1re ES

MATHÉMATIQUES

Le polycopié regroupe les documents distribués aux élèves de 1re ES 2 en cours d'année.

Janson de Sailly (année 2017-2018)

A. YALLOUZ

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1

POURCENTAGES

I PART EN POURCENTAGE

L'expression « une grandeur A représente $t\,\%$ de E » se traduit par l'égalité $A = E \times \dfrac{t}{100}$

EXEMPLE

La production totale d'électricité en France atteint 531,3 TWh (milliard de KWh) en 2016. La production d'électricité assurée par les centrales nucléaires est de 384 TWh.
La part en pourcentage de la production d'électricité d'origine nucléaire est :

$$\frac{384}{531{,}3} \approx 0{,}723$$

En 2016, la production d'origine nucléaire représente 72,3% de la production d'électricité totale.

II ÉVOLUTION EN POURCENTAGE

1 COEFFICIENT MULTIPLICATEUR

— Augmenter une grandeur de $t\,\%$ équivaut à multiplier sa valeur initiale par $1+\dfrac{t}{100}$.

— Diminuer une grandeur de $t\,\%$ équivaut à multiplier sa valeur initiale par $1-\dfrac{t}{100}$.

$\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$ et $\left(1-\dfrac{t}{100}\right)$ sont appelés coefficients multiplicateurs.

✼ DÉMONSTRATION

— Soit V_0 la valeur initiale d'une grandeur et V_1 sa valeur finale suite à une augmentation de $t\,\%$.

$$V_1 = V_0 + V_0 \times \frac{t}{100} = V_0 \times \left(1+\frac{t}{100}\right)$$

— Soit V_0 la valeur initiale d'une grandeur et V_1 sa valeur finale suite à une diminution de $t\,\%$.

$$V_1 = V_0 - V_0 \times \frac{t}{100} = V_0 \times \left(1-\frac{t}{100}\right)$$

EXEMPLES

— En 2016 avec près de 8,3 TWh produits, l'électricité produite par la filière solaire a augmenté de 11,5% par rapport à l'année précédente.
Soit S_0 la production d'électricité par la filière solaire en 2015 :

$$S_0 \times \left(1+\frac{11{,}5}{100}\right) = 8{,}3 \iff S_0 = \frac{8{,}3}{1{,}115} \approx 7{,}4$$

En 2015, la production solaire s'élevait à environ 7,4 TWh.

— La filière éolienne a produit 20,7 TWh d'électricité au cours de l'année 2016, en recul de 1,8 % par rapport à l'année précédente.
Soit E_0 la production d'électricité par la filière éolienne en 2015 :

$$E_0 \times \left(1-\frac{1{,}8}{100}\right) = 20{,}7 \iff E_0 = \frac{20{,}7}{0{,}982} \approx 21{,}1$$

La production éolienne en 2015 s'élevait à environ 21,1 TWh.

REMARQUES

— Un coefficient multiplicateur n'a pas d'unité.

— Si le coefficient multiplicateur est supérieur à 1, alors l'évolution est une augmentation.

— Si le coefficient multiplicateur est inférieur à 1, alors l'évolution est une diminution.

— Un pourcentage d'augmentation supérieur ou égal à 100% peut s'exprimer à l'aide d'un coefficient multiplicateur.
Par exemple si une population augmente de 150 %, le coefficient multiplicateur correspondant est : $1+\dfrac{150}{100}=2{,}5$.

2 TAUX D'ÉVOLUTION

Soit V_0 ($V_0 \neq 0$) la valeur initiale d'une grandeur et V_1 sa valeur finale suite à une évolution.
Le taux d'évolution de cette grandeur est égal à : $\dfrac{V_1-V_0}{V_0}$.
En pourcentage, le taux d'évolution se note $t\,\%$ avec $t=\dfrac{V_1-V_0}{V_0}\times 100$.

DÉMONSTRATION

Soit $t\,\%$ le taux d'évolution positif ou négatif de V_0 à V_1. Alors

$$\begin{aligned} V_1 = V_0\times\left(1+\frac{t}{100}\right) &\iff 1+\frac{t}{100}=\frac{V_1}{V_0}\\ &\iff \frac{t}{100}=\frac{V_1}{V_0}-1=\frac{V_1-V_0}{V_0}\end{aligned}$$

REMARQUES

— Si $t>0$, il s'agit d'une augmentation.

— Si $t<0$, il s'agit d'une diminution.

— Le quotient $\dfrac{V_1}{V_0}$ est le coefficient multiplicateur correspondant au pourcentage d'évolution de $t\,\%$.

EXEMPLE

La production totale d'électricité en France était de 546,8 TWh en 2015 et de 531,3 TWh en 2016.

Le taux d'évolution de la production d'électricité est :

$$\frac{531{,}3-546{,}8}{546{,}8}\approx -0{,}028$$

En 2016, la production d'électricité en France a diminué de près de 2,8% par rapport à 2015.

III ÉVOLUTIONS SUCCESSIVES, ÉVOLUTION RÉCIPROQUE

1 TAUX D'ÉVOLUTION GLOBAL

Si une grandeur subit des évolutions successives (augmentation ou diminution), le coefficient multiplicateur global (correspondant au taux global d'évolution) est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.

DÉMONSTRATION

Soient V_0 la valeur initiale d'une grandeur, V_1 la valeur de cette grandeur après une évolution relative de $t_1\,\%$ et V_2 la valeur obtenue à partir de V_1 après une évolution relative de $t_2\,\%$. Ces évolutions se traduisent par :

$$\begin{tikzcd}
V_0 \arrow[r, "\times\left(1+\frac{t_1}{100}\right)"] \arrow[rr, bend right, "\times\left(1+\frac{t}{100}\right)"'] & V_1 \arrow[r, "\times\left(1+\frac{t_2}{100}\right)"] & V_2
\end{tikzcd}$$

Soit $V_1=V_0\times\left(1+\dfrac{t_1}{100}\right)$ et $V_2=V_1\times\left(1+\dfrac{t_2}{100}\right)$ d'où $V_2=V_0\times\left(1+\dfrac{t_1}{100}\right)\times\left(1+\dfrac{t_2}{100}\right)$

On obtient $1+\dfrac{t}{100}=\left(1+\dfrac{t_1}{100}\right)\times\left(1+\dfrac{t_2}{100}\right)$.

EXEMPLE

En 2014, la production d'électricité de la filière thermique gaz était de 14,3 TWh.
Entre 2014 et 2015, cette production a augmenté de 53,1% ; entre 2015 et 2016 elle a augmenté de 61,2%.

Le taux global d'évolution de la production d'électricité de la filière thermique gaz entre 2014 et 2016 vérifie :

$$1+\frac{t}{100}=\left(1+\frac{53{,}1}{100}\right)\times\left(1+\frac{61{,}2}{100}\right),\text{ soit } 1+\frac{t}{100}\approx 2{,}468$$

Soit un taux d'évolution global d'environ 146,8%.
On en déduit la production en 2016 :

$$14{,}3\times 2{,}468\approx 35{,}3$$

En 2016, la production d'électricité de la filière thermique gaz était de 35,3 TWh.

2 ÉVOLUTION RÉCIPROQUE

L'évolution réciproque de la valeur V_0 à la valeur V_1 est l'évolution de la valeur V_1 à la valeur V_0.
L'évolution réciproque d'une évolution de coefficient multiplicateur $1+\dfrac{t}{100}$ est une évolution de coefficient multiplicateur inverse $\dfrac{1}{1+\dfrac{t}{100}}$

✻ DÉMONSTRATION

Soient V_0 la valeur initiale d'une grandeur, V_1 la valeur de cette grandeur après une évolution relative de $t\,\%$.
On a $V_1=V_0\times\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$, donc $V_0=\dfrac{V_1}{1+\dfrac{t}{100}}$.

Par conséquent, le pourcentage d'évolution $t'\,\%$ de V_1 à V_0 est tel que $1+\dfrac{t'}{100}=\dfrac{1}{1+\dfrac{t}{100}}$.

EXEMPLE

Entre 2014 et 2015, la production d'électricité de la filière thermique fioul a augmenté de 15,2%.
Fin 2016 cette production est revenue à son niveau initial de 2014.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 15,2% est : $1+\dfrac{15{,}2}{100}=1{,}152$.
Le coefficient multiplicateur correspondant à l'évolution réciproque est l'inverse de 1,152.
Le taux d'évolution réciproque vérifie :

$$1+\frac{t'}{100}=\frac{1}{1{,}152}\quad\text{soit}\quad\frac{t'}{100}=\frac{1}{1{,}152}-1\approx-0{,}132$$

Entre 2015 et 2016, la production d'électricité de la filière thermique fioul a baissé d'environ 13,2%.

EXERCICE 1

Dans une classe il y a 14 filles qui représentent 40 % de l'effectif total.
Quel est le nombre de garçons de la classe ?

EXERCICE 2

On a mélangé 5 litres de jus de fruit contenant 30% de sucre avec 3 litres de jus de fruits contenant 20% de sucre.
Quel est le pourcentage en sucre du mélange obtenu ?

EXERCICE 3

Pour engager des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves il y a 60% d'hommes.
Après avoir pris connaissance des résultats aux tests l'entreprise engage 70% des candidats masculins et 80% des femmes candidates.

1. Quel est le pourcentage d'hommes parmi les stagiaires embauchés ?
2. Quel est le pourcentage de femmes parmi les candidatures rejetées ?

EXERCICE 4

Dans une entreprise, 70% des salariés sont des hommes, 6% des femmes sont cadres et 5% des hommes sont cadres.
Quel est le pourcentage des cadres dans cette entreprise ?

EXERCICE 5

1. Par quel nombre est multiplié une quantité
   a) qui augmente de 0,1% ? 1% ? 5% ? 10% ? 50% ? 100% ? 200% ?
   b) qui diminue de 0,2% ? 2% ? 15% ? 25% ? 50% ?
2. Indiquer la variation en pourcentage d'une quantité
   a) qui a été multipliée par 1,02 ; 1,12 ; 1,75 ; 2,5.
   b) qui a été multipliée par 0,05 ; 0,15 ; 0,5 ; 0,987.

EXERCICE 6

Une entreprise a vu son chiffre d'affaires augmenter de 160 000 € régulièrement tous les ans.

1. Recopier et compléter le tableau des valeurs suivant :

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Chiffre d'affaires (*en millions d'euros*)	10	10,16	10,32	10,48	10,64	10,8	10,96
Pourcentage d'évolution annuel							

2. Le pourcentage d'évolution de 2016 par rapport à 2010 est-il égal à la somme des pourcentages d'évolution successifs ?

EXERCICE 7

Avant promotion, un article était vendu en paquet d'un kilogramme à 4,60 €.
Dans un magasin, une publicité annonce : « 15% de produit en plus pour un même prix de 4,60 € ».
Chez un concurrent, pour le même produit, on annonce : « 15% de remise à la caisse sur le paquet d'un kilogramme à 4,60 € ».
Ces deux offres sont-elles équivalentes ?

EXERCICE 8

1. Un commerçant achète ses articles chez un grossiste qu'il revend augmenté d'une marge bénéficiaire de 60% du prix d'achat.
   a) Quel est le prix de vente d'un article que le commerçant a acheté 150 € ?
   b) Un article est vendu à 696 €, à quel prix le commerçant l'a-t-il acheté ?
   c) Quelle part en pourcentage du prix de vente, le prix d'achat représente-t-il ?
2. Sur certains articles, le commerçant souhaite augmenter sa marge bénéficiaire pour que le prix d'achat ne représente plus que 40% du prix de vente.
   Quel pourcentage d'augmentation doit-il appliquer sur les prix d'achat ?

EXERCICE 9

1. Le cours d'une action a baissé de 20%. Quel doit être le taux d'augmentation pour que cette action retrouve son cours initial ?
2. Le prix d'un article a subit une hausse de 20%. Quel doit être le taux de remise pour que cet article retrouve son prix initial ?

EXERCICE 10

Après deux augmentations successives de 5% le prix d'un objet est de 48,51 €.
Quel était le prix initial de cet objet ?

EXERCICE 11

Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 19% en deux ans.
Pour atteindre son objectif, quel pourcentage annuel de baisse doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux années ?

EXERCICE 12

Lors d'une année exceptionnelle la production de fruits d'un agriculteur a augmenté de t_1%. Mais l'abondance de fruits sur le marché provoque une chute des prix de t_2%.
On note p le prix et q la quantité produite lors d'une année normale.

1. Dans le cas où $t_1 = 17$ et $t_2 = 15$ la recette de l'agriculteur a-t-elle augmenté ou diminué ?
2. Dans le cas où $t_1 = 20$ et $t_2 = 16$ la recette de l'agriculteur a-t-elle augmenté ou diminué ?

EXERCICE 13

le prix initial d'un article, successivement augmenté puis diminué d'un même pourcentage, a finalement baissé de 6,25%.
Calculer le pourcentage de l'augmentation (puis de la diminution).

EXERCICE 14

1. Après deux augmentations successives de t% le prix d'un article a augmenté de 16,64%.
   Calculer le taux t de l'augmentation.
2. Après deux baisses successives de t% le prix d'un article a diminué de 17,19%.
   Calculer le taux t de la baisse.

Chapitre 2

SECOND DEGRÉ

I POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

1 DÉFINITION

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.

EXEMPLES

— La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -0{,}5x^2+\sqrt{2}$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -0{,}5$, $b = 0$ et $c = \sqrt{2}$.

— La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = (2x+1)^2 - 3x$ est une fonction polynôme du second degré car, pour tout réel x, $g(x) = 4x^2+x+1$ ($a = 4$, $b = 1$ et $c = 1$)

— La fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$ n'est pas une fonction polynôme.

2 FORME CANONIQUE

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta \qquad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

✻ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$.
Comme $a \neq 0$, pour tout réel x, $f(x) = a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)$.
Or pour tout réel x, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\dfrac{b}{a}x+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$. On en déduit que pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

Soit en posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$, on obtient pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$

EXEMPLE

Cherchons la forme canonique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2-3x+2$.
Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\times\left[x^2+\frac{3}{2}x-1\right] \\ &= -2\times\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-1\right] \\ &= -2\times\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right] \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = -2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{25}{8}$

II VARIATIONS

Quand on connaît la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré, on peut en déduire son maximum ou son minimum.

✻ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

1. Étudions le cas où $a < 0$

   Si $x_1 < x_2 \leqslant \alpha$ alors $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leqslant 0$ d'où $(x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2$. (la fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$)
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta < a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) < f(x_2)$.

   Si $\alpha \leqslant x_1 < x_2$ alors $0 \leqslant x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$ d'où $(x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2$. (la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$)
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta > a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) > f(x_2)$.

   Ainsi, si $a < 0$ la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

2. Étudions le cas où $a > 0$

   Si $x_1 < x_2 \leqslant \alpha$ alors $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leqslant 0$ d'où $(x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2$.
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta > a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) > f(x_2)$.

   Si $\alpha \leqslant x_1 < x_2$ alors $0 \leqslant x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$ d'où $(x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2$.
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta < a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) < f(x_2)$.

   Ainsi, si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

On retient :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

$\boxed{a<0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘	

$\boxed{a>0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗	

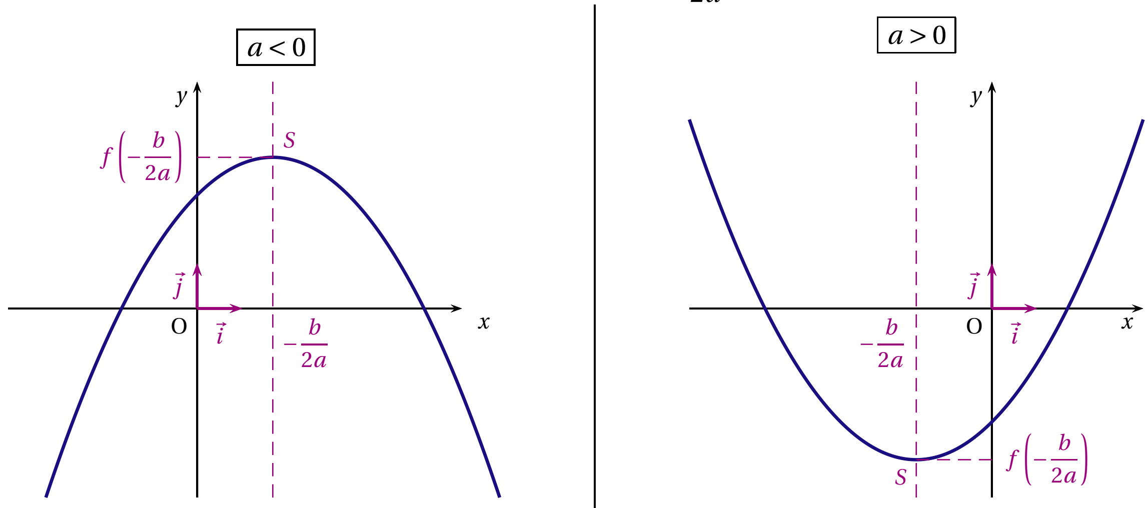
EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par par $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$. Ici $a = -3$, $b = -2$ et $c = 1$. Ainsi, $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{3}$ et $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$. Comme $a < 0$, on en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\dfrac{4}{3}$	↘

III COURBE REPRÉSENTATIVE

Dans un repère orthogonal $\left(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole.
On dit que la parabole a pour équation $y = ax^2 + bx + c$.
Le sommet S de la parabole a pour abscisse $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. Il correspond au maximum ou au minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
La parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.



La parabole est tournée vers le bas — La parabole est tournée vers le haut

SYMÉTRIE DE LA PARABOLE

Pour des raisons de symétrie, l'abscisse α du sommet de la parabole est la moyenne des abscisses x_1 et x_2 de deux points de la parabole ayant même ordonnée : $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

EXEMPLE

f est une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ telle que $f(-1) = 0$, $f(1) = -10$ et $f(4) = -10$. On note $\mathscr{P}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Quelle est l'abscisse du sommet S de la parabole $\mathscr{P}$?

   $f(1) = f(4) = -10$ donc l'abscisse du sommet S est $\alpha = \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$.

2. Quelles les coordonnées des points d'intersection de la parabole $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses ?

   $f(-1) = 0$ donc la parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $(-1;0)$.
   L'abscisse x_B du deuxième point d'intersection est solution de l'équation :

   $$\frac{1+x_B}{2} = \frac{5}{2} \iff x_B = 6$$

   Ainsi, la parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points $A(-1;0)$ et $B(6;0)$.

IV ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Une équation du second degré à une inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b, c sont des réels et $a\neq 0$.
L'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ peut s'écrire sous la forme $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$
On pose $\Delta=b^2-4ac$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ équivaut à l'équation $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]=0$,
soit encore $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}=0$.

— Si $\Delta<0$ alors $\dfrac{\Delta}{4a^2}<0$ et $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$. Donc l'équation du second degré n'a pas de solution.
— Si $\Delta=0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ équivaut à l'équation $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$. Donc l'équation du second degré a pour unique solution $x=-\dfrac{b}{2a}$.
— Si $\Delta>0$ alors :

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 &\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0\\ &\iff \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0\\ &\iff \left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0\end{aligned}$$

Donc l'équation du second degré a deux solutions $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

1 PROPRIÉTÉ

Soit S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels fixés avec $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.
— Si $\Delta<0$ alors l'équation n'a pas de solution; $S=\emptyset$.
— Si $\Delta=0$ alors l'équation a une seule solution; $S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.
— Si $\Delta>0$ alors l'équation a deux solutions; $S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

EXEMPLE

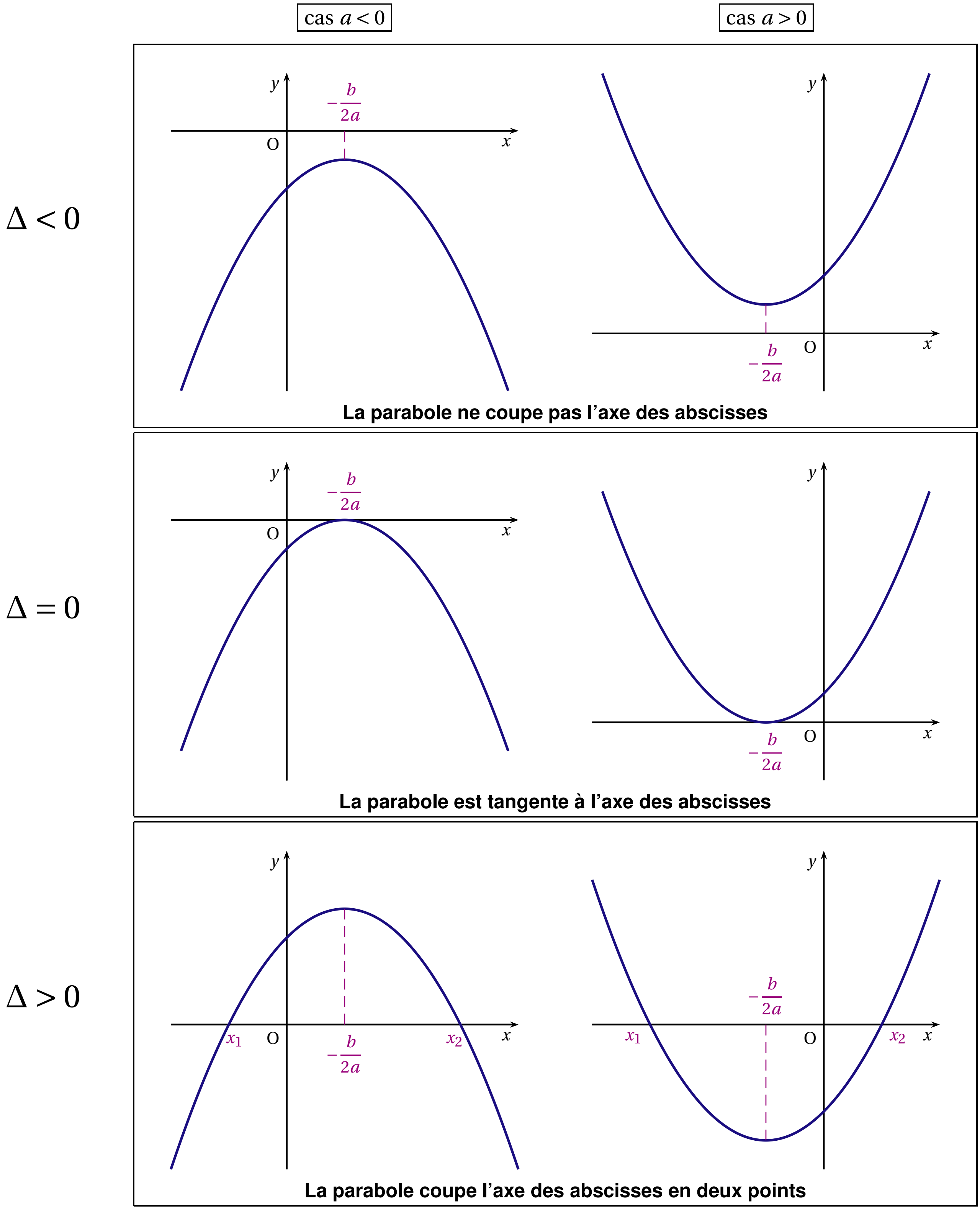
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $6x^2-3=7x$
Pour tout réel x, $6x^2-3=7x \iff 6x^2-7x-3=0$. Il s'agit de résoudre une équation du second degré avec $a=6$, $b=-7$ et $c=-3$
Le discriminant du trinôme est $\Delta=b^2-4ac$ soit $\Delta=(-7)^2-4\times6\times(-3)=49+72=121$.
Comme $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\quad\text{Soit}\quad x_1=\frac{7-11}{12}=-\frac{1}{3}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\quad\text{Soit}\quad x_2=\frac{7+11}{12}=\frac{3}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $6x^2-3=7x$ est $S=\left\{-\dfrac{1}{3};\dfrac{3}{2}\right\}$

2 INTERPRÉTATION GRAPHIQUE



REMARQUE

Les solutions éventuelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont aussi appelées les racines du trinôme

$$ax^2 + bx + c$$

V SIGNE DU TRINÔME

1 FACTORISATION

Factorisation du trinôme ax^2+bx+c avec $a \neq 0$:

— Si $\Delta < 0$ alors le trinôme ne se factorise pas.

— Si $\Delta = 0$ en notant x_0 l'unique racine : $f(x) = a(x-x_0)^2$.

— Si $\Delta > 0$ en notant x_1 et x_2 les deux racines : $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

✳ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

— Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est le produit par a d'une somme de deux nombres positifs; le trinôme ne se factorise pas.

— Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$. Soit en notant $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ l'unique racine on a :

$$f(x) = a(x-x_0)^2$$

— Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a\left(x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$. Soit en notant $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ les deux racines on a :

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

PROPRIÉTÉ

Soit f un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

— Si $\Delta < 0$ alors pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a.

— Si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.

— Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 désignant les deux racines du trinôme avec $x_1 < x_2$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \in \left]-\infty; x_1\right[\cup \left]x_2; +\infty\right[$ et $f(x)$ est du signe contraire de celui de a pour tout réel $x \in \left]x_1; x_2\right[$.

✳ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

— Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est le produit par a d'une somme de deux nombres positifs donc le signe du trinôme est le signe de a pour tout réel x.

— Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ donc $f(x)$ est nul pour $x = -\dfrac{b}{2a}$; pour les autres valeurs de x le signe du trinôme est le signe de a.

— Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 désignant les deux racines du trinôme avec $x_1 < x_2$ alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.
Étudions le signe du produit $a(x-x_1)(x-x_2)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x - x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

REMARQUE

On retiendra la règle « Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire de a entre les racines ».

EXEMPLES

1. Résoudre l'inéquation $-\dfrac{x^2}{4} - x + 3 \leqslant 0$.

   Étudions le signe du trinôme $-\dfrac{x^2}{4} - x + 3$ avec $a = -\dfrac{1}{4}$, $b = -1$ et $c = 3$

   Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ soit $\Delta = (-1)^2 - 4 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) \times 3 = 1 + 3 = 4$.

   Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{Soit} \qquad x_1 = \frac{1-2}{-\dfrac{1}{2}} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{Soit} \qquad x_2 = \frac{1+2}{-\dfrac{1}{2}} = -6$$

   Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire de a entre les racines. Ainsi :

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
Signe du trinôme $-\dfrac{x^2}{4} - x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   L'ensemble des solutions de l'inéquation $-\dfrac{x^2}{4} - x + 3 \leqslant 0$ est $S =]-\infty; -6] \cup [2; +\infty[$.

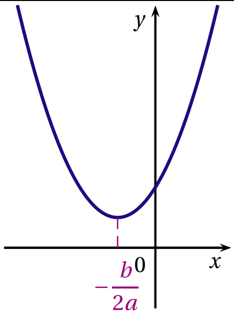
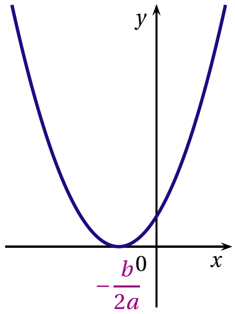
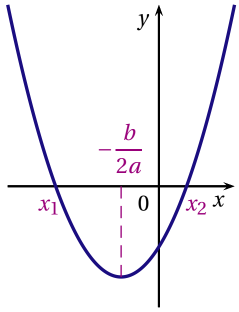
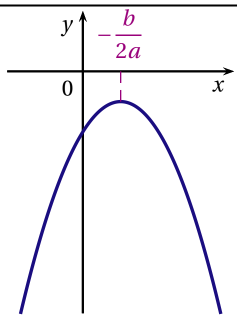
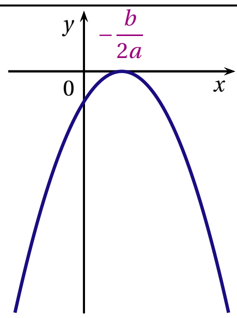
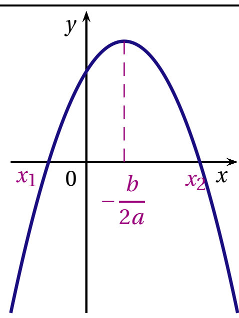
2. Étudier les positions relatives de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ avec la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - 3$
   Les positions relatives de la parabole et de la droite se déduisent du signe de

$$x^2 - (2x - 3) = x^2 - 2x + 3$$

   Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ soit $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8$.
   Comme $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a donc pour tout réel x, $x^2 - 2x + 3 > 0$.

   La parabole $\mathscr{P}$ est au dessus de la droite $\mathscr{D}$.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

<table>
<tr><td colspan="2">Discriminant
$\Delta = b^2 - 4ac$</td><td>$\Delta < 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta > 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$a > 0$</td><td>Variations</td><td colspan="3">x : $-\infty$ $-\frac{b}{2a}$ $+\infty$
$f(x)$: ↘ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ ↗</td></tr>
<tr><td>Courbe</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Solutions de
$ax^2 + bx + c = 0$</td><td>Pas de solution</td><td>Une solution :
$x_0 = -\frac{b}{2a}$</td><td>Deux solutions :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Signe de
$ax^2 + bx + c$</td><td>Strictement positif sur $\mathbb{R}$</td><td>Positif sur $\mathbb{R}$</td><td>Positif sur
$]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$
Négatif sur $[x_1; x_2]$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$a < 0$</td><td>Variations</td><td colspan="3">x : $-\infty$ $-\frac{b}{2a}$ $+\infty$
$f(x)$: ↗ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ ↘</td></tr>
<tr><td>Courbe</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Solutions de
$ax^2 + bx + c = 0$</td><td>Pas de solution</td><td>Une solution :
$x_0 = -\frac{b}{2a}$</td><td>Deux solutions :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Signe de
$ax^2 + bx + c$</td><td>Strictement négatif sur $\mathbb{R}$</td><td>Négatif sur $\mathbb{R}$</td><td>Négatif sur
$]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$
Positif sur $[x_1; x_2]$</td></tr>
</table>

EXERCICE 1

Étudier dans chacun des cas, les variations de la fonction et donner les coordonnées du sommet de la parabole représentative de la fonction.

1. f_1 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = -x^2 - 2x + 1$.
2. f_2 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x) = 2x^2 - x - \dfrac{3}{8}$.
3. f_3 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_3(x) = -2x^2 + 8x - 7$
4. f_4 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_4(x) = x^2 - \dfrac{x}{2} - 3$

EXERCICE 2

f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)
Dans chacun des cas suivants, répondre aux questions suivantes :

— Quel est le signe de a ?

— Quelle est la valeur de $-\dfrac{b}{2a}$?

— Quel est le signe du discriminant Δ ?

— Quel est le signe de c ?

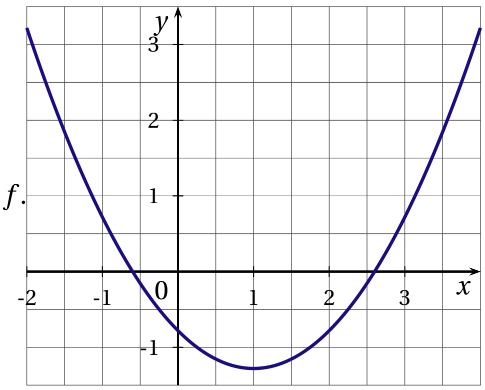
1. Le tableau des variations de f est :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

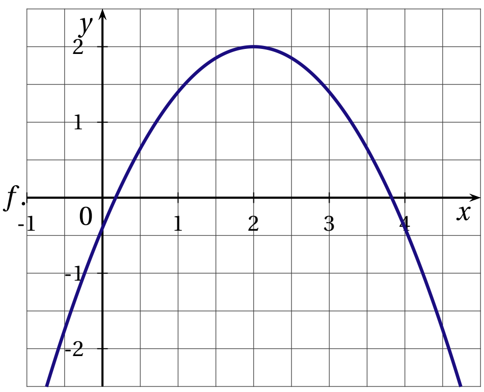
2. Le tableau des variations de f est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

3. La parabole ci-contre est la courbe représentative de la fonction f.

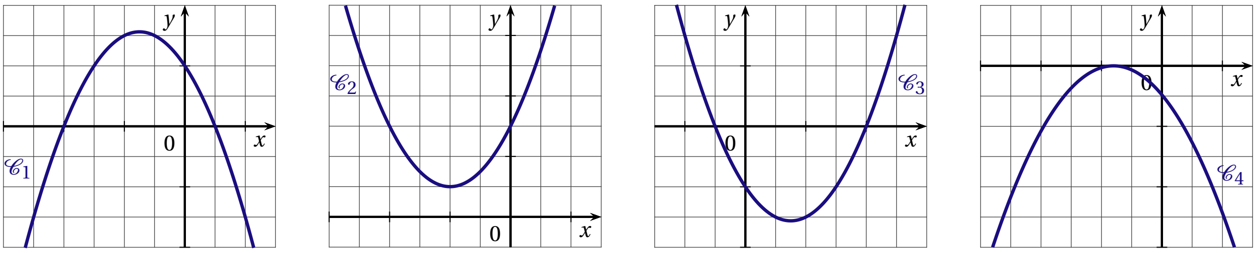


4. La parabole ci-contre est la courbe représentative de la fonction f.



EXERCICE 3

1. Soit f une fonction polynôme du second degré telle que le maximum de la fonction f soit égal à 0.
   Parmi les propositions suivantes quelles sont celles qui sont exactes ?
   a) $a > 0$ et $\Delta < 0$.
   b) $a < 0$ et $\Delta = 0$.
   c) $a < 0$ et $\Delta < 0$.
   d) La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en deux points.
   e) L'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution.
2. Les 4 paraboles ci-dessous, sont les courbes représentatives de quatre fonctions polynôme du second degré f_1, f_2, f_3 et f_4 .

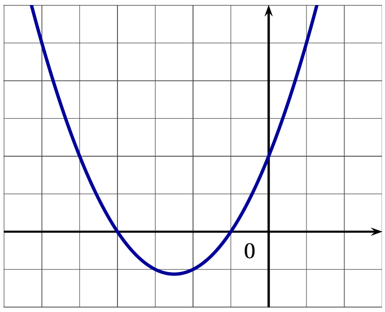


   À partir des informations données sur le signe de a et sur le discriminant, associer à chaque fonction sa courbe représentative :
   $f_1 : a > 0$ et $\Delta < 0$; $f_2 : a > 0$ et $\Delta > 0$; $f_3 : a < 0$ et $\Delta = 0$; $f_4 : a < 0$ et $\Delta > 0$.

