Avant -Propos

Cet manuel scolaire de la collection LA BOUSSOLE a été conçu pour répondre aux besoins, maintes fois exprimés par les apprenants de disposer d'un outil pratique et performant à moindre coût, pour s'exercer de manière très efficace. Il est strictement conforme au nouveau programme officiel de mathématiques de la classe de première D en vigueur au BURKINA FASO.
Ce manuel scolaire est structuré de la façon suivante :

- Le cours détaillé par chapitre
- Des exercices et problèmes gradués et variés pour réinvestir le cours dans des situations données
- Les corrigés de bon nombre d'exercices du présent document
- Un recueil de sujets de devoir surveillé suivi de leurs corrigés

La meilleure façon d'utiliser cet ouvrage est de lire d'abord le cours, traiter ensuite les exercices proposés puis de confronter les résultats obtenus à ceux proposés par l'auteur.
Je souhaite que cet ouvrage apporte aux utilisateurs toute l'aide qu'ils souhaitent et les conduise à faire les mathématiques avec plaisir.
Afin d'améliorer à l'avenir le contenu de ce document et en faire un outil incontournable pour la réussite aux devoirs et compositions de mathématiques, je remercie d'avance tous ceux qui auront l'amabilité de me faire part de leurs remarques, critiques et suggestions constructives.

Bon usage à tous

L'auteur
Issaka SAVADOGO *(Professeur certifié)*
Tél :70514283
76072920
78981409
e-mail :savadogo87@gmail.com

sommaire

Chapitre1 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES REELLES

I)Fonctions numériques réels

1.- Définitions :

On appelle fonction numérique réelle toute application f d'une partie D de R dans R. L'ensemble D est appelé ensemble de définition de f. D est donc l'ensemble des réels x tels que f(x) existe

Exemples : Soient P et Q deux polynômes

-Si $f(x) = P(x)$; $D = IR$

-Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$; $D = \{x \in R / Q(x) \neq 0\}$

-Si $f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$; $D = \left\{x \in R / \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\right\}$

-Si $f(x) = \frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$; $D = \{x \in R / P(x) \geq 0 \text{ , } Q(x) > 0\}$

-Si $f(x) = \sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)}$; $D = \{x \in R / P(x) \geq 0 \text{ et } Q(x) \geq 0\}$

2.- Opérations sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions.

On définit les fonctions $f + g$; $f \cdot g$; $\frac{f}{g}$; et fog par :

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- $fog(x) = f[g(x)]$

3.- Courbe représentative d'une fonction

L'ensemble des points **M (x ; y)** du plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tels que $x \in D_f$ et y = f(x) est appelé courbe représentative de f.

On le note en général (C_f) *ou* (C).

$C_f = \{M(x; y) / x \in D_f \text{ et } y = f(x)\} = \{M(x, f(x) / x \in D_f\}$

Exemple : Soit $f(x) = x - \sqrt{x}$ et (C) la courbe représentative de f.

$D_f = \{x \in IR / x \geq 0\} = [0 \,;+\infty[$

Considérons les points $M_1(0 ; 0)$, $M_2(1 ; 2)$, $M_3(-1 ; 0)$

f(1)= 0donc $M_1 \in (C)$ $f(1) \neq 2$ donc $M_2 \notin (C)$

$-1 \notin D_f$ donc $M_3 \notin (C)$

La relation y= f (x) est appelée **équation de la courbe *(C)*** dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

4.- Parité

- Une fonction f est **paire** si quel que soit $x \in D_f$, on a

  $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$

La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

- f est dite **impaire** si quel que soit $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère

5.- Symétrie :

Soient M(x ; y), M' (x' ; y') deux points du plan. M et M' sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = a$ si et seulement si $y = y'$ et $x + x' = 2a$, donc si $y = y'$ et $x' = 2a - x$

La courbe représentative (C_f) d'une fonction f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ si et seulement si quel que soit $M(x; y) \in (C_f)$, son symétrique M'(2a-x ;y) appartient aussi à (C_f)

Comme $M \in (C_f)$, on a y =f(x), donc y= f(2a-x) pour tout $x \in D_f$

Ainsi :

(C_f) est **symétrique par rapport à la droite d'équation** $x = a$ si et seulement si quel que soit $x \in D_f$, f(2a-x)=f(x)
En remplaçant x par x+a, l'égalité s'écrit f(a-x) = f(a+x)

Cas particulier :

Si $a = 0$, on a f(-x)=f(-x), donc la fonction est paire et (ζ) est symétrique, par rapport à l'axe des ordonnées (droite d'équation x=0)

- Considérons deux points M(x ; y), M' (x' ; y') et un point S(a ;b).

M et M' sont symétriques par rapport à S si et seulement si $\vec{MS} = \vec{SM'}$.
M et M' sont donc symétriques par rapport à S si et seulement si

$$\begin{pmatrix} a - x \\ b - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix}$$

Donc si et seulement si $\begin{cases} a - x = x' - a \\ b - y = y' - b \end{cases}$, ou $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

La courbe représentative d'une fonction f est donc symétrique par rapport à S(a,b) si quel que soit M(x,y) de cette courbe, son symétrique M'(x' ;y') appartient aussi à la courbe.

Donc si $M \in (\zeta_f)$ alors $M' \in (\zeta_f)$

C'est-à-dire si $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in D_f \end{cases}$ alors $\begin{cases} y' = f(x') \\ x' \in D_f \end{cases}$

Or $y' = 2b - y$ et $x' = 2a - x$

$y' = f(x') \Leftrightarrow 2b - y = f(2a - x)$

Comme y = f(x), on a,

(ζ_f) est symétrique par rapport à S(a,b), si et seulement si quel que soit $x \in D_f$, $(2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$

En remplacent x par a+x, cette égalité s'écrit : $f(a - x) + f(a + x) = 2b$

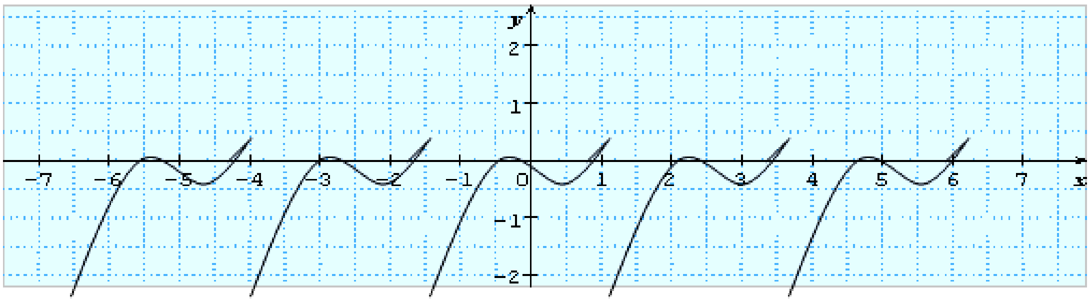
Si a = b = 0, S(0 ;0),et f(-x)+f(x)=0 c'est-à-dire f(-x)=-f(x) ; on a une fonction impaire.

6.- Périodicité :

Une fonction f est dite **périodique** s'il existe un réel p tel que quelque soit $x \in D_f$, $(x + p) \in D_f$ et $f(x + p) = f(x)$. Le plus petit réel p strictement positif vérifiant cette propriété est appelé **la** période de la fonction f

On a, quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, $f(x + kp) = f(x)$

Si on a une courbe représentative de f dans un intervalle de longueur p toute la courbe est obtenue par translation de vecteur $\boldsymbol{k.p.\vec{i}}$



7.- Variation d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on appelle taux de variation de f entre x et x' de I, le réel $\tau_{xx'} = \dfrac{f(x) - f(x')}{x - x'}$

- On dit que f est **croissante** (respectivement strictement croissante) sur I si quels que soient x et x' de I tels que $x < x'$, on a $f(x) \le f(x')$ (respectivement $f(x) < f(x')$)

☛ f est croissante sur I, si et seulement si quels que soient x et x' de I $\tau_{xx'} \ge 0$ (strictement croissante si $\tau_{xx'} > 0$)

- f est dite décroissante sur I (respectivement strictement décroissante sur I) si et seulement quels que soient x et x' de I tels que $x < x'$ on a $f(x) \geq f(x')$ (respectivement $f(x) > f(x')$

f est décroissante si et seulement si quels que soient x et x′ de I $\tau_{xx'} \leq 0$ (strictement décroissante si $\tau_{xx'} < 0$)

- f est dite monotone sur I si elle est soit décroissante sur I, soit croissante sur I.

Etudier les variations d'une fonction f, c'est subdiviser son domaine de définition, lorsque c'est possible, en un nombre fini d'intervalles sur chacun desquels f est monotone.

8.- Extremum local (ou relatif) :

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. On dit que :

- f admet un minimum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant x_0 tel que quel que soit $x \in J$, $f(x) \geq f(x_0)$
- f admet un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant x_0 tel que quel que soit $x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$

9.- Changement de repère :

On rappelle que l'équation d'une courbe ***(C)*** est la relation que vérifient les coordonnées des points de ***(C)***.

Soit ***(C)*** la courbe représentative d'une fonction f. $y = f(x)$ est donc l'équation de ***(C)*** dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Si M(x ;y) un point de ***(C)***, alors $y = f(x)$. Soient $\Omega(x_0;y_0)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ (où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non colinéaires) et soit $(X;Y)$ les coordonnées du point M dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$.

Nous avons :

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$

$\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$

$\overrightarrow{O\Omega} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X\vec{u} + Y\vec{v}$

$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X(a\vec{i} + b\vec{j}) + Y(c\vec{i} + d\vec{j})$

$x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0 + Xa + Yc)\vec{i} + (y_0 + Xb + Yd)\vec{j}$

d'où $\begin{cases} x = x_0 + aX + cY \\ y = y_0 + bX + dY \end{cases}$ (formule de changement de repère)

Dans le cas où $\vec{u} = \vec{i}$ ou $\vec{v} = \vec{j}$ (c'est-à-dire a=1, b=0, c =0, d =1) les formules s'écrivent $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$. On a seulement un changement d'origine ou translation d'axes

Pour avoir l'équation de ***(C)*** dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ on porte les expressions X et Y dans l'équation $y = f(x)$

Soit $Y = F(X)$ l'équation de ***(C)*** dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$

- Si F est paire l'axe des Y est un axe de symétrie et
- Si F est impaire, Ω est un centre de symétrie

Exemple : $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$

Soit (ζ_f) la courbe représentative de f dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Trouver l'équation de (ζ_f) dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ où $\Omega(1,2)$ $\vec{u}(1,1)$ $\vec{v} = \vec{j}$

Soit $M \in (\zeta_f)$ dont les coordonnées dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$ sont (x,y) et dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$, (X ;Y)

La formule de changement de repère s'écrit $\begin{cases} x = 1 + 1X + 0Y \\ y = 2 + 1X + 1Y \end{cases}$ ou

$\begin{cases} x = 1 + X \\ y = 2 + X + Y \end{cases}$ L'équation de (ζ_f) dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est $y = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$

$$2 + X + Y = 1 + X + 1 + \frac{1}{1 + X - 1}$$

$$2 + X + Y = X + 2 + \frac{1}{X}$$

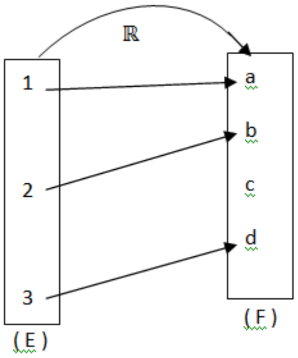
$Y = \dfrac{1}{X}$ est l'équation de (ζ_f) dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

Chapitre 2 :Problèmes algébriques et numériques

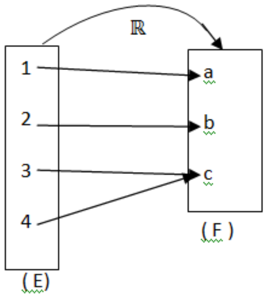
I)Application injective,surjective et bijective

1)Définitions

- Une application injective d'un ensemble (E) ⟶(F) est une relation dans laquelle tout élément de l'ensemble d'arrivée (F) a au plus un antécédent dans l'ensemble de départ (E).



- Une application d'un ensemble (E) ⟶(F) est surjective si chaque élément de l'ensemble d'arrivée (F) a au moins un antécédent dans l'ensemble de départ (E).



- Une application est bijective si elle est injective et surjective

Exemple1 :f :$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 4x - 1$

Vérifier si f est une application injective.

Correction

- ✓ $x_1, x_2 \in$ (E) ;si $f(x_1) \neq f(x_2)$ alors $x_1 \neq x_2$ et si $f(x_1)=f(x_2)$ alors $x_1=x_2$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1)=f(x_2)$

$f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow 4x_1-1=4x_2-1 \Longrightarrow 4x_1=4x_2 \Longrightarrow x_1=x_2$ d'où f est une application injective

Exemple 2 :Soit g :$\mathbb{R} \longrightarrow [1;+\infty[$

$x \longmapsto 2x^2 - 3$

g est-elle injective ?

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1)=f(x_2)$

$f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow 2x_1^2 - 3=2x_2^2 - 3 \Longrightarrow 2x_1^2=2x_2^2 \Longrightarrow x_1^2=x_2^2 \Longrightarrow (x_1^2-x_2^2)=0$

$\Longrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2)=0 \Longrightarrow x_1-x_2=0$ ou $x_1+x_2=0 \Longrightarrow x_1=x_2$ ou $x_1=-x_2$ d'où g n'est pas injective

Exemple 3 :f :$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 4x - 1$

Vérifier si f est une application surjective

Soit $y \in \mathbb{R}$

Résolvons f(x)=y

$f(x)=y \Longrightarrow 4x-1=y \Longrightarrow x=\frac{y+1}{4}$

Quelque soit $y \in \mathbb{R}$;l'équation f(x)=y admet au moins une solution $x=\frac{y+1}{4}$ donc f est une application surjective.

Exemple 4:g :$\mathbb{R} \longrightarrow [1;+\infty[$

$x \longmapsto 4x^2 - 1$

Vérifier si g est une application surjective.

Résolvons g(x)=y

2

Merci à sakso

g(x) =y⟹ 4x^2-1=y⟹x=$\frac{\sqrt{y+1}}{2}$ ou x=$-\frac{\sqrt{y+1}}{2}$

Quelque soit y∈ [1+∞[;l'équation g(x)=y admet deux solutions x=$\frac{\sqrt{y+1}}{2}$ et x=$-\frac{\sqrt{y+1}}{2}$ donc g est une application surjective.

II)Polynômes

1. Définitions :

On appelle monôme toute expression de la forme $a_n x^n$, où $a_n \in R$ et $n \in N$
Un polynôme est la somme de plusieurs monômes, c'est donc une expression de la forme $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n, \cdots, a_2, a_1, a_0 \in R,\ n \in N$

On peut définir un polynôme toute **application** P de IR dans IR qui peut s'écrire sous la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n, \cdots, a_2, a_1, a_0 \in R,\ n \in N$

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Les réels $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont les coefficients de $P(x)$; et si $a_n \neq 0$, on dit que $P(x)$ est de degré n, et on note $d°P = n$

Exemple :

- $P(x) = (\sqrt{x^2+1})^2 = x^2 + 1$ $P(x)$ est un polynôme de degré 2
- $P(x) = |x|$ n'est pas un polynôme
- $P(x) = \sqrt{x}$ n'est pas un polynôme

• $\alpha \in R$ est racine de $P(x)$ si et seulement si $P(\alpha) = 0$

• On appelle polynôme nul le polynôme qui est égal à 0 quel que soit x.

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $P(x)$ est le polynôme nul si et seulement si $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$

• Deux polynômes $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ sont égaux si quel que soit x, $P(x) = Q(x)$

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow P(x) - Q(x) = 0 \Leftrightarrow (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0$$

donc $P(x) = Q(x)$ quel que soit x si $a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \cdots, a_1 = b_1; a_0 = b_0$

Exemple :

Déterminer les réels a, b et c de telle sorte que quel que soit x n'annulant pas le dénominateur, on ait $\frac{2x^2+x+1}{x-1} = ax + b + \frac{c}{x-1}$

Quel que soit $x \neq 1$

$$ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{ax(x-1)+b(x-1)+c}{x-1}$$
$$= \frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x-1}$$
$$= \frac{ax^2 + x(b-a) - b + c}{x-1}$$
$$= \frac{ax^2 + (b-a)x - b + c}{x-1}$$

Par identification on a : $a = 2$, $b - 2 = 1$, et $-b + c = 1$. D'où a= 2, b =3 et c = 4

2. Factorisation :

Factoriser $P(x)$ c'est l'écrire sous la forme de produit de facteurs de degrés aussi faibles que possible.
Factoriser $P(x)$ par $Q(x)$ c'est trouver un autre polynôme $A(x)$ tel que $P(x) = Q(x).A(x)$

Si $A(x)$ existe, on dit que $P(x)$ est factorisable (ou divisible) par $Q(x)$

Remarque :

Si $d°P = n$ et $d°Q = p$ $(p \leq n) \Leftrightarrow d°A = n - p$

Théorème 1:

- $P(x)$ est factorisable par $x - \alpha$ (où $\alpha \in R$) si et seulement si α est racine de $P(x)$.
- $P(x)$ est facrorisable par $x - \alpha$ si et seulement s'il existe $A(x)$ tel que $P(x) = (x-\alpha)A(x) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$

Soit $P(x)$ un polynôme et $\alpha \in R$

Posons $h(x) = P(x) - P(\alpha)$, $h(x)$ est un polynôme

$h(\alpha) = P(\alpha) - P(\alpha) = 0$

α est racine de $h(x)$ donc $h(x)$ est factorisable par $x - \alpha$: il existe

$A(x)$ tel que $h(x) = A(x).(x-\alpha)$ ou $P(x) - P(\alpha) = A(x).(x-\alpha)$

Donc quels que soient le polynôme $P(x)$ et le réel α, il existe un polynôme $A(x)$ tel que $P(x) = (x-\alpha)A(x) + P(\alpha)$

Ce résultat peut se généraliser ainsi :

Théorème 2

Quels que soient les polynômes $P(x)$ *et* $Q(x)$ tels que $d°P(x) \geq d°Q(x)$, il existe 2 polynômes $A(x)$ *et* $R(x)$ tels que $P(x) = A(x).Q(x) + R(x)$.

P(x) est le dividende, Q(x) le diviseur, A(x) le quotient et R(x) le reste de la division

Conséquences

○ $P(x)$ est factorisable par $Q(x)$ si et seulement si $R(x)=0$

Méthodes de factorisation

1er méthode : Méthode des coefficients indéterminés (identification)

Exemple : factoriser $P(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$ par $Q(x)=x^2+1$

On doit chercher le polynôme $A(x)$ vérifiant $P(x)=A(x).Q(x)$

$d°P=4, d°Q=2, d°A(x)=2$

Posons $A(x)=ax^2+bx+c$

On a $P(x)=A(x).Q(x)$ si et seulement si $x^4+x^3+2x^2+x+1=(x^2+1)(ax^2+bx+c)$

$$\begin{aligned} x^4+x^3+2x^2+x+1 &= ax^4+bx^3+cx^2+ax^2+bx+c \\ &= ax^4+bx^3+(a+c)x^2+bx+c \end{aligned}$$

Par identification des coeeficients des termes de même degré, on a
a =1, b =1, a + c = 2 et c = 1

d'où $A(x)=x^2+x+1$
$P(x)=(x^2+1)(x^2+x+1)$

2e méthode : Division euclidienne

Exemple : Factoriser

- $P(x)=2x^5+x^4+5x^3+3x^2+2x+2$ par $Q(x)=x^2+2$

$2x^5+x^4+5x^3+3x^2+2x+2$	x^2+2
$\underline{2x^5+4x^3}$	$2x^3+x^2+x+1$
x^4+x^3	
$\underline{x^4+2x^2}$	
x^3+x^2	
$\underline{x^3+2x}$	
x^2+2	

$$P(x)=(x^2+2)(2x^3+x^2+x+1)$$

- $P(x)=x^5-2x^3+x^2+x-1$ par $Q(x)=x^2-1$

$x^5-2x^3+x^2+x-1$	x^2-1
$\underline{x^5-x^3}$	x^3-x+1
$0-x^3$	
$\underline{-x^3+x}$	
$0+x^2-1$	

$$P(x)=(x^2-1)(x^3-x+1)$$

Remarque :

Si le reste de la division n'est pas nul, $P(x)$ n'est pas factorisable par $Q(x)$

3e méthode : Algorithme de Horner :

Ceci n'est, à proprment parler, une méthode de factorisation. C'est plutôt une disposition pratique de calcul. Elle utilise en fait la méthode des coefficients indéterminés.

Soit à factoriser P(x) par Q(x)

Si $Q(x)$ est de la forme $(x-\alpha)$, la méthode la plus simple est la suivante :

Soit $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ et α un nombre réel. On veut factoriser $P(x)$ par $x-\alpha$. On doit donc trouver un polynôme $A(x)$ tel que : $P(x)=(x-\alpha)A(x)$, $d°A(x)=2$

Posons $A(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$

$P(x)=(x-\alpha)(b_2x^2+b_1x+b_0) \Leftrightarrow P(x)=(x-\alpha).A(x)$

$\Leftrightarrow P(x)=b_2x^3+(b_1-\alpha b_2)x^2+(b_0-\alpha b_1)x-\alpha b_0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_2=a_3 \\ b_1-\alpha b_2=a_2 \\ b_0-\alpha b_1=a_1 \\ -\alpha b_0=a_0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow b_2=a_3;\ b_1=a_2+\alpha b_2;\ \ b_0=a_1+\alpha b_1;\ \ b_0=a_1+\alpha b_1$ et
$a_0+\alpha b_0=0$ (si α est racine)

Disposition pratique :

Coefficients de P(x)	a_3	a_2	a_1	a_0
α	$\parallel$	$+$ αb_2 $\parallel$	$+$ αb_1 $\parallel$	$+$ αb_0 $\parallel$
Coefficients de A(x)	b_2	b_1	b_0	$P(\alpha)$

Exemples

○ $P(x)=5x^3-16x^2+17x-6$
$\alpha=1$

Coefficients de P(x)	5	-16	17	-6
$\alpha=1$	$\parallel$	$+$ 1.5 $\parallel$	$+$ 1(-11) $\parallel$	$+$ 1.6 $\parallel$
Coefficients de A(x)	5	-11	6	0

$A(x)=5x^2-11x+6$ et $P(x)=(x-1)(5x^2-11x+6)$

Cette méthode, décrite pour n = 3, est valable pour tout polynôme de degré $n\geq 2$

- $$P(x) = 2x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 3$$
  $$\alpha = 1$$

P(x)	2	-7	6	2	0	-3
$\alpha = 1$		2	-5	1	3	3
A(x)	2	-5	1	3	3	0

$A(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x + 3$ et $P(x) = (x-1)(2x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x + 3)$

Remarque :

Si α n'est pas racine de P(x), P(x) n'est pas divisible par $x-\alpha$

$P(x) = (x-\alpha)A(x) + R$, $R \neq 0$, ***R*** est le reste de la division de P(x) par $x-\alpha$

Par identification, on a $R = a_0 + \alpha b_0$

Dans ce cas $P(\alpha) = R = a_0 + \alpha b_0$

Cette méthode permet donc de calculer très rapidement $P(\alpha)$

Exemple : $P(x) = x^7 - 7x^5 + 3x^3 - 12x^2 + 1$

$P(3) = ?$

P(x)	1	0	-7	0	3	-12	0	1
α=3		3	9	6	18	63	153	459
Q(x)	1	3	2	6	21	51	153	460

$\boldsymbol{P(3) = 460}$ et $P(x) = (x-3)\,(x^6 + 3x^5 + 2x^4 6x^3 + 21x^2 + 51x + 153) + 460$

Chapitre 3 :EQUATIONS-INEQUATIONS-SYSTEMES

I) RAPPELS ET COMPLEMENTS SUR LES EQUATIONS ET INEQUATIONS

QUELQUES PROPRIETES DES NOMBRES REELS :

Soient a et b deux réels. On a :

- $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$
- $\dfrac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \, (b \neq 0)$
- $a \cdot b \geq 0 \Leftrightarrow a \text{ et } b \text{ sont de même signe}$
- $\dfrac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow (a \text{ et } b \text{ sont de même signe et } b \neq 0)$

- Quel que soit le réel c, $a \le b \Leftrightarrow a + c \le b + c$
- Quels que soient les réels c et d
  - $a = b et c = d \Leftrightarrow a + c = b + d$
  - si $a \le b$ et $c \le d$ alors $a + c \le b + d$
  - si $a \le b$ et $c \le d$ alors $a - d \le b - c$
  - Si $c \ge 0$, $a \le b \Leftrightarrow ac \le bc$
  - Si $c \le 0, a \le b \Leftrightarrow ac \ge bc$
  - Si $c > 0, a \le b \Leftrightarrow \frac{a}{c} \le \frac{b}{c}$
- Si a et b sont strictement positifs $a \le b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$
- $|a| = a \text{ si } a \ge 0$
  $|a| = -a \text{ si } a \le 0$
  $|a| = \text{Sup}(-a, a) = \text{le plus grand de a et} - a$
- $a^2 = b^2 \Leftrightarrow (|a| = |b|) \Leftrightarrow (a = b \text{ ou } a = -b)$
- $\sqrt{x^2} = |x|$ quel que soit $x \in R$
- Si m et n sont des entiers naturels

$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$(a^m)^n = a^{m \times n}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^0 = 1 \text{ si } a \ne 0$

$a^1 = a$

$(ab)^m = a^m \cdot a^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Identités remarquables :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Remarque :

Toutes ces propriétés sont encore valables pour des expressions contenant des variables.

Exemples :

- $(x - a)(x - b) \ge 0 \Leftrightarrow (x - a \text{ et } x - b \text{ sont de même signe})$
- $(x - 2)^2 - (y - 3)^2 = [(x - 2) - (y - 3)][(x - 2) + (y - 3)] = (x - y + 1)(x + y - 5)$

II. TRINOMES ET EQUATIONS DU SECOND DEGRE

1. Définitions

Un trinôme du second degré est une expression de la forme ax^2+bx+c où a,b et c sont des réels et $a \neq 0$.

Soit $f(x)=ax^2+bx+c$, on dit que α est une racine de $f(x)$ si $f(\alpha)=0$.

Factoriser $f(x)$ c'est l'écrire, lorsque cela est possible, sous forme de produit de facteur de degré 0 ou 1,c'est-à-dire sous la forme $f(x)=a(x-x')(x-x'')$.
On a alors $f(x)=0 \Leftrightarrow a(x-x')(x-x'')=0 \Leftrightarrow x=x' \text{ou } x=x''$.
Factoriser un trinôme revient donc à chercher les racines de ce trinôme.

Si $x' et\, x''$ sont les racines du trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$, alors $x' et\, x''$ sont les solutions de l'équations $f(x)=0$, et $S=\{x',x''\}$

2. *Factorisation :*

Soit à factoriser $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$

$$f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\left(\frac{b}{2a}x\right)+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Posons $\Delta=b^2-4ac$, $f(x)=a\left[\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

Δ est appelé discriminant du trinôme.

1er cas : $\Delta<0$

$\Delta<0$ donc $-\Delta>0$ $\left[\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)\right]>0$.

Et comme $a\neq 0$, $f(x)$ ne peut pas s'annuler, donc *f(x)* n'admet pas de racine.

2e cas : $\Delta=0, f(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2$

$f(x)$ admet une racine double $x=x'=x''=-\frac{b}{2a}$.

La forme factoriséé de f(x) est $f(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2$

3e cas : $\Delta > 0$

$$f(x) = a\left[(x - \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2\right] = a\left[(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})\right]$$

$$f(x) = a(x - x')(x - x'')$$

avec $x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = x' \text{ ou } x = x'')$

$f(x)$ admet donc deux racines distinctes x' et x''.

La forme factorisée de f(x) est $f(x) == a(x - x')(x - x'')$ avec $x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Remarque :

Si b est pair, il existe $b' \in Z$ tel que $b = 2b'$

$$\Delta = (2b')^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$$

Posons $\Delta' = b'^2 - ac$

$\Delta = 4\Delta'$

$$x' = \frac{-2b' + \sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-2b' - \sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

Δ' est appelé discriminant réduit

3. Résolution d'une équation du 2nd degré :

Soit à résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$

- Si $\Delta < 0, S = \phi$
- Si $\Delta = 0, S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
- Si $\Delta > 0, S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

4. Somme et produit des racines

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$

Si $\Delta > 0$, on a deux racines distinctes $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

On a alors $x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$

Et $x'.x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} . \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$

Ainsi $\boxed{S = x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad P = x'x'' = \frac{c}{a}}$

Remarque : Racines évidentes

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

- Si $f(1) = a + b + c = 0$

  alors $x' = 1$ est racine, l'autre racine est $x'' = \frac{c}{ax'} = \frac{c}{a}$
- Si $f(-1) = a - b + c = 0$

  alors $x' = -1$ est racine, l'autre racine est $x'' = \frac{c}{ax'} = -\frac{c}{a}$

Exemples :

- Résoudre $5x^2 - 4x - 1 = 0$

  $x' = 1$ *et* $x'' = -\frac{1}{5}$ $\qquad S = \left\{-\frac{1}{5}, 1\right\}$
- $23x^2 - 117x + 94x = 0$

  23 - 117 + 94 = 0 donc $x' = 1$ est racine, $x'' = \frac{94}{23}$ $\qquad S = \left\{1, \frac{94}{23}\right\}$

  On peut aussi essayer 2 et -2

5. Signe d'un trinôme – inéquation du second degré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

- Si $\Delta < 0$, $(-\Delta > 0)$:

  et $(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{(-\Delta)}{4a^2} > 0$

Donc si $\mathbf{\Delta < 0}$, $f(x)$ est du signe de a

- Si $\Delta = 0$

  $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$

  $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$,

Donc si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a.

x		$-\frac{b}{2a}$	
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

- Si $\Delta > 0$ le trinôme a deux racines distinctes x' et x''

  $f(x) = a(x - x')(x - x'')$

  $x - x' > 0 \Leftrightarrow x > x'$

x	$-\infty$	x'		x''	$+\infty$
x-x'	-	0	+		+
x-x''	-		-	0	+
(x-x')(x-x'')	+	0	-	0	+
f(x)	Signe de a	0	signe de –a	0	signe de a

C'est-à-dire que : si $x \in \left]-\infty; x'\right[\cup \left]x'', +\infty\right[$, $f(x)$ est du signe de a
Si $x \in \left]x' ; x''\right[$, $f(x)$ est du signe de –a
Si $x = x'$ ou $x = x''$, $f(x) = 0$

La réciproque est aussi vraie, c'est-à-dire que si $f(x)$ et a sont de même signe alors $x \in \left]-\infty; x'\right[\cup \left]x''; +\infty\right[$ et si $f(x)$ et a sont de signe contraire $x \in \left]x'; x''\right[$

Donc pour étudier la position d'un réel α par rapport aux racines x' et x'' d'un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, on calcule $a \cdot f(x)$

- Si $a.f(\alpha) = 0$, α est une racine
- Si $a.f(\alpha) < 0$, alors $\alpha \in \left]x'; x''\right[$
- Si $a.f(\alpha) > 0$, alors $\alpha \in \left]-\infty; x'\right[\cup \left]x''; +\infty\right[$:

  on compare α à $\frac{x' + x''}{2} = -\frac{b}{2a}$:

  - Si $\alpha > -\frac{b}{2a}$ alors $\alpha > x''$

○Si $\alpha < -\frac{b}{2a}$, alors $\alpha < x'$

III) SYSTEMES D' EQUATIONS

SYSTEMES LINEAIRES :

Un système est linéaire si les inconnues sont toutes du 1er degré.

Exemple : $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x+4y+z=5 \end{cases}$

1. Une équation à deux inconnues :

C'est une équation de la forme $ax+by=c$ où x et y sont les inconnues

Résoudre une telle équation c'est chercher tous les couples (x ;y) de réels vérifiant cette égalité
Pour résoudre l'équation, on prend l'une des inconnues comme paramètre et on exprime l'autre en fonction de ce paramètre.

