BAC MATH-2022

Meilleur en Maths by Tounsi

Thème : Arithmétiques

Résumé de cours

Série N°1 et Correction

Série N°2 et Correction

Série N°3 et Correction

2 Séries A.T.S.M (Forum du bac Math)

Exercices proposés aux anciens baccalauréats

by:Tounsi

“ On ne peut plus expliquer le monde, faire ressentir sa beauté à ceux qui n'ont aucune connaissance profonde des mathématiques. ” De Richard Feynman

Arithmétiques

by : Tounsi

Division euclidienne

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple (q, r) tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$

Vocabulaire : a est le dividende ; b le diviseur ; q le quotient et r le reste

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

a divise b

$\iff$ b multiple de a

$\iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$

✧ Notation : a/b

✧ a/a

✧ Transitivité : $\left\{\begin{array}{l} a/b \\ b/c \end{array}\right. \Longrightarrow a/c$

✧ Linéarité : $\left\{\begin{array}{l} a/b \\ a/c \end{array}\right. \Longrightarrow a/bu + cv$

✧ Lien avec les congruences : $a/b \iff b \equiv 0(a)$

✧ Lien avec le PGCD : $a/b \iff PGCD(a, b) = a$

Congruence dans $\mathbb{Z}$

a et b ont même reste dans la division euclidienne par n

$\iff$ a est congru à b modulo n

$\iff$ $a - b$ est multiple de n

✧ Notation : $a \equiv b \pmod{n}$ (ou directement $a \equiv b\ (n)$)

✧ $a \equiv a\ (n)$

✧ $a \equiv b\ (n) \Longrightarrow b \equiv a\ (n)$

✧ Transitivité : $\left\{\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ b \equiv c\ (n) \end{array}\right. \Longrightarrow a \equiv c\ (n)$

✧ Addition : $\left\{\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ a' \equiv b'\ (n) \end{array}\right. \Longrightarrow a + a' \equiv b + b'\ (n)$

✧ Multiplication : $\left\{\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ a' \equiv b'\ (n) \end{array}\right. \Longrightarrow aa' \equiv bb'\ (n)$

✧ Puissance : $a \equiv b\ (n) \Longrightarrow a^k \equiv b^k\ (n)$

Nombres premiers

Un entier p supérieur ou égal à 2 est premier si et seulement si il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même

Critère d'arrêt: si n n'admet pas de diviseur premier p tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$ alors n est premier

Propriété: Si a divise b et a divise c, alors a divise $\alpha.b+\beta.c$ pour tous entiers α et β

PGCD, PPCM et Fermat

L'ensemble des diviseurs communs à a et b admet un plus grand élément noté PGCD(a, b)

L'ensemble des multiples communs à a et b admet un plus petit élément noté PPCM(a, b)

✧ Petit théorème de Fermat: $a^{p-1} \equiv 1(p)$ avec p premier ne divisant pas a. $a^p \equiv a(p)$ avec p premier

✧ PGCD$(ka, kb) = |k|$ PGCD(a, b)

✧ Si $a = bq + r$, alors PGCD$(a, b) =$ PGCD(b, r)

✧ Le PGCD de deux nombres non nuls est le dernier reste non nul de la suite des divisions de l'algorithme d'Euclide

Bézout

✧ Identité de Bézout : PGCD$(a, b) = 1$

$\iff$ a et b sont premiers entre eux

$\iff$ il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$

✧ Corollaire de Bézout : PGCD$(a, b) = d$

$\Longrightarrow$ il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$

✧ Théorème : l'équation $ax+by = c$ admet des solutions entiers $\iff$ c est multiple de PGCD(a, b)

Lemme de Gauss

$\left\{\begin{array}{l} a/bc \\ \text{PGCD}(a, b) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow a/c$

Inverse modulo b:

Soient a et b deux entiers naturels non nuls; $b \geq 2$ et $a \wedge b = 1$ alors il existe un unique entier non nul u appartenant à $\{1, 2, \ldots, b-1\}$ tel que $a.u \equiv 1(b)$

On dit que u est l'inverse de a modulo b

Théorème

Si $n \equiv 0\ (a)$, $n \equiv 0\ (b)$ et $a \wedge b = 1$

Alors $n \equiv 0\ (ab)$

Arithmétiques 1

by: Tounsi

Exercice 1**

Soit n > 2.On pose a = n^5 − n.
Montrer que n^3− n divise a puis que 30 divise a.

Exercice 2*****

Soit n un entier relatif, démontrer que $7n + 18$ et $10n^2 + 51n + 65$ sont premiers entre eux avec 3 méthodes. !!!

Exercice 3**

Montrer que tout nombre premier est nécessairement de la forme $6k + 1$ ou $6k - 1$, avec $k \geq 1$.

Exercice 4**

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 \equiv 7 (\text{mod} 9)$.

Exercice 5**

Montrer que :
1) $11 / 2^{123} + 3^{121}$
2) $7 / 2^{n+2} + 3^{2n+1}$

Exercice 6***

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$\begin{cases} x \equiv 7 (\text{mod} 8) \\ x \equiv 11 (\text{mod} 12) \end{cases}$$

Exercice 7*

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} 15x \equiv 9 (\text{mod} 12) \\ 4x \equiv 5 (\text{mod} 7) \end{cases}$

Exercice 8**

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $25x + 15y = 35$ (E)

Exercice 9****

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $x^2 - 5y^2 = 3$.

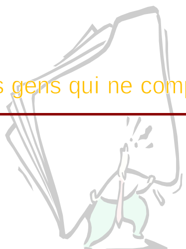
Exercice 10****

1. Donner, en le justifiant, le nombre de diviseurs positifs de 100^{100}.

2. Déterminer le reste de la division de 101^{101} par 3, et par 5, en déduire le reste de la division euclidienne de 101^{101} par 15.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et p un nombre premier supérieur ou égal à 3.

   Montrer que si $0 < n < p$ alors p divise l'un des entiers $n^{\frac{p-1}{2}} - 1$, $n^{\frac{p-1}{2}} + 1$



Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les mathématiques ? Poincaré

Corrigé-Arithmétiques 1

Exercice 1**

$a = n(n^4-1) = n(n^2-1)(n^2+1) = (n^3-n)(n^2+1)$ alors n^3-n divise a

D´après le petit théorème de Fermat, $n^5 \equiv n \pmod 5$ donc 5 divise a

et, de même 3 divise a. Puisque 3 et 5 sont premiers entre eux, 15 divise a.

Enfin, $a = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ où n et n − 1 sont des entiers consécutifs, donc 2 divise a.

On conclut que 30 divise a puisque 2 et 15 sont premiers entre eux.

Exercice 2*****

M1 : En factorisant, on obtient : $10n^2+51n+65 = (5n+13)(2n+5)$.

On a : $2(7n+18)-7(2n+5) = 1$ et $-5(7n+18)+7(5n+13) = 1$; donc, d'après le théorème de ***Bézout***, $7n+18$ est premier avec $2n+5$ et $5n+13$; par conséquent $7n+18$ est premier avec leur produit c'est-à-dire $10n^2+51n+65$.

M2 : Facile a démontré que, a et b sont des entiers premiers entre eux, ssi il en est de même des entiers a+b et ab.

Il suffit de choisir $a = 5n+13$ et $b = 2n+5$

M3 : Soit $d = (7n+18) \wedge (10n^2+51n+65)$,

alors d divise $(7n+18)$ et divise $(10n^2+51n+65)$ donc d divise

$7(10n^2+51n+65) - 10n(7n+18) = 177n+455$,par suite d divise

$177(7n+18) - 7(177n+455) = 1$. Ainsi d=1

Exercice 3**

Comme le reste dans une division par 6 peut être 0, 1, 2, 3, 4 ou 5, tout entier naturel est nécessairement de la forme 6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4 ou 6k + 5.

S'il est de la forme 6k, il n'est jamais premier car il est divisible par 6.

S'il est de la forme 6k + 2, il n'est jamais premier (sauf si k = 0) car il est divisible par 2 et n'est pas égal à 2.

S'il est de la forme 6k + 3, il n'est jamais premier (sauf si k = 0) car il est divisible par 3 et n'est pas égal à 3.

S'il est de la forme 6k + 4, il n'est jamais premier car il est divisible par 2 (et différent de2

Conclusion : un nombre premier strictement supérieur à 3 est nécessairement de la forme $6k + 1$ ($k \geq 1$) ou $6k + 5$ ($k \geq 0$).

Comme $6k + 5 = 6(k + 1) - 1 = 6K - 1$, on peut finalement dire que tout nombre premier est nécessairement de la forme $6k + 1$ ou $6k - 1$, avec $k \geq 1$.

N.B Réciproque fausse !

Exercice 4**

On a : $7 \equiv 16 \pmod 9$ donc :

$X^2 \equiv 7 \pmod 9$ equi $x^2 - 16 \equiv 0 \pmod 9$ equi $(x - 4)(x + 4) \equiv 0 \pmod 9$.

Un entier x est solution de l'équation si et seulement si $(x-4)(x+4)$ est multiple de 9, mais $9 = 3^2$;

on a donc trois possibilités. Soit $x - 4$ est multiple de 9, soit $(x + 4)$ est multiple de 9, soit $(x - 4)$ et $(x + 4)$ sont multiples de 3.

si $(x - 4)$ et $(x + 4)$ sont multiples de 3 alors $(x + 4) - (x - 4) = 8$ sera un multiple de 3 impossible

si $x - 4$ est multiple de 9, alors $x = 9k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$

si $x + 4$ est multiple de 9, alors $x = 9k' + 5$

$S = \{9k + 4;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{9k + 5;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque :

x(mod9)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	
X²(mod9)	**0**	**1**	**4**	**0**	**7**	**7**	**0**	**4**	**1**	

Exercice 5**

1) On a $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ (d'après théorème de Fermat) .

Aussi, on a $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, alors

$2^{123} + 3^{121} = 2^{10\times12} 2^3 + 3^{10\times12}\, 3 \equiv 2^3 + 3 \equiv 0 \pmod{11}$.

2) $2^{n+2} + 3^{2n+1} = 2^n 4 + 9^n \times 3 \equiv 2^n (3 + 4) \equiv 0 \pmod 7$.

Exercice 6**

On remarque que -1 est une solution du système.

$$\begin{cases} x \equiv 7(\mathrm{mod}8) \\ x \equiv 11(\mathrm{mod}12) \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv -1(\mathrm{mod}8) \\ x \equiv -1(\mathrm{mod}12) \end{cases} \begin{cases} x+1 \equiv 0(\mathrm{mod}8) \\ x+1 \equiv 0(\mathrm{mod}12) \end{cases}$$

Les solutions du système sont les entiers x tels que $x+1$ est à la fois multiple de 8 et 12, c'est-à-dire de leur PPCM: 24. D'où : S = $\{24k-1\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 7*

$15x \equiv 9(\mathrm{mod}12)$ equi $15x = 9+12k$ ($k \in \mathbb{Z}$) equi $5x = 3+4k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Equi $5x \equiv 3(\mathrm{mod}4)$ equi $x \equiv 3(\mathrm{mod}4)$

$4x \equiv 5(\mathrm{mod}7)$ equi $8x \equiv 10(\mathrm{mod}7)$ equi $x \equiv 3(\mathrm{mod}7)$

Donc : le système $\begin{cases} 15x \equiv 9(\mathrm{mod}12) \\ 4x \equiv 5(\mathrm{mod}7) \end{cases}$ devient $\begin{cases} x-3 \equiv 0(\mathrm{mod}4) \\ x-3 \equiv 0(\mathrm{mod}7) \end{cases}$

Les solutions du système sont les entiers x tels que $x-3$ est à la fois multiple de 4 et de 7

donc de leur PPCM: 28.

S $=\{28k+3\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 8**

On a : (E) équivaut a $5x+3y=7$.

On a : $5\times2+3\times(-1) = 10-3 = 7$; donc $(2;-1)$ est une solution particulière de (E)

d'où : (E) équivaut a $5x+3y = 5\times2+3\times(-1)$ équivaut a $3(y+1) = -5(x-2)$.

Raisonnons maintenant par conditions nécessaires. Soit $(x\ ;\ y)$ une solution.

3 divise $-5(x-2)$ et est premier avec -5 donc, d'après le théorème de **Gauss**, 3 divise $x-2$.

Soit k le quotient, on a donc : $x-2 = 3k$ et $x = 3k+2$.

En substituant $x-2$ par $3k$ dans le dernier membre de la dernière équivalence, il vient : $3(y+1) = -5\times3k$; d'où : $y = -5k-1$.

On en déduit que toutes les solutions de (E) sont de la forme :

$(3k+2;-5k-1)$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

Réciproquement

Les couples de cette forme sont-ils tous solutions de (E)?

Soit $k \in \mathbb{Z}$, considérons le couple $(3k+2;-5k-1)$.