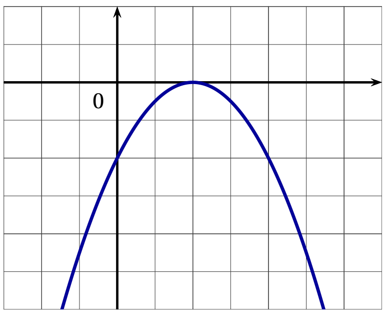
EXERCICE 4

f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)
Dans chacun des cas suivants, préciser le signe de a et indiquer si le discriminant Δ est négatif, positif ou nul.

1. La parabole ci-contre est la courbe représentative de la fonction f.



2. La parabole ci-contre est la courbe représentative de la fonction f.



3. Le tableau des variations de f est

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

4. Le tableau des variations de f est

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$

EXERCICE 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $2x^2 = x+3$
- $2x^2 - 2x - 1 = 0$
- $x^2 - 3x + 9$
- $8x^2 + 10x - 3 = 0$
- $1 - 3x + 2x^2 = 0$
- $3x^2 + x = 2x^2 - x + 2$

EXERCICE 6

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Sa courbe représentative dans un repère orthonormal est une parabole passant les points : $A(-2;7)$, $B(0;1)$ et $C(2;-1)$.

1. À l'aide d'un système d'équations, déterminer les réels a, b, et c, et en déduire l'équation de la parabole.
2. On note $\mathscr{P}$ la parabole d'équation : $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.
   Calculer les coordonnées de ses points d'intersection avec l'axe des abscisses.

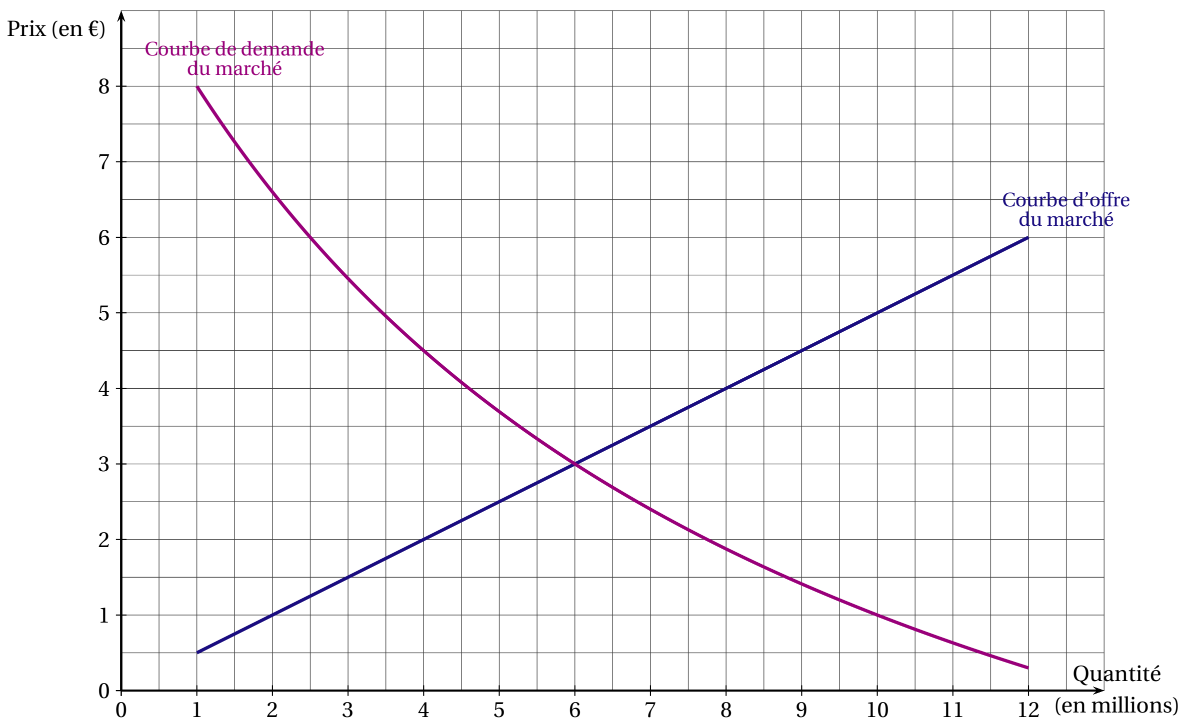
EXERCICE 7

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.
Une étude concernant un article A a permis d'établir que :

— la fonction d'offre f est donnée par $f(q) = 0{,}5q$

— la fonction demande g est donnée par $g(q) = \dfrac{78-6q}{q+8}$

où $f(q)$ et $g(q)$ sont les prix d'un article en euros, pour une quantité q comprise entre 1 et 12 millions d'unités.

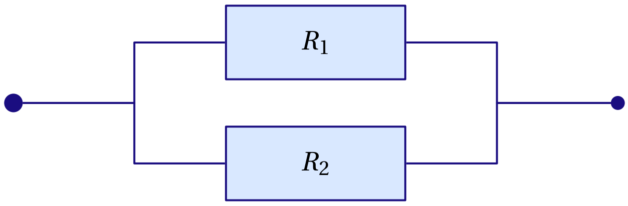


1. À l'aide du graphique précédent et en argumentant la réponse, déterminer si la demande est excédentaire quand le prix de vente d'un article est de 1 €.
2. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 4,50 €.
   a) Calculer la quantité d'articles offerte sur le marché;
   b) Calculer la quantité d'articles demandée sur le marché;
   c) Quel problème cela pose-t-il?
3. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée.
   Déterminer le prix d'équilibre et la quantité associée.

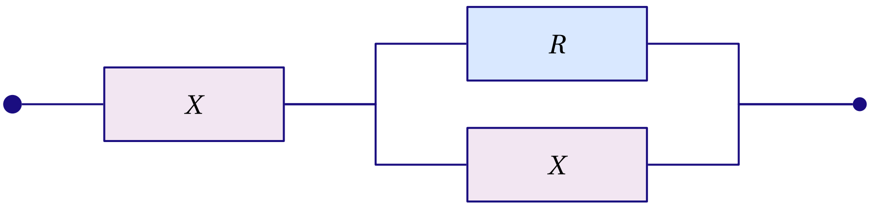
EXERCICE 8

Pour deux résistances R_1 et R_2 montées en série, la résistance du dipôle est $R = R_1 + R_2$

Pour deux résistances R_1 et R_2 montées en parallèle, la résistance du dipôle est $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$



On donne $R = 6\,\Omega$, déterminer la résistance X pour que la résistance du montage ci-dessous soit $16\,\Omega$.



EXERCICE 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- $-4x^2 + 4x + 15 \geqslant 0$
- $-2x^2 + 5x + 12 \geqslant 0$
- $x^2 + 2x \leqslant 1$
- $4x^2 \leqslant 4x + 1$
- $3x - x^2 \leqslant x^2 + 4$
- $(2x + 1)(1 - 3x) \geqslant 1$

EXERCICE 10

1. Soit P la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant les points $A(-2;4)$, $B(2;-1)$ et $C(6;2)$.
   À l'aide d'un système d'équations, déterminer les réels a, b, et c, et en déduire l'équation de la parabole.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2 - 5x + 2}{4} \leqslant -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{2}$.
3. Soit D la droite d'équation $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{2}$.
   Étudier les positions relatives de la droite D et de la parabole P.

EXERCICE 11

Une entreprise fabrique un produit dont le coût de production mensuel en euros est modélisé par :

$$C(x) = 0{,}02x^2 + 37{,}5x + 3000$$

où x est le nombre d'unités produites mensuellement et x dans l'intervalle $]0;1300]$.
Pour éviter de se retrouver avec un stock important, l'entreprise ajuste son prix de vente en fonction de la quantité produite. Le prix de vente unitaire en euros en fonction de x, est $P(x) = 100 - 0{,}03x$.
On suppose que l'ajustement du prix de vente unitaire permet d'écouler toute la production et on note $R(x)$ la recette mensuelle générée par la production et la vente de x produits.
Les fonctions coût et recette sont représentées ci-dessous dans un repère orthogonal.

On cherche à déterminer la quantité que l'entreprise devrait produire mensuellement pour maximiser son profit.

1. Montrer que le bénéfice B est donné par $B(x) = -0{,}05x^2 + 62{,}5x - 3000$.
2. Déterminer graphiquement puis par le calcul, les valeurs de x pour lesquelles l'entreprise réalise un profit.
3. Étudier les variations de la fonction B. En déduire la quantité x que l'entreprise doit produire mensuellement pour maximiser son profit. Quel est le montant du profit maximum ?

EXERCICE 12

Une entreprise fabrique un produit « Bêta ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles.
Le coût total, exprimé en milliers d'euros, de fabrication de x milliers d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $]0;15]$ par :

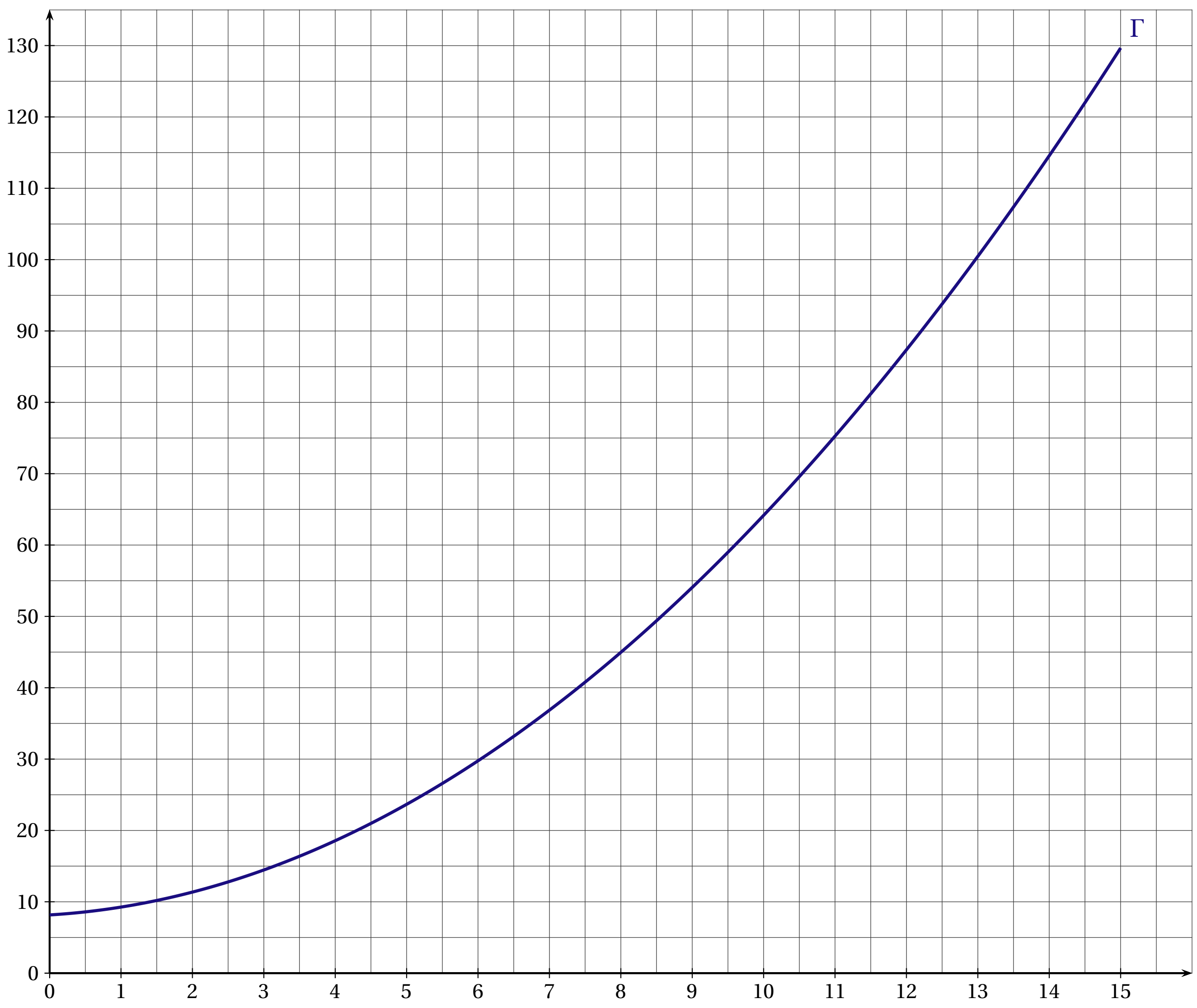
$$C(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}6x + 8{,}16$$

La représentation graphique Γ de la fonction coût total est donnée dans l'annexe ci-dessous à rendre avec la copie.
On admet que chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 8 €.

1. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 4 000 articles ou fabriquer et vendre 12 000 articles ?

2. On désigne par $R(x)$ le montant en milliers d'euros de la recette mensuelle obtenue pour la vente de x milliers d'articles du produit « Bêta ». On a donc $R(x) = 8x$.
   a) Tracer dans le repère donné en annexe la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction recette.
   b) Par lecture graphique déterminer :
      — l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif;
      — la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
3. On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles.
   a) Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles, est donné par $B(x) = -0{,}5x^2 + 7{,}4x - 8{,}16$ avec $x \in]0;15]$.
   b) Étudier le signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).
   c) Étudier les variations de la fonction B sur $]0;15]$.
   En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal?

ANNEXE



EXERCICE 13

La fonction f définie sur $]0;20]$ par $f(x) = 500 - 20x + \dfrac{100}{x}$, modélise le nombre d'articles vendus en fonction du prix unitaire x exprimé en euros.

1. Calculer le montant en euros de la recette si le prix de vente d'un article est : de 5 euros ; de 10 euros.
2. Montrer que la recette en fonction du prix x s'exprime par $R(x) = -20x^2 + 500x + 100$
3. Étudier les variations de la fonction recette sur l'intervalle $]0;20]$.
4. Déterminer le prix de vente permettant d'obtenir une recette maximale.
   En déduire le nombre d'articles vendus à ce prix.
5. Dans quel intervalle de prix, doit se situer le prix de vente pour obtenir une recette supérieure à 2 980 € ?

EXERCICE 14

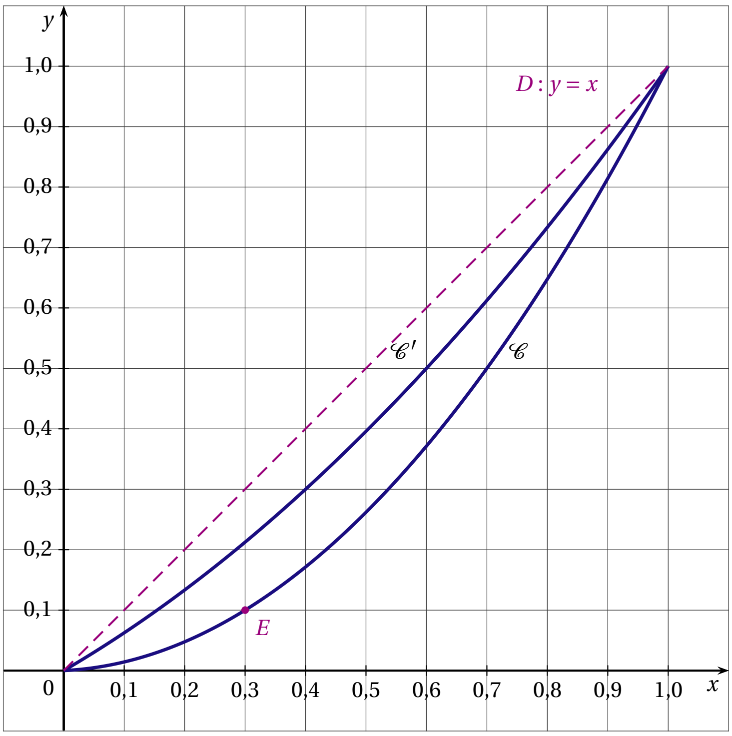
1. Résoudre l'équation $X^2 - 7X - 18 = 0$
2. En déduire une expression factorisée de $f(x)$ où f est la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x^4 - 7x^2 - 18$$

3. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 15

On considère les fonctions f et définies sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{5x^2 + 7x}{12}$ et $g(x) = \dfrac{20x^2 + x}{21}$, représentées ci-dessous par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$



1. Déterminer la courbe représentative de la fonction f en justifiant la réponse.
2. Montrer que pour tout réel x de $[0;1]$, on a : $f(x) \leqslant x$ et $g(x) \leqslant x$.

3. Un cabinet d'audit a été chargé d'étudier la répartition des salaires dans deux filiales d'une entreprise, appelées A et B. Pour l'étude, les salaires sont classés par ordre croissant.

   Le cabinet d'audit a modélisé la répartition de salaires par la fonction f pour la filiale A et par la fonction g pour la filiale B.

   Lorsque x représente un pourcentage de salariés, $f(x)$ et $g(x)$ représentent le pourcentage de la masse salariale que se partagent ces salariés dans leurs filiales respectives.

   Exemple : pour la courbe $\mathscr{C}$, le point $E(0{,}3;0{,}1)$ signifie que 30 % des salariés ayant les plus bas salaires se partagent 10 % de la masse salariale.

   a) Calculer le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires.

   b) Pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, laquelle des filiales, A ou B, distribue la plus grande part de la masse salariale ?

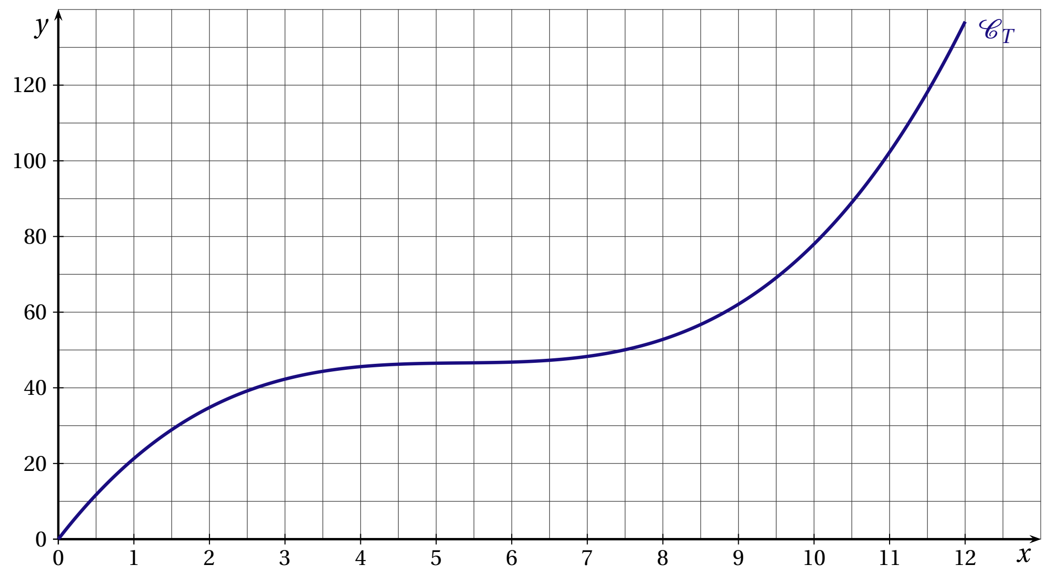
   c) Quelle filiale parait avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire ?

EXERCICE 16

Une entreprise fabrique un produit « Bêta ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 12 000 articles. Le coût total, exprimé en milliers d'euros, de fabrication de x milliers d'articles est modélisé par la fonction f définie sur $]0;12]$ par :

$$f(x) = 0{,}3x^3 - 4{,}8x^2 + 25{,}8x$$

La représentation graphique $\mathscr{C}_T$ de la fonction coût total est donnée ci-dessous :



Le coût moyen de production C mesure le coût en euro par article produit.

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $]0;12]$ par $C(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

1. Soit A le point d'abscisse a de la courbe $\mathscr{C}_T$.

   a) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal au coût moyen $C(a)$

   b) Conjecturer graphiquement, les variations de la fonction C

2. a) Étudier les variations de la fonction C.

   b) En déduire le prix de vente minimal, arrondi à l'euro près, d'un article pour que l'entreprise ne travaille pas à perte ?

Chapitre 3

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

I RAPPELS SUR LES FONCTIONS

1 FONCTION

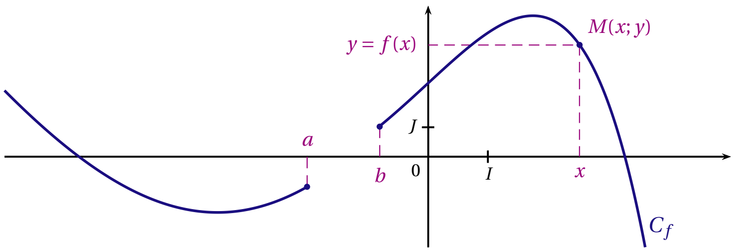
Définir une fonction f sur un ensemble $\mathscr{D}$ de nombres réels, c'est associer à chaque nombre $x \in \mathscr{D}$ un **unique** nombre réel noté $f(x)$. On note :

$$f : \begin{cases} \mathscr{D} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

— $\mathscr{D}$ est l'ensemble de définition de la fonction f. x est la variable.
— Le nombre $f(x)$ est l'image du réel x par la fonction f.
— Quand on sait que $f(x) = y$, on dit que x est un antécédent de y par la fonction f.

2 COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ de nombres réels.
La courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère, est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $\begin{cases} x \in \mathscr{D} \\ y = f(x) \end{cases}$.



C_f est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$

3 VARIATIONS

FONCTION CROISSANTE

Dire que la fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels a et b de I :

$$\text{si } a \leqslant b \text{ alors } f(a) \leqslant f(b)$$

On dit qu'une fonction f croissante conserve l'ordre : les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans le même ordre.

FONCTION DÉCROISSANTE

Dire que la fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels a et b de I :

$$\text{si } a \leqslant b \text{ alors } f(a) \geqslant f(b)$$

On dit qu'une fonction f décroissante change l'ordre : les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans un ordre contraire.

REMARQUE

On dit que f est *monotone* sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

EXTREMUM

— Dire que la fonction f admet un maximum en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \leqslant f(a)$.

— Dire que la fonction f admet un minimum en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \geqslant f(a)$.

II FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

1 FONCTION AFFINE

DÉFINITION

Soit a et b deux réels.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est une fonction affine.

PROPORTIONNALITÉ DES ACCROISSEMENTS

f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous nombres réels distincts $x_1 \neq x_2$, on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

VARIATION

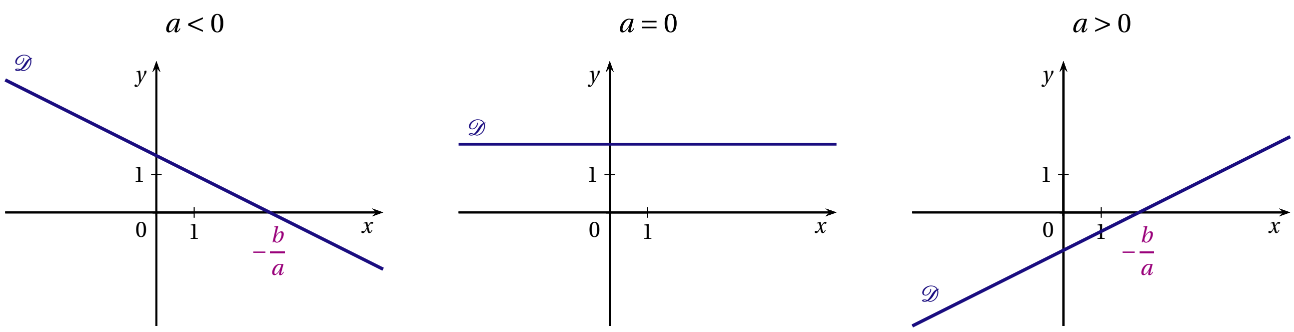
Soit a et b deux réels.

— Si a est positif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est croissante.

— Si a est négatif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est décroissante.

COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit a et b deux réels.
La courbe représentative de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$.



2 FONCTION CARRÉ

DÉFINITION

La fonction carré est la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$

PROPRIÉTÉS

— Un carré est toujours positif ou nul. Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$.
— Un nombre et son opposé ont le même carré. Pour tout réel x, on a $x^2 = (-x)^2$.

VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

La fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

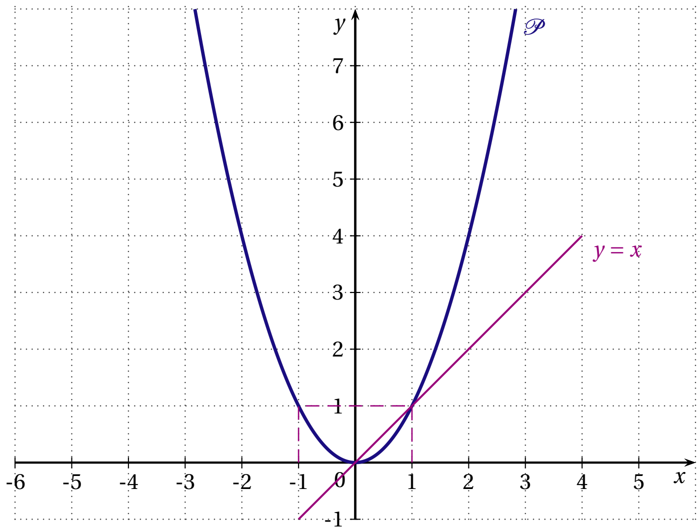
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

CONSÉQUENCES

— Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire. Si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors $a^2 \geqslant b^2$
— Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $a^2 \leqslant b^2$

COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.



REMARQUE :

Si $0 \leqslant a \leqslant 1$ alors $a^2 \leqslant a$. Sur l'intervalle $[0;1]$, la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ est au dessous de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

3 FONCTION INVERSE

DÉFINITION

La fonction inverse est la fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

ENSEMBLE DE DÉFINITION

L'ensemble de définition de la fonction inverse est l'ensemble des réels non nuls noté $\mathbb{R}^*$, c'est la réunion de deux intervalles $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

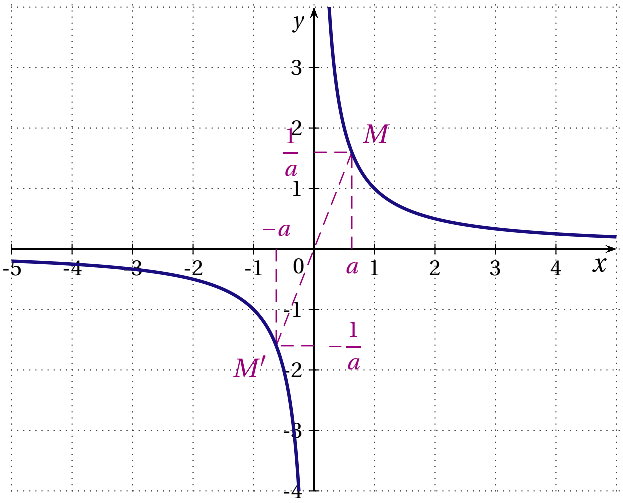
La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction inverse est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.



REMARQUES :

— Pour tout réel $a \neq 0$, $f(-a) = -\dfrac{1}{a} = -f(a)$.
Les points $M\big(a; f(a)\big)$ et $M'\big(-a; f(-a)\big)$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
L'hyperbole admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

— On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et positif.
On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.
Graphiquement, l'hyperbole se rapproche de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$) , et de l'axe des ordonnées lorsque x se rapproche de 0.
On dit que l'hyperbole a pour asymptotes les axes du repère.

4 FONCTION RACINE CARRÉE

DÉFINITION 1

Soit a un réel positif. Le nombre $\sqrt{a}$ est le seul réel positif dont le carré est a.

DÉFINITION 2

La fonction racine carrée est la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

REMARQUE

Il ne faut pas confondre $\left(\sqrt{x}\right)^2$ et $\sqrt{x^2}$:

— $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ seulement pour $x \geqslant 0$.

— $\begin{cases} \text{Si } x \geqslant 0, \text{ alors } \sqrt{x^2}=x. \\ \text{Si } x \leqslant 0, \text{ alors } -x \geqslant 0, \text{ d'où } \sqrt{x^2} = -x. \end{cases}$

EXEMPLE

$$\sqrt{(-0,5)^2} = \sqrt{0,25} = 0,5$$

VARIATIONS DE LA FONCTION RACINE CARRÉE

La fonction racine carrée définie pour tout réel x positif par $f(x)=\sqrt{x}$ est strictement croissante.

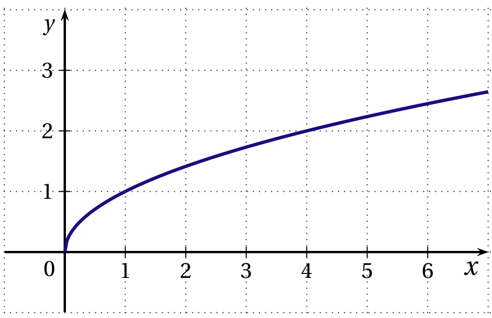
✻ DÉMONSTRATION

Soit a et b deux réels positifs tels que $0 \leqslant a < b$:

$$a-b = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$$

Comme $0 \leqslant a < b$, alors $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) > 0$. Par conséquent, $a-b$ et $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ sont de même signe.
Ainsi, si $a-b<0$ alors $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)<0$ soit $f(a)<f(b)$. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



5 FONCTION CUBE

DÉFINITION

La fonction cube est la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=x^3$.

VARIATIONS DE LA FONCTION CUBE

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

✻ DÉMONSTRATION

Soit a et b deux réels tels que $a < b$:

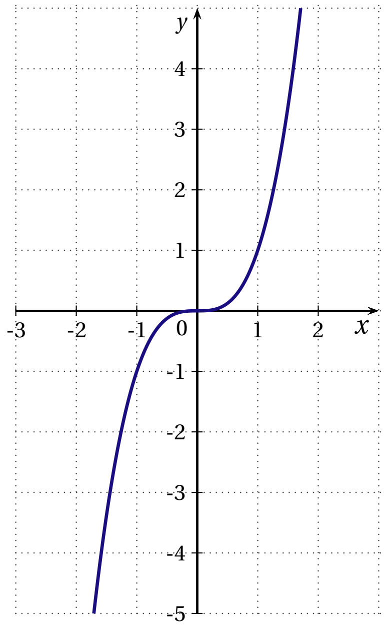
— Si $a < 0$ et $b > 0$, alors $a^3 < 0$ et $b^3 > 0$ donc $a^3 < b^3$.

— Si a et b sont de même signe :
Pour tous réel a et b on a

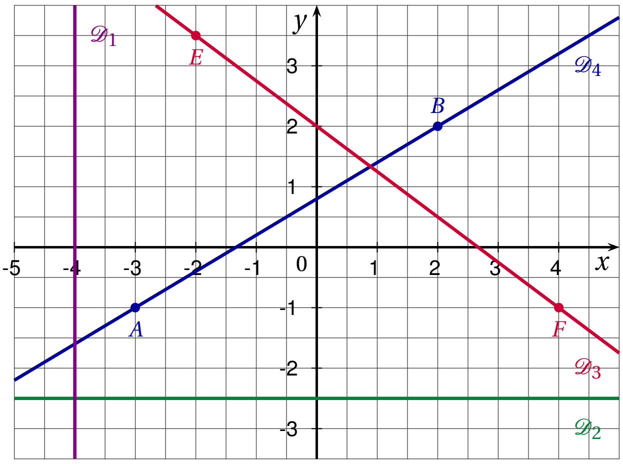
$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

a et b étant de même signe, le produit $ab > 0$ d'où $a^2 + ab + b^2 > 0$. Par conséquent, $a^3 - b^3$ est du même signe que $(a-b)$.
Comme $a < b$ on en déduit que $a^3 < b^3$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



EXERCICE 1



Dans chaque cas où la droite représentée ci-dessus, est la courbe représentative d'une fonction, déterminer la fonction affine associée.

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction affine f puis donner son sens de variation

1. $f(-2) = 3$ et $f(3) = -1$
2. La droite représentant la fonction f passe par les points de coordonnées $(-2;-1)$ et $(1;3)$.

EXERCICE 3

1. f est une fonction affine définie pour tout réel x telle que $f(-1{,}5) = -2$ et $f(3) = 1$.
   Donner une expression de $f(x)$.
2. g est une fonction affine définie pour tout réel x telle que $g(2) = -1$ et $g(4) - g(-2) = -9$.
   Donner une expression de $g(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

EXERCICE 4

1. Donner un encadrement de $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants :

   a) $-0{,}5 < x < -0{,}4$; b) $\frac{2}{3} < x < 1$; c) $x > \frac{1}{5}$; d) $x \leqslant -\sqrt{2}$
2. Dans chaque cas, trouver les réels x qui satisfont la condition donnée :
   a) $\frac{1}{x} \leqslant \frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{x} > 2$; c) $-2 < \frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{5}$; d) $-\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 3$

EXERCICE 5

Existe-t-il deux entiers naturels consécutifs dont la différence des inverses est égale à l'inverse de 600 ?