Exemple : Résoudre l'équation $2x-y=3$

Posons $x=\lambda$

$y=2\lambda-3$

Les solutions de l'équation sont les couples $(\lambda;2\lambda-3)$ $\lambda \in R$

$$S=\{(\lambda;2\lambda-3),\ \lambda \in R\}$$

L'équation admet donc une infinité de solution (mais l'ensemble des solutions n'est pas R²)

Géométriquement, les solutions de telle équation sont les coordonnées des points de la droite d' équation cartésienne $y=2x-3$et le système $\begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda-3 \end{cases}$ est une équation paramétrique de cette droite

2. Système de deux équations à deux inconnues :

C'est un système de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Méthode de résolution :

1er méthode : Déterminant

Soit à résoudre le système :

$\begin{cases} ax+by=c \ (1) \\ a'x+b'y=c' \ (2) \end{cases}$

$b'\times(1)$ donne $ab'x+bb'y=cb'$

$b\times(2)$ donne $a'bx+bb'y=c'b$

Par soustraction membre à membre on a :

$(ab'-a'b)x=cb'-bc'$

$a'\times(1)$ donne $aa'x+ba'y=ca'$

$a\times(2)$ donne $a'ax+ab'y=c'a$

Par soustraction membre à membre on a :

$(ab'-a'b)y=a'c-ac'$

- Si $a'b-ab'\neq 0$ on a une solution unique (x ;y) avec $x=\dfrac{cb'-bc'}{ab'-a'b}$ et $y=\dfrac{a'c-ac'}{ab'+ba'}$
- Si $a'b-ab'=0$
  - Si $a'c-ac'\neq 0$ ou $cb'-c'b\neq 0 \Rightarrow S=\phi$
  - Si $a'c-ac'=0$ et $cb'-c'b=0$

Le système admet une infinité de solution car il est équivalent à l'une des 2 équations (qui sont proportionnelles), et on revient au cas a)

Récapitulation :

On pose $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b \quad et \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$$

- Si $\Delta\neq 0,\ S=\left\{\dfrac{\Delta_x}{\Delta};\dfrac{\Delta_y}{\Delta}\right\}$
- Si $\Delta=0, \Delta_x\neq 0\ ou\ \Delta_y\neq 0 \quad S=\phi$ Si $\Delta=0, \Delta_x=\Delta_y=0$ le système est

équivalent à $ax+by=c$

En posant $x=\lambda,\ (si\, b\neq 0)\Rightarrow y=\dfrac{c-a\lambda}{b} \qquad S=\left\{\left(\lambda;\dfrac{c-a\lambda}{b}\right)\lambda\in R\right\}$

Interprétation géométrique :

Les solutions d'un tel système sont les coordonnées des points d'intersection des deux droites (D) et (D') d'équations respectives $ax+by=c\ et\ a'x+b'y=c$

- Si $\Delta\neq 0$ les 2 droites se coupent en un point de coordonnées (x ;y) solution du système
- Si , $\Delta=0, \Delta_x\neq 0\ ou\ \Delta_y\neq 0$ (D) et (D') sont parallèles non confondues
- Si $\Delta=0, \Delta_x=\Delta_y=0$ les 2 droites sont confondues

2e méthode : Substitution

On isole l'une des inconnues dans l'une des équations et on la « porte » dans l'autre équation

3e méthode : Elimination

Soit à résoudre le système $\begin{cases} ax+by=c\ \ (L_1) \\ a'x+b'y=c'\ (L_2) \end{cases}$

$a'\times L_1$ donne $aa'x+a'by=a'c$

$a\times L_2$ donne $aa'x+ab'y=ac'$

Par soustraction on a $(a'b-ab')y=a'c-ac'\ \ (L'_2)$

Le système est équivalent à $\begin{cases} ax+by=c \ (L_1) \\ (a'b-ab')y=a'c-ac' \ (L'_2) \end{cases}$

Exemple : Résoudre le système (S) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$

En remplaçant la deuxième équation par la somme des deux équations , nous obtenons le système : $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x=4 \end{cases}$ équivalent à (S). Ce qui donne, en simplifiant

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x=2 \end{cases}$$

On a alors : $S=\{(2;1)\}$

- Si la méthode aboutit à un système de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ 0\cdot x=0 \end{cases}$, le système

est équivalent à (L_1) et on a une infinité de solution $S=\left\{\left(\lambda;\dfrac{c-\lambda}{a}\right)\right\}$

- Si on a $\left.\begin{matrix} ax+by=c \\ 0\cdot x=c'' \end{matrix}\right\}$ $avec\ c''\neq 0 \Rightarrow S=\phi$

3. Système de 3 équations à 3 inconnues :

Soit à résoudre le système :

(S_1) $\begin{cases} ax+by+cz=d \quad (L_1) \\ a'x+b'y+c'z=d' \quad (L_2) \\ a''x+b''y+c''z=d'' \quad (L_3) \end{cases}$

La meilleure méthode (et c'est celle du programme) est celle dite de Pivot de Gauss.

Description (simplifiée) de la méthode :

1ère étape : Elimination

On élimine à l'aide de (L_1) une des inconnues, par exemple x dans L_2 et L_3

On obtient alors un système (S_2) équivalent à (S_1), de la forme

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \quad (L_1) \\ b'_1y+c'_1=d'_1 \quad (L'_2) \\ b''_1y+c''_1z=d''_1 \quad (L'_3) \end{cases}$$

2e étape :

A l'aide de (L'_2) on élimine dans (L'_3) l'une des inconnues. On obtient alors un système de la forme :

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ b'_1y+c'_1=d'_1 \\ c''_2z=d''_2 \quad (L''_3) \end{cases}$$ équivalent à (S_1)

3e étape : substitution remontante

On détermine z à partir de (L"3), puis on substitue dans (L"2)
On refait les mêmes opérations pour y et x.

Exemple : Résoudre

$$\begin{cases} x+y+z=3 & (L_1) \\ x-y+2z=2 & (L_2) \\ x-2y-z=-2 & (L_3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (L_1)\rightarrow \\ (L_1-L_2)\rightarrow \\ (L_1-L_3)\rightarrow \end{array} \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y-z=1 \ (L'_2) \\ 3y+2z=5 \ (L'_3) \end{cases}$$

$$(2L'_2-L'_3)\rightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y-z=1 \\ 7y \quad =7 \end{cases}$$

$$ce\ qui\ donne \begin{cases} y=1 \\ 2-z=1 \\ z=1 \\ x=1 \end{cases} \qquad d'où \quad S=\{(1,1,1)\}$$

Remarques :

- Si la méthode conduit à un système de la forme $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ b'_1\,y+c'_1\,z=d_1 \\ 0\cdot z=d''_2 \end{cases}$ avec $d''_2\neq 0$, alors $S=\varnothing$
- Et si on obtient un système de la forme $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ b'_1\,y+c'_1\,z=d_1 \\ 0\cdot z=0 \end{cases}$, le système admet une infinité de solutions ; on prend l'une des inconnues comme paramètre et on exprime les autre en fonctions de ce paramètre. Un tel système est dit lié, l'une des équations est une combinaison linéaire des 2 autres.

IV. EQUATIONS ET INEQUATIONS IRRATIONNELLES

1. Equations irrationnelles :

Une équation est dite irrationnelle si l'inconnue figure sous au moins un radical.

Exemples : $2\sqrt{x-1}+2=x$ est une équation irrationnelle.

mais $x\sqrt{2}-3=0$ ne l'est pas.

On rappelle que si a et b sont positifs, $a^2=b^2 \Leftrightarrow a=b$

a. Equation du type $\sqrt{f(x)}=g(x)$

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=[g(x)]^2 \\ et \;\; g(x)\geq 0 \end{cases}$$

Démonstration :si $\sqrt{f(x)}=g(x)$ alors $\begin{cases} f(x)=[g(x)]^2 \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$ (Car sinon, on n'aurait pas l'égalité)

Réciproquement, si $f(x)=[g(x)]^2$ et $g(x)\geq 0$ alors $f(x)\geq 0$ et $\sqrt{f(x)}=\sqrt{[g(x)]^2}=g(x)$

Exemple : Résoudre (E) : $\sqrt{8-x}-x+2=0$

$$\sqrt{8-x}-x+2=0 \Leftrightarrow \sqrt{8-x}=x-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8-x=(x-2)^2 \\ x-2\geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8-x=x^2-4x+4 \\ x\geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-4=0 \\ x\geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-4)=0 \\ x\geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S=\{4\} \;\; car \;\; -1<2$$

b. Equation du type $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$$

Exemple : (E) $\sqrt{x^2+x-14}=\sqrt{1-x}$

$$\text{(E)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-14=1-x \\ 1-x\geq 0 \end{cases}$$

$$x'=\frac{-1-4}{1} \qquad x''=\frac{-1+3}{1}$$

$$x'=-5 \qquad x''=3$$

$$x\leq 1 \qquad S=\{-5\}$$

2. Inéquations irrationnelles :

On rappelle que si a et b sont positifs, $a\geq b \Leftrightarrow a^2\geq b^2$

Considérons une équation $f(x) \geq g(x)$ et soient D_f l'ensemble de définition de f, D_g l'ensemble de définition de g et $D = D_f \cap D_g$

- si D_1 est la partie de D sur laquelle $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$ on a sur D_1 et D_1 seulement , $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^2 \geq [g(x)]^2$
- sur D_2, complémentaire de D_1 dans D, il suffit de voir si l'inégalité est vérifiée ou non.

Exemple : Résoudre l'inéquation,

$\sqrt{2(x+1)} \geq x-2$

$D = \{x \in R / 2(x+1) \geq 0\} = [-1;+\infty[$

$\sqrt{2(x+1)} \geq 0$ sur D

$x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2;+\infty[$

$D = [-1;2[\cup [2;+\infty[$

- *Sur* $[-1;2[$ l'inégalité est toujours vérifiée car $x-2<0$ et $\sqrt{2(x+1)} \geq 0$
  Donc, tous les réels de cet intervalle sont solutions $S' = [-1;2[$
- Sur $[2;+\infty[$ $\sqrt{2(x+1)} \geq 0$ $x-2 \geq 0$

Donc ;$2(x+1) \geq (x-2)^2$

$x^2 - 6x + 2 \leq 0$

$\Delta' = 3^2 - 2 = 7$

$x' = 2 - \sqrt{7}$ et $x'' = 3 + \sqrt{7}$

$x^2 - 6x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [3-\sqrt{7} ; 3+\sqrt{7}]$

$S'' = [2 ; +\infty[\cap [3-\sqrt{7} ; 3+\sqrt{7}] = [2 ; 3+\sqrt{7}]$

$S = S' \cup S'' = [1 ; 2[\cup [2 ; 3+\sqrt{7}]$

$S = [-1 ; 3+\sqrt{7}]$

EXERCICES

Exercice 1	Exercice 2
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :	**Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :**
1) $-x^2 - 4x + 5 \geqslant 0$	**1)** $x^4 + x^2 + 1 = 0$
2) $x^2 + x - 3 \geqslant 0$	**2)** $3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$
3) $-3x^2 + 4x - 2 > 0$	**3)** $\sqrt{2x-1} = 1 - 2x$
4) $(2x-3)(-2x^2+5x+3) > 0$	**4)** $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$
5) $\dfrac{1-4x}{x^2+x+1} \leqslant 0$	**5)** $\sqrt{x^2-8} = 2x - 5$

Exercice 3

Déterminer dans les cas suivants les réels x et y (s'ils existent) sachant que leur somme est égale à S et leur produit égal à P :

1) $S = 29$ et $P = 198$
2) $S = 200$ et $P = 9999$

CORRIGE

Exercice 1

1) $S = [-5;1]$
2) $S = \left]-\infty; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right[$
3) $S = \varnothing$
4) $S = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}; 3\right[$
5) $S = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

Exercice 3

1) $\begin{cases} x = 11 \\ y = 18 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 18 \\ y = 11 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 99 \\ y = 101 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 101 \\ y = 99 \end{cases}$

S={(11;18);(18;11)}

S={(99;101);(101;99)}

Exercice 2

1) $S = \varnothing$
2) $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; 1; -1\right\}$
3) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
4) $S = \{4;9\}$
5) $S = \left\{3; \frac{11}{3}\right\}$

Chapitre 4 : LIMITES D'UNE FONCTION

1. Limite en un point :

Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, f une fonction définie sur I sauf peut être en x_0 et $l \in R$.

- On dit que f admet l comme limite en x_0, ou que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0, si, lorsque x prend des valeurs très proches de x_0, les nombres $f(x)$ deviennent très proches de l (ils finissent par appartenir à l'intervalle $]l-\alpha; l+\alpha[$, aussi petit que soit le réel positif α)

  On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x_0} f = l$

- On dit que la limite de f en x_0 est $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si lorsqu'on donne à x des valeurs de plus en plus proches de x_0, $f(x)$ prend des valeurs indéfiniment grandes. (f(x) peut être plus grand que n'importe quel nombre M, aussi grand soit-il, pourvu que x soit assez proche de x_0)

Exemple : $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

x	10^{-1}	10^{-2}	10^{-10}	10^{-100}
f(x)	10	100	10^{10}	10^{100}

Quand x prend des valeurs très proches de 0, f(x) devient indéfiniment grande donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

On dit que la limite de f en x_0 est $-\infty$ si $\lim\limits_{x_0} - f(x) = +\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

2. Limite à l'infini :

On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si lorsqu'on donne à x des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ devient très proche de l .

On écrit $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l$

Exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ devient indéfiniment grand

On écrit $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to +\infty} (-f(x)) = +\infty$

3. Fonctions de référence :

- $f(x) = x$

  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0 \quad (x_0 \in R)$

- $f(x) = a \quad (a \in R)$

  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = a$

  $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = a$

  $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$

- $f(x) = \frac{1}{x}$

$$D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

4. Limite à gauche – limite à droite :

- Soit une fonction définie sur $]x_0, x_0+\alpha[$ $\alpha \in R_+^*$; on dit que l est la limite de f à droite en x_0 si l est la limite de f(x) quand x tend vers x_0 par valeurs supérieurs, c'est-à-dire quand x tend vers x_0 et $x > x_0$.
  On écrit $l = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$
- Si f est définie sur $]x_0-\alpha; x_0[$, on dit que l est la limite de f à gauche de x_0 si l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 par valeurs inférieurs, c'est-à-dire quand x tend vers x_0 et $x < x_0$.
  On écrit $l = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$$

5. Opérations sur les limites

- **Limite d'une somme :**

lim f	lim g	lim (f+g)
l	l'	l+l'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée
l	∞	∞

- **Limite d'un produit :**

lim f	lim g	lim (f.g)
l	l'	l.l'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$l \neq 0$	∞	∞
0	∞	Forme indéterminée

- **Limite d'un quotient :**

lim f	lim g	lim (f/g)
l	$l' \neq 0$	l/l'
∞	∞	Forme indéterminée

l	∞	0
0	0	Forme indéterminée
$l > 0$	0^+	$+\infty$
$l > 0$	0^-	$-\infty$
∞	0	∞

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=\dfrac{1^2+1}{1}=2$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x}+x\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x+1}{x^2-x-2}\right)=+\infty$

Remarques :

Lorsque la limite d'une fonction est de la forme $\dfrac{l}{0}$ où $l \neq 0$, alors le résultat est ∞. Pour savoir si c'est $+\infty$ *ou* $-\infty$, on étudie le signe du dénominateur.

Exemple : $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=-\infty$

Limite d'une fonction irrationnelle :

- Si $f(x) \geq 0$ dans un intervalle ouvert contenant x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ alors

  $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=+\infty$

♦ *Les formes indéterminées :*

Limite d'un polynôme :

La limite d'une fonction polynôme quand x tend vers l'infini, est égale à la limite de son terme du plus haut degré.

Exemple :

$f(x)=x^2-x+1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left[1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2=+\infty$

Limite d'une fonction rationnelle

La limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur (quand x tend vers l'infini)

Exemple : $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^3-1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x^3-1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{F.I}$$

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(2+\frac{1}{x^2})}{x^3(1-\frac{1}{x^3})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Si la limite d'une fonction rationnelle en x_0 est de la forme $\frac{0}{0}$, on met $x-x_0$ en facteur et on simplifie

Exemple : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \frac{0}{0} = \text{F.I}$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1} (x+1) = 2$$

- ***Limite d'une fonction irrationnelle***

Si la limite d'une fonction irrationnelle est de la forme $\frac{0}{0}$ ou $+\infty-\infty$, on lève l'indétermination en utilisant l'expression conjuguée..

Si elle est de la forme $\frac{\infty}{\infty}$, on met les termes de plus hauts degrés en facteur

Exemples :

- $f(x) = x - \sqrt{x^2-1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - (+\infty) \quad \text{F.I}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{(x+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}} = 0^-$$

- $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2-1}}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})}{x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

Chapitre 5 : **DERIVABILITE**

1. Dérivabilité en un point –Nombre dérivé :

a. Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0. On dit que f est dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée nombre dérivé de f en x_0 ; on la note $f'(x_0)$

On a donc $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ou, en posant $x=x_0+h$,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Exemple : $f(x) = x^2 + x - 1$

f est-elle dérivable en $x_0=1$?

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+x-1)-(1+1-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x+2)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 3$$

On a une limite finie, donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$

b. Dérivabilité à gauche – dérivabilité à droite

On dit que f est dérivable à droite en x_0 (respectivement à gauche) si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0^+ (respectivement vers x_0^-)

Les limites lorsqu'elles existent, sont appelées respectivement nombre dérivé à gauche et nombre dérivé à droite de x_0, et notés $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$

$$f_d'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ et } f_g'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$, lorsqu'elles sont finies

Théorème :

Pour qu'une fonction f soit dérivable en x_0 ; il faut et il suffit que les nombres dérivés à gauche et à droite soient finis et égaux, c'est-à-dire si :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ (finie)}$$

2. Dérivabilité sur un intervalle :

f est dérivable sur $]a,b[$ si elle est dérivable en chaque point de cet intervalle.

f est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à gauche en b et dérivable à droite en a.

Théorème :

Si f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0.

Démonstration : f est dérivable en x_0 donc

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ est un réel } l$$

Posons $\begin{cases} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l \text{ si } x \neq x_0 \\ f(x_0) = 0 \end{cases}$

On a $f(x) = [f(x) + l](x - x_0) + f(x_0)$

Donc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x_0) + f(x)(x - x_0) + l(x - x_0)]$$

$$= \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lim_{x \to x_0} f(x)(x - x_0) + \lim_{x \to x_0} l(x - x_0)$$

Or $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)(x - x_0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} l(x - x_0) = 0$

donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

d'où la continuité de f en 0

3. Fonction dérivée :

a. Définition :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On appelle fonction dérivée de f (ou dérivée de f) sur I la fonction notée f', qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x.

$$f' : x \mapsto f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

b. Dérivée des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$

a $(\in R)$	0
x	1
x^2	$2x$
$x^n \quad (n \in IN^*)$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

__Démonstration :__

- Si f(x)=a quel que soit $x \in R$.

  f est constante $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a-a}{h} = 0$

  donc $f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$

- Si f(x)=x

  $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

- Si $f(x) = x^2$

  $$f'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(x+h)^2-(x^2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$$

  $$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2x+h = 2x$$

- Si $f(x) = x^n$

  $$f'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[C_n^0 x^n h^0 + \cdots + C_n^{n-1} x h^{n-1} + C_n^n h^n - x^n\right]$$

  $$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[C_n^1 x^{n-1} h + \cdots + C_n^n h^n\right] = \lim_{h\to 0^+} (C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} h + \cdots + C_n^n h^{n-1})$$

  $$= C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}$$

- Si $f(x) = \frac{1}{x}$

  $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

- Si $f(x) = \sqrt{x}$

  $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

__Exemple :__ Calculer le nombre dérivé de $f : x \to x^3$ en 2

$f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2, f'(2) = 12$

c. Opérations sur les fonctions dérivées :

Théorème :

Si u et v sont des fonctions dérivables sur I alors $u + v$, $u \cdot v$ et $\lambda u \ (\lambda \in R)$ sont dérivables sur I. Si de plus, v ne s'annule pas sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I.

Et on a :

$$(u + v)' = u' + v'$$
$$(u \cdot v)' = vu' + u'v$$
$$(\lambda u)' = \lambda \cdot u'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

En particulier $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

Si u est dérivable et strictement positive sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable et

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Démonstration :

- u et v sont dérivables sur I, donc quel que soit $x_0 \in I$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \text{ et } \lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \text{ sont finies}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(u+v)(x) - (u+v)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0) - u(x_0) - v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} u'(x_0) + v'(x_0)$$

D'où

$$(u + v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$
$$(u + v)' = u' + v'$$

- $$\lim_{x \to x_0} \frac{(u.v)(x) - (u.v)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x).v(x) - u(x)v(x_0) + u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{u(x)[v(x) - v(x_0)] + v(x_0)[u(x) - u(x_0)]}{x - x_0}\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[u(x)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right] + \lim_{x\to x_0}\left[v(x_0)\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\right]$$

Puisque u et v sont dérivables, elles sont continues en x_0. Donc

$\lim_{x\to x_0} u(x) = u(x_0)$ et $\lim_{x\to x_0} v(x) = v(x_0)$

D'où $(uv)'(x_0)=u'(x_0).v(x_0) + u(x_0).v'(x_0)$

- Si v est constante, $v(x) = \lambda$ quel que soit x,

  $(u.v)' = (\lambda u)' = \lambda' u + \lambda u$

  or $\lambda' = 0$

  $(\lambda u)' = \lambda.u'$

- $$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{u}(x)-\frac{1}{u}(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{u(x)}-\frac{1}{u(x_0)}}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{u(x_0)-u(x)}{x-x_0}\times\frac{1}{u(x).u(x_0)}$$

$$= \frac{-u'(x_0)}{[u(x_0)]^2}$$

d'ou $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

- $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u\times\frac{1}{v}\right)' = u'\left(\frac{1}{v}\right) + \left(\frac{1}{v}\right)' u = \left(u'\times\frac{1}{v}\right) + \left(\frac{-v'}{v^2}\times u\right) = \frac{u'\times v - v'\times u}{v^2} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

- $$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{u(x)}-\sqrt{u(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{(x-x_0)(\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(x_0)})}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\times\frac{1}{\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(x_0)}}\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\times\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(x_0)}}$$

$$= u'(x_0).\frac{1}{2\sqrt{u(x_0)}}$$

Conséquences :

- Si u est dérivable, u² est dérivable ($u^2 = u\times u$) et $(u^2)' = 2uu'$

Plus généralement, $u^n (n\in N)$ est dérivable et $(u^n)' = n.u^{n-1}u'$

- Toute fonction polynôme est dérivable sur R

- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.
- Si u est une fonction dérivable sur I, et tel que $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in J$, alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur J

Exercices

a) Montrer que $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$, $n \in N^*$

b) Soit $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, *avec* $ad - bc \neq 0$. Montrer que $f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$

Réponses

a) $u(x) \neq 0$

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-n.u^{n-1}.u'}{(u^n)^2} = \frac{-n.u^{n-1}.u'}{u^{2n}} = \frac{-nu'}{u^{2n}.u^{-n+1}}$$

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$$

b) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

$$f'(x) = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2}$$

$$f'(x) = \frac{acx + ad - acx - bc}{(cx+d)^2}$$

$$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

Théorème :

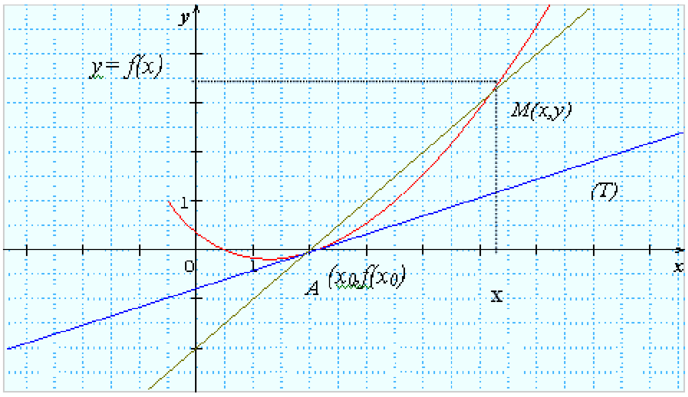
Quel que soit $n \in Z^*$, $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$

d. Dérivée seconde d'une fonction :

Si f est dérivable sur I et sa dérivée f ' est, elle aussi dérivable sur I, on dit que f est 2 fois dérivable sur I et la dérivée de f ', notée f'', est appelée dérivée seconde de f.

4. Application à la dérivée.

a. Tangente à la courbe :



Soit (ζ_f) la courbe représentative d'une fonction f et $A(x_0;f(x_0))$ et $M(x, f(x))$ deux points de (ζ_f). Considérons la droite (AM) ; elle a pour pente (ou coefficient directeur) $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Si on fait tendre M vers A, x va tendre vers x_0 et la droite (AM) va tendre vers une position limite (T) appelé droite tangente à la courbe au point A, et sa pente tend vers $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x)$ (pente de (T)) : c'est la tangente de l'angle que fait la droite (T) avec l'axe des abscisses.

Considérons un point M(x,y) de (T), on doit avoir :

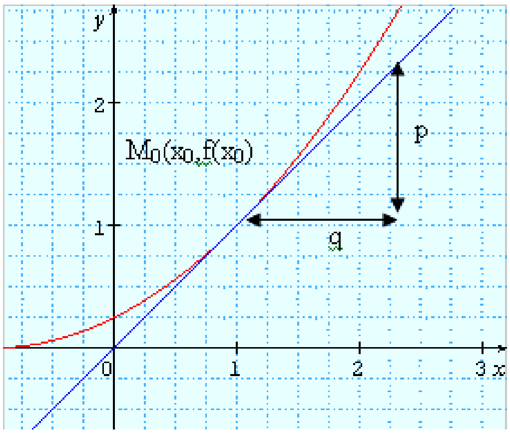
$$\tan\alpha = f'(x_0) = \frac{y-f(x_0)}{x-x_0}$$

ou $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

(équation de la tangente (T) à la courbe (ζ_f) au point $A(x_0;f(x_0))$)

Remarques :

- Si $f'(x_0) = \dfrac{p}{q}$, alors



- Si $f'(x_0) = 0$, on a une tangente parallèle à l'axe des abscisses(tangente horizontale).

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$, f n'est pas dérivable en x_0, on a une tangente parallèle à l'axe des ordonnées
- Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, (f n'est pas dérivable en x_0) on a deux demi tangentes à gauche et à droite de M_0, de pentes respectives $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$. On dit que l'on a un point anguleux.

b. Sens de variation :

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si quel que soit $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I
- Si quelque soit $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I
- Si quel que soit $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I

Si l' inégalité est stricte. f est strictement croissante (respectivement décroissante)

c. Extremums relatifs

Théorème :

Si f est dérivable sur I ouvert, et $x_0 \in I$, et si f admet un extremum en x_0, alors $f'(x) = 0$

La réciproque n'est pas vraie

Exemple :

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$ mais on n'a ni maximum, ni minimum en 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		↗	0	↗	

Théorème :

f admet un extremum en x_0 si et seulement si f ' s'annule et change de signe en x_0

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

5. Plan d'étude d'une fonction :

- Domaine de définition
- Etude de la parité –Périodicité
  - Si f est une fonction paire ou impaire, on fait l'étude sur $D_e = D_f \cap [0;+\infty[$ ou $D_f \cap]-\infty;0]$ et on complète par symétrie
  - Si f est périodique de période T, on fait l'étude sur un intervalle de longueur T puis on complète par translation de vecteur $kT\vec{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}$
- Limites aux bornes de D_e
- Dérivée
- Tableau de variation
- Courbe

EXERCICES

Exercice 1 :

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$
2) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x}{2}$
3) $f(x) = (\sqrt{x} + 1) \times (x^2 - 2)$
4) $f(x) = (2x - \sqrt{x}) \times (x + 4)$
5) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 4x}$
6) $f(x) = \dfrac{-3}{2x - 1}$
7) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 2}$
8) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{2x - 3}$
9) $f(x) = (-5x^2 + 1)^2$

Exercice 2 :

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ avec $a = 1$.
2) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ avec $a = 3$.
3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ avec $a = 9$.

M

Exercice 3 :

CORRIGE

Exercice 1

1) $f'(x) = -12x^2 + 4x - 3$

2) $f(x) = \frac{1}{2} \times (3x^2 - 4x)$; $f'(x) = \frac{1}{2} \times (6x - 4) = 3x - 2$

3) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x^2 - 2) + (\sqrt{x}) \times (2x)$ (forme fg)

-

4) $f'(x) = \left(2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \times (x+4) + (2x - \sqrt{x}) \times 1$ (forme fg)

5) $f'(x) = -\frac{(-4)}{(1-4x)^2} = \frac{4}{(1-4x)^2}$ (forme $\frac{1}{f}$)

6) $f(x) = -3 \times \frac{1}{2x-1}$; $f'(x) = -3 \times \frac{(-2)}{(2x-1)^2} = \frac{6}{(2x-1)^2}$ (forme $\frac{1}{f}$)

7) $f'(x) = \frac{2 \times (3x+2) - (2x-1) \times 3}{(3x+2)^2} = \cdots = \frac{7}{(3x+2)^2}$ (forme $\frac{f}{g}$)

8) $f'(x) = \frac{(6x-4)(2x-3) - 2(3x^2 - 4x + 1)}{(2x-3)^2} = \cdots = \frac{6x^2 - 18x + 10}{(2x-3)^2}$ (forme $\frac{f}{g}$)

9) $f'(x) = 2 \times (-10x) \times (-5x^2 + 1) = -20x(-5x^2 + 1)$ (forme f^2)

Exercice 2

1) $T : y = f(1) + f'(1)(x-1)$; $f(1) = 3$; $f'(x) = 6x - 1$; $f'(1) = 5$; $T : y = 5x - 2$

2) $T : y = f(3) + f'(3)(x-3)$; $f(3) = 7$; $f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$; $f'(3) = -5$; $T : y = -5x + 22$

3) $T : y = f(9) + f'(9)(x-9)$; $f(9) = \frac{1}{3}$; $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times x - \sqrt{x}}{x^2} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$; $f'(9) = \frac{-1}{54}$; $T : y = \frac{-1}{54}x + \frac{1}{2}$

2

M

Exercice 3

Rappel : le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a est égal à $f'(a)$.

La dérivée de f est définie par : $f'(x) = \dfrac{(-2x+2)x-(-x^2+2x-1)}{x^2} = \dfrac{-x^2+1}{x^2}$.

1) La tangente est horizontale si et seulement si son coefficient directeur est nul.
   On résoud donc l'équation $f'(x)=0$. On obtient $x=1$ ou $x=-1$.

2) Cela revient à résoudre l'équation $f'(x)=-2$ qui n'admet pas de solutions. Il n'y a donc pas de points répondant à la question.

3) Les coefficients directeurs de la tangente et de la droite doivent être égaux.
   Cela revient donc à résoudre l'équation $f'(x)=-\frac{2}{3}$. Le calcul donne $x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$.

Chapitre 6 :FONCTIONS RATIONNELLES-ASYMPTOTES

1. Asymptotes

a. Branches infinies:

La courbe représentative d'une fonction f admet une branche infinie si l'une des coordonnées d'un point M(x,y) de cette courbe peut tendre vers l'infini. C'est-à-dire si on a l'un des cas suivants

$\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

b. Asymptotes :

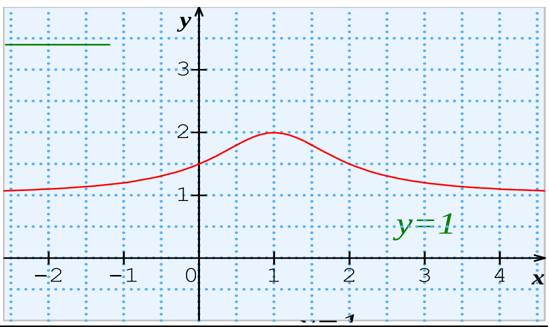
i. Définition :

Une droite (D) est une asymptote à la courbe (ζ) si la distance d'un point M(x ;y) de la courbe à la droite (D) tend vers 0 quand M s'éloigne indéfiniment sur la branche infinie.

ii. Asymptote horizontale (parallèle à l'axe des abscisses):

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation. y = l est une asymptote horizontale

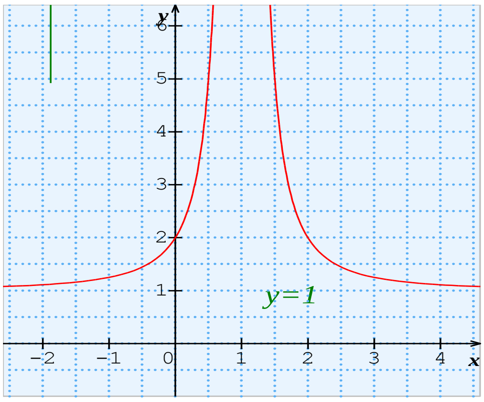
Figure :



iii. Asymptote verticale (parallèle à l'axe des ordonnées):

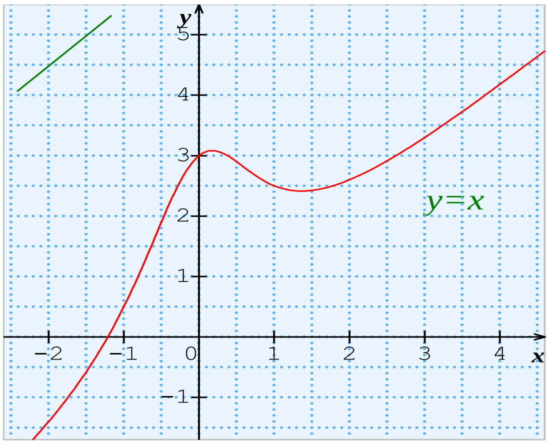
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, alors la droite d' équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f

Figure :



iv. Asymptote oblique :

La courbe (ζ_f) admet une asymptote oblique si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et s'il existe deux réels a et b tels que $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$; l'équation de l'asymptote est alors y= a x + b



Détermination de a et b :

Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et s'il existe deux réels a et b tel que $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x) - (ax + b)}{x}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - a = 0 ,$$

Donc, $a = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ lorsque cette limite existe.