On a : $5(3k+2)+3(-5k-1) = 15k+10-15k-3 = 7$; S $=\{(3k+2;-5k-1)\ k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 10****

1) $100^{100}=(2^2\times5^2)^{100}=2^{200}\times5^{200}$

Les diviseurs positifs de 100^{100} sont de la forme 2^k5^l avec

$k\in\{0,1,\dots,200\}$ et $l\in\{0,1,\dots,200\}$, il y a donc $201\times201=40401$ diviseurs positifs.

2) $101=3\times33+2$ donc $101\equiv2\ [3]$

$101^{101}\equiv2^{101}\ [3]\equiv(-1)^{101}\ [3]\equiv-1\ [3]\equiv2\ [3]$

$0\leq2<3$, donc le reste de la division euclidienne de 101^{101} par 3 est 2.

$101=4\times25+1$ donc $101\equiv1\ [5]$ $101^{101}\equiv1^{101}\ [5]\equiv1\ [5]$

$0\leq1<5$, donc le reste de la division euclidienne de 101^{101} par 5 est 1.

On pose $N=101^{101}$, $N\equiv2\ [3]$ et $N\equiv1\ [5]$ donc il existe $k,\in\mathbb{Z}$ tels que

$N=2+3k$ et $N=1+5l$ On trouve alors que $2+3k=1+5l\Leftrightarrow1=5l-3k$

dont une solution particulière est $1=5(-1)-3(-2)$

En faisant la différence on trouve que

$0=5(l+1)-3(k+2)\Leftrightarrow5(l+1)=3(k+2)$

Comme 5 divise $3(k+2)$ et que 5 est premier avec 3, le théorème de **Gauss** permet d'affirmer que 5 divise $k+2$, il existe donc $u\in\mathbb{Z}$

tels que $k+2=5u\Leftrightarrow k=-2+5u$,

ce que l'on remplace dans $N=2+3k=2+3(-2+5u)=-4+15u$

comme $N\equiv-4\ [15]\equiv11\ [15]$ le reste de la division de N par 15 est 11.

3) $\left(n^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(n^{\frac{p-1}{2}}+1\right)=n^{p-1}-1\equiv0\ [p]$ d'après théorème de **Fermat**

car p est premier et que n n'est pas un multiple de p ($0<n<p$) .

Donc p divise $\left(n^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(n^{\frac{p-1}{2}}+1\right)$, comme p est premier alors

p divise l'un des entiers $n^{\frac{p-1}{2}}-1$ et $n^{\frac{p-1}{2}}+1$

Arithmétiques 2

by : Tounsi

Exercice 1****

1. Ecrire une identité de Bézout entre 11 et 13
2. Résoudre le système

$$\begin{cases} x \equiv 6 (\text{mod} 11) \\ x \equiv 5 (\text{mod} 13) \end{cases}$$

Exercice 2*****

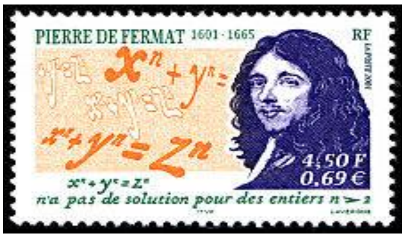
1. Montrer que : 4^n est congru à $1+3n$ modulo 9.
2. En déduire que $2^{2n}+15n-1$ est toujours divisible par 9.

Exercice 3***

Exprimer en fonction de n le $PGCD$ de $2n-1$ et $9n+4$.

Exercice 4***

1. Déterminer les restes possibles de la division euclidienne du carré d'un nombre impair par 8 avec deux méthodes.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pair.
   En déduire que l'équation $x^n+y^n=z^n$
   n'a pas de solution pour x,y et z impairs.



Exercice 5****

1. Vérifier que 101 est un nombre premier
2. On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $77x+100y=1$
   a) Vérifier que le couple $(13,-10)$ est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E)
3. On considère dans $\mathbb{N}$ l'équation (F) : $x^{77} \equiv 3 (\text{mod} 101)$
   Soit x une solution de F
   a) Montrer que x et 101 sont premiers entre eux puis que $x^{100} \equiv 1 (\text{mod} 101)$
   b) Montrer que $x \equiv 3^{13} (\text{mod} 101)$
4. Soit x un entier naturel.
   Montrer que si $x \equiv 3^{13} (\text{mod} 101)$ alors x est une solution de (F)
5. En déduire que l'ensemble des solutions de (F) est l'ensemble des entiers naturels de la forme $101k+38$, où $k \in \mathbb{N}$

Exercice 6*****

On pose : $A_n = 2^n + p$; $p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$

On note d_n le P.G.C.D de A_n et A_{n+1}

1. Montrer que d_n divise 2^n.
2. Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p.
3. En déduire le P.G.C.D de $2^{2022} + 2021$ et $2^{2021} + 2021$
4. Pour $p = 1$.
   a. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$ et $m > 2$ premier,
   $$a^m + 1 \equiv 0 \pmod{a+1}$$
   b. En déduire que, si A_n est premier, alors n est de la forme $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.

Exercice 7*****

On se propose de déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ solutions de l'équation (E) : $2^m - 3^n = 1$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   a) Quel est le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 ?
   b) Déterminer les restes de la division euclidienne de $3^{2k} + 1$ par 8, puis de $3^{2k+1} + 1$ par 8
2. Soit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ un couple de solution, montrer que $m \leq 2$.
3. En déduire tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ d'entier naturels solutions de (E)

Exercice 8*****

On considère un entier $n \geq 3$.

1. Montrer que, quel que soit l'entier x, les carrés des nombres x et $n - x$ sont congrus modulos n.
2. Dresser la table des carrés modulo 7.
3. Montrer que l'équation $x^2 - 6xy + 2y^2 = 7003$ n'a pas de solutions (x, y) entière. (Exprimer le premier membre comme un carré modulo 7).

Corrigé Arithmétiques 2

Exercice 1***

1) $1=-5\times 13+6\times 11$

2) $\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{11} \\ x \equiv 5 \pmod{13} \end{cases} \Leftrightarrow \exists\ k,l \in \mathbb{Z}\ /\ \ x=6+11k$ et $x=5+13l$

$6+11k=5+13l \Leftrightarrow 13l-11k=1 \quad (L_1)$

Or $-5\times 13+6\times 11=1 \quad (L_2)$

En faisant la soustraction entre (L_1) et (L_2)

$13(l+5)-11(k+6)=0 \Leftrightarrow 13(l+5)=11(k+6)$ Comme 13 divise $11(k+6)$ et que 13 est premier avec 11, le théorème de **Gauss** permet d'affirmer que 13 divise $k+6$, il existe donc $u\in\mathbb{Z}$ tels que $k+6=13u \Leftrightarrow k=-6+13u$, ce que l'on remplace dans $x=6+11k=6+11(-6+13u)=-60+143u$

$x \equiv -60 \pmod{143} \equiv 83 \pmod{143}$

La réciproque est évidente . $\mathbf{S}=\{-60+143u;\ \ u\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 2*****

1) $4^n=(3+1)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k = C_n^0+3C_n^1+3^2C_n^2+\cdots+3^nC_n^n=1+3n+3^2(C_n^2+\cdots+3^{n-2}C_n^n)=1+3n+9k$

Donc 4^n est congru à $1+3n$ modulo 9.

2) $2^{2n}+15n-1=(2^2)+15n-1=4^n+15n-1\equiv 1+3n+15n-1\ [9]\equiv 18n\ [9]\equiv 0\ [9]$

Donc $2^{2n}+15n-1$ est divisible par 9.

Exercice 3***

On pose $a=2n-1$ et $b=9n+4$

$9a-2b=9(2n-1)-2(9n+4)=-17$

Il s'agit d'une identité de **Bézout**, donc $PGCD$ (a,b) divise 17, 17 étant premier

$PGCD$ (a,b) vaut 1 ou 17 selon les valeurs de n.

Cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que $PGCD\ (a,b)=17$.

Il existe alors $k\in\mathbb{Z}$ et $k'\in\mathbb{Z}$, k et k' premiers entre eux tels que : $2n-1=17k$ *et* $9n+4=17k'$

Ce qui entraine que $-4(2n-1)+(9n+4)=4\times 17k+17k' \Leftrightarrow n+8=17(4k+k')$ alors

Il existe $k''\in\mathbb{Z}$ tel que : $n=-8+17k'' \Leftrightarrow n\equiv -8\ [17]\equiv 9\ [17]$

Réciproquement

Si $n=-8+17k''$ alors $a=2(-8+17k'')-1=-17+2\times 17k''=17(-1+2k'')$

$b=9(-8+17k'')+4=-68+9\times 17k''=17(-4+9k'')$

Comme $-9(-1+2k'')+2(-4+9k'')=1$ alors d'après **Bézout** $(-1+2k'')$et$(-4+9k'')$ sont premiers entre eux , par suite $PGCD(a,b)=17$

Conclusion $n\equiv 9\ [17] \Leftrightarrow PGCD\ (a,b)=17$ Sinon $PGCD\ (a,b)=1$

Exercice 4***

1) M_1 : Soit p un nombre impair, alors p=8q+r et r∈{1,3,5,7} , p≡r [8]

$1^2=1\equiv1$ [8] , $3^2=9\equiv1$ [8] , $5^2=25\equiv1$ [8] , $7^2=49\equiv1$ [8]

Donc le reste de la division euclidienne du carré d'un nombre impair par 8 est 1.

M_2 : Soit p un nombre impair, alors il s'écrit $p = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$

Maintenant $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 +4k+1 = 4k(k+1)+1$. (k où k+1est pair)

Donc $p^2 \equiv 1 \pmod 8$.

2) $n=2m,\ m\in\mathbb{N}^*$

$x^n+y^n=(x^2)^m+(y^2)^m\equiv1^m+1^m\ [8]\equiv2\ [8]$; $z^n=(z^2)^m\equiv1^m\ [8]\equiv1\ [8]$

Donc l'équation n'a pas de solution.

Exercice 5****

1) On a : $\sqrt{101} \sim 10{,}05$ donc les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{101}$ sont 2, 3, 5 et 7 et aucun d'eux ne divise 101 Alors 101 est un nombre premier

2) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $77x +100y =1$

a) On a : $77 \times 13 - 10 \times 100 = 1$ alors $(13,-10)$ est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

b) (x,y) est une solution (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 77x +100y =1 \Rightarrow 77x +100y =77 \times 13 +100 \times (-10) \Rightarrow 77(x -13) =100(-y -10)$

$77(x -13) =100(-y -10)$

100 divise $77(x -13)$ et $100\wedge77 =1$ alors 100 divise $(x -13)$ ....

On en déduit que toutes les solutions de (E) sont de la forme :

$(100k +13;-77k -10)$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

La réciproque est évidente . $S =\{(100k + 13; -77k - 10),\ k \in \mathbb{Z}\}$

3) a) 101 est un nombre premier alors $x \wedge 101 = 101$ ou $x \wedge 101 = 1$

Si $x \wedge 101 = 101 \Rightarrow 101$ divise $x \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{101} \Rightarrow x^{77} \equiv 0 \pmod{101}$

Ce qui est impossible car $x^{77} \equiv 3 \pmod{101}$ donc nécessairement $x \wedge 101 = 1$

Par suite x et 101 sont premiers entre eux

b) On a : $x^{77} \equiv 3 \pmod{101} \Rightarrow (x^{77})^{13} \equiv 3^{13} \pmod{101}$

Et puisque $77 \times 13 - 10 \times 100 = 1$ alors $77 \times 13 = 100 \times 10 + 1$

Donc $x^{100 \times 10 + 1} \equiv 3^{13} \pmod{101}$

Et comme $x^{100} \equiv 1 \pmod{101}$ alors $x \equiv 3^{13} \pmod{101}$

4) Puisque $3 \wedge 101=1$ et 101 est premier

alors d'après Fermat $3^{100} \equiv 1 \pmod{101}$

Si $x \equiv 3^{13} \pmod{101} \Rightarrow x^{77} \equiv (3^{13})^{77} \pmod{101} \Rightarrow x^{77} \equiv 3^{100 \times 10 + 1} \pmod{101}$

$x^{77} \equiv 3 \pmod{101}$. Alors x est une solution de (F)

5) D'après 3) si x est une solution de (F) alors $x \equiv 3^{13} \pmod{101}$

D'après 4) si $x \equiv 3^{13} \pmod{101}$ alors x est une solution de (F)

x solution de(F) $\Leftrightarrow x \equiv 3^{13} \pmod{101}$ et comme $3^{13} = 15785 \times 101 + 38$

alors $3^{13} \equiv 38 \pmod{101}$

donc x solution de(F) $\Leftrightarrow x \equiv 38 \pmod{101}$ CQFD .

Exercice 6*****

1. $A_{n+1} = 2^{n+1} + p$. Tout diviseur de A_n et A_{n+1} divise leur différence

   $2^{n+1} + p - 2^n - p = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$. Ainsi d_n divise 2^n .