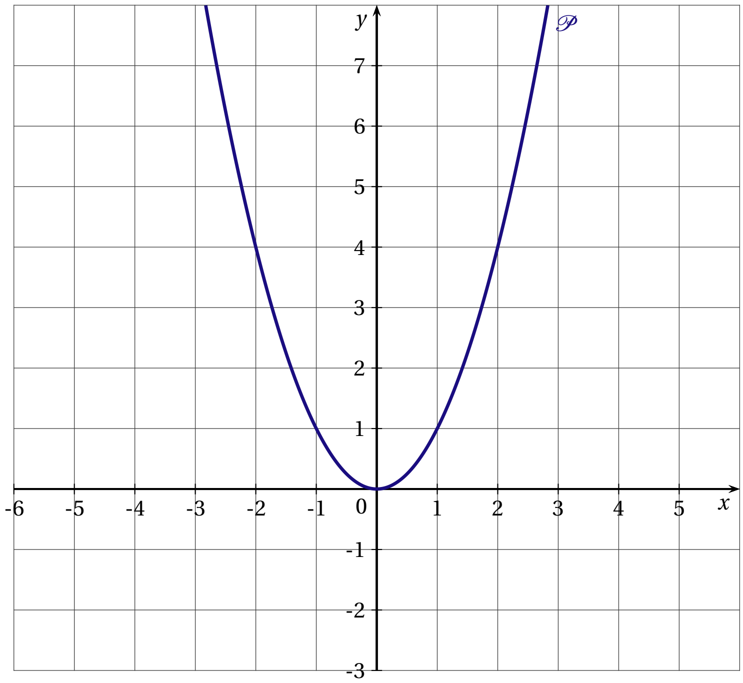
EXERCICE 6

1. Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses.
   a) $x > 4 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{4}$; b) $x \leqslant -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} \geqslant -1{,}5$; c) $x > -2 \Rightarrow \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$; d) $x < 0{,}6 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{5}{3}$
2. Pour chacune des implications précédentes, énoncer la réciproque et dire si celle ci est vraie ou fausse.

EXERCICE 7

La parabole $\mathscr{P}$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

1. Soit g la fonction affine définie pour tout réel x par $g(x) = -3x - \dfrac{9}{4}$.
   a) Tracer la droite $\mathscr{D}$ représentative de la fonction g.
   b) Étudier les positions relatives de la droite $\mathscr{D}$ et de la parabole $\mathscr{P}$.
2. Déterminer une équation de la droite Δ n'ayant que le point A d'abscisse 2 en commun avec la parabole. (*On dit que la droite Δ est tangente à la parabole $\mathscr{P}$ au point A d'abscisse 2.*)

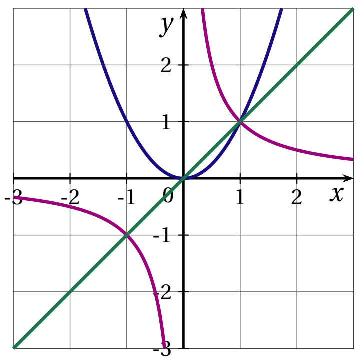


EXERCICE 8

1. Soit x un réel tel que $1 < x \leqslant 2$
   a) Montrer que $(x-1)^3 \leqslant (x-1)^2$
   b) Que peut-on en déduire pour $\dfrac{1}{(x-1)^3}$ et $\dfrac{1}{(x-1)^2}$?
2. La proposition « Pour tout réel $x > 1$, $\dfrac{1}{(x-1)^3} \geqslant \dfrac{1}{(x-1)^2}$ » est-elle vraie ou fausse ?

EXERCICE 9

1. Les courbes représentatives des fonctions $f : x \longmapsto x^2$, $g : x \longmapsto x$ et $h : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sont représentées sur le graphique ci-dessous



Par lecture graphique, émettre une conjecture à propos de l'ordre croissant des trois nombres a, a^2 et $\dfrac{1}{a}$ selon les différentes valeurs du réel a.

2. Si $0 < a \leqslant 1$ montrer que $a^2 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{a}$

EXERCICE 10

Montrer que pour tous réels a et b positifs on a : $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqslant \sqrt{a+b}$.

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{8-2x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Résoudre l'équation $f(x)=3$.

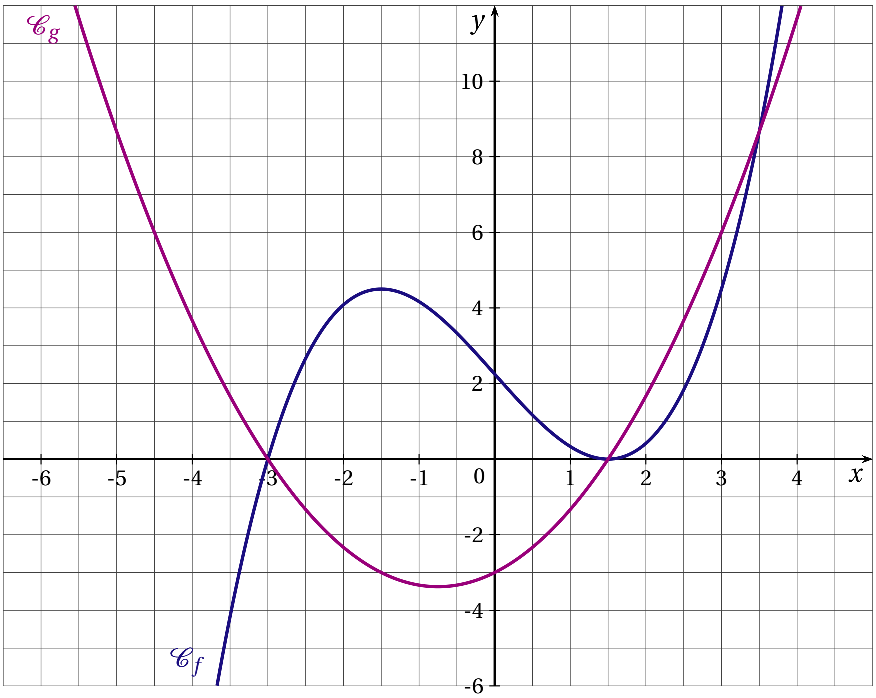
EXERCICE 12

Dans chacun des cas suivants, étudier le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. f est définie par $f(x)=100-0{,}1x^3$.
2. f est définie par $f(x)=\dfrac{x^3}{8}-1$.

EXERCICE 13

Soient f et g les fonctions définies pour tout réel$x$ par $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{9}{4}x+\dfrac{9}{4}$ et $g(x)=\dfrac{2}{3}x^2+x-3$.
Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées ci-dessous.



1. a) Calculer $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.
   b) Par lecture graphique, donner le tableau de variation de la fonction f.
   c) Montrer que pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{(x+3)(2x-3)^2}{12}$.
   d) Établir le tableau de signes de $f(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x)=0$.
3. Étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Chapitre 4

DÉRIVATION

I NOMBRE DÉRIVÉ

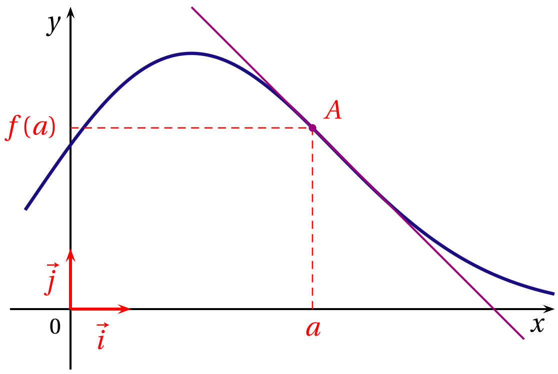
1 DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I.
Lorsque le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite réelle quand x tend vers a en restant dans I, on dit que la fonction f est dérivable en a et cette limite réelle, notée $f'(a)$, est appelée le nombre dérivé de f en a.
On note alors :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

2 TANGENTE À UNE COURBE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a où a est un réel de I, et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.
La droite passant par le point $A\left(a;f(a)\right)$ de la courbe C_f et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a.



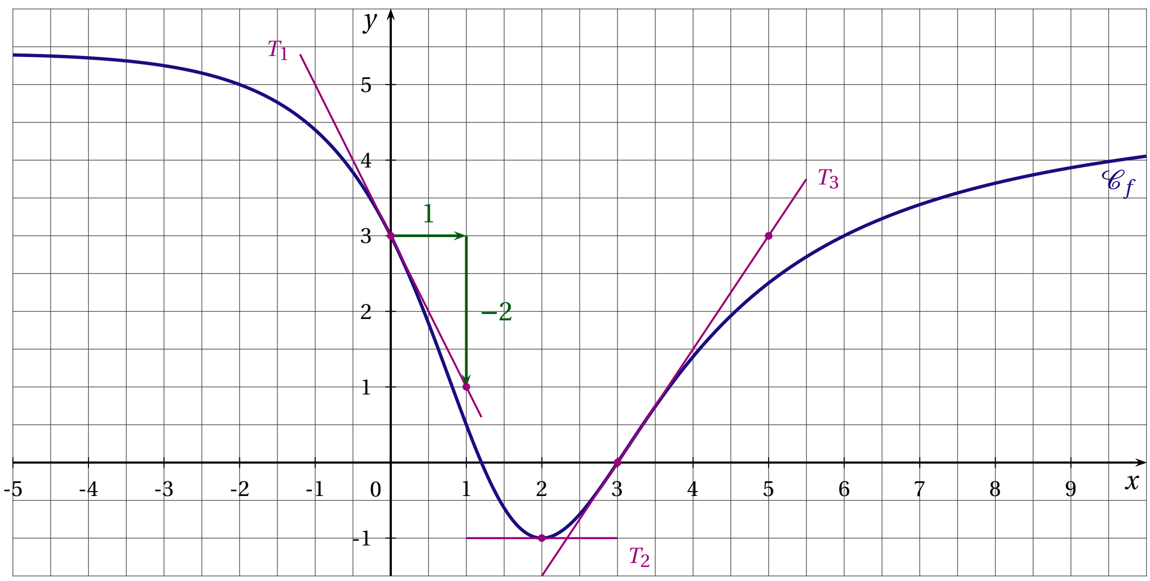
PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a où a est un réel de I, et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.
L'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$y=f'(a)\times(x-a)+f(a)$$

EXEMPLE

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.

1. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la tangente T_1 à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   Par lecture graphique, le coefficient directeur de la droite T_1 est égal à -2. Ainsi, $\boxed{f'(0) = -2}$
2. La tangente T_2 à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses. Donc $\boxed{f'(2) = 0}$
3. La droite T_3, tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 passe par les points de coordonnées $(3;0)$ et $(5;3)$. Son coefficient directeur a est
   $$a = \frac{3-0}{5-3} = \frac{3}{2}$$
   Le nombre dérivé $f'(3)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3. Donc $\boxed{f'(3) = \frac{3}{2}}$

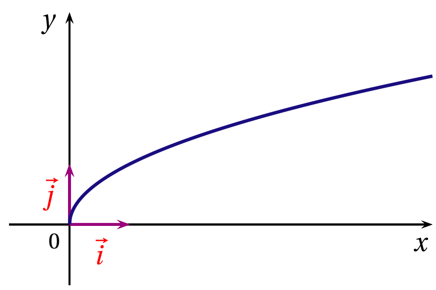
REMARQUE

La courbe représentative d'une fonction f peut avoir une tangente en un point a sans que la fonction soit dérivable en a.

La courbe représentative de la fonction racine carrée est tangente à la droite d'équation $x = 0$ en 0.
Or la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 en effet :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

ce n'est pas une limite finie donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.



II FONCTION DÉRIVÉE

1 DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Lorsque pour tout réel x appartenant à I, f est dérivable en x, on dit que f est dérivable sur I.

La fonction qui associe à tout réel x appartenant à I son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f sur l'intervalle I. Elle est notée f'.

2 DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

fonction définie et dérivable sur :	fonction f définie par :	fonction dérivée f' définie par :
$\mathbb{R}$	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$	a
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n \quad (n \text{ entier } n \geqslant 1)$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n \text{ entier } n \geqslant 1)$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$]0;+\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3 DÉRIVÉES ET OPÉRATIONS

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I

	fonction f définie par :	fonction dérivée f' :
Produit d'une fonction par un réel k	ku	ku'
Somme	$u+v$	$u'+v'$
Produit	$u\times v$	$u'v+uv'$
Quotient ($v\neq 0$ sur I)	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
Inverse ($v\neq 0$ sur I)	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$

EXEMPLES

1. Produit de deux fonctions

   Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\left(2+\dfrac{x^2}{3}\right)\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$. Calculer $f'(x)$.

   Sur $]0;+\infty[$ f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

   $f=uv$ d'où $f'=u'v+uv'$. Avec pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$,

$$u(x)=2+\frac{x^2}{3} \quad \text{d'où} \quad u'(x)=\frac{2x}{3}$$
$$v(x)=1-\frac{2}{x} \quad \text{d'où} \quad v'(x)=\frac{2}{x^2}$$

   Soit pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{2x}{3}\times\left(1-\frac{2}{x}\right)+\frac{2}{x^2}\times\left(2+\frac{x^2}{3}\right)\\ &=\frac{2x}{3}-\frac{4}{3}+\frac{4}{x^2}+\frac{2}{3}\\ &=\frac{2x^3-2x^2+6}{3x^2}\end{aligned}$$

   Ainsi, f' est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f'(x)=\dfrac{2x^3-2x^2+6}{3x^2}$.

2. Quotient de deux fonctions

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4x-3}{x^2+1}$. Calculer $f'(x)$.

   Sur $\mathbb{R}$, f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables.

   $f=\dfrac{u}{v}$ d'où $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. Avec pour tout réel x,

$$u(x)=4x-3 \quad \text{d'où} \quad u'(x)=4$$
$$v(x)=x^2+1 \quad \text{d'où} \quad v'(x)=2x$$

   Soit pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{4(x^2+1)-2x(4x-3)}{(x^2+1)^2}\\ &=\frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2}\\ &=\frac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

   Ainsi, f' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=\dfrac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2}$.

III DÉRIVÉE ET VARIATIONS D'UNE FONCTION

1 THÉORÈME 1

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

— Si f est constante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) = 0$.

— Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \geqslant 0$.

— Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \leqslant 0$.

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

2 THÉORÈME 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' la dérivée de f sur I.

— Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

— Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

— Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

3 THÉORÈME 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel appartenant à I.

1. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
2. Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0.

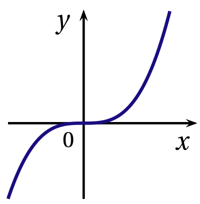
x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	*minimum*	↗	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	*maximum*	↘	

REMARQUES

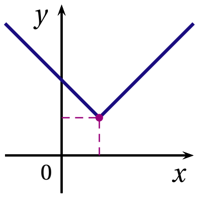
1. Dans la proposition 2. du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

   Considérons la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$.
   $f'(0) = 0$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) > 0$.
   La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas d'extremum en 0.



2. Une fonction peut admettre un extremum local en x_0 sans être nécessairement dérivable.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x-1|+1$.
f est une fonction affine par morceaux, f admet un minimum $f(1) = 1$ or f n'est pas dérivable en 1.



POINT MÉTHODE

En pratique, pour étudier les variations d'une fonction f dérivable sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$:

— on détermine la dérivée f' de f ;

— on étudie le signe de f' sur $\mathscr{D}_f$;

— on applique le théorème 2 sur chacun des intervalles de $\mathscr{D}_f$ où le signe de f' est constant ;

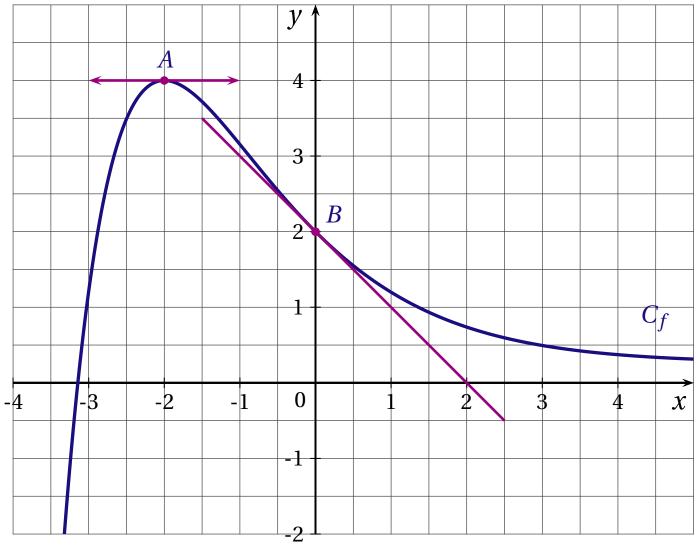
— on dresse le tableau des variations en indiquant les extremums, s'il y a lieu et éventuellement les limites aux bornes de son ensemble de définition.

EXERCICE 1

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dans un repère du plan. On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}_f$ vérifie les propriétés suivantes :

— La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses;

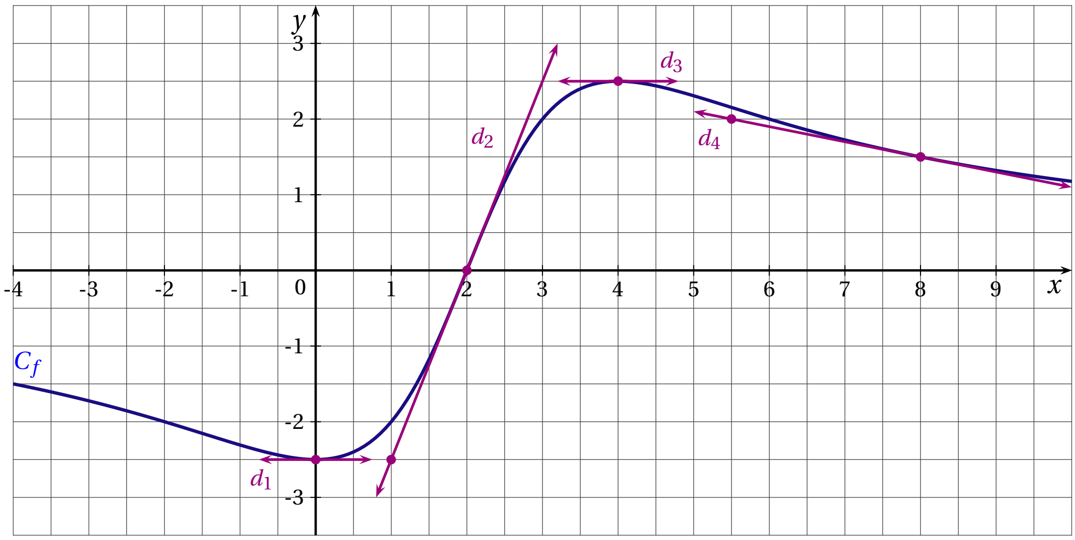
— la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $B(0;2)$ passe par le point de coordonnées $(2;0)$.



Donner les valeurs de $f(-2)$, $f'(-2)$ et $f'(0)$.

EXERCICE 2

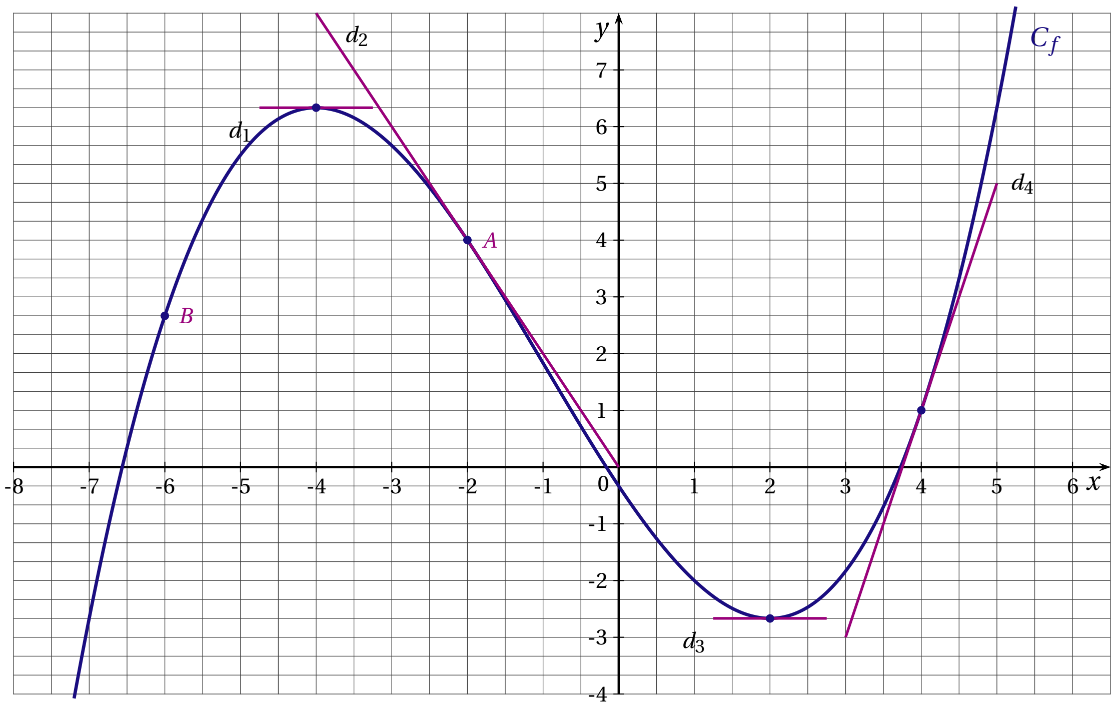
Sur la figure ci-dessous les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



1. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$ et $f(8)$.
2. Déterminer graphiquement les nombres dérivés $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(4)$ et $f'(8)$.
3. En déduire les équations réduites des tangentes d_1, d_2, d_3 et d_4.

EXERCICE 3

Sur la figure ci-dessous, C_f est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont tangentes à la courbe C_f.



1. Déterminer graphiquement $f(-4)$, $f(-2)$ et $f(2)$.
2. Déterminer graphiquement les nombres dérivés $f'(-4)$ et $f'(2)$.
3. La tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse -2 passe par l'origine du repère. Déterminer $f'(-2)$.
4. La tangente T à la courbe C_f au point $B\left(-6;\dfrac{8}{3}\right)$ est parallèle à la droite d_4.

   Déterminer $f'(-6)$ puis, donner une équation de la tangente T à la courbe au point B. Tracer cette droite sur le graphique précédent.

EXERCICE 4

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Calculer la dérivée $f'(x)$.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x - 5$
2. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x} + 1$
3. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{2} + 3x^2 - \dfrac{5}{x}$

EXERCICE 5

1. Donner une équation de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2 - 3x + 5$ au point d'abscisse -1.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

   Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f parallèle à la droite d'équation $y = x$.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{13x}{2} + \dfrac{29}{3}$

1. Donner une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.
2. La courbe représentative de la fonction f admet-elle une deuxième tangente parallèle à la droite $\mathscr{D}$?

   Si oui donner son équation.

EXERCICE 7

Dans chaque cas, f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Calculer $f'(x)$.

1. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^3}{2}-3x^2+\dfrac{5}{x}$
2. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^3+2\sqrt{x}+5$.
3. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}-x$

EXERCICE 8

Calculer la dérivée de chacune des fonctions.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1-2x)\left(0{,}5x^2+1\right)$
2. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\left(1-x^2\right)\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$.
3. g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=(x+1)\sqrt{x}$
4. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$
5. f est définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.
6. h est la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$

EXERCICE 9

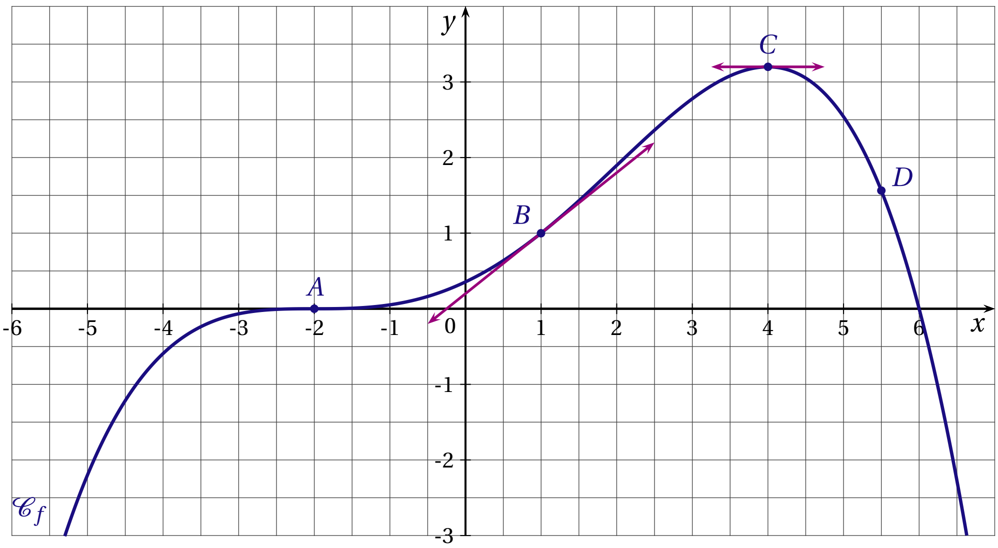
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de la fonction f.
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points $A(-2;0)$, $B(1;1)$, $C(4;3{,}2)$ et $D\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{25}{16}\right)$.

L'axe des abscisses est tangent en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une deuxième tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C.

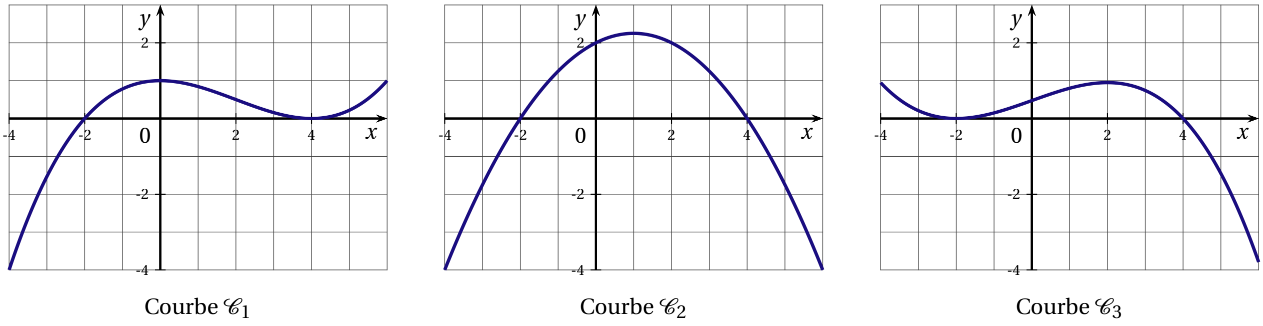
La tangente à la courbe au point B passe par le point $M(-4;-3)$.



À partir du graphique et des données de l'énoncé, répondre aux questions suivantes.

1. Dresser sans justification le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $f'(-2)$, $f'(4)$ et $f'(1)$.
3. Quel est l'ensemble solution de l'inéquation $f'(x)\geqslant 0$?

4. On donne $f'(5{,}5) = -2{,}5$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D avec l'axe des ordonnées.
5. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f'. Déterminer laquelle.



EXERCICE 10

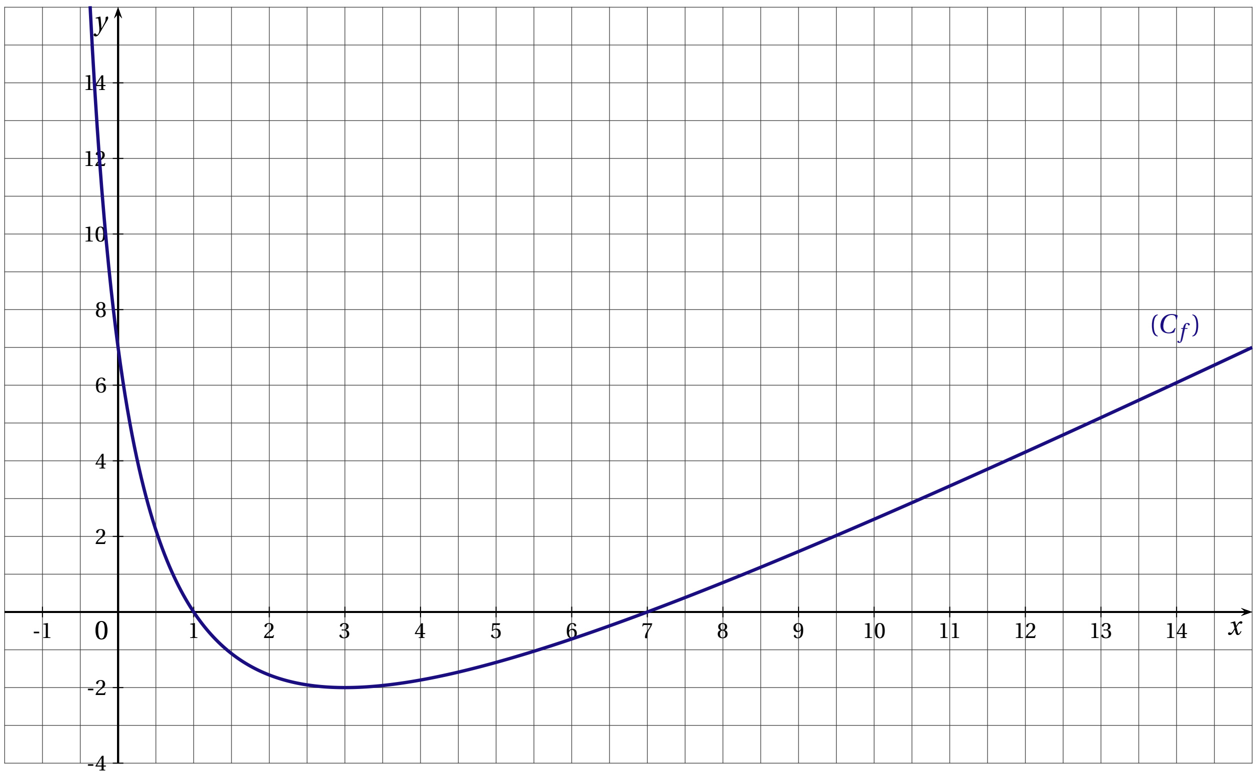
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x+1}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Donner le tableau des variations de f.

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-8x+7}{x+1}$. On note f' la dérivée de la fonction f.
Sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, notée C_f, est donnée ci-dessous à titre indicatif.

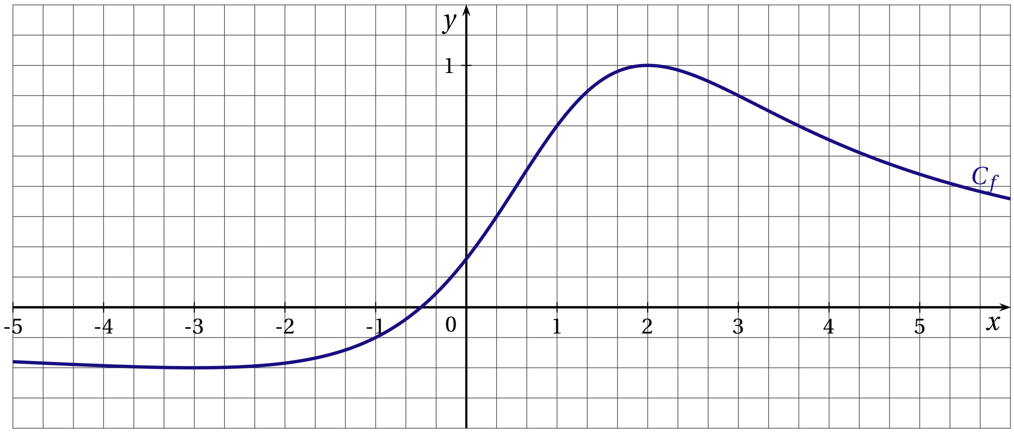
1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Donner le tableau des variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
   Tracer sur le graphique donné, la tangente T.



EXERCICE 12

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-2x+5}$. On note C_f sa courbe représentative.

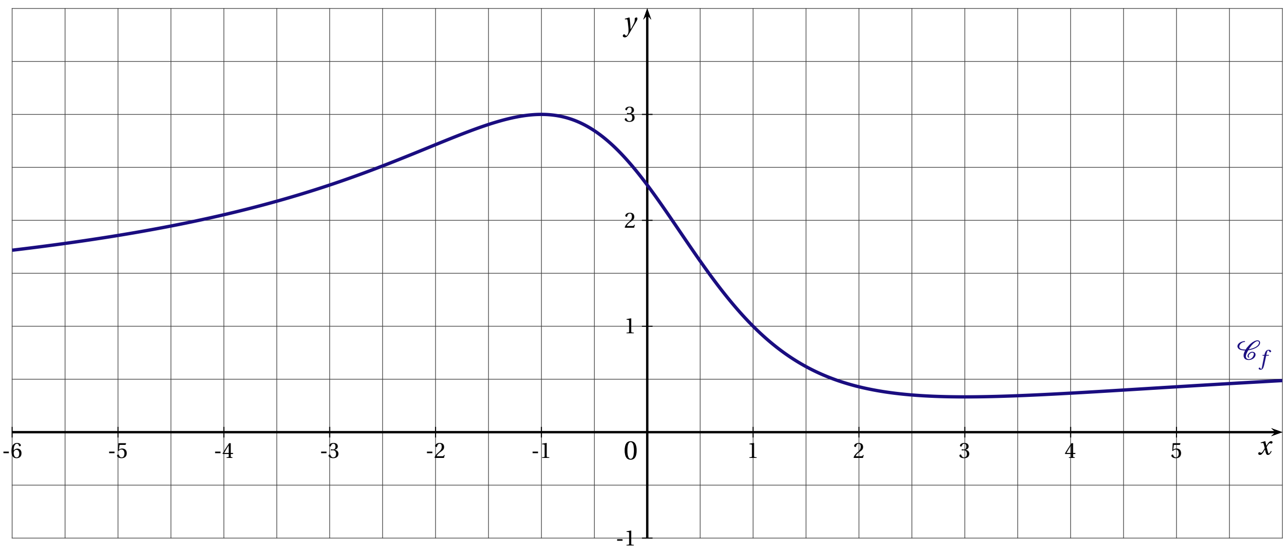
1. Calculer la dérivée de la fonction f. Vérifier que $f'(x)=\dfrac{-2x^2-2x+12}{\left(x^2-2x+5\right)^2}$
2. a) Étudier le signe de $f'(x)$.
   b) En déduire le tableau des variations de la fonction f.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
   Tracer la tangente T dans le repère ci-dessous.