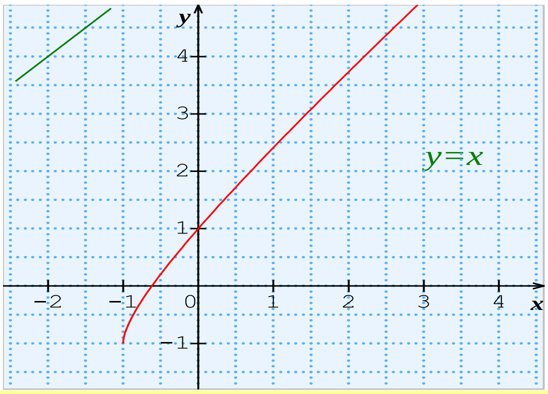
$\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ donc $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b$ si cette limite existe.

Remarques

- Si f(x) est de la forme $f(x) = \alpha x + b + \varphi(x)$ ou φ est telle que $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est une asymptote à la courbe.

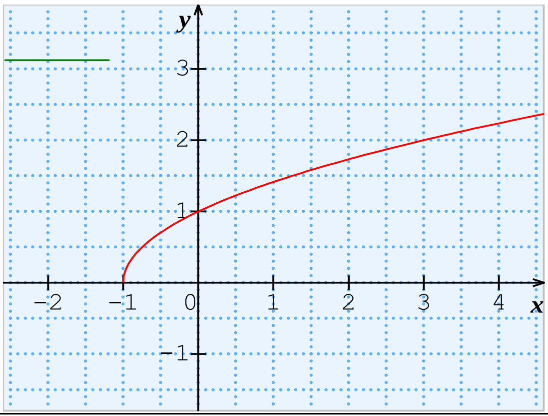
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ mais $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = \infty$, la courbe admet une branche infinie parabolique de direction asymptotique y = ax

Figure



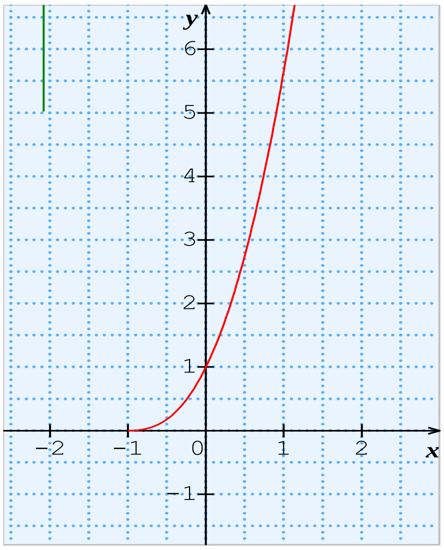
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ mais $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ la courbe n'admet pas d'asymptote mais une branche infinie parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.

Figure :



- Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, la courbe n'admet pas d'asymptote mais une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

Figure :



2. Fonctions homographiques

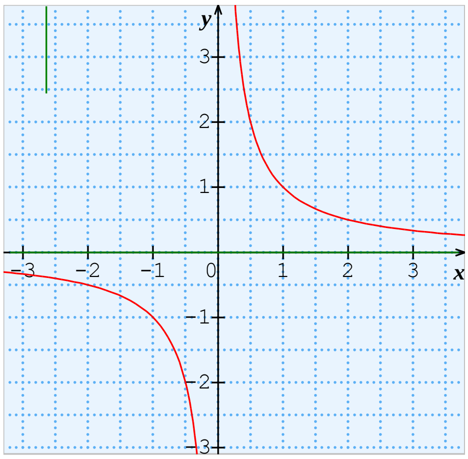
$\left(f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ avec } c \neq 0 \text{ et } ad - bc \neq 0 \right)$

1e exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$

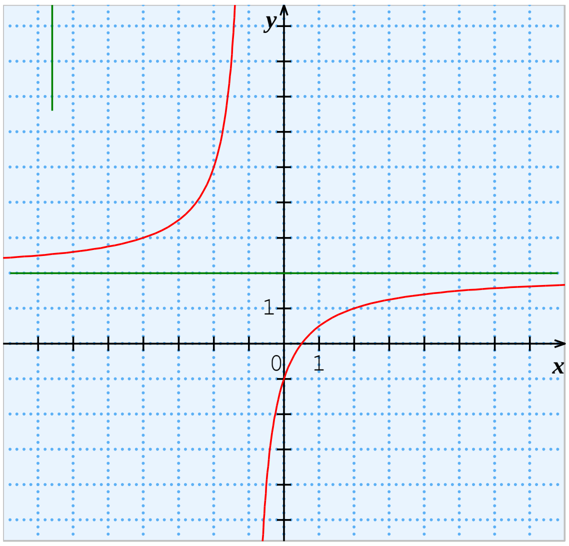
- $D = \left]-\infty;0\right[\cup \left]0;+\infty\right[$.
- Comme f est impaire, on peut réduire le domaine d'étude à $D_e = \left]0;+\infty\right[$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote parallèle à (y'Oy)

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote parallèle à (x'Ox)
- $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

x	0	$+\infty$
f'(x)	‖	-
f(x)	‖ $+\infty$	↘ 0



2e exemple : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$



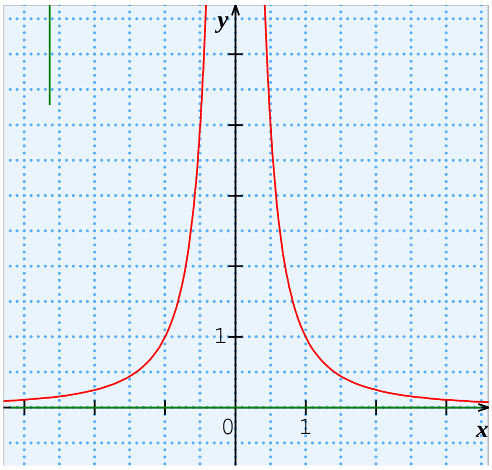
3. Fonctions du type $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ avec $a' \neq 0$

1e exemple $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

- $D = \left]-\infty;0\right[\cup \left]0;+\infty\right[$.
- Comme f est paire, on peut réduire le domaine d'étude à $D_e = \left]0;+\infty\right[$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote parallèle à (y'Oy)

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote parallèle à (x'Ox)
- $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

x	0		$+\infty$
f'(x)	‖	-	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	0

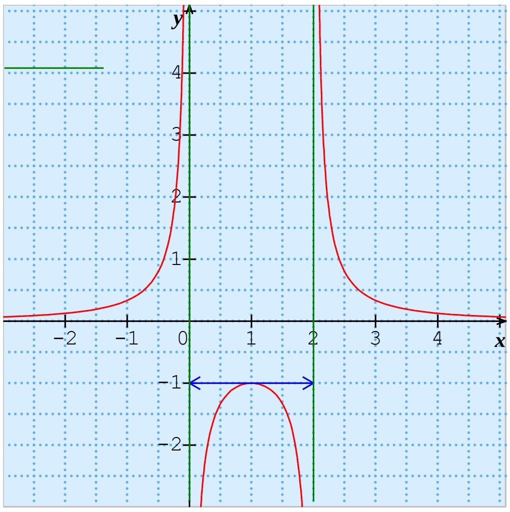


<u>*2e exemple*</u> : $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$

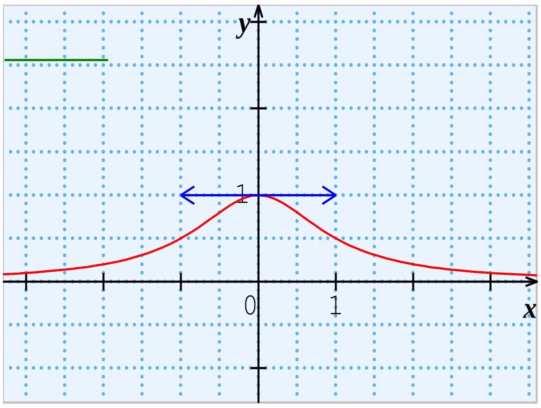
- $D_f =]-\infty;0[\,\cup\,]0;2[\,\cup\,]2;+\infty[$
- f n'est ni paire ni impaire
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale (parallèle) à (x'Ox) en $-\infty$ et en $+\infty$
  $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$. Donc la droite d'équation x=0
est une asymptote verticale (parallèle à (y'Oy)
  $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$. Donc la droite d'équation x = 2 est une asymptote verticale (parallèle à (y'Oy)
- $f'(x)=-\dfrac{2(x-1)}{(x^2-2x)^2}$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
2(x-1)		-		-	0	+		+	
$(x^2-2x)^2$		+	0	+		+	0	+	
f '(x)		+	‖	+	0	-	‖	-	
f(x)	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

<u>Courbe</u>



__3e exemple__ : $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$



4. Fonctions du type $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ avec $a \neq 0$ et $d \neq 0$

__1e exemple__ : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x}$

- $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
- $f(-x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{-x}$ et $-f(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{-x}$

  f n'est ni paire ni impaire.

  $D_e = D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
- *limites*

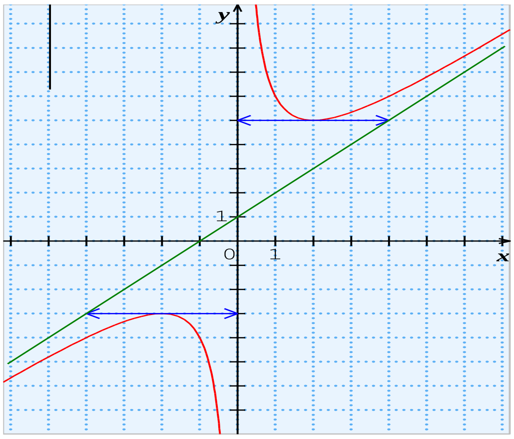
  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$		↗	-3	↘	‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

Tangentes horizontales en $x_0=-2$ et $x_1=2$

Courbe :



2e exemple : $f(x) = -x + \frac{1}{x}$

- $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
- $f(-x) = x - \frac{1}{x}$
  $-f(x) = x - \frac{1}{x}$ f est impaire.

  $D_e =]0;+\infty[$
- *Limites*

  $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$; donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

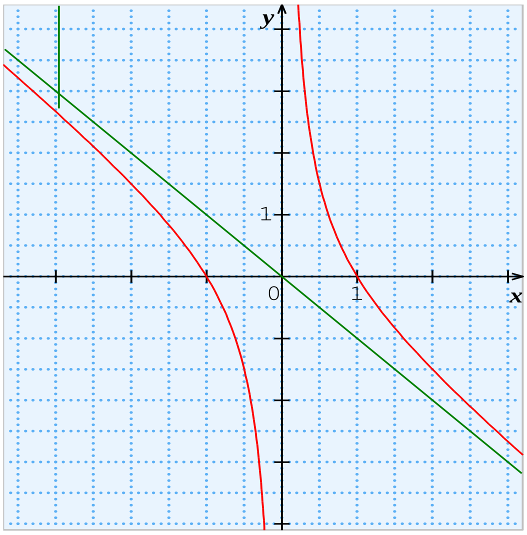
  $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

  donc la droite d'équation y = x est une asymptote oblique

- $f'(x) = -1 + \left(\frac{1}{x^2}\right) = -1 - \frac{1}{x^2}$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	-
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↘ $+\infty$

Courbe



Chapitre 7 :CETUDE DE QUELQUES FONCTIONS

1er exemple : $f(x) = x^2$

- $D_f = R =]-\infty;+\infty[$
- $Parité: f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

  f est paire $D_e = [0;+\infty[$
- *limites*

  $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- *Dérivée*

  $f'(x) = 2x$
- *Tableau de variation :*

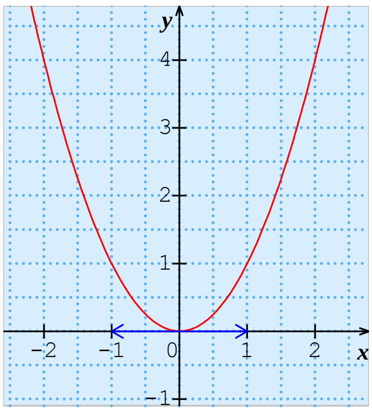
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

  $f(x) = x^2$

x	0	$+\infty$
f '(x)	0 +	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

$f'(0)=0$, donc on a une tangente horizontale en (0,0)

x	1	2
y	1	4



<u>2e exemple :</u> $f(x)=-x^3+3x+1$

- $D_f = R$
- *Parité* :

$$f(-x)=+x^3-3x+1$$

$$-f(x)=+x^3-3x-1$$

Donc f n'est ni paire ni impaire

- *Limites :*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$f'(x)=-3x^2+3$$

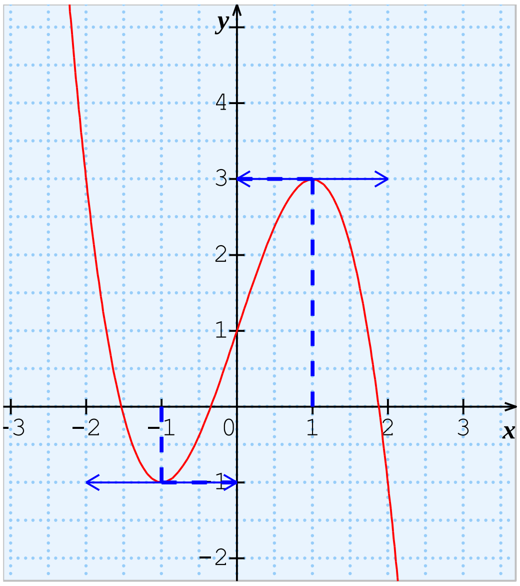
- *Tableau de variation* :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \; ou \; x=-1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

-2	-1	1	2
3	-1	3	-1

Courbe :



3e exemple : $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

- $Df = R$
- *Parité,*

  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ donc f est paire

  $D_e = [0;+\infty[$
- *Limites*

  $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- *Dérivée*

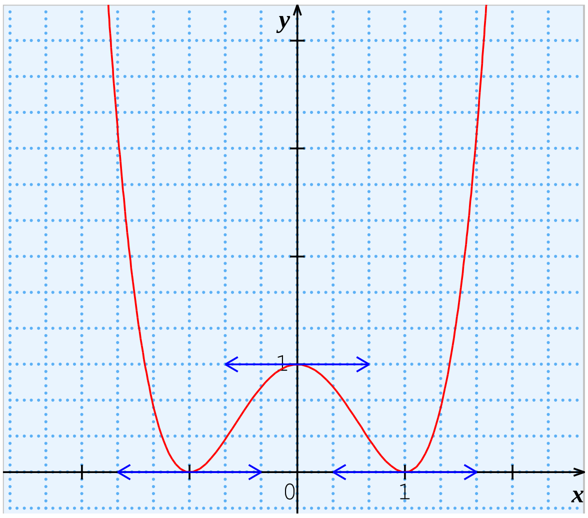
  $f'(x) = 4x^3 - 4x$
- *Tableau de variation :*

$f'(x) = 0$ si et seulement $4x(x^2 - 1) = 0$ donc si $x = 0 \; ou \; x = 1 \; ou \; x = -1$

La courbe admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses 0 et 1,

x	0		1		$+\infty$
f '(x)	0	-	0	+	
f(x)	1	↘	0	↗	$+\infty$

X	-1	1	2	-2
Y	0	0	9	9



4e exemple : $f(x) = x^3 + x$

- Etudier les variations de f
- Montrer que le point $M_0(0\ ;0)$ est un point d'inflexion
- Donner la droite (T) tangente à la courbe représentative (ζ) de f en M_0
- Tracer dans un repère orthogonal $(0, \vec{i}\,; \vec{j})$ la courbe (ζ) et la droite (T)

- $Df = R$
- *Parité :* $f(-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$

  f est donc impaire , $D_e = [0;+\infty[$
- *Limites*
  - $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) = 3x^2 + 1$

- *Tableau de variation :*

  $f'(x)$ ne peut pas être égal à 0

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

- $M_0(0\ ;0)$ est un point d'inflexion si f'' s'annule en x_0 et change de signe en x_0

  $f''(x) = 6x$

  $f''(0) = 0$

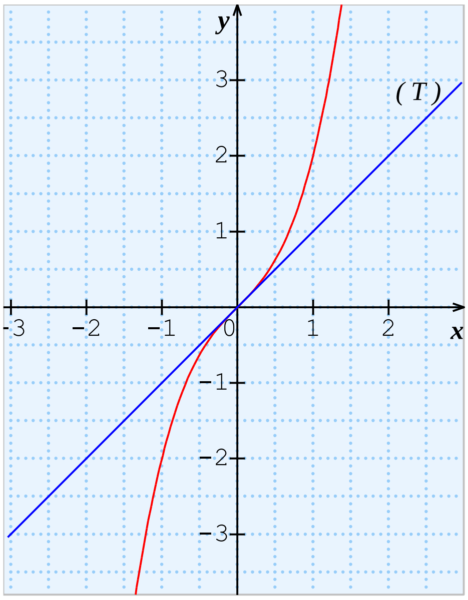
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		-	0	+	

Donc M_0 est un point d'inflexion

- ♦ Equation de la tangente (T) en M_0 : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$

ou $(T): y = x$

Courbe :



FONCTIONS IRRATIONNELLES

1e exemple : $f(x) = \sqrt{x}$

- $D_f = [0;+\infty[$
- f n'est ni paire, ni impaire
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$
  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
- *Dérivabilité :*
- Sur $]0\ ;+\infty[$, $x > 0$, donc f est dérivable sur cet intervalle et

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour x >0

En 0,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x^2}}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}==+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0, et la courbe représentative de f admet une demi tangente verticale en 0

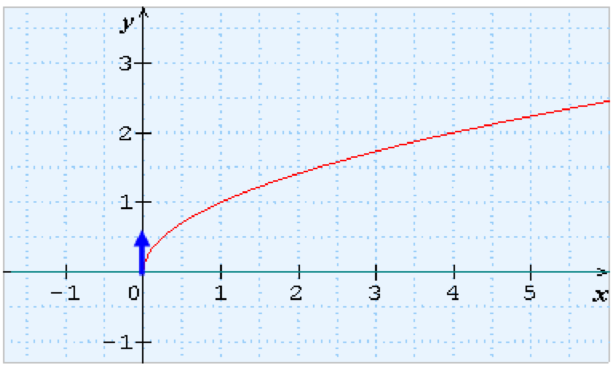
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖ +	
$f(x)$	‖ 0 ↗	$+\infty$

- *Branches infinies :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

Donc la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction asymptotique $(x'0x)$

<u>Courbe :</u>



<u>2^e exemple :</u>

- $D_f =]-\infty;0]$
- $\lim_{x\to 0} f(x)=0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
- *Dérivabilité* : <u>sur $]-\infty;0[$</u>, f est dérivable et $f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$

<u>en 0</u> :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+\sqrt{-x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x} + \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x}$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x\sqrt{-x}}$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{\sqrt{-x}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0, et la courbe de f admet en 0 une demi tangente verticale

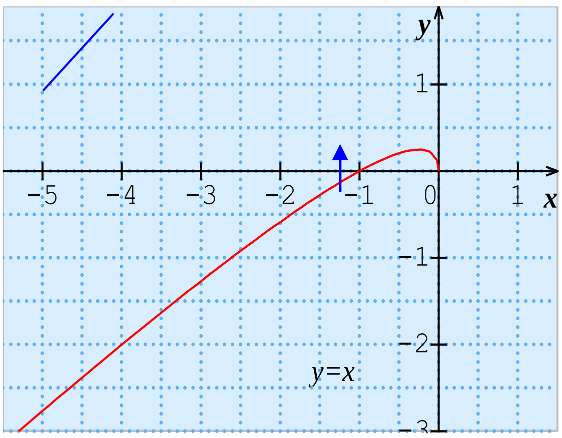
- <u>branches infinies</u>

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x+\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{\sqrt{-x}}{x}\right) = 1(=a)$$

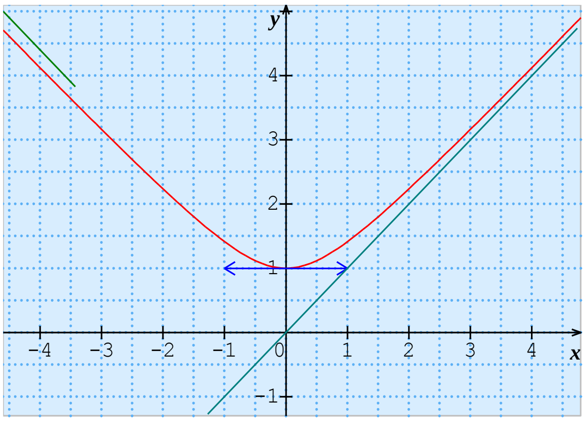
$$\lim_{x\to -\infty} [f(x)-ax] = \lim_{x\to -\infty} f(x)-x = \lim_{x\to -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$$

La courbe admet donc en $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction asymptotique y=x.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0



<u>3 e exemple</u> $f(x) = \sqrt{x^2+1}$



EXEMPLE DE FONCTION AVEC VALEURS ABSOLUES

$f(x) = |x^2 - 4|$

- $D_f = R$
- f est paire, $D_e = [0;+\infty[$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$
- Dérivabilité :

X	0		2		$+\infty$
x^2-4		-	0	+	
$\|x^2$-4$\|$		4-x^2	0	x^2-4	

Sur $[0;2[$, $f(x) = -x^2 + 4$

Elle est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = -2x$

Sur $]2;+\infty[$

f est dérivable et $f'(x) = 2x$

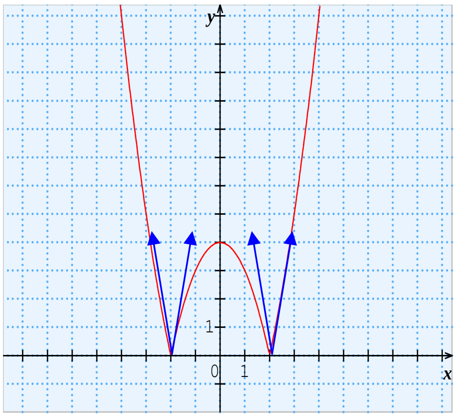
En 2 :

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}(x+2) = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^{++}} \frac{-x^2+4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} -(x+2) = -4$$

f n'est pas dérivable en 2 et la courbe représentative de f admet en ce point deux demi tangentes à gauche et à droite de pentes respectives
-4 et 4

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-2x	‖	2x	
$f'(x)$		- -4	‖	+4 +	
$f(x)$	4	↘	0	↗	$+\infty$



Chapitre 8 : **FONCTIONS ASSOCIEES**

1.-POSITION RELATIVE DE DEUX COURBES :

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I

Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I$ alors (ζ_f) est au dessus de (ζ_g) sur I

Conséquences :

- Si $f(x) \geq 0$ quel que soit $x \in D_f$ la courbe représentative de f est au dessus de l'axe des abscisses
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0^+$ la droite équation $y = ax + b$ est une asymptote et la courbe représentative de f est au dessus de cette asymptote.

2.- FONCTIONS ASSOCIEES :

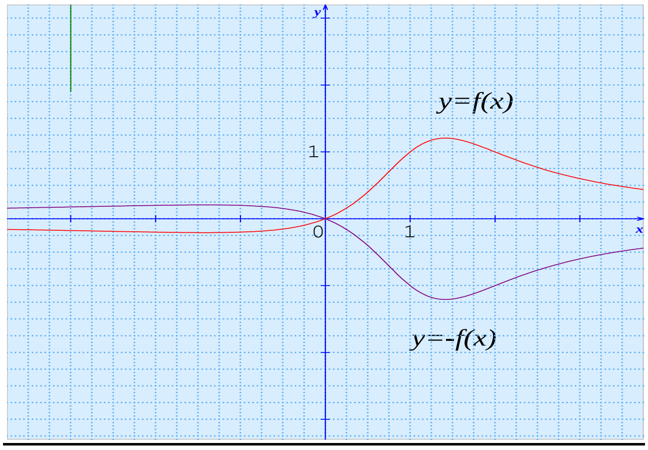
Soit une fonction f ;

- Si $g(x) = -f(x)$ la courbe de g se déduis de celle de f par symétrie par rapport à $(x'0x)$.

En effet, si $x \in D_f$ et $y = f(x)$, on a $-y = -f(x) = g(x)$

Donc si $\boldsymbol{M(x; y) \in (\zeta_f)}$ alors $\boldsymbol{M'(x, -y) \in (\zeta g)}$

Figure



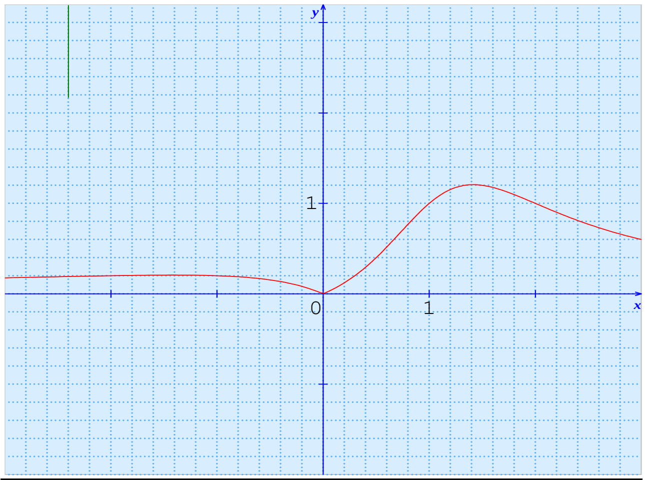
- Si $h(x) = |f(x)|$

  $h(x) = f(x)\ si\ f(x) \geq 0$

  $et\ \ h(x) = -f(x)\ \ si\ \ f(x) \leq 0$

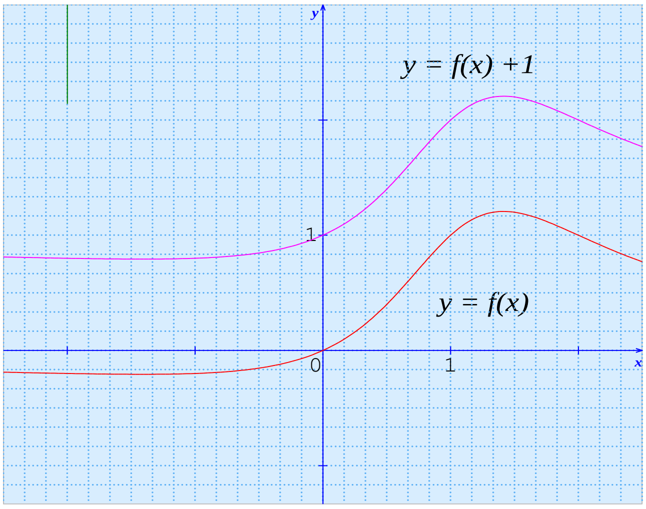
La courbe représentative de h est la réunion des parties de (ζ_f) et $(\zeta_{|f|})$ qui se trouvent au dessus de l'axe des abscisses.

Figure



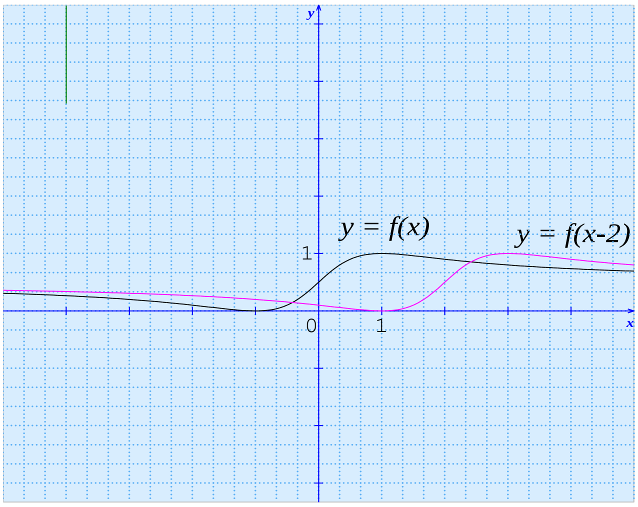
- Si $j(x) = f(x) + b\ , b \in R$ la courbe représentative de j se déduit de celle de f par translation de vecteur $b\,\vec{j}$

Figure :



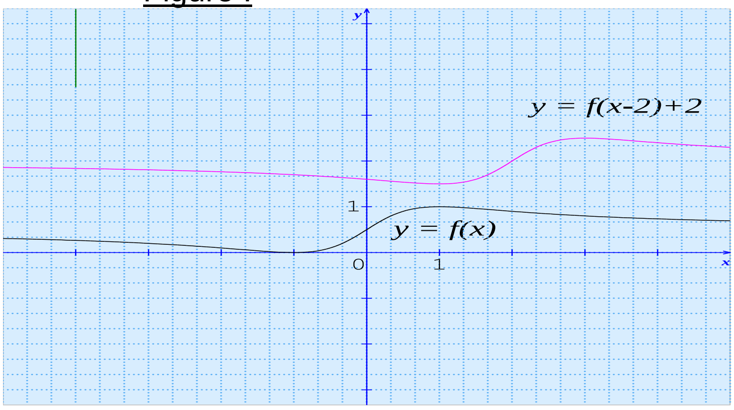
- Si $k(x) = f(x-a)$ la courbe représentative de k se déduit de celle de f par translation de vecteur a $\vec{i}$

Figure :



- si $l(x) = f(x-a)+b$, la courbe représentative de l se déduit de celle de f par translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$.

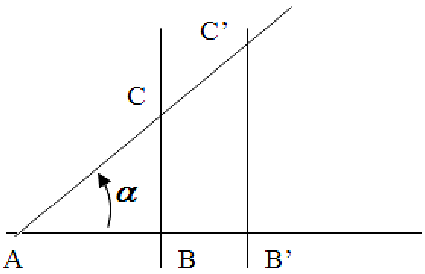
Figure :



CHAPITRE 9 : TRIGONOMETRIE

I - RAPPEL ET DEFINITIONS :

Figure :



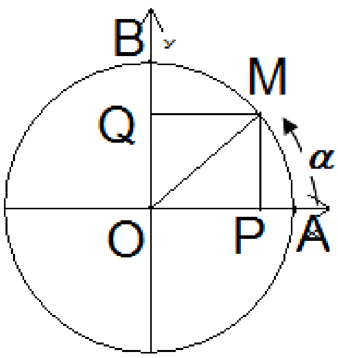
$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$$
$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$$
$$\tan\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$

1. Cercle trigonométrique :

Une unité de longueur étant choisie, on appelle cercle trigonométrique un cercle centré en un point 0, de rayon 1, et sur lequel on a choisi un point A comme origine pour la mesure des arcs, On lui associe le repère $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ avec $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ orienté dans le sens direct.

On prend l'axe (OA) comme origine de la mesure des angles.

Figure :



2. Mesure d'arcs – Mesure d'angles :

Prenons un point M du cercle trigonométrique.

$\overrightarrow{AM}$ désigne un arc orienté.

Le radian est l'arc dont la longueur est égale au rayon.

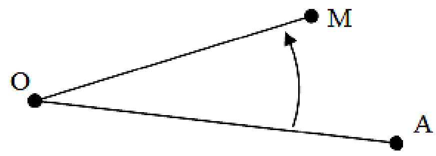
Un angle de 1 radian est un angle au centre qui intercepte un arc de 1 radian.

La mesure l de la longueur d'un arc est donnée par $l = R\alpha$ où R est le rayon et α la mesure en radian de l'angle correspondant.

3. Angles de deux vecteurs

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$ désigne un angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$

Figure :

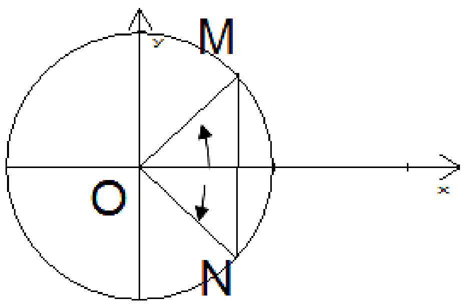


C'est aussi l'angle des deux demi-droites de même origine O.