2. Pour n différent de zéro, 2^n est pair, donc $A_n = 2^n + p$ a la même parité que p.

3. D'après la question précédente A_n et A_{n+1} ont la parité de p.

   Donc si p est impair A_n et A_{n+1} sont impairs et par conséquent leur P. G. C. D le sont aussi ;

   D'après le résultat précédent A_{2021} et A_{2022} sont impairs car 2021 l'est

   et leur P. G. C. D l'est aussi. Or on a vu que ce P. G. C. D d_n divisait 2^n .

   Or tous les diviseurs de 2^n sont pairs sauf 1 seul diviseur impair.

   Conclusion : le P. G. C. D de $2^{2022} + 2021$ et $2^{2021} + 2021$ est égal à 1 :

4. a. En utilisant $a + 1 \equiv 0 \pmod{a+1} \Rightarrow a \equiv -1 \pmod{a+1}$

   $a^m \equiv (-1)^m \pmod{a+1}$ or $m > 2$ premier donc impair alors

   $a^m \equiv (-1) \pmod{a+1}$ ainsi $a^m + 1 \equiv 0 \pmod{a+1}$

   b. On va effectuer un raisonnement par contraposée.

   On suppose que n n'est de la forme $n = 2^k$ pour aucun $k \in \mathbb{N}$.

   Alors n est de la forme m q avec $m > 2$ premier et $q \in \mathbb{N}$.

   On écrit alors $A_n = 2^n + 1 = 2^{mq} + 1$ divisible par $2^q + 1$ (plus grand que 1).

   Donc $A_n = 2^n + 1$ n'est pas premier **absurde**.

Exercice 7*****

1.

   a) $9^k \equiv 1^k\ [8] \equiv 1\ [8]$, comme $0 \le 1 < 8$, le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 est 1.

   b) $3^{2k} + 1 \equiv 9^k + 1\ [8] \equiv 2\ [8]$, de même le reste de la division euclidienne de $3^{2k} + 1$ par 8 est 2.

   $3^{2k+1} + 1 = 3 \times 9^k + 1 \equiv 3 \times 1 + 1\ [8] \equiv 4\ [8]$, le reste est alors 4.

2. Si $n = 2k$

$2^m - 3^n = 1 \Rightarrow 2^m - 3^{2k} \equiv 1\ [8] \Rightarrow 2^m - (3^2) \equiv 1\ [8] \Rightarrow 2^m - (9) \equiv 1\ [8] \Rightarrow$

$2^m - (1) \equiv 1\ [8] \Rightarrow 2^m \equiv 2\ [8] \Rightarrow 2^m = 2 + 8l$

avec $l \in \mathbb{N}$ donc $2^{m-1} = 1 + 4l$ or si $m \geq 2$, 2^{m-1} est paire et $1 + 4l$ est impaire,

on en déduit que si $n = 2k$ alors $m < 2$,

Si $n = 2k + 1$

$2^m - 3^n = 1 \Rightarrow 2^m - 3^{2k+1} \equiv 1\ [8] \Rightarrow 2^m - 3 \times (3^2) \equiv 1\ [8] \Rightarrow$

$2^m - 3 \times (9) \equiv 1\ [8] \Rightarrow 2^m - 3 \times (1) \equiv 1\ [8] \Rightarrow 2^m \equiv 4\ [8] \Rightarrow 2^m = 4 + 8l$

$\Rightarrow 2^{m-2} = 1 + 2l$

avec $l \in \mathbb{N}$ donc $2^{m-2} = 1 + 2l$ or si $m \geq 3$, 2^{m-2} est paire et $1 + 2l$ est impaire,

on en déduit que si $n = 2k + 1$ alors $m < 3$.

Que n soit pair ou impair , $m \leq 2$

3. Il n'y a que trois cas possibles $m = 0$, $m = 1$ et $m = 2$.

Si $m = 0$ alors $2^m - 3^n = 1 \Leftrightarrow 1 - 3^n = 1 \Leftrightarrow 3^n = 0$ ce qui est impossible.

Si $m = 1$ alors $2^m - 3^n = 1 \Leftrightarrow 2 - 3^n = 1 \Leftrightarrow 3^n = 1 \Leftrightarrow n = 0$

Si $m = 2$ alors $2^m - 3^n = 1 \Leftrightarrow 4 - 3^n = 1 \Leftrightarrow 3^n = 3 \Leftrightarrow n = 1$

L'ensemble des solutions est :

$$S = \{(1,0), (2,1)\}$$

Exercice 8*****

1. $(n - x)^2 = n^2 - 2nx + x^2 = n(n - 2x) + x^2 \equiv x^2\ [n]$

2.

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	$9 \equiv 2\ \ [7]$	$16 \equiv 2\ \ [7]$	$25 \equiv 4\ \ [7]$	$36 \equiv 1\ \ [7]$

3. $x^2 - 6xy + 2y^2 = (x - 3y)^2 - 9y^2 + 2y^2 = (x - 3y)^2 + 7y^2 \equiv (x - 3y)^2\ (7)$

Et $7003 \equiv 3\ [7]$, d'après le 2°) il n'y a pas de carré qui soit congru à 3 modulo 7

donc il n'y a pas de solution.

Arithmétiques 3

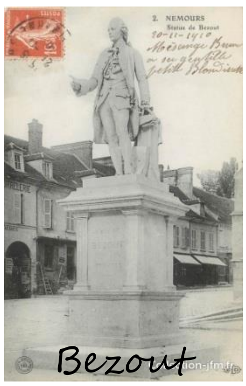
by: Tounsi

Exercice 1 (4*)

1. On considère l'équation (E) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$: $11n - 24m = 1$.
   a. Justifier, que cette équation admet au moins une solution.
   b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (E).
   c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).
2. Recherche du P.G.C.D. de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
   a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
   b. (n, m) désignant un couple quelconque d'entières naturelles solutions de (E), montrer que l'on peut écrire $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$.
   c. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.
   Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que : $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$.
   d. Montrer que tout diviseur commun a $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.
   e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

Exercice 2 (4*)

Pour tout entier k, on note $a = 3k + 2$ et $b = 4k + 1$.



1. Montrer que : $a \wedge b = 5$ si et seulement si $k \equiv 1 (\text{mod } 5)$
2. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $5x - 16y = 12$.
   Montrer que les solutions de (E) sont de la forme $(16k - 4, 5k - 2)$ ou k est un entier relatif.
3. N étant un entier naturel.
   Montrer que : $N \equiv 13 (\text{mod } 16)$ et $N \equiv 1 (\text{mod } 5)$
   si et seulement si $N \equiv 61 (\text{mod } 80)$.
4. a. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ la congruence $5u \equiv 1 (\text{mod } 16)$.
   b. Déterminer l'ensemble des entiers k tels que : $\begin{cases} a \wedge b = 5 \\ b^2 \equiv a (\text{mod } 16) \end{cases}$
   c. Existe-t-il un entier naturel k tel que $10k \equiv 1 (\text{mod } 16)$.

Exercice 3 (5*)

On appelle nombres de Fermat, les entiers de la forme

$$F_n = 2^{2^n} + 1,\ n \in \mathbb{N}$$

1) a. Montrer que pour tout entier $x \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$,

l'entier $x^{2m} - 1$ est divisible par $x + 1$.

b. En déduire que pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+m} - 2$ est divisible par F_n .

2) Montrer que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.

3) a. Prouver que pour tout $a \in \mathbb{N}$ et $p > 2$ premier,

$$a^p + 1 \equiv 0 \pmod{a+1}$$

b. Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $a^n + 1$ est premier.

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^k$.

c. Vérifier que $256^4 + 1 \equiv 0 \pmod{641}$

d. Que penser de l'affirmation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$ est premier ?

Exercice 4 (5*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = 1 + 31 + 31^2 + \ldots + 31^{n-1}$

1) Vérifier que $S_{2019} - 31 \times S_{2018} = 1$ puis déduire que 31 et S_{2019} sont premiers entre eux.

2) a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $30 \times S_n = 31^n - 1$.

b. En déduire que 31^n et S_n sont premiers entre eux.

3) a. Vérifier que $31^{2019} \equiv 1 \pmod{S_{2019}}$

b. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ la congruence $31x \equiv 1 \pmod{S_{2019}}$

4) a. Vérifier que 2017 est premier.

b. Démontrer que si n est premier et $n \geq 6$ alors n divise $S_n - 1$.(appl : Fermat puis Gauss)

c. Déterminer le reste modulo 2017 du nombre S_{2019}.

Exercice 5 (6*)

Partie A

1. Le nombre $2^{11}-1$ est-il premier ?
2. p et q étant deux entiers naturels non nuls, quel est le reste de la division par 2^p-1 du nombre $2^{pq}=(2^p)^q$?

   En déduire que $2^{pq}-1$ est divisible par (2^p-1) et (2^q-1).
3. a. Démontrer que, si 2^n-1 est premier, alors n est premier.

   b. Le réciproque est-il vrai ?

Partie B

1− Calculer, en fonction de n, la somme des n premiers entiers naturels non nuls.

2− a. Démontrer par récurrence que $\sum_{p=1}^{n} p^3 = \left(\sum_{p=1}^{n} p\right)^2$.

b. Exprimer $s_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$ en fonction de n.

3−Démontrer la propriété suivante : $a \wedge b = 1$ équivaut $a^2 \wedge b^2 = 1$

4− Soit D_n le PGCD des nombres s_n et s_{n+1} .Calculer D_n lorsque

a. $n = 2k$.

b. $n = 2k + 1$.

5− En déduire que s_n , s_{n+1} et s_{n+2} sont premiers entre eux.

(6) ↪ very difficult*

Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les mathématiques ? Poincaré

Corrigé- Arithmétiques 3

by: Tounsi

Exercice 1 (4*)

1. a. $11n - 24m = 1$: grâce à Bézout, on sait que l'équation a des solutions car 11 et 24 sont premiers entre eux .

b. $24=2.11+2$, $11=5.2+1$ donc $1=11-5(24-2.11)=11.11-5.24$.

Une solution particulière de l'équation est $(11, 5)$.

c. $(n-11).11 = 24.(m-5) \Rightarrow n=11+24k$ et $m=5+11k$ pour tout entier k

- Réciproquement: Pour tout entier k, $11(11+24k) - 24(5+11k) = 1$ ....

2. a. $10^{11} \equiv 1 (\text{mod } 9)$ C'est pareil pour $10^{24} - 1$.

b. $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 10^{11n} - 1 - 10^{24m+1} + 10 = 10^{11n} - 10^{24m+1} + 9$; or

si (n, m) est solution de (E), on a $11n = 24m + 1$

$\Rightarrow 10^{11n} = 10^{24m+1} \Rightarrow 10^{11n} - 10^{24m+1} = 0$.

c. En utilisant $a - 1 \equiv 0 (\text{mod}(a-1)) \Rightarrow a^n \equiv 1 (\text{mod } (a-1))$

avec $a = 10^{11}$, on a

$$10^{11n} - 1 \equiv 0 \ (\text{mod}\,(10^{11} - 1))$$

donc $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$. De même $10^{24} - 1$ divise $10(10^{24m} - 1)$,

ainsi il existe N et M tels que :

$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$

d. Soit d un diviseur commun de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$: d divise $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M$ et donc divise 9.

e. Les diviseurs de 9 sont 1, 3 et 9 sont les seuls diviseurs communs de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

Comme 9 divise $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$, alors $(10^{11} - 1) \wedge (10^{24} - 1) = 9$.

Exercice 3 (5*)

1. a. En utilisant $x + 1 \equiv 0 \pmod{x+1} \Rightarrow x \equiv -1 \pmod{x+1}$

$x^{2^m} \equiv (-1)^{2^m} \pmod{x+1}$ or 2^m est pair alors

$x^{2^m} - 1$ est divisible par $x + 1$

b. $F_{n+m} - 2 = 2^{2^{n+m}} - 1 = 2^{2^n 2^m} - 1 = (2^{2^n})^{2^m} - 1$

Mais pour tout entier x, l'entier $x^{2^m} - 1$ est divisible par $x + 1$ donc

$F_{n+m} - 2$ divisible par F_n

2. Il existe donc un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n+m} - 2 = F_n\, q$

c'est-à-dire $F_{n+m} - F_n\, q = 2$

Il en résulte que $F_{n+m} \wedge F_n$ est un diviseur de 2 .

Mais puisque les nombres de Fermat sont impairs, le seul diviseur possible est 1.

CQFD

3. a. En utilisant $a + 1 \equiv 0 \pmod{a+1} \Rightarrow a \equiv -1 \pmod{a+1}$

$a^p \equiv (-1)^p \pmod{a+1}$ or $p > 2$ premier donc impair alors

$a^p \equiv (-1) \pmod{a+1}$ ainsi $a^p + 1 \equiv 0 \pmod{a+1}$

b. On va effectuer un raisonnement par contraposée.

On suppose que n n'est de la forme $n = 2^k$ pour aucun $k \in \mathbb{N}$.

Alors n est de la forme pq avec $p > 2$ premier et $q \in \mathbb{N}$.

On écrit alors $a^n + 1 = a^{pq} + 1$

et on remarque que les deux facteurs de ce produit sont strictement plus grand que 1.

