} = i$ et $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$. L'expression devient :

$$\frac{q}{C} i + L i \ddot{q} = 0.$$

En divisant par $L i$ et en réarrangeant les termes on retrouve l'équation différentielle du circuit LC :

$$\ddot{q} = -\frac{1}{LC} q.$$

Donc E se conserve au cours des oscillations.

- **Solution de l'équation différentielle**

Une solution de l'équation différentielle est une fonction du temps ; c'est l'équation horaire $q(t)$ de l'oscillateur électrique.

Les résultats expérimentaux et la forme de l'équation différentielle suggèrent une solution sinusoïdale de la forme :

$$q(t) = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) ;$$

Vérifions qu'une expression sinusoïdale est effectivement solution de l'équation différentielle du circuit. En dérivant une première fois par rapport à t :

$$\dot{q} = -Q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

et une deuxième fois : $\ddot{q} = -Q_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 q \Rightarrow \ddot{q} = -\omega_0^2 q$

on constate que l'équation différentielle du circuit est vérifiée par l'expression sinusoïdale *sous condition que* :

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$$

$q(t) = Q_m \cos(\omega_o t + \varphi)$ est bien solution de l'équation d'équation différentielle.

Lorsqu'une bobine est branchée aux bornes d'un condensateur chargé, le condensateur va se décharger et se charger périodiquement sans aucune influence de l'extérieur ; le circuit LC est donc un oscillateur libre. Pour cette raison la constante ω_o est appelée *pulsation propre* de l'oscillateur.

La pulsation propre est déterminée par les grandeurs caractéristiques du circuit LC, à savoir l'inductance L de la bobine et la capacité C du condensateur. La charge maximale Q_m et la phase initiale φ sont déterminées par les conditions initiales.

❖ **Pulsation propre :**

La pulsation propre des oscillations libres du circuit LC est :

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

❖ **Période propre :**

La *période propre* des oscillations libres du circuit LC est :

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{LC}$$

❖ **Fréquence propre :**

La fréquence propre des oscillations libres du circuit LC est :

$$N_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

❖ **Tensions et intensité du courant :**

La tension aux bornes du condensateur est donnée par :

$$u_C = \frac{q}{C} = U_m \cos(\omega_o t + \varphi)$$

où $U_m = \frac{Q_m}{C}$ est l'amplitude de la tension u_C .

La loi des mailles permet d'obtenir la tension aux bornes de la bobine :

$$u_L = -u_C = -U_m \cos(\omega_o t + \varphi)$$

L'intensité du courant est :

$$i = \dot{q} = -I_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

où $I_m = Q_m \omega_0$ est l'amplitude de l'intensité i . Le circuit LC est donc traversé par un *courant alternatif sinusoïdal*.

Application : Montrer que $q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ est également solution de l'équation différentielle.

- **Conditions initiales**

Les grandeurs Q_m et φ sont déterminées par les conditions initiales, c'est-à-dire par les valeurs de u_C et de i à l'instant $t = 0$.

Considérons l'exemple d'un condensateur qui a été chargé à la tension U_0 . Lorsqu'on branche la bobine sur ce condensateur, la tension initiale aux bornes du condensateur est U_0 et sa charge initiale vaut $Q_0 = C U_0$. Nous avons à l'instant $t = 0$:

$$U_0 = U_m \cos(\varphi)$$

L'intensité du courant doit être nulle initialement car le courant ne peut pas s'établir de façon instantanée dans la bobine : $0 = -I_m \sin(\varphi)$

Il résulte de ces deux conditions que $\varphi = 0$ et $U_m = U_0$. Les équations horaires pour les différentes grandeurs électriques s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_C &= U_m \cos(\omega_0 t) = U_0 \cos(\omega_0 t) \\ u_L &= -U_m \cos(\omega_0 t) = -U_0 \cos(\omega_0 t) \\ i &= -I_m \sin(\omega_0 t) = -Q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

b.2) Représentations graphiques :

La figure 6.4 montre la représentation graphique de $u_C(t)$, $u_L(t)$ et $i(t)$ pour l'exemple ci-dessus. On constate que u_C et i sont déphasées de $\frac{\pi}{2}$.