4. Quelques propriétés des angles orientés :

- Deux angles orientés $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{ON})$ sont dits opposés si M et N sont symétriques par rapport à la droite (OA)

Figure :



- ***Relation de Chasles :***

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs

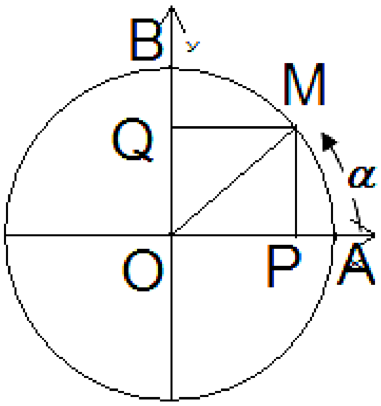
Quel que soit $\vec{w}$

$$(\vec{u};\vec{w}) + (\vec{w};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})$$

5. Fonctions circulaires :

On considère l'application φ qui, à tout angle α, fait correspondre le point M(x ; y) du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}) = \alpha$

Figure :



$\varphi(\alpha) = M \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) = \alpha$

On a alors

$$\cos\alpha = \frac{OP}{OM} = OP = x$$

$$\sin\alpha = \frac{PM}{OM} = PM = OQ = y$$

$$\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\sin\alpha)\vec{j}$$

$$\tan\alpha = \frac{PM}{OP} = \frac{AR}{OA} = AR$$

$$\varphi(\alpha + 2\pi) = M$$

$$\varphi(\alpha + 2k\pi) = M$$

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$$

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle OPM, on a

$OM^2=OP^2+PM^2$

$1 = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2$ ou $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

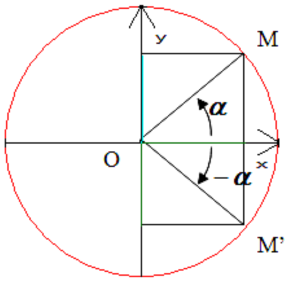
et $-1 \leq \sin\alpha < 1$ et $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

6. Angles associés :

i. Angles opposés :

Deux angles α et α' sont opposés si leurs images M et M' par φ sont symétriques par rapport à l'axe (OA) (on écrit $\alpha = -\alpha'$)

Figure :

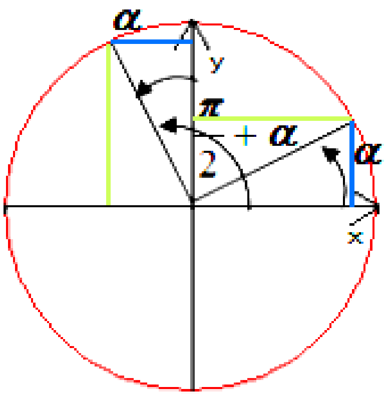


On a $\boxed{\begin{array}{l} \cos\alpha' = \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin\alpha' = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \tan\alpha = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \end{array}}$

ii. Angles supplémentaires :

α et α' sont supplémentaires si $\alpha + \alpha' = \pi$, donc si $\alpha' = \pi - \alpha$

Figure :

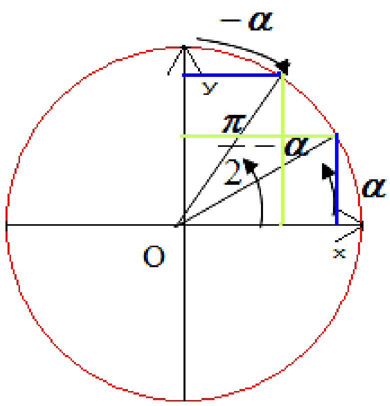


$\boxed{\begin{array}{l} \cos\alpha' = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \\ \sin\alpha' = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \\ \tan\alpha' = \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha \end{array}}$

iii. Angles complémentaires :

α et α' sont complémentaires, si $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$, donc si $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$

Figure :

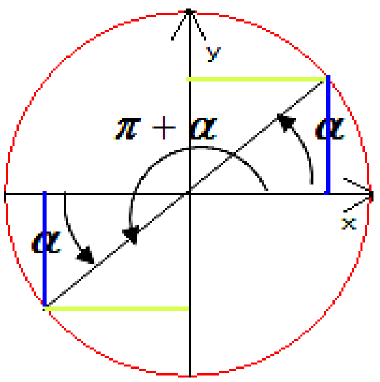


$$\cos\alpha' = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\sin\alpha' = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan\alpha' = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha} = \cot an\alpha$$

iv. Angles dont la différence est π

C'est-à-dire $\alpha - \alpha' = \pi$ ou $\alpha' = \pi + \alpha$

Figure :

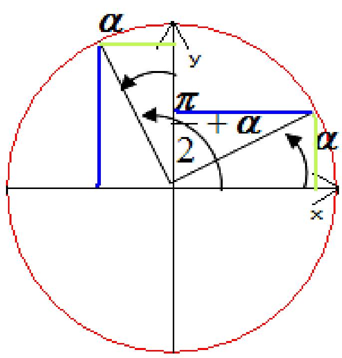


$$\cos\alpha' = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin\alpha' = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\tan\alpha' = \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

v. Angles dont la différence est $\frac{\pi}{2}$

C'est-à-dire $\alpha - \alpha' = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha' = \frac{\pi}{2} + \alpha$

Figure :



$$\cos\alpha' = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\sin\alpha' = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan\alpha' = \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

7. Angles remarquables :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

II- FORMULES DE TRANSFORMATION :

1. Formules d'addition :

Rappel : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u};\vec{v})$

Et si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'$

Soit M un point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = a$

$M(\cos a, \sin a)$

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$

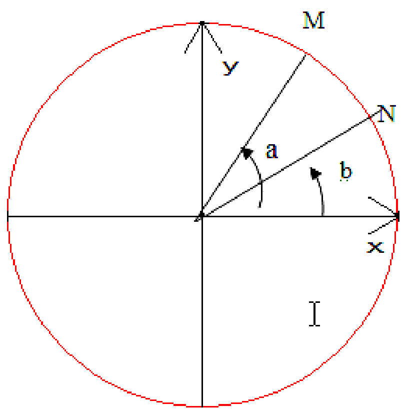
Considérons les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = a$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON}) = b$

Figure :

$M(\cos a, \sin a)$

$N(\cos b, \sin b)$

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$



$a - b = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$

D'une part , $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OM}\|\|\overrightarrow{ON}\|\cos(a-b)$ (1)

D'autre part, $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (2)

Comme $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{ON}\| = 1$,

(1) et (2) donnent $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

, On a donc :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$\cos(a+b) = \cos[a-(-b)]$

$= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$

d'où

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Puisque $\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

On a:

$\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) = \cos[(\frac{\pi}{2} - a) - b] = \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos b + \sin(\frac{\pi}{2} - a)\sin b$

$= \sin a \cos b + \cos a \sin b$ (car $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$)

$$\mathbf{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$$

$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b)\cos a$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Calcul de tan(a+b):

On suppose que $\cos(a+b) \neq 0$ et $\cos a . \cos b \neq 0$

$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$

Comme $\cos a . \cos b \neq 0$

$\tan(a-b) = \tan[a+(-b)] = \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a \tan(-b)}$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$\tan(a-b) = \tan[a+(-b)] = \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a \tan(-b)}$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

2. Formules de duplication :

$\cos 2a = \cos(a + a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\sin 2a = \sin(a + a) = 2\sin a \cos a$
- $\tan 2a = \tan(a + a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ d'où $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

Alors $\cos 2a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a$

- $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$

- $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

Expression de cos2a et de sin2a en fonction de tan a :

$\sin 2a = 2\sin a \cos a = \dfrac{2\sin a \cos a}{1} = \dfrac{2\sin a \cos a}{\cos^2 a + \sin^2 a}$

En supposant que $\cos a \neq 0$

- $\sin 2a = \dfrac{\dfrac{2\sin a \cos a}{\cos^2 a}}{\dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a}}$

$\sin 2a = \dfrac{2\tan a}{1 + \tan^2 a}$

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \dfrac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a + \sin^2 a} = \dfrac{\dfrac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a}}{\dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a}}$

$\cos 2a = \dfrac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$

- $\tan 2a = \dfrac{\sin 2a}{\cos 2a} = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

Comme $\sin 2a = \dfrac{2\tan a}{1 + \tan^2 a}$ alors $\sin a = \dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1 + \tan^2\frac{a}{2}}$ et si on pose $t = \tan\dfrac{a}{2}$

- $\sin a = \dfrac{2t}{1 + t^2}$

Comme $\cos 2a = \dfrac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$ alors $\cos a = \dfrac{1 - \tan^2\frac{a}{2}}{1 + \tan^2\frac{a}{2}}$

- $\cos a = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$

- $\tan a = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Remarque :

$$\tan^2 a = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 1 = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}$$

3. Formules de transformation d'un produit en somme :

On rappelle que :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad (1)$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad (2)$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad (3)$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \qquad (4)$$

$(1)+(2)$ donne $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$

$(2)-(1)$ donne $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b$

$(3)+(4)$ $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$

$(3)-(4)$ $\sin(a+b) - \sin(A-b) = 2\sin b \cos a$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\sin b \cos a = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

4. Formules de transformation d'une somme en produit :

Posons $p = a + b$ et $q = a - b$

On a $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{p-q}{2}$

(1) et (2) s'ecrit $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$(2)-(1)$ $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

$(3)+(4)$ $\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$(3)-(4)$ $\sin p - \sin q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

III. **EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES :**

On rappelle que $\boxed{\begin{array}{l}\cos(x+2k\pi)=\cos x\\ \sin(x+2k\pi)=\sin x\end{array}}$ quels que soient $x \in R$ et $k \in Z$

$$\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\tan x$$

$\tan(x+\pi)=\tan x$

$\tan(x+k\pi)=\tan x$ quel que soit $k \in Z$

1. Equation du type cosx = a, $a \in R$

- Si $|a|>1$, équation n'admet aucune solution
- Si $|a|\leq 1$, on a une infinité de solution. En effet si α est solution, (c'est-à-dire $\cos\alpha = a$), $-\alpha$ est aussi solution (car $\cos(-\alpha)=\cos\alpha=a$)

Et comme $\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha=a$ quel que soit $k \in Z$, $\alpha+2k\pi$ est aussi solution, de même que $-\alpha+2k\pi$

En admettant que ce sont les seules solutions, on a

Théorème :

$\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi$ ou $x=-\alpha+2k\pi \quad (k\in Z)$

Cas général :

$\cos f(x)=\cos g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+2k\pi$ ou $f(x)=-g(x)+2k\pi \quad (k\in Z)$

Exemple :

- résoudre 2cosx-1=0

$$\cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ -\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}\quad (k\in Z)}$$

- $\cos^2(2x+\frac{\pi}{3})+2\cos(2x+\frac{\pi}{3})-3=0$

Posons $X=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$

$X^2+2X-3=0$

$(X-1)(X+3)=0 \Leftrightarrow X=1; X=-3$

$\cos(2x+\frac{\pi}{3})=1$ *ou* $\cos(2x+\frac{\pi}{3})=-3$

$$2x+\frac{\pi}{3}=0+2k\pi \Rightarrow x=\frac{2k\pi-\frac{\pi}{3}}{2}=k\pi-\frac{\pi}{6}$$

$\cos(2k+\frac{\pi}{3})=-3$ *n'a pas de solution*

$$\boxed{S = \left\{k\pi - \frac{\pi}{6} \ , \ k \in Z\right\}}$$

2. Equation du type sinx = a :

- Si $|a| > 1$ pas de solution
- Si $|a| \leq 1$ on a une infinité de solution

Si α est solution
Comme $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, $\pi - \alpha$ est aussi solution, donc $\pi - \alpha + 2k\pi \ \ (k \in Z)$ aussi
En admettant que ce sont les seules solutions on a :
Théorème :
$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \ \text{ ou } \ x = \pi - \alpha + 2k\pi \quad (k \in Z)$

Plus généralement
$\sin f(x) = \sin g(x) = f(x) = g(x) + 2k\pi \ \text{ ou } \ f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi \ \ (k \in Z)$

Exemples :

- Résoudre $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$
- $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

○ $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4})$

(1) $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$

$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi \ \text{ ou } \ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$

$3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi + \pi$

$x = \dfrac{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi + \pi$

$x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi + \pi$

$$\boxed{S = \left\{\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \ , \ \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \ \ (k \in Z)\right\}}$$

○ $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$
Posons $X = \sin x$

$$2X^2 - 5X + 2 = 0$$
$$\Delta = 25 - 16 = 9$$
$$X' = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \qquad X'' = \frac{8}{4} = 2$$
$$\sin x = \frac{1}{2} \ \ ou \ \ \sin x = 2$$
$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \ ou \ \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
$$\sin x = 2 \ \ n'a \ \ pas\ de\ solution$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in Z)\right\}}$$

3. Equation du type acosx+ bsinx=c

Posons $S = a\cos x + b\sin x \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$

$$S = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

$$\text{or}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

Le point $M\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \ ,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ appartient au cercle trigonométrique

Soit $\theta = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Théorème :
Si $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe un réel φ tel que $\cos\varphi = \alpha$ et $\sin\varphi = \beta$

$$S = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cos x + \sin\theta\sin x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)$$

$$a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta) = c \Leftrightarrow \cos(x-\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exemple :
Résoudre $\cos x - \sin x = 1$

$a = 1 \;\; b = -1$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{1^2 + (-1)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right] = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right]$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4} + x)$$

$$\sqrt{2}\sin(x - \frac{3\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x - \frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad x + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad x = 2k\pi$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;,\; 2k\pi \;,\; k \;,\; (k \in Z)\right\}}$$

4. Equation du type tanx = a

Théorème :

Quel que soit le réel a, l'équation $\tan x = a$ admet toujours une infinité de solution.

Si α est solution, $\alpha + k\pi$ est aussi solution, quel que soit $k \in Z$

$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$

Exemple :

$\tan x - 1 = 0$

$\tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi \;,\; k \in Z}$$

5. Images des solutions d'une équation :

L'image d'une solution α d'une équation est le point M du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}) = \alpha$

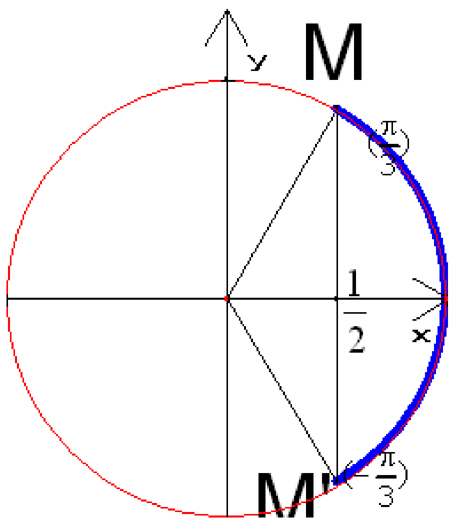
- Si les solutions sont de la forme $x = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$, $n \geq 3$ les images des solutions forment un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Si n = 3, on a un triangle équilatéral
Si n = 4, on a un carré,
Si n = 5 , ona un pentagone régulier
…..
si n = 1, on un seul point
si n = 2, on a deux points symétriques par rapport à l'origine du repère

6. Exemples d'inéquation trigonométrique :

Exemples :

- résoudre $2\cos x - 1 > 0$



$$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$\cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ l'image de x appartient à l'arc (orienté) MM'

$$\boxed{S = \bigcup_{k \in Z} \left] -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right[}$$

- *Résoudre* $2\sin x - \sqrt{3} < 0$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'image de x appartient à l'arc (orienté) MM'

$$\boxed{S = \bigcup_{k \in Z} \left] \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ , \ \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \right[}$$

- $\tan x > \sqrt{3}$

$$\tan x > \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in Z} \left]\frac{\pi}{3} + 2k\pi \;,\; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[}$$

IV. ETUDE DES FONCTIONS CIRCULAIRES :

1. Définitions :

Soit $x \in R$, on considère l'angle $\hat{x}$ dont la mesure en radian est x. On pose $\cos x = \cos\hat{x}$, $\sin x = \sin\hat{x}$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ lorsqu'elle est définie.

On appelle fonction cosinus (respectivement sinus, tangente) l'application qui, à tout réel x, associe $\cos x$ (respectivement $\sin x$, tanx)

2. Périodicité :

Soit $p \in R$ et f telle que $f(x+p) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$

On a $f(x+kp) = f(x)$ quel que soit $k \in Z$. Le plus petit réel p strictement positif est la période de f.

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π, et la fonction tangente est périodique de période π

Remarque : $f : x \mapsto f(x) = \tan x$

f(x) n'est pas définie pour $x = \frac{\pi}{2}$, donc n'est pas définie pour

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\; (k \in Z)$

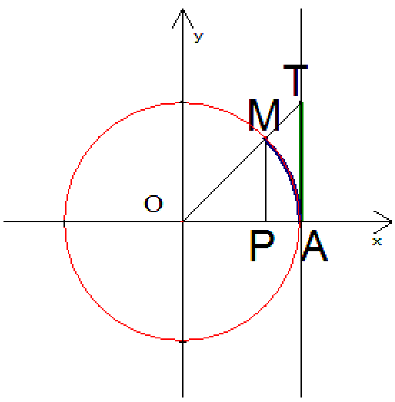
3. Continuité :

On montre et on admet que, pour $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

$PM \leq \overline{AM} \leq AT$

$\sin x \leq R.x \leq \tan x$

$\boxed{\sin x \leq x \leq \tan x}$



Pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ on pose $x' = -x$

$\sin x' \leq x' \leq \tan x'$

$\sin(-x) \leq (-x) \leq \tan(-x)$

$-\sin x \leq -x \leq -\tan x$

donc $\boxed{|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|}$ quel que soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Comme $0 \leq |\sin x| \leq |x|$

$\lim\limits_{x\to 0} 0 \leq \lim\limits_{x\to 0} |\sin x| \leq \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$

donc $\lim\limits_{x\to 0} |\sin x| = 0 = \sin 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$

La fonction sinus est continue en 0.

$g(x) = \cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

$x \mapsto 1$ continue

$x \mapsto \sin \frac{x}{2}$ continue

$x \mapsto \sin^2 \frac{x}{2}$ continue en 0

donc $g : x \mapsto 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} = \cos x$ est continue en 0

Soit $x_0 \in R$ quelconque

Posons $f(x) = \sin x$

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$

$f(x) - f(x_0) = \sin x - \sin x_0 = 2\cos\frac{x + x_0}{2} \sin\frac{x - x_0}{2}$

$|f(x) - f(x_0)| = \left|2\cos\frac{x + x_0}{2} \sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\right|$

car $\cos\frac{x + x_0}{2} \leq 1$

$\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq \lim\limits_{x\to x_0} 2\sin\frac{(x - x_0)}{2}$

or sin est continue en 0

$\lim\limits_{x\to x_0} \sin\frac{(x - x_0)}{2} = 0$

$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ donc f est continue en x_0

Exemple :

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\lim_{x\to 100\pi} \sin x = \sin 100\pi = 0$$

La fonction sinus est donc continue sur R

Conséquence :

- $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ donc la fonction cosinus est continue sur R
- La fonction tangente est le quotient de 2 fonctions continues donc elle est continue sur son domaine de définition $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $k \in Z$

4. Dérivabilité :

Résultats importants : (limites usuelles)

Pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$; $0 < \sin x < x < \tan x$

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x \to 0} 1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \to 0} \cos x$$

$$1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \geq 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

On obtient le même résultat pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$

Calcul de $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} -\sin\frac{x}{2} \times \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

En appliquant ces résultats, on montre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Rappel :

f est dérivable en x_0 si et seulement

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est finie ($\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ est finie

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x_0 \cos h - \sin h \cos x_0 - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\sin x_0 \left[\frac{\cos h - 1}{h}\right] + \frac{\sin h}{h} \cos x_0 \right) = \cos x_0$$

On sait que $-1 \leq \cos x_0 \leq 1$

donc la fonction sinus est dérivable en tout point x_0 de R et $(\sin x_0)' = \cos x_0$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h - \cos x_0}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\cos\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \frac{\sin h}{h}\sin x_0\right] = -\sin x_0$$

La fonction cosinus est dérivable en tout point x_0 de R et $(\cos x_0)' = -\sin x_0$

Théorème :

- Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur R et quel que soit $x \in R$
  $(\cos x)' = -\sin x$
  $(\sin x)' = \cos x$

- La fonction tangente est dérivable sur $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $k \in Z$ car c'est le quotient

de 2 fonctions dérivables et

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Théorème :(admis)

Si u est dérivable sur R, alors $x \mapsto \cos u(x)$ et $x \mapsto \sin u(x)$ sont dérivables et

$[\cos u(x)]' = -u'(x)\sin u(x)$

$[\sin u(x)]' = u'(x)\cos u(x)$

5. Variation et courbes :

f(x)= cosx

- $D_f = R$
- Périodicité, f est périodique de période 2π. On va faire l'étude sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi; \pi]$
- Parité : f est paire $D_e = [0; \pi]$
- $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$
  $\lim_{x\to \pi} f(x) = -1$
- dérivabilité : f est dérivable sur D_e et $f'(x) = -\sin x$

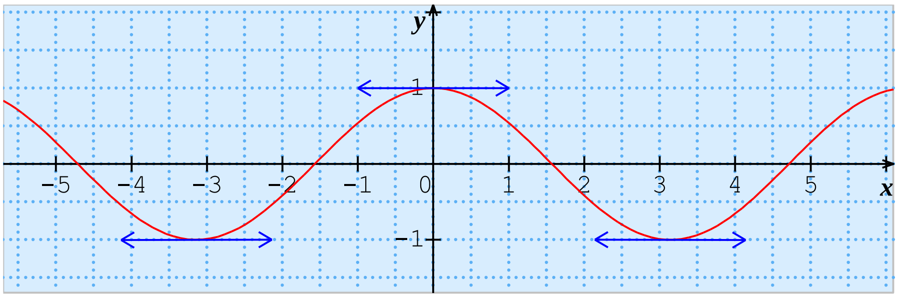
x	0	π
$-\sin x$	Φ	Φ
f(x)	1 ↘	-1

Tangentes horizontales en (0,1) et $(\pi, -1)$

Intersection avec l'axe des abscisses :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Figure :



f(x)= sinx

- $D_f = R$
- Périodicité, f est périodique de période 2π .
- Parité : f est impaire $D_e = [0;\pi]$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

  $\lim\limits_{x\to \pi} f(x) = -0$
- dérivabilité : f est dérivable sur De et $f'(x) = \cos x$

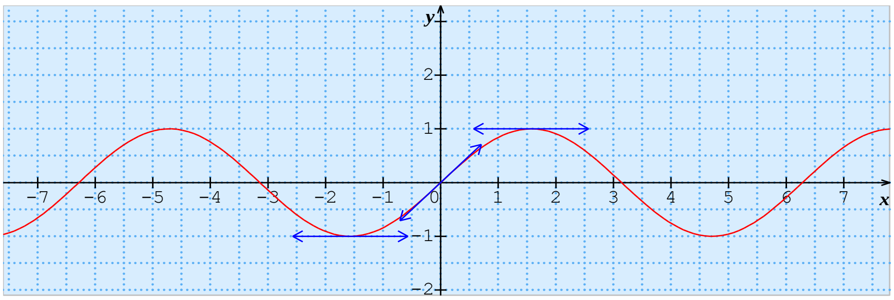
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	1	+	0	-	-1
f(x)	0	↗	1	↘	0

Tangentes horizontales en $(\frac{\pi}{2},1)$

Intersection avec l'axe des abscisses :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$ ou $x = 0$

Figure :



f(x)=tanx

- $D_f = R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $k \in Z$
- $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -f(x)$
- f est périodique π , $D_e = \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
- f est impaire donc on peut encore réduire le domaine d'étude à $D_e = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

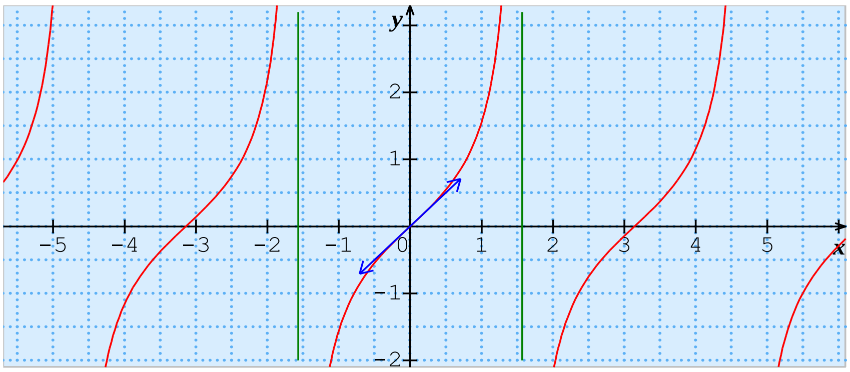
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
    - $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote verticale
- f est dérivable sur D_f et

$$f'(x) = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cos x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
f '(x)	1 +	||
f (x)	0 ↗ $+\infty$	||

f '(0)=1, donc on a une tangente de pente 1 à l'origine

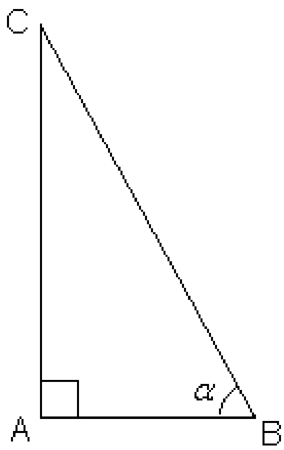
Figure :



EXERCICES

Exercice 1 :

Dans le triangle ABC, rectangle en A, on note $\alpha = \widehat{ABC}$ et on définit :



$\cos(\alpha) = \dfrac{AB}{BC}$,

$\sin(\alpha) = \dfrac{AC}{BC}$,

$\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{}{}$,

$\cot an(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)} = \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{}{}$

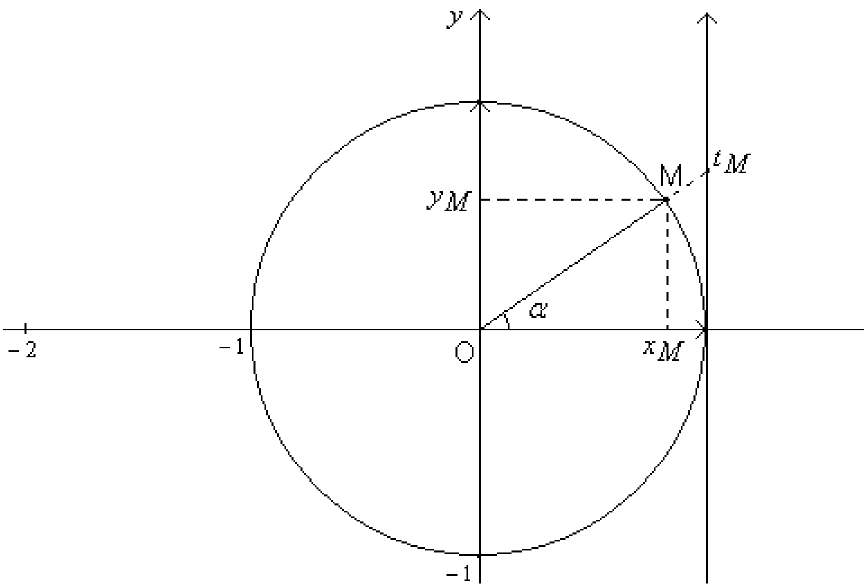
1°) <u>Première propriété :</u> Montrer que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

2°) Soit (C), dans le repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$, le cercle de centre O et de rayon 1 ; et $M(x_M, y_M)$, un point de (C) (Voir figure ci-dessous)

On note $\alpha = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

a) Vérifier que $\cos(\alpha) = x_M$, $\sin(\alpha) = y_M$ et $\tan(\alpha) = t_M$

b) Redémontrer la propriété dans 1°)



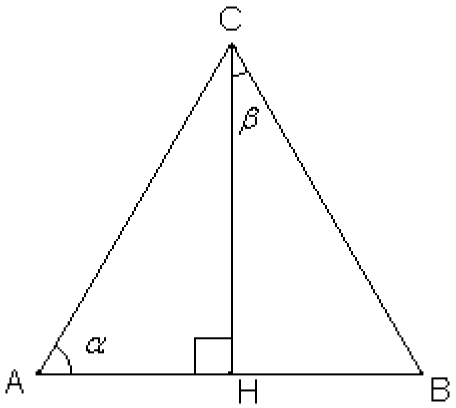
<u>Exercice 2 :</u>

L'unité de mesure pour les angles est le radian (rad)

$\pi\, rad$ est la mesure principale de l'angle plat

$\dfrac{\pi}{2}\, rad$ est la mesure principale de l'angle droit

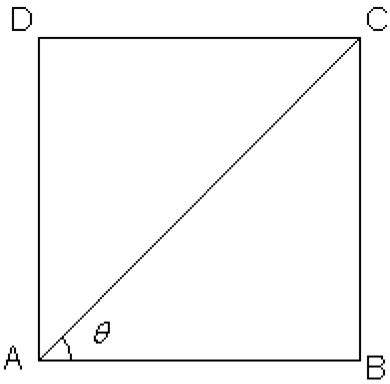
1°) ABC est un triangle équilatéral de côté 1, on note H la projeté orthogonal du point C sur le segment $[AB]$



a) Donner la mesure principale de chacun des angles $\alpha = \widehat{CAH}$ et $\beta = \widehat{BCH}$

b) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

2°) $ABCD$ est un carré de côté 1

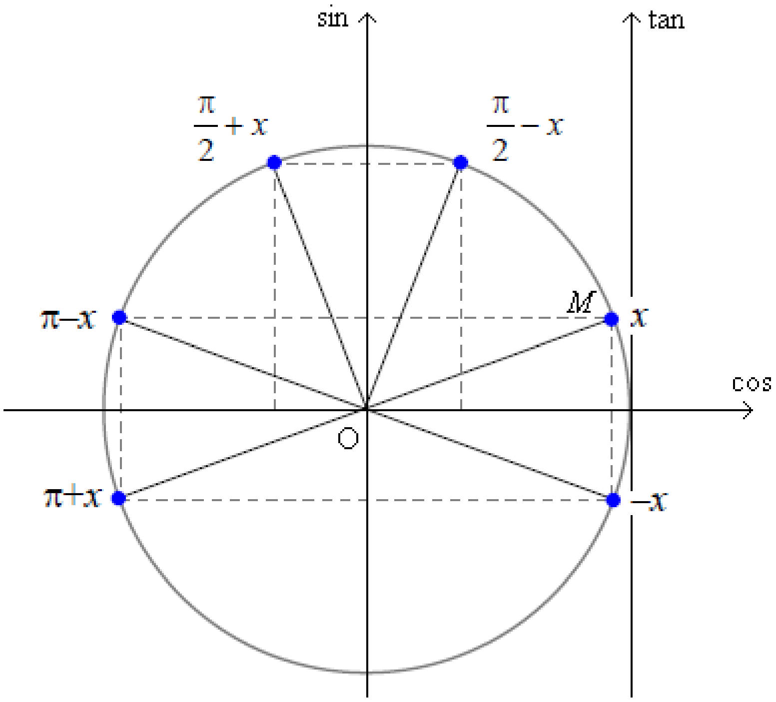


a) Donner la mesure principale de l'angle $\theta = \widehat{CAB}$

b) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 3 :

1°) Soit M un point du cercle trigonométrique (C), et notons x la mesure principale de l'angle $\alpha = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$



Exprimer en fonction de $\cos(x)$, $\sin(x)$ ou $\tan(x)$ chacune des expressions suivantes :

$\cos(-x)$	et	$\sin(-x)$
$\cos(\frac{\pi}{2}+x)$	et	$\sin(\frac{\pi}{2}+x)$
$\cos(\frac{\pi}{2}-x)$	et	$\sin(\frac{\pi}{2}-x)$
$\cos(\pi-x)$	et	$\sin(\pi-x)$
$\cos(x+\pi)$	et	$\sin(x+\pi)$
$\cos(x+2\pi)$	et	$\sin(x+2\pi)$
$\cos(x+8\pi)$	et	$\sin(x+4\pi)$
$\cos(x+5\pi)$	et	$\sin(x+11\pi)$
$\cos(x+2k\pi)$	et	$\sin(x+2k\pi)$ ($k \in Z$)
$\cos(x+(2k+1)\pi)$	et	$\sin(x+(2k+1)\pi)$ ($k \in Z$)
$\tan(-x)$		
$\tan(x+\pi)$		
$\tan(x+k\pi)$	($k \in Z$)	

2°) Discuter suivant les valeurs de $k \in Z$ la valeur exacte de chacune des expressions suivantes :

$\cos(k\pi)$; $\sin(k\pi)$; $\cos(k\frac{\pi}{2})$; $\sin(k\frac{\pi}{2})$

Exercice 4 :

Merci à sakso

1°) Reproduire le cercle trigonométrique avec les principaux angles remarquables :