Donc $a^n + 1$ n'est pas premier **absurde** .

c. $256^4 + 1 \equiv 0 \pmod{641}$

d. $256^4 + 1 \equiv 0 \pmod{641}$ eq $2^{8^4} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$ eq $2^{2^5} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$

ainsi F_5 est divisible par 641

l'affirmation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$ est premier , n'est pas vrai .

Exercice 2 (4*)

1. • Supposant que $a \wedge b = 5$ et montrons que $k \equiv 1 (\text{mod } 5)$.
   Si $a \wedge b = 5$ alors $5 | 3k+2$ et $5 | 4k+1$ alors $5 | (4k+1)-(3k+2)$ donc $5 | k-1$
   Ainsi $k \equiv 1 (\text{mod } 5)$.
   • Réciproquement : Si $k \equiv 1 (\text{mod } 5)$ alors il existe un entier q tel que $k = 5q+1$
   d'ou $a=5(3q+1)$ et $b=5(4q+1)$ et par ailleurs $3(4q+1)-4(3q+1)=-1$
   (D'après l'identité de **Bézout**) $(3q+1) \wedge (4q+1) = 1$ donc $a \wedge b = 5$.

2. • Verification : Pour tout entier k, $5(16K-4)-16(5K-2) = -20+32 = 12$
   • Réciproquement : $5x - 16y = 12$ signifie $5(x+4) = 16(y+2)$ et comme $16 \wedge 5 = 1$
   alors d'après le lemme de **Gauss**, 16 divise $x+4$
   alors il existe un entier k tel que $x+4 = 16k$ donc $x = 16k-4$, $k \in \mathbb{Z}$
   $5 \times 16k = 16(y+2)$ alors $y+2 = 5k$ donc $y = 5k-2$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. • C.N. il existe deux entiers x et y tels que $N = 16y+13 = 5x+1$ donc $5x-16y = 12$
   donc $x = 16k-4$ et $y = 5k-2$, $k \in \mathbb{Z}$ et par la suite $N = 5(16k-4)+1$
   $= 80k-19$ d'ou $N \equiv -19 (\text{mod } 80)$ donc $N \equiv 61 (\text{mod } 80)$.
   • C.S. Si $N \equiv 61 (\text{mod } 80)$ alors il existe un entier Q tel que
   $N = 61 + 80Q = 61 + 5 \times 16Q$ alors $N \equiv 61 (\text{mod } 16)$ et $N \equiv 61 (\text{mod } 5)$
   donc $N \equiv 13 (\text{mod } 16)$ et $N \equiv 1 (\text{mod } 5)$.

4. a. Comme 13 est une solution particulière de cette congruence alors
   $5u \equiv 5 \times 13 (\text{mod } 16)$ donc $5(u-13) \equiv 0 (\text{mod } 16)$ et comme $16 \wedge 5 = 1$
   d'après le lemme de Gauss, 16 divise $u-13$ donc $u \equiv 13 (\text{mod } 16)$.
   Réciproquement si $u \equiv 13 (\text{mod } 16)$ alors $5u \equiv 5 \times 13 (\text{mod } 16)$ d'ou $5u \equiv 1 (\text{mod } 16)$.
   Ainsi $S_{\mathbb{Z}} = \{16q+13 ; q \in \mathbb{Z}\}$.
   b .
   $$\begin{cases} a \wedge b = 5 \\ b^2 \equiv a (\text{mod } 16) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \equiv 1 \ (\text{mod } 5) \\ (4k+1)^2 \equiv 3k+2 \ (\text{mod } 16) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \equiv 1 \ (\text{mod } 5) \\ 5k \equiv 1 \ (\text{mod } 16) \end{cases} \Leftrightarrow$$
   $$\begin{cases} k \equiv 1 \ (\text{mod } 5) \\ k \equiv 13 \ (\text{mod } 16) \end{cases} \Leftrightarrow \quad k \equiv 61 \ (\text{mod } 80)$$
   c . $10k \equiv 1 (\text{mod } 16)$ alors il existe un entier p tel que
   $10k - 16p = 1$ alors $10 \wedge 16 = 2$ divise 1 impossible donc il n'y a pas de solution.

Série Arithmétiques A.T.S.M (Gabes)

EXERCICE N°1

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $8x + 5y = 1$. Résoudre l'équation (E)

2) Soit N un entier vérifiant le système (S) $\begin{cases} N \equiv 1 \pmod 8 \\ N \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$

a) Montrer que N est une solution du système (S) si et seulement si $N \equiv 17 \pmod{40}$

b) Vérifier que 9417 est une solution du système (S)

c) En déduire que l'entier $(9417)^{2012} - 1$ est divisible par 40

3) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E') : $8x + 25y = 1$

a) Vérifier que le couple $(-3,1)$ est une solution particulière de (E') et résoudre l'équation (E')

b) En déduire l'ensemble de solution de l'équation (F): $8x+25y = 5$

c) Soit $d = x \wedge y$ où (x,y) est une solution de l'équation (F). Donner les valeurs possibles de d

d) Déterminer l'ensemble de solutions de l'équation (F) sachant que $d = 5$

EXERCICE N°2

1) Enoncer le théorème de Fermat

2) On rappelle que 2003 est premier

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ chacune des équations suivantes :

$x^3 + 2x \equiv 5 \pmod 7$ et $x^2 - 3x - 2001 \equiv 0 \pmod{2003}$

3)a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $10^n \equiv 4 \pmod{12}$

b) Soit l'entier $A = 1234^{567} + 89^{1011}$

Déterminer le reste de la division euclidienne par 12 de l'entier A

4) Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse :

a) $4^{28} - 1$ est divisible par 29

b) Pour tout entier naturel non nul a on $a^5 \equiv a \pmod 5$

c) Le quotient de 20 par (-7) est (-3)

EXERCICE N°3

1) Répondre par **Vrai** ou **Faux** en justifiant la réponse

a) Le nombre -35763 est divisible par 11

b) Le reste de la division euclidienne de 144 par 67 est 6

c) l'entier $1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + 4^{2003}$ est divisible par 5

d) $915 \equiv 22 \pmod{19}$

2) Déterminer tous les entiers n tels que $3n+4$ divise $n+6$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ chacune des équations suivantes :

a) $x^2 \equiv 1 \pmod 8$ b) $x^2 \equiv -1 \pmod{11}$ c) $x^2 \equiv -2 \pmod{11}$

d) $x^3 + x - 5 \equiv 0 \pmod 7$

4) Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x \equiv 1 \pmod{19}$

a) Donner une solution particulière de l'équation (E)

b) Résoudre alors l'équation (E)

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $7x \equiv 2 \pmod{19}$

EXERCICE N°4

1)a)Déterminer le reste de la division euclidienne par 5 du nombre 8^{1974}

b) Déterminer le reste modulo 5 de $7\times8^{1974} - 3\times8^{3948}$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + x + 7 \equiv 0(\bmod 13)$

3) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $16^n \equiv 1 - 10n \ (\bmod 25)$

4)a) Montrer que $7^2 \equiv -1 \ (\bmod 10)$

b) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $7^{4n}+7^{4n+1}+7^{4n+2}+7^{4n+3} \equiv 0(\bmod 10)$

c) En déduire le chiffre des unités de l'entier naturel $A = 1 + 7 + 7^2 + \cdots\cdots\cdots + 7^{400}$

5) Pour tout entier naturel n on pose $B_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

Montrer que $B_{2006} \equiv 6(\bmod 7)$

EXERCICE N°5

1) Soit n un entier naturel .

a) Déterminer les restes modulo 6 des entiers naturels 5^{2n} et 5^{2n+1}

b) Montrer que l'entier $2009^{2008}-1$ est divisible par 6

2)a) Montrer par récurrence que : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $5^n\equiv 3^n + 2^n \ (\bmod 6)$

b) Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ on pose $A = (2005)^p + (2006)^{2010} + (2007)^{2010}$

Montrer que $A\equiv 2(\bmod 6)$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + x - 2 \equiv 0(\bmod 6)$

EXERCICE N°6

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E): $11x - 5y = 1$. Résoudre l'équation (E)

2)a) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (F): $11x - 5y = 7$

b) Soit $d = x\wedge y$ avec (x, y) est une solution de (F). Quelles sont les valeurs possibles de d ?

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} 11x - 5y = 7 \\ x\wedge y = 7 \end{cases}$

3) Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $(a+b)\wedge(ab) = p$, p est un nombre premier

a) Montrer que p divise a^2 et que p divise a

b) Montrer que p divise b . En déduire que $a\wedge b = p$

c) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $\begin{cases} (a+b)\wedge(ab) = 5 \\ a\vee b = 170 \end{cases}$

EXERCICE N°7

1)a) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E): $6x - 5y = 7$

b) Déterminer alors les solutions dans $\mathbb{Z}$ du système : $\begin{cases} n \equiv 2(\text{modulo } 6) \\ n \equiv 9(\text{modulo } 5) \end{cases}$

c) Déterminer les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $(6x-5y-6)(6x-5y+6) = 13$

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E'): $6x^2 - 5y^2 = 7$

a) Montrer que si (x, y) est une solution de (E') alors $x^2 \equiv 2(\text{modulo } 5)$

b) Quel est alors l'ensemble des solutions de (E')

3) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (F) : $6x-5y-4z=7$

a) Montrer que y est impair

b) On pose $y=2p+1$; $p\in\mathbb{Z}$. Montrer que $z+p$ est un multiple de 3

c) On pose $z+p=3q$; $q\in\mathbb{Z}$

Montrer que: (x,y,z) est une solution de (F) si et seulement si $\begin{cases} y=2p+1 \\ z=3q-p \\ x=p+2q+2 \end{cases}$, $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$

d) Retrouver alors les solutions de (F)

EXERCICE N°8

(E) est l'équation dans Z^2: $2x + 5y = 1000$ et (F) est l'équation : $2x^2 + 5y^2 = 1000$

1) Déterminez l'ensemble des solutions de (E).

2) Montrez que l'ensemble de solutions de (F) est fini.

3) Montrez que si (x , y) est solution de (F) alors $|x| < 23$ et $|y| < 15$.

4) En remarquant que (x , y) est solution de (F) si et seulement si (|x| , |y|) est aussi solution de (F), et en utilisant la question a: , montrez que (F) n'admet aucune solution.

5) On veut retrouver le résultat de la question précédente directement.

On suppose qu'il existe (xo , yo) solution de (F) avec xo et yo > 0

Montrez que xo est un multiple de 5 et que yo est un multiple de 2.

Montrez alors que l'équation (F_1) : $5x^2 + 2y^2 = 100$ admet une solution (x_1 , y_1) dans N.

Montrez que x_1 est un multiple de 2 et que y_1 est un multiple de 5.

Montrez alors que l'équation (F_2) : $2x^2 + 5y^2 = 10$ admet une solution (x_2 , y_2) dans N.

Montrez alors que l'équation (F_3) : $5x^2 + 2y^2 = 1$ admet une solution dans N.

Concluez!!

EXERCICE N°9

Le but de cet exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.

Partie A. Quelques exemples.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.

2. Prouver à l'aide du Petit Théorème de Fermat, que $4^{28}-1$ est divisible par 29.

3. Pour $1 \le n \le 4$, déterminer le reste de la division euclidienne de 4^n par 17. En déduire, que pour tout entier k, le nombre $4^{4k}-1$ est divisible par 17.

4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5?

5. A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28}-1$.

Partie B Divisibilité par un nombre premier.

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \ge 1$ tel que $4^n \equiv 1$ [p]

2. Soit $n \ge 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1$ [p]. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1$ [p] et r le reste de la division euclidienne de n par b.

a. Démontrer que $4^r \equiv 1$ [p]. En déduire que r = 0.

b. Prouver l'équivalence: $4^n - 1$ divisible par p $\Leftrightarrow$ n est multiple de b.

c. En déduire que b divise p-1.

EXERCICE N° 10

On rappelle que 2003 est un nombre premier.

1) a) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $123u + 2003v = 1$.

b) En déduire un entier relatif k_o tel que $123k_o \equiv 1$ [2003].

c) Montrer que, pour tout entier relatif x,

$123x \equiv 456$ [2003] si et seulement si $x \equiv 456k_o$ [2003]

d) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que: $123x \equiv 456$ [2003]

e) Montrer qu'il existe un unique entier n tel que:

$1 \leq n \leq 2002$ et $123n \equiv 456$ [2003]

2) Soit a un entier tel que: $1 \leq a \leq 2002$

a) Déterminer PGCD (a, 2003)

En déduire qu'il existe un entier m tel que : $am \equiv 1$ [2003]

b) Montrer que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que:

$0 \leq x \leq 2002$ et $ax \equiv b$ [2003]

EXERCICE N°11

1) Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres:

$a_n = 4.10^n - 1$, $b_n = 2.10^n - 1$ et $c_n = 2.10^n + 1$

1)a) Calculez a_n , b_n et c_n pour n = 1 , 2 et 3.

b) Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres?