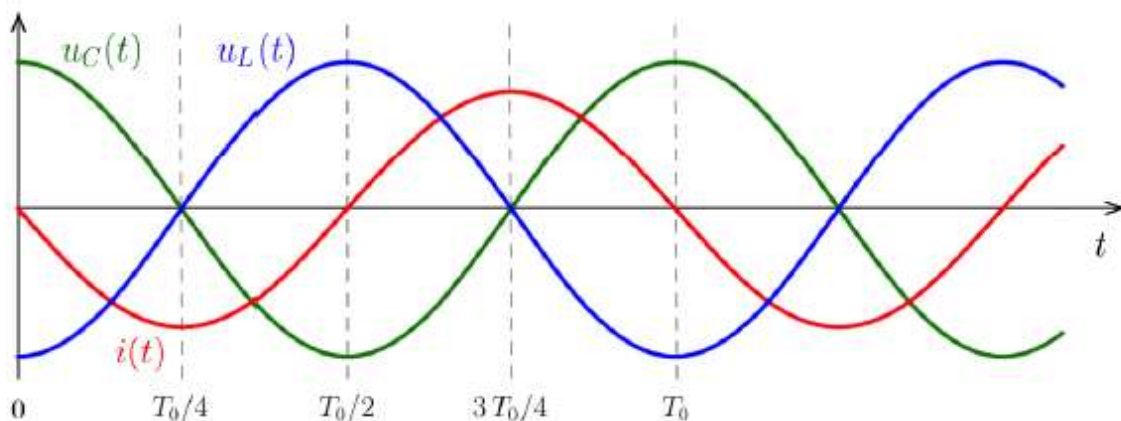
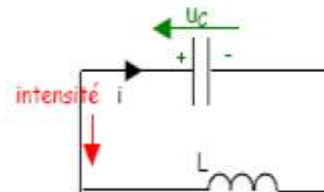


Figure 6.4 Représentation graphique de $u_C(t)$, $u_L(t)$ et $i(t)$

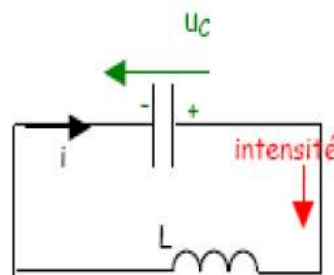
La décharge d'un condensateur dans une bobine non résistive produit un courant sinusoïdal de même période propre T_0 et de même fréquence propre N_0 que la tension aux bornes du condensateur.

Interprétation

- A $t = 0$ $u_C = U_0 > 0$ et $i = 0$
- ensuite le condensateur se décharge u_C diminue, le courant circule dans le sens négatif avec $|i|$ croissant.
- A $t = \frac{T_0}{4}$ le condensateur est déchargé $u_C = 0$ et $i = -I_{max}$



- ensuite la bobine donne son énergie en s'opposant à la diminution de l'intensité i : le condensateur se charge alors, mais avec les signes des armatures inverses des précédents.
- A $t = \frac{T_0}{2}$ la bobine a libéré toute son énergie et le condensateur est chargé $u_C = -U_0 < 0$ et $i = 0$
- ensuite le condensateur se décharge, le courant circule dans le sens positif avec $|i|$ croissant.
- Etc.



b.3) Énergie emmagasinée :

A un instant quelconque t , l'énergie emmagasinée

- ✓ Dans le condensateur est : $E_{cond} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2} C U_0^2 (\cos \omega_0 t)^2$
- ✓ Dans la bobine est : $E_{Bobine} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L C^2 U_0^2 \omega_0^2 (\sin \omega_0 t)^2 = \frac{1}{2} C U_0^2 (\sin \omega_0 t)^2$

Donc l'énergie totale emmagasinée est :

$$E = \frac{1}{2}CU_0^2$$

L'énergie totale d'un circuit (LC) est indépendante du temps.

Remarque :

Au cours des oscillations l'énergie totale se conserve. Il y a transfert d'énergie du condensateur vers la bobine.

Lorsque l'énergie dans la bobine est maximale, celle dans le condensateur est nulle et inversement.