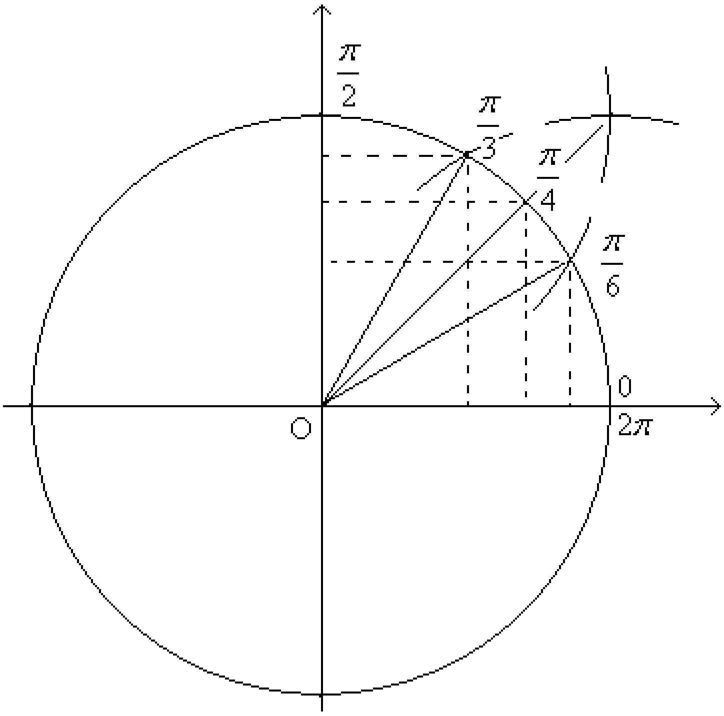
(les multiples de π dans $[0;2\pi[$

les multiples de $\frac{\pi}{2}$ dans $[0;2\pi[$

les multiples de $\frac{\pi}{4}$ dans $[0;2\pi[$

les multiples de $\frac{\pi}{3}$ dans $[0;2\pi[$

les multiples de $\frac{\pi}{6}$ dans $[0;2\pi[$ …)



2°) Que vaut :

$\cos(\frac{\pi}{3})$	$\sin(\frac{\pi}{3})$	$\cos(\frac{\pi}{6})$	$\sin(\frac{\pi}{6})$
$\cos(\frac{\pi}{4})$	$\sin(\frac{\pi}{4})$	$\cos(0)$	$\sin(0)$
$\cos(\frac{\pi}{2})$	$\sin(\frac{\pi}{2})$	$\cos(\frac{2\pi}{3})$	$\sin(\frac{2\pi}{3})$
$\cos(\frac{5\pi}{6})$	$\sin(\frac{5\pi}{6})$	$\cos(\pi)$	$\sin(\pi)$
$\cos(\frac{5\pi}{4})$	$\sin(\frac{5\pi}{4})$	$\cos(\frac{3\pi}{2})$	$\sin(\frac{3\pi}{2})$
$\cos(\frac{5\pi}{3})$	$\sin(\frac{7\pi}{4})$	$\cos(\frac{11\pi}{6})$	$\sin(\frac{11\pi}{6})$

Merci à sakso

$\cos(-\frac{\pi}{4})$	$\sin(-\frac{\pi}{2})$	$\cos(-\frac{3\pi}{2})$	$\sin(-\frac{2\pi}{3})$
$\cos(-\frac{7\pi}{4})$	$\sin(-\frac{3\pi}{4})$	$\cos(2\pi)$	$\sin(2\pi)$
$\cos(\frac{7\pi}{2})$	$\sin(\frac{11\pi}{4})$	$\cos(\frac{11\pi}{3})$	$\sin(\frac{-9\pi}{4})$

Exercice 5 :

Le but de cet exercice est de calculer $\cos\left(\frac{869\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{869\pi}{6}\right)$

1°) Trouver les deux entiers a et k tels que $\frac{869\pi}{6} = a\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $-\pi \leq a\frac{\pi}{6} \leq \pi$

($a\frac{\pi}{6}$ est appelée valeur principale de $\frac{869\pi}{6}$)

2°) Donner alors $\cos\left(\frac{869\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{869\pi}{6}\right)$

3°) Déterminer la valeur principale de chacun des angles suivants puis préciser, dans chaque cas, $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$

$\alpha = \frac{373\pi}{4}$;	$\alpha = \frac{224\pi}{3}$;	$\alpha = \frac{358\pi}{6}$;	$-\frac{47\pi}{3}$
$\alpha = -\frac{93\pi}{4}$;	$\alpha = \frac{222\pi}{6}$;	$\alpha = -\frac{358\pi}{4}$;	$-\frac{7\pi}{3}$

Exercice 6 :

1°) Rappeler les principales formules trigonométriques :

$\cos(a+b) =$

$\cos(a-b) =$

$\sin(a+b) =$

$\sin(a-b) =$

$\tan(a+b) =$

$\tan(a-b) =$

2°) Redémontrer les propriétés donnant :

$\cos(-x)$	;	$\sin(-x)$
$\cos(\frac{\pi}{2}+x)$	;	$\sin(\frac{\pi}{2}+x)$
$\cos(\frac{\pi}{2}-x)$	;	$\sin(\frac{\pi}{2}-x)$
$\cos(\pi-x)$	;	$\sin(\pi-x)$

$\cos(x+\pi)$; $\sin(x+\pi)$

$\cos(x+2k\pi)$; $\sin(x+2k\pi)$ ($k \in Z$)

$\cos(x+(2k+1)\pi)$; $\sin(x+(2k+1)\pi)$ ($k \in Z$)

Exercice 7 :

1°) a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ seulement

b) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\sin(x)$ seulement

2°) a) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ seulement

b) Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ seulement

Exercice 8 :

Démontrer les égalités suivantes :

$(\sin(x)-\cos(x))^2 = 1-\sin(2x)$

$(\sin(x)-\cos(x))(1+\sin(x)\cos(x)) = \sin^3(x)-\cos^3(x)$

$\sin^4(x)-\cos^4(x) = 1-\cos^2(x)$

$\dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$

$(\cos(x)+\sin(x))^2-(\cos(x)-\sin(x))^2 = 2\sin(2x)$

Exercice 9 :

1°) Résoudre le système d'équations d'inconnu (a,b) suivante : $\begin{cases} a\dfrac{\pi}{3}+b\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12} \\ a\dfrac{\pi}{3}-b\dfrac{\pi}{12}=5\dfrac{\pi}{12} \end{cases}$

2°) Calculer alors $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$, $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$

Exercice 10 :

1°) Donner une relation entre $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$

2°) a) Exprimer $\cos^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$

b) En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$

Exercice 11 :

Soit $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ tel que $\cos(\theta)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

1°) a) Quel est le signe de $\sin(\theta)$?

b) Donner une relation entre $\cos^2(\theta)$ et $\sin^2(\theta)$

c) Trouver alors la valeur de $\sin(\theta)$

2°) a) Exprimer $\sin(2x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$

b) Calculer alors $\sin(2\theta)$

c) Trouver la valeur exacte de θ

Exercice 12 :

Soit x un nombre réel tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et $\cos(x) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Calculer $\cos(2x)$ et en déduire la valeur de x

Exercice 13 :

Soit deux nombres réels x et y éléments de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tels que :

$\sin(x) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\cos(y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1°) a) Vérifier que $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

b) Calculer $\cos(x)$

c) Calculer $\sin(y)$; quelle est la valeur de y ?

2°) a) Calculer $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$

b) Calculer $\cos(x-y)$ et $\sin(x-y)$; en déduire la valeur de x

Exercice 14

Démontrer que dans un triangle ABC rectangle en A, $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$.
La réciproque est-elle vraie ?

CHAPITRE 10 :SUITES NUMERIQUES REELLES

I. GENERALITES

1. Définition :

On appelle suite numérique réelle, toute application u d'une partie I de N dans R. L'image d'un entier n (de I) est notée u_n

$$u : I \to R$$
$$n \mapsto u(n) = u_n$$

Le terme d'indice n qui est u_n , est appelé terme général de la suite u. et on note aussi $u = (u_n)$.

Si u est définie pour tout $n \in N^*$

le 1^e terme est u_1

le 2^e terme est u_2

le n^e terme est u_n

Si n est définie sur N

le 1^e terme est u_0

le 2e terme est u_1
le ne terme est u_{n-1}

Deux façons de définir une suite :

○ Une suite peut être définie par la donnée de l'expression de son terme général en fonction de n

Exemple :

(u_n) est la suite définie par

$u_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad (u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1})$

$u_0=0$; $u_1=\dfrac{1}{2}$; $u_{100}=\dfrac{100}{101}$

○ On peut aussi définir une suite par la donnée d'un premier terme (u_0 ou u_1 en général) et d'une relation entre deux termes consécutifs quelconques de la forme $u_{n+1}= f(u_n)$

Exemple : (u_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$$

On a: $u_1 = \dfrac{u_0}{u_0+1} = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{u_1}{u_1+1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{1}{3}$; $u_3 = \dfrac{1}{4}$

La relation $u_{n+1}= f(u_n)$ est dite relation de récurrence.

➢ La relation de récurrence peut lier trois termes (ou même plus) consecutifs.

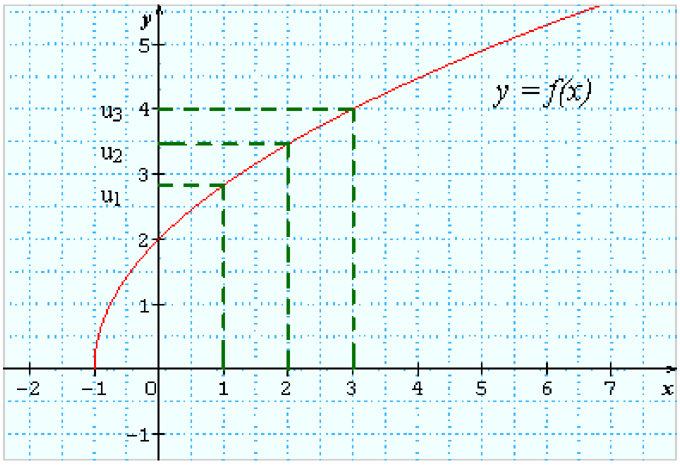
Exemple : (u_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \; ; \; u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{u_n + u_{n-1}} . \end{cases}$$

On a alors $u_3 = \dfrac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$; $u_4 = \dfrac{u_3 - u_2}{u_3 + u_2} \dots$;

2)Représentation graphique des termes d'une suite

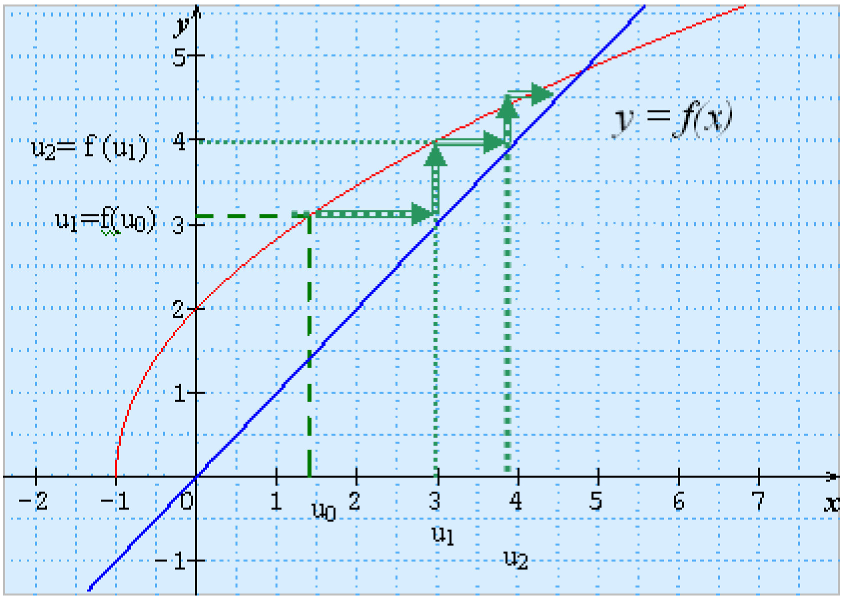
Si la suite est définie par $u_n= f(n)$. On trace la courbe représentative de f
$u_n= f(n)$, $u_1=f(1)$



Merci à sakso

– Si (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On trace la courbe représentative de f et la droite d'équation y = x



3)Sens de variation d'une suite :

a. définitions :

- Une suite (u_n) est dite croissante si quel que soit n, $u_{n+1} \geq u_n$
- Une suite (u_n) est dite décroissante si quel que soit n, $u_{n+1} \leq u_n$
- (u_n) est dite constante ou stationnaire si quel que soit n, $u_{n+1} = u_n$

b. Etude de variation :

1ere méthode :

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$: - si $u_{n+1} - u_n \geq 0$; (u_n) est croissante

- si $u_{n+1} - u_n \leq 0$; (u_n) est décroissante
- si $u_{n+1} - u_n = 0$; (u_n) est constante

2e méthode :

Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout n, (u_n) est croissante
- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout n, (u_n) est décroissante
- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ pour tout n, (u_n) est stationnaire (ou constante)

3e méthode :
Si (u_n) est définie par $u_n = f(n)$, on étudie la variation de f sur $[0 ; +\infty[$

- si f est croissante, (u_n) est croissante
- si f est décroissante ; (u_n) est décroissante
- si f est constante, (u_n) est constante

II.- SUITES PARTICULIERES

1. Suites arithmétiques :

a. Définition :

Un suite (u_n) est une suite arithmétique, si quel que soit n, $u_{n+1} - u_n$ est une constante r.
On a donc pour tout n, $u_{n+1} - u_n = r$ ou $u_{n+1} = u_n + r$
Le réel r est appelé raison de (u_n)

On a alors, si u_0 est le 1er terme de (u_n) :

$$u_1 = u_0 + r$$
$$u_2 = u_1 + r$$
$$u_3 = u_2 + r$$
$$....$$
$$u_n = u_{n-1} + r$$

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + nr$$

$$u_n = u_0 + nr \quad (1)$$

et si $p \in N$ $\quad u_p = u_0 + pr \quad (2)$

(1)-(2) $u_n - u_p = (n - p)r$

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

b. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soit (u_n) une suite arithmétique de 1er terme u_0 e de raison r.
Posons $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$
Considérons la somme $s_n = 1 + 2 + ... + n$

$$s_n = 1 + 2 + ... + (n-1) + n$$
$$s_n = n + (n-1) + ... + 2 + 1$$

Par addition membre à membre ,

$$2s_n = (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1) = n(n+1)$$

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$
$$= u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \ldots. + u_0 + nr$$
$$= (n+1)u_0 + r(1 + 2 + \ldots + n)$$

$$S_n = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2u_0 + nr)(n+1)}{2} = \frac{(u_0 + u_0 + nr)(n+1)}{2}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots. + u_2 = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

où u_0 : le 1er terme de la somme, u_n : le dernier terme de la somme et (n+1) : le nombre de termes..

On a, par exemple, $u_3 + u_4 + \ldots\ldots u_{25} = 23\frac{u_3 + u_{25}}{2}$

2.- Suites géométriques :

a. Définitions :

(u_n) est une suite géométrique s'il existe $q \in R$ tel que quel que soit n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Le réel q est appelé raison de la suite géométrique (u_n) et on a $u_{n+1} = q \cdot u_n$

b. Expression de u_n en fonction de n

Si (u_n) est une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q, on a :

$u_1 = qu_0$, $u_2 = qu_1$, $u_3 = qu_2$, ..., et $u_n = qu_{n-1}$

On a alors $u_1.u_2.u_3\ldots u_n = q^n.u_0u_1u_2\ldots u_{n-1}$

Et après simplification : $u_n = q^n u_0$ (1)

Si $k \in N$ $u_k = q^k u_0$ (2)

$\frac{(1)}{(2)}$ donne $\frac{u_n}{u_k} = \frac{q^n}{q^k} = q^{n-k}$

d'où, quels que soient n et k $u_n = q^{n-k}u_k$

c. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de 1er terme u_0

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$
$$qS_n = qu_0 + qu_1 + \ldots + qu_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}$$
$$S_n - qS_n = u_0 - u_{n+1} = u_0 - q^{n+1}u_0$$

Si $q \neq 1$, $S_n = u_0\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ où u_0 : 1er terme de la somme et n+1 : nombre de termes de la somme

III.- LIMITE D'UNE SUITE :

1.- Définitions :

On dit que (u_n) admet l pour limite si lorsque n prend les valeurs de plus en plus grandes, les termes u_n finissent par s'accumuler autour de l.

Si on pose $\begin{array}{l} u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto u(x) \end{array}$ où u est telle que $u(n) = u_n$ pour tout entier n, on peut écrire : $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = l$

On dit dans ce cas que (u_n) est convergente et qu'elle converge vers l.
Une suite non convergente est dite divergente.
(u_n) est divergente si elle a pour limite $+\infty$ *ou* $-\infty$, ou si elle n'a pas de limite

2.- Suites de référence :

a. Cas d'une suite arithmétique

Soit $u_n = u_0 + nr$

- Si $r < 0$ $\lim(u_n) = -\infty$
- Si $r > 0$ $\lim(u_n) = +\infty$
- Si $r = 0$, $\lim(u_n) = u_0$

b. Suite du type $u_n = n^\alpha$

- Si $\alpha > 0$, $\lim(u_n) = +\infty$
- Si $\alpha < 0$, $\lim(u_n) = 0$

c. Cas d'une suite géométrique :

Théorème :

Considérons la suite (u_n) définie par $\mathbf{u_n = q^n}$

- si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$
- si $q = 1$, (u_n) est stationnaire et converge vers 1
- si $0 < |q| < 1$, $\lim(u_n) = 0$
- si $q \le -1$, (u_n) n'a pas de limite

Remarque :

Considérons la suite (S_n) définie par $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ où (u_n) est une suite géométrique de raison q et de 1er terme u_0

Si $q \neq 1$, $S_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Et si $|q| < 1$, $\lim q^{n+1} = 0$ donc, (S_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty}(S_n) = \dfrac{u_0}{1 - q}$

EXERCICES

Exercice 1 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = n^2 - n + 1$.
a) Calculer U_0 et U_{10}.
b) Exprimer, en fonction de n, $U_n + 1$ et U_{n+1}.

Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \dfrac{1}{n+1}$.
a) Exprimer $U_{n+1} - U_n$ en fonction de n.
b) En déduire le sens de variation de la suite (U_n).

Exercice 3 :

Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison $r = \dfrac{1}{2}$.
a) Exprimer U_n en fonction de n.
b) Calculer U_{10}.

Exercice 4 :

Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_4 = 5$ et $U_{11} = 19$.
Calculer la raison r et U_0 .

Exercice 5 :

Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 7$ et de raison $q = 3$.
a) Exprimer U_n en fonction de n.
b) Calculer U_5.

Exercice 6 :

On suppose que chaque année la production d'une usine subit une baisse de 4%.
Au cours de l'année 2000, la production a été de 25000 unités.
a) On note $P_0 = 25000$ et P_n la production prévue au cours de l'année $(2000+n)$.
Montrer que (P_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
b) Calculer la production de l'usine en 2005.

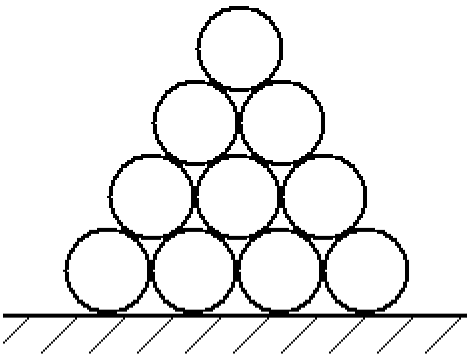
Exercice 7 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 6$ et $U_{n+1} = \dfrac{3+2U_n}{5}$ (pour tout $n \geqslant 0$).
a) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 1$ (pour tout $n \geqslant 0$).
Montrer que $V_{n+1} = \dfrac{2}{5}V_n$ (pour tout $n \geqslant 0$).
En déduire que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison b et le premier terme V_0.
b) Déduire de la question précédente que $U_n = 1 + 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$. (pour tout $n \geqslant 0$).
c) Montrer que $U_{n+1} - U_n = -3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$. (pour tout $n \geqslant 0$).
En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

Merci à sakso

Exercice 8

Des tuyaux sont rangés comme indiqué sur la figure :



1°) Quel est le nombre total de tuyaux dans un empilement de 5 couches ? 12 couches ?

2°) On a stocké 153 tuyaux, combien y a-t-il de couches ?

3°) Pour ranger 200 tuyaux, combien faut-il de couches ?

Combien reste-t-il de tuyaux ?

Exercice 9:

Dans un placement à intérêt simple, les intérêts ne sont pas pris en compte pour le calcul des intérêts des années suivantes.
Dans un placement à intérêts composés, les intérêts d'une année s'ajoutent au capital pour le calcul des intérêts de l'année suivante.
M.Savadogo place un capital de 5 millions .
1.- Calculer la valeur de son capital au bout de 5 ans dans le cas où :
a) il fait un placement à intérêts simples avec un taux de 5%
b) il fait un placement à intérêts composés avec un taux de 3,5%.
2.- On note C_n la valeur du capital au bout de n années avec le placement à taux simple
a) Exprimer en fonction de C_n le capital C_{n+1} au bout de (n+1) années.
b) Déterminer le nombre d'années à partir duquel la valeur de son capital est supérieure à 10 millions
3.- On note S_n la valeur de son capital au bout de n années avec le placement à taux composés
a) Exprimer en fonction de S_n son capital S_{n+1} au bout de (n+1) années.
b) Comparer S_{10} et C_{10}

Exercice 10 :

L' entreprise la « BOUSSOLE » prévoit d'augmenter sa production de 500 unités par an. La production en 2015 est de 2500 unités.

- Quelle sera la production en 2020 ?
- En quelle année la production atteindra-t-elle le double de la production en 2015 ?
- Quelle sera alors le nombre total d'unités produites depuis 2015 ?

Exercice 11 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{n \cdot u_n + 3}{n+1} \quad \text{pout tout } n \geq 1 \end{cases}$,

(v_n) telle que $v_n = n \cdot u_n$ pout tout $n \geq 1$

1°) a) Calculer u_1, u_2 et u_3

b) Calculer v_1, v_2 et v_3

2°) a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n

b) Calculer $v_{n+1} - v_n$. Que dire de la suite (v_n) ?

c) Donner alors l'expression explicite de v_n

3°) a) Calculer la somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_{20}$

b) Pour quelle valeur de p, $v_p = 92$?

c) Calculer alors la somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_p$

Exercice 12:

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1} \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Calculer u_1 et u_2

2°) Soit (v_n) telle que $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n \in IN$

a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison r

b) Donner l'expression explicite de v_n. En déduire celle de u_n

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 13 :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{n \cdot u_n}{n+1} \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$, et la suite (v_n) définie par $v_n = n(u_n - 1)$ pour tout $n > 0$

1°) Calculer u_2, u_3 et u_4

2°) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison r à déterminer.

3°) Donner l'expression explicite de v_n, puis celle de u_n

4°) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Interpréter

5°) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 14:

Chahed est en train de lire un livre. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il a déjà lues, il obtient 351. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il lui reste à lire, il obtient 469.

1°) A quelle page en est Chahed ?

2°) Combien de pages comporte ce livre ?

(On suppose que le livre commence à la page n°1)

4°) a) Exprimer la somme $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

b) En déduire l'expression de $S'_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

Exercice 15:

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{4 - u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in IN$

1°) Calculer u_1 et u_2

2°) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ est arithmétique dont on déterminera sa raison et son premier terme.

3°) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

4°) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

Exercice 16:

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} \cdot u_n \end{cases}$ pour tout $n > 0$

1°) Calculer u_2, u_3 et u_4

2°) Soit (v_n) la suite numérique définie pour tout $n > 0$ par $v_n = \dfrac{u_n}{n}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme v_1

b) Donner l'expression explicite de v_n

c) En déduire l'expression explicite de u_n. Calculer u_2, u_3, u_4, u_{50}

Exercice 17 :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ 3u_{n+1} = u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2u_n + 1$

1°) Calculer u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2

2°) a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n

b) En déduire que (v_n) est une suite géométrique, préciser sa raison

c) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

d) Déterminer $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n

En déduire $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

Exercice 18:

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n)

2°) On considère la suite (v_n) telle que $v_n = \dfrac{u_n + 3}{u_n - 4}$ pour tout $n \in IN$

a) Calculer v_0, v_1 et v_2

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?

c) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

d) Calculer $v_{n+1} - v_n$. En déduire le sens de variation de la suite (v_n)

3°) Calculer les limites de (u_n) et (v_n)

4°) Calculer $S_n = v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n

Exercice 19:

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + a \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$, où $a \in IR$

1°) Sachant que $u_2 = \frac{5}{4}$, calculer a

2°) Dans cette question, on prend $a = \frac{1}{2}$. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 1$ pour tout $n \in IN$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme

b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n

c) Calculer la limite de v_n et celle de u_n

3°) Exprimer les sommes suivantes en fonction de n :

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

Exercice 20 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{5}{6} \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3

2°) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 3u_n + 5$ pour tout $n \in IN$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser la raison q et le premier terme v_0

b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 21:

Lors d'une élection, un certain nombre de candidats sont en présence au premier tour. Chacun d'eux réunit exactement deux fois moins de voix que celui qui lui est immédiatement supérieur. Un deuxième tour sera-t-il nécessaire ?

Exercice 22 :

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$$

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3

2°) a) Montrer que si $0 \leq u_n \leq 1$, alors $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

b) Que peut-on dire de u_n pour tout $n \in IN$?

Exercice 23 :

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} & \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Ni l'un ni l'autre ?

2°) Démontrer que, par récurrence, que pour tout $n \in IN$, $0 \leq u_n \leq 3$

3°) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in IN$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$

a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n en fonction de n

c) Exprimer u_n en fonction de v_n puis de n. Que vaut u_{10} ?

Exercice 24:

Une balle élastique tombe d'une tour de 63 m de haut. A chaque rebond, la balle remonte exactement d'un dixième de sa hauteur de chute.

Quelle sera la distance totale parcourue par la balle avant de s'arrêter au sol ?

Exercice 25 :

Soit la suite (u_n) telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} & \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $u_n > 0$

b) Montrer que si $u_n \leq 2$, alors $u_{n+1} \leq 2$. Que dire de la suite (u_n) ?

2°) a) Remarquer que $u_{n+1} + u_n > 0$ pour tout $n \in IN$,

et que $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n)$

b) Etudier alors dans $[0;2]$ le signe de $u_{n+1} - u_n$

c) Quelle est la variation de (u_n) ?

3°) En déduire qu'elle est convergente et donner sa limite

CORRIGE

Exercice 1

a) $U_0 = 0^2 - 0 + 1 = 1$ et $U_{10} = 10^2 - 10 + 1 = 91$.

b) $U_n + 1 = (n^2 - n + 1) + 1 = n^2 - n + 2$

$U_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1$.

Exercice 2

a) $U_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)+1} = \dfrac{1}{n+2}$

Donc, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)}$

b) Pour tout n, $U_{n+1} - U_n < 0$. Donc la suite est décroissante.

Exercice 3

a) $U_n = U_0 + n \times r = 4 + \dfrac{1}{2}n$.

b) $U_{10} = 4 + \dfrac{1}{2} \times 10 = 9$.

Exercice 4

$U_{11} = U_4 + (11-4) \times r \Leftrightarrow 19 = 5 + 7r \Leftrightarrow r = 2$.

$U_4 = U_0 + 4 \times a \Leftrightarrow 5 = U_0 + 8 \Leftrightarrow U_0 = -3$.

Exercice 5

a) $U_n = q^n \times U_0 = 7 \times 3^n$.

b) $U_5 = 7 \times 3^5 = 1701$.

Exercice 6

a) Baisser une grandeur de 4% revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{4}{100}\right) = 0{,}96$.

Pour tout n, $P_{n+1} = 0{,}96 \times P_n$. Cela prouve que (P_n) est une suite géométrique de raison 0,96.

b) $P_5 = q^5 \times P_0 = (0{,}96)^5 \times 25000 \approx 20384$.

Exercice 7

a) $V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \dfrac{3+2U_n}{5} - 1 = \dfrac{2U_n - 2}{5} = \dfrac{2}{5}(U_n - 1) = \dfrac{2}{5}V_n$.

La suite (V_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{2}{5}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 1 = 5$.

b) $V_n = b^n \times V_0 = 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

Or, $V_n = U_n - 1$. Donc, $U_n = 1 + V_n = 1 + 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

c) $U_{n+1} - U_n = 1 + 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1} - 1 - 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1} - 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

$= 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n \times \left(\dfrac{2}{5} - 1\right) = 5 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n \times \left(\dfrac{-3}{5}\right) = -3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n < 0$.

La suite (U_n) est bien décroissante.

Merci à sakso

Chapitre 11 : DENOMBREMENT

I.- GENERALITES SUR LES ENSEMBLES

1. Ensemble-Elément

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments de E telle que quel que soit l'objet a, on peut dire sans ambiguïté que a est ou n'est pas un élément de E
Si a est un élément de E, on écrit $a \in E$ si non $a \notin E$
Deux ensembles E et F sont égaux, et on écrit $E = F$, s'ils possèdent les mêmes éléments.

On dit que E est donné en compréhension s'il est défini par une propriété caractéristique de ses éléments.
Exemple : $E = \{x, x \text{ est un nombre entier inférieur ou égal à } 6\}$
On dit que E est donné en extension s'il est défini par la donnée d'une liste de ses éléments
Exemple : $E = \{a, b, c\}$

L'ensemble vide, noté ϕ, est l'ensemble qui n'a aucun élément.
Un ensemble qui n'a qu'un seul élément est un singleton.

2. Partie d'un ensemble : Inclusion

Soit A et E deux ensembles

On dit que A est une partie de E (ou un sous ensemble de E ou inclus dans E) si tous les éléments de A sont éléments de E.

On écrit $A \subset E$
$(A \subset E) \Leftrightarrow$ (si $x \in A$ alors $x \in E$)
$(A \not\subset E) \Leftrightarrow (\exists x,\ x \in A$ et $x \notin E)$
A n'est pas inclus dans E s'il existe un élément de A qui n'est pas dans E.

Propriétés :

- Quel que soit l'ensemble E
  $E \subset E$
  $\phi \subset E$
- Soient A, B et C des ensembles
  Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$
  Si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$

Ensemble des parties :

Les parties d'un ensemble E constituent un ensemble appelé ensemble des parties de E et noté $P(E)$:

$$P(E) = \{A, A \subset E\}$$

$$A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E$$

Propriétés :

Quel que soit l'ensemble E

$E \in P(E)$, $\phi \in P(E)$ donc $P(E) \neq \phi$

- Si $E = \phi$
  $P(E) = \{\phi\}$
- Si $E = \{a\}$
  $P(E) = \{\phi, \{a\}\}$
- $E = \{a, b\}$
  $P(E) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- $E = \{a, b, c\}$
  $P(E) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

Si E a n éléments alors P(E) en a 2^n

3. Complémentaire d'une partie

a. Définition

Soient A et E deux ensembles

L'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A est appelé complémentaire de A dans E et noté C_E A ou $\overline{A}$

$\overline{A} = C_E A = \{x, x \in E \text{ et } x \notin A\}$

Si x est un élément de E, on a : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$

Et aussi $x \in A \Leftrightarrow x \notin \overline{A}$

b. Propriétés

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E

- $\overline{E} = \varnothing ; \overline{\varnothing} = E$
- $\overline{\overline{A}} = \overline{(\overline{A})} = A$ (On dit que A et $\overline{A}$ sont complémentaires (l'un de l'autre))
- $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
- $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
- $A = \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A} = B$

4. Réunion et intersection de deux ensembles

a. Définitions

Soient A et B deux ensembles, la réunion de A et B notée $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B

$A \cup B = \{x, x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Et l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et B est l'intersection de A et B et noté $A \cap B$

$A \cap B = \{x, x \in A \text{ et } x \in B\}$

b. <u>Propriétés :</u>

Quels que soient A et B

$A \subset A \cup B$ $\qquad A \cap B \subset A$

$B \subset A \cup B$ $\qquad A \cap B \subset B$

$A \cap A = A$ $\qquad A \cup A = A$

$A \cap B = B \cap A$ $\qquad A \cup B = B \cup A$

$A \cap \varnothing = \varnothing$ $\qquad A \cup \varnothing = A$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $\qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Si $A \subset E$

$A \cup \overline{A} = E$ $\qquad A \bigcap \overline{A} = \varnothing$

$A \subset B \Leftrightarrow A \bigcap B = A$

$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Si $A \subset B$ alors $A \cap C \subset B \cap C$ et $A \cup C \subset B \cup C$ quel que soit C

<u>Loi de Morgan :</u>

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

5. Partition d'un ensemble

Soient E un ensemble et $A_1, A_2, \dots A_n$ des parties de E.