Montrez que : a_n et c_n sont divisibles par 3.

c) Montrez, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 que b_3 est premier.

d) Montrez que, pour tout entier naturel n, $b_n.c_n = a_{2n}$. Déduisez-en la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6 .

e) Montrez que PGCD (b_n, c_n) = PGCD(c_n , 2). Déduisez-en que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2) On considère l'équation: (1): $b_3x + c_3y = 1$ d'inconnues x et y .

a) Justifiez le fait que (1) possède au moins une solution.

b) Appliquez l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3. Déduisez-en une solution particulière de (1).

c) Résolvez l'équation (1).

CORRECTION DE LA SERIE A.T.S.M

Exercice 1 :

1) (2 ;-3) est une solution particulière de (E) : 8x+5y=1
*8x+5y=8×2+5×(-3)⟹8(x-2) =5(-y-3) ⟹ 5 divise 8(x-2) or 5∧8 =1, d'après le lemme de Gauss 5divise x-2⟹ il existe k entier relatif tel que x = 5k + 2 revenons à (E) en remplaçant x par 5k+2 on obtient y = -8k-3
*8(5k+2)+5(-8k-3) =1
Donc $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(5k+2\,, -8k-3), k \in \mathbb{Z}\}$

2) a) S : $\begin{cases} N \equiv 1(8) \\ N \equiv 2(5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N-1 \equiv 0(8) \\ N-2 \equiv 0(5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N-1 = 8k \\ N-2 = 5k' \end{cases}$
8k+1=5k'+2⟺ 8k – 5k' = 1, d'après 1)k=5p+2 et k' =8p+3
De N= 8k+1=8(5p+2)+1=40p+17⟺ $N \equiv 17[40]$
b) 9417-17=9400=40×235 ⟺ 9417 est une solution de S
c) 9417 est une solution de S ⟺ $9417 \equiv 17\ [40]$ ⟺ $\begin{cases} 9417 \equiv 1[8] \\ 9417 \equiv 2\ [5] \end{cases}$
Donc $9417^{2012} \equiv 1\ [8]$ et $9417^{2012} \equiv 1\ [5]$ en effet 2012=4×503 (Fermat)
Et par suite $9417^{2012} - 1 \equiv 0\ [8]$ et $9417^{2012} - 1 \equiv 0\ [5]$
8∧5=1 donne $9417^{2012} - 1 \equiv 0\ [40]$
3)a)*8×(-3)+25×1 = -24+25 = 1 donc (-3,1) est une solution de (E')
8x+25y = 8×(-3)+25×1 ⟹ 8(x+3) = 25(1-y) ⟹ 25 divise 8(x+3) et comme 25 et 8 sont premiers entre eux : 25 divise x +3 (Gauss) on a alors x=25k-3
On remplace x par 25k-3 dans l'équation on obtient y=1-8k
*on peut vérifier les solutions

$$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(25k-3\,, 1-8k), k \in \mathbb{Z}\}$$

b) (F) : 8x+25y = 5 ⟺ 8x=5(1-5y) ⟹ 5 divise x
On pose x=5x' : 8×5x' +25y = 5 ⟺ 8x' + 5y=1 d'après 1) :
x'=5k+2 et y=-8k-3 , $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(25k+10\,, -8k-3), k \in \mathbb{Z}\}$
c)Si d=x∧y donc d divise 5 d'où d=1 ou d= 5

d) d =5: 25k+10 ∧ -8k-3 = 25k+10 ∧ 8k+3 = 24k+9+k+1 ∧ 8k+3 =k+1 ∧ 8k+8-5
= k+1∧ 5
k+1∧ 5 =5 ⟺ k+1 =5n ⟺ k=5n -1

Donc les solutions sont : (125n-15; -40n+5)

Exercice 2 :

1) Fermat : si p est premier et a un entier relatif alors a^p et a ont le même reste de la division euclidienne par p c.à.d. $a^p \equiv a(p)$
2)

x≡. (7)	0	1	2	3	4	5	6
x^3≡. (7)	0	1	1	-1	1	-1	-1
2x≡. (7)	0	2	-3	--1	1	3	-2
$x^3+2x \equiv . (7)$	0	3	-2	-2	2	2	-3

Donc $x \equiv 2(7)$ ou $x\equiv 3(7)$
$x^3 -3x -2001 \equiv 0(2003) \Leftrightarrow x^3 -3x +2 \equiv 0(2003) \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \equiv 0(2003)$
2003 est premier et divise le produit $(x-1)(x-2) \Leftrightarrow$ 2003 divise x-1 ou x-2$\Leftrightarrow$
$x \equiv 1(2003)$ ou $x\equiv 2(2003)$

3)a) $n\geq 2$;
* $10\equiv -2\ [12]$, $10^2\equiv 4\ [12]$ la propriété est vérifiée à l'ordre 2
* supposons que $10^n\equiv 4\ [12]$

$$10^{n+1}= 10\times 10^n\equiv -2 \times 4\ [12]$$
$$\equiv -8\ [12]$$
$$\equiv 4\ [12]$$

Donc pour tout $n\geq 2$ on a : , $10^n \equiv 4\ [12]$

b) $A=1234^{567}+89^{1011}$
$1234\equiv 10\ [12] \Longrightarrow 1234^{567}\equiv 10^{567}\ [12]$
$10^{567} \equiv 4\ [12] \Longrightarrow 1234^{567}\equiv 4\ [12]$
$89\equiv 5\ [12] \Longrightarrow 89^{1011}\equiv 5^{1011}\ [12]$
$5^{1011}= 5^{91\times 11+10}= 5^{91\times 11} \times 5^{10}= (5^{11})^{91} \times 5^{10}$donc $5^{1011} \equiv 1\ [12]$
$A\equiv 5\ [12]$

4)a) Vrai (Fermat)
b) Vrai (petit th de Fermat)
c)Faux, en effet $20= (-7) \times(-2) +6$ donc c'est -2
le plus petit entier supérieur ou égal à 20 divise (-7)

Exercice 3 :

1)a) Faux : $-35763=11\times(-3252)+9$

b) Faux $144=67\times 2+10$

c)Vrai: $1^{2003}\equiv 1\ [5]$; $2^{2003}= 2^{4.500}\times 2^3 \equiv 3\ [5]$; $3^{2003}=3^{4.500}\times 3^3\equiv 2\ [5]$

$4^{2003}=4^{4.500}\times 4^3\equiv 4\ [5]$ alors $1^{2003}+2^{2003}+3^{2003}+4^{2003} \equiv 0\ [5]$

d) Vrai ; $915 – 22 = 893 =47 \times 19$

2) 3n+4 divise n+6 ssi $\frac{n+6}{3n+4}$ entier ssi $1+\frac{2(1-n)}{3n+4}$ entier divise 2 ssi $\frac{3n+4}{1-n}$ prend les valeurs -2,-1,1 et 2 ssi n=-6

3)a) $x^2\equiv 1(8)$

$x\equiv.$ [8]	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^2\equiv$ [8]	0	1	4	1	0	1	4	1

$x^2\equiv 1\ [8] \Leftrightarrow x\equiv 1\ [8]$ ou $x\equiv 3\ [8]$ ou $x\equiv 5\ [8]$ ou $x\equiv 7\ [8]$
b) x

$x\equiv.$ [11]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^2\equiv$ [11]	0	1	4	9	5	3	3	5	9	3	1

$x^2\equiv -1\ [11]$ n'a pas de solution

c) $x^2 \equiv -2\ [11] \Leftrightarrow x^2 \equiv 9\ [11] \Leftrightarrow x \equiv 3\ [11]$ ou $11[8 \equiv x]$
4)a) (E) : $7x \equiv 1\ [19]$; une solution particulière de (E) est 11
b)*on a 11 est l'inverse de 7 modulo 19 $\Longrightarrow 7x \equiv 7.11 \Longrightarrow 7(x-11) \equiv 0\ [19]$
Or 7 et19 sont premiers entre eux alors $(x-11) \equiv 0(19)$ d'où $x \equiv 11\ [19]$
Réciproquement : si $x \equiv 11\ [19]$on a $7x \equiv 1\ [19]$
Les solutions de (E) sont les entiers x = 19k +11

Exercice 4:

1)a) $8 \equiv 3\ [5] \Longrightarrow \mathbf{8^2} \equiv 4\ [5]$
$\Longrightarrow 8^3 \equiv 2\ [5]$
$\Longrightarrow 8^4 \equiv 1\ [5]$

$8^{1974} = 8^{4.493+2} \equiv 4\ [5]$
b) $8^{1974} \equiv 4\ [5]$ et $\mathbf{7} \equiv 2\ [5] \Longrightarrow 7.8^{1974} \equiv 3\ [5]$

$8^{3948} \equiv 1\ [5]$ et $\mathbf{3} \equiv 3\ [5] \Longrightarrow 3.8^{3948} \equiv 3\ [5]$ donc $7.8^{1974} - 3.8^{3948} \equiv 0\ [5]$

2) $x^2 + x + 7 \equiv 0\ [13]$

* 2 est une solution de l'équation donc $x^2 - 4 + x - 2 \equiv 0\ [13]$
$(x-2)(x+3) \equiv 0\ [13]$ alors $x-2 \equiv 0\ [13]$ ou $(x+3) \equiv 0\ [13]$

x= 13k+2 ou x = 13k-3

* on peut vérifier les solutions

Exercice 5 :

1)a)
$5^2 \equiv 1\ [6] \Rightarrow (5^2)^n \equiv 1[6] \Rightarrow 5^{2n} \equiv 1\ [6]$
$5^{2n} \equiv 1\ [6]$ et $5 \equiv 5\ [6]$ donnent $5^{2n+1} \equiv 5\ [6]$
b)
$2009 \equiv 5\ [6] \Rightarrow 2009^{2008} \equiv 5^{2008}\ [6]$
$5^{2008} = 5^{2*1004} \equiv 1\ [6]$ d'où $2009^{2008} \equiv 1\ [6]$
Et par suite $2009^{2008} - 1 \equiv 0(6)$
2) a) x=1 : $5 \equiv 5\ [6]$
supposons que $5^n \equiv 3^n + 2^n\ [6]$
On a $5 \equiv 3 + 2\ [6]$
$5^{n+1} \equiv (3+2)(3^n + 2^n)\ [6]$
$5^{n+1} \equiv 3\times3^n + 3\times2^n + 2\times3^n + 2\times2^n\ [6]$
$5^{n+1} \equiv 3^{n+1} + 2^{n+1} + 6(2^{n-1} + 3^{n-1})\ [6]$

$5^{n+1} \equiv 3^{n+1} + 2^{n+1}\ [6]$ d'où le résultat
b)
$2005 \equiv 1\ [6] \Rightarrow (2005) \wedge 8 \equiv 1\ [6]$

$(2006)^{2010} \equiv 4\ [6]$
En effet $2006 \equiv 2\ [6]$ $2006^{2n} \equiv 4\ [6]$, $(2006)^{2n+1} \equiv 2\ [6]$

$(2007)^{2010} \equiv 3$ [6]

Alors pour $p \in N^*$, $A=(2005)^{p} + (2006)^{2010} + (2007)^{2010} \equiv 2$ ([6]

3)

X≡…(6)	0	1	2	3	4	5
X² ≡ …(6)	0	4		3	4	1
X²+ X ≡ …(6)	0	2	0	0	2	0

$x^2+x-2 \equiv 0(6) \Leftrightarrow x^2+x \equiv 2(6) \Leftrightarrow x \equiv 1(6)$ ou $x \equiv 4(6)$

$x = 6k+1$ ou $x = 6k+4$

$S_Z = \{6k+1 ; 6k+4\}$

Exercice 8 :

(E) : $2x + 5y = 1000$ et (F) : $2x^2 + 5y^2 = 100$

1) Un solution particulière de (E) est : ($x = 500$, $y = 0$).

L'ensemble de solutions de (E) est alors formé des couples $(500 + 5k, -2k)$ où $k \in \mathbf{Z}$.

2) On traite simultanément les questions b: et c:

Si (x, y) est solution de (F) alors $2x^2 \leq 1000$ et $5y^2 \leq 1000$. D'où $x^2 \leq 500$ et $y^2 \leq 200$. On a bien alors $|x| < 23$ et $|y| < 15$ car x et y sont entiers.

L'ensemble de solutions de (F) est donc inclus dans l'ensemble de couples (x , y) appartenant à $\{-22 , -21 , ..., 21 , 22\}\times\{-14 , -13 , ... , 13 , 14\}$.

Cet ensemble est fini (produit cartésien de deux ensembles finis) donc l'équation (F) possède un nombre fini de solutions dans $\mathbf{Z}^2$.

3) Voir au-dessus.

4) On remarque que (x , y) est solution de (F) si et seulement si (| x | , | y |) l'est aussi. Simple problème de parité. On peut se contenter de chercher les solutions de (F) telles que $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Or (x , y) est solution de (F) avec x et $y \geq 0$ si et seulement si (x^2 , y^2) est solution de (E) donc, si et seulement si il existe k dans **Z** tel que :

$x^2 = 500 + 5k$ et $y^2 = -2k$.