Les courbes ont pour période $\frac{T_0}{2}$

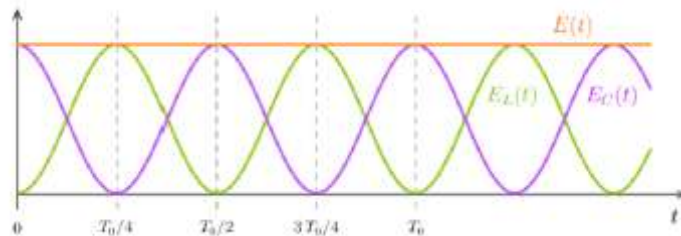


Figure 6.5 Représentation graphique de $E_C(t)$, $E_L(t)$ et $E(t)$

b.4) Circuit avec résistance :

Influence de la résistance du circuit sur les oscillations (RLC libre) :

Expérience :

Le circuit (figure 6.6) comporte un générateur de tension continue, un condensateur de capacité C , une bobine et une résistance variable R . Lorsque l'interrupteur S est basculé dans la position 1, le condensateur se charge jusqu'à ce que la tension à ses bornes u_C soit égale à la f.é.m. du générateur.

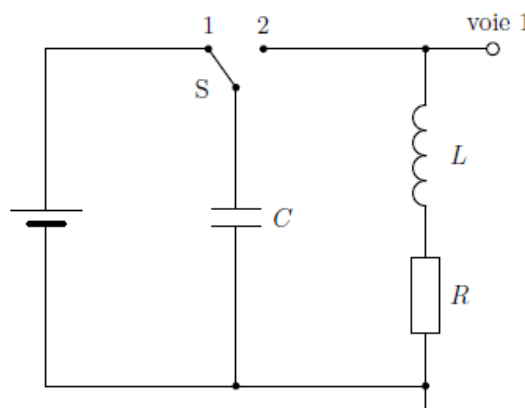


Figure 6.6

En basculant S en position 2, on isole le générateur, le condensateur se décharge dans la bobine et dans la résistance montée en série. L'oscilloscope enregistre la tension u_C au cours de la décharge.

On choisit initialement pour R la valeur $R = 0,1 \text{ k}\Omega$. On observe (figure 6.7a) que la décharge du condensateur est *oscillante amortie*. Elle n'est pas périodique puisque u_C ne reprend pas la même valeur à des intervalles de temps égaux ; l'amplitude des oscillations décroît au cours du temps. La tension u_C s'annule à des instants séparés par des intervalles de temps égaux ; la décharge est dite *pseudo-périodique*. La pseudo-période est la durée qui sépare deux passages successifs de u_C par 0 dans le même sens.

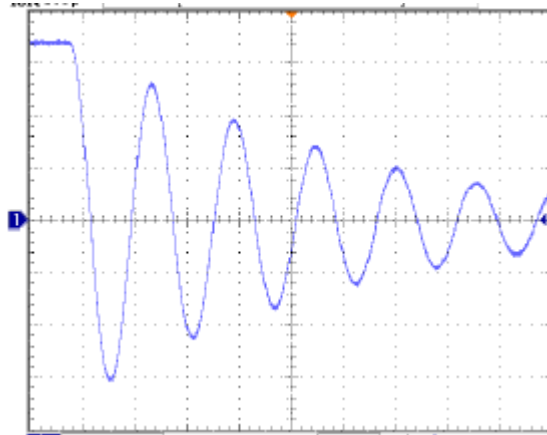


Figure 6.7a oscillations amorties, $R = 0,1 \text{ k}\Omega$

L'expérience est répétée avec des valeurs de résistance plus grandes. Avec $R = 1 \text{ k}\Omega$ la décharge est toujours oscillante amortie, mais l'amortissement est plus important (figure 6.7b).

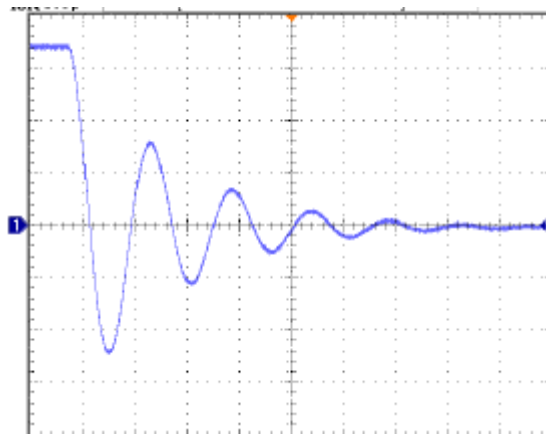


Figure 6.7b oscillations amorties, $R = 1 \text{ k}\Omega$

Lorsque la résistance est très grande, par exemple pour $R = 10 \text{ k}\Omega$, les oscillations disparaissent (figure 6.7c). La tension décroît sans changer de signe. La décharge est *apériodique*.