EXERCICE 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-4x+7}{x^2+3}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

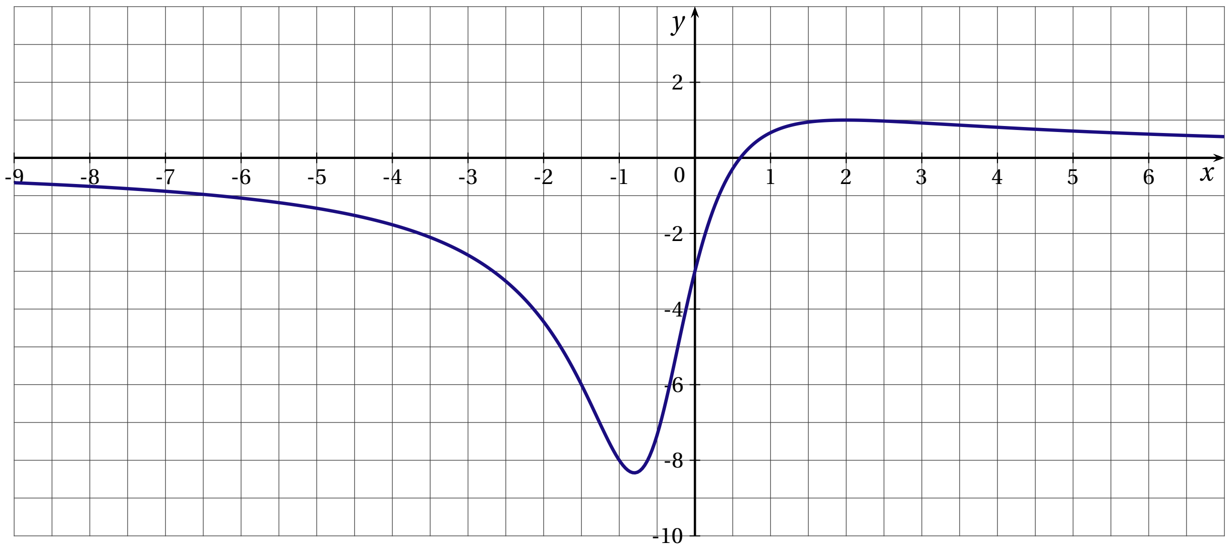
1. Montrer que la dérivée de la fonction f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=\dfrac{4\left(x^2-2x-3\right)}{\left(x^2+3\right)^2}$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
   Représenter la tangente T sur le graphique ci-dessous.



EXERCICE 14

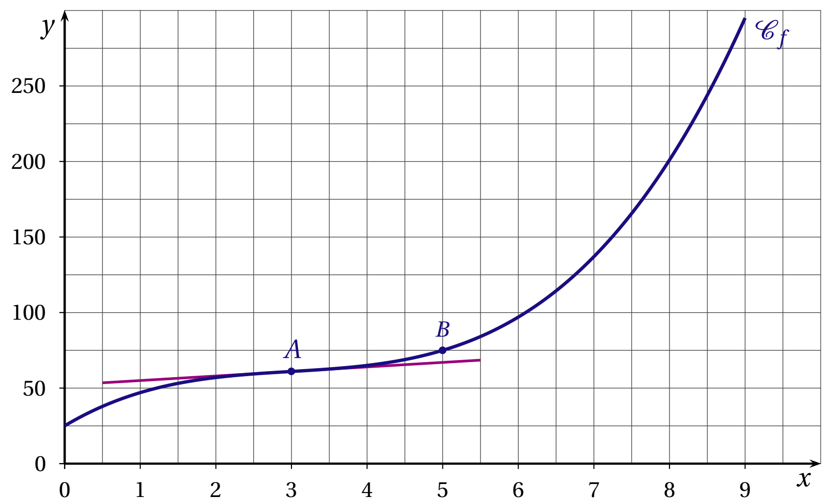
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5x-3}{x^2+x+1}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. On note f' la dérivée de la fonction f, calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse $-\dfrac{3}{2}$.
   Représenter la tangente T sur le graphique ci-dessous.



EXERCICE 15

La capacité de production mensuelle d'une entreprise est limitée à 9 milliers d'articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués. Le coût total de production $f(x)$, exprimé en milliers d'euros, est représenté par la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(3;61)$ est tracée sur le graphique.
La tangente au point $B(5;75)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine du repère.

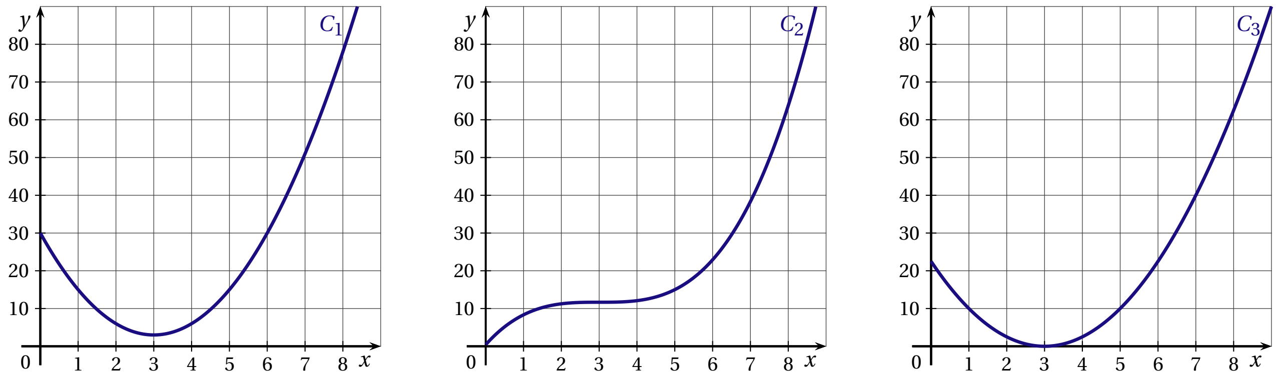


On admet que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;9]$ et, on note f' la fonction dérivée de la fonction f.

PARTIE A

Le coût marginal est assimilé sur l'intervalle $[0;9]$ à la dérivée du coût total de production.

1. À partir du graphique et des renseignements fournis déterminer la valeur du coût marginal pour $x = 5$.
2. Quelle est, parmi les trois courbes proposées ci-dessous, celle qui représente le coût marginal ?



PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;9]$ par $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 25$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f.

PARTIE C

Le prix de vente d'un article est de 30 €. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise pour x milliers d'articles vendus est donné par $B(x) = 30x - f(x)$.

1. Pour quelle quantité d'articles vendus, le bénéfice est-il maximal ?
2. Déterminer les quantités commercialisées, arrondies à la centaine d'articles près, dégageant un bénéfice positif.

EXERCICE 16

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 15 000 articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois ; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $[0;15]$ par

$$C(x) = \frac{16x^2 + 11x + 60}{x + 14}$$

La courbe représentative de la fonction C, notée $\mathscr{C}_T$, est donnée en annexe ci-dessous.

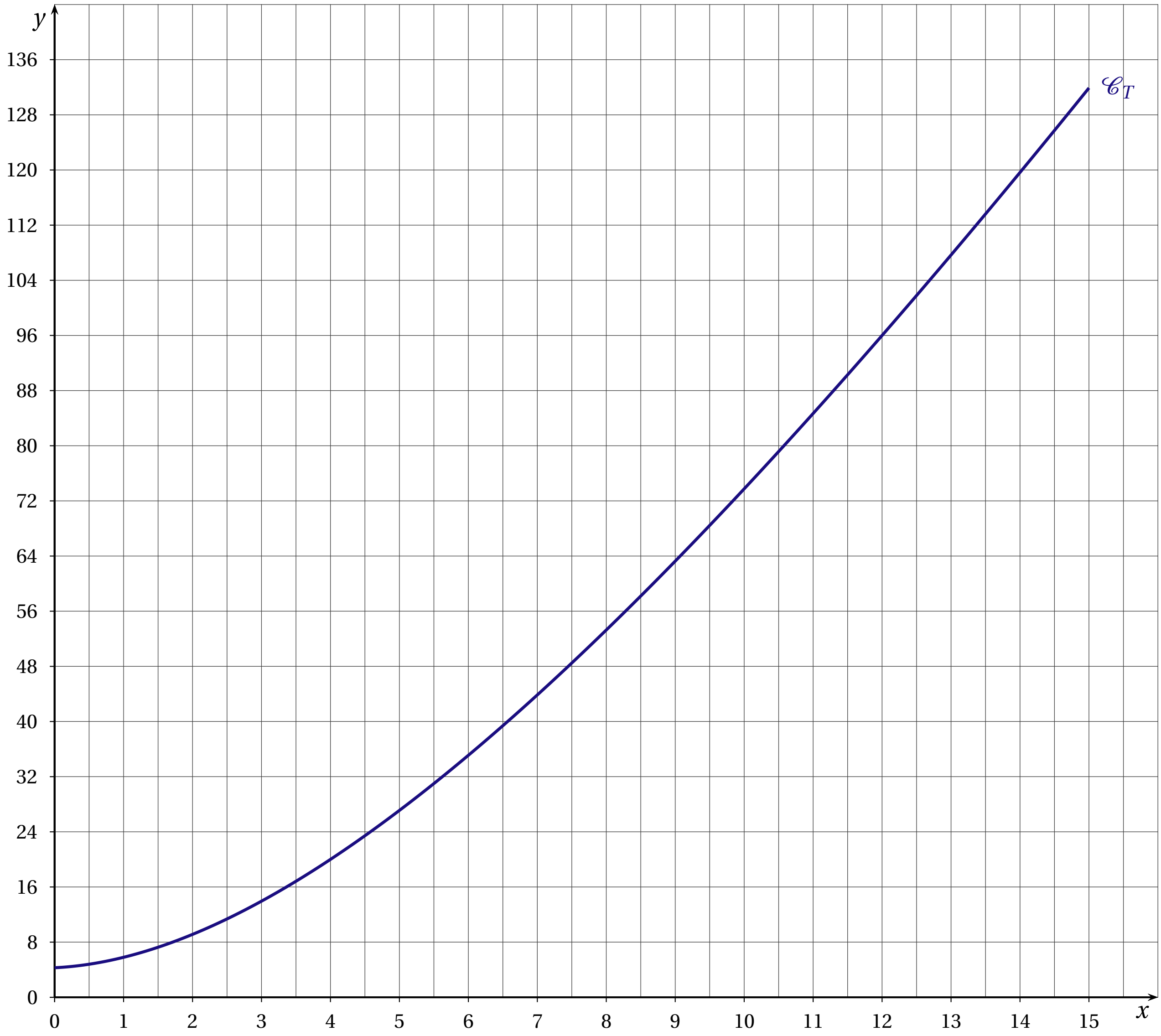
1. Chaque article est vendu 8€, la recette mensuelle exprimée en milliers d'euros est donnée par $R(x) = 8x$
   a) Tracer sur le graphique joint en annexe, la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction R.
   b) Par lecture graphique :
      — les valeurs approximatives des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;
      — la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. Le bénéfice mensuel exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0;15]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Calculer le montant en euros, du bénéfice si l'entreprise fabrique et vend 6000 articles un mois donné.
   b) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;15]$ on a $B'(x) = \dfrac{-8x^2 - 224x + 1474}{(x+14)^2}$.
   c) Étudier les variations de la fonction B.

d) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal?

3. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $C'(x)$ où C' est la dérivée de la fonction C.

Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

ANNEXE



EXERCICE 17

Soit C la fonction définie pour tout réel x élément de l'intervalle $]0;15]$ par $C(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 15x + 81$.
La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'articles fabriqués.
La courbe $\mathscr{C}_T$ représentative de la fonction C est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal.
On suppose que chaque article produit est vendu au prix de 60 €.

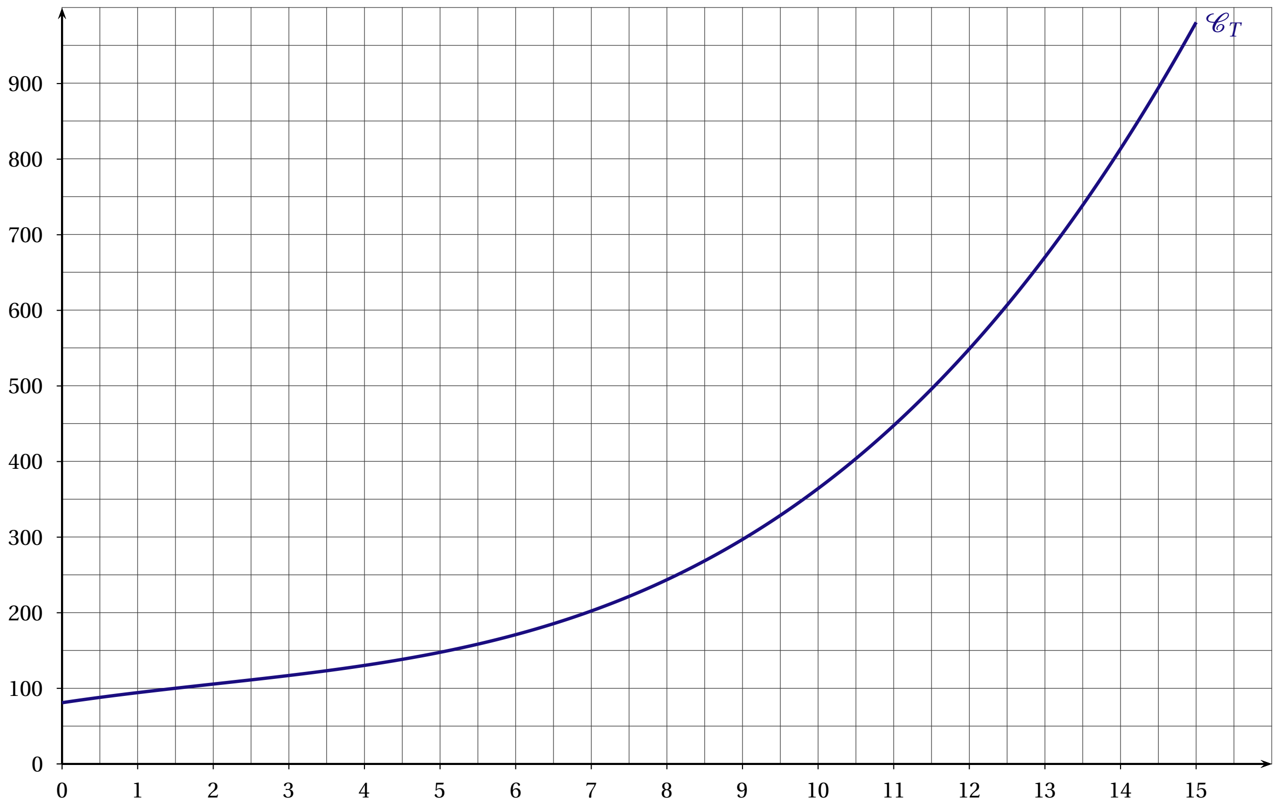
1. On note $R(x)$ la recette générée par la production et la vente de x milliers d'articles.

   a) Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe représentative de la fonction recette.

   b) Déterminer graphiquement les valeurs arrondies au millier près des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer la production pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.

2. Le bénéfice est la fonction B définie sur l'intervalle $]0;15]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Calculer $B'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction B.
   c) En déduire la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
   Quel est le montant en euro de ce bénéfice maximal ?

3. La fonction coût moyen, notée C_M, est la fonction définie sur l'intervalle $]0;15]$ par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
   a) Sur le graphique ci-dessous, placer le point A sur la courbe $\mathscr{C}_T$ tel que la droite (OA) soit tangente à $\mathscr{C}_T$. On appelle a l'abscisse du point A.
   b) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $C_M(a)$.
   c) Par lecture graphique, conjecturer les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0;15]$.



EXERCICE 18

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 10 milliers d'articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois ; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $[0;10]$ par

$$C(x) = x^3 + 12x^2 + 21x + 320$$

La courbe représentative de la fonction C, notée $\mathscr{C}_T$, est donnée en annexe ci-dessous.

PARTIE A

1. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $C'(x)$ où C' est la dérivée de la fonction C.
   Calculer $C'(4)$ et $C'(6)$.
2. Justifier que la fonction C est strictement croissante sur $[0;10]$.

PARTIE B

Chaque article est vendu 273 euros, la recette mensuelle exprimée en milliers d'euros est donnée par

$$R(x) = 273x$$

1. a) Tracer sur le graphique ci-dessous, la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction R.
   b) Par lecture graphique, déterminer la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. Le bénéfice mensuel exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Calculer le montant en euros, du bénéfice si l'entreprise fabrique et vend 6 000 articles un mois donné.
   b) On note B' la dérivée de la fonction B.
   Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;10]$ on a $B'(x) = -3x^2 - 24x + 252$.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0;10]$.
   d) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?

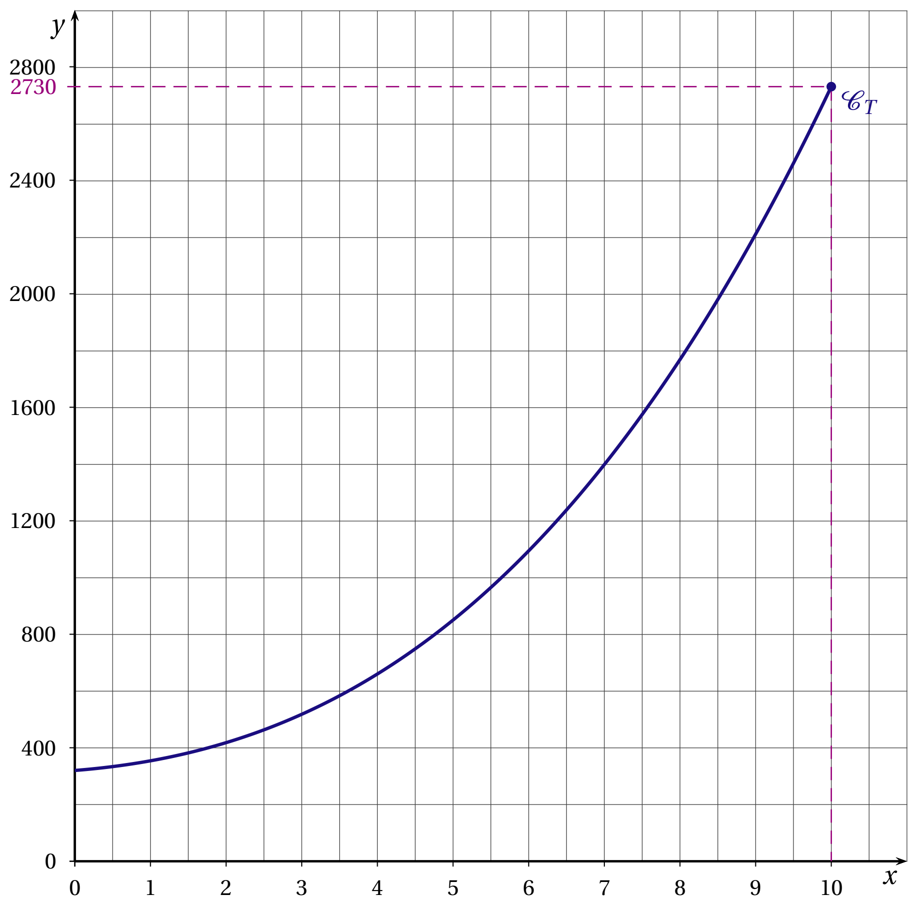
PARTIE C

On note $f(x)$ le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué.

f est définie sur l'intervalle $]0;10]$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 12x^2 + 21x + 320}{x}$.

1. Conjecturer graphiquement les variations du coût moyen de production sur l'intervalle $]0;10]$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$, et vérifier que $f'(x) = \dfrac{(x-4)(2x^2+20x+80)}{x^2}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;10]$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]0;10]$.
4. En dessous de quel prix de vente unitaire, l'entreprise est-elle sûre de ne faire aucun bénéfice ?

ANNEXE



Chapitre 5

STATISTIQUES

I GÉNÉRALITÉS

Les premières études statistiques étaient des recensements démographiques : on en a conservé le vocabulaire.

Population : C'est l'ensemble sur lequel porte l'étude statistique.

Individu : C'est un élément de la population.

Caractère : C'est l'aspect que l'on observe sur les individus. Un caractère permet de déterminer une partition de la population selon ses diverses valeurs (par exemple le genre est un caractère à deux modalités : masculin ou féminin).
Lorsque les différentes valeurs d'un caractère sont des nombres, le caractère est *quantitatif*. Dans le cas contraire, le caractère est *qualitatif*.

L'effectif d'une valeur du caractère étudié est le nombre d'individus de la population ayant cette valeur.

La fréquence d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total de la population. (la fréquence peut être exprimée en pourcentage)

$$\text{féquence} = \frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}$$

II MÉDIANE ET QUANTILES

1 LA MÉDIANE

La médiane d'une série statistique est une valeur telle qu'il y ait autant d'observations ayant une valeur supérieure à la médiane que d'observations ayant une valeur inférieure à la médiane.

La médiane d'une série statistique de N valeurs rangées par ordre croissant est le nombre M_e défini par :

— si l'effectif N est impair, la médiane M_e est la valeur centrale du caractère c'est à dire la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$ de la série ordonnée.

— si l'effectif N est pair, la médiane M_e est la demi-somme des deux valeurs centrales du caractère c'est à dire la moyenne des valeurs de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$ de la série ordonnée.

EXEMPLE

Dans un service de maintenance, on a répertorié le nombre d'interventions par jour sur un mois. On a obtenu la distribution suivante :

Nombre d'interventions x_i	3	5	6	7	8	9
Nombre de jours n_i	2	5	8	6	3	1

L'effectif total $N = 25$ donc la médiane est la valeur du caractère de rang 13 soit $Me = 6$.

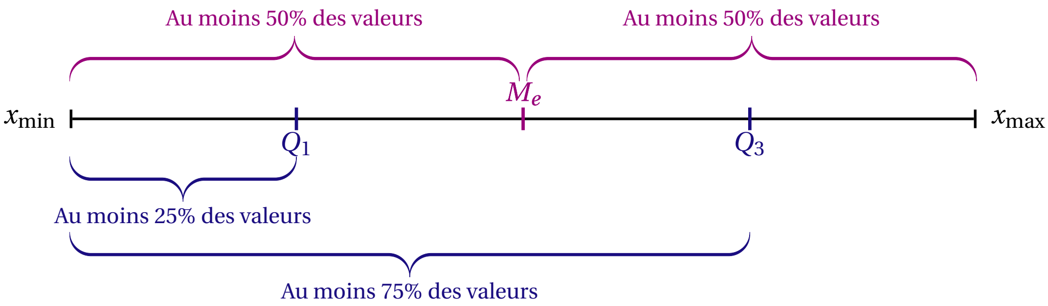
2 LES QUANTILES

LES QUARTILES

Les quartiles au nombre de trois Q_1, Q_2 et Q_3 partagent l'ensemble étudié de N éléments préalablement classés par valeurs croissantes, en quatre sous ensembles.

— Le premier quartile noté Q_1 est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins 25 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q_1.

— Le troisième quartile noté Q_3 est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins 75 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q_3.



REMARQUE

L'intervalle interquartile $[Q_1; Q_3]$ contient au moins 50% des valeurs de la série.

EXEMPLE

Dans la série précédente, l'effectif total $N = 25$.

— $25 \times \frac{1}{4} = 6{,}25$ donc le premier quartile est la valeur du caractère de rang 7 soit $Q_1 = 5$.

— $25 \times \frac{3}{4} = 18{,}75$ donc le troisième quartile est la valeur du caractère de rang 19 soit $Q_3 = 7$.

LES DÉCILES

Les déciles au nombre de neuf $D_1, D_2, \dots, D_9$ partagent l'ensemble étudié de N éléments préalablement classés par valeurs croissantes, en dix sous ensembles.

— Le premier décile noté D_1 est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins 10 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à D_1.

— Le neuvième décile noté D_9 est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins 90 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à D_9.

3 CARACTÉRISTIQUES DE DISPERSION

— L'étendue est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur d'une série statistique.

— L'écart interquartile est égal à la différence entre le troisième et le premier quartiles.

— L'écart interdécile est égal à la différence entre le neuvième et le premier déciles.

4 DIAGRAMME EN BOÎTE

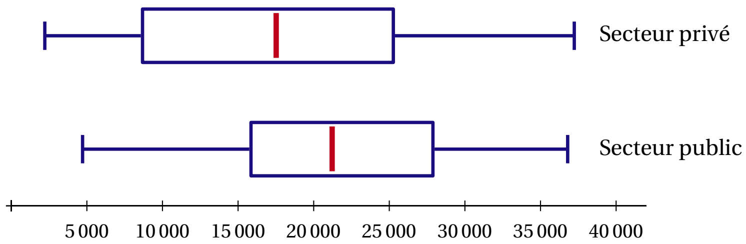
La représentation graphique de la dispersion d'une série statistique se fait à l'aide de diagramme en boîte appelés aussi « boîte à moustaches » ou « box-plot ».
Pour une catégorie donnée, on construit, en face d'un axe permettant de repérer les quantiles de la variable étudiée, un rectangle dont la longueur est égale à l'écart interquartile $Q_3 - Q_1$, la médiane est représentée par un trait. On ajoute alors des segments aux extrémités menant jusqu'aux valeurs extrêmes, ou jusqu'aux premier et neuvième déciles.

EXEMPLE

Le tableau suivant donne la distribution du revenu salarial par secteur d'activité en France en 2014.

	D1	Q1	Médiane	Q3	D9
Secteur privé	2 218	8 570	17 520	25 377	37 234
Secteur public	4 716	15 744	21 221	27 996	36 797

Source : INSEE



III MOYENNE, VARIANCE ET ÉCART-TYPE

1 LA MOYENNE

On considère la série statistique donnée par le tableau ci-contre.
On note $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$ l'effectif total

Valeur x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_p
Effectif n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_p

La moyenne d'une série statistique est le quotient noté $\overline{x}$ de la somme de toutes les valeurs de cette série par l'effectif total.

$$\overline{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_p \times x_p}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$$

REMARQUE

Soit $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ la fréquence de la valeur x_i alors, la moyenne $\overline{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_p \times x_p$.

EXEMPLE

Avec la série statistique précédente :

Nombre d'interventions x_i	3	5	6	7	8	9
Nombre de jours n_i	2	5	8	6	3	1
Fréquence f_i	0,08	0,2	0,32	0,24	0,12	0,04

Le nombre moyen d'interventions par jour est :

$$\overline{x} = \frac{2 \times 3 + 5 \times 5 + 8 \times 6 + 6 \times 7 + 3 \times 8 + 1 \times 9}{25} = 6{,}16$$

ou en utilisant les fréquences :

$$\overline{x} = 0{,}08 \times 3 + 0{,}2 \times 5 + 0{,}32 \times 6 + 0{,}24 \times 7 + 0{,}12 \times 8 + 0{,}04 \times 9 = 6{,}16$$

2 VARIANCE ET ÉCART-TYPE

Soit $(x_i ; n_i)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, une série statistique de moyenne $\overline{x}$ et d'effectif total N.

— La variance de cette série est le nombre V défini par :

$$V = \frac{n_1 \times \left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + n_2 \times \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \cdots + n_p \times \left(x_p - \overline{x}\right)^2}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

— L'écart-type, noté σ, de cette série est égal à la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V}$$

REMARQUE

La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne $\overline{x}$. Les valeurs $\left(x_i - \overline{x}\right)$ sont les « écarts à la moyenne » ; les « carrés des écarts à la moyenne » sont donc $\left(x_i - \overline{x}\right)^2$.
En faisant la moyenne des carrés des écarts à la moyenne, on trouve la variance.

EXEMPLE

Dans la série précédente de moyenne $\overline{x} = 6,16$ la variance est :

$$V = \frac{2\times(3-6,16)^2 + 5\times(5-6,16)^2 + 8\times(6-6,16)^2 + 6\times(7-6,16)^2 + 3\times(8-6,16)^2 + 1\times(9-6,16)^2}{25} = 1,9744$$

L'écart-type de cette série est donc $\sigma = \sqrt{1,9744} \approx 1,4$

PROPRIÉTÉ

Soit $(x_i; n_i)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, une série statistique de moyenne $\overline{x}$ et d'effectif total N.
La variance de cette série est le nombre V défini par :

$$V = \frac{n_1\times {x_1}^2 + n_2\times {x_2}^2 + \cdots + n_p\times {x_p}^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i {x_i}^2 - \overline{x}^2$$

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}
V &= \frac{n_1\times\left(x_1-\overline{x}\right)^2 + n_2\times\left(x_2-\overline{x}\right)^2 + \cdots + n_p\times\left(x_p-\overline{x}\right)^2}{N}\\
&= \frac{n_1\times\left({x_1}^2 - 2x_1\overline{x} + \overline{x}^2\right) + n_2\times\left({x_2}^2 - 2x_2\overline{x} + \overline{x}^2\right) + \cdots + n_p\times\left({x_p}^2 - 2x_p\overline{x} + \overline{x}^2\right)}{N}\\
&= \frac{n_1\times {x_1}^2 + n_2\times {x_2}^2 + \cdots + n_p\times {x_p}^2}{N} - 2\frac{n_1\times x_1 + n_2\times x_2 + \cdots + n_p\times x_p}{N}\times\overline{x} + \frac{n_1+n_2+\cdots+n_p}{N}\times\overline{x}^2\\
&= \frac{n_1\times {x_1}^2 + n_2\times {x_2}^2 + \cdots + n_p\times {x_p}^2}{N} - 2\overline{x}\times\overline{x} + \overline{x}^2\\
&= \frac{n_1\times {x_1}^2 + n_2\times {x_2}^2 + \cdots + n_p\times {x_p}^2}{N} - \overline{x}^2
\end{aligned}$$

Ainsi, la variance d'une série statistique est égale à la différence entre « la moyenne des carrés » et « le carré de la moyenne ».

EXERCICE 1

Pour les trois séries statistiques ci dessous, la médiane est égale à 10. Compléter le tableau ci-dessous par des données pour chacune des séries sachant que :

— La moyenne de la série 1 est égale à 10.

— La moyenne de la série 2 est la plus petite possible.

— La moyenne de la série 3 est la plus grande possible.

indice i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Série 1	5									18
Série 2	5									18
Série 3	5									18

EXERCICE 2

Dans une entreprise, il y a 28 cadres et 92 ouvriers. Le salaire moyen des cadres est de 3 450 € et celui des ouvriers est de 1 320 €.

1. Calculer le salaire moyen de l'ensemble des salariés de cette entreprise.
2. a) Quel est le pourcentage d'augmentation du salaire moyen si on verse une prime de 35 € à chaque salarié?

   b) On augmente le salaire de chaque cadre de 2 % et celui de chaque ouvrier de 4 %.
   Le salaire moyen dans l'entreprise a-t-il augmenté de 3%?

EXERCICE 3

Un concours est organisé dans deux centres d'examens. Dans le premier centre, les garçons ont obtenu 13 de moyenne et les filles 12 de moyenne. Dans le second centre, les garçons ont obtenu 9 de moyenne et les filles 8 de moyenne.
Le président du jury en déduit que les garçons ont eu de meilleurs résultats que les filles Est-ce si sûr?
Sachant qu'il y avait 58 garçons et 104 filles dans le premier centre, et 87 garçons et 32 filles dans le second centre, calculer la moyenne générale des garçons puis celle des filles. Conclure.

EXERCICE 4

PARTIE A

Le tableau suivant donne la distribution des salaires mensuels nets, en euros, en France en 2015.

Déciles	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9
Hommes	1 262	1 427	1 573	1 728	1 906	2 130	2 451	2 996	3 990
Femmes	1 171	1 288	1 396	1 512	1 650	1 830	2 073	2 432	3 149
Ensemble	1 213	1 357	1 490	1 630	1 797	2 004	2 286	2 752	3 646

Souce : Insee Première (*octobre 2017*)

1. a) Donner le salaire net médian des salariés hommes et des salariées femmes.

   b) Calculer les variations en pourcentage des déciles des femmes par rapport à ceux des hommes

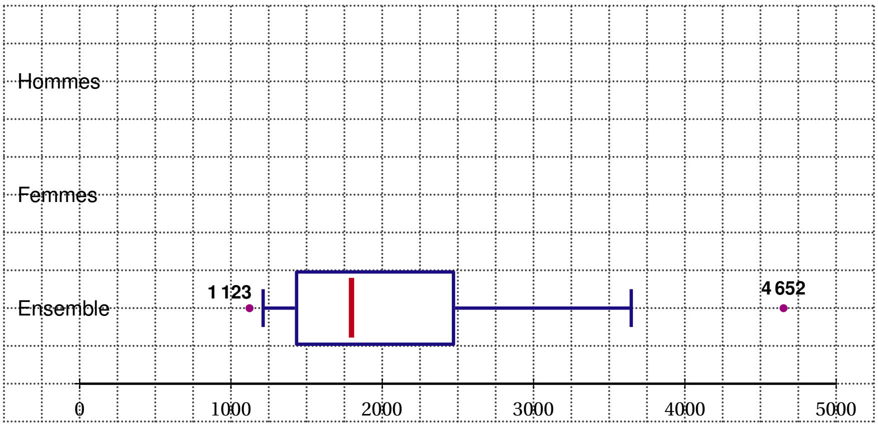
Déciles	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9
Hommes	1 262	1 427	1 573	1 728	1 906	2 130	2 451	2 996	3 990
Femmes	1 171	1 288	1 396	1 512	1 650	1 830	2 073	2 432	3 149
Écarts en %	−7,2								

c) Recopier et compléter la phrase :

« Les écarts de salaire entre femmes par rapport aux hommes ... le long de l'échelle salariale : de −7,2% pour le 1er décile à ... pour le 9e décile. »

2. Le montant en euros du premier quartile est de 1 488 euros pour les salariés hommes et de 1 332 euros pour les salariées femmes. Le troisième quartile est de 2 678 euros pour les hommes et de 2 208 euros pour les femmes.

La distribution des salaires mensuels nets de l'ensemble des salariés est représentée ci-dessous (centiles C5 à C95).



a) Donner une interprétation du nombre 4 652.

b) Sur le même graphique, représenter la distribution des salaires nets des hommes et des femmes.

PARTIE B

Le tableau ci-dessous donne le montant en euros du salaire mensuel moyen net selon les catégories socioprofessionnelles en France en 2015.