On en déduit que y est pair. Les valeurs possibles de y sont alors 0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 et 14.

Les valeurs de k correspondantes sont : 0 , -2 , -8 , -18 , -32 , -50 , -72 , -98.

Les valeurs de x^2 correspondantes sont : 500 , 490 , 460 , 410 , 340 , 250 , 140 , 10.

Comme aucune de ces dernières valeurs n'est un carré dans **N**, on en déduit que (F) n'admet aucune solution.

5) Si (x_o , y_o) est une solution de (F) avec x_o et $y_o \geq 0$, alors : $2x_o^2 = 1000 - 5y_o^2$ d'où $2x_o^2 = 5(200 - y_o^2)$. 5 est 2 sont premiers entre eux donc 5 divise x_o^2 , (Théorème de Gauss).

De plus, comme 5 est un nombre premier, s'il divise xo^2 alors il divise x_o.

De même, y_o est divisible par 2.

Posons alors $x_o = 5x_1$ et $y_o = 2y_1$. En remplaçant dans (F), on obtient alors:

$2(5x_1)^2 + 5(2y_1)^2 = 1000$ d'où $5x_1^2 + 2y_1^2 = 100$.

L'équation (F_1) : $5x^2 + 2y^2 = 100$ admet donc une solution dans **N**.

On vérifie alors comme précédemment, que x_1 est divisible par 2 et que y_1 est divisible par 5.

On pose alors $x_1 = 2x_2$ et $y_1 = 5y_2$ et on vérifie que $2x_2^2 + 5y_2^2 = 10$.

L'équation (F_2) : $2x^2 + 5y^2 = 10$ doit donc admettre une solution dans **N**.
On réitère encore une fois ce procédé et on montre alors que l'équation (F_3) : $5x^2 + 2y^2 = 1$ admet une solution dans **N**. Ceci est évidemment faux.
Donc, l'hypothèse que (F) admet des solutions est fausse.

Exercice 9 :

Partie A.

1) $4 \equiv 1$ [3] donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n \equiv 1^n$ [3] , d'où $4^n \equiv 1$ [3].

2)
29 est un nombre premier et 29 ne divise pas 4, donc 4 et 29 sont premiers entre eux. Donc, $4^{28} \equiv 1$ [29], c'est à dire, $4^{28}-1$ est divisible par 29.

3)
$4^1 \equiv 4$ [17]. De plus $4^2 = 16$ et $16 \equiv -1$ [17], donc
$4^2 \equiv -1$ [17].
De là , on a: $4^3 \equiv -4$ [17] , c'est à dire , $4^3 \equiv 13$ [17].
Ensuite, $4^4 \equiv (-1)^2$ [17] , c'est à dire $4^4 \equiv 1$ [17].
D'où ....
$4^5 \equiv 4$ [17]
$4^6 \equiv 4^2$ [17] ou encore $4^6 \equiv 16$ [17]
$4^7 \equiv 4^3$ [17] ou encore $4^7 \equiv 13$ [17]

$4^8 \equiv 4^4$ [17] ou encore $4^8 \equiv 1$ [17].
Pour n quelconque entier naturel, posons $n = 4k + r$, division euclidienne de n par 4.
On a: $4^n = 4^{4k} \times 4^r = (4^4)^k \times 4^r$.
D'où : $4^n \equiv (4^4)^k \times 4^r$ [17].
Or, $4^4 \equiv 1$ [17] d'où $4^n \equiv 4^r$ [17].
Mais $r \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$, d'où :
$n = 4k \Rightarrow 4^n \equiv 1$ [17] .... le reste est alors 1.
$n = 4k + 1 \Rightarrow 4^n \equiv 4$ [17] .... le reste est alors 4.
$n = 4k + 2 \Rightarrow 4^n \equiv 16$ [17] .... le reste est alors 16.
$n = 4k + 3 \Rightarrow 4^n \equiv 13$ [17] .... le reste est alors 13.

4) $4 \equiv -1$ [5] donc $4^n \equiv (-1)^n$ [5].
4^n-1 est divisible par 5 $\Leftrightarrow 4^n \equiv 1$ [5].
Donc, d'après la remarque précédente, ceci signifie que $(-1)^n \equiv 1$ [5].
Pour n pair, on a $(-1)^n \equiv 1$ [5].
Pour n impair, on a $(-1)^n \equiv -1$ [5] ou encore $(-1)^n \equiv 4$ [5].
On en déduit que 4^n-1 est divisible par 5 si et seulement si n est pair.

5)
$4^{28}-1$ est divisible par 3, d'après **1.**.
$4^{28}-1$ est divisible par 29 d'après **2.**.
$4^{28}-1$ est divisible par 17 d'après **3.** car $28=4\times7$.
$4^{28}-1$ est divisible par 5 d'après **4.** car 28 est pair.
Donc $4^{28}-1$ est divisible par 3 , 5 , 17 et 29 , qui sont bien quatre nombres premiers.

Partie B p est un nombre premier différent de 2.

1)
p est premier différent de 2, donc p ne divise pas 4, donc, d'après le Petit Théorème de Fermat, on sait que $4^{p-1} \equiv 1$ [p]

2)

a. r est le reste de la division euclidienne de n par b.
Donc, $n = Qb + r$ avec $Q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0 ; 1 ; .... ; b-1\}$.
Donc, $4^n = 4^{Qb} \times 4^r = (4^b)^Q \times 4^r$.
Or, $4^b \equiv 1$ [p] donc : $(4^b)^Q \equiv 1$ [p], d'où
$4^n \equiv 4^r$ [p]. Comme $4^n \equiv 1$ [p], on a donc : $4^r \equiv 1$ [p].
Mais b est le plus entier naturel non nul vérifiant $4^b \equiv 1$ [p] , et $r < b$.
Donc $r = 0$.
Réciproquement, si $r = 0$, alors $4^{r'} \equiv 1$ [p] et 4[e)n[/e] $\equiv 1$ [p"].
b. Posons 'n = Qb + r' , division euclidienne de n par b.
On sait que n divisible par b $\Leftrightarrow$ r = 0. De plus:
4^n-1divisible par p$\Leftrightarrow 4^n \equiv 1$ [p] $\Leftrightarrow (4^b)^Q \times 4^r \equiv 1$ [p] $\Leftrightarrow 4^r \equiv 1$ [p] , r = 0
D'où , 4^n-1 divisible par p $\Leftrightarrow$ r = 0.
c. Comme p est premier différent de 2, p ne divise pas 4, donc, d'après le petit Théorème de Fermat, on a:
$4^{p-1} \equiv 1$ [p]. Donc, d'après le résultat précédent, on peut dire que b divise p-1.

Exercice 10 :

1)Passer par l'algorithme d'Euclide: Posons a = 2003 et b = 123
a) a = 16xb+ 35 , b = 3x35 + 18 , 35 = 1x18 + 17 , 18 = 1x17 + 1.
Donc,
35 = a - 16xb et 18 = b - 3x35 donc 18 = b - 3(a-16xb) = 49b - 3a
17 = 35 - 18 donc 17 = (a - 16b) - (49b - 3a) = 4a - 65b
1 = 18 - 17 donc 1 = (49b - 3a) - (4a - 65b) = 114b - 7a.
On a donc une solution u et v : u = 114 et v = -7

b) La relation 114x123 - 7x2003 = 1 implique que 114x123 $\equiv$ 1 [2003].
Il existe donc bien un entier relatif ko répondant à la question.
On peut choisir ko = 114.

c) On sait que 123ko $\equiv$ 1 [2003]. Soit x un entier relatif:
Si 123x $\equiv$ 456 [2003] alors kox123x $\equiv$ 456ko [2003] donc x $\equiv$ 456ko [2003]
Si x $\equiv$456ko [2003] alors 123x $\equiv$456ko123 [2003] donc 123x $\equiv$ 456 [2003]
On a bien l'équivalence demandée.

d) Les entiers relatifs vérifiant 123x $\equiv$456 [2003] sont ceux vérifiant x $\equiv$456ko [2003]
Or, 456ko $\equiv$1909 [2003] donc l'ensemble des x entiers relatifs vérifiant: 123x $\equiv$ 456 [2003] est l'ensemble des x tels que x $\equiv$1909 [2003] donc de la forme x = 2003k + 1909
où k est un entier relatif quelconque.

e) Et pour cause! C'est x = 1909 .....

2: $1 \leq a \leq 2002$
a) 2003 est premier donc il est premier avec tout entier a compris entre 1 et 2002.
Donc PGCD(a , 2003) = 1
D'après le Théorème de Bézout, on sait qu'il existe alors deux entiers relatifs
n et m tels que 2003n + a.m = 1.
Donc: tels que 2003n + am $\equiv$ 1 [2003] d'où il existe bien m entier
tel que am $\equiv$ 1 [2003]

b) Si b est un entier quelconque, alors en particulier, on a : abm $\equiv$ b [2003].
Or, il existe un entier x tel que $0 \leq x \leq 2002$ et x $\equiv$ bm [2003]
x est simplement le reste dans la division euclidienne de bm par 2003.
De plus, si existe un autre entier y compris entre 0 et 2002 vérifiant ay $\equiv$b [2003]
alors ax $\equiv$ay [2003] donc a(x-y) $\equiv$ 0 [2003].
a(x-y) est alors divisible par 2003. a est premier avec 2003 donc 2003 divise (x-y).
Comme x et y sont entre 0 et 2002, on a $|x-y| < 2003$. Donc la seule possibilité est $|x-y| = 0$.
D'où x = y.
Conclusion: Il y a bien existence et unicité de la solution de
$0 \leq x \leq 2002$ et ax $\equiv$ b [2003]

Exercice 11

1)a) $a_1 = 39$, $a_2 = 399$, $a_3 = 3999$, $b_1 = 19$, $b_2 = 199$, $b_3 = 1999$, $c_1 = 21$, $c_2 = 201$ et $c_3 = 2001$.
b) a_n s'écrit, en base 10, sous la forme 499..99, 4 suivi de n "9". Donc son écriture décimale a (n+1) chiffres.
De même, c_n s'écrit 2000...001, "2" , suivi de (n-1) "0" , et un "1", donc son écriture décimale a aussi (n+1) chiffres.
c) Comme $(A-B)(B+A) = A^2 - B^2$, on a: $b_n.c_n = (2.10^n-1).(2.10^n+1) = 4.10^{2n} -1 = a_{2n}$.
En particulier, $a_6 = b_3.c_3 = 1999x2001 = 3x23x29x1999$. C'est bien la décomposition en produit de facteurs premiers de ce nombre car 1999 est premier.
d) On sait que pour tous entiers n et m, on a : PGCD(n , m) = PGCD(m-n , m).
Comme $c_n - b_n = 2$, on en déduit que l'on a bien : PGCD (b_n , c_n) = PGCD(c_n ,2).
Or, c_n et 2 sont premiers entre eux,
(argument très simple, c_n est impair, ou avec BEZOUT, $c_n - 2.10^n = 1$),
donc PGCD(c_n ,2) = 1 et donc PGCD(b_n , c_n) =1 .
b_n et c_n sont bien premiers entre eux.

2)
a) Comme b_3 et c_3 sont premiers entre eux, on sait, d'après le théorème de BEZOUT qu'il existe u et v entiers relatifs tels que: $b_3.u + c_3.v = 1$
L'équation **(1)** admet donc au moins une solution.
b) On a: 2001 = 1999 + 2 et 1999 = 999x2 + 1 , d'où la relation :
(1999 = 999x(2001-1999)+1) et (1000x1999 - 999x2001 = 1)
Une solution particulière est donc (x = 1000) , (y = -999).
c) Si x et y est une solution de **(1)**, alors on a: $b_3x + c_3y = 1$ et $1000.b_3 - 999.c_3 = 1$
d'où, $(1000-x)b_3 = (999 + y)c_3$.
Comme b_3 et c_3 sont premiers entre eux, d'après le théorème de GAUSS, il existe donc k et k' entiers relatifs tels que : $1000 - x = k.c_3$ et $999 + y = k'.b_3$
On remarque que l'on doit avoir k = k'. D'où, toute solution de **(1)** est de la forme:
$x = 1000 - k.c_3$ et $y = - 999 + k.b_3$ où k est un entier relatif quelconque.
On vérifie sans peine que tout (x , y) de la forme précédente est bien solution.
L'ensemble de solutions de **(1)** est donc l'ensemble de couples:
(1000 - kx2001 ; -999 + kx1999), où k est un entier.

A.T.S.M

Association Tunisienne des Sciences Mathématiques

Forum du bac Math

Thème : **Arithmétiques**

Exercice 1:

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

Proposition 1 : « pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n}-1$ ».

Proposition 2 : « Si 6 divise n^2+n alors 3 divise n ».

Proposition 3 : « Si 4 divise $18n$ alors 4 divise n ».

Proposition 4 : « Pour tous entiers naturels m et n alors $(n+2m)^4-n^4$ est divisible par 8. ».