$\{A_1, A_2, \dots A_n\}$ est une partition de E si les A_i sont tous non vides et si quel que soit $x \in E$ il existe un et un seul A_i tel que $x \in A_i$

On montre que $\{A_1, A_2, \dots A_n\}$ est une partition de E si

- $A_i = \phi$, quel que soit i
- $A_i \cap A_j = \phi$ si $i \neq j$
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$

<u>Exemple</u> : $E \neq \phi ; A \subset E ; A \neq \phi$ *et* $A \neq E$

$\{A, \overline{A}\}$ est- il une partition de E ?

- $A \neq \phi$, $\overline{A} \neq E$ car $A \neq E$
- $A \cap \overline{A} = \phi$
- $A \cup \overline{A} = E$

$\{A, \overline{A}\}$ est donc une partition de E

6. Ensemble produit

On appelle produit (cartésien) de A et B l'ensemble des couples (x ;y) tels que $x \in A$ et $y \in B$. On le note : $A \times B$

$$A \times B = \{(x; y) / x \in A et\ y \in B\}$$

Remarque :

- (x ; y) = (x'; y') $\Leftrightarrow$ x = x' et y = y'
- (x ; y) $\neq$ (y ; x) sauf si x = y
- Si A = B , $A \times B = A \times A = A^2$

Généralisation :

$$A_1 \times A_2 \times \quad \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) / \ x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, \text{et } x_n \in A_n\}$$

Ses éléments sont appelés des n-uplets, n-uples, n-tuples, ou n-listes

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \Leftrightarrow x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \cdots, x_n = x'_n$$

Si $\begin{array}{l} A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A \\ A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = A \times A \times \cdots \times A = A^n \end{array}$

II.-DENOMBREMENT

1. Factorielle

Soit $n \in N$, on appelle « factorielle (de) n » le réel noté $n!$ défini par

- Si $n = 0, n! = 0! = 1$
- Si $n \neq 0,\ n! = n(n-1)\cdots 3 \times 2 \times 1$

Exemples : $\begin{array}{l} 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040 \end{array}$

Propriétés :

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1$$
$$n! = n(n-1)!$$
$$n! = n(n-1)(n-2)!$$

Exemple : $7! = 7 \times 6 \times 5 \cdots 1 = 7 \times 6! = 7 \times 6 \times 5!$

2. Cardinal d'un ensemble :

Le cardinal d'un ensemble E est le nombre d'éléments de E. On le note $cardE$.

Propriétés :

- $E = \phi, \; cardE = 0$
- Si $A \cap B = \phi, \; card(A \cap B) = cardA + cardB$

- Dans le cas général

$$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$$

- $si A \subset B$, alors $cardA \leq cardB$

- $card(A \times B) = (cardA)(cardB)$
- $card(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = (cardA_1)(cardA_2)\cdots(cardA_n)$
- $card(A^2) = (cardA)^2$
- $card(A^n) = (cardA)^n$

3. Arrangement

a. Définition :

Soit E un ensemble ayant n éléments et $p \leq n$.

Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E, deux à deux distincts.

Exemples :

- $E = \{a, b, c, d\}$

$(a, b, c), (a, c, d), (d, b, a)$ sont des arrangements de 3 éléments de E

(a, b, a) n'est pas un arrangement d'éléments de E

- $E = \{1, 2, \cdots, 6\}$

Un nombre de 3 chiffres différents écrit avec les éléments de E est un arrangement de 3 éléments de E

- Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10

On tire successivement et sans remise 3 jetons de l'urne.

Le résultat peut se représenter par un triplet (x_1, x_2, x_3) ou x_1 désigne le numéro du 1^{er} jeton, x_2 désigne le numéro de 2^e jeton, x_3 désigne le numéro du 3^e jeton

Comme le tirage est sans remise ; x_1, x_2, x_3 sont tous différents

On peut donc assimiler le résultat des tirages à un arrangement de 3 éléments pris parmi les 10.

Remarque :

Deux arrangements distincts diffèrent soit par la nature soit par l'ordre des éléments :

$(a,b,c) \neq (a,c,b)$
$(a,b,c) \neq (a,c,d)$

b. Nombre d'arrangements :

Considérons un ensemble E ayant n éléments et soit $p \leq n$. On veut dénombrer tous les arrangements de p éléments de E.

Pour le premier élément de l'arrangement, on a n possibilités.

Avec chacune de ces n possibilités, on peut former (n-1) arrangements en prenant un élément parmi les (n-1) éléments restants. On peut donc au total former n(n-1) arrangements de deux éléments de E.

Avec chacun des ces n(n-1) possibilités on peut former (n-2) arrangements de 3 éléments en lui associant un élément pris parmi les (n-2) autres ; donc au total, on peut avoir

n(n-1)(n-2) arrangements de 3elements de E.

……………….

Lorsque le (p-1) élément est choisi, on n'a plus que (n-p+1) choix pour le p^{e} élément pour former les arrangements de p éléments

On a alors $n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ arrangements de p éléments de E possibles.

Théorème :

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble ayant n éléments est :

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

4. Permutation :

E étant un ensemble ayant n éléments. Une permutation des éléments de E est un arrangement de n éléments de E.

Le nombre de permutation des éléments de E est donc :

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Théorème :

Le nombre de permutation de n éléments est : $P_n = n!$

5. Combinaison :

a. Définition

Soit un ensemble ayant n éléments et $p \leq n$; une combinaison de p éléments de E est une partie de E ayant p éléments

Exemple :

- $E = \{a, b, c\}$

$\{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$ sont des combinaisons de 3 éléments de E

- Un sac contient 10 boules.

On extrait simultanément de ce sac 3 boules. On peut assimiler un résultat de cette extraction à une combinaison de 3 éléments.

b. Nombre de combinaison :

Soit E un ensemble tel que $\mathrm{Card}E = n$, $p \le n$

Posons $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ et considérons $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\} \subset E$

On peut former $p!$ permutations des éléments de A. Mais comme une permutation des éléments de A est un arrangement de p éléments de E. on a $p!$ arrangements des p éléments de E (formés avec les éléments de A)

On a donc $p!$ arrangements avec une combinaison de p éléments de E.

Si C_n^p est le nombre de combinaisons de E, on peut obtenir au total $p!\,C_n^p$ arrangements. Et on obtient tous les arrangements de cette façon.

Or le nombre d'arrangements de p éléments est A_n^p, on a l'égalité : $p!\,C_n^p = A_n^p$

Théorème :

Le nombre de combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

Propriétés :

- $C_n^0 = 1$

  $C_n^1 = n$

  $C_n^n = 1$

  $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$

- ***Triangle de Pascal :***

p / n	0	1	2	3		p	p+1
0	C_0^0						
1	C_1^0	C_1^1					
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2				
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			
$\vdots$							
N	C_n^0	C_n^1				$C_n^p + C_n^{p+1}$	$\parallel$
n+1	C_{n+1}^0	C_{n+1}^1					C_{n+1}^{p+1}

Ce qui donne :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 + 10 10 5 1

$\parallel$

1 6 15 20 15 6 1

- ***Développement de Newton***

On montre que quels que soient a, b réels, et $n \in N$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^p a^{n-p} b^p + \cdots + C_n^n a^0 b^n$$

ou

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p . a^{n-p} . b^p$$

Exemples :

$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \cdots + C_n^n x^n$

$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

Application : Nombre des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble à n éléments

Le nombre de parties à 0 élément est C_n^0

1 élément est C_n^1

2 éléments est C_n^2

…..

p éléments est C_n^p

……

n éléments est C_n^n

Le nombre des parties de E est égal à $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n = \text{card}E$

III - DENOMBREMENT D'APPLICATIONS :

Soit f une application d'un ensemble $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ vers un ensemble F.

f est parfaitement définie par la donnée de $f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_p)$

A chaque application f de E vers F correspond donc un et un seul p-uplets $(f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_p))$ d'éléments de E. Et réciproquement à chaque p-uplets $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ d'éléments de F correspond une et une seule application f (qui est définie par $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$, ..., $b_p = f(a_p)$).

Le nombre d'applications de E vers F est donc égal au nombre de p-uplets d'éléments de F

Si $CardF = n$, le nombre de p-uplets éléments de F est $(\text{Card}F)^p = n^p$. D'où :

Théorème :

Le nombre d'application d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est n^p

Le p-uplets correspondant à une injection est formé de p éléments 2 à 2 distincts donc c'est un arrangement de p éléments de F

Théorème :

Le nombre d'injection d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments (avec $p \leq n$) est égal au nombre d'arrangements de p éléments pris parmi n. A_n^p

Puisque si $\text{CardE} = \text{CardF}$, et où $f : E \to F$ est injective, alors f est bijective, on a, le nombre de bijection de E vers F avec $\text{CardE} = \text{CardF}$

Théorème :

Le nombre du bijections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à n éléments est égal au nombre d'arrangements de n éléments pris parmi n, donc au nombre de permutation de n éléments P_n.

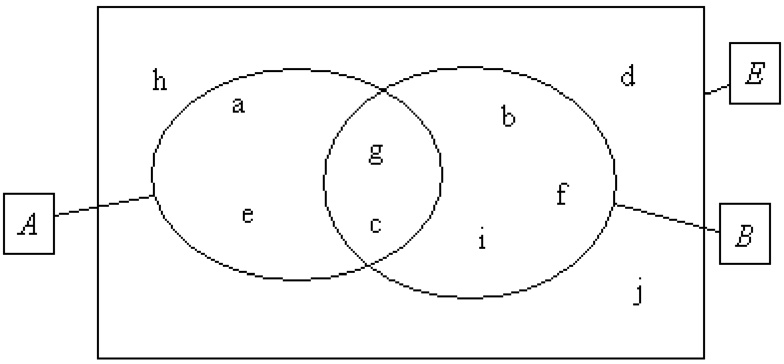
EXERCICES

DENOMBREMENT

Dénombrement des parties d'un ensemble fini

Exercice 1 :

On considère le diagramme ci-dessous :



1°) Enumérer les éléments de chacun des ensembles suivants et préciser leurs cardinaux respectifs :

E , A , B

$A \cap B$, $A \cup B$

$\overline{A}$, $\overline{B}$

$A - B$, $B - A$

$\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$

2°) Rappeler les formules donnant : $Card(A \cup B)$, $Card(\overline{A})$ et $Card(A - B)$

Exercice 2 :

On désigne par E l'ensemble des nombres entiers naturels plus petits que 16, par I l'ensemble des nombres impairs de E, par P l'ensemble des nombres pairs de E et par M_3 l'ensemble des nombres multiples de 3 de E.

Représenter les ensembles E, I, P et M_3 dans un même diagramme ; y faire figurer tous les éléments de E.

Exercice 3 :

Dans une classe de 42 élèves, chaque élève pratique un ou deux sports collectifs :

- le volleyball
- le basketball
- les deux sports

Sachant que 27 élèves pratiquent le Volleyball

et que 18 élèves pratiquent les 2 sports

Combien d'élèves pratiquent le Basketball ?

Exercice 4 :

Les 50 élèves d'une classe de 1ère disposent de deux options culturelles, la musique et la peinture.

27 élèves pratiquent la musique ; 29 élèves pratiquent la peinture et 5 élèves ne pratiquent aucune des deux activités.

Chercher le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement la musique, ceux qui pratiquent uniquement la peinture et ceux qui pratiquent les deux activités.

Exercice 5 :

Dans une classe de première, sont étudiées les langues vivantes suivantes : Anglais, Allemand et Espagnol. Chaque élève étudie au moins une langue.

5 étudient les 3 langues, 7 l'anglais et l'allemand, 8 l'anglais et l'espagnol, 9 l'allemand et l'espagnol

Enfin 20 étudient seulement l'anglais, 15 l'allemand et 18 l'espagnol

1°) Quel est l'effectif de cette classe ?

2°) Représenter cette classe par un diagramme

Exercice 6 :

Sur 8224 voitures vendues par une société commerciale, 5243 sont équipées d'un lecteur MP3 tandis que 4932 sont équipées d'une climatisation et 1927 voitures ne possèdent ni lecteur MP3 ni climatisation.

Combien de voitures sont à la fois équipées d'un lecteur MP3 et d'une climatisation ?

Exercice 7 :

Dans une classe de 50 élèves ; à la question :

– Qui aiment le Basket-ball ? 20 élèves ont levé la main.

– Qui n'aiment pas le Volley-ball ? 35 élèves ont levé la main.

– Qui aiment à la fois le Basket-ball et le Volley-ball ? 10 élèves ont levé la main.

1°) Combien d'élèves n'ont jamais levé la main ?

2°) Combien d'élèves ont levé la main une seule fois ? Deux fois ? Trois fois ?

– DENOMBREMENT –

Dénombrement d'Arrangements et de Permutations

Exercice 1 :

Une permutation d'un ensemble fini E est une façon d'ordonner les éléments de E

1°) Donner deux permutations de chacun des ensembles suivants :

$\{a,b\}$

$\{1,2,3\}$

$\{a,e,i,u,o\}$

2°) Combien y a-t-il de permutations d'un ensemble à 2 éléments ?d'un ensemble à 3 éléments ?d'un ensemble à 4 éléments ?d'un ensemble à 5 éléments ?d'un ensemble à 6 éléments ?

(On note $n!$ (factorielle n) le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments)

Exercice 2 :

1°) De combien de façons différentes peut-t-on ranger 5 boules de couleurs différentes dans 5 cases alignées de tels sortes que chaque case ne contienne qu'une seule boule ?

2°) Combien de sigles de 5 lettres différents peut-t-on former avec les lettres du mot « MATHS » ?

3°) Combien y-a-t-il d'ordre d'arrivées possibles lors d'une course d'endurance à 8 partants, si on suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo ?

4°) De combien de façon différentes peut-t-on numéroter de 1 à 9 les 9 chaines télévisées accessibles à Antananarivo ?

Exercice 3 :

Un arrangement 3 à 3 des éléments d'un ensemble fini E est une façon d'ordonner 3 éléments distincts de E

1°) On pose $E=\{a,b,c,d,e\}$

Donner trois arrangements 2 à 2 des éléments de E

Donner trois arrangements 3 à 3 des éléments de E

Donner trois arrangements 4 à 4 des éléments de E

Donner trois arrangements 5 à 5 des éléments de E. Que remarque-t-on ?

2°) a) Combien y a-t-il d'arrangements 2 à 2 dans un ensemble à 3 éléments ?

b) Combien y a-t-il d'arrangements 2 à 2 dans un ensemble à 4 éléments ?

c) Combien y a-t-il d'arrangements 3 à 3 dans un ensemble à 4 éléments ?

d) Combien y a-t-il d'arrangements 4 à 4 dans un ensemble à 9 éléments ?

e) Combien y a-t-il d'arrangements p à p dans un ensemble à n éléments ?

3°) On note A_n^p le nombre d'arrangements p à p dans un ensemble à n éléments

Vérifier que $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ ($p < n \in I\!N$)

Exercice 4 :

1°) M.Savadogo dispose de 8 boules de couleurs différentes

De combien de façons différentes peut-t-il remplir 5 cases alignées avec ses boules ? Chaque case ne peut contenir qu'une seule boule

2°) Combien de sigles de 5 lettres distincts peut-t-il former avec les lettres du mot « COMBIEN » ?

3°) Combien y a-t-il de résultats possibles en quinté, lors d'une course de chevaux à 10 partants, si on suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo ?

4°) De combien de façons différentes peut-t-on choisir un président, un vice-président, un secrétaire et un trésorier dans une classe de 40 élèves ?

Exercice 5 :

Une combinaison 3 à 3 des éléments d'un ensemble fini E est une façon de grouper 3 éléments distincts de E

1°) On considère l'ensemble $E = \{a,b,c,d\}$

a) Enumérer tous les arrangements 3 à 3 des éléments de E. Combien y en a-t-il ?

b) Enumérer toutes les combinaisons 3 à 3 des éléments de E. Combien y en a-t-il ?

2°) Soit la combinaison (a,c,d)

a) Combien d'arrangements 3 à 3 peut-on former avec cette unique combinaison ?

b) Quelle relation lie le nombre d'arrangements 3 à 3 et le nombre de combinaisons 3 à 3 des éléments de E ?

3°) Soit E un ensemble fini à n éléments, et soit $p < n$

a) Combien d'arrangements p à p peut-t-on former avec une seule combinaison p à p des éléments de E ?

b) Quelle relation lie le nombre A_n^p et le nombre C_n^p, nombres de combinaisons p à p des éléments de E ?

c) Montrer que $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Exercice 6 :

1°) On dispose de 8 boules identiques

De combien de façons différentes peut-t-on remplir 5 cases alignées avec des boules ? Chaque case ne peut contenir qu'une seule boule.

2°) De combien de façons différentes peut-t-on choisir 4 représentants de la classe dans une classe de 40 élèves ?

3°) Combien de mains de 13 cartes peut-on avoir dans un jeu de 32 cartes ?

Exercice 7 :

A l'arrivée d'une course de chevaux, le quinté gagnant dans l'ordre est le :

2 ; 7 ; 5 ; 9 ; 3

1°) Combien y-a-t-il de quintés gagnants ?

2°) Combien y-a-t-il de quintés gagnants dans le désordre ?

Exercice 8 :

1°) Calculer :

A_8^3	C_7^3	$2!\times 3!$
$6!$	A_{13}^3	C_{15}^{12}
C_{13}^8	$\dfrac{A_{12}^3}{4!}$	$\dfrac{4!\times A_{10}^4}{8!}$
$\dfrac{5!\times 4!}{6!\times 3!}$	$\dfrac{A_9^4}{A_9^3}$	$\dfrac{19!}{17!}$
$\dfrac{(n+1)!}{n!}$	$\dfrac{(n+2)!}{n!}$	C_{10}^1
C_{15}^0	$\dfrac{78!\times 204!}{80!\times 202!}$	$\dfrac{C_{15}^{13}\times C_{15}^{11}}{C_{15}^{10}}$
$\dfrac{C_{n+1}^p}{C_n^p}$	$\dfrac{100!\times 203!}{201!\times 101!}$	$4!\times\dfrac{A_{11}^3}{C_{12}^5}$
$\dfrac{59!\ \times\ 121!}{119!\ \times\ 60!}$	$\dfrac{A_{12}^4}{4!\ \times\ C_{11}^3}$	

Merci à sakso

2°) Résoudre dans IN les équations suivantes :

$C_n^2 = 7n$ $\qquad$ $C_n^2 = 21$

$C_x^5 = C_x^7$ $\qquad$ $C_x^3 = 56$

$\dfrac{C_n^3}{C_n^2} = 18$ $\qquad$ $\dfrac{C_n^5}{C_n^4} = 17$

$\dfrac{C_n^4}{C_n^2} = 13$ $\qquad$ $C_x^5 = C_x^7$

$C_n^2 + C_n^1 = C_n^0$ $\qquad$ $C_{x-1}^{x-5} = 3 \times C_{x-3}^{x-7}$

$2 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + 2 \cdot C_n^3 = 7n$

Exercice 9 :

Montrer que :

$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ $\qquad$ $C_n^p = C_n^{n-p}$

$C_{13}^{11} = C_{10}^{10} + C_{11}^{10} + C_{12}^{10}$

$C_{10}^5 = C_4^4 + C_5^4 + C_6^4 + C_7^4 + C_8^4 + C_9^4$

$C_{n+1}^{n-1} = C_{n-2}^{n-2} + C_{n-1}^{n-2} + C_n^{n-2}$

$C_{n+1}^p = C_n^{n-p+1} + C_n^p$

$1 + C_{n+2}^{n-2} = n + C_{n-1}^2 + C_n^3 + C_{n+1}^4$

Exercice 10 :

Ecrire le plus simplement possible :

$C_x^5 + C_{x-1}^4 + C_{x-1}^3$ $\qquad$ $C_{15}^x + C_{14}^{x-1} + C_{14}^{x-2}$

$C_n^x + C_{n+1}^{x-1} + C_n^{x-1}$ $\qquad$ $C_{x-1}^{y-1} + C_{x-1}^y + C_x^{y+1}$

$C_{x-1}^3 + C_{x-1}^4 + C_x^{x-3}$ $\qquad$ $C_{2n-1}^3 + C_{2n}^{2n-3} + C_{2n-1}^4$

Exercice 11 :

Soit $T(N,N)$ un tableau carré comportant $(N+1)$ lignes et $(N+1)$ colonnes, les lignes et colonnes sont numérotées de 0 à N .

On remplit ce tableau de tel sorte que la case se trouvant à la n-ème ligne et p-ème colonne contienne le nombre C_n^p pou tout n, $p < N$:

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	...	$C_{(p-1)}$	$\boxed{C_p}$	...	C_N
L_0	C_0^0									
L_1	C_1^0	C_1^1								
L_2	C_2^0	C_2^1	C_2^2							
L_3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3						
L_4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$				
$L_{(n-1)}$							$\boxed{C_{n-1}^{p-1}}$	$\boxed{C_{n-1}^{p}}$		
$\boxed{L_n}$	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	...		$\boxed{C_n^p}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\ddots$	
L_N	C_N^0	C_N^1	C_N^2	C_N^3	C_N^4		...	C_N^p	...	C_N^N

1°) Montrer les égalités suivantes :

$$C_{n-1}^{p} + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p \qquad \text{et} \qquad C_n^{n-p} = C_n^p$$

2°) A partir de ces deux égalités, remplir le tableau $T(9,9)$ comportant 10 lignes et 10 colonnes

3°) Trouver sans faire de calcul les valeurs exactes de :

$$C_6^4 \quad , \quad C_8^5 \quad , \quad C_9^3 \quad \text{et} \quad C_9^6$$

Exercice 12 :

1°) Développer suivant les puissances décroissantes de a les expressions suivantes :

$$(a+b)^0$$

$$(a+b)^1$$

$$(a+b)^2$$

$$(a+b)^3$$

$$(a+b)^4$$

2°) Donner le développement de $(a+b)^n$, $n \in IN$ (Formule du binôme de Newton)

2°) Donner le développement de $(a-b)^n$ pour $n \in IN$

3°) Développer $(x+1)^3$, $(x-1)^3$, $(a+b)^5$, $(a-b)^6$

$(x+1)^n$, $(x-1)^n$, $(2x+1)^7$, $(x-2)^5$

Exercice 13 :

1°) Démontrer que $(a+b)^3+(a-b)^3 = 2a(a^2+3b^2)$

2°) En déduire une simplification de l'expression :

$$f(x) = (x+\sqrt{1+x^2})^3 + (x-\sqrt{1+x^2})^3$$

Exercice 14:

1°) Quel est le coefficient de x^7 dans le développement de $(1+x)^{15}$?

2°) Quel est le coefficient de x^7 dans le développement de $(2-x)^{10}$?

Exercice 15 :

1°) Ecrire le développement de $(a+b)^5$

2°) Ecrire le développement de $(1+x)^5$

3°) Ecrire le développement de $(1-\sqrt{2})^5$ sous la forme $p+q\sqrt{2}$, ($p, q \in Z$)

Exercice 16 :

Une expérience consiste à lancer 5 fois de suite une pièce de pile ou face

1°) Combien y a-t-il de résultats possibles dans cette expérience ?

2°) Parmi ces résultats, combien font apparaître :

a) 0 fois pile b) 1 fois pile

c) 2 fois pile d) 3 fois pile

e) 4 fois pile f) 5 fois pile

3°) Montrer que $\forall n \in IN \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ puis vérifier les résultats trouvés dans 2°)

Exercice 17 :

Une expérience consiste à lancer 3 fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6

1°) Combien y a-t-il de résultats possibles dans cette expérience ?

2°) Dans combien de cas peut-on faire apparaître :

a) 0 fois la face n°1 b) 1 fois la face n°1

c) 2 fois la face n°1 d) 3 fois la face n°1

3°) Montrer que $\forall n \in IN \quad 6^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 5^k$ puis vérifier les résultats trouvés dans 2°)

Chapitre 12 : RAPPELS SUR LES VECTEURS

1. Bipoints équipollents

Deux bipoints (A, B) et (A', B') sont équipollents si le quadrilatère ABB'A' est un parallélogramme.

Caractérisation : (A, B) et (A', B') sont équipollents si (A, B') et A', B) ont même milieu.

2. Vecteurs

a) Définitions :

- On appelle vecteur $\overrightarrow{AB}$ du plan l'ensemble des bipoints équipollents à (A, B). Tout bipoint équipollent à (A,B) est un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

La direction de $\overrightarrow{AB}$ est la droite (AB), son sens de A vers B, et sa norme $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = d(A,B) = AB$.

- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.
- Si $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = d(A,B) = 0$, $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul et on écrit $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
- Un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme est égale à 1.
- Si A, B, C et D ne sont pas alignés, ABCD est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

b) Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction.

Théorème :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Théorème

Soit $\vec{u}$ un vecteur donné.

Pour tout point A, il existe un point unique M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

3. Produit scalaire

a) définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel $\vec{u}.\vec{v}$ défini par $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$. (forme géométrique)

Et si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé, alors $\vec{u}.\vec{v} = x.x'+y.y'$ (Forme analytique)

Remarque :

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$

donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2.\vec{u}.\vec{v}$

On a donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$

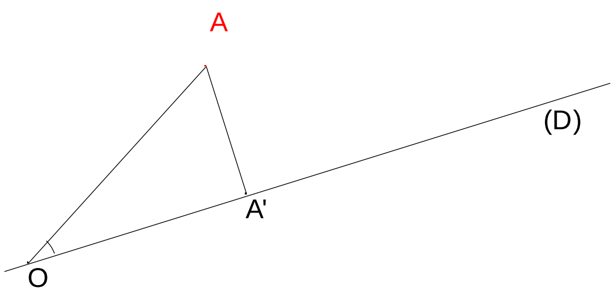
b) Propriétés :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (On dit que le produit scalaire est commutatif)
- $\vec{0}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{0} = 0$.
- $(k.\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

c) Applications :

- Projection orthogonale

Soit A un point du plan, et (D) une droite.
La projection de A sur (D) est le point A' de (D) tel que (AA') soit orthogonale à (D).
C'est le point de D le plus proche de A.
La distance de A à (D) est d(A,A').



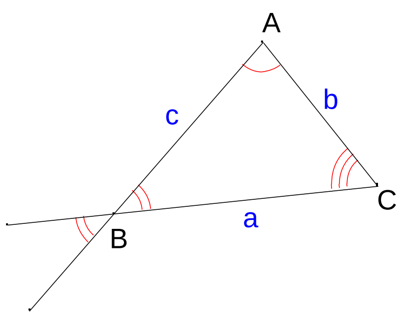
Si on considère le triangle OA'A qui est triangle en A' , on a :

$\cos(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA}) = \frac{OA'}{OA}$.

D'où $OA' = OA\cos(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA})$

- Relation entre les côtés 'un triangle quelconque

ABC est un triangle quelconque, AB = c, BC = a et AC = b



D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AC.AB.\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

Comme $\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA}) = \cos\hat{A}$,on a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$.

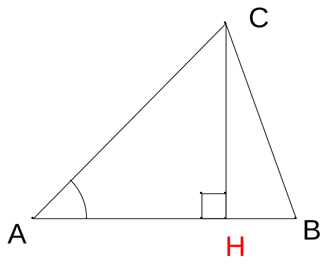
Remarque :

Lorsque le triangle est rectangle en A : cos A = 0, on retrouve le théorème de Pythagore

De même, on a, pour les deux autres côtés, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\hat{B}$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\hat{C}$$

L'aire d'un triangle ABC est égale à $S = \frac{1}{2}AB.HC$ où H est la projection de C sur la droite (AB). Donc $S = \frac{1}{2}bc.\sin\hat{A}$



De même , $S = \frac{1}{2}ac.\sin\hat{B}$ et $S = \frac{1}{2}ab.\sin\hat{C}$.

D'où $2S = ac.\sin\hat{B} = ab.\sin\hat{C} = bc.\sin\hat{A}$.

En divisant par abc, on a $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$,

et en passant à l'inverse, $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$

- <u>Equation d'une droite</u>

Etant donné un point A(x_0, y_0).

Un point M(x,y) appartient à la droite D passant par A et dont un vecteur normal est $\vec{u}(a;b)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, donc si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$.

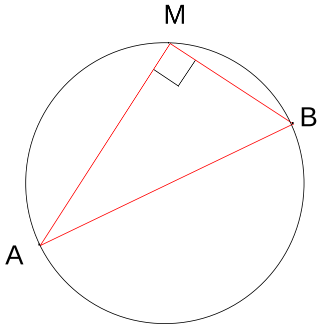
Cette égalité donne l'équation cartésienne de la droite D.

- <u>Equation d'un cercle :</u>

- Un point M(x;y) appartient au cercle de centre A(a,b) et de rayon R si AM = R

Merci à sakso

Sawous2007@yahoo.fr



Comme $AM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, on a l'équation cartésienne du cercle de centre A(a,b) et de rayon R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

- Considérons un cercle de diamètre [AB].
  Si M est un point de ce cercle distinct de A et de B, alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux. Donc $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

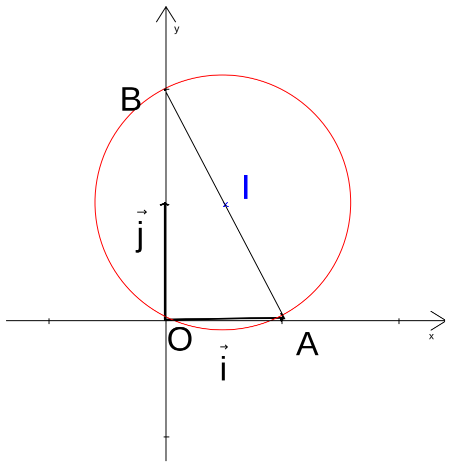
Cette égalité donne une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB].

Exemple :

Donner une équation du cercle de diamètre [AB] où A (1 ; 0) et B(0 ; 2).

- Un point M(x ; y) appartient à ce cercle si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$
  Comme les coordonnées des vecteur $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont respectivement (x-1 ; y) et (x ; y-2), cette égalité s'écrit (x-1).x+y.(y-2)=0.

Ce qui donne en développant : $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$: c'est l'équation du cercle.



- Le centre de ce cercle est le point $I(\frac{1}{2};1)$ et son rayon est

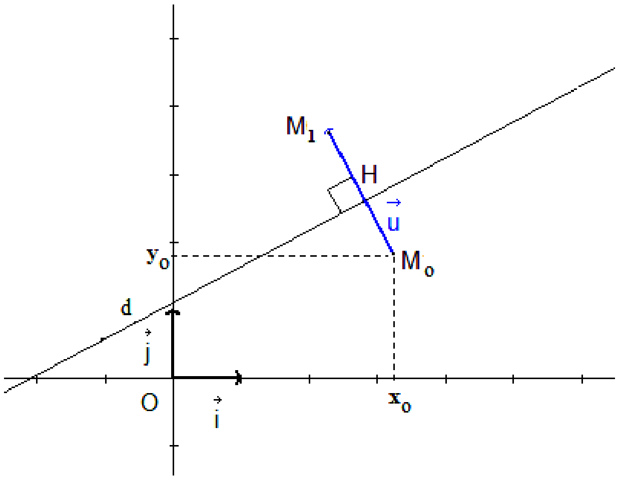
$$r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

On peut retrouver l'équation en utilisant la première méthode :
Un point M(x ;y) appartient à ce cercle si AM = r; donc si

$$\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 + (y-1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } (x-\frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$$

- <u>Distance d'un point à une droite d'équation donnée</u>

On considère une droite d d'équation ax + by +c = 0 et un point $M_0(x_0 ; y_0)$ n'appartenant pas à d.
Notons H le projeté orthogonal de M_0 sur d.
La distance de M_0 à d est la distance de M_0 à H



Le vecteur $\vec{u}(a;b)$ est normal à d.

Le point M_1 défini par $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{u}$ est tel que $M_0M_1 = \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Si x_H et y_H sont les coordonnées de H, on a, puisque H appartient à d, $ax_H + by_H = c$.

D'une part , $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\overrightarrow{M_0H}$ ont respectivement comme coordonnées $(a;b)$ et $(x_H - x_0 ; y_H - y_0)$

Donc $\overrightarrow{M_0M_1}.\overrightarrow{M_0H} = a(x_H - x_0) + b(y_H - y_0)$,

Ou $\overrightarrow{M_0M_1}.\overrightarrow{M_0H} = -(ax_0 + by_0 + c)$.

D'autre part $\overrightarrow{M_0M_1}.\overrightarrow{M_0H} = M_0M_1.M_0H.\cos(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0H})$

D'où $M_0M_1.M_0H.\cos(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0H}) = -(ax_0 + by_0 + c)$

$$M_0H = \frac{-(ax_0 + by_0 + c)}{M_0M_1.\cos(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0H})}$$

Ainsi $$M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}.\cos(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0H})}$$

I. GENERALITES :

Une application f de E vers F est bijective si quel que soit y de F, il existe un et un seul élément x de E tel que f(x) = y.