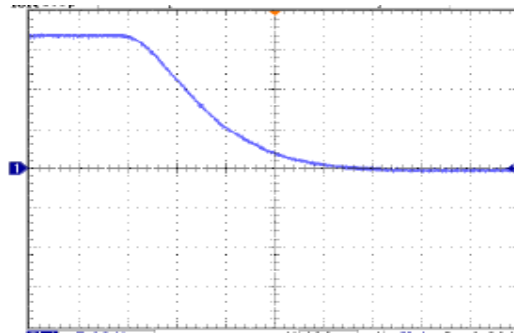


Figure 6.7c décharge apériodique, $R = 10 \text{ k}\Omega$

En annulant R , l'amortissement, bien que plus faible, n'est pas nul. La résistance de la bobine est la cause de cet amortissement.

Énoncé : Lorsque la résistance du circuit RLC est faible, la décharge du condensateur dans la bobine est oscillante amortie. L'amortissement augmente avec la résistance totale du circuit.

Au-delà d'une valeur limite ($R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ résistance critique), la décharge devient apériodique.

Différents régimes :

R	$R < R_c$	$R = R_c$	$R > R_c$
régime	Pseudo-périodique	critique	apériodique

Etude énergétique du pseudo-périodique :

$$E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = i \left(\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} \right) = -Ri^2 \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = -Ri^2}$$

L'amplitude des oscillations diminue : l'énergie totale emmagasinée diminue : il y a perte d'énergie par effet joule.

c) Analogie électromécanique :

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ et } q'' = \frac{d^2q}{dt^2}$$

SYSTEME		OSCILLATEUR MECANIQUE	CIRCUIT OSCILLANT
Non amorti	Équation différentielle	$x'' + \frac{k}{m}x = 0$	$q'' + \frac{1}{LC}q = 0$
	Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
	Équation de l'oscillation	$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$	$q = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$
	Énergie à l'instant t	$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ $E = cte$	$E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ $E = cte$
	Autres expressions de l'énergie d'oscillation	Énergie cinétique maximale: $E = \frac{1}{2}mv_m^2$ Énergie potentielle d'élasticité maximale: $E = \frac{1}{2}kx_m^2$	Énergie potentielle magnétique maximale: $E = \frac{1}{2}Li_m^2$ Énergie potentielle électrostatique maximale: $E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}$
Amorti	Équation différentielle*	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $-kx - \alpha v = mx''$ $mx'' + \alpha x' + kx = 0$	$\sum u = u_b$ $\frac{q}{C} + Ri = -L \frac{di}{dt}$ $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0$

Analogie entre les grandeurs mécaniques et électriques	m masse	\Leftrightarrow	L inductance
	k coefficient de raideur du ressort	\Leftrightarrow	$\frac{1}{C}$, C capacité du condensateur
	x élongation	\Leftrightarrow	q charge électrique
	v vitesse	\Leftrightarrow	i intensité
	F force	\Leftrightarrow	u tension

d) Exercices :

Exercice 1 :

Un condensateur de capacité $C = 200 \mu\text{F}$, préalablement chargé sous la tension $U_0 = 20 \text{ V}$ se décharge à travers une bobine d'inductance L et de résistance négligeable. On observe des oscillations électriques de période $T_0 = 1,26 \text{ ms}$.

- 1) Calculer la valeur de l'inductance L .
- 2) La période T_0 du circuit dépend-elle de la valeur U_0 de la tension de charge ?

Réponses : 1) $L = 0,2 \text{ H}$; 2) La période T_0 est indépendante de la tension de charge U_0 .

Exercice 2 :

On réalise le circuit ci-contre comprenant : une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C . L'interrupteur K étant ouvert, la tension aux bornes du condensateur est $U_{AB} = 10 \text{ V}$. On considère que la résistance de la bobine et des fils de connexion est nulle.