Proposition 5 : « Pour tout entier naturel non nul on a : $(2n-1)\wedge(2n+1)=1)$. ».

Exercice 2:

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

1. Pour tout entier n supérieur à 4 on pose $a=3n-5$ et $b=2n-7$

   a) Tout diviseur commun de a et b divise 11 **b)** 2 est un diviseur commun de a et b **c)** a et b sont premiers entre eux

2. Pour tout entier naturel n on pose $a_n=5^n+6^n$, alors 11 divise a_n pour

   a) $\forall n\in\mathbb{N}$ **b)** tout entier naturel n pair **c)** tout entier naturel n impair

3. Pour tout entier n impair supérieur à 3 on pose $S_n=1+2+\ldots+(n-1)$, alors

   a) n divise S_n n^2 divise S_n $n-1$ divise S_n

4. **a)** 22 divise $23^{2010}-1$ **b)** 22 divise 23^{2010} **c)** 3 divise 23^{2010}

5. si 11 divise $n-4$ et 17 divise $n-9$ alors

   a) 187 divise $n-26$ **b)** 187 divise $n-13$ **c)** 187 divise $n-36$

6. Soit n un entier naturel non nul tel que $(17n)\wedge(3\times7^2\times17^3)=119$. Alors :

   a. 3 divise n **b.** 7 divise n **c.** 17 divise n

Exercice 3:

Pour tout entier naturel non nul, on pose $N=n^4+n^2+1$.

1. Montrer que $N=(n^2+1)^2-n^2$.
2. On pose $d=(n^2+n+1)\wedge(n^2-n+1)$.
   (a) Montrer que les entiers n^2+n+1 et n^2-n+1 sont impairs.
   (b) Montrer que d divise $2(n^2+1)$ et $2n$. En déduire que $d=1$.
3. Montrer que N est non premier pour $n\geqslant 2$.

Exercice 4:

1. (a) Décomposer 319 en facteurs premiers.

   (b) Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour les nombres $3x+5y$ et $x+2y$.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système d'inconnues a et b :
$\begin{cases} (3a+5b)(a+2b)=1276 \\ ab=2m \end{cases}$ où m est le PPCM de a et b.

Exercice 5:

Soient a et k deux entiers naturels non nuls

1. (a) Montrer que $a+1$ divise $a^{2k+1}+1$.

   (b) En déduire que 5 divise $2^{4n+2}+1$.

2. Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $2^{4n+2}+1=\left(2^{2n+1}-2^{n+1}+1\right)\left(2^{2n+1}+2^{n+1}+1\right)$.

3. Montrer que pour tout $n\geqslant 2$, $2^{2n+1}-2^{n+1}+1\geqslant 25$.

4. Prouver que $N=\dfrac{2^{4n+2}+1}{5}$ n'est pas premier pour $n\geqslant 2$.

Exercice 6:

Soit S l'ensemble des couples (x,y) de $(\mathbb{N}^*)^2$ vérifiant le système : $\begin{cases} x\wedge y=y-x \\ y>x \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le couple $(n,n+1)\in S$.

2. Montrer que $S=\left\{\left(pn,p(n+1)\right),p\in\mathbb{N}^*\right\}$

3. Déterminer les couples de S tels que $x\vee y=228$.

4. Déterminer les couples de S tels que $x\vee y=210(x\wedge y)$.

Exercice 7:

Soit n un entier naturel non nul. On considère les nombres $a=2n^3+5n^2+4n+1$ et $b=2n^2+n$.

1. Montrer que $2n+1$ divise a et divise b.

2. Un élève affirme que le PGCD de a et b est $2n+1$.

   Son affirmation est-elle vraie au fausse ? (*La Réponse sera justifiée).*

Exercice 8:

Pour tout entier naturel n tel que $n\geq 5$, on pose : $x=n^3-n^2-12n$ et $y=2n^2-7n-4$.

1. Montrer que $n-4$ divise x et $n-4$ divise y.

2. On pose et $a=2n+1$ et $b=n+3$

   (a) Trouver une relation entre a et b indépendante de n.

   (b) Montrer que $a\wedge b$ divise 5.

   (c) Montrer que (5 divise a et 5 divise b)$\Leftrightarrow$ (5 divise $n-2$).

3. Montrer que $(2n+1)\wedge n=1$

4. Déterminer $x\wedge y$, on discutera suivant n

5. Etudier les cas : $n=11$ et $n=12$.

Exercices proposés aux baccalauréats tunisiens

Exercice N°1: (bac 86)

Soit α un entier relatif donné tel que $\alpha \neq 1$ et un entier naturel non nul n.

1/ a) On pose $S=1+\alpha+\alpha^2+.......+\alpha^{n-1}$ .donner une autre expression de S

b) Montre que α^n et $\alpha -1$ sont premiers entre eux.

2/ a)Résoudre dans Z^2 l'équation $\alpha^n x+(\alpha -1)y=1$.

b) En déduire les solutions dans Z^2 de l'équation $3^n x+2y=5$.

Exercice N°2: (bac 86)

on considère dans Z l'équation : (E) :2x+3y=1986

1/a) Montre que si (x,y) est une solution de(E), alors x est un multiple de 3 et y est un multiple de 2

b) Résoudre l'équation (E)

2/ Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que 2m+3d=1986 avec PPCM (a,b) = m et PGCD (a,b) = d

a) Monter que d=2 ou d =6
b) Dans le cas où d = 6, déterminer tous les couples (a,b)

EXERCICE N°3 (bac 88)

1/ a) Résoudre dans Z l'équation 7x-3y=1 (1)

b) Montre que si le couple (x,y) est solution de l'équation (1) alors x et y sont premiers entre eux.

2/ soit a et b deux entiers relatifs vérifiant la relation (E): 7a – 3b = 29.

a) On désigne par D le plus grand commun diviseur de a et b.
Montrer que les seules valeurs possibles de D sont 1 et 29.
b) Résoudre l'équation 7a – 3b = 29 sachant que D = 29.
c) On désigne par M le plus petit commun multiple de a et b.
Résoudre l'équation 7a – 3b = 29 dans le cas où D = 29 et M = 1044.

3/ Résoudre l'équation 7a – 3b = 29 sachant que a et b sont premiers entre eux.

Exercice N°4: (bac 89)

1) Soit $p \in N^*$ et $n \in N$ avec $n > 1$
Soient a = pn et b = p (n – 1)
Démontrer que $a \wedge b = a - b$.

2) Démontrer que si $a \wedge b = a - b$ alors a et b sont de la forme a = pn et b = p (n – 1) (p et $n \in N$)

3) Résoudre dans N^2 $\begin{cases} a \wedge b = a - b \\ a \vee b = 30 \end{cases}$

Exercice N°5: (bac 92)

1) On considère dans Z^2 l'équation: (E_1): 11x + 8y = 79

a/ Montrer que si (x, y) est solution de (E_1) alors $y \equiv 3\ (11)$

b/ Résoudre l'équation (E_1)

2) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_2): $3y + 11z = 372$

a/ Montrer que si (y,z) est solution de (E_2) alors $z \equiv 0$ (3)

b/ Résoudre alors l'équation (E_2).

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_3): $3x – 8z = -249$.

4) Le prix total de 41 pièces détachées en 3 lots est de 480^D.

Le prix d'une pièce du 1er lot est 48^D.

Le prix d'une pièce du 2ème lot est 36^D.

Le prix d'une pièce du 3ème lot est 4^D.

Déterminer le nombre de pièces de chaque lot.

Exercice N°6: (bac 93)

Soit p un entier relatif différent de 1 et n un entier naturel non nul.

On pose $S = 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}$

1)a) Ecrire S sous la forme d'un quotient.

b) Calculer l'expression $p^n + (1 – p)S$ et en déduire que p^n et $(1 – p)$ sont premiers entre eux.

2)a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $p^n x - (1 – p)y = p$.

b) En déduire, dans $\mathbb{Z}^2$, les solutions de l'équation $10^n x + 2^{n+2} y – 10.2^{n-1} = 0$

Exercice N°7: (bac 2008)

1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E): $3x – 8y = 5$. Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que

$x = 8k – 1$ et $y = 3k – 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2) a) Soient n, x et y trois entiers tels que $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$

Montrer que (x, y) est une solution de (E)

b) On considère le système S $\begin{cases} n = 2 \pmod 3 \\ n = 7 \pmod 8 \end{cases}$ où n est entier

Montrer que n est une solution de (S) si et seulement si $n \equiv 23 \pmod{24}$

3) a) Soit k un entier naturel

Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8

c) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $(1991)^{2008} – 1$ est divisible par 24

EXERCICE N° 8 (principale 2010) :

Répondre par vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.

1) le quotient de (-23) par (-5) est 4.

2) Si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux.

3) $147^{146} \equiv 2 \pmod{12}$

4) $x^2 \equiv 0 \pmod 8$ équivaut à $x \equiv 0 \pmod 8$

5) Si $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$ alors $x \equiv 19 \pmod{20}$

6) Si p est un entier premier distinct de 2 alors $p^2 \equiv 1 \pmod 4$

EXERCICE N° 9 (contrôle 2010) :

On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$

1) Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n, le reste de 7^n modulo 100

2) En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que, montrer que a= 100k-1

3)a)En utilisant la formule de binôme, montrer que $a^{100} \equiv 1 (\text{mod } 100^2)$

b)Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100}.

Correction des exercices (bac)

(BAC 86)

1) a) S= 1+α+ α²+…+ α^{n-1} est la somme n termes d'une suite géométrique de raison α ≠1

donc S = $\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$

b) On a S = $\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$ donc $1-\alpha^n$ =S $(1-\alpha)$ alors α^n- S $(\alpha-1)$ =1

D'après l'identité de Bézout α^n et $\alpha-1$ sont premiers entre eux

2) a) (1, - S) est une solution particulière de $\alpha^n x + y(\alpha-1)=1$

*Donc $\alpha^n x + y(\alpha-1) = \alpha^n - S(\alpha-1)$

$\alpha^n(x-1) = (\alpha-1)(-y-S) \Longrightarrow \alpha^n$ divise $(\alpha-1)(-y-S)$ et comme α^n et $\alpha-1$ sont premiers entre eux et d'après le lemme de gauss : α^n divise (-y-S)

Il existe k ∈ ℤ tel que – y- S = $k\alpha^n$ c.à.d. y = - $k\alpha^n$ - S

On remplace y dans l'équation on obtient x = k $(\alpha-1)$ +1

*On vérifie la solution trouvée

$$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(k(\alpha-1)+1, k(\alpha-1)+1), k\in\mathbb{Z}\}$$

b) Dans l'équation précédente et pour $\alpha = 3$: $3^n x + 2y = 1$, les solutions sont (2k +1; $-3^n k$ – S) donc les solutions de $3^n x + 2y = 5$ sont (2k +5 ; - $3^n k$ – 5S), en effet (5, - 5S) est une solution particulière de : $3^n x + 2y = 1$

(Bac 86)

1) $(E): 2x+3y=1986$

a) (x,y) *sol de* $(E) \Leftrightarrow 2x+3y=1986$

$\Leftrightarrow 2x=1986-3y$

$\Leftrightarrow 2x=3(662-y)$ (*)

donc 2*divise* $3(662-y)$ *et comme* $2\wedge 3=1$ *alors d'apres le lemme de Gauss*

2 *divise* $662-y$ *donc* 2 *divise* y (y *est un multiple de* 2)

de meme $3y=2(993-x)$ ... 3 *divise* $993-x$ *donc* 3 *divise* x (x *est un multiple de* 3)

b) $x=3k$ *en remplacant dans* (*) $2k=662-y$

donc $y=662-2k$

$S_{\mathbb{Z}^2}: \{(3k, 662-2k) \text{ où } k\in\mathbb{Z}\}$

2) $a,b \in \mathbb{N}$ on pose $m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$ $\quad 2m + 3d = 1986$

a) comme d divise m alors d divise 1986

donc $d \in \{1,2,3,6,331,662;993,1986\}$ d'apres 1) d est un multiple positif de 2

alors $d \in \{2,6,662,1986\}$

si $d = 662$ alors $m = 0$ impossible

si $d = 1986$ impossible

alors $d = 2$ ou $d = 6$

b) si $d = 6$ alors $m = 984$

ils existent a' et b' premiers entre eux tel que $a = 6a'$ et $b = 6b'$

on a $m.d = ab$ alors $984 \times 6 = 36a'b'$

$a'b' = 164$ et $a' \wedge b' = 1$ $\quad (164 = 2^2 \times 41)$ alors

$a' = 1$ et $b' = 164$ ou $a' = 4$ et $b' = 41$ et inversement

donc $S_{\mathbb{Z}^2} : \{(6,984);(24,246);(984,6);(246,24)\}$

(bac 88)