Une transformation est une bijection du plan dans lui-même.

Les symétries, les homothéties de rapports non nuls, les rotations, et les translations sont des transformations du plan.

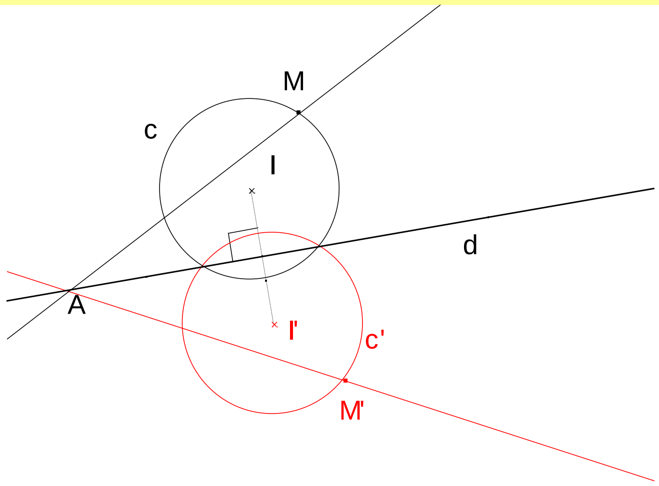
II. LES TRANSFORMATIONS USUELLES

1. Réflexions (ou symétries orthogonales)

La réflexion par rapport à une droite d associe :
- à chaque point M n'appartenant pas à d, le point M' tel que d soit la médiatrice du segment [MM'].
- à chaque point M de d, le point M lui-même.

Par une réflexion :
- l'image d'une droite est une droite;
- l'image d'un segment est un segment de même longueur;
- l'image d'un cercle C est un cercle de même rayon (et dont le centre est l'image du centre de C).

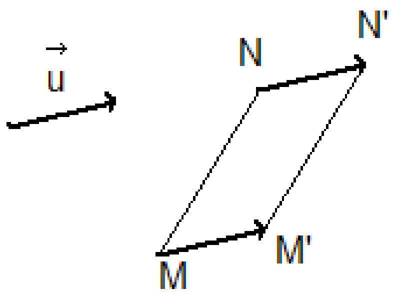
Les réflexions conservent le distance : si M' est l'image de M et N' l'image de N, alors M'N' = MN



I' est l'image de I, M' celle de M, la droite (AM') celle de la droite (AM). L'image du cercle c (de centre I) est le cercle c'(de centre I').

2. Translation

Une translation de vecteur $\vec{u}$ associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

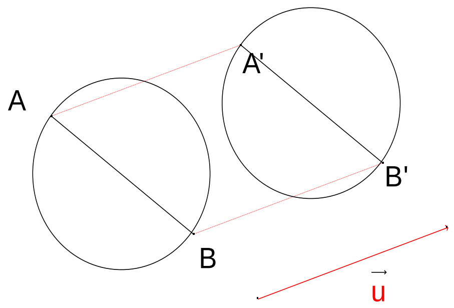


Pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.
MNN'M' est donc un parallélogramme.

Les translations conservent donc la distance.

Par une translation,

- l'image d'une droite (AB) est une droite parallèle à (AB)
- l'image d'un segment est un segment de même longueur
- l'image d'un cercle de centre O est un cercle de même rayon et de centre O', image de O par la translation
- l'image d'un triangle ABC est un triangle semblable à ABC

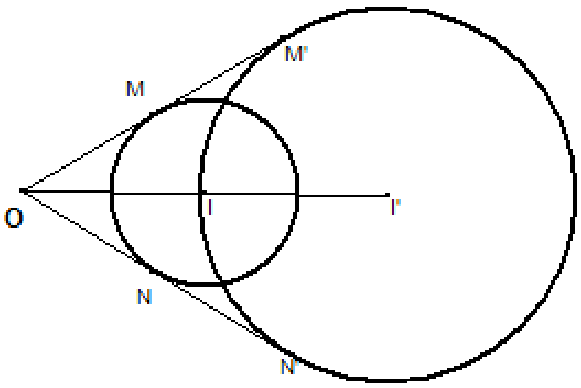


3. Homothétie

Une homothétie de centre O et de rapport k (où $k \in IR^*$) associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Pour tous points M et N d'image respective M' et N', on a $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

On en déduite que M'N' = |k|MN.



Par une hon[illegible]

- l'image d'une droite (AB) est une droite parallèle à (AB)
- l'image d'un segment de longueur l est un segment de longueur |k|.
- l'image d'un cercle de centre I et de rayon R est un cercle de rayon |k|R et de centre I', image de I par l'homothétie
- l'image d'un triangle ABC est un triangle semblable à ABC

Homothéties particulières :

- Une homothétie de rapport 1 est l'identité du plan
- Une homothétie de centre O et de rapport -1 est une symétrie centrale, de centre O.

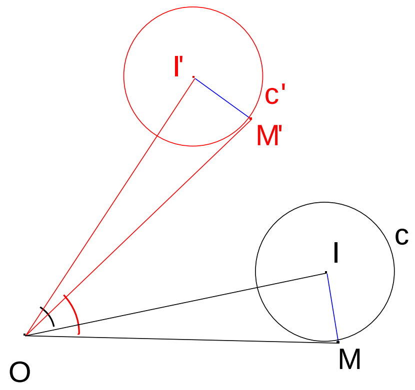
Une homothétie de rapport différent de 1 ne conserve pas les distances

4. Rotation

Une rotation de centre O et d'angle θ associe à tout point M le point M' tel que OM' = OM et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$.

Par une rotation d'angle θ

- l'image d'une droite (AB) est une droite faisant un angle θ avec (AB)
- l'image d'un segment de longueur l est un segment de même longueur
- l'image d'un cercle de centre I de même rayon et de centre I', image de I par l'homothétie
- l'image d'un triangle ABC est un triangle semblable à ABC .



Rotations particulières :

- Une rotation d'angle 0 (ou 2π) est l'identité.
- Une rotation de centre O d'angle π est une homothétie de centre O et de rapport -1. C'est aussi une symétrie centrale de centre O.

Quelques propriétés :

- Si ABC est un triangle isocèle en A, alors C est l'image de B par une rotation.
- Si ABC est un triangle isocèle et rectangle en A, alors C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- Si ABC est un triangle équilatéral, alors C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Les rotations conservent le distance : si M' est l'image de M et N' celle de N, alors M'N' = MN

II. Composées de transformations usuelles.

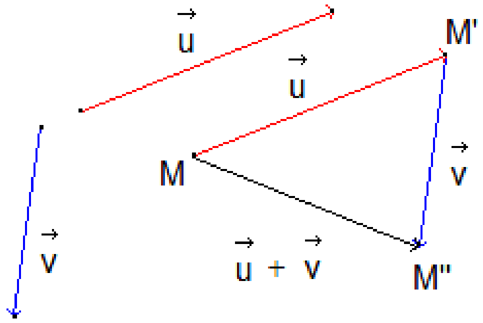
1. Rappels

Si f est une application de E vers F et g une application de F vers G, alors gof est l'application de E dans G qui, à tout élément x de E, associe l'élément z de G tel que gof(x) = g[f(x)]

On associe d'abord à x son image y par f, puis à y son image z par g.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & y \arrow[r, "g"] & z \end{tikzcd}$$

2. Composée de deux translations



Si $t_{\vec{u}_1}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u_1}$ et $t_{\vec{u}_2}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u_2}$.

Alors la composée de $t_{\vec{u}_2}$ et $t_{\vec{u}_1}$ est la translation de vecteur $\vec{u}_2+\vec{u}_1$

Donc $t_{\overrightarrow{u_1}} \circ t_{\overrightarrow{u_2}} = t_{\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_1}}$

3. Composée de deux homothéties de même centre

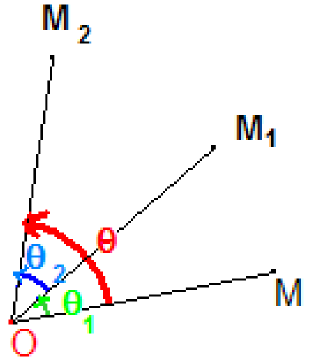
Une homothétie de centre O et rapport k se note en général h (O , k)

La composée d'une homothétie de centre O et rapport k_1 et d'une homothétie de centre O et de rapport k_2 est l'homothétie de centre O et de rapport $k=k_1.k_2$.
Ce qui s'écrit $h(O,k_1)oh(O,k_2)=h(O,k_1.k_2)$

4. Composée de deux rotations de même centre

Soit M_1 l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ_1 et M_2 l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle θ_2.

On a $\begin{cases} OM_1 = OM \\ (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_1}) = \theta_1 \end{cases}$ et $\begin{cases} OM_2 = OM_1 \\ (\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}) = \theta_2 \end{cases}$



On a donc $\begin{cases} OM_2 = OM \\ (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}) = \theta_1+\theta_2 \end{cases}$

Théorème :

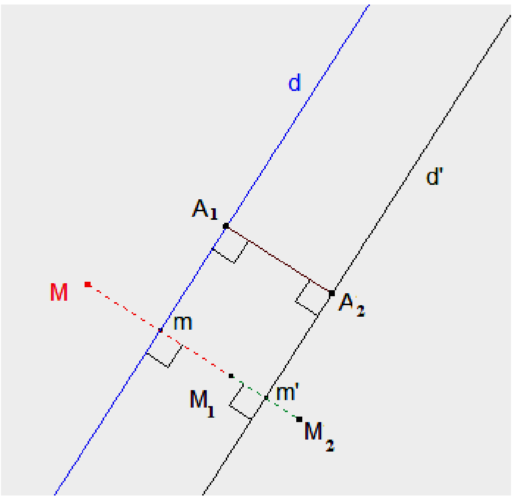
La composée de deux rotations r_1 et r_2 de même centre O et d'angle respectifs θ_1 et θ_2 est la rotation de centre O et d'angle $\theta_1+\theta_2$

5. Composée de deux réflexions d'axes d et d'

Soit d une droite. On va noter s_d la réflexion d'axe d

a) Si d et d' sont parallèles.

Notons M_1 l'image de M par S_d, et M_2 l'image de M_1 par $S_{d'}$. M_2 est donc l'image de M par lacomposée $S_{d'} o S_d$ de $S_{d'}$ et S_d.Le point M_1, image de M par la réflexion d'axe d est tel que $\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{mM_1}$ et M_2, image de M_1 par la réflexion d'axe d' est tel que $\overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{M_1m'}$.



En utilisant la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$

m étant le milieu de [MM_1] et m' le milieu de [M_1M_2], on a

$\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{mM_1} + \overrightarrow{M_1m'}$

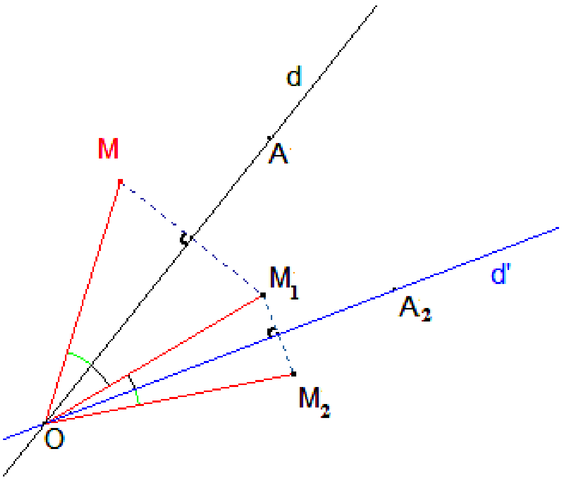
Or $\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{A_1A_2}$,

D'où $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$.

Théorème :

La composée de deux réflexion d'axes d et d' parallèles est la translation de vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ où A_1 et A_2 sont respectivement des points de d et d' avec (A_1,A_2) perpendiculaire à d.

b) Si d et d’ sont sécantes d'intersection O



Soient A_1 un point de d et A_2 un point de d'. On reprend les notations précédentes .

- Si M est en O, il en est de même de M_1 et de M_2.
- Supposons M distinct de O.

On a $OM = OM_1 = OM_2$, et puisque (OA) est la médiatrice de $[MM_1]$, on a

$$(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OM_1}) = (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA_1})$$

De même, puisque (OA_2) est la médiatrice de $[M_1 M_2]$,

$$(\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OA_2})$$

Par la relation de Chasles pour les angles, on a :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_2}) &= (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OA_2}) + (\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OM_2}) \\ &= 2(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OM_1}) + 2(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OA_2}) \\ &= 2(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2})\end{aligned}$$

On a donc $\begin{cases} OM = OM_2 \\ (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_2}) = 2(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2}) \end{cases}$

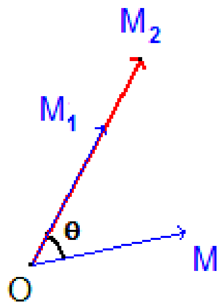
Théorème :

La composée de deux réflexion d'axes d et d' sécants en O est la rotation de centre O et d'angle $2(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2})$ où A_1 et A_2 sont respectivement des points de d et d'.

6. Composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre

Soit r la rotation de centre O et d'angle θ et h l'homothétie de centre O et de rapport k. Si M_1 est l'image d'un point M par r et M_2 l'image de M_1 par h, on a :

$\begin{cases} OM = OM_1 \\ (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_1}) = \theta \end{cases}$ et $\overrightarrow{OM_2} = k\overrightarrow{OM_1}$.



Donc $OM_2 = k.OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM}, k\overrightarrow{OM_1}) = \theta$

La composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre est appelée similitude plane directe. Le rapport de l'homothétie est le rapport de la similitude, l'angle de la rotation est l'angle de la similitude et le centre commun est le centre de la similitude.

Donc si on note S la similitude de centre O, de rapport k et d'angle θ, et M' l'image de M par S, on a : $\begin{cases} OM' = K.OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \end{cases}$

Plus généralement une similitude plane est la composée d'une homothétie de rapport positif et d'une isométrie. Cette composition est commutative.

C'est une transformation qui multiplie les distances par un réel positif k, : il existe un réel k > 0, appelé rapport de la similitude, tel que si M et N sont deux points d'images respectives M' et N', alors M'N' = k.MN.

- Si la similitude conserve la mesure des angles orientés, on dit que c'est une similitude plane directe,
- Si la similitude transforme les angles orientés en leurs opposés, on dit que c'est une similitude plane indirecte.

III. APPLICATION RECIPROQUE

1. Rappel

Si f est une application de E vers F bijective, alors elle admet une réciproque, notée f^{-1}, de F vers E, bijective, définie ainsi : si $y= f(x)$, alors $x = f^{-1}(y)$.

$fof^{-1}(y) = y$ pour tout y de F et $f^{-1}of(x) = x$ pour tout x de E

2. Réciproque d'une translation

Une translation de vecteur $\vec{u}$ associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Donc $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$.Ainsi :

Théorème :

La réciproque d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$

3. Réciproque d'une réflexion :

M' est l'image de M par la symétrie d'axe d si d est la médiatrice de [MM'].
Donc :

Théorème :

La réciproque d'une réflexion d'axe d est cette réflexion même

4. Réciproque d'une homothétie

Une homothétie de centre O et de rapport k non nul associe à tout point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. Donc $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$. Ainsi :

Théorème :

La réciproque d'une homothétie de centre O et de rapport k non nul est l'homothétie de même centre O, et de rapport $\frac{1}{k}$

5. Réciproque d'une rotation

Une rotation de centre O et d'angle θ associe à tout point M le point M' tel que OM' = OM et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$, donc $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) = -\theta$

Théorème :

La réciproque d'une rotation de centre O et d'angle θ est la rotation de centre O et d'angle $-\theta$.

IV- ISOMETRIES

Lorsqu'une transformation conserve les distances, on dit que c'est une isométrie.
Une transformation f est donc une isométrie si pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, on a M'N' =MN.

Les translations, les symétries, les rotations et les homothéties de rapports 1 sont des isométries.
Une homothétie de rapport différent de 1 n'est pas une isométrie.

La composée de deux isométries est une isométrie.

Chapitre 14 :STATISTIQUE

I- GENERALITES :

- 1.- Vocabulaires :

a.- Population - Variable

Effectuer une étude statistique consiste à collecter, organiser et exploiter des informations sur un ensemble appelé **population**, délimité par une propriété commune.

Cette population est constituée d'**individus** ou **unités statistiques**, qui peuvent être des objets, des idées, des êtres vivants…
La propriété étudiée est appelée variable ou caractère.

Le caractère est **qualitatif** lorsque les valeurs prises ne sont pas des nombres, et **quantitatif**, lorsque les valeurs prises sont des nombres.
Un caractère quantitatif peut être discret si les valeurs prises sont isolées, ou continu s'il peut prendre toutes les valeurs possibles d'un intervalle.

b.- Effectifs – Fréquence- Classes

L'effectif total est le nombre d'individus de la population.

On note en général x_1, x_2, …, x_n les valeurs prises par la variable étudiée et n_i le nombre d'individus sur lesquels on a observé la valeur x_i. n_i est appelé **effectif de la valeur x_i** de la variable.
La série statistique ainsi définie se note (x_i , n_i).

L'effectif total est alors $N = \sum_{i=1}^{n} n_i = n_1 + n_2 + ... + n_n$.

Le rapport $\frac{n_i}{N} = f_i$ est appelé fréquence de xi.

On a :

- $0 \leq f_i \leq 1$ quel que soit i
- $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_1 + f_2 + .. + f_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{N} = 1$
- $100.f_i$ donne le pourcentage des individus ayant le caractère x_i.

Lorsque le caractère est continu, on ne peut pas considérer chaque valeur séparément, on regroupe alors ces valeurs par classe.
De même lorsque l'effectif est assez important, il est plus commode de regrouper les valeurs par classe.

Exemple :

La population étudiée est l'ensemble des élèves d'une classe. Le caractère étudié est la note obtenue lors d'un certain examen.
Les notes obtenues sont :

12 12 14 5 8 8 9 16 15 7 6 10 10 12 9 9 10 7 6 10 11 9 7 9 11

Ecrivons cette série de notes dans l'ordre croissant :

5 6 6 7 7 7 8 8 9 9 9 9 9 10 10 10 10 11 11 12 12 12 14 15 16

On voit que 1 élève a eu 5, deux ont eu 6, …. On peut réécrire cette série sous forme de tableau :

Notes	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs	1	2	3	2	5	4	2	3	0	1	1	1

Effectifs cumulés – Fréquences cumulées

Considérons une série à caractère quantitatif x_i. On ordonne les valeurs dans l'ordre croissant : $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$.

Si n_i est l'effectif de la valeur x_i, on appelle effectif cumulé croissant jusqu'à la i^{e} valeur le nombre : c'est le nombre des individus présentant une modalité inférieure à x_i .

Notes	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs	1	2	3	2	5	4	2	3	0	1	1	1
Effectif cumulé	1	3	6	8	13	17	19	22	22	23	24	25

Ce tableau nous donne le nombre d'élèves qui ont eu une note inférieure à une note donnée. Par exemple, 6 élèves ont eu une note inférieure ou égale à 7, 13 n'ont pas eu la moyenne…

On définit de même

- la **fréquence cumulée** croissante : $\sum_{j=1}^{i} f_j = f_1 + f_2 + \ldots + f_i$ où N est l'effectif total de la population

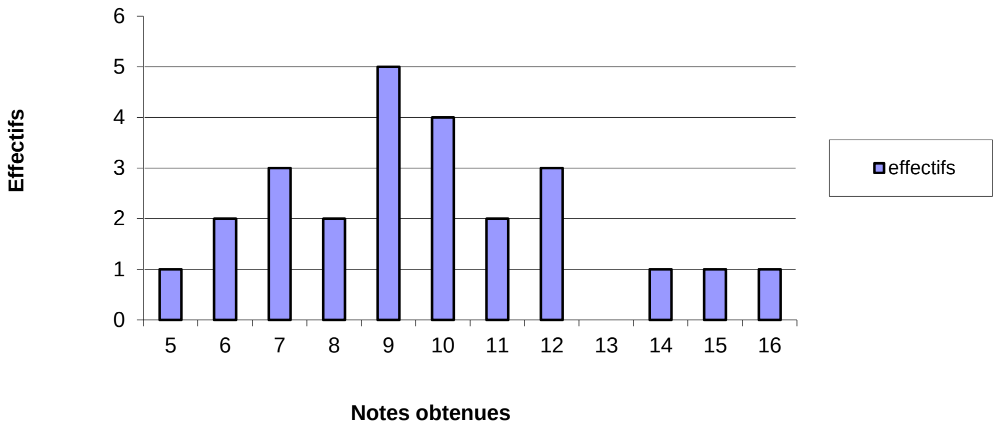
Notes	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
effectifs	1	2	3	2	5	4	2	3	0	1	1	1
Fréquences	0,04	0,08	0,12	0,08	0,2	0,16	0,08	0,12	0	0,04	0,04	0,04
Fréquences cumulées	0,04	0,12	0,24	0,32	0,52	0,68	0,76	0,88	0,88	0,92	0,96	1

- 2.- Diagrammes

Un diagramme est une représentation graphique de la série. Il permet de visualiser ensemble les données statistiques.

a) Diagramme à bandes. Diagramme à bâtons

On porte en abscisses les valeurs de la variable x et en ordonnées les effectifs. Les effectifs sont représentés par des rectangles (bandes) verticales de longueurs proportionnelles aux effectifs. On peut remplacer les bandes par des segments : on obtient un diagramme en bâtons.



b) Diagramme à une seule bande.

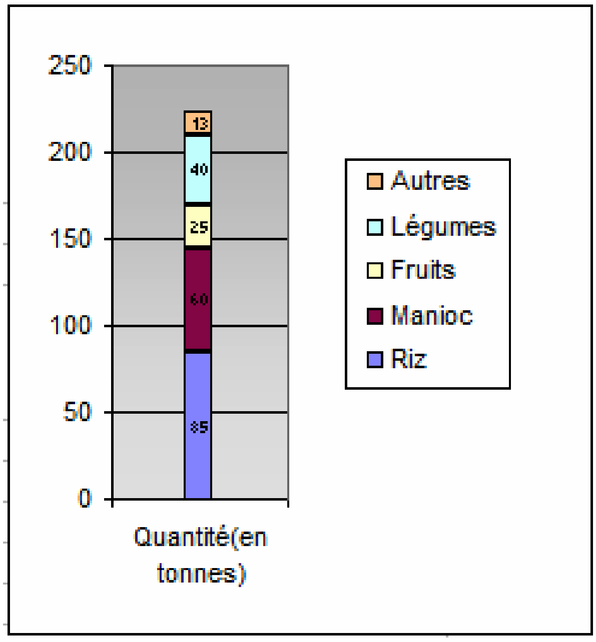
La longueur d'une bande est partagée proportionnellement aux effectifs ou aux fréquences.

Exemple : Voici la production agricole annuelle d'une certaine commune rurale :

Produit	Riz	Manioc	Fruits	Légumes	Autres
Quantité (en tonne)	85	60	25	40	13

c) Diagramme à secteur

C'est un diagramme de même type que le diagramme à une seule bande. Le disque est partagé en secteurs dont les angles sont proportionnels aux effectifs.



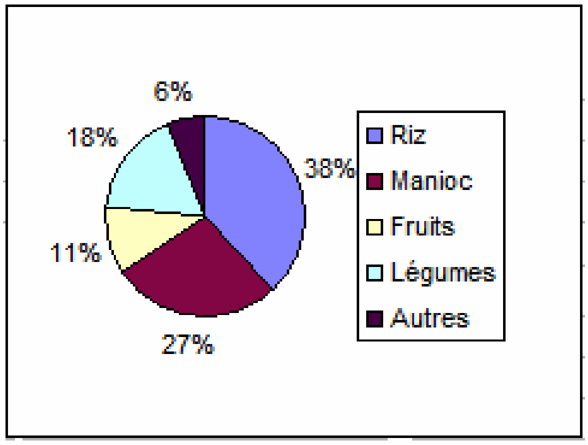


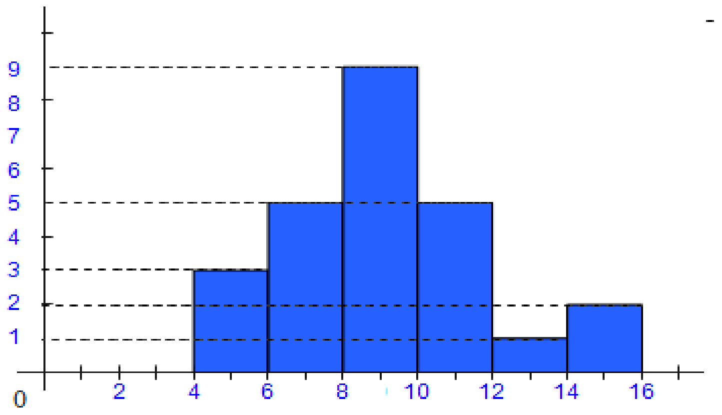
Diagramme à une seule bande. Diagramme à secteur

d) Histogrammes : Cas d'une série continue ou série classée.
On porte en abscisses les valeurs de la variable x et en ordonnées les effectifs. L'effectif est représenté par un rectangle dont la base est égale à l'étendue de la classe et la hauteur proportionnelle à l'effectif.

Exemple

Dans l'exemple précédent, regroupons les notes en classes d'amplitude 2
On obtient le tableau suivant :

Notes	[4 ; 6]	]6 ; 8]	] 8 ; 10]	] 10 ; 12]	] 12 ; 14]	]14 ; 16]
Effectifs	3	5	9	5	1	2



Polygones des effectifs
En reliant les extrémités des bâtons, on obtient le polygone des effectifs.
Dans le cas des histogrammes, on prend les centres des classes.

II- CARACTÉRISTIQUES D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

Un caractéristique est une grandeur qu'on utilise pour résumer une série statistique.
On distingue deux sortes de caractéristique : caractéristiques de position et caractéristiques de dispersion.

- 1.- Caractéristique de position

a) le mode :

Le mode (ou dominante) est la valeur la plus fréquente de la variable. C'est la variable qui a le plus grand effectif.

Le mode est défini même si la variable est qualitative.
Pour une série classée, dont les classes sont d'égal effectif, la classe modale est la classe qui correspond au plus grand effectif.
Si une série peut posséder un seul mode on dit qu'elle est unimodale. Si elle en possède plusieurs, on dit qu'elle est plurimodale.

b) la moyenne :

- Définition :

La moyenne arithmétique d'une série statistique est égale à la somme des valeurs du caractère divisées par leur nombre.

i- Cas des données énumérées : $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i$

ii- si la série est donnée par sa distribution d'effectifs, les valeurs x_1, x_2, …, x_n ayant respectivement pour effectifs n_1, n_2, ..,n_k , alors :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

iii- Cas où les valeurs sont regroupées en classes : les n_i valeurs de la i-ème classe sont supposées groupées au centre x_i de la classe. On revient ainsi au cas précédent.

Remarque :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{N} = \frac{n_1}{N}x_1 + \frac{n_2}{N}x_2 + \ldots + \frac{n_k}{N}x_k$$

Donc si f_i est la fréquence de la variable x_i alors :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

- propriétés (à établir en exercice) :

- Soit une série statistique sur une population et une partition de cette population en deux sous-populations d'effectifs respectifs n_1 et n_2. Si m_1 et m_2 sont les moyennes respectifs des deux sous-populations, alors la moyenne de la population est $\bar{x} = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{n_1 + n_2}$
- Si $\bar{x}$ est la moyenne de la série (x_i, n_i),
  - ➢ alors la moyenne de la série $(x_i - a, n_i)$ est $\bar{x} - a$
  - ➢ la moyenne de la série (hx_i, n_i) est $h.\bar{x}$

  Donc , si on pose $y_i = ax_i + b$ alors la moyenne de la série (y_i, n_i) est $\bar{y} = a.\bar{x} + b$

c) la médiane :

- définition :

C'est la valeur de la variable qui partage la population en deux parties de même effectif : c'est donc la valeur M de x_i telle que la moitié au plus des valeurs des x_i soient inférieures à M et la moitié au plus des valeurs de x_i supérieure à M

- Détermination de la médiane :
  - Cas d'une série discrète

On range dans l'ordre croissant les valeurs de la variable, chaque valeur étant écrite autant de fois qu'elle est prise :
- si le nombre de valeurs est impair, la médiane est la valeur du milieu
- si le nombre de valeurs est pair, on peut prendre comme médiane tout valeur comprise entre les deux valeurs au centre. Par convention, on prend la demi somme de ces deux valeurs : $M = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ si x_i et x_{i+1} sont les valeurs au centre.

Exemple :

5 6 6 7 7 7 8 8 9 9 9 9 **9** 10 10 10 10 11 11 12 12 12 14 15 16

↑ M

- Cas d'une série classée :

On trace le polygone des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants. La médiane M est le l'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes.
Un autre manière de la déterminer est de tracer le polygone des effectifs cumulés (ou fréquence cumulées) et la droite d'équation $y = \frac{N}{2}$ où N est l'effectif total de la population. La médiane est l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec le polygone.

2.- Caractéristique de dispersion.

Une caractéristique de dispersion est utilisée pour évaluer la dispersion d'une série. On utilise le plus souvent la variance et l'écart type .

Variance. Ecart type

- Définition

La *variance* d'une série est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

$$V = n_1(x - x_1)^2 + n_2(x - x_2)^2 + ... + n_k(x - x_k)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x - x_i)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

L'écart type d'une série est la moyenne quadratique des écarts à la moyenne. C'est la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V}$$

- Remarques.

Plus la variance est grande, plus la série est dispersée.
Plus la variance est petite (voisin de 0), pus la série est resserrée autour de la moyenne.
La variance est une quantité positive ou nulle.

- Méthode de calcul

Même avec des valeurs observées x_i très simples, il arrive souvent que la moyenne $\overline{x}$ soit un nombre décimal. Dans ce cas, le calcul de la variance V nécessite des calculs fastidieux.

La formule de Koenig : $V = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{N} - (\overline{x})^2$ (que vous allez démontrer en exercice) permet de simplifier les calculs.

- Propriétés (à établir en exercice):

- La variance et l'écart-type de la série $(x_i - a, n_i)$ sont indépendants de a : ce sont respectivement la variance et l'écart-type de (x_i, n_i)
- Si la variance et l'écart-type de la série (x_i, n_i) sont respectivement V et σ ,

alors la série $(h.x_i, n_i)$ a pour variance $V' = h^2 V$ et pour écart-type $\sigma' = |h|\sigma$

RECUEIL DE DEVOIRS SURVEILLES

Devoir n°1 de Mathématiques

Exercice 1

1. Résoudre les équations suivantes :
   a $x^2 = 7x$
   b $x^4 - x^2 = 0$
   c $-x^2 + 7x - 3 = 5 - 2x$
   d $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{6}x + 3\sqrt{2} = 0$
2. On cherche à résoudre l'équation $(E) : x^3 + 6x^2 + 13x + 10 = 0$.
   a Montrer que $x^3 + 6x^2 + 13x + 10 = (x+2)(x^2 + 4x + 5)$

Exercice 4 On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 20$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Vérifier que 1 est une racine de f, puis déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que, pour tout réel x, $f(x) = (x-1)Q(x)$.

   En déduire les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses, ainsi que le signe de $f(x)$.

2. a) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x-2)^3 + 9(x-2)^2 - 8$.

   b) On note u la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par $u(x) = (x-2)^3$.
   Ecrire u comme la composée de deux fonctions de référence, et en déduire le sens de variation de u.

   c) Déterminer le sens de variation de f sur $[2;+\infty[$.

   d) On appelle g la fonction définie sur $[3;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   Montrer que g est minorée sur $[3;+\infty[$, c'est-à-dire qu'il existe un réel a tel que, pour tout réel $x \in [3;+\infty[$, $g(x) \leqslant a$.

Devoir n°2 de Mathématiques

Exercice 1

1. Soit v et w deux fonctions définies et croissantes sur un intervalle I.
   Montrer que la fonction $u = v + w$ est aussi croissante sur I.

2. a) On considère la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par l'expression $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 2}$.

?

Exercice 2

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
   On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, et M le point de coordonnées $M(a;b)$.
   On suppose que pour tout x tel que $(a+x) \in I$, on a aussi $(a-x) \in I$.

Devoir n°3 de Mathématiques

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+5}{x^2-9}$.

Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 2 Soit $g : x \mapsto \dfrac{2x^2+5x+4}{(x+2)^2}$, et $h : x \mapsto 2x+1$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Quelle est la position relative des courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ représentatives des fonctions g et h ?