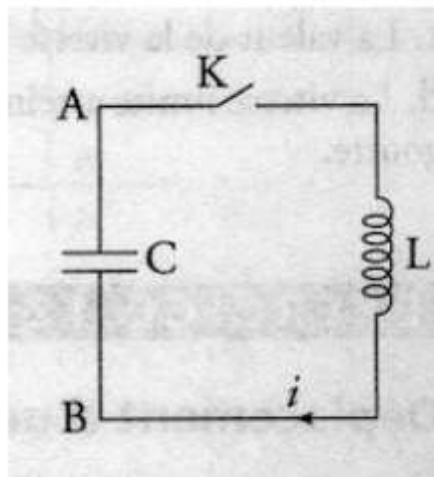
A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K . A l'aide d'un système informatique, des enregistrements ont été effectués et ont donné les expressions suivantes :

- $u_{AB}(t) = 10 \cos(1,0 \times 10^3 t)$ avec $u_{AB}(t)$ en V et t en s
- $i(t) = 1,0 \times 10^{-2} \sin(1,0 \times 10^3 t)$ avec $i(t)$ en A et t en s

- a) Les variations de U_{AB} et de i au cours du temps correspondent à un régime pseudo-périodique.
- b) Avec les conventions du schéma, on peut écrire :

$$i = C \cdot \frac{du_{AB}}{dt}.$$

- c) Le condensateur a une capacité $C = 1,0 \mu\text{F}$.
- d) L'énergie totale emmagasinée dans le circuit a pour valeur $E = 50 \mu\text{J}$.



Réponses :

a) **FAUX** : dans un circuit LC, les oscillations sont périodiques.

b) **FAUX** : $q_B = C \cdot u_{BA}$ et $i = \frac{dq_B}{dt} \Rightarrow i = C \cdot \frac{du_{BA}}{dt}$

c) **VRAI** : $i(t) = 1,0 \times 10^{-2} \sin(1,0 \times 10^3 \cdot t)$ et $u_{BA}(t) = -10 \cos(1,0 \times 10^3 \cdot t)$
 $\Rightarrow \frac{du_{BA}}{dt} = 10 \times 1,0 \times 10^3 \sin(1,0 \times 10^3 \cdot t)$

Or : $i = C \cdot \frac{du_{BA}}{dt} \Rightarrow C = \frac{i}{\left(\frac{du_{BA}}{dt}\right)}$ soit : $C = \frac{1,0 \times 10^{-2} \sin(1,0 \times 10^3 \cdot t)}{1,0 \times 10^4 \sin(1,0 \times 10^3 \cdot t)} = 1,0 \times 10^{-6} \text{ F ou } 1,0 \mu\text{F}$

d) **VRAI** : à $t = 0$, le condensateur est complètement chargé. A cette date, l'énergie totale emmagasinée dans le circuit est de l'énergie électrique et $E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_{AB}^2$

Soit : $E = 1,0 \times 10^{-6} \times (10)^2 = 50 \times 10^{-6} \text{ J ou } 50 \mu\text{J}$

7) Oscillations électriques forcées en régime sinusoïdal : circuit RLC série :

Un circuit RLC en série initialement chargé est le siège d'oscillations électriques libres mais amortie car le circuit dissipe de l'énergie par effet joule. Pour compenser ces pertes d'énergie on peut appliquer une tension sinusoïdale au circuit RLC : on a ainsi des oscillations électriques forcées.

7. 1) Courant alternatif sinusoïdal :

a) Intensité et tension instantanées

- Intensité instantanée :

Définitions

On appelle courant alternatif un courant électrique périodique qui change de sens deux fois par période et qui transporte des quantités d'électricité égales alternativement dans un sens et dans l'autre.

Une alternance est l'intervalle de temps qui sépare deux changements de sens consécutifs du courant.

Le plus simple des courants alternatifs est le courant sinusoïdal, dont l'intensité est une fonction sinusoïdale du temps : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$

- I_m : intensité maximale ;
- ω : la pulsation imposée par le générateur ;
- $\omega t + \varphi$: phase à l'instant t ;
- φ : phase à l'origine ;

Le courant fourni par l'EDG, ainsi que les courants industriels de Kamsar et Fria sont des courants alternatifs sinusoïdaux de fréquence 50 HZ.

• **Tension instantanée :**

Considérons une portion de circuit quelconque MN ; lorsqu'un courant alternatif la parcourt, ses extrémités M et N présentent une différence de potentiel ou tension également alternative.