	Hommes		**Femmes**	
	Salaires nets (en euros)	Effectifs (en %)	Salaires nets (en euros)	Effectifs (en %)
Cadres	4 451	20,6	3 561	15,6
Professions intermédiaires	2 420	18,9	2 081	20,8
Employés	1 739	16,2	1 591	50,8
Ouvriers	1 765	44,3	1 483	12,8

Souce : Insee Première (*octobre 2017)*

1. a) Calculer le salaire moyen des hommes et celui des femmes.

   b) Recopier et compléter la phrase :

   « En 2015, une salariée gagne, en moyenne en ... % de moins qu'un salarié. »

2. 58,5% des salariés sont des hommes.

   De quel pourcentage, le salaire net médian de l'ensemble des salariés est-il inférieur au salaire net moyen ?

EXERCICE 5

1. Compléter le tableau ci-dessous qui donne la distribution des salaires mensuels bruts des 100 salariés d'une entreprise.

Salaires en euros	1500	1600	1900	2400	2700	3200	5000
Effectifs	30	25	15	12	8	6	4
Fréquences							

2. a) Donner le montant du salaire mensuel brut médian.
   b) Calculer le pourcentage de la masse salariale totale perçue par les 10% des salariés les mieux rémunérés.
3. a) Calculer le montant du salaire mensuel brut moyen.
   b) Calculer le pourcentage des salariés dont le salaire mensuel brut est compris dans l'intervalle $\left[\overline{x}-2\sigma;\overline{x}+2\sigma\right]$.

EXERCICE 6

Le tableau suivant donne le montant des salaires annuels exprimés en milliers d'euros d'une petite entreprise.

Salaires	16	18	20	25	30	40
Nombre de salariés	6	9	10	8	5	2

1. Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartiles. Interpréter ces résultats et les traduire à l'aide d'un diagramme en boîte.
2. Calculer le montant en euros du salaire moyen annuel de cette entreprise.
3. A l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à l'euro près de l'écart-type s.
4. Soit S la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$S(x)=6\times(16-x)^2+9\times(18-x)^2+10\times(20-x)^2+8\times(25-x)^2+5\times(30-x)^2+2\times(40-x)^2$$
   a) Vérifier que $S(x)=40x^2-1776x+21152$
   b) Déterminer le sens de variations de la fonction S et en déduire sa valeur minimale.
   c) Calculer la variance à partir de la somme S. En déduire la valeur exacte de l'écart-type σ.

EXERCICE 7

Une entreprise de produits alimentaires fabrique et distribue une marque de café dans des sachets de 250 grammes. On suppose que le poids du sachet vide est négligeable.
La machine utilisée pour remplir les sachets est contrôlée selon la procédure suivante.
À chaque heure, un échantillon aléatoire de 40 sachets est prélevé dans la production ; on mesure la masse de chaque sachet et on calcule la masse moyenne $\overline{x}$ de l'échantillon.
Un réglage de la machine est nécessaire si l'un des critères suivants n'est pas vérifié :
— les 40 sachets ont une masse supérieure ou égale à 245 grammes ;
— 50% au moins des sachets ont une masse en grammes comprise dans l'intervalle $[248;252]$;
— 95% au moins des sachets ont une masse en grammes comprise dans l'intervalle $\left[\overline{x}-2\sigma;\overline{x}+2\sigma\right]$.
Au cours de la production, l'échantillon suivant a été prélevé.

248	256	253	246	252	250	248	253	248	251
255	252	252	254	250	250	250	251	250	252
256	252	251	247	251	249	253	250	251	245
250	252	247	249	250	249	249	249	254	249

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Masse	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256
Effectif												

2. Représenter la dispersion de cette série à l'aide d'un diagramme en boîte.
3. Faut-il effectuer un réglage de la machine ?

Chapitre 6

PROBABILITÉS

I RAPPELS

1 OPÉRATIONS SUR LES ÉVÈNEMENTS

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux évènements

— L'évènement « A ne s'est pas réalisé » est l'évènement contraire de A noté $\overline{A}$.

— L'évènement « au moins un des évènements A ou B s'est réalisé » est l'évènement « A ou B » noté $A \cup B$.

— L'évènement « les évènements A et B se sont réalisés » est l'évènement « A et B » noté $A \cap B$.

— Deux évènements qui ne peuvent pas être réalisés en même temps sont incompatibles.
On a alors $A \cap B = \varnothing$.
Les évènements A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

2 LOI DE PROBABILITÉ

Ω désigne un univers de n éventualités $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

— Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque évènement élémentaire e_i un nombre réel $p(e_i) = p_i$ de l'intervalle $[0;1]$, tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} p(e_i) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

— La probabilité d'un évènement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.

PROPRIÉTÉS

Soit Ω un univers fini sur lequel est définie une loi de probabilité.

1. Pour tout évènement A, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
2. Si A et B sont deux évènements $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

3 ÉQUIPROBABILITÉ

Soit Ω un univers fini de n éventualités. Si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité c'est à dire, si $p(e_1) = p(e_2) = \cdots = p(e_n) = \dfrac{1}{n}$, alors l'univers est dit équiprobable.
On a alors pour tout évènement A,

$$p(A) = \frac{\text{nombre des issues favorables à } A}{\text{nombre des issues possibles}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Notation :
Soit E un ensemble fini, le cardinal de E noté card(E) est le nombre d'éléments de l'ensemble E.

EXEMPLE

On lance deux dés équilibrés. Quel est l'évènement le plus probable A « la somme des nombres obtenus est égale à 7 » ou B « la somme des nombres obtenus est égale à 8 » ?
Si on s'intéresse à la somme des deux dés, l'univers est $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque évènement élémentaire n'a pas la même probabilité :

$$2 = 1 + 1 \text{ alors que } 5 = 1 + 4 \text{ ou } 5 = 2 + 3.$$

On se place dans une situation d'équiprobabilité en représentant une issue à l'aide d'un couple (a,b) où a est le résultat du premier dé et b le résultat du second dé. L'univers Ω associé à cette expérience est l'ensemble des couples formés avec les éléments de $\{1,2,3,4,5,6\}$.
Les dés étant équilibrés, il y a $6^2 = 36$ résultats équiprobables.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

L'évènement A est l'ensemble des couples dont la somme des deux termes est égale à 7. D'où $p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
L'évènement B est l'ensemble des couples dont la somme des deux termes est égale à 8. D'où $p(B) = \frac{5}{36}$.
L'évènement le plus probable est A.

II VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

Il arrive souvent qu'à chaque résultat d'une expérience aléatoire on associe un nombre réel. On définit ainsi une fonction de l'univers Ω dans $\mathbb{R}$.
Par exemple le gain obtenu à l'occasion d'un jeu de hasard ou encore le temps d'attente d'un bus.
En première, on ne considère que le cas où Ω est un univers fini.

1 DÉFINITIONS

Soit Ω un univers fini de n éventualités.

— On appelle variable aléatoire X sur l'ensemble Ω toute fonction qui à chaque issue de Ω associe un nombre réel.

— L'évènement « $X = x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω qui ont pour image le réel x_i par X.

EXEMPLE

On lance à trois reprises une pièce bien équilibrée et on note le résultat à l'aide d'un mot de trois lettres. L'univers associé à cette expérience est :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$$

1. On définit une variable aléatoire X en associant à chaque éventualité de l'univers Ω le nombre de « pile ».
   — La variable X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3.
   L'image de PPP est $X(PPP) = 3$, l'image de PFP est $X(PFP) = 2$.
   — L'évènement « $X = 2$ » est constitué des issues $\{PPF, PFP, FPP\}$.
   — L'évènement « $X < 2$ » est constitué des issues $\{PFF, FPF, FFP, FFF\}$.
2. On définit une variable aléatoire Y avec la règle de jeu suivante : un joueur gagne 8 € s'il obtient trois « pile » successifs, il ne gagne rien s'il obtient deux « pile » et il perd 2 € dans tous les autres cas.
   — La variable Y peut prendre les valeurs -2, 0 ou 8.
   L'image de PPP est $Y(PPP) = 8$, l'image de PFF est $Y(PFF) = -2$.
   — L'évènement « $Y = -2$ » est constitué des issues $\{PFF, FPF, FFP, FFF\}$.
   — L'évènement « $Y \geqslant 0$ » est constitué des issues $\{PPP, PPF, PFP, FPP\}$.

2 LOI DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω, qui prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$.
Lorsque, à chaque valeur x_i, on associe la probabilité de l'évènement « $X = x_i$ », notée $p(X = x_i)$, on définit une loi de probabilité sur l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, appelée la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

EXEMPLE

On considère la règle de jeu suivante :
Après avoir lancé deux dés cubiques équilibrés, un joueur gagne 10 € s'il obtient un double six, il gagne 3 € si la somme des nombres est un nombre impair, sinon le joueur perd 5 €.
On considère l'expérience aléatoire suivante : on lance deux dés cubiques équilibrés et on fait la somme des nombres obtenus.
L'univers de cette expérience est $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. La loi de probabilité définie sur Ω est :

Issues	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilités	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Soit X la variable aléatoire définie sur Ω, qui prend les valeurs $\{-5,3,10\}$.

— L'évènement $(X = 10)$ est constitué de l'issue $\{12\}$ donc $p(X = 10) = \frac{1}{36}$.
— L'évènement $(X = 3)$ est constitué des issues $\{3,5,7,9,11\}$ d'où $p(X = 3) = \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{2}$.
— Comme $p(X = -5) + p(X = 3) + p(X = 10) = 1$, on en déduit que :

$$p(X = -5) = 1 - p(X = 3) - p(X = 10) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{36} = \frac{17}{36}$$

D'où la loi de probabilité de X :

x_i	-5	3	10
$p(X = x_i)$	$\frac{17}{36}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{36}$

3 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω, qui prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

On appelle espérance mathématique de X notée $\mathrm{E}(X)$, le réel :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i\, p(X = x_i) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_k \times p_k$$

REMARQUES :

— L'espérance $\mathrm{E}(X)$ apparaît comme la moyenne (au sens statistique du terme) des valeurs x_i affectées des fréquences p_i.
— Dans le cas particulier d'un jeu, l'espérance $\mathrm{E}(X)$ est le gain moyen par partie qu'un joueur peut espérer obtenir s'il joue un grand nombre de fois.
Le signe de $\mathrm{E}(X)$ permet de savoir si le joueur a plus de chances de gagner que de perdre.
Si $\mathrm{E}(X) = 0$, on dit que le *jeu est équitable*.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, la loi de probabilité de X est :

x_i	-5	3	10
$p(X=x_i)$	$\dfrac{17}{36}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{36}$

L'espérance mathématique de X est :

$$\mathrm{E}(X) = -5 \times \frac{17}{36} + 3 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{36} = -\frac{7}{12}$$

L'espérance mathématique $\mathrm{E}(X) < 0$ donc le jeu est défavorable au joueur.
Si chaque joueur joue 6 parties, comme $6 \times \left(-\dfrac{7}{12}\right) = -3{,}5$, un joueur risque de perdre en moyenne 3,50 €.

III LOI BINOMIALE

Dans ce paragraphe, on étudie la répétition d'expériences identiques et indépendantes :

— Cela signifie que les conditions dans lesquelles on répète l'expérience sont les mêmes. Par exemple, les tirages d'objets se font « avec remise » de l'objet tiré après chaque tirage.

— Cela signifie aussi que le résultat d'une expérience n'a aucune influence sur le résultat de l'expérience suivante.

1 ÉPREUVE DE BERNOULLI

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire ayant deux issues, l'une appelée « succès » de probabilité p et l'autre appelée « échec » de probabilité $q = 1 - p$.

2 LOI BINOMIALE

En répétant n fois la même expérience de Bernoulli, on obtient une nouvelle expérience aléatoire qui possède 2^n issues.

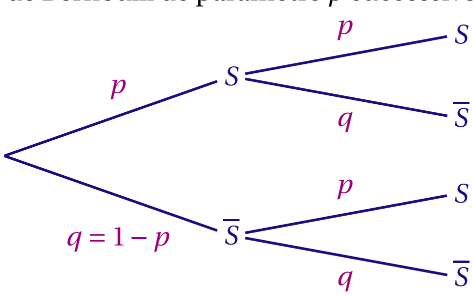
> L'expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p de manière indépendante est appelée un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
> La loi de probabilité de la variable aléatoire associée au nombre de succès obtenus au cours de n épreuves de ce schéma de Bernoulli est appelée la loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathscr{B}(n;p)$.

CAS SIMPLES

Dans le cas où $n = 2$ ou $n = 3$, on peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre.

1. Cas $n = 2$

   On répète deux fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p successivement et de façon indépendante.



Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(2;p)$ de paramètres $n=2$ et p :

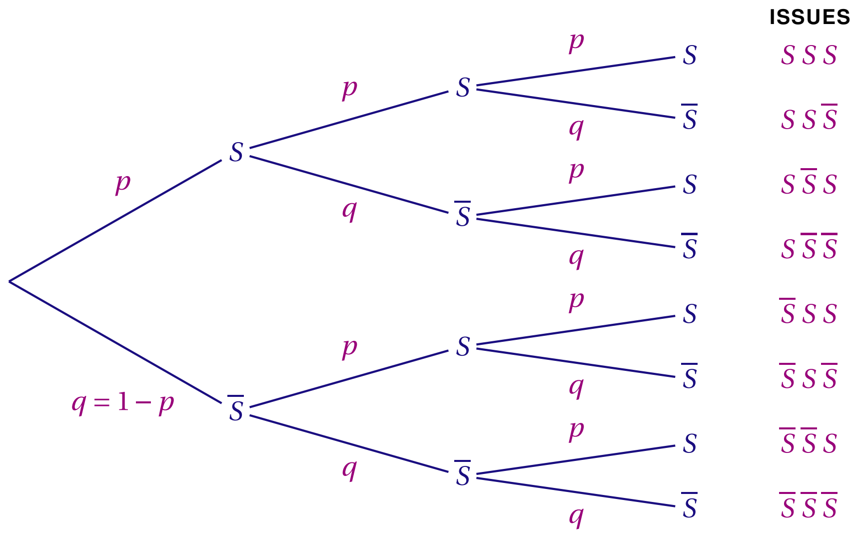
Nombre de succès k	0	1	2
$P(X=k)$	q^2	$2\times p\times q$	p^2

2. Cas $n=3$

   On répète trois fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p successivement et de façon indépendante. L'expérience comporte $2^3=8$ issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

   $$\{S\,S\,S;\ S\,S\,\overline{S};\ S\,\overline{S}\,S;\ \overline{S}\,S\,S;\ S\,\overline{S}\,\overline{S};\ \overline{S}\,S\,\overline{S};\ \overline{S}\,\overline{S}\,S;\ \overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\}$$

   Pour obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès, on dresse un arbre et compte le nombre d'issues contenant k succès.



   La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(3;p)$ de paramètres $n=3$ et p :

Nombre de succès k	0	1	2	3
$P(X=k)$	q^3	$3\times p\times q^2$	$3\times p^2\times q$	p^3

COEFFICIENTS BINOMIAUX

Soit n un entier naturel non nul et k un entier tel que $0\leqslant k\leqslant n$.

Si on représente par un arbre une série de n épreuves de Bernoulli, le coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de chemins réalisant k succès parmi n épreuves répétées.

REMARQUES :

— Un seul chemin permet d'obtenir 0 succès ou n succès consécutifs : $\binom{n}{0}=1$ et $\binom{n}{n}=1$.

— Il y a n chemins différents qui permettent d'obtenir un seul succès : $\binom{n}{1}=n$.

— Les calculatrices permettent de calculer les coefficients binomiaux dans les autres cas. Exemple de calcul de $\binom{8}{3}$:

TEXAS TI 83	CASIO
Touche **math** choisir PROB puis 3 : Combinaison .... 8 C 3 56	Touche OPTN choisir PROB puis n C r .... 8 C 3 56

FORMULE GÉNÉRALE DE LA LOI BINOMIALE

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ de paramètres n et p.
Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ où } q = 1-p$$

PROPRIÉTÉS

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ de paramètres n et p.
Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$:

— $P(X \leqslant k) = 1 - P(X > k)$

— $P(X \geqslant k) = 1 - P(X < k)$

En particulier $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - q^n$, où $q = 1-p$

COMMANDES SPÉCIFIQUES DES CALCULATRICES :

	TI 83	Casio
Menu	2nde puis sur la touche var (distrib)	OPTN puis STAT DIST BINM
$P(X=k)$	binomFdP(n , p , k)	BpD binomialPD(k , n , p)
$P(X \leqslant k)$	binomFRép(n , p , k)	BcD binomialCD(k , n , p)

ESPÉRANCE ET ÉCART-TYPE DE LA LOI BINOMIALE

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ de paramètres n et p.
L'espérance de X est $E(X) = np$, l'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

EXEMPLE

Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40 % des clients choisissent l'option « Livraison Express ».
On prélève au hasard 30 bons de commande. On considère que le nombre de bons de commande est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 bons.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de bons portant la mention « Livraison Express ».

1. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$, interpréter le résultat.

   On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 bons donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(30;0,4)$ de paramètres $n = 30$ et $p = 0,4$.

   $$E(x) = 30 \times 0,4 = 12$$

   Sur un grand nombre de prélèvements de 30 bons on trouve en moyenne 12 bons de commande avec la mention « Livraison Express ».

2. Déterminer la probabilité, arrondie au millième près, que 13 bons de commande portent la mention « Livraison Express ».

$$P(X=13)=\binom{30}{13}\times 0{,}4^{13}\times 0{,}6^{17}\approx 0{,}136$$

La probabilité que 13 bons portent la mention « Livraison Express » est d'environ 0,136.

3. Déterminer la probabilité, arrondie au millième près, qu'au moins 16 bons de commande portent la mention « Livraison Express ».

$$P(X\geqslant 16)=1-P(X\leqslant 15)\approx 0{,}097$$

La probabilité qu'au moins 16 bons portent la mention « Livraison Express » est d'environ 0,097.

IV ÉCHANTILLONNAGE

On appelle échantillonnage, le prélèvement d'un échantillon de taille n au sein de la population.
On s'intéresse à un caractère de proportion p connue au sein d'une population.
Si l'échantillon est réalisé par prélèvement des éléments de manière aléatoire avec remise, alors le nombre d'éléments de l'échantillon possédant le caractère étudié suit une loi binomiale de paramètres n et p.

REMARQUE

En pratique, si l'effectif de la population est très grand par rapport à l'effectif n de l'échantillon on considère que le tirage des éléments de l'échantillon s'effectue avec remise.

1 INTERVALLE DE FLUCTUATION À 95 % D'UNE FRÉQUENCE CORRESPONDANT À UNE LOI BINOMIALE

L'intervalle de fluctuation à 95 % correspondant à une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ où :

— a est le plus petit entier tel que $P(X\leqslant a)>0{,}025$;

— b est le plus petit entier tel que $P(X\leqslant b)\geqslant 0{,}975$.

On a alors $P(a\leqslant X\leqslant b)\geqslant 0{,}95$.

EXEMPLE

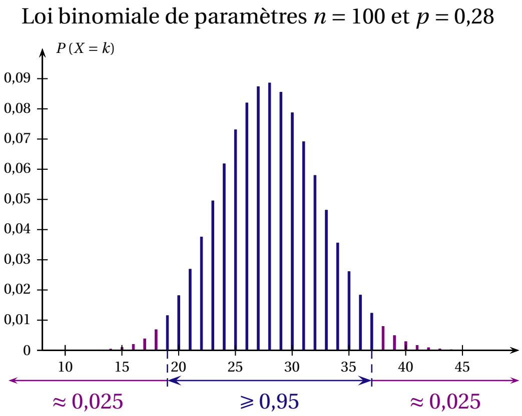
On considère une population pour laquelle la proportion d'un caractère C est $p=0{,}28$.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de taille $n=100$. La variable aléatoire X associée au nombre d'individus ayant le caractère C au sein de l'échantillon, suit la loi binomiale $\mathscr{B}(100;0{,}28)$ de paramètres $n=100$ et $p=0{,}28$.
On a ci-dessous, un extrait du tableau des probabilités cumulées $P(X\leqslant k)$ de la loi binomiale $\mathscr{B}(100;0{,}28)$.

k	$P(X\leqslant k)$	k	$P(X\leqslant k)$	k	$P(X\leqslant k)$	k	$P(X\leqslant k)$	k	$P(X\leqslant k)$
14	0,000 7	20	0,044	26	0,374 8	32	0,842	38	0,988 7
15	0,001 7	21	0,070 9	27	0,462 2	33	0,888 4	39	0,993 6
16	0,003 7	22	0,108 5	28	0,550 7	34	0,924	40	0,996 5
17	0,007 5	23	0,158	29	0,636 2	35	0,950 1	41	0,998 2
18	0,014 4	24	0,219 8	30	0,714 9	36	0,968 4	42	0,999 1
19	**0,025 9**	25	0,292 9	31	0,784	**37**	**0,980 7**	43	0,999 5

— Le plus petit entier a tel que $P(X\leqslant a)>0{,}025$ est $a=19$.

— Le plus petit entier b tel que $P(X\leqslant b)\geqslant 0{,}975$ est $b=37$.

— On peut vérifier que $P(19\leqslant X\leqslant 37)=P(X\leqslant 37)-P(X\leqslant 18)\approx 0{,}9663\geqslant 0{,}95$



L'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence du nombre d'individus ayant le caractère C au sein d'un échantillon de taille 100 correspondant à la variable aléatoire est donc l'intervalle $\left[\dfrac{19}{100};\dfrac{37}{100}\right] = [0,19;0,37]$.
Cet intervalle est centré en 0,28 qui est la proportion du caractère C dans la population.

2 PRISE DE DÉCISION

On formule l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans la population est p.
Pour valider cette hypothèse, on prélève au hasard dans la population un échantillon de taille n et on note f la fréquence observée du caractère étudié.
Si l'effectif de la population est suffisamment grand par rapport à l'effectif n de l'échantillon on considère que la variable aléatoire X associée au nombre d'éléments ayant le caractère étudié au sein de l'échantillon, suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$.
On détermine l'intervalle $\left[\dfrac{a}{n};\dfrac{b}{n}\right]$ de fluctuation à 95 % d'une fréquence correspondant à la variable aléatoire X qui permet de fixer le seuil de décision.

— Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{a}{n};\dfrac{b}{n}\right]$, on accepte l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population au seuil de 95 %.

— Si la fréquence observée f n'appartient pas à l'intervalle $\left[\dfrac{a}{n};\dfrac{b}{n}\right]$, on rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population avec un risque d'erreur de 5 %.

EXEMPLE

Selon une publication de l'INSEE, 28 % des ménages comprennent une famille avec au moins un enfant mineur.

1. On interroge un échantillon de 100 ménages choisis au hasard, et on constate que dans cet échantillon 35 % des ménages comprennent une famille avec au moins un enfant mineur.
   Cet échantillon est-il représentatif de la population ?

   L'intervalle de fluctuation à 95 % associé à la loi binomiale $\mathscr{B}(100;0,28)$ calculé précédemment est $I = [0,19;0,37]$.
   La fréquence observée des ménages comprenant une famille avec au moins un enfant mineur est $f = 0,35$. Donc f appartient à l'intervalle $[0,19;0,37]$.
   On considère que l'échantillon est représentatif de la population.

2. On interroge au hasard 300 ménages qui résident dans le même arrondissement d'une grande agglomération, et on constate également que 35 % de ces ménages comprennent une famille avec au moins un enfant mineur.
   Cet échantillon est-il représentatif de la population ?

   On détermine l'intervalle de fluctuation à 95 % associé à la loi binomiale $\mathscr{B}(300;0,28)$.

— Le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ est $a = 69$.
— Le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$ est $b = 99$.

L'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence du nombre de ménages comprenant une famille avec au moins un enfant mineur dans un échantillon de taille 300 est donc l'intervalle $\left[\frac{69}{300};\frac{99}{300}\right] = [0{,}23;0{,}33]$.
La fréquence des ménages comprenant une famille avec au moins un enfant mineur est $f = 0{,}35$. Donc f n'appartient à l'intervalle $[0{,}23;0{,}33]$.
On considère que cet échantillon n'est pas représentatif de la population.

EXERCICE 1

Une entreprise fabrique un produit destiné à l'exportation.
Sur le marché extérieur la demande (en milliers d'unités) est régie par la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	$6a$	$4a$	$2a$	$2a$	a

Si l'entreprise dispose d'un stock de 3 000 unités du produit, quelle est la probabilité qu'il y ait rupture de stock ?

EXERCICE 2

Dans une entreprise, on a relevé qu'au cours d'une année : 40% des salariés ont été absents au moins 1 jour ; 30% des salariés ont été absents au moins 2 jours ; 15% des salariés ont été absents au moins 3 jours ; 10% des salariés ont été absents au moins 4 jours ; 5% des salariés ont été absents au moins 5 jours.
On choisit au hasard un salarié de cette entreprise. Quelle est la probabilité pour que ce salarié :

1. n'ait jamais été absent au cours de cette année ?
2. ait été absent une seule journée au cours de cette année ?
3. ait été absent au plus 3 jours ?

EXERCICE 3

Les résultats d'une enquête sur l'audience de deux magazines A et B, sont les suivants :
3 % de la population lit les deux magazines. Le magazine A est lu par 12 % de la population tandis que le magazine B est lu par 7 % de la population.
On interroge une personne de cette population au hasard.

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ne lise pas le magazine A.
2. Calculer la probabilité que la personne interrogée ne lise aucun des deux magazines.

EXERCICE 4

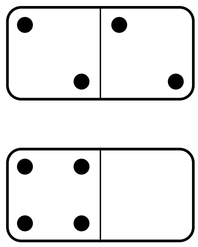
Un musée propose à la vente trois sortes de billets : un billet à 9 € pour visiter uniquement les collections permanentes ; un billet à 11 € pour visiter uniquement l'exposition temporaire ou un billet à 13 € pour visiter les collections permanentes et l'exposition temporaire.
On sait que : 60% des visiteurs visitent l'exposition temporaire et 45% des visiteurs achètent un billet à 11 €.

1. Établir la loi de probabilité associée au prix d'un billet.
2. Quelle est la recette quotidienne que peut espérer ce musée si le nombre de visiteurs par jour est en moyenne de 20 000 ?

EXERCICE 5

(*D'après sujet bac La Réunion 2007*)

Un domino est une petite plaque partagée en deux parties.
Sur chacune des parties figure une série de points. Il peut y avoir de zéro à six points dans une série. Un jeu de dominos comporte 28 dominos, tous différents.
Lors d'une fête, on propose le jeu suivant :



— le joueur tire au hasard un domino parmi les 28 dominos du jeu,

— il gagne, en euros, la somme des points figurant sur le domino tiré.

On suppose que tous les dominos du jeu ont la même probabilité d'être tirés

1. Établir la loi de probabilité des gains possibles.
2. Le joueur doit miser 7 € avant de tirer un domino. En se fondant sur le calcul des probabilités, peut-il espérer récupérer ses mises à l'issue d'un grand nombre de parties ?

EXERCICE 6

Une urne contient des jetons : 10 rouges, 36 bleus et 54 blancs. Un jeu de hasard est organisé de la manière suivante, après avoir misé une certaine somme, un joueur tire un jeton dans l'urne :

— Si le jeton est rouge, il perd le cube de sa mise de départ.

— Si le jeton est bleu, il gagne le carré de sa mise de départ.

— Si le jeton est blanc, il gagne sa mise de départ.

1. On suppose que la mise de départ est de 5 euros.
   a) Déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble des gains possibles.
   b) Calculer le gain moyen que l'on peut espérer réaliser sur un grand nombre de parties avec la même mise de départ de 5 euros.
2. Un joueur cherche à déterminer le montant de la mise de départ pour que le gain moyen réalisé sur un grand nombre de parties soit maximal. Soit x la mise de départ en euros.
   a) Montrer que l'espérance mathématique de loi de probabilité du gain est :

$$f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}36x^2 + 0{,}54x$$

   b) Étudier les de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Conclure sur le problème posé.

EXERCICE 7

Un casino organise un jeu de dés. La mise du joueur pour participer à ce jeu est de n euros, ensuite, le joueur lance deux dés et gagne en euros, le double de la somme des deux dés.
En supposant que ce jeu ait du succès, quel doit être le montant minimal de la mise du joueur pour que le casino ne perde pas d'argent ?

EXERCICE 8

Un énoncé contient 3 coquilles. À chaque relecture la probabilité de détection d'une erreur ayant subsisté est de 0,8.

1. Établir la loi de probabilité du nombre de coquilles qui subsistent après la première relecture.
2. Après une deuxième relecture, quelle est la probabilité qu'il subsiste encore au moins une erreur ?

EXERCICE 9

À l'occasion de la fête du cinéma, le service de publicité d'un quotidien propose chaque jour la possibilité de gagner une place de cinéma sous forme de cartes à gratter.
Dans 13% des journaux mis en vente on trouve une carte gagnante.
Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'un client qui a acheté pendant cinq jours ce quotidien gagne au moins une place de cinéma ?

EXERCICE 10

Une usine fabrique des plaques d'isolation phonique. Une machine de cette usine est chargée de percer des trous dans ces plaques de 80 mm de diamètre.
On décide de contrôler la qualité des trous dans la production d'une journée. On suppose que la probabilité qu'un trou soit défectueux est 0,05.
On note X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 trous choisis au hasard, associe le nombre de trous défectueux.
La production quotidienne des plaques est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler le choix des 100 trous à un tirage avec remise pour assurer l'indépendance des choix.

1. a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X (*justifier votre réponse*).

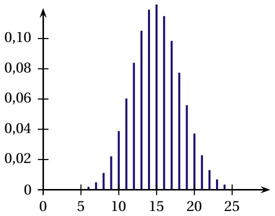
b) Donner les paramètres de cette loi.

2. Calculer une valeur approchée arrondie à 10^{-3} de la probabilité pour un tel échantillon :
   a) de n'avoir aucun trou défectueux ;
   b) d'avoir un seul trou défectueux ;
   c) d'avoir au moins deux trous défectueux.

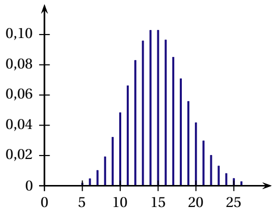
EXERCICE 11

On a représenté ci-dessous, la distribution de probabilité de quatre variables aléatoires suivant des lois binomiales.

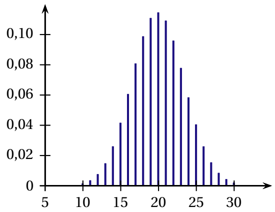
Graphique 1



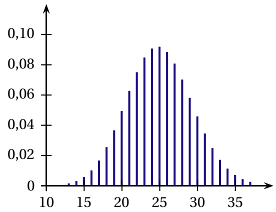
Graphique 2



Graphique 3



Graphique 4



— La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(50;0,4)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0,4$.

— La variable aléatoire Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(50;0,3)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0,3$.

Associer à chacune des deux lois $\mathscr{B}(50;0,4)$ et $\mathscr{B}(50;0,3)$ son graphique.

EXERCICE 12

Une entreprise fabrique des articles en grande quantité. Une étude statistique a permis de constater que 10% des articles fabriqués sont défectueux.

PARTIE A

Les articles fabriqués peuvent présenter au maximum deux défauts notés a et b. On note :

A l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut a » ;

B l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut b » ;

On donne les probabilités suivantes : $p(A) = 0,05$; $p(B) = 0,06$.

1. Traduire par une phrase l'évènement $A \cup B$. Donner la probabilité de l'évènement $A \cup B$.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard ne présente aucun défaut » ?
3. Calculer la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard présente les deux défauts ».
4. Calculer la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard n'a qu'un seul des deux défauts ».

PARTIE B

On prélève au hasard 40 articles dans le stock, pour vérification.
Le stock est suffisamment important pour assimiler le lot de 40 articles à un tirage avec remise de 40 articles.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 40 articles dans ce stock, associe le nombre d'articles ayant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Interpréter le résultat.
3. Déterminer la probabilité de trouver quatre articles qui ont un défaut.
4. Déterminer la probabilité qu'au moins un article a un défaut.
5. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence d'articles défectueux dans un échantillon de taille 40.

EXERCICE 13

Une machine produit des pièces, dont certaines sont défectueuses à cause de deux défauts possibles, le défaut A et le défaut B, à l'exclusion de tout autre défaut.
On a constaté que, parmi les pièces produites par la machine, 7% ont le défaut A, 5% ont le défaut B, et 4% ont les deux défauts.
On choisit au hasard une des pièces produites par la machine. On note :

— A l'évènement : « La pièce a le défaut A » ;

— B l'évènement : « La pièce a le défaut B ».

PARTIE A

1. Quelle est la probabilité de tomber sur une pièce défectueuse ?
2. Traduire par une phrase l'évènement $A \cap \overline{B}$. Calculer la probabilité de l'évènement $A \cap \overline{B}$?
3. Quelle est la probabilité de tomber sur une pièce qui a seulement le défaut B ?
4. Quelle est la probabilité de tomber sur une pièce défectueuse qui n'a qu'un seul défaut ?

PARTIE B

On prélève au hasard 100 pièces dans le stock, pour vérification.
Le stock est suffisamment important pour assimiler le lot de 100 pièces à un tirage avec remise de 100 pièces.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 pièces dans ce stock, associe le nombre de pièces ayant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart type σ.
3. Déterminer la probabilité de trouver 8 pièces qui ont un défaut.
4. Déterminer la probabilité qu'au moins deux pièces ont un défaut.
5. Déterminer la probabilité que dans un lot de 100 pièces on trouve entre 5 et 11 pièces qui ont un défaut.
6. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de pièces défectueuses dans un échantillon de taille 100.
   En déduire le nombre de pièces défectueuses que l'on peut trouver dans un lot de 100 pièces avec une probabilité proche de 0,95.

EXERCICE 14

Une machine fabrique 10 000 pièces par jour. En sortie de fabrication, on a constaté qu'une pièce pouvait présenter deux sortes de défauts A ou B et, qu'en moyenne :

— 9 % des pièces fabriquées présentent le défaut A ;

— 10 % des pièces fabriquées présentent le défaut B ;

— 11 % des pièces fabriquées présentent à la fois les défauts A et B.

PARTIE A

On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

1. Calculer la probabilité p_1 qu'elle n'ait aucun défaut.
2. Calculer la probabilité p_2 qu'elle présente un seul défaut.