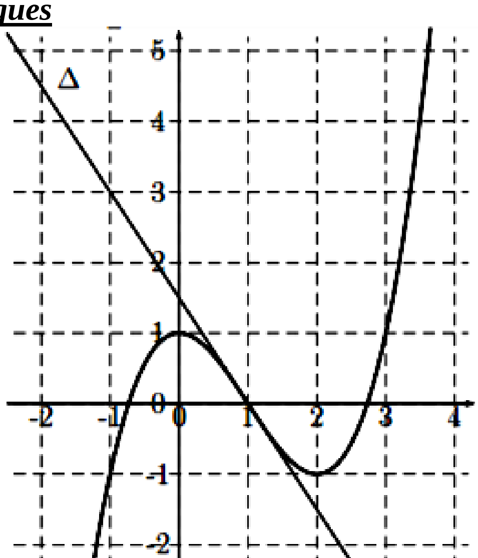
c) Tracer $\mathcal{C}_h$ et l'allure de $\mathcal{C}_g$.

Exercice 3 Montrer l'inégalité, pour tout x réel, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x$.

Devoir n°4 de Mathématiques

Exercice 1

On donne ci-contre une partie de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite Δ est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Par lecture graphique, donner sans justifier :
   a. $f(0)$, $f(1)$, $f'(1)$, $f'(2)$
   b. Le tableau de variation de f.
2. Soit h la fonction définie par $h(x) = [f(x)]^2$.
   a. Exprimer $h'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f'(x)$.

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ par l'expression $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

A. *Etude d'une fonction auxiliaire.*
On pose $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Etudier le sens de variation de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α, dans l'intervalle $[1;3]$.
3. Donner un encadrement de α à 0,1 près.
4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

B. *Etude des variations de f.*
Calculer $f'(x)$, et montrer que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variation de f.

C. *Tangente.*
Déterminer l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Exercice 3 Montrer que pour tout réel x,

$$(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2\,.$$

Exercice 4 Exprimer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ les expressions suivantes :

1. $A(x) = \sin(-x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
2. $B(x) = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(3\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Devoir n°5 de Mathématiques

Exercice 1 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 5x - 5 \text{ et, } g(x) = 2x^2 + 2x + 5$$

On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.

1) Montrer que le point $A(2;17)$ est un point de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$.
2) Déterminer les coordonnées de tous les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$.

Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 + 3x + 1$. On note $\mathcal{P}$ la parabole représentant graphiquement f dans un repère.
Pour m un nombre réel, on note (Δ_m) la droite d'équation $y = mx$.
Pour quelles valeurs de m la droite (Δ_m) coupe-t-elle la parabole en un unique point ?

Exercice 3 Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé, et $A(5\,;2)$, $B(3\,;4)$ et $C(0\,;1)$.

1) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 5 Soit A et B deux points tels que $AB = 5$.

1) Soit G le point défini par la relation : $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.
   Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, puis en déduire les longueurs GA et GB.
2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que $2MA^2 + 2MB^2 = 30$.

Exercice 6 Soit les points $A(2;3)$ et $B(-4;1)$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient l'équation :

$$(x-2)(x+4) + (y-3)(y-1) = 6\,.$$

Devoir n°6 de Mathématiques

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
Montrer que si a et c sont de signes contraires, alors la courbe représentative de la fonction f coupe exactement deux fois l'axe des abscisses.

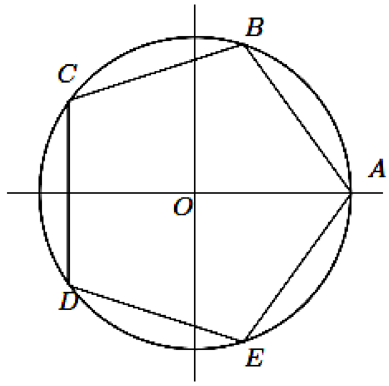
Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 + 3x + 1$. On note $\mathcal{P}$ la parabole représentant graphiquement f dans un repère.

1) Pour p un nombre réel, on note $(\mathcal{D}_p)$ la droite d'équation $y = x + p$.
   Pour quelles valeurs de p la droite $(\mathcal{D}_p)$ coupe-t-elle la parabole en un seul point ? en deux points disctincts ?
2) Pour m un nombre réel, on note (Δ_m) la droite d'équation $y = mx$.
   Pour quelles valeurs de m la droite (Δ_p) coupe-t-elle la parabole en un unique point ?

Exercice 3 Dans le plan orienté, ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{4}$.
M est un point de (AB), N est le symétrique de M par rapport à (AC) et P celui de N par rapport à (BC).
On souhaite démontrer que le triangle CMP est rectangle isocèle.

Exercice 4

$ABCDE$ est un pentagone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O.



1) Indiquer les mesures des angles :

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right), \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right), \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}\right), \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right).$$

2) Quelles sont les coordonnées des points A, B, C, D et E ?

3) Montrer la relation $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\overrightarrow{OA}$.

   On admettra de même la relation $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\overrightarrow{OA}$.

4) $ABCDE$ étant un pentagone régulier, on a (cette relation vectorielle n'est pas à démontrer) :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{0}.$$

   En déduire alors une relation reliant $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

5) On admet la formule de duplication : pour tout nombre réel a, $\cos(2a) = 2\left(\cos(2a)\right)^2 - 1$.

   a) Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation : $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

   b) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $I =]1; +\infty[$ par l'expression : $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{x - 1}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

1) Déterminer les réels α et β tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{2}{x - 1}$

2) Donner le sens de variation de la fonction f.

3) On considère la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$. Pour $x \in I$, on note P le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x, et Q le point de (Δ) d'abscisse x.

   a) Déterminer, en fonction de x, la distance algébrique PQ.

   b) Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite (Δ) ?

   c) Que peut-on dire de la distance PQ lorsque x devient (très) grand ?

4) Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$.

CORRIGE DES DEVOIRS SURVEILLES

Devoir n°1 de Mathématiques

Exercice 1

1. a $x^2 = 7x \iff x^2 - 7x = 0 \iff x(x-7) = 0$ soit $x = 0$ ou $x = 7$.

   b $x^4 - x^2 = 0 \iff x^2(x^2-1) = 0 \iff x^2(x-1)(x+1) = 0$ soit $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$.

   c $-x^2 + 7x - 3 = 5 - 2x \iff x^2 - 9x + 8 = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 32 = 49$: $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9+\sqrt{49}}{2} = 8 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9-\sqrt{49}}{2} = 1.$$

   d $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{6}x + 3\sqrt{2} = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = \left(2\sqrt{6}\right)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 4 \times 6 - 24 = 0$ donc l'équation admet une racine réelle double :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}.$$

2. $(E) : x^3 + 6x^2 + 13x + 10 = 0$.

   a Pour tout réel x, $(x+2)(x^2+4x+5) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2x^2 + 8x + 10 = x^3 + 6x^2 + 13x + 10$

   b $x^3 + 6x^2 + 13x + 10 = 0 \iff (x+2)(x^2+4x+5) = 0$
   $x + 2 = 0$ soit $x = -2$ ou $x^2 + 4x + 5 = 0$: $\Delta = 16 - 20 = -4$: $\Delta < 0$ donc l'équation

Exercice 2

1) Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$, alors on a : $P(x) = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$,

d'où on déduit que $\begin{cases} a = 3 \\ a+b = -7 \\ b+c = -7 \\ c = 3 \end{cases}$, soit donc, $a = 3$, $b = -10$ et $c = 3$.

Ainsi, $P(x) = (x+1)(3x^2 - 10x + 3)$. Le discriminant de $Q(x)$ est $\Delta = 64$ et ses racines sont $x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = 3$. Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont donc : $\mathcal{S} = \left\{-1; \frac{1}{3}; 3\right\}$.

2) a) f est définie pour les valeurs de x telles que $3x^2 - 12x + 12 \neq 0 \iff 3(x-2)^2 \neq 0 \iff x \neq 2$.
f est donc définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) A l'aide de la factorisation obtenue au 1), on a

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$x+1$		-	0	+	|	+	|	+	|	+	
$3x^2-10x+3$		+	|	+	0	-	|	-	0	+	
$3x^2-12x+12$		+	|	+	|	+	0	+	|	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	||	-	0	+	

On a alors,
$f(x) \geq 0 \iff x \in [-1; \frac{1}{3}] \cup [3; +\infty[$.

Exercice 3 Soit $f(x) = x^2 + mx + m$, où m désigne un nombre réel.

1. $f(1) = 1^2 + m + 1 = 1 + 2m = 0 \iff m = -\dfrac{1}{2}$.

   Le produit des racines valant $\dfrac{c}{a} = m = -\dfrac{1}{2}$, on en déduit que la deuxième racine est $-\dfrac{1}{2}$.
2. f admet deux racines distinctes si et seulement si $\Delta > 0$, soit $\Delta = m^2 - 4m = m(m-4) > 0$.
   Δ est un trinôme du second degré qui a pour racines évidentes 0 et 4, et qui est positif à l'extérieur de ses racines. Ainsi, f admet 2 racines $\iff \Delta > 0 \iff m \in]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$.
3. $f(x) > 1 \iff x^2 + mx + (m-1) > 0$.
   Ce trinôme est toujours positif (ne change jamais de signe, et en particulier ne s'annule jamais) si $\Delta = m^2 - 4(m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 < 0$, ce qui est impossible, un carré étant toujours positif ou nul. Ainsi, il n'existe pas de valeur de m telle que $f(x) > 1$ pour tout réel x.

Exercice 4 On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 20$.

1. $f(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 - 24 \times +20 = 0$, donc 1 est bien une racine de f.

   On cherche $Q(x) = ax^2 + bx + c$ tel que pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 3x^2 - 24x + 20 \\ &= (x-1)Q(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 3 \\ c - b = -24 \\ -c = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -20 \end{cases}$$

   Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = (x-1)(x^2 + 4x - 20)$.

   Les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses, sont les points qui ont comme abscisse telle que

   $f(x) = 0 \iff (x-1)Q(x) = 0 \iff \big(x = 1 \text{ ou } Q(x) = 0\big)$.

   $Q(x) = x^2 + 4x - 20$ est un trinôme du second degré qui a pour discriminant $\Delta = 96 > 0$, et adme

   donc deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{96}}{2} = \dfrac{-4-4\sqrt{6}}{2} = -2-2\sqrt{6}$ et $x_2 = -2+2\sqrt{(}$

   Les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses ont donc pour coordonnées

N $$(1; 0) \quad ; \quad (-2-2\sqrt{6}; 0) \quad \text{et} \quad (-2+2\sqrt{6}; 0) .$$

2. a) Pour tout réel x, $(x-2)^3 + 9(x-2)^2 - 8 = (x^2 - 4x + 4)(x-2) + 9(x^2 - 4x + 4) - 8$
   $= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 9x^2 - 36x + 36 - 8$

b)

On note u la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par $u(x) = (x-2)^3$.

Soit v la fonction cube : $v(x) = x^3$ et w la fonction affine $w(x) = x - 2$, alors $u(x) = v(w(x))$, ou $u = v \circ w$.

Comme la fonction cube v est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et la fonction affine w est croissante sur $[2;+\infty[$.

x	2 $\qquad$ $+\infty$
$w(x) = x - 2$	$0 \nearrow$
$v(x) = x^3$	$0 \nearrow$
$u(x) = v(w(x))$	$0 \nearrow$

c) On a $f(x) = u(x) + h(x) - 8$, où $h(x) = (x-2)^2 = (w(x))^2$.
Comme w est croissante et positive sur $[2;+\infty[$, $h(x) = (x-2)^2 = (w(x))^2$ est croissante sur $[2;+\infty[$.
Ainsi, la somme de deux fonctions croissantes $u + h$ est aussi croissante, et donc $f = u + h - 8$ est aussi croissante sur $[2;+\infty[$.

d)

x	3 $\qquad$ $+\infty$
f	$2 \nearrow$
$g = \dfrac{1}{f}$	$\frac{1}{2} \searrow$

$f(3) = (3-2)^3 + 9(3-2)^2 - 8 = 2$.

Ainsi, pour tout réel $x \in [3;+\infty[$, $g(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$:

g est minorée par $\dfrac{1}{2}$ sur $[3;+\infty[$

Devoir n°2 de Mathématiques

Exercice 1

1. Soit v et w deux fonctions définies et croissantes sur un intervalle I.
Alors, pour tous x et y de I, tels que $x < y$, on a $v(x) < v(y)$, car u est croissante sur I, et même $w(x) < w(y)$ car v est croissante sur I.
En additionnant ces deux inégalités, on obtient $u(x) = v(x) + w(x) < v(y) + w(y) = u(y)$.
La fonction u est donc croissante sur I.

2. a) Pour tout $x > 2$, $\quad x - 1 - \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2} - \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{x^2-3x}{x-2} = f(x)$

Ainsi, pour tout réel $x > 2$, $f(x) = x - 1 - \dfrac{2}{x-2}$

b) On peut écrire f sous la forme $f = v + w$, avec $v(x) = x - 1$ et $w(x) = \dfrac{-2}{x-2}$.

– v, définie par $v(x) = x - 1$, est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$.

– On peut écrire w sous la forme : $w = -2 \times \dfrac{1}{x-2} = -2 \times \dfrac{1}{g(x)}$.

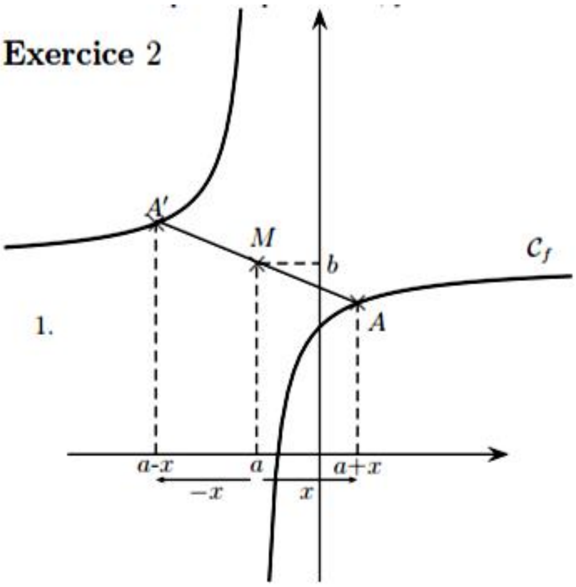
g définie par $g(x) = x - 2$ est une fonction affine croissante sur $]2;+\infty[$, donc $\dfrac{1}{g}$

décroissante sur $]2;+\infty[$, et alors $w = -2 \times \dfrac{1}{g}$ est croissante sur $]2;+\infty[$.

D'après la question 1., $f = v + w$ est donc croissante sur $]2;+\infty[$.

Exercice 2

1.



Soit x tel que $(a+x) \in I$, et $A \in \mathcal{C}_f$ de coordonnées $M\,(a+x, f(a+x))$.
Soit A' le symétrique de A par rapport à $M(a;b)$. L'abscisse de A' est donc $a-x$, et $A' \in \mathcal{C}_f$ si et seulement si l'ordonnée de A' est $y' = f(a-x)$.

Comme A et A' sont symétriques par rapport à M, M est le milieu du segment $[AA']$, et donc, $b = \dfrac{f(a+x)+f(a-x)}{2}$

2. On considère la fonction g définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, par l'expression $g(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$.

a) On applique le résultat précédent avec le point $M(-1;3)$ (soit $a=-1$ et $b=3$).
L'intervalle I est symétrique par rapport à -1 : pour $x \neq 0$, $-1+x \in I$ et $-1-x \in I$.
De plus, pour tout $x \neq 0$, $g(a+x)+g(a-x) = g(-1+x)+g(-1-x) = \dfrac{3(-1+x)+2}{(-1+x)+1} + \dfrac{3(-1-x)+2}{(-1-x)+1} = \dfrac{-1+3x}{x} + \dfrac{-1-3x}{-x} = \dfrac{6x}{x} = 6$.

Ainsi, $\dfrac{g(a+x)+g(a-x)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$, ce qui montre que $M(-1;3)$ est bien centre de symétrie pour $\mathcal{C}_g$.

b) Pour tout $x > -1$, $3 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{3(x+1)}{x+1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{3x+2}{x+1} = g(x)$.

Ainsi, on peut écrire $g = 3 - \dfrac{1}{u}$, où u, définie par $u(x) = x+1$ est une fonction affine croissante, donc $\dfrac{1}{u}$ est décroissante, et alors $-\dfrac{1}{u} = -1 \times \dfrac{1}{u}$ est croissante, et finalement $g = -\dfrac{1}{u} + 3$ est croissante sur $]-1;+\infty[$.

c) On peut alors dresser le tableau de variation de g sur $]-1;+\infty[$, et compléter sur $]-\infty;-1[$ par symétrie :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

($\mathcal{C}_g$ est la courbe représentée en début d'exercice dots)

Merci à sakso

Devoir n°3 de Mathématiques

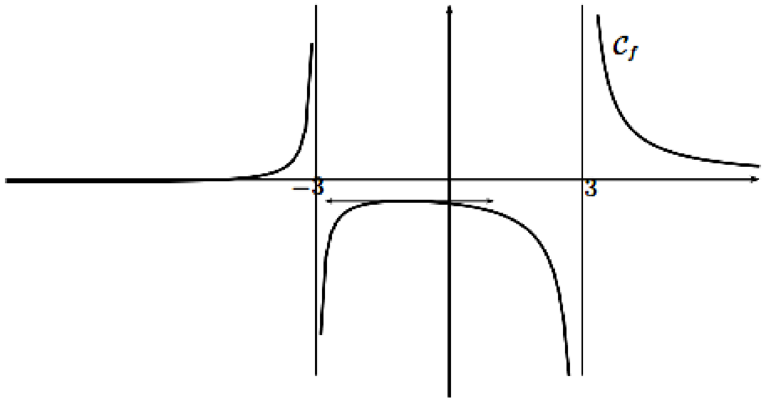
Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+5}{x^2-9}$.

Les fonctions $u : x \mapsto x+5$ et $v : x \mapsto x^2-9$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus $v(x) = x^2 - 9 = 0$ pour $x = 3$ et $x = -3$. La fonction f, quotient des fonctions u et v est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;3\}, f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = -\frac{x^2+10x+9}{(x^2-9)^2}$$

Soit $P(x) = x^2 + 10x + 9$. -1 est une racine évidente de P, et comme le produit des racines est 9, on en déduit que la deuxième racine est 9.

x	$-\infty$		-9		-3		-1		3		$+\infty$
$x^2+10x+9$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x^2-9)^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{-1}{18}$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	



b) Soit $d(x) = g(x) - h(x)$, alors, pour tout $x \neq -2$,

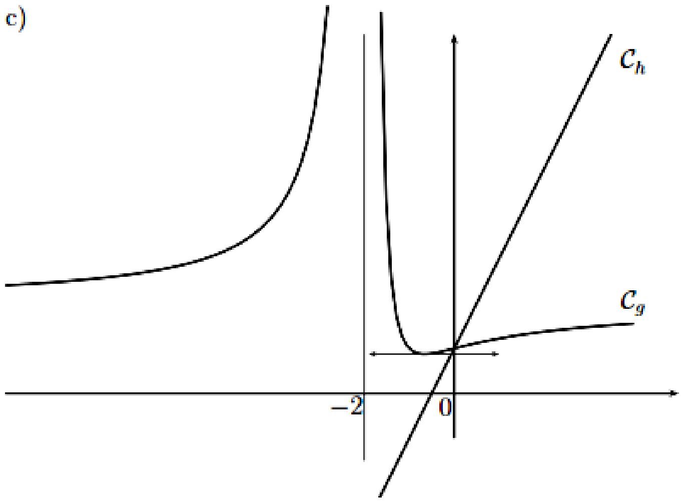
$$d(x) = \frac{2x^2+5x+4-(2x+1)(x+2)^2}{(x+2)^2} = \frac{-2x^3-7x^2-7x}{(x+2)^2} = -x\frac{2x^2+7x+7}{(x+2)^2}$$

Soit $Q(x) = 2x^2 + 7x + 7$. $\Delta = 49 - 56 < 0$: le trinôme n'admet aucune racine réelle.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$Q(x)$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$d(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On en déduit que $\mathcal{C}_g$ est au dessus de $\mathcal{C}_h$ sur $]-\infty;-2[\cup]-2;0[$, et est au dessous sur $]0;+\infty[$. Les deux courbes se coupent une unique fois en $x = 0$.

c)



Exercice 3 Soit $d(x) = 1-\frac{x^2}{2}-\cos x$. d est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme des fonctions $u : x \mapsto 1-\frac{x^2}{2}$ et $v : x \mapsto -\cos x$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d'(x) = -x + \sin x$.

Afin d'étudier le signe de $d'(x)$ on peut la dériver :
$(d')'(x) = d''(x) = -1 + \cos x$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \leq 1$, et donc, $d''(x) \leq 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$d''(x)$		$-$	
$d'(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$
$d'(x)$	$+$	0	$-$
$d(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

On en déduit que $d(x) \leq 0$ pour tout réel x, et donc que $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$.

Devoir n°4 de Mathématiques

Exercice 1

1. a. $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f'(1) = -\frac{3}{2}$, $f'(2) = 0$

   b.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2. Soit h la fonction définie par $h(x) = [f(x)]^2$.

   a. Pour tout x réel, $h'(x) = 2f'(x)f(x)$.

   b.

x	0		1		2
$f'(x)$	0	$-$		$-$	0
$f(x)$		$+$	0	$-$	
$h'(x) = 2f'(x)f(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$h(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

3. On a de plus, $g(2,1) \simeq -1,03 < 0$ et $g(2,2) \simeq 0,05 > 0$, d'où on en déduit l'encadrement $2,1 < \alpha < 2,2$.
4. On en déduit le tableau de signe de $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$g(x)$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	‖	↗	0	↘	‖	↘	$f(\alpha)$	↗	

C. ***Tangente.***

La tangente (T) à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 a pour équation : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

avec $f'(2) = \dfrac{2g(2)}{(2^2-1)^2} = -\dfrac{4}{9}$, et $f(2) = \dfrac{16}{3}$, soit $y = -\dfrac{4}{9}(x-2) + \dfrac{16}{3} = -\dfrac{4}{9}x + \dfrac{56}{9}$

Exercice 3 Il suffit de développer :

$$\begin{aligned}(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 &= \cos^2 x + 2\cos x \times \sin x + \sin^2 x \\ &\quad + \cos^2 x - 2\cos x \times \sin x + \sin^2 x \\ &= 2(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= 2 \quad \text{car} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{pour tout réel } x\end{aligned}$$

Exercice 4

1. $$\begin{aligned} A(x) &= \sin(-x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= -\sin(x) - \sin(x) + \cos(x) + \cos(x) \\ &= -2\sin(x) + 2\cos(x)\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} B(x) &= \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos(3\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ &= \sin(x) - \sin(x) - \cos(x) + \cos(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

Exercice 5 Dans $\mathbb{R}$, $\cos(3x) = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \iff \begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{2\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Devoir n°5 de Mathématiques

Exercice 1 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 5x - 5 \text{ et, } g(x) = 2x^2 + 2x + 5$$

On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.

1) On a $f(2) = 8 + 24 - 10 - 5 = 17$, et $g(2) = 8 + 4 + 5 = 17$.
   Ainsi, $f(2) = g(2) = 17$, et $\underline{A(2;17) \in \mathcal{C}_f \cup \mathcal{C}_g}$.

2) Soit $M(x;y)$ un point de $\mathcal{C}_f \cup \mathcal{C}_g$.
   Alors, $y = f(x) = g(x)$, soit aussi, $x^3+6x^2-5x-5 = 2x^2+2x+5$, ou encore $x^3+4x^2-7x-10 = 0$.
   D'après la question précédente, on sait que $x = 2$ est une solution de cette équation, et donc que ce polynôme du troisième degré se factorise par $(x-2)$:
   $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x-2)(x^2 + 6x + 5)$.
   Le discriminant du trinôme du second degré est $\Delta = 36 - 20 = 16 = 4^2$. Celui-ci admet donc deux racines réelles distinctes : $x_1 = -1$ et $x_2 = -5$.
   On a de plus, $f(-1) = g(-1) = 5$ et $f(-5) = g(-5) = 45$.
   Les deux courbes ont donc trois points d'intersection : $A(2;17)$, $B(-1;5)$ et $C(-5;45)$.

Exercice 2 La parabole coupe la droite (Δ_m) aux éventuels points d'abscisse x tel que $f(x) = mx$, soit $9x^2 + 3x + 1 = mx$, ou encore $9x^2 + (3-m)x + 1 = 0$.

La parabole coupe cette droite en un unique point si et seulement si le discriminant de cette équation est nul : $\Delta = (3-m)^2 - 4 \times 9 = 0$, soit $m^2 - 6m + 9 - 36 = m^2 - 6m - 27 = 0$.

Le discriminant de cette dernière équation est $\Delta' = 36 + 4 \times 27 = 144 = 12^2$. Elle admet donc deux solutions réelles distinctes $m = \frac{6-12}{2} = -3$ et $m = \frac{6+12}{2} = 9$.

Finalement, la parabole coupe (Δ_m) en un seul point pour $\underline{m = -3}$ et $\underline{m = 9}$.

Exercice 3

1) 1) $\overrightarrow{AB}(-2;2)$, $\overrightarrow{AC}(-5;-1)$, donc, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 10-2 = 8$, et,

b) $AB = \sqrt{(-2)^2+2^2} = 2\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{26}$.

c) On en déduit que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\sqrt{2}\times\sqrt{26}\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, d'où, $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \dfrac{8}{4\sqrt{13}}$, et donc

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \simeq 56,3°$ ou $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \simeq -56,3°$

2) Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour rayon $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{2}$, et a pour centre le point I milieu de $[AB]$, qui a pour coordonnées : $I(4;3)$. Ce cercle est donc l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que : $IM^2 = R^2$, soit l'équation $(x-4)^2+(y-3)^2 = R^2 = 2$.

3) La hauteur issue de A du triangle ABC est la droite qui passe par A et normale au vecteur $\overrightarrow{CB}$, avec $\overrightarrow{CB}(3;3)$.

Ainsi, cette hauteur est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$, soit l'équation : $3(x-5)+3(y-2) = 0$, ou encore, $x+y=7$.

Exercice 4

1) a) Soit $H\in(AB)$, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires, et comme $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = 2$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens, d'où, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB\times AH = 2$.

On a alors $AH = \dfrac{2}{AB} = 1$, d'où, $H = I$.

b) Pour tout point M on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = 2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$,

et donc, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 2 \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = 0$: l'ensemble des points M recherché est la droite (OH), perpendicaulaire à (AB) passant par $H = I$.

2) a) Pour tout point M, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) = MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$.

Or, comme I est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} = 0$, et $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = -IA^2 = -1$, d'où, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2-1$.

b) D'après ce qui précède, on a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2-1 = 4$, d'où, $MI^2 = 5$, soit $MI = \sqrt{5}$: l'ensemble des points M recherchés est donc le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.

Or, $IC = \sqrt{IB^2+BC^2} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$, donc le point C est sur ce cercle, et donc l'ensemble des points M est le cercle de centre I et passant par C.

Exercice 5

1) D'après la relation de Chasles, $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GA}+3\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right) = 5\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AB}$, et donc

$2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

On en déduit que $G\in[AB]$, et donc que $AG = \dfrac{3}{5}AB = 3$ et que $BG = \dfrac{2}{5}AB = 2$.

2) On peut faire intervenir le point G dans cette relation :

$$\begin{aligned} 2MA^2+3MB^2 &= 2\overrightarrow{MA}^2+3\overrightarrow{MB}^2 = 2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2 \\ &= 5MG^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\underbrace{\left(2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}\right)}_{=\overrightarrow{0}}+2GA^2+3GB^2 = 5MG^2+30 \end{aligned}$$

D'où, $2MA^2+3MB^2 = 50 \iff MG = 2$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est le cercle de centre G et de rayon 2.

Exercice 6 Deux méthodes (au moins) sont possibles :

1ère méthode.

$$\begin{aligned} & (x-2)(x+4)+(y-3)(y-1) = 6 \\ \iff & x^2+2x+y^2-4y-8+3 = 6 \\ \iff & (x+1)^2+(y-2)^2 = 16 \\ \iff & \Omega M^2 = 16 = 4^2 \end{aligned}$$

Devoir n°6 de Mathématiques

Exercice 1 La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f coupe l'axe des abscisses aux points (s'ils existent) d'abscisse x tels que $f(x) = 0$.

f est une fonction trinôme du second degré, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Si a et c sont de signes contraires, alors, $ac < 0$, et donc $-4ac > 0$, d'où, $\Delta = b^2 - 4ac > b^2 > 0$ et le trinôme f admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2. En d'autres termes $f(x_1) = f(x_2) = 0$, et ainsi $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points distincts.

Exercice 2

1) La parabole coupe la droite $(\mathcal{D}_p)$ aux éventuels points d'abscisse x tel que $f(x) = x + p$, soit $9x^2 + 3x + 1 = x + p$, ou encore $9x^2 + 2x + 1 - p = 0$.
   Le discriminant de cette équation du second degré est : $\Delta = 4 - 4 \times 9 \times (1 - p) = 4(-8 + 9p)$.
   La parabole coupe cette droite en un seul point si et seulement si $\Delta = 0$, soit $-8 + 9p = 0$, et donc si et seulement si $\underline{p = \frac{8}{9}}$.
   La parabole coupe cette droite en deux points distincts si et seulement si $\Delta > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\underline{p > \frac{8}{9}}$.

2) La parabole coupe la droite (Δ_m) aux éventuels points d'abscisse x tel que $f(x) = mx$, soit $9x^2 + 3x + 1 = mx$, ou encore $9x^2 + (3 - m)x + 1 = 0$.
   La parabole coupe cette droite en un unique point si et seulement si le discriminant de cette équation est nul : $\Delta = (3 - m)^2 - 4 \times 9 = 0$, soit $m^2 - 6m + 9 - 36 = m^2 - 6m - 27 = 0$.
   Le discriminant de cette dernière équation est $\Delta' = 36 + 4 \times 27 = 144 = 12^2$. Elle admet donc deux solutions réelles distinctes $m = \frac{6-12}{2} = -3$ et $m = \frac{6+12}{2} = 9$.
   Finalement, la parabole coupe (Δ_m) en un seul point pour $\underline{m = -3}$ et $\underline{m = 9}$.

Merci à sakso

Exercice 3

1) Comme N est le symétrique de M par rapport à (AC), $(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CN})$ et de même, $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CP}) = (\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CB})$.

2) D'après la relation de Chasles (on essaie de faire intervenir les angles de la question précédente),

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CP}) &= (\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CP}) \\ &= (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CN}) + \frac{\pi}{4} + (\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CB})\end{aligned}$$

soit, en utilisant à nouveau la relation de Chasles : $(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CP}) = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

On en conclut donc que le triangle CMP est rectangle en C.

Exercice 4

1) Comme le pentagone est régulier :

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \frac{2\pi}{5}\,,\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right) = \frac{4\pi}{5}\,,\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right) = \frac{6\pi}{5}\,,\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}\right) = \frac{8\pi}{5}\,.$$

2) Les coordonnées de chaque point sont les cosinus et sinus des angles correspondants : $A(1,0)$, $B\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$, $C\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$, $D\left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right)$, $E\left(\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)\right)$.

3) D'après ce qui précède, le vecteur $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$ a pour abscisse $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$ et pour ordonnée $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.

Exercice 5

1) Pour $x \in I$, $\alpha x + \beta + \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{\alpha x^2 + (-\alpha+\beta)x + 2 - \beta}{x-1}$

et donc, on doit avoir

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ -\alpha + \beta = 2 \\ 2 - \beta = 1 \end{cases} \quad \text{soit, } \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases} \quad \text{et donc, pour tout } x \in I\ ,\ f(x) = -x + 1 + \frac{2}{x-1}$$

2) On peut écrire f comme la somme $f = u + (-2v)$ ou $u(x) = -x + 1$ est une fonction affine décroissante, et $v(x) = \frac{1}{x-1}$ est la composée de la fonction inverse qui est décroissante et de la fonction affine $x \mapsto x - 1$ qui est croissante. Ainsi, v est croissante, donc $-2v$ est décroissante, et donc, la fonction f est décroissante.

3) a) Pour $x \in I$, le point $P \in \mathcal{C}_f$ a pour coordonnées $(x; f(x))$, tandis que le point $Q \in (\Delta)$ a pour coordonnées $(x; -x+1)$.

La distance PQ est donc : $PQ = f(x) - (-x+1) = \dfrac{2}{x-1}$.

b) Pour $x \in I$, c'est-à-dire $x > 1$, $x - 1 > 0$, et donc le point P est au dessus du point Q. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de Δ.

c) Lorsque x devient (très) grand, $x - 1$ devient aussi grand, et donc $PQ = \dfrac{2}{x-1}$ devient (très) petit.

Cela signifie, géométriquement, que lorsque x devient grand, "à la limite lorsque $x \to \infty$", la courbe $\mathcal{C}_f$ se confond avec la droite Δ.

Merci à sakso