L'intensité du courant et la tension ont toujours la même fréquence mais n'ont pas, en général, la même phase. Supposons par exemple, que la tension instantanée c'est-à-dire la valeur algébrique de la tension à un instant quelconque t ait pour expression :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t) \quad \text{avec } U_m \text{ tension maximale}$$

L'intensité du courant est, au même instant t : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$

L'angle φ (radian), compté algébriquement, représente le **déphasage du courant par rapport à la tension.**

- Si $\varphi = 0$, tension et courant sont en phase ;
- Si $\varphi > 0$, le courant est en avance sur la tension ;
- Si $\varphi < 0$, le courant est en retard sur la tension.

Le déphasage φ et aussi la relation entre les valeurs maximales I_m et U_m de l'intensité et de la tension dépendent des conducteurs qui composent la portion de circuit MN.

Loi d'Ohm pour une résistance pure parcourue par un courant alternatif.

On appelle résistance pure une portion de circuit dont l'inductance L est pratiquement nulle. La seule caractéristique d'une résistance pure est la résistance R, dont la valeur en ohm est la même en courant alternatif basse fréquence qu'en courant continu. Un fil conducteur rectiligne, ou bien torsadé, ou encore enroulé en doubles boucles constitue une résistance pure.

A chaque instant, l'intensité i du courant alternatif dans une résistance pure et la tension u qui existe entre les extrémités de celle-ci sont liées par la même relation d'Ohm qu'en courant continu :

$$u = R i \quad \begin{cases} R \text{ en ohm;} \\ i \text{ en ampère;} \\ u \text{ en volt.} \end{cases} \quad (1)$$

Les valeurs instantanées de l'intensité et de la tension sont proportionnelles. Par suite, le déphasage courant-tension est nul ($\varphi = 0$) et l'on a simultanément :

$$\begin{cases} u = U_m \cos(\omega t) \\ i = I_m \cos(\omega t) \end{cases} \quad \text{avec : } U_m = R I_m \quad (2)$$

b) Période, fréquence

La **période** est le temps au bout duquel le courant reprend la même valeur en circulant dans le même sens.

La **fréquence** est le nombre de périodes continues dans une seconde.

$$T = \frac{1}{N}$$

c) Intensité et tension efficaces

• **Intensité efficace**

Définition :

L'intensité efficace d'un courant alternatif i , de période T , est égale à la valeur absolue I de l'intensité du courant continu qui, traversant un même résistor linéaire durant le même intervalle de temps T , produirait le même dégagement d'énergie thermique par effet joule que le courant alternatif i .

Relation entre l'intensité efficace I_{eff} et l'intensité maximale I_m d'un courant alternatif sinusoïdal :

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

• **Tension efficace**

Définition :

La valeur efficace U_{eff} , d'une tension alternative sinusoïdale u , est égale au quotient de la valeur maximale U_m par $\sqrt{2}$.

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Remarques

- Les valeurs efficaces suivent la même loi d'Ohm que les valeurs instantanées u et i .
- En courant alternatif l'ampèremètre et le voltmètre mesurent les valeurs efficaces, les valeurs maximales sont mesurées par l'oscilloscope.

7. 2) Circuits parcourus par des courants sinusoïdaux :

a) Cas d'un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé :

a.1) Impédance d'un dipôle

On définit l'impédance d'un dipôle Z le rapport :

$$Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_m}{I_m}$$

Z s'exprime en ohm (Ω) et dépend de la fréquence du courant alternatif.

a.2) Représentation de Fresnel d'une valeur sinusoïdale

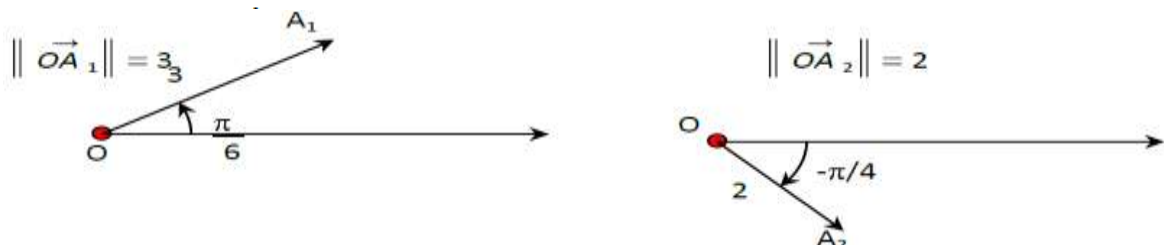
- **Principe**

Considérons un vecteur \vec{OM} de module a qui tourne dans le plan (o, \vec{i}, \vec{j}) autour de son origine O avec une vitesse angulaire ω constante. Si à $t = 0$ l'angle $(\vec{OM}, \vec{i}) = \varphi$ est la phase à l'origine et à un instant t quelconque la phase est $\omega t + \varphi = (\vec{OM}, \vec{i})$. Projétons l'extrémités du vecteur \vec{OM} sur l'axe \vec{j} , la valeur algébrique de la projection est à l'instant t $y = a \sin(\omega t + \varphi)$.