PARTIE B

Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la machine, on tolère que la proportion p de pièces défectueuses dans la production est 8 %.
On contrôle le bon fonctionnement de la machine en prélevant au hasard dans la production des échantillons de n pièces.
Le stock est suffisamment important pour assimiler un tel prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de n pièces dans le stock, associe le nombre de pièces défectueuses.

1. Au cours de l'un de ces contrôles, un technicien a prélevé au hasard dans la production un échantillon de 40 pièces.
   a) Déterminer la probabilité qu'il y ait trois pièces défectueuses dans cet échantillon.
   b) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins trois pièces défectueuses dans cet échantillon.
   c) Le technicien a trouvé six pièces défectueuses.
   Doit-il prendre la décision d'effectuer des réglages sur la machine ?
2. Un deuxième technicien a prélevé un échantillon de 100 pièces et trouve la même proportion de 15 % de pièces défectueuses.
   Doit-il prendre la décision d'effectuer des réglages sur la machine ?

EXERCICE 15

Un grossiste propose des perles de culture pour fabriquer des bijoux.
Ces perles peuvent présenter deux sortes d'irrégularité (couleur ou forme). Les perles qui présentent les deux sortes d'irrégularité sont déclassées. Une étude statistique a permis d'établir que :

— 18% des perles sont déclassées ;
— 24% des perles présentent une irrégularité de couleur ;
— 16% des perles présentent une irrégularité de forme.

On choisit au hasard dans le stock une perle et on note :

— C l'évènement « la perle présente une irrégularité de couleur » ;
— F l'évènement « la perle présente une irrégularité de forme ».

PARTIE A

1. Traduire par une phrase l'évènement $C \cup F$. Calculer $P(C \cup F)$.
2. Quelle est la probabilité que la perle choisie ne présente aucune irrégularité ?

PARTIE B

On prélève au hasard un lot de 50 perles dans le stock, pour vérification.
Le stock est suffisamment important pour assimiler le lot de 50 perles à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 perles dans ce stock, associe le nombre de perles déclassées.

1. a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.
2. a) Déterminer la probabilité de trouver 9 perles déclassées dans ce lot.
   b) Déterminer la probabilité qu'au moins deux perles du lot soient déclassées.
   c) Déterminer la probabilité de trouver dans ce lot entre 7 et 10 perles déclassées.
3. On a trouvé dans ce lot, 14 perles déclassées. Ce résultat est-il compatible avec la proportion de 18% des perles déclassées donnée par le grossiste ?

Chapitre 7

SUITES

ACTIVITÉ 1

1. Donner les quatre nombres suivants de la liste $\{0,1,1,2,3,5,8,13,\cdots,\cdots,\cdots,\cdots\}$.
2. On considère les suites définies de la manière suivante : on choisit un nombre entier u_0, chaque terme de la suite se construit ensuite en comptant le nombre d'apparitions des différents chiffres dans le terme précédent, les chiffres lus se classent ensuite dans l'ordre décroissant.
   a) La suite commence par le premier terme $u_0 = 0$, les termes suivants sont $u_1 = 10$, $u_2 = 1110$, $u_3 = 3110$, $u_4 = 132110$.
   Le nombre 132 110 se lit de la façon suivante : dans ce nombre, il y a un 3 un 2 trois 1 et un 0 par conséquent, le terme $u_5 = 13123110$.
   Calculer u_{11}.
   b) Donner les douze premiers termes de la suite qui commence par $u_0 = 40$.

ACTIVITÉ 2

Soit $a > 0$ un nombre réel. La suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$ permet de déterminer une valeur approchée de la racine carrée du nombre réel positif a.

1. Valeur approchée de $\sqrt{2}$. Calculer les six premiers termes de la suite (u_n) avec $a = 2$.
2. L'algorithme suivant permet de calculer le nombre N de valeurs successives qu'il est nécessaire de calculer pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{A}$ avec une précision inférieure à 10^{-9} près.

```
U ← A
N ← 0
B ← √A
Tant que |U − B| ⩾ 10^−9
    U ← 1/2 × (U + U/A)
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

Programmer cet algorithme sur la calculatrice pour déterminer le nombre de valeurs successives qu'il est nécessaire de calculer pour obtenir une valeur approchée à 10^{-9} près de $\sqrt{3}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{1000}$; $\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt{0{,}001}$.

ACTIVITÉ 3

Soit $k > 0$ un entier naturel. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = k$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\[2ex] \dfrac{3u_n + 1}{2} & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Calculer les différents termes de la suite avec $k = 3$, $k = 7$, $k = 18$ et $k = 21$
2. À l'aide de l'algorithme suivant déterminer le plus petit indice n tel que $u_n = 1$ si $k = 27$.

```
U ← 27
N ← 0
Tant que U > 1
    Si U pair
        Alors U ← U/2
        Sinon U ← (3U + 1)/2
    Fin si
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

I SUITES PREMIÈRES DÉFINITIONS

1 DÉFINITION

Une suite réelle u est une fonction de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.
On note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; u_n est le terme d'indice n de la suite.

Dans la notation d'une suite, on peut préciser le rang à partir duquel la suite est définie.

— Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout entier naturel n on la note $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou plus simplement (u_n).

— Si la suite est définie à partir d'un certain rang k on la note $(u_n)_{n\geqslant k}$ le premier terme de la suite est u_k.

2 MODES DE GÉNÉRATION D'UNE SUITE

Une suite peut être définie :

— de façon explicite en exprimant le terme général u_n en fonction de n à l'aide d'une formule.
On peut calculer n'importe quel terme de la suite à partir de son indice n. Par exemple :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = \frac{n+(-1)^n}{n+1} \text{ définit la suite } (u_n) = \left\{1,0,1,\frac{1}{2},1,\frac{2}{3},1,\frac{3}{4},\cdots\right\}.$$

Le terme u_{24} est $u_{24} = \dfrac{24+(-1)^{24}}{24+1} = 1$

— par une formule de récurrence en exprimant un terme en fonction des termes qui le précèdent, et en donnant le(s) premier(s) terme(s).
Dans ce cas pour calculer le terme de rang n, il est nécessaire de calculer tous les termes qui le précèdent.
Par exemple :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{Pour tout entier } n,\ u_{n+1} = 3-2u_n \end{cases} \quad \text{définit la suite } (u_n) = \left\{\frac{1}{2},2,-1,5,-7,\cdots\right\}.$$

— par tout autre moyen, procédé aléatoire, algorithme etc. Par exemple, la suite des décimales de π.

3 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, la représentation graphique d'une suite (u_n) est le nuage de points $M(n;u_n)$

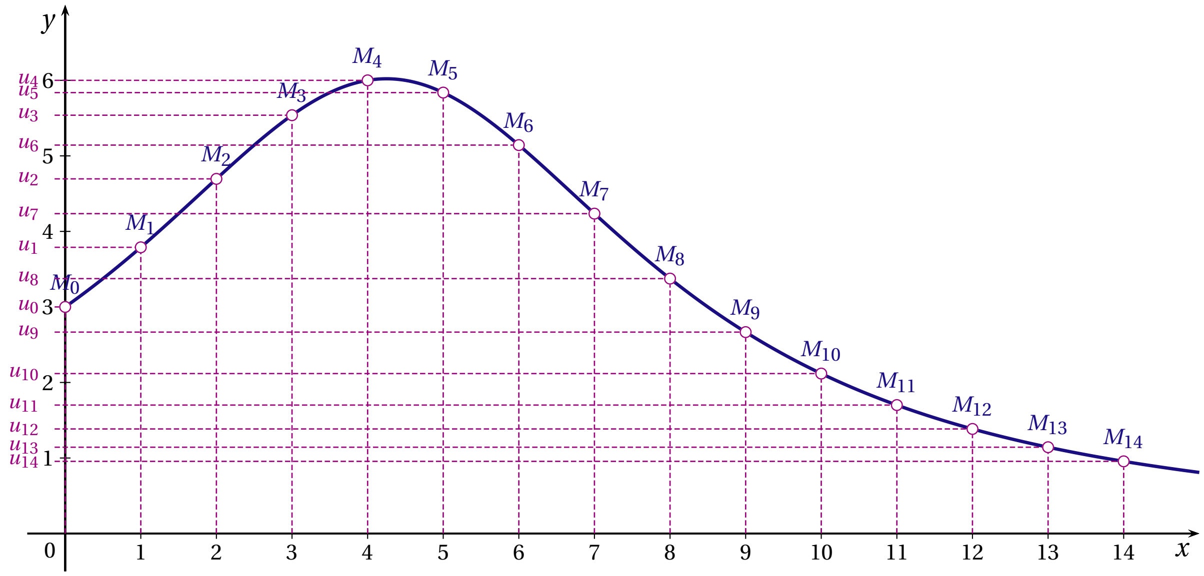
CAS D'UNE SUITE DÉFINIE DE FAÇON EXPLICITE

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{108}{n^2-8{,}5n+36}$.
Calculons les premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
u_n	3	$\frac{72}{19}$	$\frac{108}{23}$	$\frac{72}{13}$	6	$\frac{216}{37}$	$\frac{36}{7}$	$\frac{72}{17}$	$\cdots$

La représentation graphique de la suite (u_n) est l'ensemble des points $M_0(0;3)$, $M_1\left(1;\dfrac{72}{19}\right)$, $M_2\left(2;\dfrac{108}{23}\right)$ etc.
Graphiquement, les termes de la suite (u_n) sont les ordonnées des points d'abscisses entières de la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{108}{x^2-8{,}5x+36}$.

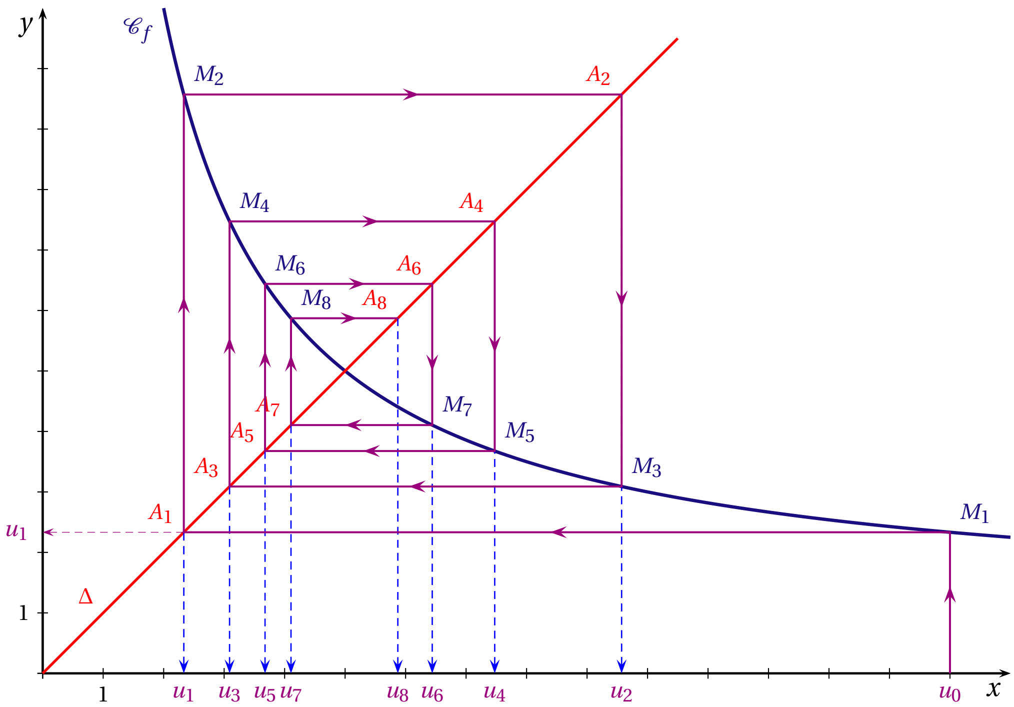


CAS D'UNE SUITE DÉFINIE PAR UNE RELATION DE RÉCURRENCE

Dans le cas d'une suite définie par une formule de récurrence sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour u_0 donné, on représente les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses en utilisant la courbe représentative de la fonction f définissant la relation de récurrence et la droite d'équation $y = x$.

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 15$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 1 + \dfrac{20}{u_n}$.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on trace la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = 1 + \dfrac{20}{x}$



On place le terme initial u_0 sur l'axe des abscisses.
Comme $u_1 = 1 + \dfrac{20}{u_0}$, alors $u_1 = f(u_0)$. Ainsi, u_1 est l'ordonnée du point M_1 de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse u_0.
On reporte la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite Δ.
Le point A_1 de la droite Δ, de même ordonnée que le point M_1, a pour coordonnées $A_1(u_1; u_1)$.
On réitère le même procédé pour obtenir u_2 à partir de u_1 et successivement les termes suivants de la suite.

4 SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

Soit (u_n) une suite réelle.

1. Dire que la suite (u_n) est décroissante signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. Dire que la suite (u_n) est croissante signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
3. Dire que la suite (u_n) est *constante* (ou *stationnaire*) signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.

REMARQUES

— Dire que la suite (u_n) est *monotone* signifie que la suite est croissante ou décroissante.

— Comme pour les fonctions, lorsqu'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de suite strictement décroissante, strictement croissante, strictement monotone.

ÉTUDE DE LA MONOTONIE D'UNE SUITE

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) on peut en général :

— Comparer u_{n+1} et u_n en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

— Lorsque tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

$$\text{Si } u_n > 0 \text{ et } u_{n+1} > 0 \text{ alors : } \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \iff u_{n+1} - u_n > 0$$

— Lorsque la suite (u_n) est définie explicitement en fonction de n par une expression de la forme $u_n = f(n)$ alors, $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n)$.
Par conséquent, si la fonction f est monotone sur l'intervalle $[0;+\infty[$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la fonction f.

EXEMPLES

1. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = {u_n}^2 + u_n + 1$.
Nous avons $u_{n+1} - u_n = {u_n}^2 + 1$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est strictement croissante.

2. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$.
La suite (u_n) est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel n,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{2\times(n+1)}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2} = 1 + \frac{n}{n+2}$$
Ainsi, la suite (u_n) est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ donc la suite (u_n) est croissante.

3. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{1}{n^2+n+1}$.
$u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.
La dérivée de la fonction f est la fonction f' définie par $f'(x) = \dfrac{-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.
Pour tout réel $x \geqslant 0$ on a $f'(x) < 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante.

II SUITES ARITHMÉTIQUES

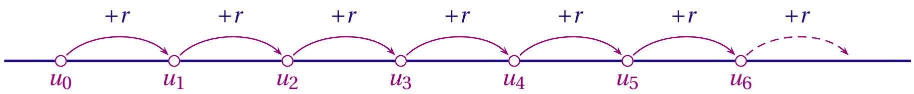
1 DÉFINITION

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé la raison de la suite arithmétique.

La raison d'une suite arithmétique est un réel indépendant de n.



Une suite est arithmétique quand on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r.

EXEMPLES

— La suite des nombres entiers naturels est une suite arithmétique de premier terme 0 est de raison 1.

— La suite des nombres pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 est de raison 2.

— La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n - 2$ est une suite arithmétique de raison 3.
En effet,

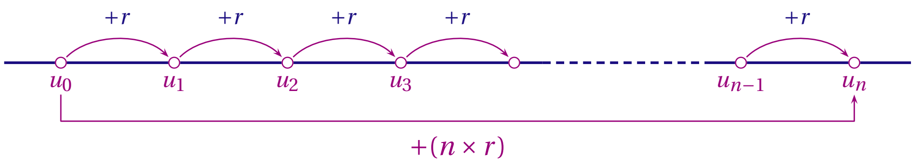
$$u_{n+1} = 3 \times (n+1) - 2 = 3n + 3 - 2 = u_n + 3$$

2 RELATIONS ENTRE LES TERMES

FORMULE EXPLICITE

Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est $u_n = u_0 + nr$.

ILLUSTRATION



(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 :

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + r\\
u_2 &= u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r\\
u_3 &= u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r
\end{aligned}$$

On admet que cette propriété s'étend de proche en proche à tout entier n :

$$u_n = u_{n-1} + r = (u_0 + (n-1)r) + r = u_0 + nr$$

PROPRIÉTÉ

Si (u_n) une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

✻ DÉMONSTRATION

(u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n - u_p = (u_0 + nr) - \left(u_0 + pr\right) = (n-p)r$$

REMARQUE

Si (u_n) une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et k, $u_{n+k} = u_n + kr$.
Il suffit de connaître la raison et un terme quelconque d'une suite arithmétique pour pouvoir déterminer tous les termes de la suite.

3 VARIATIONS

Le sens de variation d'une suite arithmétique ne dépend que de sa raison.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r,
- La suite (u_n) est constante si, et seulement si, $r = 0$.
- La suite (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, $r > 0$.
- La suite (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, $r < 0$.

✻ DÉMONSTRATION

(u_n) une suite arithmétique de raison r donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$
- (u_n) est constante si, et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0 \iff r = 0$.
- (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0 \iff r > 0$.
- (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0 \iff r < 0$.

4 SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

CAS PARTICULIER

Pour tout entier naturel n on a :
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

✻ DÉMONSTRATION

On peut écrire la somme S des n premiers entiers naturels non nuls de deux manières :

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$$

Par addition des deux lignes on obtient :

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ termes}} = n(n+1)$$

CAS GÉNÉRAL

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

PREUVE

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

$$\begin{aligned} u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n &= u_0+(u_0+r)+(u_0+2r)+\cdots+(u_0+nr) \\ &= (n+1)u_0+(1+2+\cdots+n)\times r \\ &= (n+1)u_0+\frac{n(n+1)}{2}\times r \\ &= (n+1)\left(\frac{2u_0+nr}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right) \end{aligned}$$

III SUITES GÉOMÉTRIQUES

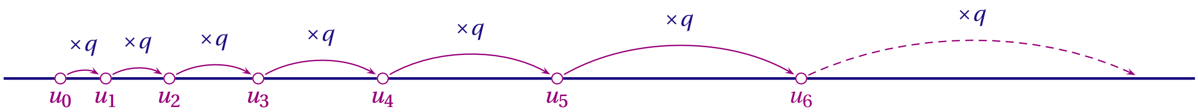
1 DÉFINITION

Dire qu'une suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1}=q\times u_n$$

Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

La raison d'une suite géométrique est un réel indépendant de n.



Une suite est géométrique quand on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q.

EXEMPLE

La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n=-2\times 3^n$ est une suite géométrique de premier terme $u_0=-2$ et de raison 3.
En effet, $u_{n+1}=-2\times 3^{n+1}=-2\times 3^n\times 3=3\times u_n$.

ÉVOLUTION EN POURCENTAGE

— Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1+\dfrac{t}{100}$.

— Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1-\dfrac{t}{100}$.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de $t\%$, on peut définir une suite géométrique de raison $1+\dfrac{t}{100}$ (augmentation) ou $1-\dfrac{t}{100}$ (diminution)

EXEMPLES

1. Un capital de 2 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 0,75 % par an.
   On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :

   $$C_{n+1}=C_n\times\left(1+\frac{0{,}75}{100}\right)=1{,}0075\times C_n$$

   Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0=2000$ et de raison $q=1{,}0075$.

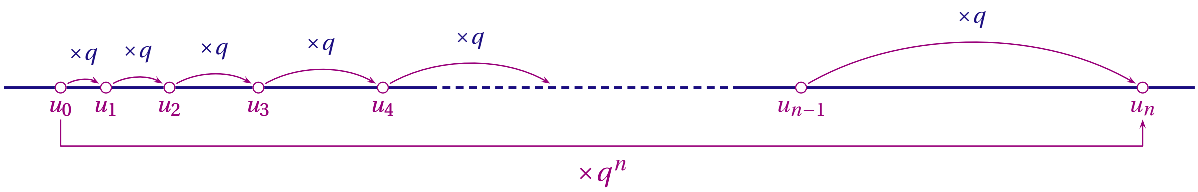
2. Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4% par an. En 2016, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes.
   On note r_n la quantité de rejets l'année $2016+n$ d'où :
   $$r_{n+1} = r_n \times \left(1 - \frac{4}{100}\right) = 0{,}96 \times r_n$$
   Ainsi, la suite (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50000$ et de raison 0,96.

2 RELATIONS ENTRE LES TERMES

EXPRESSION EXPLICITE

Le terme général d'une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 est $u_n = u_0 \times q^n$.

ILLUSTRATION



(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times q \\ u_2 &= u_1 \times q = (u_0 \times q) \times q = u_0 \times q^2 \\ u_3 &= u_2 \times q = (u_0 + \times q^2) \times q = u_0 \times q^3 \end{aligned}$$

On admet que cette propriété s'étend de proche en proche à tout entier n :

$$u_n = u_{n-1} \times q = (u_0 \times q^{n-1}) \times q = u_0 \times q^n$$

Réciproquement, si la suite (u_n) est définie pour tout entier n par $u_n = a \times q^n$ où a et q sont des réels, alors pour tout entier n,
$$u_{n+1} = a \times q^{n+1} = a \times q^n \times q = u_n \times q$$

EXEMPLE

L'objectif du groupe industriel de l'exemple précédent, est de réduire progressivement la quantité de rejets pour atteindre une quantité inférieure ou égale à 30 000 tonnes (soit une réduction de 40%). Cet objectif sera-t-il atteint au bout de 10 ans ?
Au bout de 10 ans, la quantité de rejets est de :

$$r_{10} = 50000 \times 0{,}96^{10} \approx 33242$$

Avec un réduction de 4 % par an, en 2026 l'objectif du groupe industriel ne sera pas atteint.

PROPRIÉTÉ

Si (u_n) une suite géométrique de raison q alors pour tout entier n et pour tout entier p,
$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

DÉMONSTRATION

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n = u_0 \times q^n = u_0 \times q^p \times q^{n-p} = u_p \times q^{n-p}$$

REMARQUE

Cette relation est utile lorsqu'une suite géométrique est définie à partir d'un certain rang ou lorsque l'on cherche la raison d'une suite géométrique dont on connaît deux termes.

EXEMPLE

(u_n) est une suite géométrique telle que $u_6 = 2$ et $u_9 = \frac{1}{4}$.
Pour déterminer la raison q de la suite (u_n) on utilise la relation :

$$u_9 = u_6 \times q^{9-6}$$

Soit q solution de l'équation

$$\frac{1}{4} = 2 \times q^3 \iff q^3 = \frac{1}{8} \iff q = \frac{1}{2}$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

3 MONOTONIE

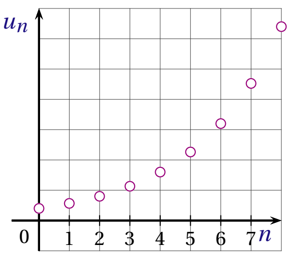
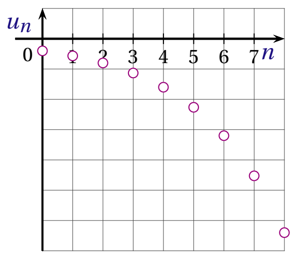
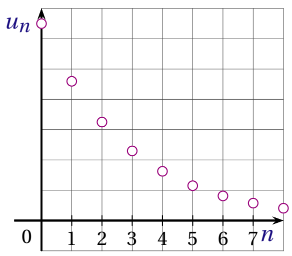
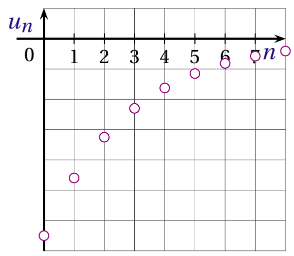
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q-1) \end{aligned}$$

La monotonie de la suite dépend du signe de u_0, q^n et $(q-1)$

— Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.

— Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$.

<table>
<tr><th colspan="2">Si $q > 1$</th><th colspan="2">Si $0 < q < 1$</th></tr>
<tr><td>Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante</td><td>Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante</td><td>Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante</td><td>Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Nous pouvons en déduire les deux théorèmes suivants

THÉORÈME 1

Soit q un réel non nul.

— Si $q < 0$ alors la suite $\left(q^n\right)$ n'est pas monotone.

— Si $q > 1$ alors la suite $\left(q^n\right)$ est strictement croissante.

— Si $0 < q < 1$ alors la suite $\left(q^n\right)$ est strictement décroissante.

— Si $q = 1$ alors la suite $\left(q^n\right)$ est constante.

THÉORÈME 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul

— Si $q<0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

— Si $q>0$ et $u_0>0$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la suite $\left(q^n\right)$.

— Si $q>0$ et $u_0<0$ alors la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de la suite $\left(q^n\right)$.

RECHERCHE D'UN SEUIL À L'AIDE D'UN ALGORITHME

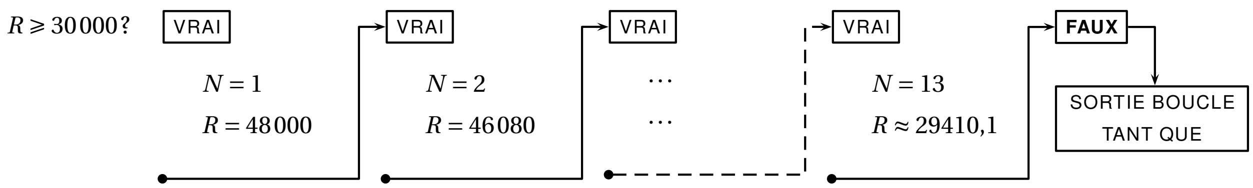
EXEMPLE 1

Soit (r_n) la suite géométrique de raison $q=0{,}96$ et de premier terme $r_0=50\,000$
Comme $r_0>0$ et $0<0{,}96<1$ on en déduit, que la suite (r_n) est décroissante.
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30 000.
C'est à dire déterminer le plus petit entier N tel que pour tout entier $n\geqslant N$, $50\,000\times 0{,}96^n<30\,000$

$R \leftarrow 50\,000$
$N \leftarrow 0$
Tant que $R \geqslant 30\,000$
    $N \leftarrow N+1$
    $R \leftarrow 0{,}96\times R$
Fin Tant que

PROGRAMME	
TEXAS	CASIO
`PROGRAM : SEUIL`	`===== SEUIL =====`
`: 50000 → R`	`50000 → R ↲`
`: 0 → N`	`0 → N ↲`
`: While R ≥ 30000`	`While R ≥ 30000 ↲`
`: N + 1 → N`	`N + 1 → N ↲`
`: 0.96*R → R`	`0.96*R → R ↲`
`: End`	`WhileEnd ↲`
`: Disp N`	`N`

Initialisation des variables R et N : $R=50\,000$ et $N=0$.
Traitement : tant que la condition $R\geqslant 30\,000$ est vraie, on effectue la suite d'instructions situées à l'intérieur de la boucle "**TANT QUE**" et "**FIN TANT QUE**"



Sortie :
La calculatrice affiche 13. Donc pour tout entier $n\geqslant 13$, on a $50000\times 0{,}96^n\leqslant 30000$.

EXEMPLE 2

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,015 et de premier terme $u_0=2\,000$.
Comme $1{,}0075>1$ et $u_0>0$ on en déduit que la suite (u_n) est croissante.
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est supérieur ou égal à 2 300.
C'est à dire déterminer le plus petit entier N tel que pour tout entier $n\geqslant N$, $2000\times 1{,}0075^n\geqslant 2300$.

$U \leftarrow 2\,000$
$N \leftarrow 0$
Tant que $U<2\,300$
    $U \leftarrow 1{,}0075\times U$
    $N \leftarrow N+1$
Fin Tant que

La valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme est 19.
Donc pour tout entier $n\geqslant 19$, $u_n\geqslant 2\,300$. Soit pour tout entier $n\geqslant 19$, on a $2000\times 1{,}0075^n\geqslant 2300$.

4 SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

SOMME DES PUISSANCES SUCCESSIVES

Soit $q \neq 1$ un réel et n un entier naturel. La somme $1+q+q^2+\cdots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

DÉMONSTRATION

On pose $S=1+q+q^2+\cdots+q^n$, d'où $qS=q+q^2+q^3+\cdots+q^{n+1}$

$S-qS=1-q^{n+1}$ soit $(1-q)S=1-q^{n+1}$. Comme $q\neq 1$, on en déduit que $S=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

REMARQUE

Si $q=1$, $S=1+1+1+\cdots+1$. S est la somme de $n+1$ termes égaux à 1 d'où $S=n+1$.

SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q\neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{i=0}^{n}u_i=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q\neq 1$ est :

$$S=\text{premier terme}\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

DÉMONSTRATION

(u_n) est une suite géométrique de raison $q\neq 1$ et de premier terme u_0 donc

$$\begin{aligned}u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n&=u_0+u_0\times q+u_0\times q^2+\cdots u_0\times q^n\\&=u_0\times\left(1+q+q^2+\cdots+q^n\right)\\&=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\end{aligned}$$

EXERCICE 1

1. Exprimer par une formule de récurrence la suite (u_n) définie par le procédé suivant :
« Le terme initial est 4, un terme est égal à la somme du double du précédent et de 5 »
2. La suite (v_n) de terme initial 2, est définie par le procédé suivant :
« Un terme est égal à l'inverse du précédent, augmenté de 1 ».
Exprimer cette suite par une formule de récurrence.

EXERCICE 2

On considère la suite (u_n) telle que : pour tout entier n, $u_n = \dfrac{3n+4}{n+1}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer en fonction de n : u_{n-1} ; $u_n - 1$, u_{n+2} ; $u_n + 2$; u_{2n-1} ; $2u_n - 1$; $u_{2n} - 1$.
3. Exprimer en fonction de n le terme de rang $n+1$.

EXERCICE 3

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier n par :

$$u_n = \frac{n^4}{60} - \frac{n^3}{10} + \frac{11n^2}{60} + \frac{19n}{10} - 3 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{18n-28}{3n^2+12} + \frac{n^2}{3} - \frac{2}{3}$$

1. Calculer les cinq premiers termes des suites (u_n) et (v_n)
2. Les deux suites (u_n) et (v_n) sont-elles égales ?

EXERCICE 4

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 16 \times 0{,}5^n - 1$.
Calculer u_4 et u_6.
2. (v_n) est la suite définie par $v_0 = 60$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{3} - \dfrac{1}{2}$.
Calculer v_4 et v_8.

EXERCICE 5

Soient (u_n) la suite définie par $u_0 = 200$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 15$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = 125 \times 0{,}8^n + 75$.
Les deux suites (u_n) et (v_n) sont-elles égales ?

EXERCICE 6

Étudier le sens de variation des suites suivantes en comparant u_{n+1} et u_n

1. (u_n) est la suite définie pour tout entier n par $u_n = 1 - \dfrac{2}{n+1}$.
2. (u_n) est la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.
3. (u_n) est la suite définie pour tout entier n par $u_n = n^2 - n - 2$.
4. (u_n) est la suite définie pour tout entier n par $u_n = 2^n - 3$.
5. (u_n) est la suite définie pour tout entier n par $u_n = 16 \times 0{,}5^n - 1$.
6. (u_n) est la suite définie pour tout entier n par $u_n = 0{,}5 \times (-2)^n$.

EXERCICE 7

Étudier le sens de variation des suites suivantes en calculant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

1. (u_n) est la suite définie pour tout entier n par $u_n = 5 \times \dfrac{2^n}{3^n}$.
2. (u_n) est la suite définie pour tout entier n par $u_n = n \times 2^n$.
3. (u_n) est la suite définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

EXERCICE 8

Étudier le sens de variation des suites suivantes.

1. (u_n) est la suite définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{2n-5}{3n+2}$.
2. (u_n) est la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.
3. (u_n) est la suite définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

EXERCICE 9

Étudier le sens de variation des suites suivantes.

1. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 3u_n$.
2. (v_n) est la suite définie par $v_0 = 2$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2}$.
3. (w_n) est la suite définie par $w_0 = -2$ et pour tout entier n, $w_{n+1} = {w_n}^2 + w_n + 2$.

EXERCICE 10

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0{,}4x + 3$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}4u_n + 3$.
   a) Dans le repère précédent, placer u_0 sur l'axe des abscisses puis, en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2, u_3 et u_4.
   b) Quelle conjecture peut-on émettre sur les variations de la suite (u_n) ?
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 14$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = 0{,}4v_n + 3$.
   a) Dans le repère précédent, construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (v_n).
   b) Quelle conjecture peut-on émettre sur les variations de la suite (v_n) ?
3. Peut-on choisir une valeur a pour laquelle la suite (w_n) définie par $w_0 = a$ et pour tout entier n, $w_{n+1} = 0{,}4v_n + 3$ est stationnaire ?

EXERCICE 11

(u_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $u_0 = 81$

1. Calculer u_3 et u_{10}
2. Exprimer le terme général u_n en fonction de n.
3. Déterminer le premier terme négatif de la suite (u_n).

EXERCICE 12

Préciser si les suites suivantes définies pour tout entier naturel n, sont arithmétiques ou non. Si oui, préciser le premier terme et la raison.

1. $u_n = 3 - 2n$
2. $u_n = n^2 - \left(n - \dfrac{5}{2}\right)^2 + 9$.
3. $u_n = n^2 - n$.
4. $u_n = 2n + (-1)^n$.

EXERCICE 13

Les termes de la suite (u_n) sont calculés par l'algorithme suivant pour un entier N saisi par l'utilisateur.

$U \leftarrow (-15)$
Pour I variant de 1 à N
$U \leftarrow \dfrac{3U+5}{3}$
Fin Pour

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. La suite (u_n) est-elle une suite arithmétique ?
3. Exprimer le terme général u_n en fonction de n.
4. Calculer u_5 et u_{12}.
5. Déterminer le premier terme de la suite (u_n) supérieur à 150.

EXERCICE 14

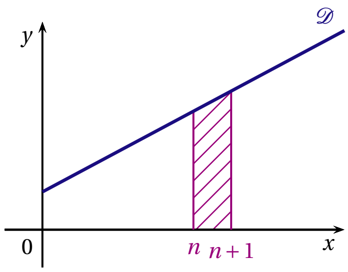
(u_n) est la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{2u_n+3}$.
La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et les quatre premiers termes de la suite v_n.
2. a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.
   b) Exprimer le terme général v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

EXERCICE 15

La droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = \dfrac{8}{15}x + 1$.
On considère les suites (a_n) et (b_n) définies pour tout entier naturel n où a_n et b_n sont respectivement l'aire et le périmètre du trapèze hachuré.

1. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.
2. Les suites (a_n) et (b_n) sont-elles arithmétiques ?



EXERCICE 16

(u_n) est une suite arithmétique définie pour tout entier naturel n.
Dans chacun des cas suivants, déterminer la raison et l'expression de u_n en fonction de n

1. $u_7 = -6$, $u_{12} = 0$.
2. $u_6 = -\dfrac{3}{2}$, $u_9 = \dfrac{3}{2}$.

EXERCICE 17

(u_n) est une suite arithmétique de raison r

1. $u_8 = 12$, $u_{40} = 48$. Calculer u_{18}.
2. $u_5 = 39$, $u_{35} = 3$. Calculer u_{97}.

EXERCICE 18

(u_n) est une suite arithmétique de raison a, déterminer l'entier k dans chacun des cas suivants :

1. $u_{21} = 32$, $a = 1{,}5$ et $u_k = 5$
2. $u_{10} = 64$, $u_5 = 14$ et $u_k = 114$.

EXERCICE 19

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_5 = -2$ et $u_9 = -5$.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{2}{3}u_n + 6$.
   Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique et donner sa raison.
2. Montrer que la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n, par $w_n = u_{4n} + 2$ est une suite arithmétique et donner sa raison.

EXERCICE 20

1. Déterminer 9 nombres impairs consécutifs telle que leur somme est égale à 234.
2. Déterminer la somme des multiples de 13 inférieurs à 200.
3. Calculer la somme $s = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + 3 + \cdots + \frac{37}{3} + 13$ de termes consécutifs d'une suite arithmétique.
4. (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_4 + u_5 + \cdots + u_{12} = 27$ et $u_6 = 2$. Calculer u_0 et la raison r.
5. Calculer la somme S des 100 premiers termes de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par $u_n = 6n - 5$.

EXERCICE 21

1. (u_n) est une suite géométrique telle que $u_9 = 32$ et $u_{11} = 18$. Calculer u_{10}.
2. (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ telle que $u_0 = 4$ et $2u_2 = 5u_1 - 3u_0$. Calculer u_5.

EXERCICE 22

a et c sont deux réels strictement positifs. Déterminer en fonction de a et c le réel positif b tel que a, b et c soient dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

EXERCICE 23

1. Soit (u_n) la suite géométrique définie pour tout entier n par $u_n = 5 \times 0{,}96^n$.
   a) Donner le premier terme u_0 et la raison de la suite (u_n).
   b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
2. (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 0{,}15$ et de raison 1,2.
   a) Exprimer v_n en fonction de n.
   b) Étudier le sens de variation de la suite (v_n).
3. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer le plus petit entier n vérifiant $u_n \leqslant v_n$.

```
U ← ···
V ← 0,15
N ← 0
Tant que U ···
    U ← ···
    V ← 1,2 × V
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

EXERCICE 24

(*D'après sujet bac*)

La plupart des lignes électriques font circuler du courant alternatif. Certaines font circuler du courant continu à très haute tension qui occasionne moins de pertes que le courant alternatif, notamment lorsque les lignes sont immergées, mais aussi lorsque les distances sont très importantes.
En 2012, la plus longue liaison électrique à courant continu en service dans le monde relie la centrale hydro-électrique de Xiangjiaba à la ville de Shanghai. Elle mesure environ 1 900 km; sa puissance électrique initiale est de 6 400 MW; le courant est transporté sous une tension de 800 kV.

Lorsque du courant électrique circule dans un câble, une partie de la puissance électrique est perdue. On estime les pertes de puissance électrique d'un courant continu à très haute tension à 0,3 % pour une distance de 100 kilomètres.

PARTIE A :

On note $p_0 = 6400$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note p_n la puissance électrique restant dans la ligne Xiangjiaba-Shanghai au bout d'une distance de n centaines de kilomètres. Ainsi p_1 est la puissance électrique restant dans la ligne au bout de 100 km.

1. Montrer que $p_1 = 0{,}997\,p_0$.
2. Quelle est la puissance électrique au MW près par défaut restant dans la ligne Xiangjiaba–Shanghai au bout de 200 km ?
3. Déterminer la nature de la suite $\left(p_n\right)$ puis exprimer p_n en fonction de n.
4. Quelle est la puissance électrique à l'arrivée de la ligne Xiangjiaba–Shanghai ?

PARTIE B :

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
p ← 6400
q ← 0,997
Pour I variant de 1 à n
    p ← p × q
Fin Pour
```

1. On entre dans l'algorithme la valeur $n = 3$.
   Faire fonctionner cet algorithme pour compléter les cases non grisées du tableau suivant, que l'on recopiera (on donnera des valeurs arrondies à l'unité près par défaut).

	n	q	p
Entrées et initialisation	3	0,997	6 400
1er passage dans la boucle de l'algorithme			
2e passage dans la boucle de l'algorithme			
3e passage dans la boucle de l'algorithme			

2. Interpréter la valeur de p obtenue au troisième passage dans la boucle de l'algorithme.
3. Quel est le pourcentage de perte de puissance électrique en ligne au bout de 300 km ?
4. D'autres lignes électriques à très haute tension, en courant continu, sont en cours d'étude. On souhaite limiter la perte de puissance électrique à 7 % sur ces lignes.
   La ligne Xiangjiaba–Shanghai répond-t-elle à cette contrainte ?

EXERCICE 25

Pour respecter une nouvelle norme antipollution, un groupe industriel s'engage à réduire chaque année sa quantité de rejets de 5%.
En 2015, la quantité de rejets était de 40 000 tonnes.

1. Quel a été la quantité de rejets en 2017 ?
2. Pour tout entier naturel n, on note r_n la quantité, en tonnes, de rejets pour l'année $(2015 + n)$.
   On a donc $r_0 = 40000$.
   a) Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n. En déduire la nature de la suite (r_n).
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer r_n en fonction de n.
3. Étudier le sens de variation de la suite (r_n).
4. La direction du groupe industriel souhaite connaître l'année à partir de laquelle, la quantité de rejets aura diminué d'au moins 40%.
   a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de déterminer l'année à partir de laquelle, la quantité de rejets aura diminué d'au moins 40%.

```
R ← 40000
N ← 0
Tant que R > ···
    R ← ···
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

   b) Quelle est la valeur de la variable N calculée par cet algorithme ?

EXERCICE 26

Un véhicule hybride est équipé d'une batterie Li-ion dont la capacité d'énergie massique est de 180 Wh/kg.
La vie de cette batterie a été reconstituée en laboratoire en simulant des cycles de charge et de décharge pour déterminer sa durée de vie en fonction de différents facteurs et partant du principe que la batterie est jugée « inutilisable » dès lors qu'elle perd plus de 20 % de sa capacité d'énergie massique.
Les résultats obtenus ont permis d'établir que la capacité d'énergie massique de la batterie diminue de 1,4 % par an.
Pour tout entier naturel n, on note C_n la capacité d'énergie massique en Wh/kg de la batterie au bout de n années.
On a donc $C_0 = 180$.

1. a) Calculer C_1. Interpréter le résultat.
   b) Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
   c) Justifier que $C_n = 180 \times 0{,}986^n$.
2. On cherche à déterminer à l'aide d'un algorithme au bout de combien d'années, cette batterie devient « inutilisable ».
   On propose l'algorithme suivant :

```
C ← 180
N ← 0
Tant que ...
    C ← ···
    N ← ···
Fin Tant que
```

   a) Recopier et compléter la partie relative au traitement.
   b) Au bout de combien d'années, cette batterie devient « inutilisable » ?

EXERCICE 27

Le Phosphore 32 est un isotope radioactif du phosphore utilisé en médecine pour le traitement de certaines maladies.
On injecte à un patient une solution contenant 4×10^{15} noyaux de Phosphore 32.
On considère que le nombre de noyaux diminue chaque jour de 4,8 %.
On note u_n le nombre de noyaux au bout de n jours. On a donc $u_0 = 4 \times 10^{15}$.

1. Calculer u_1 puis u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
5. Écrire un algorithme qui permette de déterminer à partir de combien de jours le nombre de noyaux aura diminué au moins de moitié.

EXERCICE 28

Une agence de presse a la charge de la publication d'un journal hebdomadaire traitant des informations d'une communauté de communes dans le but de mieux faire connaître les différents évènements qui s'y déroulent.
Un sondage prévoit un accueil favorable de ce journal dans la population.
Une étude de marché estime à 1 200 le nombre de journaux vendus lors du lancement du journal avec une progression des ventes de 2 % chaque semaine pour les éditions suivantes.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de journaux vendus n semaines après le début de l'opération. On a donc $u_0 = 1200$.

1. Calculer le nombre u_1 de journaux vendus une semaine après le début de l'opération.
2. Vérifier que $u_{n+1} = 1{,}02 \times u_n$ pour tout entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
3. Écrire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
4. Calculer le nombre de journaux vendus la douzième semaine après le début de l'opération.
5. L'agence souhaite dépasser les 3 000 journaux vendus par semaine. Voici un algorithme :

$U \leftarrow 1200$
$N \leftarrow 0$
Tant que $U < 3000$
    $U \leftarrow 1{,}02 \times U$
    $N \leftarrow N+1$
Fin Tant que

a) Déterminer la valeur de N calculée par cet algorithme.
b) Interpréter le résultat précédent.

6. Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{51}$ et interpréter le résultat.

EXERCICE 29

(*D'après sujet bac*)

Au 1er janvier 2014, un particulier installe 20m^2 de panneaux photovoltaïques à son domicile.
Pour estimer la rentabilité de cette installation, il utilise la documentation suivante :

En France 1m^2 de panneaux photovoltaïques correctement orientés produit environ 95 kWh/an.
La première année, une installation produit effectivement cette quantité et on estime que la perte de rendement est de 3 % par an.
La rentabilité financière est assurée à partir du moment où la quantité totale d'énergie produite depuis le début de l'installation dépasse 20 000 kWh

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note u_n la quantité d'énergie produite par l'installation durant l'année $2014+n$.

PARTIE A

1. a) Déterminer la quantité d'énergie produite en 2014 et la quantité d'énergie produite en 2015.
   b) Vérifier que $u_{n+1} = 0{,}97 \times u_n$ pour tout entier naturel n.
2. Quelle estimation, à la dizaine de kWh près, peut-on donner de la quantité d'énergie produite en 2044 ?

PARTIE B

On considère l'algorithme ci-dessous :

$u \leftarrow 1900$
$S \leftarrow 1900$
$n \leftarrow 0$
Tant que $S < 20000$
    $n \leftarrow n+1$
    $u \leftarrow u \times 0{,}97$
    $S \leftarrow S+u$
Fin Tant que

1. La valeur affichée en exécutant cet algorithme est 12. Que signifie ce résultat ?
2. On estime que la durée de vie de l'installation sera d'environ 25 ans.
   Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{24}$ et interpréter le résultat.

EXERCICE 30

1. L'algorithme ci-dessous permet de calculer les termes successifs d'une suite (u_n).

$U \leftarrow 750$
Pour I variant de 1 à N
    $U \leftarrow 0{,}4 \times U$
Fin Pour

Quelle est la valeur calculée cet algorithme lorsque l'on saisit $N = 1$, puis $N = 2$ et enfin $N = 3$?

2. a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   b) Pour tout entier naturel n, donner l'expression du terme u_n en fonction de n.
   c) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
   a) Calculer S_3.
   b) Quelles modifications doit-on faire à l'algorithme précédent pour qu'il calcule la valeur du terme S_n pour un entier n donné ?
   c) Exprimer S_n en fonction de l'entier naturel n.
   d) Étudier le sens de variation de la suite (S_n).

EXERCICE 31

PARTIE A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1760$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}65u_n + 861$.

1. La suite (u_n) est-elle une suite géométrique ?
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2460$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 2460 - 700 \times 0{,}65^n$.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

PARTIE B

Une étude réalisée sur le nombre d'emplacements de camping d'une région touristique a permis d'établir que la demande d'emplacements peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'emplacements l'année $2017 + n$.

1. Un réaménagement de l'offre d'emplacements de camping sera nécessaire dès que la demande dépassera 2 400 emplacements.
   On considère l'algorithme suivant :