1) $7x - 3y = 1 \quad (1)$

a) $(1,2)$ est une solution particuliere de (1)

donc $7(x-1) = 3(y-2) \quad (2)$

$\begin{cases} 7 \text{ divise } 3(y-2) \\ 7 \wedge 3 = 1 \end{cases}$ alors d'apres le lemme de gauss 7 divise $y-2$

alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - 2 = 7k$

il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 2 + 7k$

en remplacant dans l'équation (2) on obtient $x = 1 + 3k$

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(1+3k, 2+7k); k \in \mathbb{Z}\}$

b) si (x,y) est une solution de (1) alors d'apres le theoreme de Bezout

x et y sont premiers entre eux

2) st a et b des entiers verifiant (E) : $7a-3b=29$

a) on pose $D=a\wedge b$

on a D divise a et b alors D divise $7a-3b$

$\Rightarrow$ D divise 29

$\Rightarrow$ $D=1$ ou $D=29$

b) $\begin{cases} 7a-3b=29 \\ a\wedge b=29 \end{cases}$ (S)

soient a' et b' premiers entre eux tel que $a=29a'$ et $b=29b'$

$(S)\Leftrightarrow \begin{cases} 7a'-3b'=1 \\ a=29a' \text{ et } b=29b' \\ a'\wedge b'=1 \end{cases}$

d'apres la question $(1)(a)$ $a'=1+3k$ et $b'=2+7k$ et d'apres (b) a' et b' sont premiers entre eux donc $S_{\mathbb{Z}^2}=\{(29(1+3k),29(2+7k))\text{où } k\in\mathbb{Z}\}$

c) on pose $M=a\vee b$ et $D=a\wedge b$, $\begin{cases} 7a-3b=29 \\ D=29 \\ M=1044 \end{cases}$

d'apres la question precedante $a=29(1+3k)$ et $b=29(2+7k)$

$M\times D=a.b \Rightarrow 1044\times 29=29^2(1+3k)(2+7k)$

$\Rightarrow 21k^2+13k-34=0 \qquad (\Delta=55^2)$

$\Rightarrow k=1$

$\Rightarrow a=29\times 4$ et $b=29\times 9$

$\Rightarrow S_{\mathbb{Z}^2}=\{(116,\ 261)\}$

3) $\begin{cases} 7a-3b=29 \\ a\wedge b=1 \end{cases}$

$(1,2)$ est une solution particuliere de $7a-3b=1$

alors $(29,58)$ est une solution particuliere de $7a-3b=29$

alors $a=29+3k$ et $b=58+7k$

pour que a et b soient premiers il faut que : k ne soit pas un multiple de 29

$S_{\mathbb{Z}^2}=\{(29+3k,58+7k)$ où k est un entier différent de $29n, n\in\mathbb{Z}\}$

(bac 89)

1) $n = (n-1) + 1$ donc $n \wedge (n-1) = 1$

$a \wedge b = pn \wedge p(n-1) = p(n \wedge (n-1)) = p = a - b$

2) $a \wedge b = a - b \Longrightarrow$ il existe n naturel tel que $a = n(a-b)$

On pose $p = a - b$ et par suite a et b sont de la forme $a = pn$ et $b = p(n-1)$

3) $\begin{cases} a \wedge b = a - b \\ a \vee b = 30 \end{cases}$

D'après 1) et 2) on a l'équivalence entre $a \wedge b = a - b$ et la forme de a et b

$(a \wedge b)(a \vee b) = ab$ s'écrit encore : $30\,p = np.p\,(n-1)$

p est non nul donc : $n(n-1)\,p = 30$

$n = 3$ et $p = 5$

$S_{\mathbb{N}^2}\{(15;10)\}$

(bac 92)

1)a) $11x + 8y = 79 \Longrightarrow 8y - 24 = -11x + 55 \Longrightarrow 8(y-3) = 11(5-x) \Longrightarrow 11$ divise $8(y-3)$ or 8 et 11 sont premiers entre eux, d'après le lemme de Gauss : 11 divise $y - 3$ alors $y \equiv 3\,[11]$

b)*En remplaçant y par $11k + 3$ dans l'équation, on obtient $x = -8k + 5$

* $11(-8k+5) + 8(11k+3) = -88k + 55 + 88k + 24 = 79$

$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(-8k+5, 11k+3), k \in \mathbb{Z}\}$

2) a) (y, z) est une solution de E_2 : $3y + 11z = 372 \Longrightarrow 11z = 3(124 - y) \Longrightarrow$

3 divise 11z or 3 et 11 sont premiers entre eux ; d'après le lemme de Gauss, 3 divise z on écrit $z \equiv 0\,[3]$

b) * on remplace z par 3k' dans E_2 : $3y + 11z = 372$, on obtient $y = 124 - 11k'$

*on peut vérifier les solutions trouvées

$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(124 - 11k', 3k'), k \in \mathbb{Z}\}$

3) E_3 : $3x - 8z = -249$

(x, z) est une solution de E_3 : $3x - 8z = -249 \Longrightarrow 3(x+83) = 8z \Longrightarrow z \equiv 0(3)$

* on remplace z par 3k'' dans E_3 : $3x - 8z = -249$ on obtient $x = 8k'' - 83$

$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(8k'' - 83, 3k''), k \in \mathbb{Z}\}$

4) On désigne par x, y et z les nombres respectifs des pièces de 3 lots

$$\begin{cases} x + y + z = 41 \\ 48x + 36y + 4z = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 41 \\ 12x + 9y + z = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 41 \\ 11x + 8y = 79 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 41 \\ 11x + 8y = 79 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 41 \\ x = -8k + 5, y = 11k + 3 \\ k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5,\ y=3 \text{ et } z=33$$

(bac 93)

1) **a)** S = 1 + P + P^2 + ……. + P $^{n-1}$

S est la somme de n premiers termes d'une suite géométrique de raison p $\neq 1$ et de premier terme 1

$$\Rightarrow \ S = 1\left(\frac{1-P^n}{1-P}\right) = \frac{1-P^n}{1-P}$$

b) $P^n + (1-P)\,S = P^n + (1-P)\dfrac{(1-P^n)}{(1-P)}$

$= P^n + (1-P^n)$

$= 1$

On a : $P^n + (1-P)\ S = 1$ d'où

D'après l'identité de Bézout p^n et (1- P) sont premiers entre eux

2) **a)** (P, SP) est une solution particulière de cette équation

$\Rightarrow P^n x - (1-P)\,y = P^{n+1} + (1-P)\,SP$

$\Rightarrow P^n x - P^{n+1} = (1-P)\,y + (1-P)\,SP$

$\Rightarrow P^n (x-P) = (1-P)(y+SP)$

$\Rightarrow (1-P) \mid P^n(x-P)$

Et on a $(1-P) \wedge P^n = 1$

D'ou d'après le lemme de Gauss $(1-P)/(x-P)$ $\Rightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$

Tel que x- p = k(1- P)

x = k (1- P) + P

$\Rightarrow$ Remplaçons x dans $P^n x - (1-P)\,y = P$

On obtient :

$\Rightarrow kP^n(1-P) + P^{n+1} - (1-P)\,y = P$

$\Rightarrow kP^n(1-P) + P^{n+1} - P = (1-P)\,y$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow y = kP^n + \frac{(P^{n+1}-P)}{(1-P)} = kP^n + \frac{P(P^n-1)}{(1-P)} = kP^n + \frac{P(P-1)S}{(1-P)} = kP^n - PS$$

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \left\{k(1-P)+P\ ;\ kP^n - PS);\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $10^n x + 2^{n+2} y - 10 \cdot 2^{n-1} = 0$

$\Rightarrow 10^n x + 2^n \cdot 2^2 y = 10 \cdot 2^{n-1}$

Divisons par 2^n

$$\Rightarrow 5^n x + 2^2\ y = \frac{10 \cdot 2^{n-1}}{2^n} = \frac{10}{2} = 5$$

$\Rightarrow 5^n x - (1-5)\ y = 5$

Donc pour P = 5 on obtient :

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \left\{(5-4k)\ ;\ k5^n + \frac{(5^{n+1}-5)}{-4});\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(Bac 2008)

1) (E) : 3x – 8 y = 5

(-1 , -1) est une solution particulière de (E)

$\Rightarrow$ 3 x – 8 y = 3x (-1) – 8x(-1) = 5
$\Rightarrow$ 3 x + 3 = 8y + 8
$\Rightarrow$ 3 (x + 1) = 8 (y + 1)
$\Rightarrow$ 3 | 8 (y + 1) et 3 $\wedge$ 8 = 1
D'après le lemme de Gauss
3| y + 1 $\Rightarrow$ il existe k $\in \mathbb{Z}$ tel que
Y + 1 = 3 k $\Rightarrow$ y = 3 k – 1
En remplaçant y dans 3x – 8 y = 5
On obtient x = 8 k – 1
Réciproquement, on vérifie que (8k – 1, 3k – 1) est une solution de (E) pour tout k
3(8k – 1) – 8(3k -1) = 24 k – 3 – 24 k + 8 = - 3 + 8 = 5
$\Rightarrow$ (8 k – 1 , 3k – 1) est une solution de (E).

2) **a)** $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 3x + 2 = 8 y + 7
$\Rightarrow$ 3 x + 2 – 8 y – 7 = 0
$\Rightarrow$ 3 x – 8 y = 5
$\Rightarrow$ (x , y) est une solution de (E)

b) S $\Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 2 (\text{mod } 3) \\ n \equiv 7 (\text{mod } 8) \end{cases}$; n $\in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 + 3x \\ n = 7 + 8y \end{cases}$; (x , y) $\in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ (x, y) est une solution de 3x – 8y = 5 d'après : 2) a)
$\Rightarrow$ x = 8 k – 1 et y = 3k – 1
$\Rightarrow$ n = 2 + 3x = 2 + 3 (8k - 1)
$\Rightarrow$ n = 2 + 24k - 3 = 24k – 1
$\Rightarrow$ n $\equiv -1\,[24] \equiv 23\ [24]$
On suppose que n $\equiv$ 23 [24] et on montre que n est une solution de S .
$\Rightarrow$ n $\equiv$ 23 [24]
$\Rightarrow$ n = 23 + 24 k ; k $\in \mathbb{Z}$
$$\Rightarrow \begin{cases} n = 21 + 24K = 2 + 3(7 + 8K) \Rightarrow n \equiv 2 (\text{mod } 3) \\ n = 7 + 16 + 24K = 7 + 8(2 + 3K) \Rightarrow n \equiv 7 (\text{mod } 8) \end{cases}$$
$\Rightarrow$ n est une solution de S.

3) **a)** * $2^2 = 4 = 1 + 3$
$\Rightarrow 2^2 \equiv 1 (\text{mod } 3)$
$\Rightarrow 2^{2k} \equiv 1 (\text{mod } 3)$
* $7^2 = 49 = 1 + 48 = 1 + 8 \times 6$
$\Rightarrow 7^2 \equiv 1 (\text{mod } 8)$
$\Rightarrow 7^{2K} \equiv 1 (\text{mod } 8)$

b) 1991 = 2 + 1989 = 2 + 663 $\times$ 3
1991 $\equiv 2 (\text{mod } 3)$ (**1**)

Et 1991 = 7 + 1987 = 7 + 8 × 248

$\Rightarrow$ $1991 \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 8)$ **(2)**

(1) et (**2**) $\Rightarrow$ 1991 est une solution de S

$\Rightarrow 1991 \equiv 23 \,(\mathrm{mod}\ 24)$

$\Rightarrow 1991 \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\ 24)$

$\Rightarrow 1991^{2008} \equiv (-1)^{2008} \ (\mathrm{mod}\ 24)$

$\Rightarrow 1991^{2008} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 24)$

$\Rightarrow 1991^{2008} - 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 24)$

$\Rightarrow 1991^{2008} - 1$ est divisible par 24.

BAC (principale 2010)

1) faux 2) vrai 3) faux 4) faux 5) vrai 6) vrai

Bac (contrôle 2010)

1°)

n	0	1	2	3	4
Reste de 7^n modulo 100	1	7	49	43	1

n =	4k	4k+1	4k+2	4k+3
Reste de 7^n modulo 100	1	7	49	43

(à justifier)

2°) 2009 = 4x502 + 1, 2010 = 4x502 + 2 et 2011 = 4x502 + 3.

$a \equiv 7 + 49 + 43 (\mathrm{mod}100) \equiv 99 (\mathrm{mod}100) \equiv -1 (\mathrm{mod}100)$

donc il existe un entier k tel que a = 100k – 1

Or a >0 alors k est un entier naturel.

3°)a)

$$a^{100} = (100k - 1)^{100} = \sum_{p=0}^{100} (-1)^{100-p} C_{100}^{p} 100^p k^p = 1 - C_{100}^{1} x100xk + \sum_{p=2}^{100} (-1)^{100-p} C_{100}^{p} 100^p k^p$$

$$= 1 - 100^2 xk + 100^2 x \sum_{p=2}^{100} (-1)^{100-p} C_{100}^{p} 100^{p-2} k^p \equiv 1 (\mathrm{mod} 100^2)$$

b) $a^{100} \equiv 1 (\mathrm{mod} 100^2)$ alors les quatre derniers chiffres sont : 0, 0, 0 et 1.