- ✓ Le mouvement de la projection du vecteur \vec{OM} sur l'axe Oy est en mouvement sinusoïdal d'amplitude $a = \|\vec{OM}\|$ de pulsation ω (vitesse angulaire du vecteur tournant \vec{OM}) et de phase à l'origine $(\vec{OM}, \vec{i}) = \varphi$ à $t = 0$.
- ✓ Réciproquement on peut faire correspondre un vecteur tournant à toute fonction sinusoïdale $y = a \sin(\omega t + \varphi)$. Par convention on représente la fonction y par un vecteur tournant \vec{OM} dans sa position initiale.

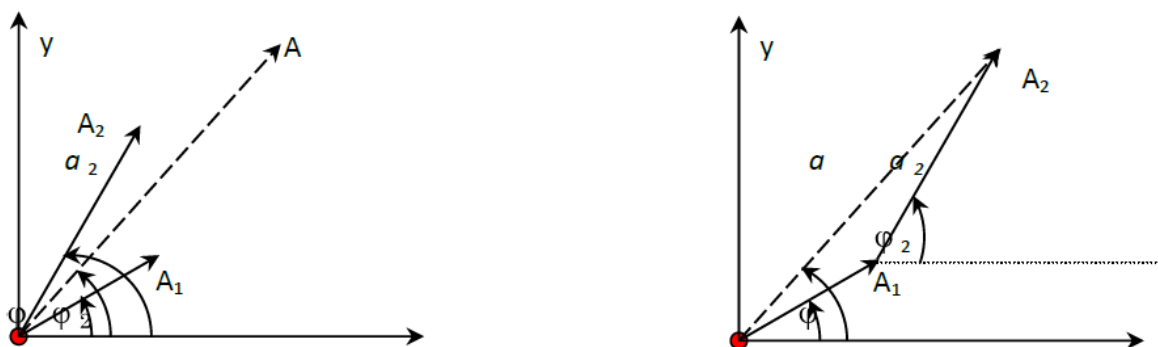
Exemple : représentons les vecteurs tournant associés aux fonctions sinusoïdales.

$$y_1 = 3 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ et } y_2 = 2 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \vec{OA}_1 = \left(3; \frac{\pi}{6}\right) \text{ et } \vec{OA}_2 = \left(2; -\frac{\pi}{4}\right)$$



- **Somme de deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation**

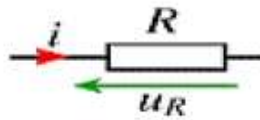
Soient $y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$. Déterminons la somme $y = y_1 + y_2$



$y = a \sin(\omega t + \varphi)$ où a et φ sont des constantes déterminées par le calcul ou graphiquement.

a.3) Etude de quelques dipôles en courant alternatif

- Résistor



On pose $i = I_m \cos(\omega t)$ donc $u = R i = R I_m \cos(\omega t) = U_m \cos(\omega t)$ avec $U_m = R I_m$

⇒

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = R$$

i et u sont en phase, le déphasage $\varphi = 0$.

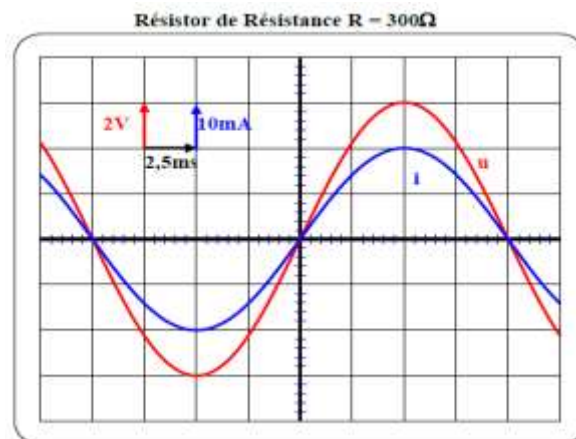


Figure 7.1