```
U ← 1760
N ← 0
Tant que U ⩽ 2400
    N ← N + 1
    U ← 0,65 × U + 861
Fin Tant que
```

   a) Recopier et compléter autant que nécessaire les colonnes du tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité.

Valeur de N	0	1	…	
Valeur de U	1 760		…	
Condition $U \leqslant 2400$	Vraie		…	

   b) Donner la valeur affectée à la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Selon ce modèle, est-il possible d'envisager une demande supérieure à 2 500 emplacements ?

DST 1RE ES 2 (2017-2018)

EXERCICE 1

1. Après une hausse de 8 % le prix d'un article est de 351 €. Quel était le prix de cet article avant la hausse ?
2. Après une baisse de 6 % le prix d'un article est de 329 €. Quel était le prix de cet article avant la baisse ?
3. Le cours d'une action a successivement augmenté de 15 % puis baissé de 20 %.
   a) Quel est le pourcentage d'évolution global de cette action ?
   b) Si le cours initial de cette action était de 145 euros, quel sera son cours final ?
   c) Quel devra être le taux du pourcentage d'évolution pour que cette action retrouve son cours initial ?

EXERCICE 2

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ dont le tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

Parmi les propositions suivantes quelles sont celles qui sont exactes ?

1. $a > 0$ et $\Delta < 0$.
2. $a < 0$ et $\Delta = 0$.
3. $a < 0$ et $\Delta < 0$.
4. $b = 0$ et $c = 1$.
5. La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en deux points.
6. L'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution.

EXERCICE 3

Donner le tableau des variations de chacune des fonctions suivantes :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4x - 1$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 6x + \dfrac{1}{2}$

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $3x^2 - x - 2 = 0$
2. $-6x^2 + x + 2 = 0$
3. $(2x+3)^2 = (1-3x)^2$
4. $5x^2 - 9x + 3 = 4x^2 - 8x + 2$

SUJET A

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $9-3x-2x^2 \geqslant 0$.
2. $3x^2-2x-1 \geqslant 0$.

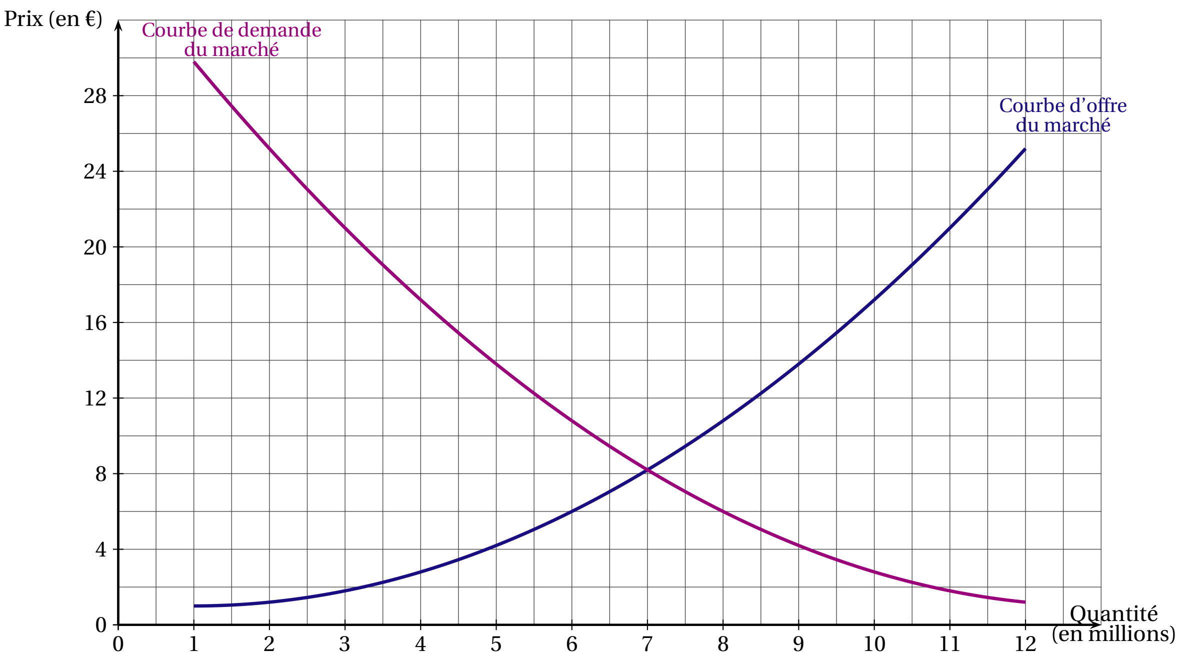
EXERCICE 2

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.
Une étude concernant un article A a permis d'établir que :

— la fonction d'offre f est donnée par $f(x)=0{,}2x^2-0{,}4x+1{,}2$

— la fonction demande g est donnée par $g(x)=0{,}2x^2-5{,}2x+34{,}8$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont les prix d'un article en euros, pour une quantité x comprise entre 1 et 12 millions d'unités.



1. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 17,20 €.
   a) Calculer la quantité d'articles offerte sur le marché ;
   b) Calculer la quantité d'articles demandée sur le marché ;
   c) Quel problème cela pose-t-il ?
2. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée.
   Déterminer le prix d'équilibre et la quantité associée.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=3x^2+2x-12$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
On considère la droite $\mathscr{D}$ représentative de la fonction affine g définie pour tout réel x par $g(x)=-2x+3$.

Sur quel(s) intervalle(s) la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la droite $\mathscr{D}$?

EXERCICE 4

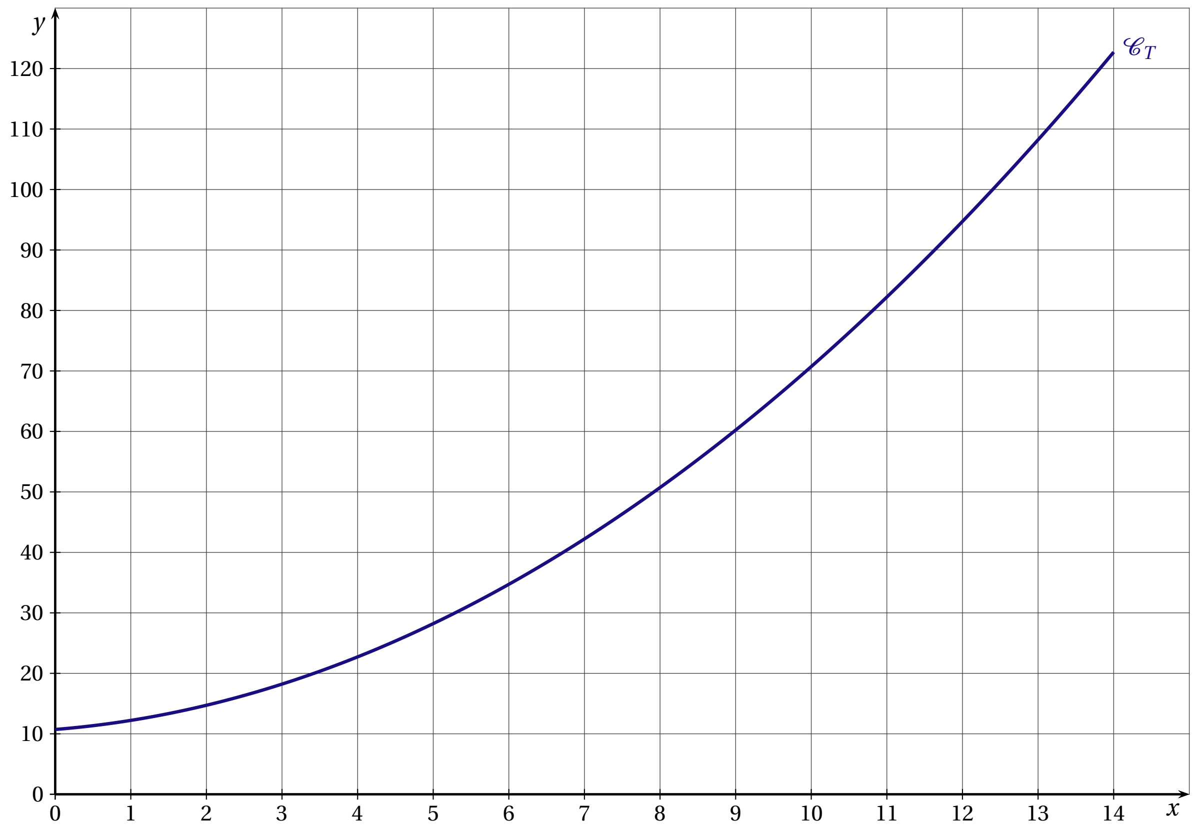
Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 14 milliers d'articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois ; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $]0;14]$ par

$$C(x) = 0{,}5x^2 + x + 10{,}72$$

La courbe représentative de la fonction C, notée $\mathscr{C}_T$, est donnée en annexe ci-dessous.
On admet que chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 8,50 €.

1. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 7 000 articles ou fabriquer et vendre 9 000 articles ?
2. On désigne par $R(x)$ le montant en milliers d'euros de la recette mensuelle obtenue pour la vente de x milliers d'articles. On a donc $R(x) = 8{,}5x$.
   a) Tracer dans le repère donné en annexe, la droite $\mathscr{D}$ représentative de la fonction recette.
   b) Par lecture graphique déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.
3. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $]0;14]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Étudier le signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).
   b) Étudier les variations de la fonction B sur $]0;14]$.
   En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?

ANNEXE



SUJET B

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $6-7x-3x^2 \leqslant 0$.
2. $2x^2-3x+1 \leqslant 0$.

EXERCICE 2

L'offre et la demande désignent respectivement la quantité d'un bien ou d'un service que les acteurs du marché sont prêts à vendre ou à acheter à un prix donné.
Une étude concernant un article A a permis d'établir que :

— la fonction d'offre f est donnée par $f(x)=0{,}2x^2-0{,}4x+1{,}2$

— la fonction demande g est donnée par $g(x)=0{,}2x^2-5{,}2x+37{,}2$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont les prix d'un article en euros, pour une quantité x comprise entre 1 et 12 millions d'unités.

1. On suppose dans cette question que le prix de vente d'un article est de 4,20 €.
   a) Calculer la quantité d'articles offerte sur le marché ;
   b) Calculer la quantité d'articles demandée sur le marché ;
   c) Quel problème cela pose-t-il ?
2. On dit que le marché est à l'équilibre lorsque, pour un même prix, la quantité offerte est égale à la quantité demandée.
   Déterminer le prix d'équilibre et la quantité associée.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=3x^2-2x-10$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
On considère la droite $\mathscr{D}$ représentative de la fonction affine g définie pour tout réel x par $g(x)=2x+5$.

Sur quel(s) intervalle(s) la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la droite $\mathscr{D}$?

EXERCICE 4

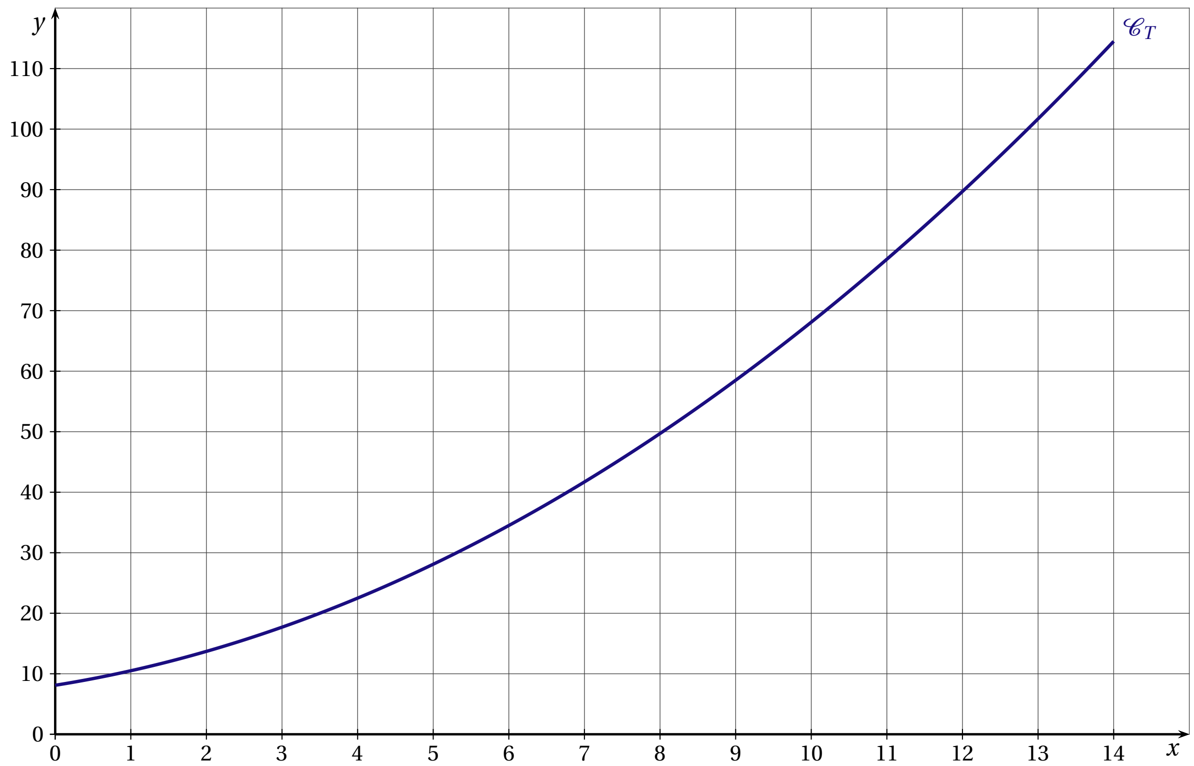
Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 14 milliers d'articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $]0;14]$ par

$$C(x) = 0{,}4x^2 + 2x + 8{,}1$$

La courbe représentative de la fonction C, notée $\mathscr{C}_T$, est donnée en annexe ci-dessous.
On admet que chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 8 €.

1. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 7 000 articles ou fabriquer et vendre 9 000 articles?
2. On désigne par $R(x)$ le montant en milliers d'euros de la recette mensuelle obtenue pour la vente de x milliers d'articles. On a donc $R(x) = 8x$.
   a) Tracer dans le repère donné en annexe la droite $\mathscr{D}$ représentative de la fonction recette.
   b) Par lecture graphique déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.
3. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $]0;14]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Étudier le signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).
   b) Étudier les variations de la fonction B sur $]0;14]$.
   En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal?

ANNEXE



CONTRÔLE N^o 3

EXERCICE 1

1. Justifier que pour tous réels a et b positifs, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est du signe de $a-b$.
2. Donner le tableau de signes de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}-2$

EXERCICE 2

PARTIE A

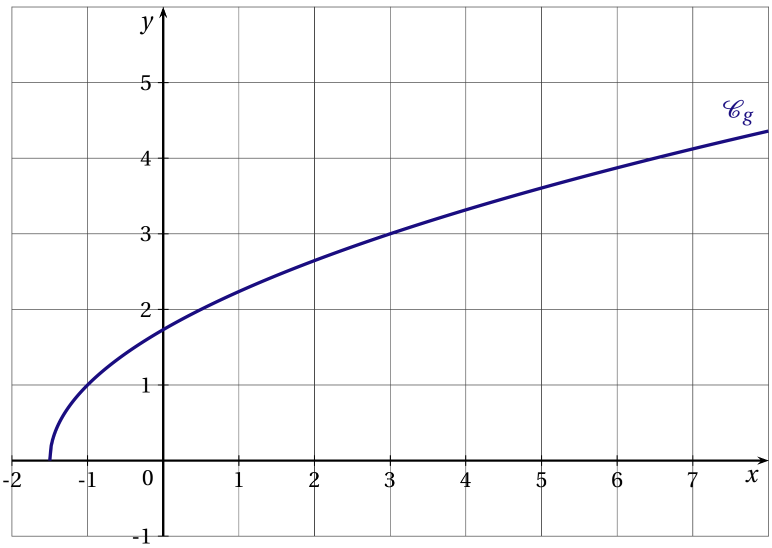
Soit f la fonction affine telle que $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=1$ et $f\left(\dfrac{13}{2}\right)=5$.

1. Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
2. Quel est le sens de variation de la fonction f ?
3. Donner le tableau de signes de la fonction f.

PARTIE B

On considère la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{2x+3}$.

1. Justifier que la fonction g est définie sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$
2. La courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g est tracée ci-dessous. Tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{7}{4}$.



3. Résoudre l'équation $\sqrt{2x+3}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{7}{4}$.

EXERCICE 3

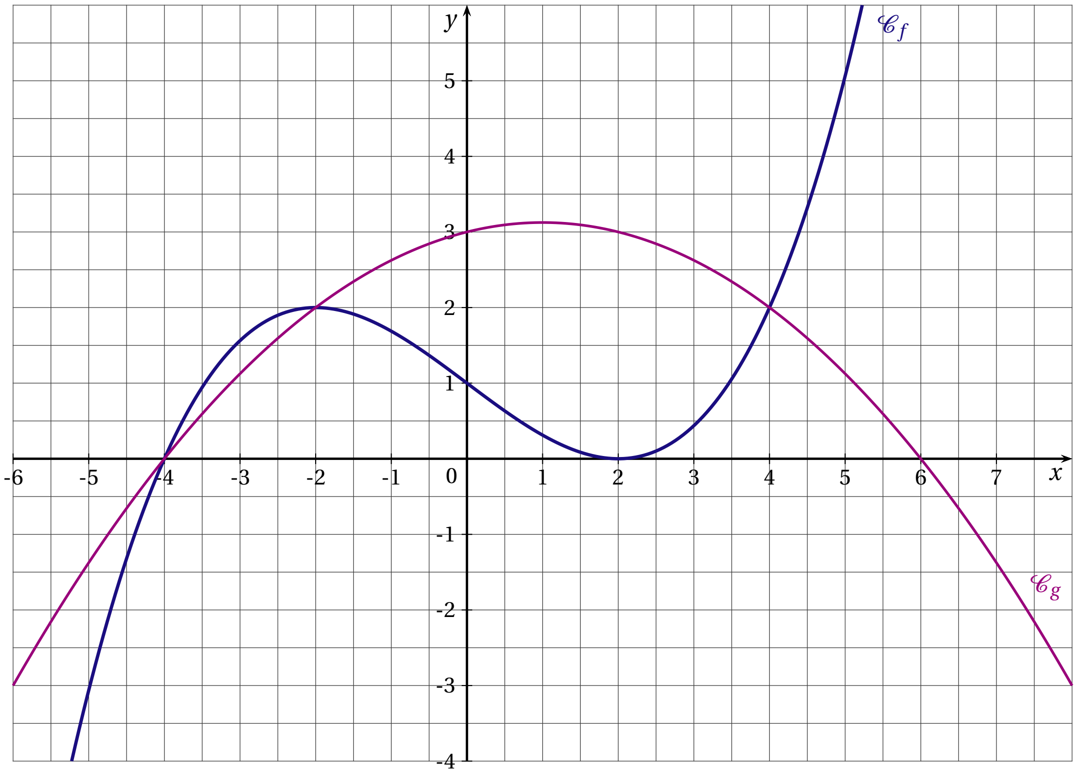
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\dfrac{1}{x}>\dfrac{2}{5}$.
2. $-1\leqslant x^3\leqslant 8$.

EXERCICE 4

Soient f et g les fonctions définies pour tout réel x par $f(x) = \frac{x^3}{16} - \frac{3}{4}x + 1$ et $g(x) = -\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} + 3$.

Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées ci-dessous.



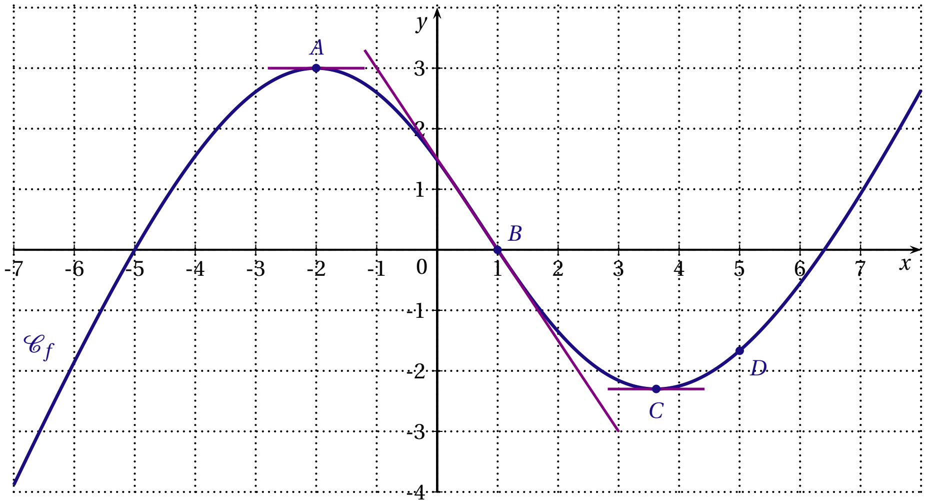
1. Par lecture graphique, donner le tableau de variation de la fonction f.
2. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \frac{(x+4)(x-2)^2}{16}$.

   b) Établir le tableau de signes de $f(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.
   En déduire une expression factorisée de $g(x)$.
4. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = \frac{(x+4)(x^2-2x-8)}{16}$.

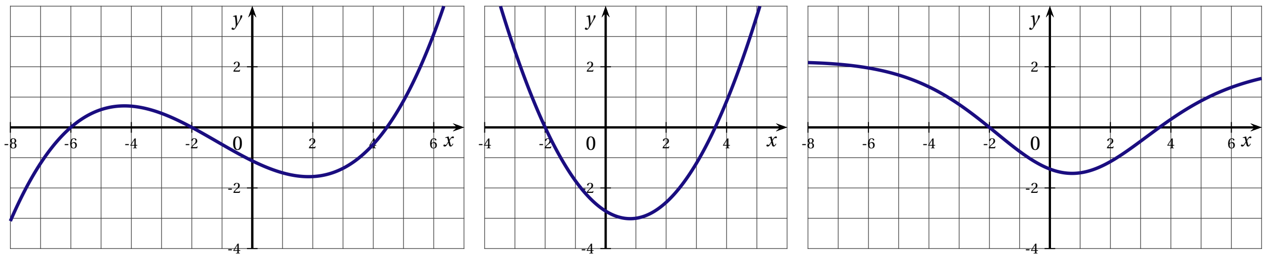
   b) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

EXERCICE 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de la fonction f.
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B passe par le point de coordonnées $(3; -3)$.



1. À partir du graphique et des données de l'énoncé :
   a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f'(x) = 0$.
   b) Déterminer $f'(1)$.
2. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D d'abscisse 5 a pour équation $y = \frac{7}{8}x - \frac{145}{24}$.
   En déduire les valeurs de $f(5)$ et $f'(5)$.
3. La proposition « $f'(0) > 1$ » est-elle vraie ou fausse ?
4. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' . Déterminer laquelle.



Courbe $\mathscr{C}_1$ Courbe $\mathscr{C}_2$ Courbe $\mathscr{C}_3$

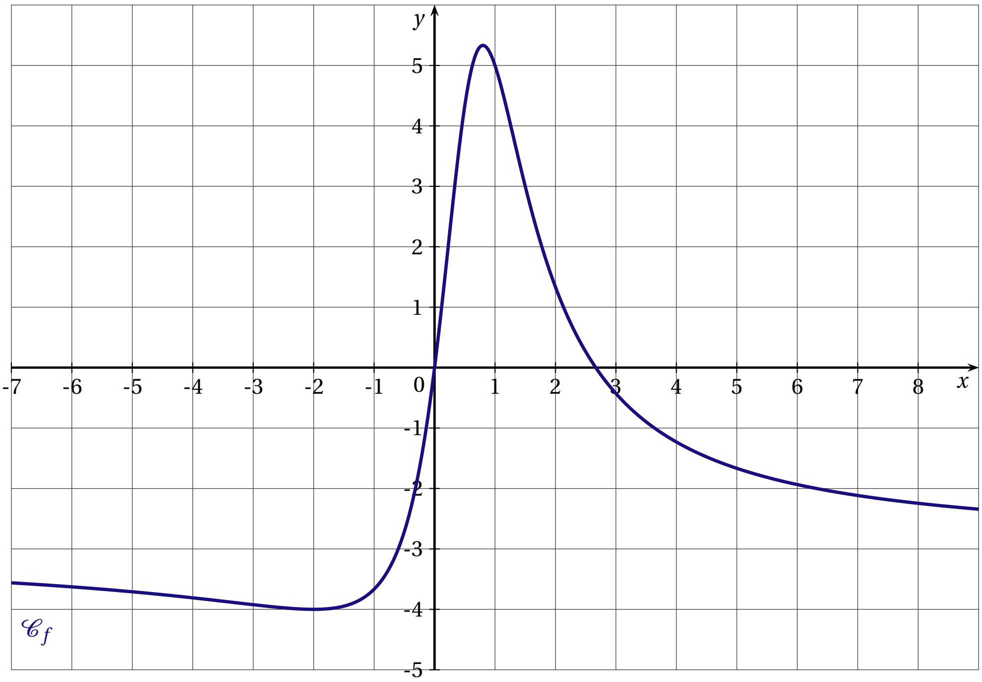
EXERCICE 2

Dans chaque cas, calculer l'expression de la dérivée de la fonction donnée.

1. u est la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par $u(x) = x^2 + 4x + \frac{2}{x}$
2. v est la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par $v(x) = 2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{x^2}$
3. f est la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = u(x) \times v(x)$

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{8x-3x^2}{x^2-x+1}$. On note f' la dérivée de la fonction f.
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



1. a) Étudier le signe du polynôme $v(x) = x^2 - x + 1$.

   b) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{-5x^2-6x+8}{\left(x^2-x+1\right)^2}$.

2. a) Étudier le signe de $f'(x)$.

   b) Donner le tableau des variations de f.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 5.
   Tracer sur le graphique donné, la tangente T.

EXERCICE 4

On souhaite tracer une courbe $\mathscr{C}$ pouvant représenter une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3;7]$ qui satisfait les conditions suivantes :

— $f(-3) = -2$, $f(7) = 5$ et $f'(7) = 2$.

— Le signe de la fonction dérivée f' de f est donné par le tableau suivant :

x	-3		-1		3		7
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

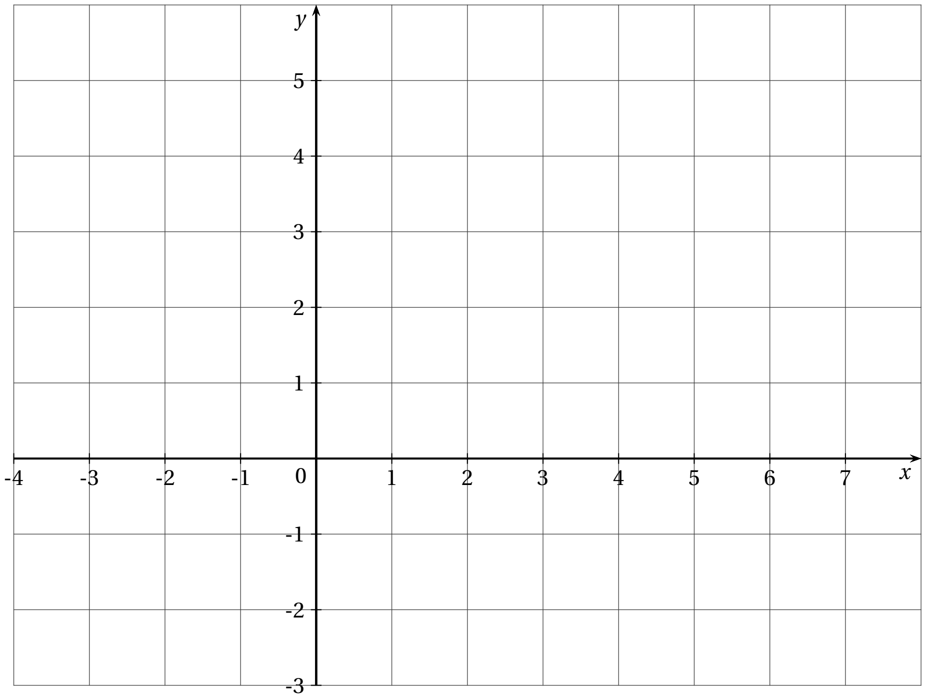
— Sur l'intervalle $[-2;5]$, la fonction f admet un maximum égal à 4 et un minimum égal à 1.

— La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x+3$ est tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse 1.

1. Donner le tableau de variations de la fonction f. On fera figurer dans le tableau les images par f de -3, -1, 3 et 7.
2. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 7.
3. Dans le repère donné en annexe ci-dessous placer le point A et tracer la droite $\mathscr{D}$ ainsi que les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses -1, 3 et 7. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

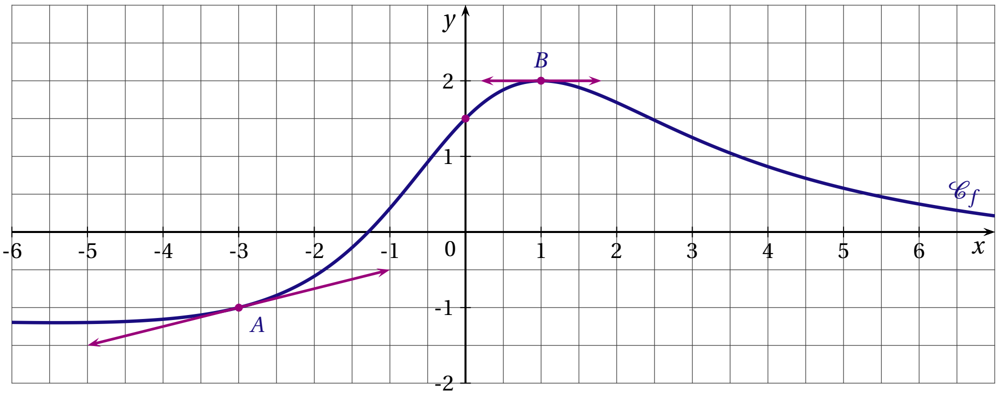
ANNEXE

(*à rendre avec la copie*)



EXERCICE 1

On a représenté ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives (-3) et 1.



1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer graphiquement $f'(1)$ et $f'(-3)$.
2. On sait que $f'(0) = 1$. Le point de coordonnées $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient-il à la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?
3. La proposition $f'(-2) \leqslant f'(3)$ est-elle vraie ?

EXERCICE 2

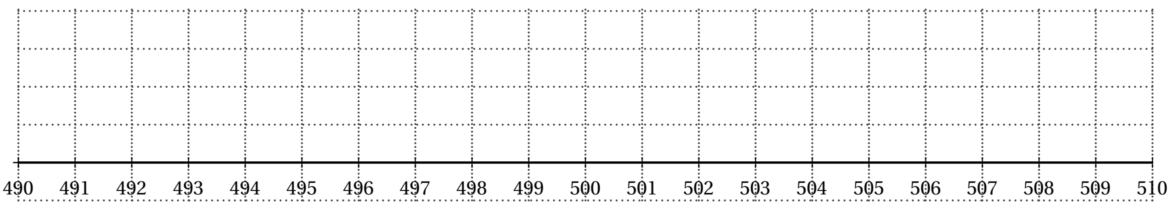
Une entreprise de produits alimentaires conditionne des pâtes dans des sachets de 500 grammes.
On suppose que le poids du sachet vide est négligeable.
Pour vérifier le réglage de la machine utilisée pour remplir les sachets, un échantillon aléatoire de 30 sachets est prélevé dans la production ; on mesure la masse de chaque sachet et on calcule la moyenne $\overline{m}$ des masses des sachets de l'échantillon ainsi que l'écart-type σ.
Au cours de la production, l'échantillon suivant a été prélevé.

501	500	500	502	499	497	497	499	498	498
498	500	502	503	500	500	501	500	495	504
501	503	505	502	501	501	497	498	499	496

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Masses	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505
Effectifs											

2. Représenter la dispersion de cette série à l'aide d'un diagramme en boîte.



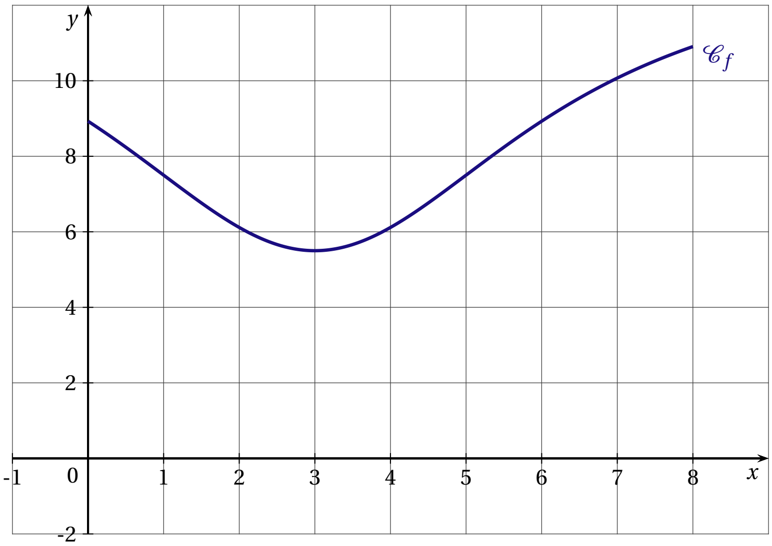
3. Donner la moyenne $\overline{m}$ de l'échantillon ainsi que l'arrondi au centième près de l'écart-type σ.
4. Un réglage de la machine est nécessaire si l'un des critères suivants n'est pas vérifié :
   — les sachets ont une masse en grammes comprise dans l'intervalle $[495;505]$;
   — au moins la moitié des sachets ont une masse en grammes comprise dans l'intervalle $[498;502]$;
   — 95% au moins des sachets ont une masse en grammes comprise dans l'intervalle $\left[\overline{m}-2\sigma;\overline{m}+2\sigma\right]$.

   Faut-il effectuer un réglage de la machine ? (*Justifier*)

EXERCICE 3

PARTIE A

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;8]$ par $f(x)=\dfrac{13{,}5x^2-81x+187{,}5}{x^2-6x+21}$.
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



1. Justifier que pour tout réel x, on a : $x^2-6x+21>0$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f. Montrer que $f'(x)=\dfrac{192x-576}{\left(x^2-6x+21\right)^2}$.
3. a) Étudier le signe de $f'(x)$.
   b) Donner le tableau des variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 5.
   Tracer sur le graphique donné, la tangente T.

PARTIE B

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit.
Sa capacité de production quotidienne est limitée à 8 milliers d'articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque jour. Le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué est modélisé par $f(x)$ où f est la fonction définie dans la partie A.

1. À partir de quel prix de vente unitaire, l'entreprise fera-t-elle un bénéfice ?
2. On suppose que chaque article produit est vendu au prix de 7,50 €.
   Calculer l'intervalle dans lequel doit se situer la production pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ou nul.

EXERCICE 1

On lance deux dés équilibrés, on note a et b le résultat de chacun des deux dés.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue $\{a;b\}$ de cette épreuve aléatoire, associe le réel g définit par :

— si $a+b$ est un nombre impair alors g est égal au carré de la différence des deux nombres a et b;

— si $a+b$ est un nombre pair alors g est égal à l'opposé de la somme des deux nombres a et b.

1. Recopier et compléter le tableau à double entrée qui modélise cette expérience aléatoire :

	1	2	3	4	5	6
1	-2	1	-4	9	-6	25
2	1	-4	1	-6	9	-8
3	-4	...	...	...	...	...
4	9	...	...	...	...	...
5	-6	...	...	...	...	...
6	25	...	...	...	...	...

2. a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   b) Calculer la valeur exacte de l'espérance mathématique de X.

3. Calculer la probabilité de l'événement « $X>0$ ».

EXERCICE 2

Une entreprise fabrique des articles en grande quantité qui nécessitent deux composants notés a et b.
Les articles peuvent être défectueux en raison de la défaillance d'un des deux composants ou des deux composants.
Les résultats obtenus lors des contrôles effectués avant la mise en vente des articles ont permis d'établir que 88 % des articles fabriqués ne sont pas défectueux, 8 % des articles ont un composant a défectueux et 7 % des articles ont un composant b défectueux.

PARTIE A

On choisit au hasard un des articles fabriqués pour le contrôler. On note A l'évènement : « le composant a est défectueux » et B l'évènement : « le composant b est défectueux ».

1. Traduire par une phrase l'évènement $A\cup B$. Donner la probabilité de l'évènement $A\cup B$.
2. Montrer que la probabilité que les deux composants sont défectueux est égale à 0,03.
3. Calculer la probabilité que sur cet article il n'y a que le composant a qui soit défectueux.

PARTIE B

Le coût de production d'un article est de 320 €. Lors du contrôle le remplacement du composant a défectueux augmente le coût de production de 12 € et le remplacement du composant b défectueux augmente le coût de 32 €.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque article pris au hasard, associe son prix de revient.

1. Recopier et compléter le tableau suivant représentant la loi de probabilité de X :

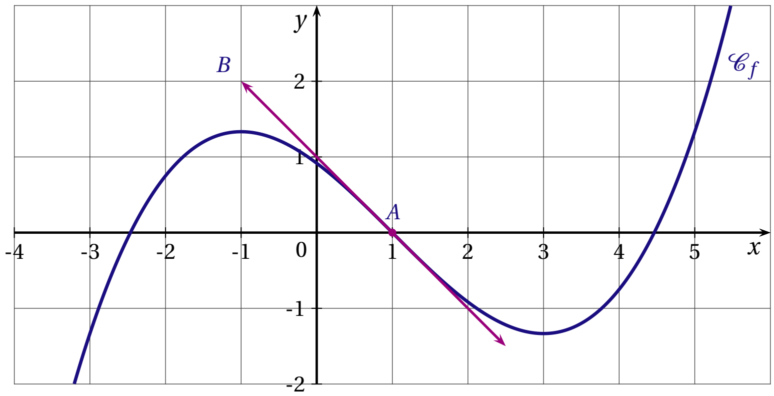
Prix de revient x_i	320	332	352	364
$P(X=x_i)$				0,03

2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Interpréter le résultat.
3. Déterminer le prix de vente d'un article pour que la marge bénéficiaire soit en moyenne égale à 25 % du prix de revient d'un article.

EXERCICE 3

PARTIE A

On a représenté ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1;0)$. Cette tangente passe par le point $B(-1;2)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.



1. Déterminer une équation de la tangente T. En déduire $f'(1)$.
2. La proposition $f'(4) \geqslant f'(1)$ est-elle vraie ?

PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{(x-1)\left(x^2-2x-11\right)}{12}$.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4}$.
2. a) Étudier le signe de $f'(x)$.
   b) Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) - (-x+1) = \dfrac{(x-1)^3}{12}$.
   b) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y = -x+1$.

EXERCICE 4

Les résultats seront si nécessaire, arrondis au millième.

Le taux d'activité est le rapport entre le nombre d'actifs et la population en âge de travailler (ensemble des personnes âgées de 15 à 64 ans). Selon une étude de l'insee, le taux d'activité en France des 15-64 ans s'établit à 72 % au deuxième trimestre 2017.
Pour vérifier cette donnée, un lycéen interroge au hasard 50 personnes de sa ville âgées de 15 à 64 ans. On suppose que le nombre d'habitants est suffisamment important pour assimiler cet échantillon à un tirage aléatoire avec remise.
On note X la variable aléatoire qui compte, dans cet échantillon, le nombre d'actifs.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Interpréter le résultat.
3. Ci-dessous est donné un extrait du tableau donnant les valeurs, arrondies à 10^{-4}, des probabilités $P(X \leqslant k)$, où k désigne un nombre entier naturel appartenant à l'intervalle $[0;50]$.

k	$P(X \leqslant k)$	k	$P(X \leqslant k)$	k	$P(X \leqslant k)$	k	$P(X \leqslant k)$
28	0,011 2	32	0,135 9	36	0,553 4	40	0,926 0
29	0,023 2	33	0,213 0	37	0,674 9	41	0,963 5
30	0,044 9	34	0,312 1	38	0,781 7	42	0,984 2
31	0,080 9	35	0,428 6	39	0,866 3	43	0,994 1

   À l'aide de ce tableau ou de la calculatrice :
   a) déterminer la probabilité que dans cet échantillon, il y a exactement 32 actifs ;
   b) déterminer la probabilité que dans cet échantillon, il y a au moins 41 actifs.
4. On a trouvé dans cet échantillon 34 actifs.
   a) Déterminer un intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence des actifs dans un échantillon de taille 50, selon la loi binomiale $\mathscr{B}(50;0,72)$.
   b) Le lycéen peut-il remettre en question l'hypothèse selon laquelle le taux d'activité en France des 15-64 ans s'établit à 72 % ?

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2^n - 3$.

1. Calculer u_0, u_1, u_3 et u_5.
2. a) Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3$. En déduire une définition de la suite (u_n) à l'aide d'une relation de récurrence.

EXERCICE 2

1. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2\sqrt{2}$ et l'algorithme suivant qui permet de calculer les termes de u_1 à u_N de la suite pour un entier N saisi par l'utilisateur.

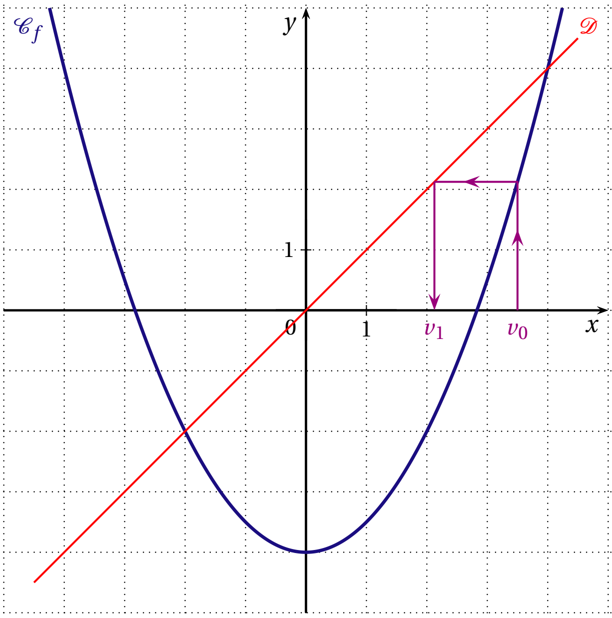
$U \leftarrow 2\sqrt{2}$
Pour I variant de 1 à N
  $U \leftarrow \dfrac{U^2}{2} - 4$
Fin Pour

   a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

   b) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_6.

2. (v_n) est la suite définie par $v_0 = \dfrac{7}{2}$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{(v_n)^2}{2} - 4$.

   On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la parabole $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 4$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



   a) On a représenté sur l'axe des abscisses, les deux premiers termes de la suite (v_n).
   En utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ placer sur l'axe des abscisses les termes v_2 à v_6.

   b) La suite (v_n) est-elle monotone?

EXERCICE 3

Étudier le sens de variation des suites suivantes en comparant u_{n+1} et u_n

1. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
2. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 \times 0{,}2^n + 3$.

EXERCICE 4

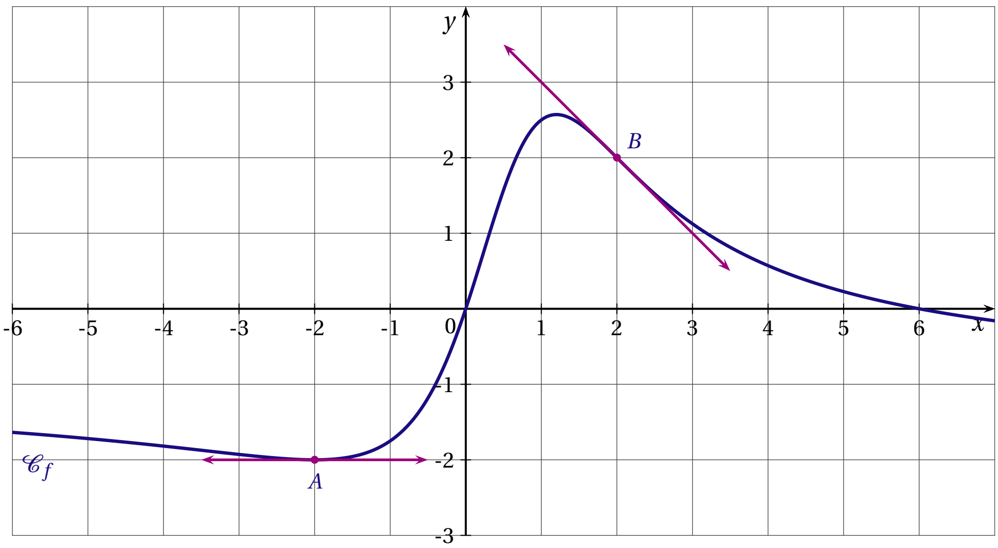
Dans un casino, un jeu sur machine se déroule de manière suivante :
Après une mise de 1 euro, un nombre a compris entre 1 et 50 est tiré au hasard.
Si a est un nombre premier le joueur reçoit 1 euro, si a est un multiple de 8 le joueur reçoit 2 euros, si a est un multiple de 9 le joueur reçoit 3 euros. Pour les 24 autres valeurs de a, le joueur perd sa mise.

1. On définit la variable aléatoire G qui est associée au gain algébrique du joueur.
   a) Déterminer la loi de probabilité de G.
   b) Calculer l'espérance mathématique de G et interpréter le résultat.
2. Un joueur effectue 10 parties consécutives.
   On note X la variable aléatoire associée au nombre de parties où le joueur perd sa mise.
   a) Calculer l'espérance mathématique de X.
   b) Quelle est la probabilité, arrondie au millième près, pour le joueur de perdre cinq parties ?
   c) Calculer la probabilité, arrondie au millième près, pour le joueur de perdre au moins sept parties.
3. Après avoir observé 50 parties, une personne constate qu'il y a eu 29 parties pour lesquelles les joueurs ont perdu leur mise. Au seuil de risque 5 %, l'observateur peut-il considérer que la probabilité de perdre sa mise à ce jeu n'est pas égale à 0,48 ?

EXERCICE 5

PARTIE A

On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives -2 et 2.



On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Par lecture graphique donner les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(2)$.
2. La proposition $f'(0) \leqslant f'(4)$ est-elle vraie ?

PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{6x - x^2}{x^2 - x + 2}$.

1. Montrer que la dérivée f' de la fonction f est définie par $f'(x) = \dfrac{-5x^2 - 4x + 12}{\left(x^2 - x + 2\right)^2}$.
2. a) Étudier le signe de $f'(x)$.
   b) Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   b) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite T.

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{2n}{3} + 1$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. La suite (u_n) est-elle une suite arithmétique ?
3. Déterminer le premier terme de la suite (u_n) supérieur à 20.
4. Calculer la somme de termes consécutifs de la suite (u_n) : $S = 1 + \dfrac{5}{3} + \dfrac{7}{3} + 3 + \cdots + \dfrac{61}{3} + 21$.

EXERCICE 2

(u_n) est une suite géométrique à termes positifs telle que $u_5 = 5$ et $u_7 = \dfrac{125}{9}$.
Exprimer le terme général u_n en fonction de n.

EXERCICE 3

(u_n) est une suite géométrique à termes non nuls, de raison $q \neq 1$ telle que $5u_2 = 7u_1 - 2u_0$.

1. Déterminer la raison q de la suite (u_n).
2. On donne $u_0 = 6{,}25$. Calculer u_4.

EXERCICE 4

Pour respecter une nouvelle norme antipollution, un groupe industriel s'engage à réduire chaque année sa quantité de rejets polluants de 6 %.
En 2015, la quantité de rejets polluants était de 50 000 tonnes.

1. Quel a été la quantité de rejets polluants en 2017 ?
2. Pour tout entier naturel n, on note r_n la quantité, en tonnes, de rejets polluants pour l'année $(2015 + n)$.
   On a donc $r_0 = 50\,000$.
   a) Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n. En déduire la nature de la suite (r_n).
   b) Donner l'expression de r_n en fonction de n.
3. Étudier le sens de variation de la suite (r_n).
4. La direction du groupe industriel souhaite connaître l'année à partir de laquelle, la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.
   a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin de déterminer au bout de combien d'années la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.

$R \leftarrow 50\,000$
$N \leftarrow 0$
Tant que $R \ldots$
    $R \leftarrow \ldots$
    $N \leftarrow N+1$
Fin Tant que

   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de la variable N calculée par cet algorithme.
   En déduire l'année à partir de laquelle, la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.

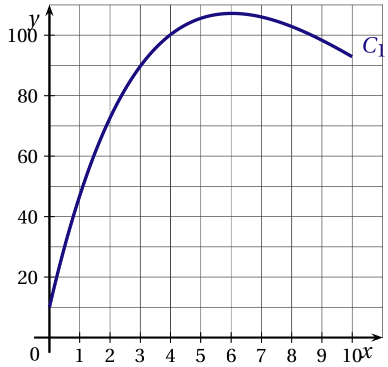
CONTRÔLE N° 9

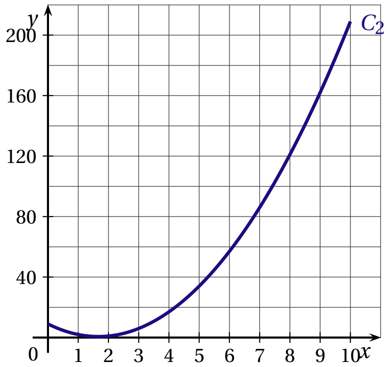
EXERCICE 1

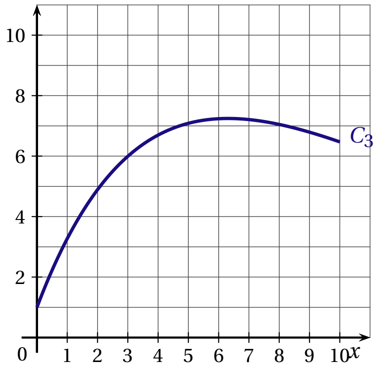
PARTIE A

On a tracé en annexe ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;10]$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(3;90)$ passe par le point $B(5;102)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. À partir du graphique et des renseignements fournis déterminer $f'(3)$.
2. Quelle est, parmi les trois courbes proposées ci-dessous, celle qui représente la fonction dérivée f' ?







PARTIE B

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production est limitée à 10 milliers d'articles par mois.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois ; le coût total de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;10]$ par :

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 9x + 81$$

Le coût marginal est assimilé sur l'intervalle $[0;10]$ à la dérivée f' du coût total de production.
La courbe $\mathscr{C}_f$, donnée en annexe, est la courbe représentative de la fonction f.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $[0;10]$.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{9}{2}$.
   Tracer la droite T sur le graphique donné en annexe.

PARTIE C

Chaque article est vendu 57 euros, la recette mensuelle exprimée en milliers d'euros est donnée par

$$R(x) = 57x$$

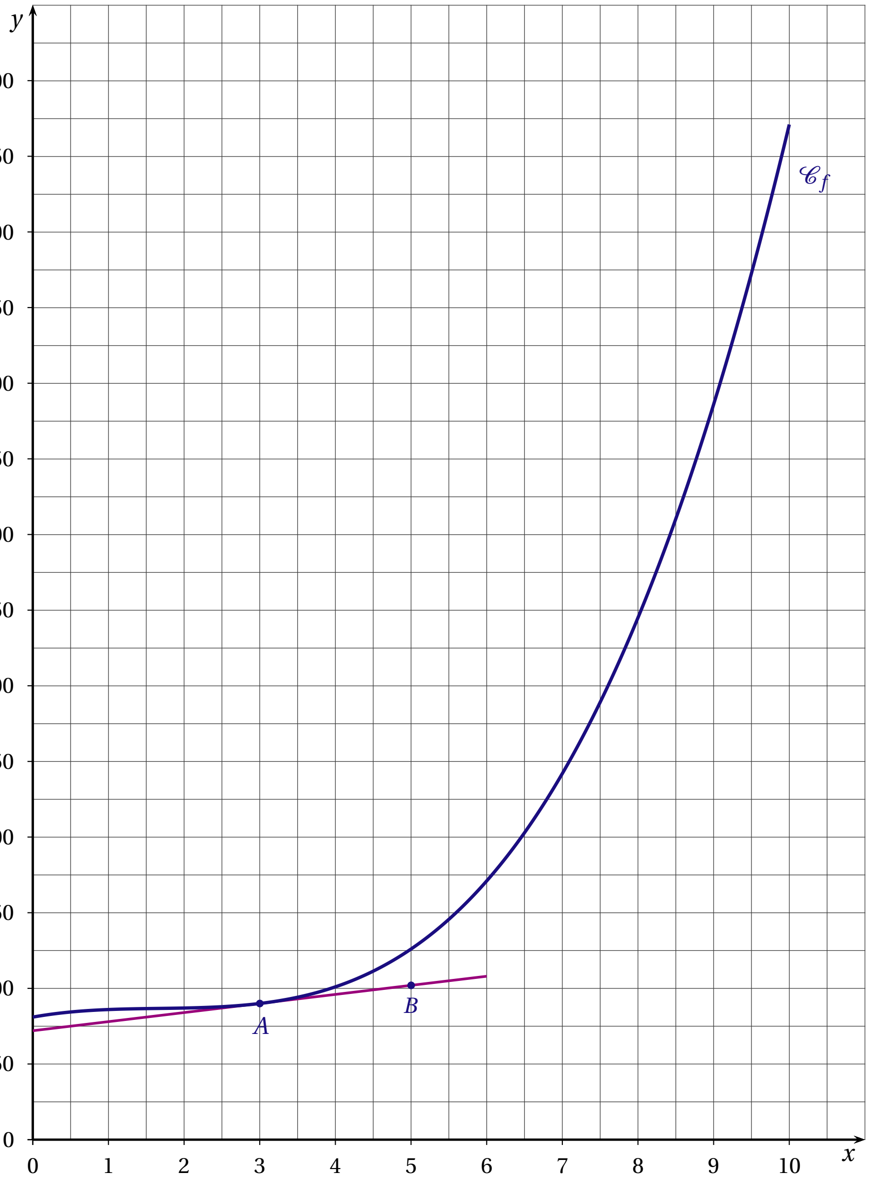
1. a) Tracer sur le graphique joint en annexe, la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction R.
   b) Par lecture graphique, déterminer les quantités commercialisées, arrondies à la centaine d'articles près, dégageant un bénéfice positif.
2. Le bénéfice mensuel exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $B(x) = R(x) - f(x)$ où f est la fonction coût total définie dans la partie B.
   a) On note B' la dérivée de la fonction B.
   Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;10]$ on a $B'(x) = -3x^2 + 10x + 48$.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0;10]$.
   c) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal.
   Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?

PARTIE D

On note $C(x)$ le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué.
La fonction C est définie sur l'intervalle $]0;10]$ par $C(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 9x + 81}{x}$.
On admet que la fonction C est dérivable sur l'intervalle $]0;10]$ et on appelle C' sa fonction dérivée.

1. Calculer $C'(x)$, et vérifier que $C'(x) = \dfrac{(2x-9)(x^2+2x+9)}{x^2}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;10]$.
2. Étudier les variations de la fonction C sur $]0;10]$.
3. En dessous de quel prix de vente unitaire, l'entreprise est-elle sûre de ne faire aucun bénéfice ?

ANNEXE



EXERCICE 2

PARTIE A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 250$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}72u_n + 420$.

1. Calculer u_2.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1500$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 1500 - 1250 \times 0{,}72^n$.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

PARTIE B

Une municipalité a décidé de proposer un abonnement mensuel à un service de location de vélos.
Au mois de janvier 2018, 250 personnes se sont abonnées à ce service.
Une étude statistique a permis de modéliser l'évolution du nombre d'abonnements pour les prochains mois à l'aide de la suite (u_n) définie dans la partie A.

1. On considère l'algorithme suivant :

```
U ← 250
N ← 0
Tant que U ⩽ 1 435
    U ← 0,72 × U + 420
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

   Donner une interprétation de la valeur $N = 9$ obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme.
2. Selon ce modèle, donner une estimation du nombre d'abonnés au bout de 12 mois.
3. Est-il possible d'envisager nombre d'abonnés supérieur à 2 000 ?